

УДК 531.3

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПРОИЗВОЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЕ

© 2024 г. К. Б. Устинов^{а, *}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: ustinov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 28.05.2024 г.

После доработки 07.06.2024 г.

Принята к публикации 08.06.2024 г.

Рассмотрена двумерная задача теории упругости об изотропной полосе с центральной полубесконечной трещиной. Нагрузка в виде сосредоточенной силы предполагается приложенной в произвольной точке полосы. С использованием инвариантных взаимных интегралов и решения для полосы, нагруженной изгибающими моментами и продольными силами, приложенными на бесконечности, получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для рассматриваемой задачи. Рассмотрены случаи сил, приложенных к берегам трещины, к границам полосы и внутренним точкам полосы. Получены асимптотические выражения для случаев приложения сил вдали от вершины трещины и сил, приложенных к берегам трещины вблизи ее вершины. Показано совпадение полученных решений с известными решениями для частных случаев: нагрузки в виде пары нормальных сил, приложенных к берегам трещины и сил, приложенных вдали от вершины трещины.

Ключевые слова: аналитическое решение, двустороннее преобразование Лапласа, метод Винера–Хопфа, теорема взаимности, инвариантные взаимные интегралы

DOI: 10.31857/S1026351924060042, EDN: TZHCUW

1. Введение. Задачи о трещинах в полосе, расположенных параллельно ее границам, используются в многочисленных приложениях, в частности при интерпретации результатов стандартных испытаний на разрушение, таких как трех- и четырехточечный изгиб [1–6], при исследовании процессов разрушения в многослойных конструкциях [7, 8], моделировании адгезионного взаимодействия [9–11] и отслоения покрытий [12–22].

В простейших случаях, таких как нагружение изгибающими моментами или продольными силами, выражения для скорости высвобождения энергии (СВЭ) при приращении длины трещины получаются элементарно с применением элементарных балочных теорий [13, 14, 23, 24]. При наличии

симметрии с помощью данного подхода можно также определить коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

Кроме элементарных решений, известно много других, полученных как аналитическими [25, 26], так и полуаналитическими, и численными методами [27, 29].

Весьма эффективным подходом к решению задач о полубесконечных трещинах является применение интегральных преобразований и метода Винера–Хопфа [30–36]. Обобщения на случай анизотропных полос получены в работах [37–42], полос, составленных из различных материалов, — в работе [43]. Если нагрузка прикладывается достаточно далеко от вершины трещины, так что ее можно рассматривать как приложенную на бесконечности, применение данного подхода приводит к однородной задаче, значения КИН при этом выражаются через однократные интегралы, которые в случае нагружения изгибающими моментами и продольными силами вычисляются в явном виде, и выражения для КИН совпадают с выражениями, полученными с помощью балочных теорий. В случае приложения нагрузки на конечном расстоянии от вершины трещины задача может быть решена путем сведения ее к неоднородной краевой задаче, решение которой представляется в виде двойных интегралов. В представленном исследовании используется другой подход, основанный на применении взаимных инвариантных интегралов (например, [44–46]) и использовании решения однородной задачи [35]. Использование данного подхода позволило получить выражения для КИН от действия произвольных, обязательно приложенных попарно к берегам трещины сил, в том числе для сил, приложенных во внутренних точках полосы, как на расслоившемся участке, так и в точках на продолжении линии трещины.

2. Формулировка задачи. Рассматривается полоса $-h < x_2 < h$ с полубесконечной центральной трещиной $x < 0, y = 0$ в декартовых координатах x_1, x_2 с началом в вершине трещины и осью x_1 , направленной вдоль продолжения линии трещины (рис. 1). Задача решается в двумерной постановке в рамках теории малых деформаций. Упругие свойства определяются модулем Юнга \bar{E} и коэффициентом Пуассона $\bar{\nu}$, либо истинными (для плоского напряженного состояния), либо модифицированными для условий плоской деформации:

$$\bar{E} = \begin{cases} E & \text{plane stress} \\ E / (1 - \nu^2) & \text{plane strain} \end{cases}, \quad \bar{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{plane stress} \\ \nu / (1 - \nu) & \text{plane strain} \end{cases} \quad (2.1)$$

Система уравнений включает уравнения равновесия, совместности, закона Гука и соотношений, связывающих деформации со смещениями:

$$\sigma_{ij,i} + Q_j = 0, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\bar{E}^{(k)}} \sigma_{11} - \frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} \sigma_{22}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{\bar{E}} \sigma_{22}^{(k)} - \frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} \sigma_{11}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1 + \bar{\nu}}{\bar{E}} \sigma_{12}, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i, Q_i$ — компоненты тензора напряжения, тензора деформаций, вектора смещения и приложенной сосредоточенной силы. Индекс

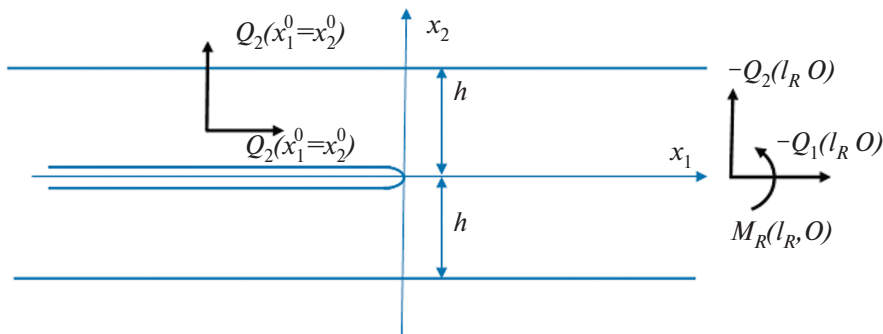


Рис. 1. Геометрия и система прикладываемых нагрузок.

после запятой означает производную по соответствующей координате, под повторяющимися индексами подразумевается суммирование.

Сосредоточенная сила с компонентами Q_1, Q_2 приложена в некоторой точке слоя $-\infty < x_1^0 < \infty$, $-h \leq x_2^0 \leq h$ либо внутри слоя, либо на внешней границе или на берегу трещины. Компенсирующие нагрузки в виде сил $-Q_1, -Q_2$ и момента $M_R = x_2^0 Q_1 + (l_R - x_1^0) Q_2$ приложены в точке $(l_R \rightarrow +\infty, 0)$ для обеспечения глобального равновесия (рис. 1). Берега трещины и внешние границы полосы свободны от напряжений (за исключением случаев $x_2^0 = \pm 0$ и $x_2^0 = \pm h$):

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x, h) = \sigma_{12}(x, h) = \sigma_{22}(x, -h) = \sigma_{12}(x, -h) = 0, \quad -\infty < x < +\infty \\ \sigma_{22}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{22}^{(2)}(x, 0) = \sigma_{12}^{(2)}(x, 0), \quad -\infty < x < 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь верхние индексы 1, 2 относятся к верхнему и нижнему берегам трещины соответственно.

