

УДК 534.1

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОВОДОВ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ С ГОЛОЛЕДНЫМ ОТЛОЖЕНИЕМ

© 2024 г. А. Н. Данилин<sup>a, \*</sup>, Е. А. Денисов<sup>b, \*\*</sup>,  
В. А. Фельдштейн<sup>a, b, \*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

<sup>b</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Долгопрудный, Россия

\*e-mail: andanilin@yandex.ru,

\*\*e-mail: denisov.egor@phystech.edu,

\*\*\*e-mail: dinpro@mail.ru

Поступила в редакцию 26.05.2024 г.

После доработки 16.07.2024 г.

Принята к публикации 25.07.2024 г.

Рассматривается задача о свободных пространственных колебаниях провода воздушной линии электропередачи с несимметричным распределением массы по сечению, обусловленным гололедными отложениями на его поверхности, которые придают сечению несимметричную форму. В результате между центрами крутильной жесткости и массы в сечении образуется эксцентризитет и возникает динамическая связь вертикальных, крутильных и “маятниковых” колебаний с выходом провода из плоскости провисания. Провод моделируется гибким тяжелым упругим стержнем, сопротивляющимся только растяжению и кручению. Исследуется случай слабо провисающего провода, когда натяжение и кривизну его осевой линии можно считать постоянными в пределах пролета. Считается также, что упругость гололедной оболочки мала по сравнению с упругостью провода. Математическая модель строится с учетом взаимодействия продольных, крутильных и поперечных волн, поляризованных в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Проанализированы соотношения фазовых скоростей всех типов волн и выделена группа частных подсистем, определяющих парциальные колебания. Исследованы парциальные и собственные частоты и формы колебаний провода. Получены аналитические решения задачи определения спектра собственных частот и форм пространственных колебаний. Исследовано влияние гололедной оболочки на спектр колебаний провода. Обнаружена зависимость волнового числа крутильных колебаний от частоты, которая определяется не только упруго-инерционным, но также гравитационным фактором, сильно проявляющимся для проводов в длинных пролетах, особенно подверженных пляске (галопированию). Это обстоятельство существенно для анализа феномена пляски с позиций, связывающих возникновение пляски сближением частот крутильных и поперечных мод при обледенении провода.

Показано, что соотношение этих частот, вызывающих автоколебательный процесс, оказывается существенно более сложным.

**Ключевые слова:** электропередача, провод, гололедные отложения, колебания, волны, частоты, формы колебаний

**DOI:** 10.31857/S1026351924060082, **EDN:** TYZZZT

**1. Введение.** Провода воздушных линий электропередачи в механическом отношении представляют собой сильно натянутые гибкие упругие стержни большого удлинения. Очевидная аналогия со струной качественно верно объясняет их склонность к колебаниям, возбуждаемым ветром, подвижностью подвески на опорах, колебаниями температуры. В соответствии с классификацией CIGRE (Conseil International des Grands Réseaux Électriques) – авторитетной научно-технической ассоциации специалистов-энергетиков всего мира, колебания проводов разделяют на три группы [1]. Одну из них образуют эоловы вибрации – поперечные колебания с амплитудой порядка диаметра провода и с частотой от 5 до 50 Гц, которые возбуждаются периодическим воздействием вихревой дорожки Кармана при поперечном обтекании провода ветровым потоком. Вторую группу образуют так называемые субколебания – нелинейные колебания проводов расщепленных (многопроводных) фаз с частотами от 0.5 до 5 Гц, вызываемые действием аэродинамического (спутного) следа. К третьей, наименее исследованной группе относятся колебания с низкими частотами от 0.2 до 3 Гц с амплитудами порядка нескольких метров. Это явление, называемое галопированием или пляской, наблюдается, как правило, при сочетании ветра и гололедных отложений на поверхности провода, которые придают сечению несимметричную форму и аэродинамическое качество. В результате между центрами крутильной жесткости и массы в сечении образуется эксцентризитет, возникает динамическая связь вертикальных, крутильных и “маятниковых” колебаний с выходом провода из вертикальной плоскости провисания. Феномен галопирования обычно связывают с понижением высоких частот крутильных мод при обледенении провода и с их сближением с низкими частотами поперечных колебаний. Однако изменение соотношения этих частот оказывается существенно более сложным. В совокупности перечисленные факторы считаются причиной развития автоколебаний по типу флаттера. Это представление является в мире энергетики доминирующим [2–6]. Однако известны случаи возникновения пляски совсем в иных условиях, необъяснимые с позиций данной концепции [7].

Как нормирование прочности и эксплуатационного ресурса, так и разработка технических средств парирования колебаний должны основываться на анализе особенностей колебаний проводов во всем актуальном диапазоне частот с учетом изменения динамических характеристик провода вследствие обледенения. Данная статья является продолжением исследований авторов, изложенных в работе [8], и содержит анализ собственных частот колебаний провода на основе модели, учитывающей взаимосвязь различных (парциальных) колебаний, обусловленную изменением динамических характеристик провода при его обледенении.

**2. Физическая модель и исходные уравнения.** Стальалюминиевый провод типа АС [9] рассматривается как однородный цилиндрический упругий стержень с длиной  $L$  и диаметром сечения  $d$ , с жесткостями на растяжение  $B$  и кручение  $D$ , лишенный изгибной жесткости. Определение жесткостей реальных

проводов представляет собой самостоятельную сложную задачу, поэтому для крутильной жесткости используется аппроксимация:  $D = 2.7 \cdot 10^8 d^4$ , предложенная в [10, 11]. Для жесткости на растяжение принимается модель параллельного соединения отдельных проволок:  $B = E_{Al}F_{Al} + E_{St}F_{St}$ . Рассматривается практически важный случай слабо провисающего провода, когда можно считать его натяжение  $T_S$  и кривизну осевой линии постоянными вдоль пролета, связанными со стрелой провисания  $f$  соотношением:  $k_S = mg/T_S = 8f/L^2$  [3]. Материальная длина провода  $L$  и расстояние между равновысокими точками подвеса в рамках технической теории считаются совпадающими. Упругость гололедной оболочки мала по сравнению с упругостью провода, поэтому центр крутильной жесткости  $\tilde{O}$ , принимаемый за полюс сечения, при обледенении остается на оси провода, а центр массы сечения  $C$  смещается относительно полюса на величину эксцентрикитета  $\Delta$ . В исходном состоянии (отсутствие обледенения) погонная масса и радиус сечения провода равны  $m_0$ ,  $r_0 = d/\sqrt{8}$ , а ось провода располагается в вертикальной плоскости со стрелой провисания  $f_0$ , которой соответствует кривизна  $k_{S0} = 8f_0/L^2$ . В конечном состоянии (при обледенении) эти параметры приобретают новые значения:  $m = \mu m_0$ ,  $r = \vartheta r_0$ ,  $f = \phi f_0$ ,  $k_S = \phi k_{S0}$ , сечения поворачиваются относительно полюса  $\tilde{O}$  на угол  $\Phi_S$ , переменный по длине, а плоскость провисания отклоняется от вертикали на угол  $\psi$ .

С поперечным сечением провода связывается натуральный триэдр, образованный единичными векторами касательной  $\tau$ , нормали  $n$  и бинормали  $b = \tau \times n$  с центром в точке оси  $\tilde{O}$ . Соответственно направлениям осей триэдра вводится локальная (левая) система координат  $\tilde{O}xyz$ , движущаяся относительно глобальной координатной системы  $OXYZ$ , как показано на рис. 1. В качестве координаты используется длина дуги  $s$  осевой линии провода. Рассматриваются свободные колебания, при которых в пролете образуются стоячие продольные, крутильные и поперечные волны.

На практике представляет интерес влияние обледенения на собственные частоты колебаний. Изменение частот обусловлено как повышением инерционных характеристик провода, так и изменением стрелы провисания вследствие увеличения веса провода. Поэтому необходимо различать его

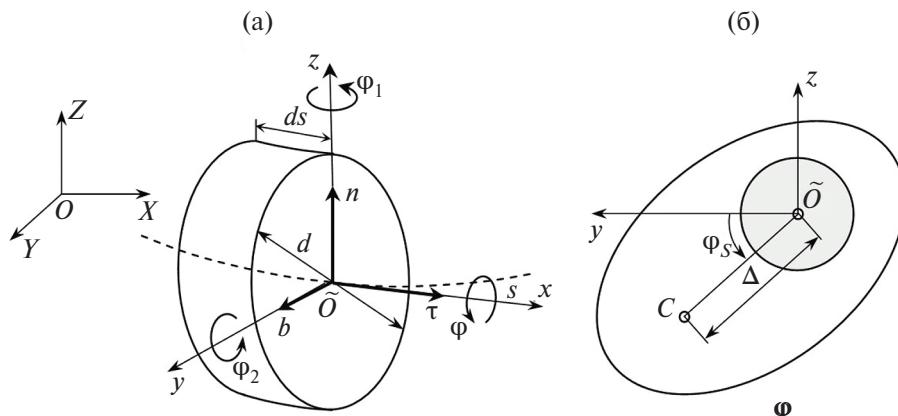


Рис. 1. Положительные направления осей координатных систем и углов поворота.

конфигурации в начальном и конечном состояниях, которые определяются величинами стрел провисания.

