

УДК 531.36

**О ДВИЖЕНИИ БУСИНКИ НА ШЕРОХОВАТОМ ОБРУЧЕ,  
СВОБОДНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ВОКРУГ  
ВЕРТИКАЛЬНОГО ДИАМЕТРА**

© 2024 г. А. А. Буров<sup>а, \*</sup>, В. И. Никонов<sup>а, \*\*</sup>, Е. А. Никонова<sup>а, b, \*\*\*</sup>

*<sup>а</sup>Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”*

*Российской академии наук, Москва, Россия*

*<sup>b</sup>Научно-технологический университет “Сириус”,*

*Федеральная территория “Сириус”, Краснодарский край, Россия*

*\*e-mail: jtm@yandex.ru,*

*\*\*e-mail: nikon\_v@list.ru,*

*\*\*\*e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com.*

Поступила в редакцию 01.07.2024 г.

После доработки 11.07.2024 г.

Принята к публикации 13.07.2024 г.

Рассматривается задача о движении тяжелой бусинки, нанизанной на шероховатый тяжелый обруч, свободно вращающийся вокруг вертикального диаметра. Выявляются неизоллированные множества стационарных движений системы, строится их бифуркационная диаграмма. Изучается зависимость этих решений от существенного параметра задачи — постоянной циклического интеграла. Осуществляется сравнение полученных результатов с результатами, полученными ранее для случая, когда шероховатый обруч вращается вокруг вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью. Строятся характерные фазовые портреты для различных сочетаний параметров системы.

*Ключевые слова:* удерживающие связи, трение, установившиеся движения, неизоллированные относительные равновесия, бифуркационная диаграмма, фазовый портрет

**DOI:** 10.31857/S1026351924060078, **EDN:** TZAGJM

**Введение.** Задача о движении тяжелой бусинки на вращающемся круговом проволочном обруче — классическая задача механики. В случае, когда ось вращения вертикальна и трения нет, эта задача вполне интегрируема. В настоящей работе, в продолжение исследований, начатых ранее (см. [1]), рассматривается задача о движении бусинки на свободно вращающемся около вертикального диаметра тяжелом шероховатом круговом проволочном обруче. Изучается зависимость от параметров задачи областей, заполненных неизоллированными положениями равновесия бусинки относительно вращающейся вместе с обручем системы отсчета. Исследуются бифуркации этих областей. При анализе применяют общие подходы

к исследованию существования, устойчивости и ветвления равновесий, развитые в работах [2–8].

**1. Постановка задачи. Уравнения движения.** Рассмотрим движение тяжелой бусинки  $P$  массы  $m$  пренебрежимо малых размеров, нанизанной на тонкий шероховатый массивный круговой проволоочный обруч  $\mathcal{H}$  с центром  $O$  радиуса  $\ell$  и массы  $M$ . Предположим, что обруч может свободно вращаться вокруг своего вертикального диаметра. Пусть  $OXYZ$  – абсолютная прямоугольная декартова система отсчета (АСО), ось  $OY$  которой направлена вдоль восходящей вертикали, а  $Oxyz$  – подвижная система отсчета (ПСО), ось  $Ox$  которой направлена вдоль горизонтального радиуса обруча, ось  $Oy$  совпадает с осью  $OY$ , а ось  $Oz$  дополняет их до правой тройки.

В настоящей работе предполагается, что свободно вращающийся обруч шероховат и взаимодействие между ним и бусинкой подчиняется закону сухого трения. Основная задача состоит в том, чтобы сопоставить свойства динамики в данной постановке задачи со свойствами динамики в случае, когда обруч вращается с постоянной угловой скоростью [1].

Положение точки  $P$  определяется вектором  $\mathbf{OP}$ , имеющим координаты

$$\mathbf{OP} = (X, Y, Z)^T$$

в АСО и координаты

$$\mathbf{OP} = (x, y, z)^T$$

в ПСО.

Обозначим за  $\psi$  угол поворота ПСО относительно АСО около оси  $OY$ . Тогда для произвольной точки  $P$  координаты относительно АСО и ПСО связаны соотношениями:

$$X = x \cos \psi + z \sin \psi, Y = y, Z = -x \sin \psi + z \cos \psi.$$

Если  $\dot{\psi}$  – величина угловой скорости поворота ПСО около оси  $OY$ , то

$$\dot{X} = \dot{x} \cos \psi - x \dot{\psi} \sin \psi + \dot{z} \sin \psi + z \dot{\psi} \cos \psi$$

$$\dot{Y} = \dot{y}$$

$$\dot{Z} = -\dot{x} \sin \psi - x \dot{\psi} \cos \psi + \dot{z} \cos \psi - z \dot{\psi} \sin \psi$$

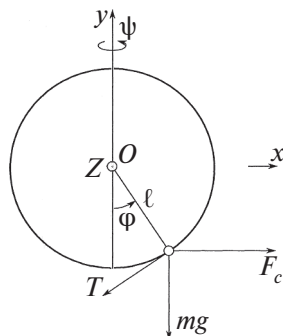


Рис. 1. Бусинка на обруче.

и выражения для кинетической и потенциальной энергии системы запишутся как

$$T = \frac{I}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \frac{I}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{m}{2}((\dot{x} + \dot{\psi}z)^2 + \dot{y}^2 + (\dot{z} - \dot{\psi}x)^2),$$

$$\mathcal{U} = mgy.$$

Здесь и далее  $I$  — момент инерции обруча относительно оси вращения.

В частном случае однородного обруча  $I = \frac{M\ell^2}{2}$ , где  $M$  — масса обруча.

*1.1. Уравнения движения с множителями Лагранжа.* Во время движения точка вынуждена оставаться на обруче  $\mathcal{H}$ . Это обстоятельство может быть интерпретировано как наличие двух голономных удерживающих связей, стесняющих движение системы. В подвижных осях эти связи определяются соотношениями:

$$f_n = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - \ell^2) = 0, \quad f_b = z = 0. \quad (1.1)$$

Выпишем уравнения движения, принимая во внимания связи (1.1). Пусть

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{\psi}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z; \lambda_n, \lambda_b) = T - \mathcal{U} + \lambda_n f_n + \lambda_b f_b. \quad (1.2)$$

Здесь и далее  $\lambda_n, \lambda_b$  — множители Лагранжа, подлежащие вычислению и определяющие нормальную и бинормальную компоненты реакции связи

$$\mathbf{N}_n = \lambda_n \text{grad} f_n \text{ и } \mathbf{N}_b = \lambda_b \text{grad} f_b,$$

направленные вдоль радиуса обруча и перпендикулярно плоскости обруча  $\mathcal{H}$  соответственно. Касательная компонента реакции связей — это сила трения  $\mathbf{T}$ .

