

УДК 533.2; 534.12

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА ЧАСТОТ И КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ПОДВИЖНО ЗАДЕЛАННОЙ ПО КРАЮ, В РАЗНЫХ СРЕДАХ

© 2024 г. К. Б. Сабитов^{а, *}, А. Г. Хакимов^{а, **}

^аИнститут механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

*e-mail: sabitov_fmfm@mail.ru,

**e-mail: hakimov@anrb.ru

Поступила в редакцию 19.06.2024 г.

После доработки 29.07.2024 г.

Принята к публикации 30.07.2024 г.

Определяется спектр частот и формы изгибных колебаний прямоугольной пластины, контактирующей с жидкостью или газом. Дается вывод выражения распределенной поперечной нагрузки на пластину, подвижно заделанной по контуру. Поверхности пластины контактируют со средой разной плотности и давления. Среда может быть сжимаемой в процессе деформации поверхности и несжимаемой. Определяется влияние на изгиб взаимодействия среднего давления и изменения кривизны срединной поверхности, а также присоединенной массы газовой среды.

Ключевые слова: тонкая пластина, жидкость, газ, плотность, давление, присоединенная масса, потенциал скорости, спектр частот, формы собственных колебаний

DOI: 10.31857/S1026351924060093, **EDN:** TYVVFG

1. Введение. В работах [1–17] исследуется спектр частот пластин и оболочек, контактирующих с жидкостью и газом, обзор которых приводится в [18]. В последней работе определяется низшая частота изгибных колебаний пластины, контактирующей с жидкостью или газом, в предположении ее цилиндрического изгиба. Поверхности пластины контактируют со средой одинаковой плотности и давления. Среда может быть сжимаемой в процессе деформации поверхности и несжимаемой. Определяется влияние на изгиб взаимодействия среднего давления и изменения кривизны срединной поверхности, а также присоединенной массы газовой среды. Исследовано влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на ее поверхности и кривизны срединной поверхности, а также действие присоединенной массы газовой среды с удаленными границами.

На основе использования дискретно структурной модели деформирования многослойных пластин при малых перемещениях, деформациях и учете внутреннего трения материалов слоев по модели Кельвина–Фойгта

в работе [19] рассмотрены две задачи о прохождении моногармонической звуковой волны сквозь тонкую композитную прямоугольную пластину, шарнирно закрепленную в проеме абсолютно жесткой перегородки. При постановке первой задачи предполагается, что пластина находится между двумя полубесконечными пространствами и на нее падает плоская звуковая волна с заданной амплитудным значением давления звуковой волны. При постановке второй задачи считается, что пластина находится между двумя абсолютно жесткими преградами, одна из них за счет гармонических колебаний с заданной амплитудой перемещений формирует падающую на пластину звуковую волну, а другая неподвижна и имеет деформируемое энергопоглощающее покрытие.

В работе [20] исследовались собственные колебания прямоугольных металлических пластин. Для определения частот собственных колебаний применялись расчетные методы, в частности аналитический расчет и расчет методом конечных элементов. За основу аналитического расчета было принято уравнение движения тонкой прямоугольной пластины. Затем применялся асимптотический метод, учитывающий динамический краевой эффект. В результате были определены частоты собственных колебаний пластины.

В работах [21–24] изучены колебания прямоугольной пластины с различными граничными условиями на краях. Установлены энергетические неравенства, из которых следует единственность решения поставленных начально-граничных задач. Решения построены в виде суммы рядов с обоснованием сходимости в классах классических и обобщенных решений. Установлена устойчивость решений от начальных данных.

В данной работе определяется спектр частот и формы изгибных колебаний прямоугольной пластины, подвижно заделанной по контуру, которая помещена в жидкость или газ. Изучен вопрос о взаимном влиянии эффекта среднего давления и известного из литературы эффекта присоединенной массы жидкости на деформацию пластины. Получены формулы для вычисления частот и формы изгибных колебаний прямоугольной пластины, находящейся в несжимаемой и сжимаемой жидкости.

Для описания колебаний тонкой прямоугольной пластины рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка [25, с. 99]:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (1.1)$$

где E , ν , ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала, h – толщина пластины, $w(x, y, t)$ – прогиб, x , y , t – координаты, время, q – поперечная распределенная нагрузка.

На нижнюю и верхнюю поверхности пластины действуют давления $p_0 + p_1$ и $p_0 + p_2$ жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 1). Здесь p_0 – давление сборки, в частности атмосферное давление, действующее на все поверхности, p_1 , p_2 – избыточные давления. При определении нагрузки q будем предполагать, что ρ_1 , ρ_2 и p_1 , p_2 являются постоянными и, вообще говоря, они могут быть равными или неравными соответственно.

2. Несжимаемая среда. Предполагаем, что области, занятые жидкостями, простираются неограниченно, опоры не препятствуют свободному перетеканию жидкости вдоль пластины в направлении осей x и y . Возникающие в результате движения пластины давления на нижнюю и верхнюю поверхность

обозначим через \bar{p}_1 и \bar{p}_2 . Уравнения динамики несжимаемой жидкости в прямоугольных координатах x, y, z относительно потенциала скорости $\varphi_i(x, y, z, t)$ имеют вид [1–3]:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = 0, \quad \bar{p}_i = -\rho_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

Задаются условия на поверхностях контакта со средой:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad z = -\frac{h}{2}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad z = \frac{h}{2}. \quad (2.2)$$

На большом удалении от поверхности возмущения среды от пластины исчезают:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Элементарные длины dx_1 и dx_2 нижней и верхней поверхностей, выраженные через длину dx срединной поверхности пластины, определяются по формулам (рис. 1а)

$$dx_1 = \left(1 + \varepsilon_x \left(-\frac{h}{2}\right)\right) dx, \quad dx_2 = \left(1 + \varepsilon_x \left(\frac{h}{2}\right)\right) dx, \quad (2.4)$$

где деформации в соответствии с гипотезами Кирхгоффа [18] равны

$$\varepsilon_x \left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_x \left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Аналогично определяются элементарные длины dy_1 и dy_2 нижней и верхней поверхностей по оси y , выраженные через длину dy срединной поверхности пластины (рис. 1б)

$$dy_1 = \left(1 + \varepsilon_y \left(-\frac{h}{2}\right)\right) dy, \quad dy_2 = \left(1 + \varepsilon_y \left(\frac{h}{2}\right)\right) dy$$

и деформации в соответствии с гипотезами Кирхгоффа:

$$\varepsilon_y \left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_y \left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Распределенная сила q определяется аналогично работам [15, 16]:

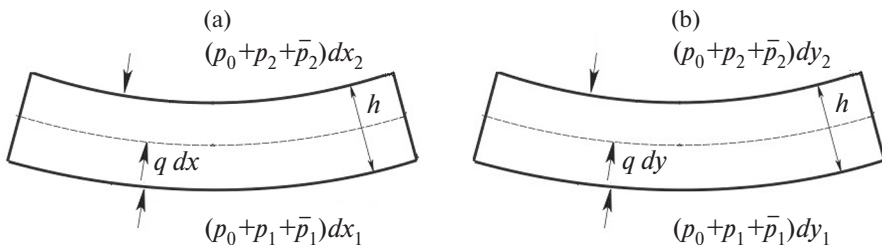


Рис. 1. Элементы dx и dy срединной поверхности изогнутой пластины.

$$\begin{aligned}
qdx dy &= (p_0 + p_1 + \bar{p}_1) dx_1 dy_1 - (p_0 + p_2 + \bar{p}_2) dx_2 dy_2 = \\
&= (p_0 + p_1 + \bar{p}_1) \left(1 + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy - \\
&- (p_0 + p_2 + \bar{p}_2) \left(1 - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy,
\end{aligned}$$