Для определения связи между ними запишем условия равновесия провода в сравниваемых состояниях. В рамках технической теории эти условия имеют вид:  $m_0 g L^2 = 64 B f_0 (f_0^2 - f_{nat}^2) / (3L^2)$  и  $mg L^2 = 64 B f (f^2 - f_{nat}^2) / (3L^2)$ , где  $f_{nat}$  – стрела в натуральном состоянии (при отсутствии деформаций). Исключая  $f_{nat}$ , придем к уравнению для определения коэффициента изменения стрелы провисания  $\phi = f/f_0$ :  $\beta_0 \phi^3 + \phi(1 - \beta_0) - \mu = 0$ , где коэффициент  $\beta_0 = 64 B f_0^3 / (3m_0 g L^4)$ . Все дальнейшие построения относятся к конечному состоянию провода.

При колебаниях точки оси получают перемещение из положения равновесия  $\mathbf{U} = u(s)\mathbf{t} + w(s)\mathbf{n} + v(s)\mathbf{b}$ , а поперечные сечения, считающиеся недеформируемыми, поворачиваются на малый угол  $\boldsymbol{\Phi} = \phi(s)\mathbf{t} + \phi_1(s)\mathbf{n} + \phi_2(s)\mathbf{b}$ . Число степеней свободы сечения (шесть) уменьшается до четырех, если использовать обычные для теории стержней связи, состоящие в отсутствии поперечных сдвигов и выразить углы поворота через производные перемещений по  $s$ :  $\phi_1 = -v'$ ,  $\phi_2 = w'$ . В этой модели деформации растяжения, кручение и соответствующие им продольное натяжение и крутящий момент равны

$$\epsilon = u' - k_S w + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2), \quad \chi = \phi' - k_S v'; \quad T = B\epsilon, \quad H = D\chi.$$

Здесь удержаны слагаемые второго порядка относительно поворотов, чтобы учесть влияние статического натяжения провода на его колебания, которые в дальнейшем считаются малыми.

Уравнения колебаний следуют из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского:  $\delta \int_{t_2}^{t_1} (K - \Pi) dt = 0$ . Кинетическая энергия равна:

$$K = \frac{m}{2} \int_0^L \left[ \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 - 2\Delta\dot{\phi}(\dot{w} \cos \phi_S + \dot{v} \sin \phi_S) \right] ds.$$

Потенциальная энергия складывается из энергии деформации  $\Pi_1$  и приращения энергии  $\Pi_2$  в поле тяжести при изменении положения центра массы сечения за счет вертикального смещения  $w$  вместе с полюсом и поворота на угол  $\phi_\Sigma = \phi - v k_S$ :

$$\Pi_1 = \int_0^L \left[ \frac{B}{2} \epsilon^2 + T_S \epsilon + \frac{D}{2} \chi^2 + H_S \chi \right] ds, \quad \Pi_2 = mg \int_0^L [w - \Delta\phi_\Sigma \cos(\phi_S + \phi_\Sigma)] ds.$$

Стандартная процедура приводит к системе уравнений, в которой сохранены только линейные по  $u, v, w, \phi$ , слагаемые; величины  $O(k_S^2)$  также считаются величинами второго порядка малости ввиду исходного предположения о плавности кривой провисания провода:

$$\begin{aligned} m \ddot{u} &= T' + \underline{T'_S} \\ m \ddot{w} - m \Delta \cos \phi_S \ddot{\phi} &= T_S w'' + k_S T + \underline{k_S T_S - mg} \\ m \ddot{v} - m \Delta \sin \phi_S \ddot{\phi} &= T_S v'' - k_S H' - \underline{k_S (H'_S + mg \Delta \cos \phi_S)} \\ m r^2 \ddot{\phi} - m \Delta (\ddot{w} \cos \phi_S + \ddot{v} \sin \phi_S) &= H' - 2mg \Delta \phi \sin \phi_S + \underline{H'_S + mg \Delta \cos \phi_S}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

На краях предполагается отсутствие перемещений и поворота:  $u = v = w = 0$ ,  $\varphi = 0$ . Подчеркнутые слагаемые равны нулю в силу условий статики и дают уравнения для определения формы провисания и угла поворота сечения в положении равновесия  $w_S(s)$ ,  $\varphi_S(s)$ . Пренебрегая вкладом перемещения  $v_S$ , запишем:

$$w_S'' = mgL^2/T_S, \quad \varphi_S'' + \kappa \cos \varphi_S = 0.$$

Здесь дифференцирование ведется по безразмерной координате  $x = s/L$ . Параметр  $\kappa = \mu m_0 g \Delta L^2 / D$  обобщенно характеризует упруго-инерционные характеристики провода и гололедной оболочки.

Решение первого уравнения дает известное соотношение технической теории гибкой нити малого провисания:

$$w_S = f \psi_S(x), \quad f = mgL^2/8T_S, \quad \psi_S(x) = 4x(1-x).$$

Второе уравнение имеет первый интеграл:  $\varphi_S' = \sqrt{2\kappa(\sin \varphi_m - \sin \varphi)}$ , где постоянная интегрирования  $\varphi_m$  – максимальный угол поворота сечения (в центре пролета). Второй интеграл:

$$x = \int_0^{\varphi} \frac{dz}{\sqrt{2\kappa(\sin \varphi_m - \sin z)}} = F(\varphi).$$

Величина  $\varphi_m$  определяется из условия, что угол поворота максимальен при  $x = 1/2$ ; это приводит к уравнению  $F(\varphi_m) = 1/2$ . Непосредственный расчет указывает на то, что достаточно точной является следующая аппроксимация решения:

$$\varphi_S(x, \kappa) = \frac{\pi}{2} \left(1 - e^{-0.075\kappa}\right) \psi_S(x). \quad (2.2)$$

Перейдем в уравнениях (2.1) к перемещениям:

$$\begin{aligned} \ddot{u} - c_u^2 u'' &= -k_S c_u^2 w' \\ \ddot{w} - c_w^2 w'' + k_S^2 c_u^2 w &= k_S c_u^2 u' + \Delta \ddot{\varphi} \cos \varphi_S \\ \ddot{v} - c_v^2 v'' - k_S r^2 c_\varphi^2 \varphi'' &= \Delta \ddot{\varphi} \sin \varphi_S \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\ddot{\varphi} - c_\varphi^2 \varphi'' + 2mg \Delta \varphi \sin \varphi_S = -k_S c_\varphi^2 v'' + \Delta r^{-2} (\ddot{w} \cos \varphi_S + \ddot{v} \sin \varphi_S).$$

Здесь величины

$$\begin{aligned} c_u &= \sqrt{B/m} = \sqrt{B/\mu m_0} = c_u^0 / \sqrt{\mu} \\ c_v &= \sqrt{c_w^2 + k_S^2 r^2 c_\varphi^2} = c_w \sqrt{1 + k_{S0}^2 r_0^2 \left(c_\varphi^0 / c_w^0\right)^2 \phi^3 / \mu} \\ c_w &= \sqrt{T_S/m} = \sqrt{g/k_S} = \sqrt{g/(\phi k_{S0})} = c_w^0 / \sqrt{\phi} \\ c_\varphi &= \sqrt{D/(mr^2)} = \sqrt{D/(m_0 r_0^2 \mu \vartheta^2)} = c_\varphi^0 / \sqrt{\mu \vartheta^2} \end{aligned}$$

– фазовые скорости парциальных продольных, поперечных (в вертикальном и горизонтальном направлениях) и крутильных волн в конечном и исходном состояниях (последние отмечены верхним индексом “0”).

Левые части уравнений (2.3) представляют собой операторы, описывающие парциальные продольные, крутильные и поперечные волны в проводе. При отсутствии или равномерном распределении массы гололеда по сечению провода центр массы сечения лежит на оси провода ( $\Delta = 0$ ), и система распадается на две независимые подсистемы, описывающие продольно-поперечные волны в вертикальной плоскости и поперечно-крутильные – в горизонтальном направлении.

Между перечисленными скоростями существуют соотношения, играющие важную роль в формировании собственных частот провода. Скорость продольных упругих волн  $c_u^0 \approx 5000 \text{ м/с}$ . Характерная скорость поперечных волн при отсутствии гололеда  $c_w^0 \approx 100 \text{ м/с}$ . Сопоставление аппроксимации крутильной жесткости, предложенной в работах [10, 11], с ее традиционной формой  $D = G_{eq}\pi d^4 / 32 = 2.7 \cdot 10^8 d^4$  приводит к эквивалентному модулю сдвига провода при кручении:  $G_{eq} = 2.75 \text{ ГПа}$ , что примерно на порядок меньше модуля сдвига алюминиевого сплава провода. Полагая:  $G_{eq} \approx 3 \text{ ГПа}$ ,  $\rho_{eq} \approx 3000 \text{ кг/м}$ , оценим скорость крутильной волны:  $c_\phi^0 = \sqrt{G_{eq}/\rho_{eq}} \approx 1000 \text{ м/с}$ .

