ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2024, № 6, с. 205–217

УДК 539.3

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ВТОРОГО ТИПА В ЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕДАХ

Ю. Н. Радаев[a, *]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН , Москва, Россия*

**e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com*

Поступила в редакцию 30.09.2024 г.
После доработки 06.10.2024 г.
Принята к публикации 07.10.2024 г.

В представляемой работе механика микрополярных упругих тел распространяется на более общие термоупругие среды с целью учета влияния температуры на их механическое поведение. Поскольку термоупругая микрополярная среда проводит тепло, то возникает необходимость включения того или иного механизма теплопроводности в основные соотношения микрополярной термоупругости. Выполнено построение модели термоупругого микрополярного тела CGNII на основе волнового принципа передачи тепла (т.е. теплопроводности второго типа), характеризующейся нулевым внутренним производством энтропии. Все основные уравнения развиваемой теории выводятся из конвенциональных уравнений баланса механики континуума и фундаментального термодинамического неравенства. Определяющие уравнения линейного анизотропного термоупругого микрополярного тела CGNII конструируются с помощью квадратичной энергетической формы. Подробно исследуется случай гемитропной среды, когда компоненты одного из определяющих псевдотензоров четвертого ранга оказываются чувствительными к зеркальным отражениям трехмерного пространства. В терминах трансляционных перемещений, микроповоротов и температурного смещения получена замкнутая система дифференциальных уравнений, предназначенная для решения прикладных задач термомеханики, связанных с волновой передачей тепла в микрополярных упругих средах.

Ключевые слова: микрополярное тело, теплопроводность, анизотропия, гемитропия, свободная энергия, определяющий тензор, энтропия, производство энтропии, CGNII термоупругость

DOI: 10.31857/S1026351924060126, **EDN:** TXGLQL

1. Предварительные сведения и вводные замечания. Современные микрополярные модели сплошных деформируемых тел весьма часто реализуются на представлении о микроповоротах (микровращениях), присущих каждому элементу микрополярного континуума. Указанное понятие унаследовано из оригинальной работы E. Cosserat и F. Cosserat (1909 г., [1]) и обеспечивает наличие дополнительных степеней свободы при деформации сплошной среды. Два кинематически независимых векторных поля, характеризующих деформацию микрополярного континуума (поле трансляционных перемещений и поле микроповоротов (или спинорных перемещений)), вводятся в механику микрополярного упругого тела на основании хорошо известных результатов классической аналитической механики, касающихся перемещений свободных абсолютно твердых тел в трехмерном пространстве. Эти результаты принадлежат (или приписываются) Шалю (M. Chasles) и выступают как теоретический фундамент исследований движений абсолютно твердых тел в трехмерном пространстве. Существенные для механики микрополярных тел положения кинематики абсолютно твердых тел и используемая при этом специальная терминология разъясняются в [2]. В этой же работе можно найти указания на литературные первоисточники.

Соответствующая концепции микроповоротов теория микрополярного термоупругого тела получила свой более или менее законченный вид в ряде известных публикаций, относящихся к 50–60-м гг. прошлого века. Все они были “просуммированы” (иногда, правда, без необходимой в целом ряде случаев полноты) в более поздней монографии В. Новацкого [3], которая к настоящему времени считается устаревшей[1], особенно в плане описания связанных термоупругих неизотропных сред (и прежде всего гемитропных) и включения нестандартных механизмов передачи тепла: речь здесь безусловно идет о моделях теплопроводности микрополярных упругих тел второго (CGNII) и третьего типов (CGNIII). Первая из них появилась в работе [4] и в дальнейшем получила широкое распространение в механике термоупругих тел; указания на эту модель узнаваемы в современной научной литературе по сокращению GNII.

Заметим, что теплопроводность второго типа, т.е. в форме незатухающих, распространяющихся с конечной скоростью термоупругих волн, представляет собой наиболее интересный вариант термомеханики микрополярных тел, поскольку в этом случае процесс распространения тепла не сопровождается внутренним производством энтропии и затуханием термоупругой волны в процессе ее распространения.

В настоящей работе выполнено построение теоретической модели второго типа (type-II) анизотропного теплопроводящего микрополярного упругого тела (CGNII micropolar thermoelasticity). В качестве примера в терминах трансляционных перемещений, микроповоротов и температурного смещения получена замкнутая система дифференциальных уравнений гемитропной микрополярной термоупругости, вызывающая значительный интерес с точки зрения исследования прикладных проблем.

[1] Ценность монографии В. Новацкого существенно снижается наличием большого количества опечаток в основных уравнениях и незавершенностью изложения, например в случае исследования плоских гармонических термоупругих волн, выступающих как связка температурного инкремента, трансляционных перемещений и микровращений.