Задача состоит в определении коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для приложенных нагрузок.

3. Выражения для коэффициентов интенсивности напряжений через взаимные инвариантные интегралы. Если известно решение некоторой вспомогательной задачи для рассматриваемой конфигурации и иной системы внешних нагрузок, используя взаимные инвариантные интегралы (например [44–46]), можно получить решение рассматриваемой задачи или по крайней мере некоторые интересующие величины. Рассмотрим две такие вспомогательные задачи: нагружение парой изгибающих моментов M , приложенных к разделяемым участкам полосы достаточно далеко от вершины трещины (рис. 2а), и нагружение парой равных, но противоположно направленных сил T , приложенных также достаточно далеко от вершины трещины к ее берегам (рис. 2б). Далее величины, относящиеся к данным задачам, будут обозначаться верхними индексами M и T соответственно.

Рассмотрим взаимные инвариантные интегралы (например, [44]) для двух состояний: состояние f , соответствующее исходной задаче о приложенной силе Q_k , и состояние A , соответствующее одной из вспомогательных задач M , или T :

$$M^{(A, f)} = J(u_i^A + u_i^f) - J(u_i^A) - J(u_i^f). \quad (3.1)$$

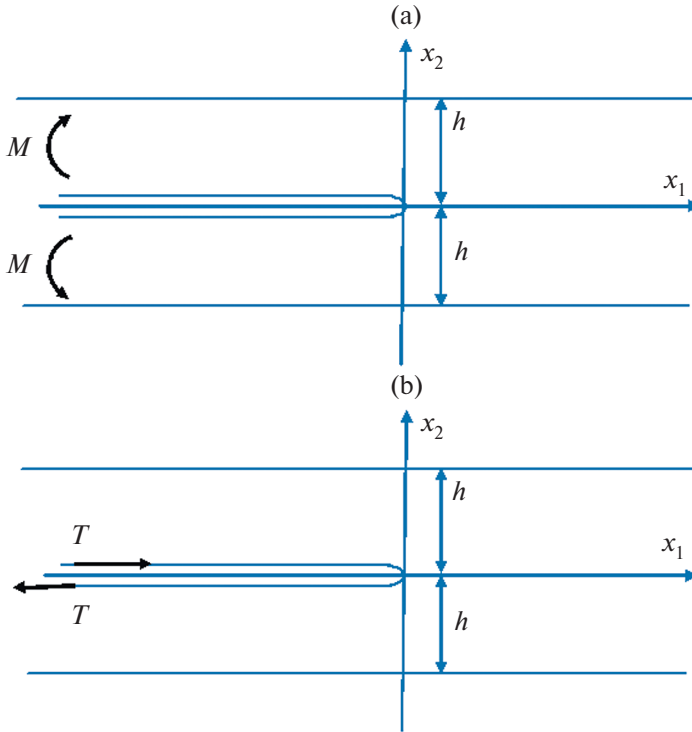


Рис. 2. Система прикладываемых нагрузок для вспомогательных задач: нагружение парой изгибающих моментов (а); нагружение парой сил с компенсирующими моментами (б).

Здесь $J(u_i^A), J(u_i^f), J(u_i^A + u_i^f)$ – J-интегралы, соответствующие состояниям A, f и их суперпозиции. С использованием определения J-интеграла [47–49] формула преобразуется к следующему виду (например, [46]):

$$M^{(A,f)} = \int_{\Gamma} [\sigma_{ik}^A \epsilon_{ik}^f \delta_{j1} - \sigma_{ij}^A u_{i,1}^f - \sigma_{ij}^f u_{i,1}^A] n_j d\Gamma. \quad (3.2)$$

Здесь Γ – контур, который может быть выбран одним из образов, либо Γ_1 , окружающий вершину трещины, либо Γ_2 , окружающий внутреннюю часть слоя с исключением точки приложения сосредоточенной силы; n_j – внешняя нормаль к контуру (рис. 3). Взаимные интегралы, соответствующие контурам Γ_1 и Γ_2 , будут означаться $M_1^{(A,f)}$ и $M_2^{(A,f)}$ соответственно.

Рассмотрим сначала интеграл по контуру Γ_1 . Его величина определяется с помощью формулы Ирвина [50] (см. также [51]):

$$M^{(A,f)}(\Gamma_1) = \frac{2}{E} (K_1^A K_1^f + K_2^A K_2^f). \quad (3.3)$$

Здесь K_1^A, K_2^A – нормальная и сдвиговая составляющие КИН для вспомогательных; K_1^f, K_2^f – нормальная и сдвиговая составляющие КИН для исходной задачи.

Рассмотрим интегрирование по контуру Γ_2 . Его правый вертикальный сегмент может быть проведен достаточно далеко, так что напряжения, деформации и производные смещений для вспомогательных задач могут быть

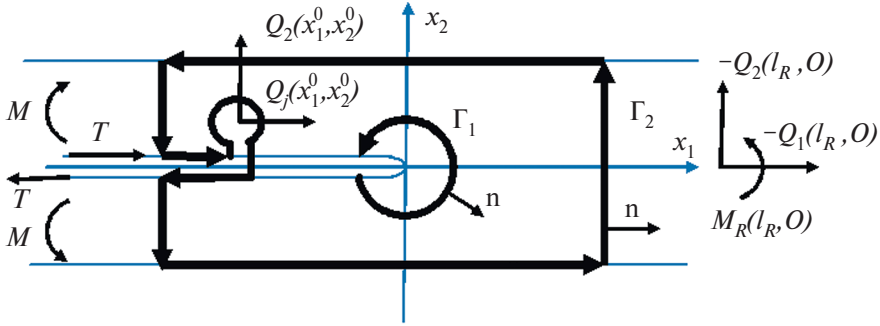


Рис. 3. Контуры при вычислении инвариантных интегралов.