При обледенении фазовые скорости уменьшаются, однако скорость продольной волны остается существенно больше скорости поперечной, так как  $\phi, \mu = O(1)$ , а деформация статического растяжения  $\varepsilon_S = T_S/B \approx 10^{-3}$ , откуда следует, что  $\alpha = c_u/c_w = \sqrt{\phi/(\mu\varepsilon_S)} \gg 1$ . Отношение  $\gamma = c_\phi/c_w = (c_\phi^0 \sqrt{\phi}) / (c_w^0 \sqrt{\mu})$  не столь большое, если учесть, что  $c_\phi^0/c_w^0 < 10$ , а параметры  $\phi, \mu, \vartheta = O(1)$ . Тем не менее, для реальных проводов можно считать, что  $\gamma^2 \gg 1$ . Так как кривизна провисающего провода  $k_S < 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ , а радиус инерции сечения  $r < 10^{-2} \text{ м}$ , то  $c_w^2 \gg k_S^2 r^2 c_\phi^2$  и  $\beta = c_v/c_w \approx 1 + k_S^2 r^2 \gamma^2 / 2 = O(1)$ . Таким образом, среди парциальных колебаний наиболее высокие частоты должны быть у продольных, а наименьшие – у поперечных, тогда как частоты крутильных занимают промежуточное положение.

Исключая время подстановкой  $(u, v, w, \phi) \rightarrow (u, v, w, \phi) e^{i\omega t}$ , перейдем к безразмерным параметрам:  $\tilde{\omega} = \omega L/c_w$ ,  $x = s/L$ ,  $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = (u, v, w)/d$ , и вместо (2.3) приедем к однородной краевой задаче типа Штурма–Лиувилля с нулевыми граничными условиями (в дальнейшем значок тильды опускается):

$$\begin{aligned} \zeta \omega^2 u + \alpha^2 u'' &= \alpha^2 \eta w' \\ (\omega^2 - \alpha^2 \eta^2) w + w'' &= -\alpha^2 \eta u' + \omega^2 \delta \phi \cos \phi_S \\ \omega^2 v + \beta^2 v'' &= \tau \gamma^2 \rho^2 \phi'' + \omega^2 \delta \phi \sin \phi_S \\ (\omega^2 - 2\kappa \gamma^2 \sin \phi_S) \phi + \gamma^2 \phi'' &= \tau \gamma^2 v'' + \omega^2 \delta \rho^{-2} (v \sin \phi_S + w \cos \phi_S). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В первое уравнение системы (2.4) введен множитель  $\zeta$ , принимающий значения 1 или 0. При  $\zeta = 0$  не учитываются продольные силы инерции и сопутствующие им волны, малые в наиболее интересном частотном диапазоне. При этом эффект упругого растяжения провода сохраняется.

В уравнениях (2.4) в дополнение к ранее установленным соотношениям фазовых скоростей  $\alpha, \beta, \gamma$  введены безразмерные величины:

$$\tau = dk_S = dk_{S0}\phi, \quad \eta = Lk_S = Lk_{S0}\phi, \quad \delta = \Delta/d, \quad \rho = r/d = \vartheta/\sqrt{8}.$$

Оценим практически возможные диапазоны изменения безразмерных коэффициентов. Увеличение массы можно оценить исходя из того, что соотношение масс  $\mu = m/m_0$  не может превышать соотношение предельно допустимого и эксплуатационного натяжения провода, которое примерно равно 5 [3], поэтому примем, что  $1 < \mu < 5$ . Из (2.2) следует, что верхняя граница актуального диапазона изменения коэффициента  $\kappa$  составляет:  $\kappa_{\max} \approx 50$ . Для сечений гололеда, симметричных относительно линии центров ОС, имеет место неравенство  $\Delta \leq r$ . Эксплуатационные характеристики проводов [9] позволяют оценить остальные параметры:  $\tau \ll 10^{-4}$ ,  $\eta \approx 0.2 - 0.3$ . Наименее определена величина  $\rho$ : можно считать  $\rho = O(1)$ , исходя из точной нижней границы  $\rho_{\min} = 1/\sqrt{8}$ .

Учитывая, что  $\alpha^2 \gg 1$ , для характерных пролетов длиной  $L \approx 300$  м и  $c_w \approx 100$  м/с в диапазоне частот до 5 Гц безразмерная частота лежит в интервале  $0 < \omega < 100$ . Приводимые в дальнейшем числовые оценки относятся к распространенному на практике пролету ВЛЭ с проводом АС 150/24 длиной 300 м при стреле провисания в исходном состоянии 10 м. Механические характеристики провода: погонная масса  $m_0 = 0.6$  кг/м, диаметр  $d = 17$  мм, жесткость на растяжение  $B = 15$  МН, жесткость на кручение  $D = 23$  МН·м<sup>2</sup>. Для него (при выбранном масштабе частоты) значению  $\omega = 1$  соответствует частота, равная примерно 0.05 Гц. Для параметров, характеризующих гололедную оболочку, условно принято:  $\mu = 2$ ,  $\vartheta = 2$ ,  $\delta = 0.1$ .

Система уравнений (2.4) имеет переменные коэффициенты, связанные с изменением угла статического закручивания  $\Phi_S$  провода по длине пролета. Учитывая неизбежную неопределенность распределения гололедных отложений, заменим тригонометрические функции этого угла их средними по длине значениями:

$$S(\kappa) = \int_0^1 \sin \varphi_S(x, \kappa) dx, \quad C(\kappa) = \int_0^1 \cos \varphi_S(x, \kappa) dx.$$

Полагая  $(u, w, v, \varphi) = (U, W, V, \Phi) e^{i\lambda x}$  и подставляя эти выражения в уравнения (2.4), придем к системе однородных уравнений относительно амплитуд  $U, V, W, \Phi$  с постоянными коэффициентами:

$$M(\lambda, \omega) \begin{pmatrix} U \\ W \\ V \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 & q_{24} \\ 0 & 0 & q_{33} & q_{34} \\ 0 & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ W \\ V \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & d_1 \\ d_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ W \\ V \\ \Phi \end{pmatrix} = 0, \quad (2.5)$$

где обозначено:

$$q_{11} = \zeta \omega^2 - \alpha^2 \lambda^2, \quad q_{12} = -q_{21} = -i\lambda \alpha^2 \eta, \quad q_{22} = \omega^2 - \alpha^2 \eta^2 - \lambda^2$$

$$q_{24} = -\omega^2 \delta C, \quad q_{33} = \omega^2 - \beta^2 \lambda^2, \quad q_{34} = \tau \rho^2 \gamma^2 - \delta \omega^2 S, \quad q_{42} = -\delta \omega^2 C / \rho^2$$

$$q_{43} = \tau \gamma^2 \lambda^2 - \delta \omega^2 S / \rho^2, \quad q_{44} = \omega^2 - 2\kappa \gamma^2 S - \gamma^2 \lambda^2.$$

Диагональные элементы матрицы  $q_{ii}$  определяют парциальные квазиструнные колебания, когда все виды волн, кроме одного, “заморожены”. Элементы  $q_{12}, q_{21}$ , образующие подматрицу  $D_1$ , связывают продольные и поперечные волны в вертикальном направлении. Элементы  $q_{34}, q_{43}$ , образующие подматрицу  $D_2$ , связывают крутые и поперечные волны маятниковых колебаний в горизонтальном направлении. Элементы  $q_{24}, q_{42}$ , пропорциональные эксцентриситету  $\Delta$ , определяют связь этих подматриц. При отсутствии гололеда или при его осесимметричном распределении по сечению провода эксцентриситет  $\Delta = 0$ , матрица  $M$  становится блочно-диагональной, а системы для определения форм  $U, W$  и  $V, \Phi$  независимыми. Раскрывая определитель матрицы системы (2.5), придем к уравнению, связывающему волновые числа  $\lambda$  с частотой  $\omega$ :

$$D(\omega, \lambda) = \begin{vmatrix} D_1 & d_1 \\ d_2 & D_2 \end{vmatrix} = |D_1||D_2| - q_{11}q_{33}\omega^4 C^2 \delta^2 / \rho^2. \quad (2.6)$$

**3. Парциальные колебания.** Прежде чем перейти к общему случаю, рассмотрим выделенные группы парциальных колебаний.

*3.1. Продольно-поперечные колебания в вертикальной плоскости.* Прежде всего рассмотрим парциальную подсистему  $D_1(UW)^T = 0$ , описывающую продольные и поперечные колебания в вертикальной плоскости. Обозначая:  $z = \lambda^2$  и сохраняя продольную силу инерции ( $\zeta = 1$ ), запишем детерминант подматрицы  $D_1$ :

$$|D_1| = \alpha^2 \left[ z^2 - (\alpha^{-2} + 1)\omega^2 z + \alpha^{-2}\omega^2 (\omega^2 - \alpha^2 \eta^2) \right] = 0. \quad (3.1)$$

Корни этого полинома вещественны, а их знаки различаются в условно низко- и высокочастотном диапазонах, разграниченных критическим значением  $\omega_{cr}^{(1)} = \alpha\eta$ ; при  $\omega > \alpha\eta$  они положительны, а при  $\omega \leq \alpha\eta$  имеют различные знаки. Применимально к распространенным типам проводов и длин пролетов эта величина составляет 0.3–1.0 Гц, то есть лежит в диапазоне частот, на которых регистрируются явления пляски проводов [2, 3]. Отметим, что если не учитывать растяжение провода, то рассматриваемая подсистема сводится к единственному уравнению  $(\omega^2 - \alpha^2 \eta^2)w + w'' = 0$ , которое в низкочастотной области не имеет колебательных решений, в результате чего часть низких частот окажется потерянной.