Представляемая работа в значительной степени использует терминологию, обозначения, методы и результаты, изложенные в более ранней статье [5]. Особенно это касается модели микрополярного гемитропного тела, которую удалось развить, не опираясь на представления изотропных тензоров четвертого ранга [6], а привлекая полную систему неприводимых рациональных инвариантов системы трех изотропных определяющих тензоров четвертого ранга. Стоит также отметить, что в указанной статье микрополярная теория упругости была построена исходя из принципа виртуальных перемещений, что позволило трактовать силовые и моментные напряжения как множители Лагранжа, т.е. как силы и пары, возникающие в ответ (и в виде реакции) на наложение на деформируемое тело дополнительных связей, обеспечивающих его полную “заморозку”. Все выше сказанное позволяет рассматривать настоящую публикацию в качестве естественного продолжения и развития исследований, выполненных в работе [5].

Несколько слов следует сказать о псевдотензорных представлениях в термомеханике микрополярных сред. Микрополярная теория упругости гемитропного тела в принципе неразвиваема без привлечения псевдовектора микроповоротов нечетного алгебраического веса (обычно +1 или −1) и, как следствие, определяющего псевдотензора четвертого ранга нечетного алгебраического веса. Лишь на заключительном этапе с помощью степеней псевдотензорных единиц удается устранить *все* без исключения псевдотензорные объекты и в конце концов получить формулировку исключительно в терминах *абсолютных тензоров*. В настоящей работе (так же как и в [5]) псевдотензорные объекты не используются, т.е. неявно предполагается финальный переход к соответствующим абсолютным тензорам во всех уравнениях.

Так же как и в работе [5], изложение с самого начала задумывалось в полностью ковариантной форме, пригодной для произвольной криволинейной координатной системы x^j $(j = 1, 2, 3)$ и наиболее подходящей для решения прикладных задач микрополярной термоупругости.

2. Конвенциональные уравнения баланса в линейной термомеханики микрополярных сред. Как было упомянуто в первом разделе статьи, с микрополярной средой связываются два кинематически независимых векторных поля: u_j – поле трансляционных перемещений и ϕ^k – поле микроповоротов. С помощью этих полей легко конструируется асимметричный тензор деформации

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - e_{ijk}\phi^k, \tag{2.1}$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования, e_{ijk} – альтернирующий тензор (тензор перестановок). Заметим, что определенный таким образом тензор деформации не имеет физической размерности и его одного недостаточно для представления деформации микрополярного тела. Поэтому приходится оперировать с еще одним асимметричным тензором второго ранга – тензором изгиба–кручения:

$$\kappa_{i\cdot}^{\cdot s} = \nabla_i \phi^s. \tag{2.2}$$

В силу своего определения тензор изгиба–кручения обладает физической размерностью кривизны (т.е. обратной длины) и может быть приведен к физически безразмерной форме умножением на характерную микродлину микрополярного тела. Указанная микродлина может быть явно введена в уравнения гемитропной микрополярной упругости так, как это сделано в работе [5].

Следуя [5], определим асимметричные тензоры силовых и моментных напряжений t^{ik} и $\mu^{i\cdot}_{\cdot k}$ и с их помощью запишем следующие уравнения баланса (количества движения и момента количества движения):

$$\begin{gathered}\nabla_i t^{ik} = -\rho(f^k - \ddot{u}^k),\\ \nabla_i \mu^{i\cdot}_{\cdot k} + e_{ksl}t^{[sl]} = -\rho(l_k - \Im\ddot{\phi}_k),\end{gathered} \tag{2.3}$$

где ρ – плотность, f^k – массовые силы, l_k – массовые пары, $\Im$ – коэффициент микроинерции. Здесь и ниже точкой обозначается частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных переменных:

$$\dot{A} = \partial_{.}A.$$

Рассмотрим далее уравнение баланса внутренней энергии:

$$\rho\dot{u} = t^{is}\dot{\epsilon}_{is} + \mu^{i\cdot}_{\cdot s}\dot{\kappa}^{\cdot s}_{i\cdot} + \rho q - \nabla_i h^i,$$

где u – плотность внутренней энергии (в расчете на единицу массы), h^k – вектор потока тепла ($h^k n_k dA$ – количество тепла, поступающее в единицу времени через элементарную площадку $n_k dA$), q – лучистое тепло (в расчете на единицу массы).

Наконец приведем уравнение баланса энтропии:

$$\rho\dot{s} = -\nabla_k J^k + \rho\sigma + \rho\xi, \tag{2.4}$$

где s – энтропии (в расчете на единицу массы), J^k – вектор потока энтропии, ξ – внутреннее (неконтролируемое) производство энтропии (в расчете на единицу массы), σ – внешнее (контролируемое) производство энтропии (в расчете на единицу массы).

Термомеханический принцип необратимости гласит, что внутреннее производство энтропии не может быть отрицательным ни для какого термодинамически допустимого процесса, т.е. при отсутствии лучистого притока тепла не допускает стока энтропии:

$$\xi \geq 0. \tag{2.5}$$

3. Свободная энергия и определяющие уравнения микрополярной упругой теплопроводящей среды второго типа (CGNII). Для термоупругих континуумов второго типа вместо термодинамической температуры θ приходится вводить другую термодинамическую переменную состояния – температурное смещение ϑ согласно

$$\dot{\vartheta} = \theta.$$

Свободная энергия Гельмгольца (в расчете на единицу массы) в этом случае выступает как термодинамический потенциал состояния следующего вида:

$$\psi = \overline{\psi}(\partial_{.}\vartheta, \nabla_i\vartheta, \epsilon_{is}, \kappa^{\cdot s}_{i\cdot}).$$

Его отличительной особенностью является явная зависимость от компонент 4-градиента температурного смещения

$$\partial_{\cdot}\vartheta = \partial_4\vartheta, \nabla_i\vartheta,$$

наряду с отсутствием явных вхождений самого температурного смещения.