рассматриваемы как исчезающе малые. Аналогично напряжения и деформации вдоль левого вертикального сегмента, путем отнесения его на достаточное расстояние, становятся исчезающе малыми для основной задачи, при этом производная от смещения $u_{2,1}^f$ остается постоянной. Этого достаточно для того, чтобы соответствующие интегралы, рассчитываемые вдоль данных сегментов, обращались в ноль. На горизонтальных границах нулевые нормальные и касательные напряжения в основной и вспомогательной задачах приводят к обнулению интегралов вдоль них. Таким образом, единственным участком контура Γ_2 , дающим вклад в интеграл, является участок, окружающий точку приложения силы:

$$M^{(A,f)}(\Gamma_2) = -Q_1 u_{1,1}^A(x_1^0, x_2^0) - Q_2 u_{2,1}^A(x_1^0, x_2^0). \quad (3.4)$$

Приравнявая величины, стоящие в правых частях (3.3) и (3.4), получаем:

$$\frac{2}{E} (K_1^M K_1^f + K_2^M K_2^f) = -Q_k u_{k,1}^M(x_1^0, x_2^0), \quad (3.5)$$

$$\frac{2}{E} (K_1^T K_1^f + K_2^T K_2^f) = -Q_k u_{k,1}^T(x_1^0, x_2^0). \quad (3.6)$$

Если известны остальные величины, входящие в выражения (3.5), (3.6), эту систему можно решить относительно величин K_1^f, K_2^f . С учетом того, что выражения для $K_1^M K_1^T, K_2^M K_2^T$ для рассматриваемого случая центральной трещины в однородной изотропной упругой полосе могут быть получены элементарно и известны (например, [35]):

$$K_1^M = \sqrt{12}M, \quad K_2^M = 0, \quad K_1^T = 0, \quad K_2^T = 2T, \quad (3.7)$$

данное решение может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} K_1^f &= -\frac{\bar{E} u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0)}{4\sqrt{3}} Q_1 - \frac{\bar{E} u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0)}{4\sqrt{3}} Q_2, \\ K_2^f &= -\frac{\bar{E} u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0)}{4} Q_1 - \frac{\bar{E} u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0)}{4} Q_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выражения дают значения КИН, вызванные действием сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке полосы. В общем случае обе моды КИН зависят от обеих компонент прикладываемой силы. Однако в случае двух сил, прикладываемых в точках, зеркально расположенных от линии трещины и противоположных по направлению, благодаря симметрии нормальной и сдвиговая моды КИН становятся зависящими только от нормальной и тангенциальной составляющей прикладываемой пары соответственно.

Для вычисления КИН с использованием (3.8) необходимо вычислить величины производных от смещений $u_{1,1}^M, u_{2,1}^M, u_{1,1}^T, u_{2,1}^T$ для вспомогательных задач в точках приложения силы основной задачи.

4. Выражения для производных от компонент смещения для вспомогательных задач. *4.1. Общий случай; выражения через интегралы.* Наиболее удобным для использования решением вспомогательных задач в нашем случае представляется решение [35], дающее не только значения КИН, но и, в частности, распределение напряжений вдоль линии продолжения трещины для нагружения парой сосредоточенных моментов и парой продольных сил, приложенных вдали от вершины трещины. В работе [52] на основе этого решения были получены выражения производных от компонент смещения на внешней границе полосы для случая нагружения парой моментов. Используемый в работе [52] подход, основанный на решении задачи о полосе с применением двустороннего преобразования Лапласа (соответствующей верхней части исходной полосы) с заданными нагрузками на границах, позволяет получить значения производных в произвольной точке.

Двустороннее преобразование Лапласа по переменной x_1 определяется как (например, [35])

$$\hat{f}(p, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-px_1} dx_1. \quad (4.1)$$

Обратное преобразование определяется при этом:

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(p, x_2) e^{px_1} dp, \quad (4.2)$$

где контур L соответствует мнимой оси комплексной плоскости p , а направление контура — сверху вниз.

Решение для верхней полуполосы дается в виде образа функции напряжений Эри:

$$\hat{F}(p, x_2) = A_1 \cos(px_2) + A_2 \sin(px_2) + A_3 y \sin(px_2) + A_4 y \cos(px_2), \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\hat{q}_2}{p^2}, \quad A_4 = \frac{\cos 2p - 1}{2p(\sin^2 p - p^2)} \hat{q}_1 + \frac{\sin 2p + 2p}{2p(\sin^2 p - p^2)} \hat{q}_2, \\ A_2 &= \frac{\hat{q}_1}{\sin^2 p - p^2} - \frac{\sin 2p + 2p}{2p^2(\sin^2 p - p^2)} \hat{q}_2, \\ A_3 &= -\frac{\cos 2p - 1}{2p(\sin^2 p - p^2)} \hat{q}_2 - \frac{\sin 2p - 2p}{2p(\sin^2 p - p^2)} \hat{q}_1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

а величины образов нормальных и касательных напряжений \hat{q}_2, \hat{q}_1 , действующих на линии продолжения трещины, найдены в работе [35] и имеют вид:

$$\hat{q}_1 = \frac{1}{h_1^+ H_1^+} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T = -2 \frac{\sin^2 p - p^2}{\sin 2p - 2p} \frac{1}{h_1^- H_1^-} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T, \quad (4.5)$$

$$\hat{q}_2 = \frac{1}{h_2^+ H_2^+} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp = 2 \frac{\sin^2 p - p^2}{\sin 2p + 2p} \frac{1}{h_2^- H_2^-} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp, \quad (4.6)$$

$$h_1^+(p) = \frac{\Gamma(1 + p / \pi)}{\Gamma(1 / 2 + p / \pi)}, \quad (4.7)$$

$$h_1^-(p) = \frac{\Gamma(1 / 2 - p / \pi)}{\Gamma(-p / \pi)}, \quad (4.8)$$

$$H_1^\pm(p) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{2} \operatorname{th} t \frac{\operatorname{sh} 2t - 2t}{\operatorname{sh}^2 t - t^2} \right) \frac{dt}{it - p} \right], \quad (4.9)$$

$$h_2^+(p) = \left[\frac{\Gamma(1 + p / \pi)}{\Gamma(1 / 2 + p / \pi)} \right]^3, \quad (4.10)$$

$$h_2^-(p) = \left[\frac{\Gamma(1 / 2 - p / \pi)}{\Gamma(-p / \pi)} \right]^3, \quad (4.11)$$

$$H_2^\pm(p) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{2} \operatorname{th}^3 t \frac{\operatorname{sh} 2t + 2t}{\operatorname{sh}^2 t - t^2} \right) \frac{dt}{it - p} \right], \quad (4.12)$$

где Γ — гамма-функция Эйлера; индекс \pm для H_1^\pm, H_2^\pm в (4.12) определяется положением точки p относительно мнимой оси. В формулах (4.5), (4.6) вторые равенства получены исходя из связей между величинами $h_k^+ H_k^+$ и $h_k^- H_k^-$ ($k = 1, 2$) [35], которые в используемых обозначениях записываются как

$$\frac{h_1^+ H_1^+}{h_1^- H_1^-} = -2 \frac{\sin 2p - 2p}{\sin^2 p - p^2}, \quad \frac{h_2^+ H_2^+}{h_2^- H_2^-} = 2 \frac{\sin 2p + 2p}{\sin^2 p - p^2}. \quad (4.13)$$

Образы производных смещений (например, [35]):

$$\bar{E} \hat{u}_1'(p, x_2) = \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial x_2^2} - \bar{\nu} p^2 \hat{F}, \quad \bar{E} \hat{u}_2'(p, x_2) = -(2 + \bar{\nu}) p \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_2} - \frac{1}{p} \frac{\partial^3 \hat{F}}{\partial x_2^3}. \quad (4.14)$$