Не выписывая выражений для корней полинома, оценим их соотношение. Так как скорости продольных и поперечных волн сильно различаются и  $\alpha^2 \gg 1$ , следует ожидать, что волновые числа и, следовательно, корни  $z_{1,2}$  также будут весьма различными. Из теоремы Виета следуют оценки:  $z_1 = O(\omega^2)$ ,  $z_2 = O(|(\omega/\alpha)^2 - \eta^2|)$  и соотношение:  $z_1 \gg |z_2|$ . Большой корень соответствует поперечным, а меньший – продольным волнам.

Общее решение подсистемы  $D_1(UW)^T = 0$  в общем случае имеет вид:

$$W_k = \sum_{k=1}^4 A_k e^{i\lambda_k x}, \quad U_k = \sum_{k=1}^4 iA_k \sigma_k e^{i\lambda_k x} = \sum_{k=1}^4 A_k \sigma_k e^{i(\lambda_k x + \pi/2)}, \quad (3.2)$$

а из первого уравнения системы (2.5) для каждого  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) следуют соотношения:  $U_k = -q_{12}(\lambda_k)/q_{11}(\lambda_k) = i\sigma_k W_k$ , определяющие коэффициенты распределения амплитуд.

В высокочастотной области корни полинома (3.1) вещественны и положительны:  $z_{1,2} = \chi_{1,2}^2$  и волновые числа вещественны:

$$\lambda_{1,2} = \pm\chi_1 \approx \pm\tilde{\chi}_1 = \pm\omega, \quad \lambda_{3,4} = \pm\chi_2 \approx \pm\tilde{\chi}_2 = \pm\sqrt{(\omega/\alpha)^2 - \eta^2}.$$

Первая пара соответствует медленным, преимущественно поперечным, вторая – быстрым, преимущественно продольным волнам. Им соответствуют коэффициенты распределения:

$$\sigma_{1,2} = \pm\delta_1, \quad \sigma_{3,4} = \pm\delta_2, \quad \delta_1 = \frac{\eta\alpha^2\chi_1}{\omega^2 - \alpha^2\chi_1^2}, \quad \delta_2 = \frac{\eta\alpha^2\chi_2}{\omega^2 - \alpha^2\chi_2^2}.$$

Общее решение (3.2) может быть записано в эквивалентной тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} W &= C_1 \cos \chi_1 x + C_2 \sin \chi_1 x + C_3 \cos \chi_2 x + C_4 \sin \chi_2 x \\ U &= -\delta_1 C_1 \sin \chi_1 x + \delta_1 C_2 \cos \chi_1 x - \delta_2 C_3 \sin \chi_2 x + \delta_2 C_4 \cos \chi_2 x. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В низкочастотной области один из корней полинома (3.1)  $z_1 = \chi_1^2$  положителен, другой отрицателен:  $z_2 = -\chi_2^2$ . Это дает пару вещественных волновых чисел:  $\lambda_{1,2} = \pm\chi_1$  и пару мнимых:  $\lambda_{3,4} = \pm i\chi_2$ . Им соответствуют коэффициенты распределения:  $\sigma_{1,2} = \pm\delta_1$ ,  $\sigma_{3,4} = \pm i\delta_3$ , где  $\delta_3 = \eta\alpha^2\chi_2/(\omega^2 + \alpha^2\chi_2^2)$ , и общее решение:

$$\begin{aligned} W &= C_1 \cos \chi_1 x + C_2 \sin \chi_1 x + C_3 \operatorname{ch} \chi_2 x + C_4 \operatorname{sh} \chi_2 x \\ U &= -\delta_1 C_1 \sin \chi_1 x + \delta_1 C_2 \cos \chi_1 x + \delta_3 C_3 \operatorname{sh} \chi_2 x + \delta_3 C_4 \operatorname{ch} \chi_2 x. \end{aligned} \quad (3.4)$$

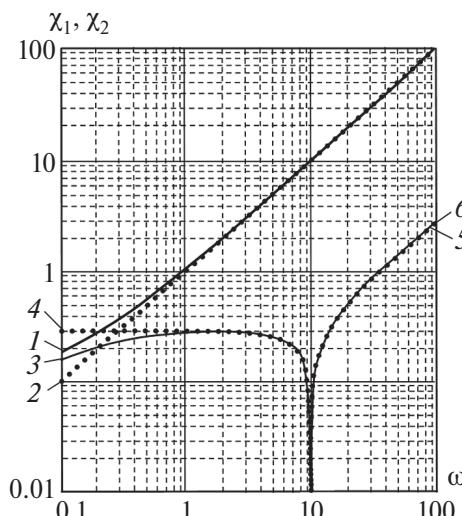


Рис. 2. Зависимости модулей волновых чисел  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  от частоты  $\omega$ . Сплошные линии – точные значения, точечные – приближенные. Цифрами от 1 до 6 обозначены соответственно зависимости:  $\chi_1(\omega)$ ,  $\tilde{\chi}_1(\omega)$ ;  $-\chi_2(\omega)$ ,  $-\tilde{\chi}_2(\omega)$ ,  $\chi_2(\omega)$ ,  $\tilde{\chi}_2(\omega)$ .

На рис. 2 показаны точные зависимости параметров  $\chi_{1,2}$  и их приближенных значений от частоты. Как видно, они близки практически во всем актуальном диапазоне частот, причем  $\chi_1 \gg \chi_2$ . В данном случае критическая частота  $\omega_{cr}^{(1)} = 9.91$ .

В дальнейшем используется раздельный анализ мод симметричных ( $S$ -мод) и антисимметричных ( $A$ -мод). Помещая начало координат в центре пролета, сохраним в (3.3) и (3.4) поочередно только симметричные (четные по  $w$ , нечетные по  $u$ ) и антисимметричные (нечетные по  $w$ , четные по  $u$ ) слагаемые. Например, симметричные моды в высокочастотной области согласно (3.3):

$$W = C_1 \cos \chi_1 x + C_3 \cos \chi_2 x, \quad U = -\delta_1 C_1 \sin \chi_1 x - \delta_3 C_3 \sin \chi_2 x. \quad (3.5)$$

Подчиняя  $W, U$  однородным граничным условиям при  $x = \pm 1/2$ , получим частотное уравнение:  $D_{1S} = \delta_2 \cos(\chi_1/2) \cdot \sin(\chi_2/2) - \delta_1 \sin(\chi_1/2) \cdot \cos(\chi_2/2) = 0$ . После определения спектра собственных частот  $\omega_k$ , для каждой из них, полагая  $C_{1k} = 1$ , из первого равенства (3.5) определим  $C_{3k} = -\cos(\chi_1(\omega_k)/2)/\cos(\chi_2(\omega_k)/2)$  и соответствующие моды  $W_k, U_k$ . Аналогично для низкочастотной области, а также для  $A$ -мод. Результаты сведены в табл. 1, где строки соответствуют типам мод, а столбцы – частотным областям и использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\cos(\chi_1/2)}{\cos(\chi_2/2)}, \quad \psi_2 = \frac{\sin(\chi_1/2)}{\sin(\chi_2/2)}, \quad \psi_3 = \frac{\cos(\chi_1/2)}{\operatorname{ch}(\chi_2/2)}, \quad \psi_4 = \frac{\sin(\chi_1/2)}{\operatorname{sh}(\chi_2/2)} \\ \psi_5 &= \frac{\cos(\chi_1/2)}{\cos(\omega/2)}, \quad \psi_6 = \frac{\sin(\chi_1/2)}{\sin(\omega/2)}. \end{aligned}$$

На рис. 3 приведены значения первых шести частот и формы симметричных (a, b, c) и антисимметричных колебаний (d, e, f). Как видно, начиная примерно с четвертой частоты, между ними устанавливается практически постоянный интервал, что характерно для колебаний прямолинейной струны. Отметим существенное отличие первых мод от “струнных”, следующих закону синуса. Однако, начиная с четвертой-пятой частоты, форма колебаний приближается к синусоидальной.

*3.2. Маятниково-крутильные колебания.* Рассмотрим вторую парциальную подсистему  $D_2(V\Phi)^T = 0$ , описывающую крутильные и поперечные (маятниковые) колебания в горизонтальной плоскости. Пренебрегая слагаемыми  $O(\tau^2)$  имеем:

$$\begin{aligned} |D_2| = \gamma^2 \beta^2 \left[ z^2 - z \left( \frac{\omega^2}{\gamma^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} - 2\kappa S - 2\delta\varepsilon S \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\omega^4}{\beta^2 \gamma^2} \left( 1 - \frac{\delta^2}{\rho^2} S^2 \right) - 2\kappa S \frac{\omega^2}{\beta^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для этой подсистемы также существует критическая частота, разделяющая высоко- и низкочастотные диапазоны:  $\omega_{cr}^{(2)} = \sqrt{2\gamma^2 \kappa S / \left( 1 - \delta^2 S^2 / \rho^2 \right)} \approx \gamma \sqrt{2\kappa S}$ .