Энтропия, следовательно, вычисляется как каноническая термодинамическая производная

$$s = -\frac{\partial\overline{\psi}(\partial_{\cdot}\vartheta, \nabla_i\vartheta, \epsilon_{is}, \kappa_{i\cdot}^{\cdot s})}{\partial(\partial_{\cdot}\vartheta)}$$

по специфической составляющей 4-градиента температурного смещения.

Из уравнений баланса внутренней энергии и энтропии легко синтезируется так называемое приведенное уравнение энергии, пока в предварительной форме:

$$-\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + t^{is}\dot{\epsilon}_{is} + \mu_{\cdot s}^{i\cdot}\dot{\kappa}_{i\cdot}^{\cdot s} - J^i\nabla_i\theta + \nabla_i(\theta J^i - h^i) + \rho(q - \theta\sigma) = \rho\theta\xi.$$

Полученное уравнение несколько упрощается, если положить

$$\theta J^i = h^i, \theta\sigma = q,$$

т.е. связать с точностью до термодинамической температуры векторы потока энтропии и потока тепла, а также внешнее производство энтропии с лучистым теплом, поступающим в среду. В результате приходим к окончательным формам приведенного уравнения энергии:

$$-\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + t^{is}\dot{\epsilon}_{is} + \mu_{\cdot s}^{i\cdot}\dot{\kappa}_{i\cdot}^{\cdot s} - \theta^{-1}h^i\nabla_i\theta = \rho\theta\xi,$$

или

$$-\rho(\dot{\overline{\psi}} + \bar{s}\dot{\theta}) + t^{is}\dot{\epsilon}_{is} + \mu_{\cdot s}^{i\cdot}\dot{\kappa}_{i\cdot}^{\cdot s} - \theta^{-1}h^i\nabla_i\theta = \rho\theta\xi. \tag{3.1}$$

С помощью приведенного уравнения энергии (3.1) неравенство необратимости (2.5) приводится к

$$C\dot{\theta} + A^{is}\dot{\epsilon}_{is} + B_{\cdot s}^{i\cdot}\dot{\kappa}_{i\cdot}^{\cdot s} + \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\nabla_k\vartheta}\nabla_k\theta + \theta^{-1}h^i\nabla_i\theta = -\rho\theta\xi \le 0,$$

где введены следующие обозначения:

$$C = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial(\partial_{\cdot}\vartheta)} + \rho\bar{s},$$

$$A^{is} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{is}} - t^{is},$$

$$B_{\cdot s}^{i\cdot} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}} - \mu_{\cdot s}^{i\cdot}.$$

Неравенство (2.5) обязано выполняться для всех термодинамических процессов, что позволяет считать независимыми и произвольными скорости любого термодинамического процесса:

$$\dot{\theta}, \quad \nabla_i\dot{\vartheta} = \nabla_i\theta, \quad \dot{\epsilon}_{is}, \quad \dot{\kappa}_{i\cdot}^{\cdot s}.$$

Поэтому C, A^{is}, $B^{i\cdot}_{\cdot s}$ равны нулю, что сразу приводит к определяющим соотношениям для континуума CGNII:

$$\bar{s} = -\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial(\partial_{\cdot}\vartheta)}, \tag{3.2}$$

$$t^{is} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{is}}, \tag{3.3}$$

$$\mu^{i\cdot}_{\cdot s} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\kappa^{\cdot s}_{i\cdot}}. \tag{3.4}$$

В результате внутреннее производство энтропии вычисляется в виде

$$\rho\theta\xi = -\rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\nabla_k\vartheta}\nabla_k\theta - \theta^{-1}h^i\nabla_i\theta = -\rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\nabla_k\vartheta}\nabla_k\theta - J^i\nabla_i\theta$$

или

$$\rho\theta\xi = -\left(J^k + \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\nabla_k\vartheta}\right)\nabla_k\theta.$$

Таким образом, внутреннее производство энтропии исчезает

$$\xi = 0,$$

если вектор потока энтропии задать следующим определяющим уравнением:

$$J^k = -\rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\nabla_k\vartheta}.$$

4. Анизотропная/гемитропная теплопроводящие микрополярные среды CGNII. Линейная теплопроводящая анизотропная микрополярная среда характеризуется свободной энергией, квадратичной по отношению к отклонениям термодинамических переменных состояния от их значений, наблюдаемых в положении равновесия. В частности, анизотропная микрополярная среда CGNII задается следующим термодинамическим потенциалом состояния:

$$\begin{aligned} 2\rho\overline{\psi} = {} & \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \underset{2}{H}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\kappa^{\cdot s}_{i\cdot}\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \underset{3}{H}^{isl\cdot}_{\cdots m}\epsilon_{is}\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \\ & + \underset{1}{G}^{is}\epsilon_{is}\theta + \underset{2}{G}^{i\cdot}_{\cdot s}\kappa^{\cdot s}_{i\cdot}\theta + F\theta^2 + \\ & + \theta_0^{-1}\Lambda^{is}\nabla_i\vartheta\nabla_s\vartheta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь в целях сокращения записи переменная θ на самом деле обозначает температурный инкремент $\theta \to \theta - \theta_0$, где θ_0 есть отсчетная температура.