Тогда уравнения движения примут вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + T_q, \quad q \in \{\psi, \lambda_n, \lambda_b, x, y, z\}. \quad (1.3)$$

Здесь величины  $T_\psi = T_{\lambda_n} = T_{\lambda_b} \equiv 0$ , а величины  $T_x, T_y, T_z$  — это компоненты силы трения  $\mathbf{T}$ , о структуре которой будет сказано ниже. Выпишем выражения для производных при  $q \in \{x, y, z\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m(\dot{x} + \dot{\psi}z), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -m\dot{\psi}(\dot{z} - \dot{\psi}x) + \lambda_n x, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -mg + \lambda_n y, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m(\dot{z} - \dot{\psi}x), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = m\dot{\psi}(z\dot{\psi} + \dot{x}) + \lambda_b.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I\dot{\psi} + m(z(\dot{x} + \dot{\psi}z) - x(\dot{z} - \dot{\psi}x)) = J\dot{\psi} + m(z\dot{x} - x\dot{z}) = p_{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \quad (1.5)$$

Последнее из равенств в (1.5) справедливо в силу того, что функция Лагранжа (1.2) не зависит явно от угла  $\psi$ . Это означает, что координата  $\psi$  — циклическая и  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = p_{\psi}$  — первый интеграл уравнений движения. Здесь и далее  $J = I + m(z^2 + x^2)$  — момент инерции системы бусинка—обруч относительно оси вращения.

**2. Реакции связей и их вычисление.** Для того чтобы выписать уравнения движения, требуется знать выражение для силы трения. Прежде всего заметим, что  $\tau = \left(-\frac{y}{\ell}, \frac{x}{\ell}, 0\right)^T$  — единичный вектор, касающийся окружности в точке  $P$ . Тогда проекция относительной скорости  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$  точки  $P$  на касательную в этой точке составляет

$$v_{\tau} = (\mathbf{v}, \tau) = \frac{-\dot{x}y + \dot{y}x}{\ell}.$$

В случае покоя бусинки относительно ПСО  $\mathbf{T} = T\tau$ , где в силу закона Кулона—Амонтона

$$|\mathbf{T}| \leq \mu |\mathbf{N}|. \quad (2.1)$$

Здесь и далее  $\mu$  — коэффициент трения,  $\mathbf{N}$  — вектор нормальной реакции, вычисляемый с помощью множителей Лагранжа (см. раздел 2.1).

В случае скольжения бусинки вдоль обруча

$$\mathbf{T} = -\text{sign}(v_{\tau})T\tau,$$

где в силу закона Кулона—Амонтона

$$T = \mu |\mathbf{N}|.$$

**2.1. Определение множителей Лагранжа.** Для определения значений  $\lambda_n$  и  $\lambda_b$  как обычно воспользуемся уравнениями связей (1.1), а также тождествами, получающимися в результате их однократного и двухкратного дифференцирования по времени. Эти тождества имеют вид:

$$\dot{f}_n = x\dot{x} + y\dot{y} \equiv 0, \quad \dot{f}_b = \dot{z} = 0, \quad (2.2)$$

$$\ddot{f}_n = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \ddot{x}x + \ddot{y}y \equiv 0, \quad \ddot{f}_b = \ddot{z} \equiv 0. \quad (2.3)$$

*Замечание 1.* Продифференцируем по времени первое соотношение из (1.5), чтобы получить выражение углового ускорения обруча  $\mathcal{H}$  через остальные координаты и их первые и вторые производные по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = 0 \Rightarrow \ddot{\psi} = -\frac{m(z\ddot{x} - x\ddot{z}) + 2m(x\dot{x} + z\dot{z})\dot{\psi}}{J}. \quad (2.4)$$

Из соотношения (2.4) в силу (2.3) имеем:

$$\ddot{\psi} = -2mp_{\psi} \frac{x\dot{x}}{(I + mx^2)^2}.$$

При движении бусинки по обручу  $\mathcal{H}$  угловое ускорение обруча зависит от положения бусинки и ее скорости. Если бусинка относительно обруча  $\mathcal{H}$  покоится, то угловое ускорение обруча  $\mathcal{H}$  равно нулю.

Из соотношения (1.4)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{2mp_\psi}{J^2} x^2 \dot{x} - \frac{2p_\psi}{J} \dot{x} - \frac{p_\psi^2}{J^2} z = \frac{\lambda_b}{m}.$$

Принимая во внимание соотношения (1.1), (2.2) и (2.3), имеем:

$$\lambda_b = -\frac{2mIp_\psi}{(I + mx^2)^2} \dot{x}.$$

Легко видеть, что  $\lambda_b$  обращается в нуль в случае, когда бусинка покоится относительно обруча или обручу не придано начальное вращение.

Для определения  $\lambda_n$  сложим уравнения из (1.3) при  $q = x$  и при  $q = y$ . Принимая во внимание первое соотношение из (1.1) и вид вектора  $\mathbf{T}$ , после преобразований имеем:

$$\lambda_n = \frac{m}{\ell^2} \left( gy - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{p_\psi^2 x^2}{(I + mx^2)^2} \right). \quad (2.5)$$

Для дальнейшего описания движения воспользуемся углом  $\varphi$ , отсчитываемым от нисходящей вертикали. Имеем

$$x = \ell \sin \varphi, \quad y = -\ell \cos \varphi$$

$$\dot{x} = \ell \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = \ell \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\ddot{x} = -\ell \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ell \ddot{\varphi} \cos \varphi, \quad \ddot{y} = \ell \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ell \ddot{\varphi} \sin \varphi.$$

Подстановка этих выражений в (1.3) при  $q = x$  и в  $\lambda_n$  из (2.5) позволяет выписать уравнение движения в виде:

$$\ddot{\varphi} + P(\varphi) \omega^2 \sin \varphi = \frac{(T, \tau)}{m\ell}, \quad P(\varphi) = 1 - c^2 \cdot \frac{\cos \varphi}{(\ell + \sin^2 \varphi)^2}, \quad \omega^2 = \frac{g}{\ell}, \quad (2.6)$$

где введены следующие безразмерные параметры:

$$\varkappa = \frac{M}{2m}, \quad c = \frac{p_\psi}{\omega m \ell^2}.$$

Параметр  $\varkappa$  характеризует отношение массы обруча к массе бусинки. Параметр  $c$  характеризует угловую скорость вращения обруча.