Подстановка (4.4) в (4.3), а затем в (4.14) дает

$$\begin{aligned} \bar{E} \hat{u}_1'(p, x_2) &= \frac{1}{\sin^2 p - p^2} (B_{11} \hat{q}_1 + B_{12} \hat{q}_2) \\ \bar{E} \hat{u}_2'(p, x_2) &= \frac{1}{\sin^2 p - p^2} (B_{21} \hat{q}_1 + B_{22} \hat{q}_2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned}
 B_{11}(p) &= \sin p(2 - x_2) + \left(1 - p^2(1 + \bar{v})(1 - x_2)\right) \sin px_2 - \\
 &\quad \frac{1 + \bar{v}}{2} px_2 \cos p(2 - x_2) - p \left(2 - \frac{1 + \bar{v}}{2} x_2\right) \cos px_2, \\
 B_{12}(p) &= -\frac{1 - \bar{v}}{2} \cos p(2 - x_2) + \left(\frac{1 - \bar{v}}{2} + p^2(1 + \bar{v})(1 - x_2)\right) \cos px_2 + \\
 &\quad \frac{1 + \bar{v}}{2} px_2 \sin p(2 - x_2) - p \left((1 - \bar{v}) + \frac{1 + \bar{v}}{2} x_2\right) \sin px_2, \\
 B_{21}(p) &= \frac{1 - \bar{v}}{2} \cos p(2 - x_2) - \left(\frac{1 - \bar{v}}{2} + p^2(1 + \bar{v})(1 - x_2)\right) \cos px_2 - \\
 &\quad px_2 \frac{1 + \bar{v}}{2} \sin p(2 - x_2) - p \left(1 - \bar{v} + x_2 \frac{1 + \bar{v}}{2}\right) \sin px_2, \\
 B_{22}(p) &= \sin p(2 - x_2) + \left(1 - p^2(1 + \bar{v})(1 - x_2)\right) \sin px_2 + \\
 &\quad px_2 \frac{1 + \bar{v}}{2} \cos p(2 - x_2) + p \left(2 - x_2 \frac{1 + \bar{v}}{2}\right) \cos px_2. \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Данные формулы существенно упрощаются для берегов трещины $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \sin 2p - 2p, \quad B_{12} = (1 - \bar{v})(\sin^2 p - p^2) + 2p^2, \\
 B_{21} &= -(1 - \bar{v})(\sin^2 p - p^2) - 2p^2, \quad B_{22} = \sin 2p + 2p
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

и для внешней границы $x_2 = 1$:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= 2(\sin p - p \cos p), \quad B_{12} = -2p \sin p, \\
 B_{21} &= -2p \sin p, \quad B_{22} = 2(\sin p + p \cos p).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Выражения (4.17) с точностью до обозначений совпадают с выражениями, полученными в работе [35], выражения B_{12}, B_{22} из (4.18) — с выражениями, полученными в работе [52].

Подстановка первых равенств (4.5), (4.6) в (4.15) дает выражения искомым образом производных смещений:

$$\begin{aligned}
 \bar{E}u_1'(p, x_2) &= \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \left(B_{11} \frac{1}{h_1^+ H_1^+} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T + B_{12} \frac{1}{h_2^+ H_2^+} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp \right) \\
 \bar{E}u_2'(p, x_2) &= \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \left(B_{21} \frac{1}{h_1^+ H_1^+} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T + B_{22} \frac{1}{h_2^+ H_2^+} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp \right).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Подстановка вторых равенств (4.5), (4.6) в (4.15) дает альтернативные выражения искомым образом производных смещений:

$$\begin{aligned}
 \bar{E}u_1'(p, x_2) &= \frac{2}{\sin 2p - 2p} B_{11} \frac{1}{h_1^- H_1^-} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T + \frac{2}{\sin 2p + 2p} B_{12} \frac{1}{h_2^- H_2^-} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp \\
 \bar{E}u_2'(p, x_2) &= \frac{2}{\sin 2p - 2p} B_{21} \frac{1}{h_1^- H_1^-} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} T + \frac{2}{\sin 2p + 2p} B_{22} \frac{1}{h_2^- H_2^-} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} Mp.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Оригиналы производных смещений находятся с помощью обратного преобразования Лапласа (4.2), подынтегральные выражения для которых содержат коэффициент e^{px} . Для обеспечения сходимости удобно рассматривать область $\operatorname{Re} p < 0$ и, следовательно, представление (4.20), при вычислении значений, соответствующих $x_1 > 0$, и область $\operatorname{Re} p > 0$, и представление (4.19) при вычислении значений, соответствующих $x_1 < 0$. Вычисление оригиналов можно осуществлять непосредственно, используя интегральное представление (пункт 4.2), с помощью вычетов (пункт 4.3) либо с помощью исследования асимптотических представлений окрестности вершины трещины (пункт 4.4).

4.2. Представление производных смещений через интегралы. Оригиналы производных смещений находятся подстановкой (4.19) либо (4.20) в (4.20) для $x_1 < 0$ и $x_1 > 0$ соответственно. Контур интегрирования при этом может деформироваться согласно правилам вычисления интегралов на комплексной плоскости. В качестве контура можно выбрать

$$p = is \pm \sqrt[\alpha]{\gamma + \beta s^2}, \quad (4.21)$$

где α, β, γ — некоторые константы, выбираемые так, чтобы контуры (4.21) охватывали все полюса подынтегральной функции. Здесь знаки плюс/минус соответствуют представлениям (4.19) либо (4.20) соответственно. При $\beta = 0$ контуры превращаются в прямые линии, параллельные мнимой оси. Для функции $(\sin^2 p - p^2)$ ближайший к мнимой оси полюс, $p_1 \approx 4.21239 \pm 2.2507i$, следовательно, $0 < \sqrt[\alpha]{\gamma} < \operatorname{Re} p_1$.