Таблица 1. Уравнения и моды колебаний в вертикальной плоскости

UW	Низкие частоты	Высокие частоты
<i>S</i>	$D_{1S} = \delta_3 \cos \frac{\chi_1}{2} \operatorname{sh} \frac{\chi_2}{2} +$ $+ \delta_1 \sin \frac{\chi_1}{2} \operatorname{ch} \frac{\chi_2}{2} = 0$ $W = \cos \chi_1 x - \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x$ $U = -\delta_1 \sin \chi_1 x - \delta_3 \psi_3 \operatorname{sh} \chi_2 x$	$D_{1S} = \delta_2 \cos \frac{\chi_1}{2} \sin \frac{\chi_2}{2} -$ $- \delta_1 \sin \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} = 0$ $W = \cos \chi_1 x - \psi_1 \cos \chi_2 x$ $U = -\delta_1 \sin \chi_1 x + \delta_2 \psi_1 \sin \chi_2 x$
<i>A</i>	$D_{1S} = \delta_3 \sin \frac{\chi_1}{2} \operatorname{ch} \frac{\chi_2}{2} -$ $- \delta_1 \cos \frac{\chi_1}{2} \operatorname{sh} \frac{\chi_2}{2} = 0$ $W = \sin \chi_1 x - \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x$ $U = \delta_1 \cos \chi_1 x - \delta_3 \psi_4 \operatorname{ch} \chi_2 x$	$D_{1S} = \delta_2 \sin \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} -$ $- \delta_1 \sin \frac{\chi_2}{2} \cos \frac{\chi_1}{2} = 0$ $W = \sin \chi_1 x - \psi_2 \sin \chi_2 x$ $U = \delta_1 \cos \chi_1 x - \delta_2 \psi_2 \cos \chi_2 x$

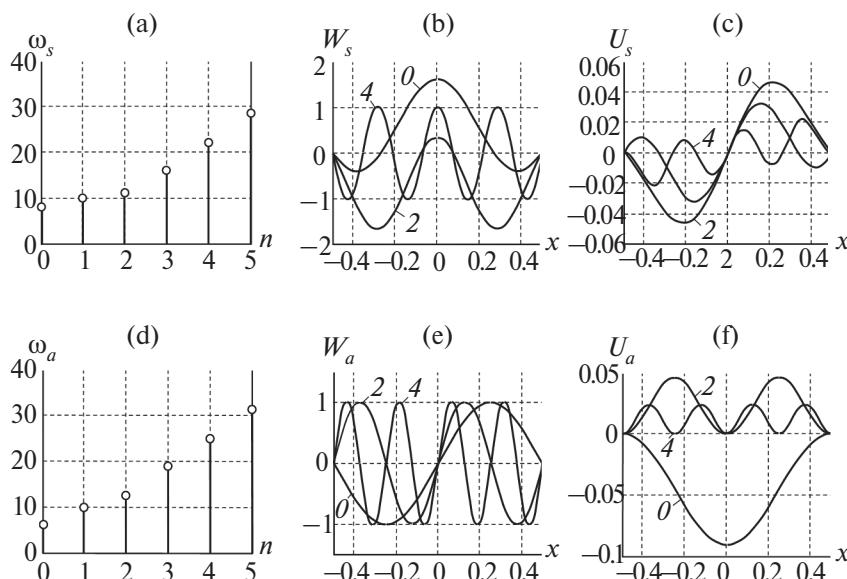


Рис. 3. Зависимость частот от номера гармоники симметричных и антисимметричных колебаний (а, д); формы колебаний: поперечные (б, с) и продольные (е, ф) компоненты. Цифрами обозначены номера гармоник.

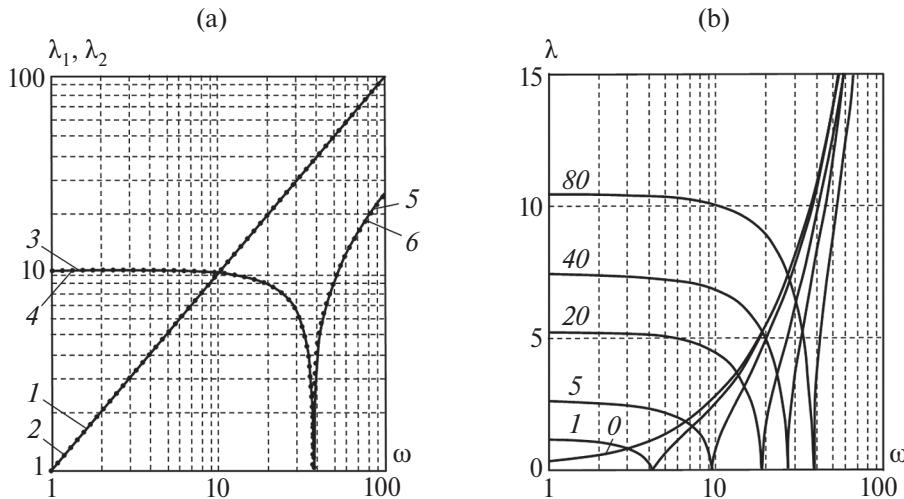


Рис. 4. а) – точные и приближенные зависимости волновых чисел от частоты; цифрами от 1 до 6 обозначены соответственно зависимости:  $\lambda_1(\omega)$ ,  $\tilde{\lambda}_1(\omega)$ ,  $-\lambda_2(\omega)$ ,  $-\tilde{\lambda}_2(\omega)$ ,  $\lambda_2(\omega)$ ,  $\tilde{\lambda}_2(\omega)$ ; б) – зависимости волновых чисел крутильных колебаний от частоты при различных значениях параметра  $k = 80, 40, 20, 5, 1, 0$ , характеризующего обледенение.

Отметим, что при уменьшении угла статического закручивания  $\varphi_S$  инерционная связь поперечной и крутильной волн ослабевает, низкочастотная область сокращается и при  $S = 0$  (горизонтально ориентированная гололедная оболочка) полностью исчезает. Отмеченные ранее свойства корней полинома сохраняются, поэтому будем сохранять принятые обозначения волновых чисел, параметров  $\chi_{1,2}$  и коэффициентов  $\delta_{1,2,3}$ , которые теперь рассчитываются на основе корней полинома (3.6). Отличие состоит в том, что соотношение амплитуд, определяемое из третьего уравнения системы (2.5), имеет вид  $\Phi_k = \sigma_k V_k$ , где  $\sigma_k = q_{33}(\lambda_k)/q_{34}(\lambda_k)$  и все коэффициенты распределения вещественны. Отметим, что последнее уравнение системы (2.4) для крутильной компоненты, взятое отдельно от поступательных компонент:  $\ddot{\varphi} - c_\varphi^2 \varphi'' + 2mg\Delta\varphi \sin \varphi_S = 0$ , ниже критической частоты  $\omega_{cr}^{(2)}$  не имеет колебательного решения.

При условиях, выполняющихся для большинства проводов ВЛЭ ( $\gamma^2 \gg 1$ ,  $\tau \ll 1$ ,  $\delta^2/\rho^2 \ll 1$ ), оценка корней полинома дает:

$$z_1 = \chi_1^2 \approx \tilde{z}_1 = \omega^2/\beta^2, \quad |z_2| = \chi_2^2 \approx |\tilde{z}_2| = \left| \omega^2/\gamma^2 - 2\kappa S \right|. \quad (3.7)$$

Первый корень соответствует медленным маятниковым колебаниям, частоты которых близки к частотам поперечных вертикальных, а второй – относительно быстрым крутильным. Проверка показывает, что эта оценка так же, как и в случае колебаний первой группы, справедлива для типовых проводов ВЛЭ. Это видно из графиков на рис. 4,а, где приведены практически совпадающие зависимости точных ( $\lambda_{1,2} = \sqrt{z_{1,2}}$ ) и приближенных ( $\tilde{\lambda}_{1,2} = \sqrt{|\tilde{z}_{1,2}|}$ ) волновых чисел от частоты. Интересно отметить, что для крутильных колебаний эти зависимости в низкочастотной области (в данном случае  $\omega_{cr}^{(2)} \approx 40$ ) имеют аномальный характер: волновое число не уменьшается с частотой, что

характерно для чисто упругих крутильных колебаний жестких конструкций типа валов.

В случае относительно гибкого провода в выражении  $|\tilde{z}_2|$  роль первого слагаемого, связанного с крутильной жесткостью, на низких частотах падает и основную роль играет второе — связанное с силами гравитации при несовпадении центров массы и жесткости в поперечном сечении провода.

Эту особенность крутильных колебаний иллюстрируют кривые на рис. 4,б, где приведены зависимости волновых чисел от частоты при различных значениях параметра  $\kappa$ , обобщенно характеризующего обледенение. Кривые соответствуют значениям  $\kappa = 80, 40, 20, 5, 1, 0$ . Видно, что при уменьшении этого параметра аномалия смещается в область низких частот и исчезает при отсутствии гололеда, а дисперсионная зависимость восстанавливает нормальный вид  $\lambda \sim \omega$ . Эта особенность должна играть существенную роль при колебаниях проводов, в особенности при длинных пролетах ВЛЭ.