откуда следует:

$$\begin{aligned}
q &= p_1 - p_2 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \bar{p}_1 - \\
&- \bar{p}_2 + \frac{(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
&+ \frac{(p_1 - p_2)h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Слагаемыми, содержащими квадрат h , можно пренебречь. В линейной задаче также пренебрегаем слагаемым, содержащим произведение среднего динамического давления на сумму вторых производных от прогиба по координатам x, y . Тогда получим:

$$q = p_1 - p_2 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \bar{p}_1 - \bar{p}_2. \quad (2.6)$$

По условию прямоугольная пластина по осям x и y подвижно заделана на опоры, расположенные на равных расстояниях a и b . Это означает, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} &= \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial x^3} = 0, \quad |x| = 0, a, 2a, \dots \\
\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} &= \frac{\partial^3 w(x, y, t)}{\partial y^3} = 0, \quad |y| = 0, b, 2b, \dots
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Разделяя переменные $w(x, y, t) = v(x, y)f(t)$ в уравнении (1.1) при $q = 0$, относительно функции $v(x, y)$, получим спектральную задачу:

$$\begin{aligned}
\Delta(\Delta v) - \lambda^2 v &= 0 \\
\frac{\partial v(0, y)}{\partial x} &= \frac{\partial^3 v(0, y)}{\partial x^3} = \frac{\partial v(a, y)}{\partial x} = \frac{\partial^3 v(a, y)}{\partial x^3} = 0, \quad 0 \leq y \leq b \\
\frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} &= \frac{\partial^3 v(x, 0)}{\partial y^3} = \frac{\partial v(x, b)}{\partial y} = \frac{\partial^3 v(x, b)}{\partial y^3} = 0, \quad 0 \leq x \leq a.
\end{aligned}$$

Собственные функции этой задачи определяются по формуле [23]

$$v_{00}(x, y) = v_{00} = \frac{1}{\sqrt{ab}}, v_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b}, m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

которые соответствуют собственным значениям:

$$\lambda_{mn} = \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2}, m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Отметим, что система собственных функций (2.8) является полной и образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(G)$, где G — область переменных (x, y) : $0 < x < a$, $0 < y < b$.

Тогда изгибные колебания пластины будем искать по формуле:

$$w(x, y, t) = W_{00}(t)v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n \neq 0}}^N W_{mn}(t)v_{mn}(x, y). \quad (2.10)$$

Функции $\varphi_i(x, y, z, t)$ будем искать исходя из условий (2.1), (2.3), (2.2) и (2.7) в виде:

$$\varphi_i(x, y, z, t) = \Phi_{i00}(z)v_{00}g_{00}(t) + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n > 1}}^N \Phi_{imn}(z)v_{mn}(x, y)g_{mn}(t), \quad i = 1, 2, \quad (2.11)$$

где $\Phi_{imn}(z), g_{mn}(t)$ — пока неизвестные функции.

Подставим (2.10) в уравнение Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_i(x, y, z, t) &= g_{00}(t)v_{00}(x, y) \frac{d^2 \Phi_{i00}(z)}{dz^2} + \\ &+ \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n > 1}}^N g_{mn}(t)v_{mn}(x, y) \left[\frac{d^2 \Phi_{imn}(z)}{dz^2} - \left(\frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \right) \Phi_{imn}(z) \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим дифференциальные уравнения относительно неизвестных функций $\Phi_{imn}(z)$:

$$\frac{d^2 \Phi_{i00}(z)}{dz^2} = 0, \frac{d^2 \Phi_{imn}(z)}{dz^2} - \lambda_{mn}^2 \Phi_{imn}(z) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.12)$$

Дифференциальное уравнение (2.12) при $m + n > 0$ имеет общие решения:

$$\begin{aligned} \Phi_{1mn}(z) &= C_{11mn} \exp(\lambda_{mn} z) + C_{12mn} \exp(-\lambda_{mn} z) \\ \Phi_{2mn}(z) &= C_{21mn} \exp(\lambda_{mn} z) + C_{22mn} \exp(-\lambda_{mn} z), \end{aligned}$$

а при $m = n = 0$

$$\Phi_{100}(z) = C_{1100}z + C_{1200}, \Phi_{200}(z) = C_{2100}z + C_{2200},$$

где C_{ijmn} $i, j = 1, 2$, – произвольные постоянные. В силу условий (2.3) при $m + n > 0$ находим:

$$\begin{aligned}\Phi_{1mn}(z) &= A_{1mn} \exp(\lambda_{mn}z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \\ \Phi_{2mn}(z) &= A_{2mn} \exp(-\lambda_{mn}z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

а при $m = n = 0$

$$\Phi_{100}(z) = A_{100}, \Phi_{200}(z) = A_{200}.$$

Здесь постоянные A_{1mn} и A_{2mn} – неизвестные, для определения которых воспользуемся условиями (2.2). Для этого воспользуемся формулой Тейлора для разложения функции $\partial\varphi_1/\partial z$ в окрестности точки $z = 0$:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial z} + \frac{z}{1!} \frac{\partial^2\varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial z^2} + \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^3\varphi_1(x, y, \theta, t)}{\partial z^3}, \quad 0 < \theta < z. \quad (2.13)$$

Пренебрегая последним слагаемым с учетом малости h^2 и первого условия из (2.2), имеем:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial z} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2\varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Подставляя в (2.14) функции (2.11), (2.10), получим:

$$\begin{aligned}& \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \lambda_{mn} A_{1mn} v_{mn}(x, y) g_{mn}(t) - \frac{h}{2} A_{1mn} \lambda_{mn}^2 v_{mn}(x, y) g_{mn}(t) = \\ &= \frac{dW_{00}(t)}{dt} v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{dW_{mn}(t)}{dt} v_{mn}(x, y)\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}& \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N A_{1mn} \lambda_{mn} \left(1 - \frac{\lambda_{mn} h}{2}\right) v_{mn}(x, y) g_{mn}(t) = \\ &= \frac{dW_{00}(t)}{dt} v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{dW_{mn}(t)}{dt} v_{mn}(x, y).\end{aligned} \quad (2.15)$$

При выполнении условий

$$\frac{dW_{00}(t)}{dt} = 0, \frac{dW_{mn}(t)}{dt} = \bar{\omega}_{mn} g_{mn}(t), \quad m + n > 0 \quad (2.16)$$

из равенства (2.15) найдем:

$$A_{1mn} = \frac{\bar{\omega}_{mn}}{\lambda_{mn}} \left(1 - \frac{\lambda_{mn}h}{2}\right)^{-1}, m, n = 0, 1, 2, \dots, m+n > 0. \quad (2.17)$$

Аналогично находим постоянные:

$$A_{2mn} = -\frac{\bar{\omega}_{mn}}{\lambda_{mn}} \left(1 - \frac{\lambda_{mn}h}{2}\right)^{-1}, m, n = 0, 1, 2, \dots, m+n > 0. \quad (2.18)$$

Таким образом, у функций $\varphi_i(x, y, z, t)$ найдены постоянные A_{1mn} и A_{2mn} при $m+n > 0$, которые определяются по формулам (2.17) и (2.18), а A_{100} и A_{200} остаются произвольными постоянными.