Заметим, что определяющие тензоры заведомо удовлетворяют уравнениям симметрии:

$$\underset{1}{H}^{islm} = \underset{1}{H}^{lmis}, \qquad \underset{2}{H}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m} = \underset{2}{H}^{l\cdot i\cdot}_{\cdot m\cdot s}, \qquad \Lambda^{is} = \Lambda^{si}.$$

Опираясь на результаты, полученные в предыдущем разделе работы, находим определяющие уравнения анизотропной микрополярной среды CGNII:

$$t^{is} = \underset{1}{H}^{islm}\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\underset{3}{H}^{isl\cdot}_{\cdots m}\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \frac{1}{2}\underset{1}{G}^{is}\theta,$$

$$\mu^{i\cdot}_{\cdot s} = \underset{2}{H}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\,\kappa^{\cdot m}_{l\cdot} + \frac{1}{2}\underset{3}{H}{}^{lmi\cdot}_{\cdots s}\,\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\,\theta,$$

$$h^i = -\Lambda^{is}\nabla_s\vartheta,$$

$$-2\rho\bar{s} = \underset{1}{G}{}^{is}\,\epsilon_{is} + \underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\,\kappa^{\cdot s}_{i\cdot} + 2F\theta.$$

Подстановка полученных определяющих уравнений в уравнения баланса (2.3) и замена тензора деформации и тензора изгиба–кручения в соответствии с формулами (2.1) и (2.2) дает дифференциальные уравнения движения и распространения тепла для анизотропной микрополярной среды CGNII, сформулированные в терминах вектора трансляционных перемещения и спин-вектора. Поскольку указанные уравнения без труда выписываются, то они здесь не приводятся. Далее рассмотрим своеобразный и практически важный случай гемитропной микрополярной среды, когда три определяющих тензора четвертого ранга в энергетической форме (4.1) имеют компоненты, не чувствительные к поворотам пространственного координатного триэдра, а три тензора второго ранга оказываются шаровыми[2].

Обратим внимание на то обстоятельство, что в энергетической форме (4.1) третий из определяющих тензоров четвертого ранга на самом деле получен из псевдотензора четвертого ранга нечетного алгебраического веса в результате стандартной процедуры перехода от псевдотензорных представлений к абсолютным тензорным. Последние как раз и используются в данной статье, несколько затемняя сущность математического описания микрополярности. Тем не менее определяющий тензор $\underset{3}{H}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}$ в модели гемитропного микрополярного тела сначала появляется как псевдотензор четвертого ранга нечетного веса, компоненты которого чувствительны к зеркальным преобразованиям трехмерного пространства. Такое положение дел обусловлено возможностью описания поворотов в трехмерном пространстве в виде двух псевдовекторов алгебраического веса +1 или −1, а также одного абсолютного вектора нулевого веса:

$$\overset{[-1]}{\phi_l},\ \phi_l \text{ или } \phi^l,\ \overset{[+1]}{\phi^l}.$$

Подробная дискуссия по векторным представлениям как конечных, так и инфинитезимальных поворотов в трехмерном пространстве имеется в статье [7].

Чувствительность компонент одного из определяющих тензоров к зеркальным преобразованиям трехмерного пространства с математической точностью выражает смысл определения гемитропного микрополярного тела как такового, “механические свойства которого зависят от зеркальных симметрий”.

---

[2] Обратим внимание на то, что высказанное только что положение может, если угодно, приниматься в качестве определения, выделяющего среди анизотропных сред именно гемитропные среды. В современной научной литературе гемитропные среды иногда называют полуизотропными, демитропными, изотропными нецентральносимметричными/ацентрическими.

Следуя [6], находим следующие представления гемитропных определяющих тензоров, пригодные для произвольной координатной системы:

$$\underset{1}{H}^{islm} = \underset{1}{a}\, g^{is} g^{lm} + \underset{1}{b}\, g^{il} g^{sm} + \underset{1}{c}\, g^{im} g^{sl},$$

$$\underset{2}{H}^{islm} = \underset{2}{a}\, g^{is} g^{lm} + \underset{2}{b}\, g^{il} g^{sm} + \underset{2}{c}\, g^{im} g^{sl},$$

$$\underset{3}{H}^{islm} = \underset{3}{a}\, g^{is} g^{lm} + \underset{3}{b}\, g^{il} g^{sm} + \underset{3}{c}\, g^{im} g^{sl};$$

$$\underset{1}{G}^{is} = \underset{1}{d}\, g^{is}, \quad \underset{2}{G}^{i\cdot}_{\cdot s} = \underset{2}{d}\, \delta^{i}_{s}, \quad \Lambda^{is} = \Lambda g^{is}.$$

Видно, что определяющие тензоры гемитропной микрополярной среды CGNII выражаются только через метрический тензор, а коэффициенты представляют собой абсолютные скаляры, и даже более того – постоянные, не чувствительные ни к каким преобразованиям координатной системы, которые мы будем называть определяющими постоянными.