Общее решение подсистемы  $D_2(V\Phi)^T = 0$ , таким образом, имеет вид:

$$V_k = \sum_{k=1}^4 B_k e^{i\lambda_k x}, \quad \Phi_k = \sum_{k=1}^4 B_k \sigma_k e^{i\lambda_k x}.$$

В высокочастотной области:

$$\lambda_{1,2} = \pm \chi_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm \chi_2; \quad \sigma_{1,2} = \frac{\omega^2 - \chi_1^2 \beta^2}{\delta \omega^2 S - \tau \gamma^2 \rho^2 \chi_1^2} = \delta_1,$$

$$\sigma_{3,4} = \frac{\omega^2 - \chi_2^2 \beta^2}{\delta \omega^2 S - \tau \gamma^2 \rho^2 \chi_2^2} = \delta_2$$

$$V = C_1 \cos \chi_1 x + C_2 \sin \chi_1 x + C_3 \cos \chi_2 x + C_4 \sin \chi_2 x$$

$$\Phi = \delta_1 C_1 \cos \chi_1 x + \delta_1 C_2 \sin \chi_1 x + \delta_2 C_3 \cos \chi_2 x + \delta_2 C_4 \sin \chi_2 x.$$

В низкочастотной области:

$$\lambda_{1,2} = \pm \chi_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \chi_2; \quad \sigma_{1,2} = \delta_1, \quad \sigma_{3,4} = \frac{\omega^2 + \chi_2^2 \beta^2}{\delta \omega^2 S + \tau \gamma^2 \rho^2 \chi_2^2} = \delta_3$$

**Таблица 2.** Уравнения и моды маятниково-крутильных колебаний

$V\Phi$	Низкие частоты	Высокие частоты
S	$D_{2S} = \cos \frac{\chi_1}{2} = 0$ $V = \cos \chi_1 x - \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x$ $\Phi = \delta_1 \cos \chi_1 x - \delta_3 \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x$	$D_{2S} = \cos \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} = 0$ $V = \cos \chi_1 x - \psi_1 \cos \chi_2 x$ $\Phi = \delta_1 \cos \chi_1 x - \delta_2 \psi_1 \cos \chi_2 x$
A	$D_{2A} = \sin \frac{\chi_1}{2} = 0$ $V = \sin \chi_1 x - \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x$ $\Phi = \delta_1 \sin \chi_1 x - \delta_3 \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x$	$D_{2A} = \sin \frac{\chi_1}{2} \sin \frac{\chi_2}{2} = 0$ $V = \sin \chi_1 x - \psi_2 \sin \chi_2 x$ $\Phi = \delta_1 \sin \chi_1 x - \delta_2 \psi_2 \sin \chi_2 x$

$$V = C_1 \cos \chi_1 x + C_2 \sin \chi_1 x + C_3 \operatorname{ch} \chi_2 x + C_4 \operatorname{sh} \chi_2 x$$

$$\Phi = \delta_1 C_1 \cos \chi_1 x + \delta_1 C_2 \sin \chi_1 x + \delta_3 C_3 \operatorname{ch} \chi_2 x + \delta_3 C_4 \operatorname{sh} \chi_2 x.$$

Разделяя моды на симметричные и антисимметричные, получим соответствующие частотные уравнения и собственные функции. В данном случае  $S$ -модам соответствуют четные,  $A$ -модам – нечетные слагаемые в обоих выражениях. Результаты приведены в табл. 2. В правых частях  $D_{2S}$ ,  $D_{2A}$  опущены монотонные по частоте множители, не влияющие на положение их нулей. Отметим, что функции (3.5) сохраняют вид и в этом случае, но параметры  $\chi_{1,2}$ ,  $\delta_{1,2,3}$  – теперь функции корней полинома (3.6).

Искомые частоты являются нулями функций  $\cos \chi_{1,2}$  и  $\sin \chi_{1,2}$ . Поэтому обозначим:  $\Omega_{C1}$  – множество нулей функции  $\cos(\chi_1/2)$ ,  $\Omega_{C2}$  – множество нулей функции  $\cos(\chi_2/2)$  в высокочастотном диапазоне. Аналогично:  $\Omega_{S1}$ ,  $\Omega_{S2}$  – для нулей функций  $\sin(\chi_1/2)$  и  $\sin(\chi_2/2)$ . Используя приближенные выражения (3.2.2) для параметров  $\chi_{1,2}$ , найдем элементы этих множеств:

$$\Omega_{C1} = \{(2k+1)\beta\pi\}, \quad \Omega_{C2} = \left\{ \gamma \sqrt{2KS + \pi^2 (2k+1)^2} > \omega_{cr}^{(2)} \right\}$$

$$\Omega_{S1} = \{2k\beta\pi\}, \quad \Omega_{S2} = \left\{ \gamma \sqrt{2KS + 4k^2\pi^2} > \omega_{cr}^{(2)} \right\}.$$

Спектры симметричных, антисимметричных мод и общий спектр формируются объединением этих множеств:

$$\Omega_S = \Omega_{C1} \cup \Omega_{C2}, \quad \Omega_A = \Omega_{S1} \cup \Omega_{S2}, \quad \Omega_{\nu\Phi} = \Omega_S \cup \Omega_A.$$

Коэффициенты  $k = 0, 1, 2, \dots$  – целые числа, при которых удовлетворяются условия  $\cos \chi_{1,2} = 0$ ,  $\sin \chi_{1,2} = 0$ , поэтому их элементы, составляющие множества  $\Omega_S$  и  $\Omega_A$ , “перемешаны”; для придания полученному набору принятой формы спектра необходимо упорядочить элементы в порядке возрастания. Результат расчета частот приведен на рис. 5.

Формы колебаний в данном случае практически на всех частотах близки к “струнным” и не обнаруживают отмеченных ранее особенностей вертикально поляризованных низкочастотных мод.

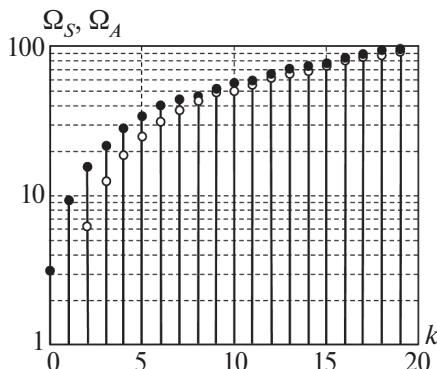


Рис. 5. Парциальные частоты маятниково-крутильных колебаний: симметричные (заполненные кружки) и антисимметричные частоты (пустые кружки).

**4. Связанные колебания. Аналитическое решение.** Рассмотрим теперь общую систему (2.5), описывающую связанные колебания, пренебрегая при этом тангенциальной силой инерции и положив в первом уравнении  $\zeta = 0$ . В этом случае детерминант (2.6) примет вид:

$$D(\omega, \lambda) = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 z (z - \omega^2) D_0(z) = 0 \quad (4.1)$$

$$D_0 = z^2 - z \left( \frac{\omega^2}{\beta^2} + \frac{\omega^2}{\gamma^2} - 2\kappa S - 2\delta\varepsilon S \frac{\omega^2}{\beta^2} \right) + \frac{\omega^4}{\gamma^2 \beta^2} \left( 1 - \frac{\delta^2}{\rho^2} \right) - 2\kappa S \frac{\omega^2}{\beta^2}.$$

Корни полинома  $D_0(z)$  обладают тем же свойством, что и корни полиномов (3.1), (3.6), но к ним добавляется корень  $\chi_3 = \omega^2$  и соответствующая ему пара новых волновых чисел:  $\lambda_{5,6} = \pm\sqrt{\chi_3} = \pm\omega$  вертикально поляризованных поперечных волн. Критическая частота в данном случае равна  $\omega_{cr}^{(1-2)} = \sqrt{2\gamma^2 \kappa S / (1 - \delta^2/\rho^2)} \approx \gamma\sqrt{2\kappa S}$ , что практически близко к  $\omega_{cr}^{(2)}$ . Таким образом, в высокочастотной области:

$$\lambda_{1,2} = \pm\chi_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm\chi_2, \quad \lambda_{5,6} = \pm\omega,$$

в низкочастотной:

$$\lambda_{1,2} = \pm\chi_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\chi_2, \quad \lambda_{5,6} = \pm\omega.$$

Нулевой корень – следствие пренебрежения продольной силой инерции; это, однако, не означает пренебрежения упругими тангенциальными смещениями  $U$ , которые сохраняются и квазистатически “отслеживают” поперечные смещения  $W$ , но сами по себе практического интереса обычно не представляют. В данном случае имеют место оценки:

$$\chi_1 \approx \omega/\beta, \quad \chi_2 \approx \sqrt{(\omega/\gamma)^2 - 2\kappa S}.$$

Общее решение системы (2.5) и коэффициенты распределения имеют вид:

$$W_k = \sum_{k=1}^6 B_k e^{i\lambda_k x}, \quad V_k = \sum_{k=1}^6 B_k \sigma_k e^{i\lambda_k x}, \quad \Phi_k = \sum_{k=1}^6 B_k \xi_k e^{i\lambda_k x}$$

$$\sigma_k = q_{34}(\lambda_k) q_{42}(\lambda_k) / |D_2(\lambda_k)|, \quad \xi_k = q_{33}(\lambda_k) q_{42}(\lambda_k) / |D_2(\lambda_k)|.$$

Так как среди них есть попарно равные, обозначим:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 = \delta_1, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \delta_2, \quad \sigma_5 = \sigma_6 = \delta_3; \\ \xi_1 &= \xi_2 = \delta_4, \quad \xi_3 = \xi_4 = \delta_5, \quad \xi_5 = \xi_6 = \delta_6. \end{aligned}$$