Также, используя формулы (2.13), (2.16), (2.17) и (2.18), определим динамические давления:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= -\rho_1 \left[\frac{\partial \varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial t} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y, 0, t)}{\partial t \partial z} \right] = \\ &= -\rho_1 \left\{ A_{100} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \right. \\ &+ \left[\sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N A_{1mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} - \frac{h}{2} \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N A_{1mn} \lambda_{mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \right] = \\ &= -\rho_1 \left[A_{100} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N A_{1mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \left(1 - \frac{\lambda_{mn}h}{2}\right) \right] = \quad (2.19) \\ &= -\rho_1 \left[A_{100} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{\bar{\omega}_{mn}}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \right] = \\ &= -\rho_1 \left[A_{100} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}_2 &= -\rho_2 \left[\left[\frac{\partial \varphi_2(x, y, 0, t)}{\partial t} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2(x, y, 0, t)}{\partial t \partial z} \right] \right] = \\
&= -\rho_2 \left\{ A_{200} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \right. \\
&+ \left. \left[\sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N A_{2mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} - \frac{h}{2} \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N A_{2mn} \lambda_{mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \right] \right\} = \\
&= -\rho_2 \left\{ A_{200} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N A_{2mn} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \left(1 - \frac{\lambda_{mn} h}{2} \right) \right\} = \quad (2.20) \\
&= -\rho_2 \left\{ A_{200} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} - \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{\bar{\omega}_{mn}}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{dg_{mn}(t)}{dt} \right\} = \\
&= -\rho_2 \left\{ A_{200} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} - \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Теперь на основании формулы (2.6) с учетом (2.19), (2.20) найдем:

$$\begin{aligned}
q &= p_1 - p_2 + (\rho_2 A_{200} - \rho_1 A_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \\
&+ \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \\
&- (\rho_1 + \rho_2) \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2}. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Подставляя выражение (2.21) в уравнение (1.1), получим:

$$\begin{aligned}
D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
+ (\rho_1 + \rho_2) \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} - \\
- (\rho_2 A_{200} - \rho_1 A_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} = p_1 - p_2. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Подставляя в (2.22) функции (2.7) при $p_1 - p_2 = p$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & D \left[\sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \left(\frac{\pi^4 m^4}{a^4} + 2 \frac{\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{\pi^4 n^4}{b^4} \right) v_{mn}(x,y) W_{mn}(t) \right] + \\
 & + \rho h \sum_{m,n=1}^N v_{mn}(x,y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} + \\
 & + (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \cdot \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \lambda_{mn}^2 v_{mn}(x,y) W_{mn}(t) + \\
 & + (\rho_1 + \rho_2) \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\lambda_{mn}} v_{mn}(x,y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} - \\
 & - (\rho_2 A_{200} - \rho_1 A_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} = \\
 & = \sum_{m,n=0}^N p_{mn} v_{mn}(x,y) = p_{00} v_{00} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N p_{mn} v_{mn}(x,y),
 \end{aligned}$$

где

$$p_{mn} = \iint_G p v_{mn}(x,y) dx dy = \begin{cases} p\sqrt{ab}, & m = n = 0 \\ 0, & m + n > 0 \end{cases}.$$

Отсюда в силу полноты системы функций (2.8) в $L_2(G)$ получим дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
 & (\rho_1 A_{100} - \rho_2 A_{200}) \frac{dg_{00}(t)}{dt} = p_{00}, \quad m = n = 0 \\
 & \left[D\lambda_{mn}^4 + (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \lambda_{mn}^2 \right] W_{mn}(t) + \\
 & \left(\rho h + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda_{mn}} \right) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} = 0, \quad m + n > 0.
 \end{aligned}$$

Из первого уравнения при условии $\rho_1 A_{100} - \rho_2 A_{200} \neq 0$ находим:

$$g_{00}(t) = \frac{p_{00} t}{\rho_1 A_{100} - \rho_2 A_{200}} + C_{00},$$

где C_{00} — произвольная постоянная. Второе дифференциальное уравнение перепишем в виде:

$$\frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 W_{mn}(t) = 0, \tag{2.23}$$

где частота ω_{mn} колебаний определяется по формуле:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D\lambda_{mn}^4 + (2p_0 + p_1 + p_2)\frac{h}{2}\lambda_{mn}^2}{\rho h + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\lambda_{mn}}}. \quad (2.24)$$

Формулу (2.24) перепишем в следующей форме:

$$\omega_{mn}^2 = \omega_{0mn}^2 \frac{1 + \alpha_{mn}}{1 + \mu_{mn}}, \quad (2.25)$$

здесь

$$\omega_{0mn}^2 = \frac{D\lambda_{mn}^4}{\rho h}, \quad \alpha_{mn} = \frac{(p_0 + (p_1 + p_2)/2)h}{D\lambda_{mn}^2}, \quad \mu_{mn} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho h \lambda_{mn}}.$$

Здесь ω_{0mn} — частота пластины, не контактирующей с жидкостью. Параметры α_{mn} и μ_{mn} определяют влияние давления и плотности окружающей среды. Таким образом, давление повышает, плотность понижает собственную частоту пластины. При $\alpha_{mn} \ll 1$, $\mu_{mn} \ll 1$ их влияние исчезает. Через исходные данные параметры α_{mn} , μ_{mn} принимают вид:

$$\alpha_{mn} = \frac{12(1 - \nu^2)(p_0 + (p_1 + p_2)/2)a^2b^2}{\pi^2 E h^2 (m^2 b^2 + n^2 a^2)}, \quad \mu_{mn} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)ab}{\pi \rho h \sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2}}.$$

При $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ МПа, $p_2 = 2$ МПа, $a = 0.20$ м, $b = 0.20$ м, $h = 0.001$ м, $m = 1$, $n = 1$, $\alpha_{11} = 0.16$, $\mu_{11} = 11.5$, $m = 2$, $n = 1$, $\alpha_{21} = 0.06$, $\mu_{21} = 7.3$, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\mu_{12} = \mu_{21}$, $m = 2$, $n = 2$, $\alpha_{22} = 0.04$, $\mu_{22} = 5.77$. Следовательно, влияние давления незначительное, имеется значительное снижение собственной частоты за счет присоединенной массы. По модели несжимаемой жидкости в случае воды имеется только снижение собственной частоты. Это известный результат [1–3], однако учет влияния давления вносит некоторое изменение частоты.

Общая оценка рассматриваемых эффектов состоит в том, что при $\alpha_{mn} > \mu_{mn}$ преобладает повышающее частоту влияние давления среды, а при $\alpha_{mn} < \mu_{mn}$ — понижающее влияние плотности или присоединенной массы. Через входные параметры эти неравенства имеют вид:

$$\frac{12(1 - \nu^2)(p_0 + (p_1 + p_2)/2)\rho ab}{\pi E h (\rho_1 + \rho_2) \sqrt{m^2 a^2 + n^2 b^2}} > 1, \quad \frac{12(1 - \nu^2)(p_0 + (p_1 + p_2)/2)\rho ab}{\pi E h (\rho_1 + \rho_2) \sqrt{m^2 a^2 + n^2 b^2}} < 1.$$

Первый случай реализуется для весьма тонких пластин из материала с малым модулем упругости и при предельно высоком давлении в контактирующей среде. Второй случай всегда реализуется при невысоких давлениях в плотной среде.