Координата  $\psi$  — циклическая, и обобщенный импульс  $p_\psi$ , а вместе с ним и параметр  $c$  неизменны во все время движения. Более того, ПСО вращается, вообще говоря, неравномерно: угловая скорость ее вращения зависит от относительного движения бусинки и составляет

$$\dot{\psi} = \omega \cdot \frac{c}{\varkappa + \sin^2 \varphi}.$$

*Замечание 2.* Закон сохранения (1.5) имеет место вне зависимости от того, действует ли на бусинку трение со стороны обруча или нет.

*Замечание 3.* В рассмотренном в работе [1] случае постоянства угловой скорости вращения обруча уравнение движения бусинки имеет вид, отличающийся от уравнения (2.6).

**2.2. Нормальная реакция.** Для определения силы трения понадобится выражение для величины нормальной реакции. В общем случае это выражение определяется по формуле:

$$N = \sqrt{\lambda_b^2 + \lambda_n^2 \ell^2} = \quad (2.7)$$

$$= m\ell \sqrt{\omega^2 c^2 \frac{4\kappa^2 \cos^2 \varphi}{(\kappa + \sin^2 \varphi)^4} \cdot \dot{\varphi}^2 + \left( \omega^2 c^2 \frac{\sin^2 \varphi}{(\kappa + \sin^2 \varphi)^2} + \omega^2 \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \right)^2}$$

Таким образом, соотношение  $\mathbf{T} = -\text{sign}(\dot{\varphi})\mu N$ , где  $N$  определяется из (2.7) и задает силу сухого трения в уравнении (2.6)<sup>1</sup>.

На относительных равновесиях относительное движение отсутствует, т.е.  $\dot{\varphi} = 0$ . Тогда величина нормальной реакции принимает вид:

$$N = \omega^2 m\ell \left| \cos \varphi + c^2 \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \sin^2 \varphi)^2} \right|. \quad (2.8)$$

**3. Стационарные движения.** Для начала определим стационарные (установившиеся) движения системы — движения, на которых позиционная координата  $\varphi \equiv \text{const}$  и скорость циклической координаты  $\dot{\psi} \equiv \text{const}$ , а сама координата  $\psi$  линейно зависит от времени [9, 10].

**3.1. Случай гладкого обруча.** В отсутствие трения, согласно (2.6), относительные равновесия определяются из уравнения

$$\sin \varphi \cdot P(\varphi) = 0,$$

эквивалентного совокупности

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= 0 \\ P(\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Если  $\sin \varphi = 0$ , то имеются стационарные движения

$$I_0 : \varphi_0 = 0, I_\pi : \varphi_\pi = \pi, \quad (3.1)$$

называемые “прямыми” и отвечающие положениям бусинки в самой нижней и в самой верхней точках вертикального диаметра. Если  $P(\varphi) = 0$ , то имеют место “косые” равновесия:

$$I_\star : \left( \kappa + \sin^2 \varphi_\star \right)^2 = c^2 \cos \varphi_\star. \quad (3.2)$$

Решения (3.1) существуют при всех значениях параметров задачи. Решения (3.2) существуют при  $c \geq \kappa$ : при  $c = \kappa$  решение единственно —  $\varphi_\star = 0$ , при  $c > \kappa$  имеют место два симметричных относительно начала координат решения, принадлежащих интервалу  $(-\pi/2; \pi/2)$ .

<sup>1</sup> В работе [1] при описании скольжения аналог  $\lambda_b$  во внимание не принимался.

Для исследования устойчивости найденных стационарных движений выпишем функцию Рауса, которая имеет вид (см., например, [9–12]):

$$\mathcal{R} = [T - \mathcal{U} - p_\psi \dot{\psi}]|_{(1.5)} = m\ell^2 \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \mathcal{U}_a \right), \quad \mathcal{U}_a = \frac{c^2}{2(\varkappa + \sin^2 \varphi)} - \cos \varphi.$$

Функция  $\mathcal{U}_a$  – приведенная (эффективная) потенциальная энергия. Ее вторая производная по  $\varphi$  имеет вид:

$$\frac{d^2 \mathcal{U}_a}{d\varphi^2} = \frac{c^2}{(\varkappa + \sin^2 \varphi)^3} \cdot \left( \sin^2 2\varphi - (\varkappa + \sin^2 \varphi) \cos 2\varphi \right) + \cos \varphi. \quad (3.3)$$

На решении  $I_0$  выражение (3.3) имеет вид:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}_a}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = 1 - \frac{c^2}{\varkappa^2},$$

и оно положительно при  $\varkappa > c$ , значит, стационарное движение  $I_0$  устойчиво по Ляпунову при этих значениях параметров и неустойчиво в противном случае.

На решении  $I_\pi$  выражение (3.3) имеет вид:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}_a}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\pi} = -1 - \frac{c^2}{\varkappa^2},$$

и оно отрицательно при всех значениях параметров задачи, следовательно, решение  $I_\pi$  всегда неустойчиво.

Наконец, на решении  $I_\star$  выражение (3.3) имеет вид:

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{U}_a}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_\star} = \frac{c^2}{(\varkappa + \sin^2 \varphi_\star)^3} \cdot \left( \sin^2 2\varphi_\star + (\varkappa + \sin^2 \varphi_\star) \sin^2 \varphi_\star \right).$$

Для всех значений параметров задачи и  $\varphi_\star \neq 0$  выражение положительно, следовательно, решение  $I_\star$  за исключением точки  $\varphi_\star = 0$  всегда устойчиво. В точке  $\varphi_\star = 0$  вторая производная приведенной потенциальной энергии обращается в нуль, и для определения свойств устойчивости требуется дополнительное исследование.