Введенные выше определяющие постоянные удобны с алгебраической точки зрения, но не совсем приемлемы в механике деформируемых сред. По этой причине вводятся новые постоянные согласно

$$\underset{1}{a} = 2G\nu(1-2\nu)^{-1}, \qquad \underset{1}{b} = G(1+\mathrm{c}_1), \qquad \underset{1}{c} = G(1-\mathrm{c}_1);$$

$$\underset{2}{a} = 2GL^2\mathrm{c}_3, \qquad \underset{2}{b} = GL^2(1+\mathrm{c}_2), \qquad \underset{2}{c} = GL^2(1-\mathrm{c}_2);$$

$$\underset{3}{a} = 4GL\mathrm{c}_6, \qquad \underset{3}{b} = 2GL(\mathrm{c}_4+\mathrm{c}_5), \qquad \underset{3}{c} = 2GL(\mathrm{c}_4-\mathrm{c}_5);$$

$$\underset{1}{d} = -4G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\overset{*}{\alpha},$$

$$\underset{2}{d} = -4GL^2\overset{*}{\beta},$$

$$F = -\frac{\rho c}{\theta_0}.$$

Поясним, что в данных выше формулах используются стандартные модули термомеханики и “почти” конвенциональные определяющие постоянные, характерные для микрополярных упругих сред:

G – модуль сдвига;

ν – коэффициент Пуассона;

L характеристическая длина микрополярной среды;

$\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \mathrm{c}_3, \mathrm{c}_4, \mathrm{c}_5, \mathrm{c}_6$ – физически безразмерные постоянные;

$\overset{*}{\alpha}$ – коэффициент линейного температурного расширения;

$\overset{*}{\beta}$ – коэффициент температурного искажения;

Λ – характерная скорость теплопроводности;

c – теплоемкость в расчете на единицу массы.

Таким образом, для гемитропной микрополярной среды CGNII можно получить определяющие уравнения вида:

$$t_{is} = G[(1 + c_1)\epsilon_{is} + (1 - c_1)\epsilon_{si} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1} g_{is}\epsilon_{j\cdot}^{\cdot j} +$$

$$+ L(2c_6 g_{is}\kappa_{j\cdot}^{\cdot j} + (c_4 + c_5)\kappa_{is} + (c_4 - c_5)\kappa_{si}) - 2(1 + \nu)(1 - 2\nu)^{-1}\overset{*}{\alpha}\theta g_{is}],$$

$$\mu_{is} = GL^2[(1 + c_2)\kappa_{is} + (1 - c_2)\kappa_{si} + 2c_3 g_{is}\kappa_{j\cdot}^{\cdot j} +$$

$$+ L^{-1}(2c_6 g_{is}\epsilon_{j\cdot}^{\cdot j} + (c_4 + c_5)\epsilon_{is} + (c_4 - c_5)\epsilon_{si}) - 2\overset{*}{\beta}\theta g_{is}],$$

$$h_s = -\Lambda\nabla_s\vartheta.$$

Эти уравнения связывают тензоры силовых и моментных напряжений с тензором деформации, тензором изгиба–кручения и температурным инкрементом. Вектор потока тепла согласно определяющим уравнениям пропорционален антиградиенту температурного смещения.

5. Уравнение распространения тепла в анизотропном/гемитропном микрополярном упругом теле. Уравнение распространения тепла в CGNII континууме представляет наибольший интерес при моделировании волновых механизмов передачи тепла. Поскольку внутреннее производство энтропии в CGNII континууме исчезает, то можно вести речь о волновом механизме теплопроводности в форме распространяющихся незатухающих связанных волн перемещений, микровращений и температуры.

Вывод уравнения распространения тепла начнем с уравнения баланса энтропии (2.4), предварительно заменив в нем физическое поле s на функцию термодинамических переменных состояния $\bar{s}$, вектор потока энтропии – его выражением через вектор потока тепла, а внешнее производство энтропии – через лучистое тепло. Учтем также отсутствие внутреннего производства энтропии, положив $\xi = 0$. Выполняя частное дифференцирование по времени функциональной зависимости для $\bar{s}$, приходим к следующему уравнению:

$$\rho\frac{\partial\bar{s}}{\partial\epsilon_{ij}}\dot{\epsilon}_{ij} + \rho\frac{\partial\bar{s}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot j}}\dot{\kappa}_{i\cdot}^{\cdot j} + \rho\frac{\partial\bar{s}}{\partial\nabla_k\vartheta}\nabla_k\theta + \rho\frac{\partial\bar{s}}{\partial\theta}\dot{\theta} = -\nabla_j(\theta^{-1}h^j) + \theta^{-1}\rho q.$$