Не выписывая подробные выражения, заметим только, что они вычисляются на базе решений уравнения (4.1) с учетом различия выражений волновых чисел в низко- и высокочастотной областях. Окончательно решение в высокочастотной области имеет вид:

$$\begin{aligned}
 W &= C_1 \cos \chi_1 x + C_2 \sin \chi_1 x + C_3 \cos \chi_2 x + \\
 &\quad + C_4 \sin \chi_2 x + C_5 \cos \omega x + C_6 \sin \omega x \\
 V &= C_1 \delta_1 \cos \chi_1 x + C_2 \delta_1 \sin \chi_1 x + C_3 \delta_2 \cos \chi_2 x + \\
 &\quad + C_4 \delta_2 \sin \chi_2 x + C_5 \delta_3 \cos \omega x + C_6 \delta_3 \sin \omega x \quad (4.2) \\
 \Phi &= C_1 \delta_4 \cos \chi_1 x + C_2 \delta_4 \sin \chi_1 x + C_3 \delta_5 \cos \chi_2 x + \\
 &\quad + C_4 \delta_5 \sin \chi_2 x + C_5 \delta_6 \cos \omega x + C_6 \delta_6 \sin \omega x.
 \end{aligned}$$

Рассматривая симметричные моды и подставляя четные составляющие выражений (4.2) в однородные граничные условия при  $x = 1/2$ , легко видеть, что соответствующие детерминанты (частотные уравнения) имеют вид:  $D_S \sim \cos(\chi_1/2) \cos(\chi_2/2) \cos(\omega/2)$  в высокочастотной области и  $D_S \sim \cos(\chi_1/2) \cos(\omega/2)$  в низкочастотной (с точностью до монотонного множителя — функции коэффициентов распределения  $f(\delta_k)$ , который может быть опущен). Следовательно, спектр собственных частот состоит из множества нулей этих функций:

$$\omega_k^{(1)} = 2\pi k, \quad \omega_k^{(2)} = 2\pi k\beta, \quad \omega_k^{(3)} = \gamma \sqrt{2\kappa S + (2\pi k)^2}.$$

Аналогичный результат имеет место для нечетных мод при замене синусов на косинусы:

$$\omega_k^{(1)} = \pi(2k-1), \quad \omega_k^{(2)} = \beta\pi(2k-1), \quad \omega_k^{(3)} = \gamma \sqrt{2\kappa S + \pi^2(2k-1)^2}.$$

Сравнение показывает, что спектр  $\Omega_{VW\Phi}$  полной системы (2.5) отличается от спектра  $\Omega_{V\Phi}$  системы  $D_2(V\Phi)^T = 0$  только множеством частот  $\omega_k^{(1)} = \pi(2k+1)/2$  и  $\omega_k^{(2)} = k\pi$ . Однако в рассматриваемом примере фазовые скорости поперечных вертикально и горизонтально поляризованных волн практически совпадают и их отношение  $\beta \approx 1$ . Это означает наличие “почти кратных частот” парциальных вертикальных и маятниковых колебаний. Это обстоятельство может играть существенную роль в процессе самовозбуждения галопирования проводов в ветровом потоке.

Окончательные результаты сведены в табл. 3. В ней обозначено:  $a_1(\omega) = (\delta_1 - \delta_3)/(\delta_3 - \delta_2)$ ,  $b_1(\omega) = (\delta_2 - \delta_1)/(\delta_3 - \delta_2)$ , причем параметры  $\chi_{1,2}$ ,  $\delta_{1\dots 6}$ ,  $\Psi_{1\dots 6}$  теперь являются функциями корней полинома (4.1).

В заключение заметим, что сведение определения частот к поиску нулей тригонометрических функций специальных аргументов, например  $\cos(\chi_2/2) = 0$ , эквивалентно замене расчета реального провода к расчету некоторых эквивалентных струн:  $\cos(\omega L/a_{eq}) = 0$  с фазовыми скоростями  $a_{eq}$ , достаточно просто выражаящимися через параметры провода и характеристики гололедной оболочки.

**5. Метод Галеркина.** Рассмотрим совместные колебания провода без принятых ранее упрощений, то есть сохраним в уравнениях все компоненты сил инерции и откажемся от усреднения угла статического закручивания провода по длине пролета. Применим к полной системе (2.5) метод Галеркина, используя в качестве базисных функций  $\theta_k = \sin k\pi x$ , удовлетворяющие граничным условиям. Решение примем в виде:

$$(uwv\varphi)^T = \sum_{k=1}^K (a_k \ b_k \ c_k \ d_k)^T \theta_k. \quad (5.1)$$

Таблица 3. Уравнения и моды связанных колебаний

$WV\Phi$	Низкие частоты	Высокие частоты
$S$	$D_{12S} = \cos \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\omega}{2} = 0$ $W = \cos \chi_1 x + a_2 \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x + b_2 \psi_5 \cos \omega x$ $V = \delta_1 \cos \chi_1 x + \delta_2 a_2 \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x + \delta_3 b_2 \psi_5 \cos \omega x$ $\cdot = \delta_4 \cos \chi_1 x + \delta_5 a_2 \psi_3 \operatorname{ch} \chi_2 x + \delta_6 b_2 \psi_5 \cos \omega x$	$D_{12S} = \cos \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} \cos \frac{\omega}{2} = 0$ $W = \cos \chi_1 x + a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x + b_1 \psi_5 \cos \omega x$ $V = \delta_1 \cos \chi_1 x + \delta_2 a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x + \delta_3 b_1 \psi_5 \cos \omega x$ $\Phi = \delta_4 \cos \chi_1 x + \delta_5 a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x + \delta_6 b_1 \psi_5 \cos \omega x$
$A$	$D_{12A} = \sin \frac{\chi_1}{2} \sin \frac{\omega}{2} = 0$ $W = \sin \chi_1 x + a_1 \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x + b_1 \psi_6 \sin \omega x$ $V = \delta_1 \sin \chi_1 x + \delta_2 a_1 \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x + \delta_3 b_1 \psi_6 \sin \omega x$ $\Phi = \delta_4 \sin \chi_1 x + \delta_5 a_1 \psi_4 \operatorname{sh} \chi_2 x + \delta_6 b_1 \psi_6 \sin \omega x$	$D_{12A} = \sin \frac{\chi_1}{2} \sin \frac{\chi_2}{2} \sin \frac{\omega}{2} = 0$ $W = \cos \chi_1 x + a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x + b_1 \psi_5 \cos \omega x$ $V = \delta_1 \cos \chi_1 x + \delta_2 a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x + \delta_3 b_1 \psi_5 \cos \omega x$ $\Phi = \delta_4 \cos \chi_1 x + \delta_5 a_1 \psi_1 \cos \chi_2 x + \delta_6 b_1 \psi_5 \cos \omega x$

Подставляя эти разложения в (2.5) и требуя ортогональности результата подстановки базисным функциям, получим однородную систему уравнений относительно коэффициентов разложения. Однородная система, которой должны удовлетворять коэффициенты разложений (5.1), имеет вид  $Mv = 0$ , где объединенная матрица системы размерности  $4K \times 4K$  и вектор-столбец неизвестных коэффициентов разложения  $v$  размерностью  $4K$  имеют блочную структуру

$$M = \begin{pmatrix} A & C & 0 & 0 \\ -C & F & 0 & G \\ 0 & 0 & B & D \\ 0 & P & H & Q \end{pmatrix}, \quad v = (\dots a_k \ b_k \ c_k \ d_k \ \dots)^T$$

с элементами

$$A_{nk} = (\omega^2 - \alpha^2 k^2 \pi^2) \alpha_{nk}, \quad C_{nk} = -\alpha^2 \eta k \pi \beta_{nk}, \quad F_{nk} = (\omega^2 - \alpha^2 \eta^2 - k^2 \pi^2) \alpha_{nk}$$

$$G_{nk} = -\delta \omega^2 \gamma_{nk}, \quad B_{nk} = (\omega^2 - \beta^2 k^2 \pi^2) \alpha_{nk}, \quad D_{nk} = \tau \gamma^2 \rho^2 k^2 \pi^2 \alpha_{nk} - \delta \omega^2 \chi_{nk}$$

$$P_{nk} = -\delta\omega^2\gamma_{nk}/\rho^2, \quad H_{nk} = \tau\gamma^2k^2\pi^2\alpha_{nk} - \delta\omega^2\chi_{nk}/\rho^2,$$

$$Q_{nk} = \omega^2 - 2\kappa\gamma^2\chi_{nk} - \gamma^2k^2\pi^2\alpha_{nk}.$$

Здесь обозначено:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{nk} \\ \beta_{nk} \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin k\pi x \\ \cos k\pi x \end{pmatrix} \sin n\pi x \, dx, \quad \begin{pmatrix} \gamma_{nk} \\ \chi_{nk} \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \cos f(x) \\ \sin f(x) \end{pmatrix} \sin k\pi x \sin n\pi x \, dx$$

$$f(x) = 2\pi(1 - e^{-0.075\kappa})x(1 - x).$$

Определитель матрицы  $|\mathbf{M}|$  определяет частоты связанных колебаний. Результаты расчетов частот приведены на рис. 6.