Следуя [13, 14], вычислим старшие производные приведенной потенциальной энергии в точке  $\varphi_\star = 0$ ,  $c = \varkappa$ :

$$\left. \frac{d^3 \mathcal{U}_a}{d\varphi^3} \right|_{\varphi=0, c=\varkappa} = 0, \quad \left. \frac{d^4 \mathcal{U}_a}{d\varphi^4} \right|_{\varphi=0, c=\varkappa} = 3 \left( 1 + \frac{4}{\varkappa} \right).$$

Четвертая производная положительна при всех значениях параметров задачи, откуда следует устойчивость бифуркационной точки.

Все три класса стационарных движений изображены на бифуркационных диаграммах (рис. 2). На рис. 2 слева изображена зависимость параметра  $c^2$

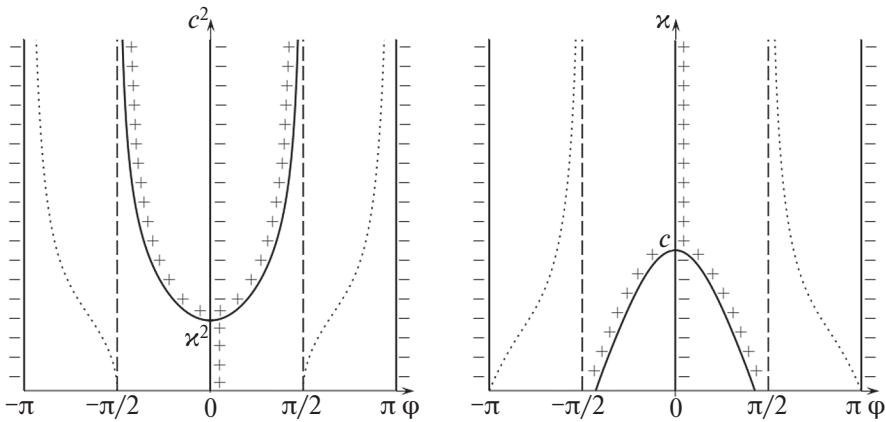


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы в отсутствие трения для разных сочетаний параметров: на плоскости  $(\varphi; \kappa^2)$  слева; на плоскости  $(\varphi; \kappa)$  справа.

от  $\varphi$ , справа — зависимость параметра  $\kappa$  от  $\varphi$ . На этих диаграммах видна реализация правила чередования устойчивости при одних и тех же значениях параметра  $c$  или  $\kappa$  [9–12]. Ветвление решений происходит при  $\varphi = 0$  и  $\kappa = c$ . Кроме того, кривая, задаваемая условием  $\lambda_n = 0$ , отделяет относительные равновесия, на которых  $\lambda_n > 0$  от относительных равновесий, на которых  $\lambda_n < 0$ .

*Замечание 4.* Задача о бифуркации положений относительного равновесия тяжелой бусинки на гладком круглом обруче, равномерно вращающемся вокруг своего вертикального диаметра, является учебной задачей по теоретической механике и теории устойчивости движения (см., например, [9, 10, 15]). Однако случай, когда обруч массивен и ему позволено свободно, без трения вращаться вокруг своего вертикального диаметра, обычно в литературе не обсуждается.

**3.2. Случай шероховатого обруча.** Стационарные движения при наличии трения определяются из неравенства (2.1), выражающего закон Кулона–Амонтона, в которое вместо  $\mathbf{T}$  подставляется его выражение из уравнения (2.6). Принимая во внимание, что на стационарных движениях  $\dot{\varphi} \equiv 0$ , а также выражение для нормальной реакции (2.8), неравенство (2.1) представим в виде:

$$|\sin \varphi \cdot P(\varphi)| \leq \mu \left| \cos \varphi + \frac{c^2 \sin^2 \varphi}{(\kappa + \sin^2 \varphi)^2} \right|. \quad (3.4)$$

**3.2.1. Зависимость решений от параметров  $\kappa$  и  $c$ .** Выражение в левой части неравенства обращается в нуль на решениях  $I_0$ ,  $I_\pi$ ,  $I_*$ , из предыдущего пункта, при этом выражение в правой части неравенства обращается в нуль при  $\lambda_n = 0$ . Выделим на плоскости  $(\varphi, c^2)$  четыре области  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$ ,  $\mathcal{R}_3$ ,  $\mathcal{R}_4$  так, как это показано на рис. 3.

Решения неравенства (3.4) в областях  $\mathcal{R}_i, i = 1, 2, 3, 4$  изображены на рис. 4.

Таким образом, при конкретных значениях параметров  $\kappa$ ,  $\mu$  неравенство (3.4) задает область на цилиндре  $\mathbf{R}^1(c^2) \times \mathbf{S}^1(\varphi)$ , каждой точке которой отвечает стационарное движение системы. Для каждого значения  $c$  как из формулы (3.4), так и по рис. 5 (слева) можно установить области, заполненные



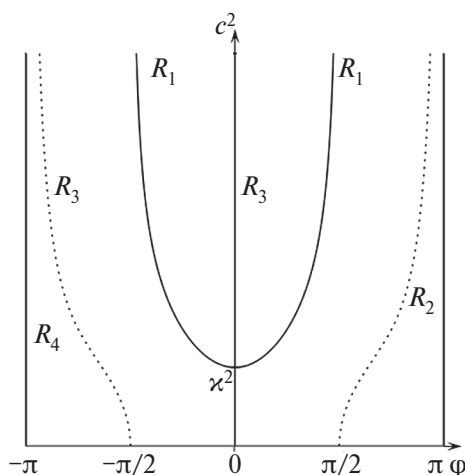


Рис. 3. Области  $\mathcal{R}_i, i = 1, 2, 3, 4$  знакопостоянства подмодульных выражений неравенства (3.4).

стационарными движениями (ОЗСД).