Выражения для производных смещений приобретают вид для $x_1 < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}}{M} u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= -12 \left(x_2^0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \frac{B_{12}(p)p}{h_2^+(p)H_2^+(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \\ \frac{\bar{E}}{M} u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= 12 \left(x_1^0 - \delta \right) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \frac{B_{22}(p)p}{h_2^+(p)H_2^+(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= - \left(4 - 6x_2^0 \right) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \frac{B_{11}(p)}{h_1^+(p)H_1^+(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= -6 \left(x_1^0 - \delta_m \right) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2 p - p^2} \frac{B_{21}(p)}{h_1^+(p)H_1^+(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \end{aligned} \quad (4.22)$$

и для $x_1 > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}}{M} u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sin 2p + 2p} \frac{B_{12}(p)p}{h_2^-(p)H_2^-(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \\ \frac{\bar{E}}{M} u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sin 2p + 2p} \frac{B_{22}(p)p}{h_2^-(p)H_2^-(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= - \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sin 2p - 2p} \frac{B_{11}(p)}{h_1^-(p)H_1^-(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds, \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{E}}{T} u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sin 2p - 2p} \frac{B_{21}(p)p}{h_1^-(p)H_1^-(p)} \frac{dp}{ds} e^{px_1} ds. \quad (4.23)$$

Внеинтегральные члены в (4.22) соответствуют вычетам исходных подынтегральных функций в нуле, величины $\delta \approx 0.6738$, $\delta_m \approx 0.20943$ были посчитаны в работе [53] с использованием результатов [43]. При вычислении интегралов для улучшения сходимости можно воспользоваться свойством голоморфности функций $h_2^\pm(p)$, $H_2^\pm(p)$ в левой и правой полуплоскостях соответственно и вычесть из величин $\frac{B_{ij}(p)p}{\sin^2 p - p^2}$, $\frac{2p B_{12}(p)}{\sin 2p \pm 2p}$ произвольные голоморфные члены.

4.3. *Представление производных от смещений для точек, не слишком близких к вершине трещины.* Интегралы, определяющие производные от смещений, с помощью теории вычетов можно преобразовать в ряды:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}}{M} u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= -12 \left(x_2^0 - \frac{1}{2} \right) - \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} B_{12}(p_k^{(1)}) p_k^{(1)} \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{M} u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= 12(x_1^0 - \delta) - \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} B_{22}(p_k^{(1)}) p_k^{(1)} \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= -(4 - 6x_2^0) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} B_{11}(p_k^{(1)}) \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= -6(x_1^0 - \delta_m) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} B_{21}(p_k^{(1)}) \exp(p_k^{(1)} x_1), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}}{M} u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= \frac{2\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} R_k^{(3)} B_{12}(p_k^{(3)}) p_k^{(3)} \exp(p_k^{(3)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{M} u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0) &= \frac{2\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(3)} B_{22}(p_k^{(3)}) p_k^{(3)} \exp(p_k^{(3)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(4)} B_{11}(p_k^{(3)}) \exp(p_k^{(4)} x_1), \\ \frac{\bar{E}}{T} u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(4)} B_{21}(p_k^{(3)}) \exp(p_k^{(4)} x_1), \end{aligned} \quad (4.25)$$

где

$$\begin{aligned} R_k^{(1)} &= \operatorname{res} \left(\frac{1}{(\sin^2 p_k^{(1)} - p_k^{(1)2}) h_1^+(p_k^{(1)}) H_1^+(p_k^{(1)})} \right), \\ R_k^{(2)} &= \operatorname{res} \left(\frac{1}{(\sin^2 p_k^{(1)} - p_k^{(1)2}) h_2^+(p_k^{(1)}) H_2^+(p_k^{(1)})} \right), \end{aligned}$$

$$R_k^{(3)} = \text{res} \left(\frac{1}{\left(\sin 2p_k^{(3)} + 2p_k^{(3)} \right) h_2^- \left(p_k^{(3)} \right) H_2^- \left(p_k^{(3)} \right)} \right),$$

$$R_k^{(4)} = \text{res} \left(\frac{1}{\left(\sin 2p_k^{(4)} - 2p_k^{(4)} \right) p_k^{(4)} h_1^- \left(p_k^{(4)} \right) H_1^- \left(p_k^{(4)} \right)} \right) \quad (4.26)$$

для $x_1 < 0$ и $x_1 > 0$ соответственно. Здесь $p_k^{(1)}$ — нули функции $\sin^2 p - p^2$ с положительными действительными частями; $p_k^{(3)} p_k^{(4)}$ — нули функций $\sin 2p + 2p$ и $\sin 2p - 2p$ с отрицательными действительными частями соответственно. При записи (4.24), (4.25) использовался тот факт, что корни $p_k^{(m)}$ и соответствующие им вычеты комплексно-сопряженные. Данные ряды весьма удобны для вычислений и сходятся тем быстрее, чем больше абсолютная величина x_1 , поскольку представляют собой сумму убывающих экспонент. Однако для $|x_1| \sim 0.1$ уже требуется учет порядка десятка членов, а при $|x_1| \rightarrow 0$ ряды расходятся.

Корни p_k величины $R_k^{(1)}$ не зависят от параметров и могут быть посчитаны заранее. Посчитанные значения для первых 20 нулей и вычетов приведены в табл. 1 и 2, где введены обозначения:

$$\alpha_k^{(m)} = \text{Re} p_k^{(m)}, \quad \beta_k^{(m)} = \text{Im} p_k^{(m)}, \quad \gamma_k^{(m)} = \text{Re} R_k^{(m)}, \quad \delta_k^{(m)} = \text{Im} R_k^{(m)} \quad (4.27)$$

Таблица 1. Действительные и мнимые части корней и вычетов функций, используемых при вычислении величин, относящихся к левой части полосы