Далее найдем формулу для определения колебаний пластины с учетом найденных частот ω_{mn} . Построим общее решение дифференциального уравнения (2.23):

$$W_{mn}(t) = C_{1mn} \cos \omega_{mn} t + C_{2mn} \sin \omega_{mn} t,$$

где C_{1mn} и C_{2mn} – произвольные постоянные. Тогда функция (2.10) принимает вид:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= W_{00}v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N W_{mn}(t)v_{mn}(x, y) = \\ &= W_{00}v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N (C_{1mn} \cos \omega_{mn}t + C_{2mn} \sin \omega_{mn}t)v_{mn}(x, y). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Чтобы найти в формуле (2.26) постоянные C_{1mn} , C_{2mn} , нужно задать начальные условия:

$$w(x, y, 0) = \tau(x, y), \quad \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y), \quad (2.27)$$

Удовлетворим функцию (2.26) условиям (2.27):

$$W_{00}v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N C_{1mn}v_{mn}(x, y) = \tau(x, y) = \tau_{00}v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \tau_{mn}v_{mn}(x, y), \quad (2.28)$$

$$\sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N C_{2mn}\omega_{mn}v_{mn}(x, y) = \psi(x, y) = \psi_{00}v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \psi_{mn}v_{mn}(x, y) \quad (2.29)$$

где коэффициенты τ_{mn} и ψ_{mn} разложения функций $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в ряд по системе функций (2.8) определяются по формулам:

$$\tau_{00} = \iint_G \tau(x, y)v_{00}dxdy, \quad \tau_{mn} = \iint_G \tau(x, y)v_{mn}(x, y)dxdy, \quad m+n>0, \quad (2.30)$$

$$\psi_{00} = \iint_G \psi(x, y)v_{00}dxdy, \quad \psi_{mn} = \frac{1}{\omega_{mn}} \iint_G \psi(x, y)v_{mn}(x, y)dxdy, \quad m+n>0. \quad (2.31)$$

Тогда из равенств (2.28) и (2.29) в силу полноты и ортонормированности системы (2.8) в пространстве $L_2(G)$ находим:

$$W_{00} = \tau_{00}, \quad \psi_{00} = 0; \quad C_{1mn} = \tau_{mn}, \quad C_{2mn} = \psi_{mn}/\omega_{mn}.$$

Замечание. Из разложений (2.28) и (2.29) видно, что функции $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$ должны удовлетворять условиям (2.7) и обладать гладкостью функций (2.8).

Таким образом, нами установлены следующие утверждения.

Утверждение 1. Если параметры α_{mn} и μ_{mn} , определяющие соответственно влияние давления и плотности окружающей среды, то при

- а) $\alpha_{mn} \ll 1$, $\mu_{mn} \ll 1$ или $\alpha_{mn} = \mu_{mn}$ их влияние исчезает;
- б) $\alpha_{mn} > \mu_{mn}$ преобладает повышающее частоту ω_{mn} колебаний влияние давления среды;
- в) $\alpha_{mn} < \mu_{mn}$ преобладает понижающее частоту ω_{mn} колебаний влияние плотности среды.

Утверждение 2. Если начальные функции $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют условиям замечания и $\psi_{00} = 0$, то колебания прямоугольной однородной пластины в указанной среде при избыточных давлениях p_1, p_2 и плотностях ρ_1, ρ_2 , удовлетворяющих условию $\rho_1 A_{100} - \rho_2 A_{200} \neq 0$, определяется по формуле

$$w(x, y, t) = \tau_{00} v_{00} + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>0}}^N \left(\tau_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \psi_{mn} \sin \omega_{mn} t \right) v_{mn}(x, y). \quad (2.32)$$

Собственные колебания пластины находятся по формуле:

$$w_{mn}(x, y, t) = \left(\tau_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \psi_{mn} \sin \omega_{mn} t \right) v_{mn}(x, y), \quad (2.33)$$

а собственные частоты ω_{mn} по формуле (2.25) при условиях (2.7) и (2.27), где коэффициенты τ_{mn}, ψ_{mn} определяются соответственно по формулам (2.30), (2.31).

3. Сжимаемая среда. В случае сжимаемой среды вместо уравнений (2.1) имеем трехмерные волновые уравнения [1–3]

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} - \frac{1}{c_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

$$\bar{p}_i = -\rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}, \quad c_i^2 = \kappa_i \frac{p_i}{\rho_i}, \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

где c_i — скорость звука, κ_i — коэффициент адиабаты. В отличие от случая несжимаемой жидкости здесь давление и плотность не являются независимыми, а связаны изотермическим законом.

На основании функции (2.8) аналогично (2.11) функции $\Phi_i(x, y, z, t)$ будем искать в виде:

$$\Phi_i(x, y, z, t) = \Phi_{i00}(z) v_{00} g_{00}(t) + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>1}}^N \Phi_{imn}(z) v_{mn}(x, y) g_{mn}(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в волновое уравнение (3.1), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Phi_{i00}(z)}{dz^2} v_{00} g_{00}(t) + \\ & + \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n>1}}^N \Phi_{imn}(z) v_{mn}(x, y) g_{mn}(t) \left[\frac{d^2 \Phi_{imn}(z)}{dz^2} \frac{1}{\Phi_{imn}(z)} - \right. \\ & \left. - \lambda_{mn}^2 - \frac{1}{c_i^2} \frac{d^2 g_{mn}(t)}{dt^2} \frac{1}{g_{mn}(t)} \right] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.4) \end{aligned}$$

В силу (2.15) и (2.22): $\frac{d^2 g_{mn}(t)}{dt^2} = -\omega_{mn}^2 g_{mn}(t)$, тогда из (3.4) имеем:

$$\frac{d^2 \Phi_{i00}(z)}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 \Phi_{imn}(z)}{dz^2} - \kappa_{mn}^2 \Phi_{imn}(z) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.5)$$

где

$$\kappa_{mn}^2 = \lambda_{mn}^2 - \frac{\omega_{mn}^2}{c_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

При условии $\kappa_{mn} > 0$ дифференциальное уравнение (3.5) при $m + n > 0$ имеет общее решение:

$$\Phi_{imn}(z) = C_{i1mn} \exp(\kappa_{mn}z) + C_{i2mn} \exp(-\kappa_{mn}z),$$

а при $m = n = 0$

$$\Phi_{100}(z) = C_{1100}z + C_{1200}, \Phi_{200}(z) = C_{2100}z + C_{2200},$$

где C_{ijmn} , $i, j = 1, 2$, – произвольные постоянные. В силу условий (2.3) при $m + n > 0$ найдем:

$$\Phi_{1mn}(z) = B_{1mn} \exp(\kappa_{mn}z) \rightarrow 0, z \rightarrow -\infty,$$

$$\Phi_{2mn}(z) = B_{2mn} \exp(-\kappa_{mn}z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty,$$

а при $m = n = 0$

$$\Phi_{100}(z) = B_{100}, \Phi_{200}(z) = B_{200},$$

где постоянные B_{1mn} и B_{2mn} найдем из условий (2.2) аналогично вышеизложенному:

$$B_{1mn} = \frac{\bar{\omega}_{mn} k_1}{\kappa_{mn}} \left(1 - \frac{\kappa_{mn} h}{2}\right)^{-1}, B_{2mn} = -\frac{\bar{\omega}_{mn} k_2}{\kappa_{mn}} \left(1 - \frac{\kappa_{mn} h}{2}\right)^{-1}, \quad m + n > 0. \quad (3.6)$$

Тем самым функции (3.3) построены, где B_{1mn} и B_{2mn} при $m + n > 0$ находятся по формулам (3.6), а постоянные B_{100} и B_{200} остаются произвольными постоянными.