При  $c = 0$ , т.е. в случае, когда обручу не придано изначальное вращение, ОЗСД состоит из двух компонент — двух отрезков одинаковой ширины  $2\varphi_*$ , где

$$\varphi_* : \operatorname{tg} \varphi_* = \mu.$$

Один из этих отрезков,  $S_0$ , содержит нижнюю точку обруча, другой,  $S_\pi$ , — его верхнюю точку. С возрастанием  $c^2$  нижний отрезок начинает расширяться, а верхний — неограниченно сужаться, по ширине стремясь к нулю. При некотором критическом значении  $c_{\text{crit}}^2$  нижний

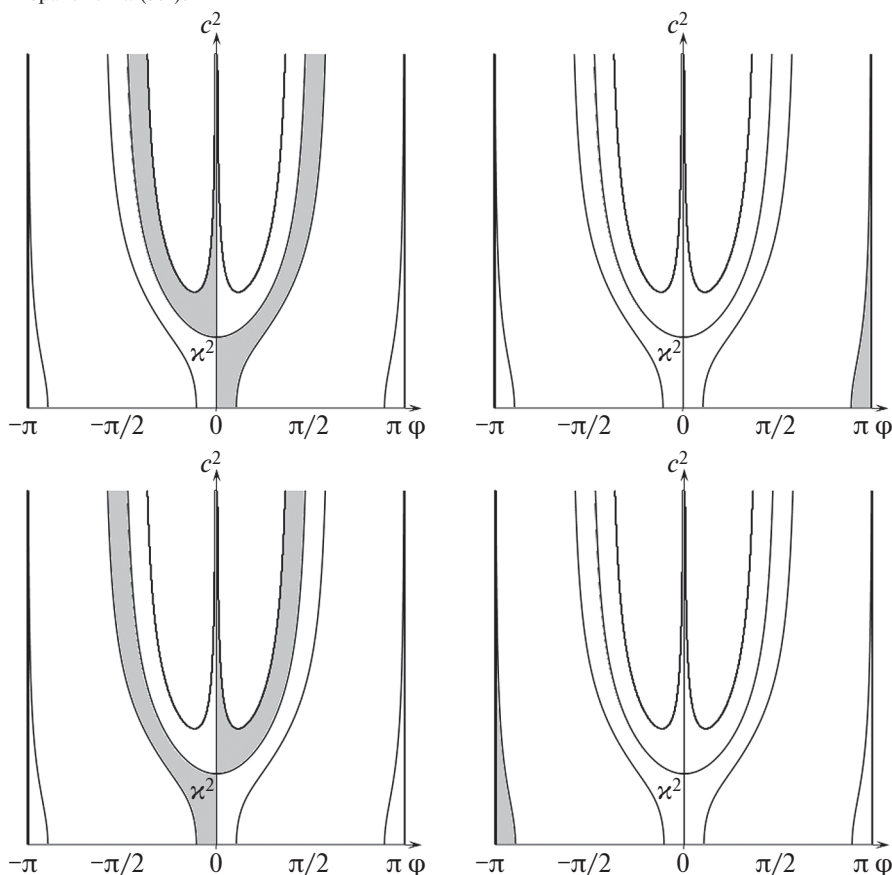


Рис. 4. Подобласти областей  $\mathcal{R}_i, i = 1, 2, 3, 4$ , отвечающие решениям неравенства (3.4).

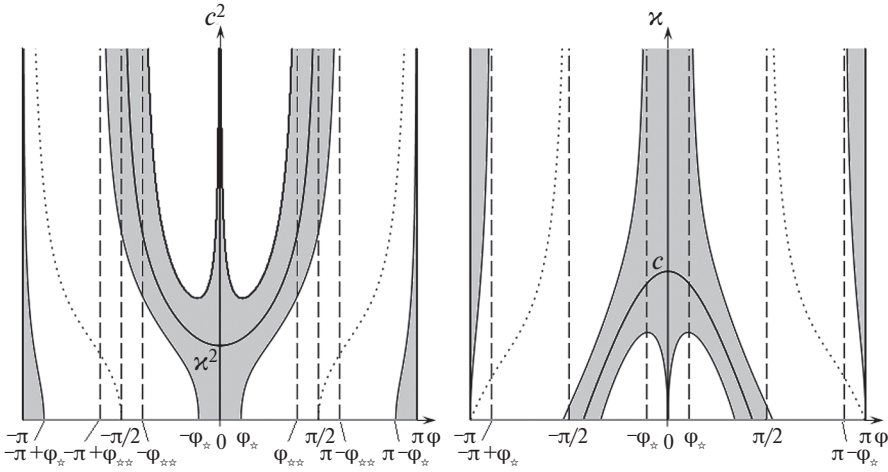


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма при наличии трения для разных сочетаний параметров. Здесь  $\operatorname{tg} \varphi_* = \mu$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_{**} = \mu^{-1}$ .

отрезок  $S_0$  распадается на три компоненты. Одна из них,  $I_{00}$ , симметричная относительно горизонтальной оси, начинает неограниченно сужаться, по ширине стремясь к нулю. Две другие компоненты  $I_{0\pm}$ , симметричные друг по отношению к другу относительно оси абсцисс, при неограниченном росте  $c^2$  по ширине стремятся к конечному значению  $\pi - 2\varphi_{**}$ , где  $\varphi_{**} = \mu^{-1}$ . Левая и правая границы ветви  $I_{0+}$  стремятся асимптотически к значениям углов  $\varphi = \varphi_{**}$  и  $\varphi = \pi - \varphi_{**}$  соответственно. Аналогичные рассуждения позволяют построить диаграмму на плоскости  $(\varphi; \kappa)$ , см. рис. 5 (справа).

В той части цилиндра  $\mathbf{R}^1(c^2) \times \mathbf{S}^1(\varphi)$ , где выполнено неравенство

$$\left( \sin \varphi - \frac{c^2}{F(\varphi)} \cos \varphi \right) \cdot \left( \cos \varphi + \frac{c^2}{F(\varphi)} \sin \varphi \right) > 0, \quad F(\varphi) = \frac{(\kappa + \sin^2 \varphi)^2}{\sin \varphi}, \quad (3.5)$$

граница ОЗСД определяется уравнением

$$F(\varphi) \cdot G_+(\varphi) = c^2, \quad (3.6)$$

а в той части цилиндра, где неравенство (3.5) выполнено с обратным знаком, – уравнением

$$F(\varphi) \cdot G_-(\varphi) = c^2, \quad (3.7)$$

где  $G_{\pm}(\varphi) = \operatorname{tg}(\varphi \mp \alpha)$ ,  $\alpha$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \mu$  – так называемый угол трения. Чтобы определить точки ветвления ОЗСД, найдем производные функций (3.6) и (3.7) по  $\varphi$  и приравняем их к нулю. Так как