Последнее уравнение без труда линеаризуется, в результате чего получаем:

$$\rho\theta_0\dot{\epsilon}_{ij}\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\epsilon_{ij}}\right)_{\epsilon_{lk}=0,\,\kappa_{l\cdot}^{\cdot k}=0,\,\theta=\theta_0} + \rho\theta_0\dot{\kappa}_{i\cdot}^{\cdot j}\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot j}}\right)_{\epsilon_{lk}=0,\,\kappa_{l\cdot}^{\cdot k}=0,\,\theta=\theta_0} +$$

$$+ \rho\theta_0\dot{\theta}\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\theta}\right)_{\epsilon_{lk}=0,\,\kappa_{l\cdot}^{\cdot k}=0,\,\theta=\theta_0} = \Lambda^{js}\nabla_j\nabla_s\vartheta + \rho q.$$

Линеаризованное уравнение баланса энтропии включает несколько термодинамических производных, для которых разумно принять следующие сокращенные обозначения:

$$\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\epsilon_{ij}}\right)_{\epsilon_{lk}=0,\,\kappa_{l\cdot}^{\cdot k}=0,\,\theta=\theta_0} = \mathrm{g}^{ij},\quad \left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\kappa_{i\cdot}^{\cdot j}}\right)_{\epsilon_{lk}=0,\,\kappa_{l\cdot}^{\cdot k}=0,\,\theta=\theta_0} = \mathrm{k}_{\cdot j}^{i\cdot},$$

$$\left(\frac{\partial\bar{s}}{\partial\theta}\right)_{\epsilon_{lk}=0,\,\kappa_{l\cdot}^{\cdot k}=0,\,\theta=\theta_0} = \frac{c}{\theta_0}.$$

После этого линейное уравнение баланса энтропии приобретает форму:

$$-\Lambda^{js}\nabla_j\nabla_s\vartheta = -\rho\theta_0(g^{ij}\dot{\epsilon}_{ij} + k^{i\cdot}_{\cdot j}\dot{\kappa}^{\cdot j}_{i\cdot} + \theta_0^{-1}c\dot{\theta}) + \rho q. \tag{5.1}$$

Собственно, это уравнение и следует, как это принято в термомеханике континуума, трактовать как уравнение теплопроводоности для линейной *анизотропной* термоупругой микрополярной среды CGNII. По существу же оно представляет собой линеаризованное уравнение баланса энтропии.

Заметим, что на основании (3.2) и (4.1) будут справедливы равенства:

$$\rho g^{ij} = -\frac{1}{2}\underset{1}{G}^{ij}, \quad \rho k^{i\cdot}_{\cdot j} = -\frac{1}{2}\underset{2}{G}^{i\cdot}_{\cdot j}.$$

Уравнение распространения тепла (1) упрощается в гемитропном случае. Поскольку для гемитропной среды

$$\rho g^{ij} = -\frac{1}{2}\underset{1}{G}^{ij} = -\frac{1}{2}\underset{1}{d}\, g^{ij}, \quad \rho k^{i\cdot}_{\cdot j} = -\frac{1}{2}\underset{2}{G}^{i\cdot}_{\cdot j} = -\frac{1}{2}\underset{2}{d}\,\delta^i_j, \quad \Lambda^{js} = \Lambda g^{js},$$

то вместо (5.1) имеем:

$$\frac{\rho c}{\Lambda}\partial_{\cdot}\theta = \nabla^i\nabla_i\vartheta + \frac{\theta_0}{2\Lambda}(\underset{1}{d}\,\partial_{\cdot}\epsilon^{\cdot j}_{j\cdot} + \underset{2}{d}\,\partial_{\cdot}\kappa^{\cdot j}_{j\cdot}) + \frac{\rho q}{\Lambda},$$

или

$$\frac{\rho c}{\Lambda}\ddot{\vartheta} = \nabla^i\nabla_i\vartheta + \frac{\theta_0}{2\Lambda}(\underset{1}{d}\,\nabla_j\dot{u}^j + \underset{2}{d}\,\nabla_j\dot{\phi}^j) + \frac{\rho q}{\Lambda}. \tag{5.2}$$

Нетрудно видеть, что "термическая" главная часть уравнения распространения тепла (5.2) сводится к

$$\nabla^i\nabla_i\vartheta - \frac{\rho c}{\Lambda}\ddot{\vartheta},$$

что при условии $\Lambda > 0$ обеспечивает гиперболичность процессов теплопроводности, т.е. их волновую природу. Очевидно, что уравнение теплопроводности (5.2) не может исследоваться отдельно: оно, как хорошо видно, связывается с полями трансляционных и спинорных перемещений, поскольку включает пространственные градиенты их скоростей.

В изотропном случае уравнение теплопроводности CGNII примет наиболее простую форму из всех рассмотренных ранее:

$$\frac{\rho c}{\Lambda}\partial^2_{\cdot\cdot}\vartheta = \nabla^i\nabla_i\vartheta + \frac{\theta_0}{2\Lambda}\underset{1}{d}\,\nabla_j\partial_{\cdot}u^j + \frac{\rho q}{\Lambda},$$

или в несколько более развернутом виде:

$$\frac{\rho c}{\Lambda}\partial^2_{\cdot\cdot}\vartheta = \nabla^i\nabla_i\vartheta - \frac{2\theta_0}{\Lambda}G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\overset{*}{\alpha}\nabla_j\partial_{\cdot}u^j + \frac{\rho q}{\Lambda}.$$

В него уже не будут входить микроповороты и характеристическая микродлина L; "термическая" главная часть совпадает с таковой для гемитропной микрополярной среды.