Далее аналогично пункту 2 найдем:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 = -\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= -\rho_1 \left[B_{100} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\kappa_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} \right] \\ \bar{p}_2 = -\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} &= -\rho_2 \left[B_{200} v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} - \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\kappa_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} \right] \end{aligned}$$

и на основании формулы (2.6) вычислим q :

$$\begin{aligned} q &= p_1 - p_2 + (\rho_2 B_{200} - \rho_1 B_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \times \\ &\times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (\rho_1 + \rho_2) \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\kappa_{mn}} v_{mn}(x, y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставляя выражение (3.7) в уравнение (1.1), получим:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) +$$

$$+ v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} (\rho_2 B_{200} - \rho_1 B_{100}) + (\rho_1 + \rho_2) \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \frac{1}{\kappa_{mn}} v_{mn}(x,y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} - (3.8)$$

$$- (\rho_2 B_{200} - \rho_1 B_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} = p_1 - p_2.$$

Теперь подставим функцию (2.10) в уравнение (3.8). Отсюда при условии $p_1 - p_2 = p$ имеем:

$$\sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N \left[D \lambda_{mn}^4 v_{mn}(x,y) W_{mn}(t) + \rho h v_{mn}(x,y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} + \right.$$

$$\left. + \left(p_0 + \frac{p_1 + p_2}{2} \right) h \lambda_{mn}^2 v_{mn}(x,y) W_{mn}(t) + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\kappa_{mn}} v_{mn}(x,y) \frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} \right] -$$

$$- (\rho_2 B_{200} - \rho_1 B_{100}) v_{00} \frac{dg_{00}(t)}{dt} = p_{00} v_{00} + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^N p_{mn} v_{mn}(x,y).$$

Отсюда получаем дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 W_{mn}(t) = 0, \quad m + n > 0, \quad (3.9)$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D \lambda_{mn}^4 + (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \lambda_{mn}^2}{\rho h + (\rho_1 + \rho_2) / \kappa_{mn}} \quad (3.10)$$

$$(\rho_1 B_{100} - \rho_2 B_{200}) \frac{dg_{00}(t)}{dt} = p_{00}, \quad m = n = 0.$$

Решение последнего уравнения при условии $\rho_1 B_{100} - \rho_2 B_{200} \neq 0$ определяется по формуле:

$$g_{00}(t) = \frac{p_{00} t}{\rho_1 B_{100} - \rho_2 B_{200}} + d_{00}, \quad d_{00} = \text{const.}$$

Поскольку κ_{mn} зависит от ω_{mn} , то равенство (3.10) перепишем в виде:

$$D \lambda_{mn}^4 + (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \lambda_{mn}^2 - [\rho h + (\rho_1 + \rho_2) / \kappa_{mn}] \omega_{mn}^2 = 0.$$

Из данного уравнения с заменами

$$\omega_{0mn}^2 = \frac{D \lambda_{mn}^4}{\rho h}, \quad \alpha_{mn} = \frac{(2p_0 + p_1 + p_2) \lambda_{mn}^2}{2\rho \omega_{0mn}^2},$$

$$\mu_{mn} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho h \lambda_{mn}}, \quad \eta_{mn} = \frac{\omega_{0mn}^2}{c_i^2 \lambda_{mn}^2}, \quad x_{mn} = \frac{\omega_{mn}^2}{\omega_{0mn}^2} \quad (3.11)$$

получим алгебраическое уравнение относительно x_{mn} :

$$1 - x_{mn} + \alpha_{mn} - \frac{\mu_{mn} x_{mn}}{\sqrt{1 - \eta_{mn} x_{mn}}} = 0. \quad (3.12)$$

При условиях

$$1 - \eta_{mn} x_{mn} > 0, \quad 1 - x_{mn} + \alpha_{mn} \geq 0$$

уравнение (3.12) принимает вид:

$$x_{mn}^3 + a_1 x_{mn}^2 + a_2 x_{mn} - a_3 = 0, \quad (3.13)$$

где

$$a_1 = \frac{\mu_{mn}^2 - 1}{\eta_{mn}} - 2(1 + \alpha_{mn}), \quad a_2 = (1 + \alpha_{mn})^2 + \frac{2(1 + \alpha_{mn})}{\eta_{mn}}, \quad a_3 = \frac{(1 + \alpha_{mn})^2}{\eta_{mn}}.$$

Кубическое уравнение (3.13) на числовой прямой имеет хотя бы один вещественный корень. Пусть $x_{mn} = x_{0mn} = x_0$ такой корень. Тогда

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x - a_3 = (x - x_0) \left[x^2 + (a_1 + x_0)x^2 + a_2 + x(a_1 + x_0) \right].$$

Обозначим через $f(x)$ левую часть уравнения (3.13), где $x_{mn} = x$. Функция $f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x - a_3$ — это многочлен, по крайней мере непрерывная на всей числовой прямой функция. В точке $x = 0$: $f(0) = -a_3 < 0$. Выясним знак функции $f(x)$ в точке $x = 1$:

$$f(1) = 1 + a_1 + a_2 - a_3 = \frac{\mu_{mn}^2 - \alpha_{mn}^2}{\eta_{mn}} + \alpha_{mn}^2 = \frac{\mu_{mn}^2}{\eta_{mn}} + \alpha_{mn}^2 \frac{\eta_{mn} - 1}{\eta_{mn}}.$$

Если $\mu_{mn} \geq \alpha_{mn}$ или $\eta_{mn} \geq 1$, то $f(1) > 0$ и график функции $f(x)$ пересекает ось Ox между точками $x = 0$ и $x = 1$, т.е. существует точка $x = x_0 \in (0, 1)$, такая, что $f(x_0) = 0$.

Рассмотрим параметр η_{mn} и оценим его снизу:

$$\eta_{mn} = \frac{\omega_{0mn}^2}{c_i^2 \lambda_{mn}^2} = \frac{D \lambda_{mn}^4}{\rho h c_i^2 \lambda_{mn}^2} = \frac{D \lambda_{mn}^2}{\rho h c_i^2} \geq \frac{D \lambda_{11}^2}{\rho h c_i^2} \geq 1. \quad (3.14)$$

Отсюда видно, что при выборе данных D, ρ, h, a, b, c_i всегда можно добиться выполнения неравенства (3.14). Если же $\eta_{mn} < 1$ и по условию $1 - \eta_{mn} x_{mn} > 0$, то тогда имеем:

$$(1 - \eta_{mn} x_{mn})^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \eta_{mn} x_{mn} - \frac{1}{8} (\eta_{mn} x_{mn})^2. \quad (3.15)$$

Тогда уравнение (3.12) с учетом (3.15) примет вид:

$$(1 - x_{mn} + \alpha_{mn}) \cdot \left[1 - \frac{\eta_{mn} x_{mn}}{2} - \frac{1}{8} (\eta_{mn} x_{mn})^2 \right] - \mu_{mn} x_{mn} = 0$$

или

$$x_{mn}^3 + b_1 x_{mn}^2 - b_2 x_{mn} + b_3 = 0, \quad (3.16)$$

где

$$b_1 = \frac{4}{\eta_{mn}} - 1 - \alpha_{mn}, \quad b_2 = \frac{4(1 + \alpha_{mn})}{\eta_{mn}} + \frac{8(\mu_{mn} + 1)}{\eta_{mn}^2}, \quad b_3 = \frac{8(1 + \alpha_{mn})}{\eta_{mn}^2}.$$

Обозначим левую часть уравнения (3.16) через

$$g(x) = x^3 + b_1 x^2 - b_2 x + b_3 = 0,$$

где $x = x_{mn}$, аналогично функции $f(x)$ убеждаемся в существовании корня уравнения (3.16). Действительно, вычислим $g(0) = b_3 > 0$ и

$$g(1) = 1 + b_1 - b_2 + b_3 = -\alpha_{mn} - 4\frac{\alpha_{mn}}{\eta_{mn}} - \frac{8}{\eta_{mn}^2}(\mu_{mn} - \alpha_{mn}) < 0$$

при условии $\mu_{mn} \geq \alpha_{mn}$. Последнее неравенство всегда имеет место, если

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho} \geq \frac{6(1 - \nu^2)(2p_0 + p_1 + p_2)ab}{\pi E \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поскольку показано существование решений уравнений (3.13) и (3.16), то частоты колебаний в случае сжимаемой среды определяются по формуле

$$\omega_{mn} = \omega_{0mn} \sqrt{x_{mn}}. \quad (3.17)$$

Покажем, что частоты, определенные по формуле (3.12), меньше, чем соответствующие частоты в несжимаемой среде.