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \cdot (3 \sin^2 \varphi - \kappa) \cdot (\sin^2 \varphi + \kappa), \quad \frac{dG_{\pm}}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2(\varphi \mp \alpha)},$$

то  $c_{\text{crit}}^2 = F(\varphi_{\text{crit}}) \cdot G_{\pm}(\varphi_{\text{crit}})$ . Здесь критические углы  $\varphi_{\text{crit}}$  определяются из уравнений

$$\frac{dF}{d\varphi} G_{\pm} + F \frac{dG_{\pm}}{d\varphi} = 0,$$

которые после преобразований принимают следующий вид:

$$\sin^2(\varphi_{\text{crit}}) \cdot \frac{3 \sin(2\varphi_{\text{crit}} \mp 2\alpha) + 2 \operatorname{tg}(\varphi_{\text{crit}})}{\sin(2\varphi_{\text{crit}} \mp 2\alpha) - 2 \operatorname{tg}(\varphi_{\text{crit}})} = \varkappa.$$

3.2.2. *Зависимость решений от параметра  $\mu$ .* Исследуем решения неравенства (3.4) в зависимости от параметра  $\mu$ . Рассмотрим функцию

$$f(\varphi) = \left| \frac{\sin \varphi (\varkappa + \sin^2 \varphi)^2 P(\varphi)}{\cos \varphi (\varkappa + \sin^2 \varphi)^2 + c^2 \sin^2 \varphi} \right|.$$

Эта функция является четной, периодической с периодом  $2\pi$  по переменной  $\varphi$  и имеет разрывы при тех значениях  $\varphi$ , где обращается в нуль нормальная реакция  $\lambda_n$ . Нулям функции  $f(\varphi)$  отвечают корни уравнений  $\sin \varphi = 0$  или  $P(\varphi) = 0$ . Топология решений неравенства (3.4) существенно зависит от параметров  $\varkappa$  и  $c$ . Рассмотрим различные сочетания этих параметров.

При  $\varkappa > c$  функция  $P(\varphi)$  положительна, и  $f(\varphi)$  обращается в нуль при  $\varphi = 0, \pm\pi$ . Решению неравенства  $f(\varphi) \leq \mu$  отвечают два отрезка, содержащих нижнее  $I_0$  и верхнее  $I_\pi$  положения относительного равновесия бусинки. При увеличении  $\mu$  длина этих отрезков увеличивается, но отрезки не сливаются друг с другом из-за наличия разрывов функции  $f(\varphi)$ . При  $\varphi = 0$  функция  $f(\varphi)$  справа и слева от этой точки имеет разные производные, а именно:  $f'(0_\pm) = \pm \frac{\varkappa^2 - c^2}{\varkappa^2}$  и для  $\varkappa > c$  имеют место неравенства  $f'(0_+) > 0$  и  $f'(0_-) < 0$ . Области, отвечающие решениям, изображены на рис. 6 слева.

Для случая  $\varkappa = c$  касательная в точке  $\varphi = 0$  к графику функции  $f(\varphi)$  становится горизонтальной  $f'(0) = 0$ , см. рис. 6 по центру.

При  $\varkappa < c$  функция  $P(\varphi)$  имеет два противоположных корня, что в сочетании с решениями  $\varphi = 0, \pm\pi$  позволяет говорить о четырех семействах решений неравенства  $f(\varphi) \leq \mu$ . Как и ранее, выделим решения, содержащие нижнее  $I_0$  и верхнее  $I_\pi$  положения относительного равновесия бусинки. Помимо этого, появляются семейства решений, содержащие косые равновесия  $I_*$ , определяемые соотношением (3.2). При увеличении  $\mu$  отрезки, отвечающие решениям, увеличиваются. Существует  $\mu = \mu_{\text{crit}}$ , начиная с которого множества решений, содержащие  $I_0$  и  $I_*$ , сливаются воедино. При этом при

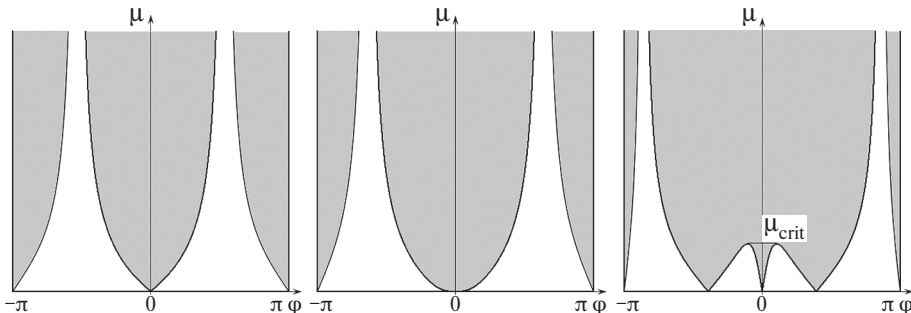


Рис. 6. Зависимость  $f(\varphi)$  от коэффициента трения  $\mu$ :  $\varkappa > c$  слева,  $\varkappa = c$  по центру,  $\varkappa < c$  справа.

сколь угодно больших  $\mu$  это решение не сойдется с решением, содержащим  $I_\pi$ , см. рис. 6 справа.

Выполненный анализ позволяет утверждать, что не существует значения коэффициента трения, при котором любой точке обруча соответствует относительное равновесие бусинки. Если  $\varphi_n: \lambda_n(\varphi_n) = 0$ , то всегда существуют окрестности  $\varphi_n$ , где бусинка не может находиться в равновесии относительно обруча.

**4. Скольжение.** В условиях скольжения сила трения определяется равенством

$$\mathbf{T} = -\mu |\mathbf{N}| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|},$$

и для различных значений постоянной циклического интеграла  $p_\psi$  движение бусинки относительно обруча описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 P(\varphi) \sin \varphi = \frac{T}{m\ell},$$

где

$$T = -\text{sign}(\dot{\varphi}) \mu m \ell \sqrt{\omega^2 c^2 \frac{4\kappa^2 \cos^2 \varphi}{(\kappa + \sin^2 \varphi)^4} \cdot \dot{\varphi}^2 + \left( \omega^2 c^2 \frac{\sin^2 \varphi}{(\kappa + \sin^2 \varphi)^2} + \omega^2 \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \right)^2}.$$

Построим характерные фазовые портреты на плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$  для до- и постбифуркационных значений параметров системы, рис. 7 и 8. На рис. 9 и 10 представлены в увеличенном масштабе окрестности множеств неизолированных решений.