k	$\alpha_k^{(1)}$	$\beta_k^{(1)}$	$\gamma_k^{(1)}$	$\delta_k^{(1)}$	$\gamma_k^{(2)}$	$\delta_k^{(2)}$
1	4.212	2.251	$8.711 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1.419 \cdot 10^{-2}$	$9.624 \cdot 10^{-3}$
2	7.498	2.769	$1.370 \cdot 10^{-3}$	$8.116 \cdot 10^{-4}$	$3.153 \cdot 10^{-3}$	$3.483 \cdot 10^{-3}$
3	10.713	3.103	$3.897 \cdot 10^{-4}$	$3.415 \cdot 10^{-4}$	$1.159 \cdot 10^{-3}$	$1.693 \cdot 10^{-3}$
4	13.900	3.352	$1.485 \cdot 10^{-4}$	$1.668 \cdot 10^{-4}$	$5.422 \cdot 10^{-4}$	$9.659 \cdot 10^{-4}$
5	17.073	3.551	$6.766 \cdot 10^{-5}$	$9.123 \cdot 10^{-5}$	$2.932 \cdot 10^{-4}$	$6.103 \cdot 10^{-4}$
6	20.239	3.717	$3.484 \cdot 10^{-5}$	$5.432 \cdot 10^{-5}$	$1.748 \cdot 10^{-4}$	$4.137 \cdot 10^{-4}$
7	23.398	3.859	$1.960 \cdot 10^{-5}$	$3.451 \cdot 10^{-5}$	$1.118 \cdot 10^{-4}$	$2.954 \cdot 10^{-4}$
8	26.555	3.983	$1.181 \cdot 10^{-5}$	$2.306 \cdot 10^{-5}$	$7.547 \cdot 10^{-5}$	$2.194 \cdot 10^{-4}$
9	29.708	4.094	$7.498 \cdot 10^{-6}$	$1.605 \cdot 10^{-5}$	$5.311 \cdot 10^{-5}$	$1.682 \cdot 10^{-4}$
10	32.860	4.193	$4.973 \cdot 10^{-6}$	$1.155 \cdot 10^{-5}$	$3.866 \cdot 10^{-5}$	$1.322 \cdot 10^{-4}$
11	36.010	4.284	$3.418 \cdot 10^{-6}$	$8.545 \text{E-}06$	$2.894 \cdot 10^{-5}$	$1.061 \cdot 10^{-4}$
12	39.159	4.367	$2.420 \cdot 10^{-6}$	$6.473 \text{E-}06$	$2.217 \cdot 10^{-5}$	$8.670 \cdot 10^{-5}$
13	42.307	4.443	$1.758 \cdot 10^{-6}$	$5.003 \text{E-}06$	$1.732 \cdot 10^{-5}$	$7.191 \cdot 10^{-5}$
14	45.454	4.515	$1.305 \cdot 10^{-6}$	$3.934 \text{E-}06$	$1.377 \cdot 10^{-5}$	$6.041 \cdot 10^{-5}$
15	48.601	4.581	$9.880 \cdot 10^{-7}$	$3.142 \text{E-}06$	$1.111 \cdot 10^{-5}$	$5.133 \cdot 10^{-5}$
16	51.747	4.643	$7.605 \cdot 10^{-7}$	$2.543 \text{E-}06$	$9.080 \cdot 10^{-6}$	$4.405 \cdot 10^{-5}$
17	54.892	4.702	$5.941 \cdot 10^{-7}$	$2.083 \text{E-}06$	$7.508 \cdot 10^{-6}$	$3.814 \cdot 10^{-5}$
18	58.038	4.758	$4.704 \cdot 10^{-7}$	$1.724 \text{E-}06$	$6.272 \cdot 10^{-6}$	$3.327 \cdot 10^{-5}$
19	61.183	4.810	$3.769 \cdot 10^{-7}$	$1.441 \text{E-}06$	$5.288 \cdot 10^{-6}$	$2.924 \cdot 10^{-5}$
20	64.327	4.860	$3.053 \cdot 10^{-7}$	$1.215 \text{E-}06$	$4.496 \cdot 10^{-6}$	$2.585 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2. Действительные и мнимые части корней и вычетов функций, используемых при вычислении величин, относящихся к правой части полосы

k	$-\alpha_k^{(3)}$	$\beta_k^{(3)}$	$\gamma_k^{(3)}$	$\delta_k^{(3)}$	$-\alpha_k^{(4)}$	$\beta_k^{(4)}$	$\gamma_k^{(4)}$	$\delta_k^{(4)}$
1	2.1062	1.1254	$-3.473 \cdot 10^{-1}$	$7.540 \cdot 10^{-2}$	3.7488	1.3843	$3.105 \cdot 10^{-2}$	$-6.121 \cdot 10^{-2}$
2	5.3563	1.5516	$-1.788 \cdot 10^{-2}$	$2.069 \cdot 10^{-2}$	6.9500	1.6761	$7.951 \cdot 10^{-3}$	$-2.481 \cdot 10^{-2}$
3	8.5367	1.7755	$-3.781 \cdot 10^{-3}$	$6.885 \cdot 10^{-3}$	10.1193	1.8584	$3.420 \cdot 10^{-3}$	$-1.413 \cdot 10^{-2}$
4	11.6992	1.9294	$-1.314 \cdot 10^{-3}$	$3.160 \cdot 10^{-3}$	13.2773	1.9916	$1.851 \cdot 10^{-3}$	$-9.388 \cdot 10^{-3}$
5	14.8541	2.0469	$-5.902 \cdot 10^{-4}$	$1.737 \cdot 10^{-3}$	16.4299	2.0966	$1.141 \cdot 10^{-3}$	$-6.806 \cdot 10^{-3}$
6	18.0049	2.1419	$-3.097 \cdot 10^{-4}$	$1.070 \cdot 10^{-3}$	19.5794	2.1834	$7.653 \cdot 10^{-4}$	$-5.221 \cdot 10^{-3}$
7	21.1534	2.2217	$-1.805 \cdot 10^{-4}$	$7.125 \cdot 10^{-4}$	22.7270	2.2573	$5.446 \cdot 10^{-4}$	$-4.168 \cdot 10^{-3}$
8	24.3003	2.2906	$-1.134 \cdot 10^{-4}$	$5.019 \cdot 10^{-4}$	25.8734	2.3217	$4.049 \cdot 10^{-4}$	$-3.426 \cdot 10^{-3}$
9	27.4462	2.3510	$-7.548 \cdot 10^{-5}$	$3.690 \cdot 10^{-4}$	29.0188	2.3788	$3.114 \cdot 10^{-4}$	$-2.881 \cdot 10^{-3}$
10	30.5913	2.4050	$-5.250 \cdot 10^{-5}$	$2.805 \cdot 10^{-4}$	32.1636	2.4300	$2.459 \cdot 10^{-4}$	$-2.466 \cdot 10^{-3}$
11	33.7358	2.4537	$-3.785 \cdot 10^{-5}$	$2.190 \cdot 10^{-4}$	35.3079	2.4764	$1.985 \cdot 10^{-4}$	$-2.142 \cdot 10^{-3}$
12	36.8799	2.4981	$-2.809 \cdot 10^{-5}$	$1.749 \cdot 10^{-4}$	38.4518	2.5189	$1.632 \cdot 10^{-4}$	$-1.883 \cdot 10^{-3}$
13	40.0236	2.5389	$-2.137 \cdot 10^{-5}$	$1.422 \cdot 10^{-4}$	41.5954	2.5581	$1.362 \cdot 10^{-4}$	$-1.673 \cdot 10^{-3}$
14	43.1671	2.5766	$-1.660 \cdot 10^{-5}$	$1.175 \cdot 10^{-4}$	44.7387	2.5944	$1.152 \cdot 10^{-4}$	$-1.498 \cdot 10^{-3}$
15	46.3103	2.6116	$-1.312 \cdot 10^{-5}$	$9.842 \cdot 10^{-5}$	47.8819	2.6283	$9.850 \cdot 10^{-5}$	$-1.353 \cdot 10^{-3}$
16	49.4534	2.6444	$-1.053 \cdot 10^{-5}$	$8.339 \cdot 10^{-5}$	51.0248	2.6600	$8.507 \cdot 10^{-5}$	$-1.229 \cdot 10^{-3}$
17	52.5963	2.6751	$-8.572 \cdot 10^{-6}$	$7.139 \cdot 10^{-5}$	54.1677	2.6898	$7.411 \cdot 10^{-5}$	$-1.123 \cdot 10^{-3}$
18	55.7390	2.7041	$-7.060 \cdot 10^{-6}$	$6.167 \cdot 10^{-5}$	57.3104	2.7179	$6.506 \cdot 10^{-5}$	$-1.031 \cdot 10^{-3}$
19	58.8817	2.7314	$-5.877 \cdot 10^{-6}$	$5.370 \cdot 10^{-5}$	60.4530	2.7446	$5.751 \cdot 10^{-5}$	$-9.516 \cdot 10^{-4}$
20	62.0242	2.7574	$-4.939 \cdot 10^{-6}$	$4.711 \cdot 10^{-5}$	63.5955	2.7699	$5.115 \cdot 10^{-5}$	$-8.816 \cdot 10^{-4}$