Действительно, из уравнения (3.12) имеем:

$$1 + \alpha_{mn} = \left(1 + \frac{\mu_{mn}}{\sqrt{1 - \eta_{mn} x_{mn}}} \right) x_{mn} > (1 + \mu_{mn}) x_{mn}.$$

Отсюда следует:

$$x_{mn} < \frac{1 + \alpha_{mn}}{1 + \mu_{mn}} \quad \text{или} \quad \omega_{mn}^2 < \omega_{0mn}^2 \frac{1 + \alpha_{mn}}{1 + \mu_{mn}}.$$

Правая часть полученной оценки представляет формулу (2.25), по которой определяются частоты колебаний в несжимаемой среде.

Обозначим $f_{mn} = \omega_{mn}/2\pi$, тогда первая полная собственная частота колебаний равна $f_{11} = \omega_{11}/2\pi$, $\omega_{11} = \omega_{011}\sqrt{x_{11}}$.

При $m = 1, n = 1, E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3, \rho = 7800$ кг/м³, $h = 0.001$ м, $a = 0.2$ м, $b = 0.2$ м, $\kappa_{1,2} = 1.4$, атмосферном давлении $p_a = 0.1$ МПа, плотности воздуха при атмосферном давлении $\rho_{1a} = 1.2928$ кг/м³, $p_1 = p_2 = p = 2$ МПа численное решение уравнения (3.10) дает корень: $x_{11} = 0.93948$. Соответствующая частота равна $f_{11} = 116.6$ Гц.

Для проверки выполнения условия $\kappa_{mn}^2 > 0$ учтем полученное выражение $\omega_{11} = \omega_{011}\sqrt{x_{11}}$, где ω_{011} определяется из первой формулы из (3.11). В рассмотренном примере $x_{11} \approx 0.94$, т.е. имеет место преобладание влияния давления воздуха над его плотностью. Условие $\kappa_{mn}^2 > 0$ для случая стальной пластины

и воды выполняется всегда, а в случае газов — при больших значениях a/h (например, $a/h > 15$).

В таблице приводятся частоты изгибных колебаний прямоугольной. Из таблицы следует, что частоты, вычисленные по формулам для несжимаемой и сжимаемой сред, отличаются незначительно, причем частоты по формуле для несжимаемой среды больше, чем частоты по формуле для сжимаемой среды.

Таблица. 1 Частоты изгибных колебаний прямоугольной пластины для разных m, n по формулам (2.25) и (3.17) соответственно для несжимаемой и сжимаемой сред

m, n	f_{mn} , Hz, формула (2.25)	f_{mn} , Hz, формула (3.17)
0, 1; 1, 0	59.91	59.89
1, 1	117.55	117.50
2, 2	469.1	468.8
3, 3	1061.1	1059.8

На рис. 2а приводится зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки от давления для разных газов. Из рис. 2а видно, что с ростом давления собственная частота колебаний убывает. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний. На рис. 2б приводится зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки от давления по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей для двуокиси углерода. Из рис. 2б видно, что частоты по модели несжимаемой жидкости выше частот по модели для сжимаемой жидкости, причем с ростом давления разность частот колебаний возрастает.

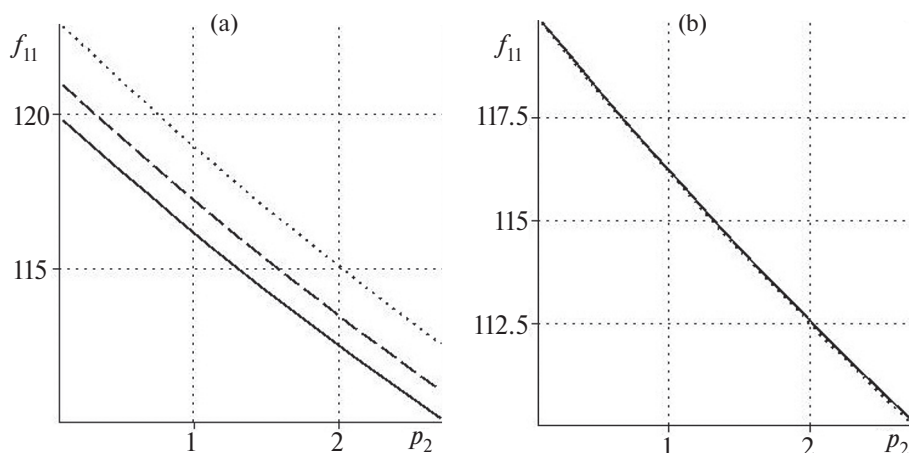


Рис. 2. Зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки f_{11} (Hz) от давления p_2 (МПа) для давления $p_1 = 0.5$ МПа: (а) для разных газов: $\rho_{1a} = \rho_{2a} = 0.1785$ (гелий), 1.2928 (воздух), 1.9768 (двуокись углерода) кг/м^3 (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно); (б) по формулам для несжимаемой (2.25) и сжимаемой (3.17) жидкостей для двуокиси углерода $\rho_{1a} = \rho_{2a} = 1.9768 \text{ кг/м}^3$ (сплошная, пунктирная линии соответственно).

На рис. 3,а приводится зависимость второй частоты изгибных колебаний пластинки от давления для разных газов для $m = n = 2$. Из рис. 3,а видно, что с ростом давления собственная частота колебаний убывает. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний. На рис. 3,б приводится зависимость второй частоты изгибных колебаний пластинки от давления по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей для двуокиси углерода. Из рис. 3,б видно, что частоты по модели несжимаемой жидкости выше частот по модели для сжимаемой жидкости, причем с ростом давления разность частот колебаний возрастает.

Аналогично п. 2 находится общее решение дифференциального уравнения (3.9) и строится формула (2.32) для определения формы колебаний пластины с учетом найденных частот ω_{mn} по формуле (3.17).

Таким образом, в случае сжимаемой среды имеют место следующие утверждения.

Утверждение 3. Частоты в случае сжимаемой среды меньше, чем соответствующие частоты в несжимаемой среде.

Утверждение 4. С ростом давления собственная частота колебаний возрастает для гелия и убывает для воздуха и углекислого газа. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний.

Утверждение 5. Если начальные функции $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют условиям замечания из пункта 2 и $\psi_{00} = 0$, то колебания прямоугольной однородной пластины в сжимаемой среде при избыточных давлениях p_1, p_2 и плотностях ρ_1, ρ_2 , удовлетворяющих условию $\rho_1 B_{100} - \rho_2 B_{200} \neq 0$, определяется по формуле (2.32), собственные колебания пластины находятся по формуле (2.33), а собственные частоты по формуле (3.17) при условиях (2.7) и (2.27), где коэффициенты τ_{mn} и ψ_{mn} определяются соответственно по формулам (2.30), (2.31).