Анализ бифуркационных диаграмм показывает, что при всех начальных условиях бусинка приходит в положение относительного равновесия за конечное время. Наличие интеграла площадей гарантирует, что при этом

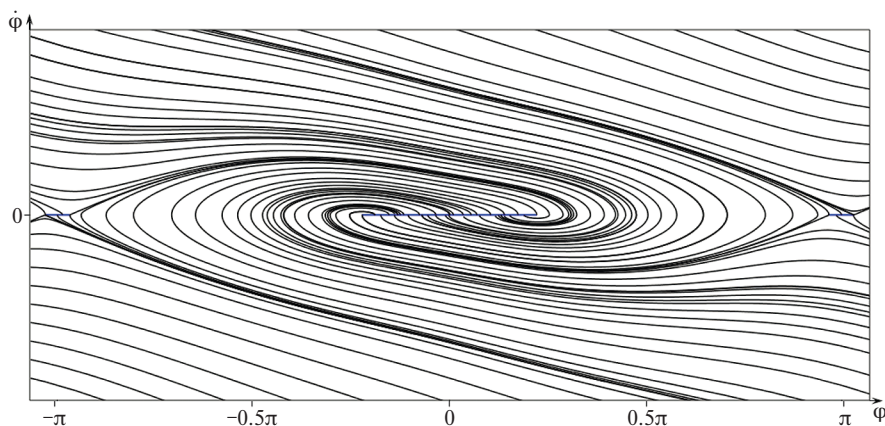


Рис. 7. Фазовый портрет для добифуркационных сочетаний параметров.

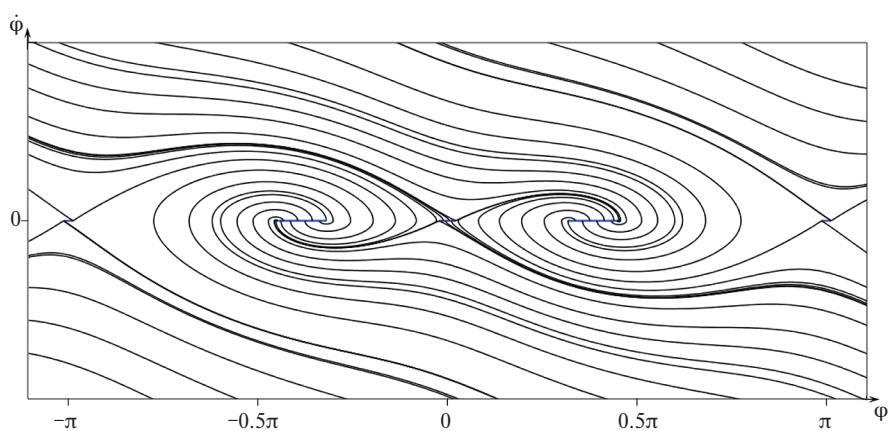


Рис. 8. Фазовый портрет для постбифуркационных сочетаний параметров.

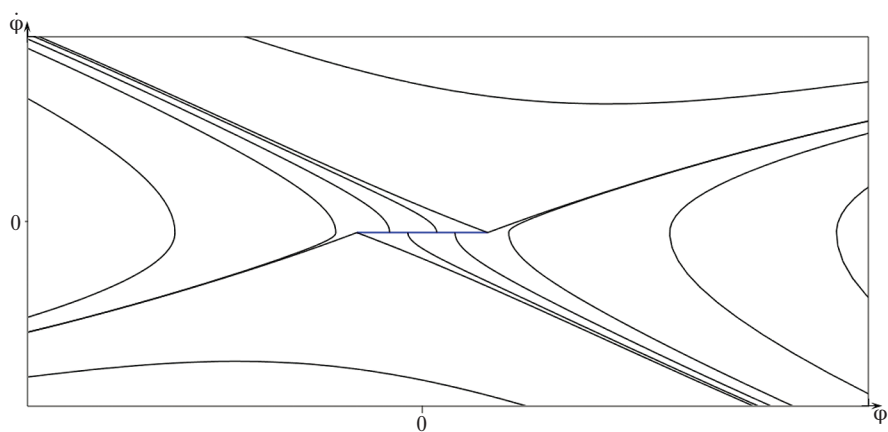


Рис. 9. Окрестность множеств  $I_0$  при постбифуркационных сочетаниях параметров.

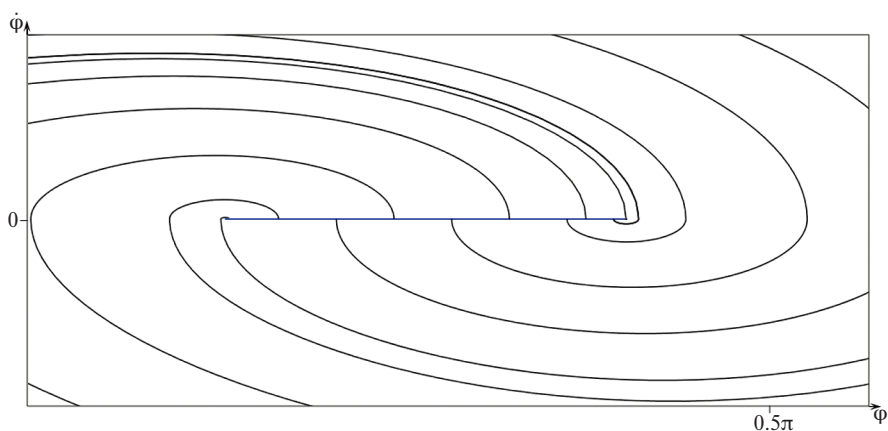


Рис. 10. Окрестность множеств  $I_*$  при постбифуркационных сочетаниях параметров.

дальнейшего рассеяния энергии происходить не будет и обруч продолжит вращаться с постоянной угловой скоростью.