Для определения собственных функций (форм колебаний) выберем в качестве единицы измерения амплитуду первой гармоники продольных колебаний  $a_1$ , являющуюся элементом с номером 1 в векторе  $\mathbf{v}$ , и выразим через нее остальные коэффициенты разложений (3.1) из системы:  $\mathbf{M}_{(1,1)}\tilde{\mathbf{v}} = -\mathbf{n}_{(1)}$ , где  $\mathbf{M}_{(1,1)}$  — матрица, образованная из  $\mathbf{M}$  вычеркиванием из неё первого столбца и первой строки, а вектор  $\mathbf{n}_{(1)}$  представляет собой вычеркнутый столбец матрицы  $\mathbf{M}$ , из которого удален элемент с номером 1.

**6. Заключение.** 1) Получены аналитические решения задачи определения спектра собственных частот и форм пространственных колебаний проводов линий электропередачи с учетом гололедных отложений на поверхности провода.

2) Проанализированы соотношения фазовых скоростей всех типов волн и выделена группа частных подсистем, определяющих парциальные колебания, преимущественно регистрируемые в эксплуатационной практике. Показано, что частотные уравнения парциальных подсистем могут быть сведены к традиционным уравнениям частот прямолинейной струны с “приведенной” фазовой скоростью, которая связана простыми зависимостями с характеристиками реального провода.

3) Исследовано влияние гололедной оболочки на спектр колебаний провода. Обнаружена аномальная зависимость волнового числа крутильных колебаний от частоты, особенно сильно проявляющаяся в случае длинных пролетов ВЛЭ. Это обстоятельство важно в связи с тем, что явление галопирования принято объяснять сближением высоких частот крутильных мод с низкими частотами поперечных при обледенении провода, однако изменение соотношения этих частот оказывается существенно более сложным.

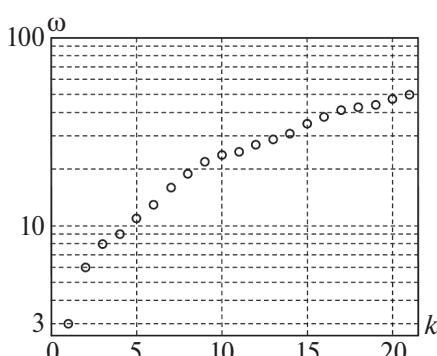


Рис. 6. Частоты связанных колебаний по методу Галеркина.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-19-00678.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колебания проводов воздушных линий под воздействием ветра. Учебно-справочное пособие. Часть 1. Усталостная прочность. Вибрация / Под ред. А.А. Виноградова М.: Электросетьстройпроект, 2005. 185 с.
2. Яковлев Л.В. Пляски проводов на воздушных линиях электропередачи и способы борьбы с ней. М.: Энергопрогресс, 2002. 96 с.
3. Проектирование линий электропередачи сверхвысокого напряжения / Под ред. Г.П. Александрова. С-Пб.: Энергоатомиздат, 1993. 368 с.
4. Zuopeng Wen, Haiwei Xu, Wenjuan Lou. Galloping stability criterion for a 3-DOF system considering aerodynamic stiffness and inertial coupling // J. Struct. Eng. ASCE. 2022. V. 148. № 6. P. 04022048.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0003328](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0003328)
5. Wenjuan Lou, Dengguo Wu, Haiwei Xu, Jiang Yu. Galloping stability criterion for 3-DOF coupled motion of an ice-accreted conductor // J. Struct. Eng. ASCE. 2020. V. 146. № 5. P. 04020071.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0002601](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002601)
6. Haiwei Xu, Kunyang Ding, Guohui Shen, Hang Du, Yong Chen. Experimental investigation on wind-induced vibration of photovoltaic modules supported by suspension cables // Eng. Struct. 2024. V. 299. P. 117125.  
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.117125>
7. Danilin A.N., Onuchin E.S., Feldshteyn V.A. Model of thermomechanical vibrations of current-carrying conductors // Int. J. Comput. Civil Struct. Eng. 2022. V. 18. № 4. P. 39–48.  
<https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-4-39-48>
8. Valtullin A.A., Danilin A.N., Feldshteyn V.A. Normal vibrations of sagging conductors of overhead power lines // Int. J. Comput. Civil Struct. Eng. 2022. V. 18. № 3. P. 147–158.  
<https://doi.org/10.22337/2587-9618-2022-18-3-147-158>
9. ГОСТ 839-80. Провода неизолированные для воздушных линий электропередачи. Технические условия.
10. Виноградов А.А., Данилин А.Н., Рабинский Л.Н. Деформирование многослойных проволочных конструкций спирального типа. Математическое моделирование, примеры использования. М.: Изд-во МАИ, 2014. 168 с.
11. Dubois H., Lilien J.L., Dal Maso F. A new theory for frequencies computation of overhead lines bundle conductors // Rev. AIM. Liege. 1991. № 1. P. 46–62.

## SPATIAL VIBRATIONS OF POWER TRANSMISSION CONDUCTORS WITH ICE DEPOSITS

A. N. Danilin<sup>a, \*</sup>, E. A. Denisov<sup>b, \*\*</sup>, V. A. Feldstein<sup>a, b, \*\*\*</sup><sup>a</sup>*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*<sup>b</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudny, Russia*

\*e-mail: andanilin@yandex.ru,

\*\*e-mail: denisov.egor@phystech.edu,

\*\*\*e-mail: dinpro@mail.ru

**Abstract.** The problem of free spatial vibrations of an overhead power line wire with an asymmetric mass distribution over a cross-section caused by ice deposits on its surface, which give the cross-section an asymmetric shape, is considered. As a result, an eccentricity is formed between the centers of torsional stiffness and mass in the cross section and a dynamic connection of vertical, torsional and “pendulum” vibrations occurs with the output of the wire from the sagging plane. The wire is modeled by a flexible heavy elastic rod that resists only stretching and torsion. The case of a weakly

sagging wire is investigated, when the tension and curvature of its centerline can be considered constant within the span. It is also believed that the elasticity of the ice casing is small compared to the elasticity of the wire. The mathematical model is constructed taking into account the interaction of longitudinal, torsional and transverse waves polarized in the vertical and horizontal planes. The relations of the phase velocities of all types of waves are analyzed and a group of particular subsystems determining partial oscillations is identified. The partial and natural frequencies and waveforms of the wire are studied. Analytical solutions to the problem of determining the spectrum of natural frequencies and forms of spatial vibrations are obtained. The effect of the ice casing on the vibration spectrum of the wire is studied. The dependence of the wave number of torsional vibrations on the frequency has been found, which is determined not only by the elastic-inertial, but also by the gravitational factor, which is strongly manifested for wires in long spans, especially those prone to Aeolian vibration (galloping). This circumstance is essential for the analysis of the Aeolian vibration phenomenon from the positions linking the occurrence of dancing by the convergence of the frequencies of torsional and transverse modes during the icing of the wire. It has been shown that the ratio of these frequencies, which cause an auto-oscillatory process, turns out to be significantly more complex.

**Keywords:** power transmission, conductor, ice deposits, vibrations, waves, frequencies, vibration modes

#### REFERENCES:

1. Vibrations of overhead line conductors under the wind influence. Educational and reference manual. Part 1. Fatigue strength. Vibration / Ed. *Vinogradov A.A.M.*: Publishing house of JSC "Elektrosetstroyproekt", 2005. 185 p.
2. *Yakovlev L.V.* Conductor galloping on overhead power lines and ways to combat it. M.: NTF "Energoprogress", "Energetik", 2002. 96 p.
3. Design of ultra-high voltage power lines / Ed. *Alexandrov G.P.* St. Petersburg: "Energoatomizdat", 1993. 368 p.
4. *Zuopeng Wen, Haiwei Xu, Wenjuan Lou.* Galloping stability criterion for a 3-DOF system considering aerodynamic stiffness and inertial coupling // Journal of Structural Engineering-ASCE, 2022, V.148, No.6: 04022048. doi:10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0003328
5. *Wenjuan Lou, Dengguo Wu, Haiwei Xu, Jiang Yu.* Galloping stability criterion for 3-DOF coupled motion of an ice-accreted conductor // Journal of Structural Engineering-ASCE, 2020, V.146, No.5: 04020071. doi:10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002601
6. *Haiwei Xu, Kunyang Ding, Guohui Shen, Hang Du, Yong Chen.* Experimental investigation on wind-induced vibration of photovoltaic modules supported by suspension cables // Engineering Structures, 2024, V.299: 117125. doi:10.1016/j.engstruct.2023.117125
7. *Danilin A.N., Onuchin E.S., Feldshteyn V.A.* Model of thermomechanical vibrations of current-carrying conductors // Internwational Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2022. V.18. No.4. P.39–48. doi:10.22337/2587-9618-2022-18-4-39-48
8. *Valiullin A.A., Danilin A.N., Feldshteyn V.A.* Normal vibrations of sagging conductors of overhead power lines // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2022. V.18. No.3. P.147–158. doi:10.22337/2587-9618-2022-18-3-147-158
9. GOST 839-80. Non-insulated conductors for overhead power lines. Technical conditions.
10. *Vinogradov A.A., Danilin A.N., Rabinsky L.N.* Deformation of multilayer spiral wire structures. Mathematical modeling, examples of use. M.: MAI Publishing House, 2014. 168 p.
11. *Dubois H., Lilien J.L., Dal Maso F.* A new theory for frequencies computation of overhead lines bundle conductors // Rev. AIM. Liege. 1991. No.1. 168 p.