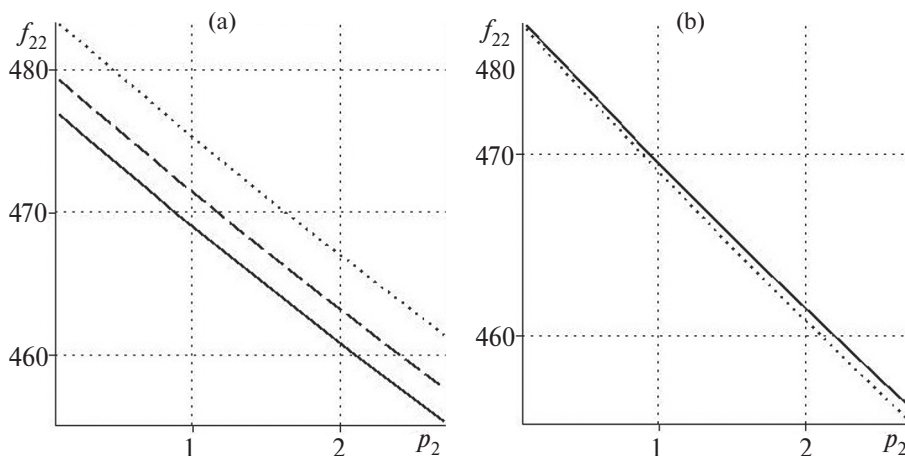


Рис. 3. Зависимость второй частоты изгибных колебаний пластинки f_{22} (Hz) от давления p_2 (МПа) для давления $p_1 = 0.5$ МПа: (а) для разных газов: $\rho_{1a} = \rho_{2a} = 0.1785$ (гелий), 1.2928 (воздух), 1.9768 (двуокись углерода) кг/м³ (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно); (б) по формулам для несжимаемой (2.25) и сжимаемой (3.17) жидкостей для двуокиси углерода $\rho_{1a} = \rho_{2a} = 1.9768$ кг/м³ (сплошная, пунктирная линии соответственно).

4. Заключение. Хорошо известно из литературы (например, [1–3], что собственные частоты изгибных колебаний пластины при ее контакте с жидкостью значительно снижаются. Это объясняется влиянием присоединенной массы жидкости. Установлено [15, 16], что учет разности площадей противоположных поверхностей пластины, образующейся при ее изгибе, может оказывать повышающее влияние на собственные частоты. Учет этого эффекта приводит к появлению распределенной поперечной силы, равной произведению кривизны срединной поверхности и среднего давления на поверхности пластины.

Одновременное влияние указанных факторов на частоты колебаний в случае несжимаемой жидкости зависит от отношения среднего давления к модулю упругости материала, плотностей материала и жидкости и отношения длины пластины к ее толщине. Для реальных параметров характерно преобладающее влияние плотности среды над давлением в ней. Однако давление может оказывать заметное влияние на результат.

Для сжимаемой жидкости влияние носит более сложный характер, так как присоединенная масса зависит от скорости звука и от самой частоты колебаний. Кроме того, давление и плотность газовой среды не являются независимыми.

Влияние контактирующей среды на частоты колебаний является значительным для весьма тонких пластин и пленок с низким модулем упругости. Учет его необходим особенно в случае элементов микро- и наноразмерных толщин.

С ростом давления собственная частота колебаний возрастает. В случае легких газов (водород, гелий) влияние давления может превалировать над их плотностью. Эти результаты могут быть использованы при моделировании колебаний пластинок, контактирующих с жидкостью и газом, в том числе микро- и наноразмеров.

Работа проведена в порядке выполнения госзадания (FMRS-2023-0015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонткевич В.С. Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 102 с.
2. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
3. Попов А.Л., Чернышев Г.Н. Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М.: Физматлит, 1994. 208 с.
4. Нестеров С.В. Изгибные колебания квадратной пластины, зашпеленной по контуру // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 159–165.
5. Денисов С.Л., Копьев В.Ф., Медведский А.Л., Остриков Н.Н. Исследования проблем долговечности ортотропных полигональных пластин при широкополосном акустическом воздействии с учетом эффектов излучения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 138–150. <http://doi.org/10.31857/S0572329920030058>
6. O'Connell A.D., Hofheinz M., Ansmann M., Bialczak R.C., Lenander M., Lucero E., Neeley M., et al. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // Nature. 2010. № 464. P. 697–703. <http://doi.org/10.1038/nature08967>
7. Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M., Shen W., Carlson G., Foster J.S., et al. Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // Nature. 2007. № 446. P. 1066–1069. <http://doi.org/10.1038/nature05741>
8. Husale S., Persson H.H.J., Sahin O. DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // Nature. 2009. № 462. P. 1075–1078. <http://doi.org/10.1038/nature08626>
9. Raman A., Melcher J., Tung R. Cantilever dynamics in atomic force microscopy // Nano Today. 2008. V. 3. № 1–2. P. 20–27. [http://doi.org/10.1016/S1748-0132\(08\)70012-4](http://doi.org/10.1016/S1748-0132(08)70012-4)

10. *Eom K., Park H.S., Yoon D.S., Kwon T.* Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics principles // *Physics Reports*. 2011. V. 503. № 4–5. P. 115–163.
<http://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.03.002>
11. *Stassi S., Marini M., Allione M., Lopatin S., Marson D., Laurini E., et al.* Nanomechanical DNA resonators for sensing and structural analysis of DNA-ligand complexes // *Nat. Commun.* 2019. № 10. P. 1–10.
<http://doi.org/10.1038/s41467-019-09612-0>
12. *Jaber N., Hafiz M.A.A., Kazmi S.N.R., Hasan M.H., Alsaleem F., Ilyas S., Younis M.I.* Efficient excitation of micro/nano resonators and their higher order modes // *Sci. Rep.* 2019. № 9. P. 319.
<http://doi.org/10.1038/s41598-018-36482-1>
13. *SoltanRezaee M., Bodaghi M.* Simulation of an electrically actuated cantilever as a novel biosensor // *Sci. Rep.* 2020. № 10. P. 3385.
<http://doi.org/10.1038/s41598-020-60296-9>
14. *Tavakolian F., Farrokhabadi A., SoltanRezaee M., Rahmanian S.* Dynamic pull-in of thermal cantilever nanoswitches subjected to dispersion and axial forces using nonlocal elasticity theory // *Microsystem Technologies*. 2019. V. 25. № 3. P. 19–30.
<https://doi.org/10.1007/s00542-018-3926-y>
15. *Ильгамов М.А.* Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // *ДАН*. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
<https://doi.org/10.7868/S086956521728009X>
16. *Ильгамов М.А.* Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // *ФТТ*. 2019. Т. 61. № 10. С. 1825–1830.
<https://doi.org/10.21883/FTT.2019.10.48255.381>
17. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of Pressure on the Frequency Spectrum of Micro and Nanoresonators on Hinged Supports // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. V. 7. № 2. P. 977–983.
<https://doi.org/10.22055/JACM.2021.36470.2848>
18. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины // *Изв. РАН. МТТ*. 2022. № 3. С. 88–96.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922030084>
19. *Паймушин В.Н., Газизуллин Р.К.* Уточненные аналитические решения связанных задач о свободных и вынужденных колебаниях прямоугольной композитной пластины, окруженной акустическими средами // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2020. Т. 162. № 2. С. 160–179.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.2.160-179>
20. *Морозов Н.А., Гребенюк Г.И., Максак В.И., Гаврилов А.А.* Исследования собственных колебаний прямоугольных пластин // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2023. Т. 25. № 3. С. 96–111.
<https://doi.org/10.31675/1607-1859-2023-25-3-96-111>
21. *Сабитов К.Б.* Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // “Известия высших учебных заведений. Математика.” 2021. № 10. С. 60–70.
<https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-10-60-70>
22. *Сабитов К.Б.* Колебания пластины с граничными условиями “шарнир–заделка” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2022. Т. 26. № 4. С. 650–671.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1950>
23. *Сабитов К.Б.* Колебания пластины со смешанными граничными условиями // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2023. № 3. С. 63–77.
<https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-63-77>
24. *Сабитов К.Б.* Прямая и обратные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластинки по отысканию источника // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023. Т. 63. № 4. С. 614–628.
<https://doi.org/10.31857/S0044466923040142>
25. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