4.3. Асимптотическое представление производных смещений для точек, близких к вершине трещины. Как известно, главные члены асимптотик напряжений, смещений и их производных вблизи вершины трещины определяются КИН. Однако, в отличие от весьма эффективного использования поля напряжений, определяемого КИН в качестве критерия роста трещин, распределение смещений и их производных, определяемых исключительно членом, пропорциональным КИН, оказывается достаточно точным только в весьма малой области, прилегающей к вершине трещины, а на расстояниях порядка 0.1 толщины слоя (для которых еще приемлемо использование формул (4.24), (4.25)) использование лишь членов, определяемых КИН, становится недостаточным. В общем случае распределение производных смещений вблизи вершины трещины может быть представлено как сумма ряда по полужелым степеням $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, соответствующего собственным решениям для бесконечного тела с трещиной, и ряда по целым степеням x_1, x_2 , соответствующего регулярной части поля напряжения.

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{tip} &= \sum_{n=0}^N \sigma_{ij}^{(n-1/2)}(\theta) r^{n-1/2} + \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij,1}^{(0)} x_1 + \sigma_{ij,2}^{(0)} x_2 + \\
&+ \sigma_{ij,11}^{(0)} \frac{x_1^2}{2} + \sigma_{ij,12}^{(0)} x_1 x_2 + \sigma_{ij,22}^{(0)} \frac{x_2^2}{2} + \dots \\
u_{i,1}^{tip} &= \sum_{n=0}^N U_i^{(n-1/2)}(\theta) r^{n-1/2} + U_i^{(0)} + U_{i,1}^{(0)} x_1 + U_{i,2}^{(0)} x_2 + \\
&+ U_{i,11}^{(0)} \frac{x_1^2}{2} + U_{i,12}^{(0)} x_1 x_2 + U_{i,22}^{(0)} \frac{x_2^2}{2} + \dots
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Здесь θ – полярный угол; величина $\sigma_{ij}^{(0)} = \delta_{i1}\delta_{j1}T$ – известна как Т-напряжение; величины $\sigma_{ij}^{(-1/2)}$, $U_i^{(-1/2)}$ определяются коэффициентами интенсивности напряжений. Последние получаются из общеизвестных выражений для распределения напряжений вблизи вершины трещины (например, [51]) применением уравнений теории упругости (значения КИН для рассматриваемых случаев известны (3.7)):

$$\begin{aligned}
U_1^{(-1/2)} &= \frac{K_1}{2\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} [2(1 - \bar{\nu}) - (1 + \bar{\nu})(\cos \theta - \cos 2\theta)] - \\
&\quad \frac{K_2}{2\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} [4 + (1 + \bar{\nu})(\cos \theta + \cos 2\theta)] \\
U_2^{(-1/2)} &= \frac{K_1}{2\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} [-4 + (1 + \bar{\nu})(\cos \theta + \cos 2\theta)] - \\
&\quad \frac{K_2}{2\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} [2(1 - \bar{\nu}) + (1 + \bar{\nu})(\cos \theta - \cos 2\theta)].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Выражения для остальных интересующих величин, входящих в (4.28), получены в п. 7:

$$\begin{aligned}
U_1^{(0)} &\approx 5.0196M, & U_{1,1}^{(0)} &\approx -2.3606M, & U_{1,11}^{(0)} &\approx -3.423M, \\
U_{1,2}^{(0)} &= -U_{2,1}^{(0)}, & U_{1,12}^{(0)} &\approx -U_{2,11}^{(0)}, & U_{1,22}^{(0)} &= -(1 - 2\bar{\nu})U_1^{(11)}, \\
U_2^{(0)} &\approx 2.0837T, & U_{2,1}^{(0)} &\approx 3.808T, & U_{2,11}^{(0)} &\approx 4.0268T, \\
U_{2,2}^{(0)} &= -\bar{\nu}U_{1,1}^{(0)}, & U_{2,12}^{(0)} &\approx -\bar{\nu}U_{1,11}^{(0)}, & U_{2,22}^{(0)} &\approx \bar{\nu}U_{2,11}^{(0)}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$U_1^{(1/2)} = \frac{\sigma_{22}^{(1/2)}}{2} \cos \frac{\theta}{2} [3 - \cos \theta - \bar{\nu}(1 + \cos \theta)] + \frac{\sigma_{12}^{(1/2)}}{2} \sin \frac{\theta}{2} [5 + \bar{\nu} + (1 + \bar{\nu})\cos \theta] \tag{4.31}$$

$$U_2^{(1/2)} = \frac{\sigma_{22}^{(1/2)}}{2} \sin \frac{\theta}{2} [3 - \cos \theta - \bar{\nu}(1 + \cos \theta)] - \frac{\sigma_{12}^{(1/2)}}{2} \cos \frac{\theta}{2} [1 - 3\bar{\nu} + (1 + \bar{\nu})\cos \theta],$$

$$U_1^{(3/2)} = -\frac{\sigma_{22}^{(3/2)}}{2} \cos \frac{\theta}{2} [5 + \bar{\nu} - (7 - \bar{\nu})\cos \theta] + \frac{\sigma_{12}^{(3/2)}}{2} \sin \frac{\theta}{2} [7 + 3\bar{\nu} + (11 + 3\bar{\nu})\cos \theta] \tag{4.32}$$

$$U_2^{(3/2)} = \frac{\sigma_{22}^{(3/2)}}{2} \sin \frac{\theta}{2} [1 - 3\bar{\nu} + (5 - 3\bar{\nu})\cos \theta] - \frac{\sigma_{12}^{(3/2)}}{2} \cos \frac{\theta}{2} [1 + 5\bar{\nu} + (1 - 7\bar{\nu})\cos \theta].$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22}^{(1/2)} &= \lim_{x_1 \rightarrow 0+} \left[\sigma_{22}(x_1, 0) - K_1 (2\pi x_1)^{-1/2} - \sigma_{22}^{(0)} \right] x_1^{1/2} \approx -5.587M \\
 \sigma_{12}^{(1/2)} &= \lim_{x_1 \rightarrow 0+} \left[\sigma_{12}(x_1, 0) - K_2 (2\pi x_1)^{-1/2} - \sigma_{12}^{(0)} \right] x_1^{1/2} \approx -1.196T \\
 \sigma_{22}^{(3/2)} &= \lim_{x_1 \rightarrow 0+} \left[\sigma_{22}(x_1, 0) - K_1 (2\pi x_1)^{-1/2} - \sigma_{22}^{(0)} - \sigma_{22}^{(1/2)} x_1^{1/2} - \sigma_{22}^{(1)} x_1 \right] x_1^{3/2} \approx (4.33) \\
 &\approx 3.765M \\
 \sigma_{12}^{(3/2)} &= \lim_{x_1 \rightarrow 0+} \left[\sigma_{12}(x_1, 0) - K_2 (2\pi x_1)^{-1/2} - \sigma_{12}^{(0)} - \sigma_{12}^{(1/2)} x_1^{1/2} - \sigma_{12}^{(1)} x_1 \right] x_1^{3/2} \approx \\
 &\approx 0.2988T.
 \end{aligned}$$