**5. Заключительные замечания.** В рассмотренной задаче о движении бусинки по шероховатому круглому массивному обручу, свободно вращающемуся вокруг своего вертикального диаметра, найдено множество неизолированных установившихся движений и исследована зависимость этого множества от существенных параметров задачи. Установлено, что топологически построенная бифуркационная диаграмма не отличается от подобной диаграммы, построенной ранее [1] в случае, когда обруч вращается вокруг вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью. При различных значениях параметров задачи построены фазовые портреты. Численно показано, что на всех изучавшихся траекториях за конечное время бусинка приходит в положение относительного равновесия. При этом дальнейшего рассеяния энергии не происходит, а система продолжает вращение с постоянной угловой скоростью.

Заметим, что если ось вращения обруча наклонена относительно вертикали, то уже в случае скольжения бусинки без трения уравнения движения становятся неинтегрируемыми, а движение бусинки оказывается гораздо более богатым на динамические эффекты [16]. Исследование динамики такой системы при наличии трения требует отдельного исследования.

Исследование Е.А. Никоновой (пункты 3 и 4) выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20009, <https://rscf.ru/project/24-11-20009/>

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burov A.A.* On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // *Acta Mechanica*. 2010. V. 212. № 3–4. P. 349–354.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-009-0265-1>
2. *Кремнутло В.В.* Устойчивость гироскопа, имеющего вертикальную ось внешнего кольца, при учете сухого трения в осях подвеса // *ПММ*. 1960. Т. 24. № 3. С. 568–571.
3. *Van de Wouw N., Leine R.I.* Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // *Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conf. (CDC2006)*. San Diego. USA, 2006. P. 3765–3770.
4. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Berlin: Springer, 2008. V. 36. 236 p.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-76975-0>
5. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Europ. J. Mech. A/Solids*. 2006. V. 25. № 4. P. 595–616.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
6. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D*. 2006. V. 223. № 1. P. 121–137.  
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.08.021>
7. *Ivanov A.* Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. V. 14. № 6. P. 656–672.  
<https://doi.org/10.1134/S1560354709060045>
8. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. 304 с.
9. *Карпетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 168 с.

10. *Карапетян А.В.* Устойчивость и бифуркация движений. М.: Изд-во Московского ун-та, 2020. 186 с.
11. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 176 с.
12. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 922–933.
13. *Возлинский В.И.* О связи бифуркаций равновесий консервативных систем с распределением устойчивости на кривой равновесий // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 384–392.
14. *Возлинский В.И.* Об устойчивости точек ветвления равновесий // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 259–267.
15. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
16. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Motion of a heavy bead along a circular hoop rotating around an inclined axis // Int. J. Non-Linear Mech. 2021. V. 137. P. 103791.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103791>

## ON THE MOTION OF A BEAD ON A ROUGH HOOP FREELY ROTATING AROUND A VERTICAL DIAMETER

A. A. Burov<sup>a, \*</sup>, V. I. Nikonov<sup>a, \*\*</sup>, E. A. Nikonova<sup>a, b, \*\*\*</sup>

<sup>a</sup> Federal Research Center “Computer Science and Control”  
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>b</sup> Sirius University of Science and Technology Sirius Federal territory, Sochi, Russia

\*e-mail: [jtm@yandex.ru](mailto:jtm@yandex.ru),

\*\*e-mail: [nikon\\_v@list.ru](mailto:nikon_v@list.ru),

\*\*\*e-mail: [nikonova.ekaterina.a@gmail.com](mailto:nikonova.ekaterina.a@gmail.com).

**Abstract.** We consider the problem of the motion of a heavy bead strung on a rough heavy hoop freely rotating around a vertical diameter. Non-isolated sets of steady state motions of the system are identified, and their bifurcation diagrams are constructed. The dependence of these solutions on an essential parameter of the problem—the constant of the cyclic integral—is studied. The results obtained are compared with the results obtained previously for the case when a rough hoop rotates around a vertical diameter with a constant angular velocity. Characteristic phase portraits are constructed for various combinations of system parameters.

**Keywords:** bilateral constraints, friction, steady state motions, non-isolated relative equilibria, bifurcation diagram, phase portrait

## REFERENCES

1. *Burov A.A.* On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // Acta Mechanica. 2010. V. 212. № 3–4. P. 349–354.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-009-0265-1>
2. *Krementulo V.V.* Stability of a gyroscope having a vertical axis of the outer ring with dry friction in the gimbal axes taken into account // J. Appl. Math. Mech. 1960. V. 24. № 3. P. 843–849.
3. *Van de Wouw N., Leine R.I.* Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conf. (CDC2006), San Diego, USA, 2006. P. 3765–3770.

4. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer, 2008. V. 36. 236 p.
5. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Eur. J. Mechanics A. Solids*. 2006. V. 25. P. 595–616.
6. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D*. 2006. V. 223. P. 121–137.
7. *Ivanov A.* Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. V. 14. № 6. P. 656–672.
8. *Ivanov A.P.* Fundamentals of the theory of systems with friction. M.—Izhevsk: SIC “Regular and chaotic dynamics”, Izhevsk Institute of Computer Science, 2011. 304 p. (in Russian).
9. *Karapetian A.V.* Stability of stationary motions. M.: Editorial URSS, 1998. 168 p. (in Russian).
10. *Karapetian A.V.* Stability and bifurcation of motions. M.: Publishing House of the Moscow University, 2020. 186 p. (in Russian).
11. *Chetaev N.G.* Stability of motions. M.: Nauka. 1965. 176 p. (in Russian).
12. *Rumiantsev V.V.* On the stability of steady motions // *J. Appl. Math. Mech.* 1966. V. 30. № 5. P. 1090–1103.
13. *Vozlinskii V.I.* On the relations between the bifurcation of the equilibria of conservative systems and the stability distribution on the equilibria curve // *J. Appl. Math. Mech.* 1967. V. 31. № 2. P. 418–427.
14. *Vozlinskii V.I.* On the stability of points of equilibrium branching // *J. Appl. Math. Mech.* 1978. V. 42. № 2. P. 270–279.
15. *Rubanovsky V.N., Samsonov V.A.* Stability of stationary motions in examples and problems. M.: Nauka, 1988. 303 p. (in Russian).
16. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Motion of a heavy bead along a circular hoop rotating around an inclined axis // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2021.V. 137. Article 103791.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103791>