DETERMINATION OF THE SPECTRUM OF FREQUENCIES AND VIBRATIONS OF A RECTANGULAR PLATE, MOBILY EMPLOYED AROUND THE EDGE, IN DIFFERENT ENVIRONMENTS

K. B. Sabitov^{a, *}, A. G. Khakimov^{a, **}

^a*Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russia*

^{*}*e-mail: sabitov_fmfm@mail.ru,*

^{**}*e-mail: hakimov@anrb.ru*

Abstract. The spectrum of frequencies and shapes of bending vibrations of a rectangular plate in contact with a liquid or gas are determined. A derivation of the expression for the distributed transverse load on a plate movably embedded along the contour is given. The surfaces of the plate are in contact with media of different densities and pressures. The medium can be compressible during surface deformation and incompressible. The influence on the bending of the interaction of average pressure and changes in the curvature of the middle surface, as well as the added mass of the gaseous medium, is determined.

Keywords: thin plate, liquid, gas, density, pressure, attached mass, velocity potential, frequency spectrum, forms of self-oscillation

REFERENCES

1. *Gontkevich V.S.* Natural oscillations of shells in a liquid. Kyiv: Naukova Dumka, 1964. 102 p. (in Russian).
2. *Ilgamov M.A.* Oscillations of elastic shells containing liquid and gas. M.: Nauka, 1969. 180 p. (in Russian).
3. *Popov A.L., Chernyshev G.N.* Mechanics of sound emission from plates and shells. M.: Fizmatlit. 1994. 208 p. (in Russian).
4. *Nesterov S.V.* Flexural vibration of a square plate clamped along its contour // *Mech. Solids*. 2011. V. 46. № 6. P. 946–951.
<https://doi.org/10.3103/S0025654411060148>
5. *Denisov S.L., Kopyev V.F., Medvedsky A.L., Ostrikov N.N.* Investigation of the problems of durability of orthotropic polygonal plates under broadband acoustic exposure taking into account the effects of radiation // *Mech. Solids*. 2020. V. 55. № 5. P. 716–727.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420300019>
6. *O'Connell A.D., Hofheinz M., Ansmann M., Bialczak R.C., Lenander M., Lucero E. et al.* Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // *Nature*. 2010. № 464. P. 697–703.
<https://doi.org/10.1038/nature08967>
7. *Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M., Shen W., Carlson G., Foster J.S. et al.* Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // *Nature*. 2007. № 446. P. 1066–1069.
<https://doi.org/10.1038/nature05741>
8. *Husale S., Persson H.H.J., Sahin O.* DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // *Nature*. 2009. № 462. P. 1075–1078.
<https://doi.org/10.1038/nature08626>
9. *Raman A., Melcher J., Tung R.* Cantilever dynamics in atomic force microscopy // *Nano Today*. 2008. V. 3. № 1–2. P. 20–27.
[https://doi.org/10.1016/S1748-0132\(08\)70012-4](https://doi.org/10.1016/S1748-0132(08)70012-4)

10. *Eom K., Park H.S., Yoon D.S., Kwon T.* Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics principles // *Physics Reports—Review Section of Physics Letters*. 2011. V. 503. № 4–5. P. 115–163.
<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2011.03.002>
11. *Stassi S., Marini M., Allione M., Lopatin S., Marson D., Laurini E. et al.* Nanomechanical DNA resonators for sensing and structural analysis of DNA-ligand complexes // *Nature Communications*. 2019. № 10. P. 1–10.
<https://doi.org/10.1038/s41467-019-09612-0>
12. *Jaber N., Hafiz M.A.A., Kazmi S.N.R., Hasan M.H., Alsaleem F., Ilyas S., Younis M.I.* Efficient excitation of micro/nano resonators and their higher order modes // *Sci. Rep.* 2019. V. 9. P. 319.
<https://doi.org/10.1038/s41598-018-36482-1>
13. *Soltan Rezaee M., Bodaghi M.* Simulation of an electrically actuated cantilever as a novel bio-sensor // *Sci. Rep.* 2020. V. 10. P. 3385.
<https://doi.org/10.1038/s41598-020-60296-9>
14. *Tavakolian F., Farrokhabadi A., SoltanRezaee M., Rahmanian S.* Dynamic pull-in of thermal cantilever nanoswitches subject to dispersion and axial forces using nonlocal elasticity theory // *Microsystem Technol.* 2019. V. 25. № 3. P. 19–30.
<https://doi.org/10.1007/s00542-018-3926-y>
15. *Ilgamov M.A.* Influence of the ambient pressure on thin plate and film bending // *Doklady physics*. 2017. V. 62. № 10. P. 461–464.
<https://doi.org/10.1134/S1028335817100020>
16. *Ilgamov M.A.* The influence of surface effects on bending and vibrations of nanofilms // *Physics of the Solid State*. 2019. V. 61. № 10. P. 1779–1784.
<https://doi.org/10.1134/S1063783419100172>
17. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // *J. Appl. Comp. Mech.* 2021. V. 7. № 2. P. 977–983.
<https://doi.org/10.22055/JACM.2021.36470.2848>
18. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of ambient pressure on the lowest oscillation frequency of a plate // *Mech. Solids*. 2022. V. 57. № 3. P. 524–531.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422030141>
19. *Paimuship V.N., Gazizullin R.K.* Refined analytical solutions of the coupled problems on free and forced vibrations of a rectangular composite plate surrounded by acoustic media // *Uchen. zap. Kazan, Univ. Ser. Phys.-mathematical sciences*. 2020. V. 162. № 2. P. 160–179.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.2.160-179>
20. *Morozov N.A., Grebenyuk G.I., Maksak V.I., Gavrilov A.F.* Free vibrations of rectangular plates // *J. Constr. Arch.* 2023. V. 25. № 3. P. 96–111 (in Russian).
<https://doi.org/10.31675/1607-1859-2023-25-3-96-111>
21. *Sabitov K.B.* Initial-boundary value problems for equation of oscillations of a rectangular plate // *Russian Mathematics*. 2021. V. 65. № 10. P. 52–62.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X21100054>
22. *Sabitov K.B.* Vibrations of plate with boundary “hinged attachment” conditions // *J. Samara State Tech. University, Ser. Phys. Math. Sci.* 2022. V. 26. № 4. P. 650–671 (In Russian).
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1950>
23. *Sabitov K.B.* Plate oscillations with mixed boundary conditions // *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*. 2023. № 3. P. 63–77 (In Russian).
<https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-63-77>
24. *Sabitov K.B.* Direct and inverse problems for the equation of oscillations of a rectangular plate to find the source // *J. Comp. Math. Math. Phys.* 2023. V. 63. № 4. P. 614–628 (In Russian).
<https://doi.org/10.31857/S0044466923040142>
25. *Timoshenko S.P., Voinovsky–Krieger S.* Plates and shells. M.: Nauka, 1966. 636 p. (In Russian).