6. Заключительные замечания. Изложенные в предыдущих разделах работы результаты дают возможность сформулировать замкнутую систему дифференциальных уравнений термоупругого континуума CGNII с волновым механизмом передачи тепла. Ограничиваясь моделью гемитропной среды, получим следующую систему связанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$
\begin{cases}
G(1+\mathrm{c}_1)\nabla\cdot\nabla\mathbf{u} + G(1-\mathrm{c}_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + GL(\mathrm{c}_4+\mathrm{c}_5)\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\phi} + \\
\quad + GL(\mathrm{c}_4-\mathrm{c}_5+2\mathrm{c}_6)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi} + 2G\mathrm{c}_1\nabla\times\boldsymbol{\phi} - 2G(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}\overset{*}{\alpha}\nabla\dot{\vartheta} = -\rho(\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{u}}), \\
GL(\mathrm{c}_4+\mathrm{c}_5)\nabla\cdot\nabla\mathbf{u} + GL(\mathrm{c}_4-\mathrm{c}_5+2\mathrm{c}_6)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + 2G\mathrm{c}_1\nabla\times\mathbf{u} + GL^2(1+\mathrm{c}_2)\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{\phi} + \\
\quad + GL^2(1-\mathrm{c}_2+2\mathrm{c}_3)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi} + 4GL\mathrm{c}_5\nabla\times\boldsymbol{\phi} - 4G\mathrm{c}_1\boldsymbol{\phi} - 2GL^2\overset{*}{\beta}\nabla\dot{\vartheta} = -\rho(\mathbf{l}-\Im\ddot{\boldsymbol{\phi}}), \\
\dfrac{\rho c}{\Lambda}\ddot{\vartheta} = \nabla\cdot\nabla\vartheta - \dfrac{2G\theta_0}{\Lambda}\left(\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\overset{*}{\alpha}\nabla\cdot\dot{\mathbf{u}} + L^2\overset{*}{\beta}\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}}\right) + \dfrac{\rho q}{\Lambda}.
\end{cases}
$$

Уравнение распространения тепла в гемитропном случае (в отличии от изотропного) включает дивергенцию скоростей микроповоротов

$$\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}},$$

правда, с коэффициентом, имеющим второй порядок малости по характеристической микродлине L. Следовательно, гемитропное термоупругое CGNII тело выступает как наиболее простое из всего спектра анизотропных тел, процесс передачи тепла в котором в явном виде зависит от поля скоростей микроповоротов. Неявноф скорости микроповоротов влияют на теплопроводность из-за связанности дифференциальных уравнений движения (двух первых векторных уравнения в данной выше системе) с пространственным градиентом скорости температурного смещения. То же самое справедливо и в случае гемитропного термоупругого тела CGNI (см., например, [3]), передача тепла в котором реализуется стандартным механизмом — законом теплопроводности Фурье.

Постановка прикладных задач подразумевает формулировку граничных условий. С этой целью приведем формулы для векторов силовых t_s и моментных m_s напряжений в гемитропном теле, действующих на двумерный элемент площади, ортогональный единичному вектору n^j:

$$
\begin{aligned}
t_s = n^i t_{is} = G[&(1+\mathrm{c}_1)(n^i\nabla_i)u_s + (1-\mathrm{c}_1)n^i\nabla_s u_i + 2\nu(1-2\nu)^{-1}n_s\nabla_k u^k + 2\mathrm{c}_1 e_{sil}n^i\phi^l + \\
&+ 2L(\mathrm{c}_6 n_s\nabla_l\phi^l + \frac{\mathrm{c}_4+\mathrm{c}_5}{2}(n^i\nabla_i)\phi_s + \frac{\mathrm{c}_4-\mathrm{c}_5}{2}n^i\nabla_s\phi_i) - 2(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}\overset{*}{\alpha}\theta n_s],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_s = n^i\mu_{is} = GL^2[&(1+\mathrm{c}_2)(n^i\nabla_i)\phi_s + (1-\mathrm{c}_2)n^i\nabla_s\phi_i + 2\mathrm{c}_3 n_s\nabla_l\phi^l + \\
&+ 2L^{-1}(\mathrm{c}_6 n_s\nabla_l u^l + \frac{\mathrm{c}_4+\mathrm{c}_5}{2}(n^i\nabla_i)u_s + \frac{\mathrm{c}_4-\mathrm{c}_5}{2}n^i\nabla_s u_i + \mathrm{c}_5 e_{sil}n^i\phi^l) - 2\overset{*}{\beta}\theta n_s].
\end{aligned}
$$

Эти уравнения допускают дальнейшие преобразования, если воспользоваться формулами:

$$n^i\nabla_s u_i = (n^i\nabla_i)u_s + e_{sij}e^{jkl}n^i\nabla_k u_l,$$

$$n^i\nabla_s\phi_i = (n^i\nabla_i)\phi_s + e_{sij}e^{jkl}n^i\nabla_k\phi_l.$$

В итоге получим следующие представления для векторов $\mathbf{t}$ и $\mathbf{m}$:

$$\begin{cases} G^{-1}\mathbf{t} = 2(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{u} + (1-c_1)\mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + 2\nu(1-2\nu)^{-1}\mathbf{n}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + 2c_1\mathbf{n}\times\boldsymbol{\phi} + \\ \qquad + 2Lc_6\mathbf{n}(\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}) + 2Lc_4(\mathbf{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{\phi} + L(c_4-c_5)\mathbf{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{\phi}) - 2(1+\nu)(1-2\nu)^{-1}\overset{*}{\alpha}\theta\mathbf{n}, \\ (GL)^{-1}\mathbf{m} = 2c_4(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{u} + (c_4-c_5)\mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + 2c_6\mathbf{n}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + 2c_5\mathbf{n}\times\boldsymbol{\phi} + \\ \qquad + 2Lc_3\mathbf{n}(\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}) + 2L(\mathbf{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{\phi} + L(1-c_2)\mathbf{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{\phi}) - 2L\overset{*}{\beta}\theta\mathbf{n}, \end{cases}$$

из которых непосредственно можно заключить, что вектор $\mathbf{t}$ будет “не мал” даже при малых микродлинах L, а вектор $\mathbf{m}$ имеет, вообще говоря, первый порядок малости по отношению к микродлине (и, кроме того, дополнительно корректируется членами второго порядка малости по L).

Работа выполнена по теме госзадания (госрегистрация 124012500437-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 p.
2. *Radayev Y.N.* Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids // Mech. Solids. 2023. V. 58. № 5. P. 1517–1527. https://doi.org/10.3103/S0025654423700206
3. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt, 1986. viii+383 p.
4. *Green A.E, Naghdi P.M.* Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. V. 31. P. 189–208. http://doi.org/10.1007/BF00044969
5. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. 2018. Т. 22. № 3. С. 504–517. http://doi.org/10.14498/vsgtu1635
6. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge, Cambridge University Press, 1969. VII+93 p.
7. *Radayev Y.N.* Two-point rotations in geometry of finite deformations. In: Altenbach H., Mkhitaryan S.M., Hakobyan V., Sahakyan A.V. (eds) Solid Mechanics. Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials. V. 185. Springer, Cham, 2023. P. 275–283. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_20

TYPE-II THERMOELASTICITY OF LINEAR ANISOTROPIC MICROPOLAR MEDIA

Yu. N. Radayev[a, *]

[a] *Institute for Problems in Mechanics of RAS, Leading Researcher, Moscow, Russia*
**e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com*

Abstract. In this paper, the mechanics of micropolar elastic solids is extendded to more general thermoelastic media in order to take account of the effect of temperature on their states and mechanical behavior. Since a thermoelastic micropolar medium conducts heat, it is required to include one or another mechanism of thermal conductivity in the basic equations of micropolar thermoelasticity. A model of thermoelastic micropolar medium CGNII is developed on ground of the wave principle of heat transfer (i.e., thermal conductivity of the second type known from previous discussions by Green and Naghdi), characterized by zero internal entropy production. All the basic equations of the theory presented in this study are derived from the conventional equations of balance of continuum mechanics and the fundamental thermodynamic inequality. Constitutive equations for a linear anisotropic thermoelastic micropolar medium (CGNII) are obtained by using a quadratic energy form for the Helmholtz free energy. Special attention is paid to hemitropic micropolar medium, when the components of one of the fourth rank constitutive pseudotensors demonstrate sensitivity to mirror reflections of three-dimensional space. A closed system of coupled differential equations is given in terms of translational displacements, microrotations and temperature displacement. It is important since can be used in formulations of applied problems of thermomechanics regarding to the wave heat transfer mechanism in micropolar elastic media.

Keywords: micropolar solid, heat conduction, anisotropy, hemitropy, free energy, constitutive tensor, entropy, entropy production, CGNII thermoelasticity

REFERENCES:

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Herman et Fils, Paris, 1909. vi+226 pp.
2. *Radayev Y.N.* Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids // Mech. of Solids. 2023. V. 58. N. 5. P. 1517–1527. https://doi.org/10.3103/S0025654423700206
3. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt, 1986. viii+383 pp.
4. *Green A.E, Naghdi P.M.* Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. V. 31. P. 189–208.
5. *Radayev Y.N.* The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories. Journal of Samara State Technical University. Ser. Physics and Mathematics. 2018. V. 22. N. 3. P. 504–517 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1635
6. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge, Cambridge University Press, 1969. VII+93 pp.
7. *Radayev Y.N.* Two-Point Rotations in Geometry of Finite Deformations. In: Altenbach H., Mkhitaryan S.M., Hakobyan V., Sahakyan A.V. (eds) Solid Mechanics. Theory of Elasticity and Creep. Advanced Structured Materials. V. 185. Springer, Cham, 2023. P. 275–283.