Выражения, зависящие от декартовых координат, получаются подстановкой

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \cos \theta = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \cos 2\theta = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \\
 \cos \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

5. Численные расчеты. Значения КИН от действия произвольной силы $Q_1(x_1^0, x_2^0), Q_2(x_1^0, x_2^0)$, действующей в точке (x_1^0, x_2^0) , получаются подстановкой в (3.8) производных смещений $u_{1,1}(x_1^0, x_2^0), u_{2,1}(x_1^0, x_2^0)$, рассчитанных согласно (4.22), (4.23), либо (4.24), (4.25), либо (4.28)–(4.34).

В силу симметрии геометрии, в ряде ситуаций удобно рассмотреть общий случай как суперпозицию четырех вариантов приложения пар сил:

– пара нормальных сил, приложенных на равноотстоящих от берегов трещины расстояниях и действующих в противоположном направлении, $Q_1(x_1^0, x_2^0) = -Q_1(x_1^0, x_2^0) = Q_{FD}(x_1^0, x_2^0)$ – (вариант (FD)).

– пара нормальных сил, приложенных на равноотстоящих от берегов трещины расстояниях и действующих в противоположном направлении, $Q_1(x_1^0, x_2^0) = Q_1(x_1^0, x_2^0) = Q_{FA}(x_1^0, x_2^0)$ – (вариант (FA)).

– пара продольных сил, приложенных на равноотстоящих от берегов трещины расстояниях и действующих в противоположном направлении, $Q_2(x_1^0, x_2^0) = -Q_2(x_1^0, x_2^0) = Q_{TA}(x_1^0, x_2^0)$ – (вариант (TA)).

– пара продольных сил, приложенных на равноотстоящих от берегов трещины расстояниях и действующих в противоположном направлении, $Q_2(x_1^0, x_2^0) = Q_2(x_1^0, x_2^0) = Q_{TD}(x_1^0, x_2^0)$ – (вариант (TD)).

В силу симметрии в первом и четвертом случаях будет присутствовать только нормальная мода КИН, а во втором и третьем – только сдвиговая:

$$\begin{aligned}
 \frac{K_1^{FD}}{Q_{FD}} &= -\frac{\bar{E}u_{2,1}^M(x_1^0, x_2^0)}{2\sqrt{3}}, \quad \frac{K_1^{TD}}{Q_{TD}} = -\frac{\bar{E}u_{1,1}^M(x_1^0, x_2^0)}{2\sqrt{3}}, \\
 \frac{K_2^{TA}}{Q_{TA}} &= -\frac{\bar{E}u_{1,1}^T(x_1^0, x_2^0)}{2}, \quad \frac{K_2^{FA}}{Q_{FA}} = -\frac{\bar{E}u_{2,1}^T(x_1^0, x_2^0)}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Далее рассмотрены некоторые частные случаи.

5.1. *Силы, приложенные к берегам трещины.* Данная ситуация представляется наиболее интересной. Именно ее исследованию, и в частности случаю нагружения симметрично расположенной системой сил, посвящено большинство работ [24, 31–33].

Для точек, удаленных от вершины трещины, подстановка (4.22) в (5.1) дает:

$$\begin{aligned}\frac{K_1^{FD}}{Q_{FD}} &= \sqrt{12}(-x_1^0 + \delta) + \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} B_{22}(p_k^{(1)}) p_k^{(1)} \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{K_1^{TD}}{Q_{TD}} &= -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} B_{12}(p_k^{(1)}) p_k^{(1)} \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{K_2^{TA}}{Q_{TA}} &= 2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} B_{11}(p_k^{(1)}) \exp(p_k^{(1)} x_1), \\ \frac{K_2^{FA}}{Q_{FA}} &= 3(x_1^0 - \delta_m) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} B_{21}(p_k^{(1)}) \exp(p_k^{(1)} x_1).\end{aligned}\tag{5.2}$$

Здесь величины B_{ij} определяются (4.17). Учет лишь первых двух вычетов дает достаточно простые формулы:

$$\begin{aligned}\frac{K_1^{FD}}{Q_{FD}} &= \sqrt{12}(-x_1^0 + \delta) + \exp \alpha_1 x_1^0 (0.5205 \cos \beta_1 x_1^0 - 0.1660 \sin \beta_1 x_1^0) + \\ &+ \exp \alpha_2 x_1^0 (0.4270 \cos \beta_2 x_1^0 - 0.06139 \sin \beta_2 x_1^0) + O(\exp \alpha_3 x_1^0), \\ \frac{K_1^{TD}}{Q_{TD}} &= -\sqrt{3} - \exp \alpha_1 x_1^0 (0.06113 \cos \beta_1 x_1^0 + 0.4905 \sin \beta_1 x_1^0) - \\ &- \exp \alpha_2 x_1^0 (0.0104 \cos \beta_2 x_1^0 + 0.4128 \sin \beta_2 x_1^0) + O(\exp \alpha_3 x_1^0), \\ \frac{K_2^{TA}}{Q_{TA}} &= 2 + \exp \alpha_1 x_1^0 (0.5555 \cos \beta_1 x_1^0 + 0.09998 \sin \beta_1 x_1^0) + \\ &+ \exp \alpha_2 x_1^0 (0.4536 \cos \beta_2 x_1^0 + 0.06658 \sin \beta_2 x_1^0) + O(\exp \alpha_3 x_1^0), \\ \frac{K_2^{FA}}{Q_{FA}} &= 3(x_1^0 - \delta_m) + \exp \alpha_1 x_1^0 (0.0042 \cos \beta_1 x_1^0 + 0.6239 \sin \beta_1 x_1^0) + \\ &+ \exp \alpha_2 x_1^0 (-0.0135 \cos \beta_2 x_1^0 + 0.4788 \sin \beta_2 x_1^0) + O(\exp \alpha_3 x_1^0), \\ \alpha_1 &\approx 4.2124, \beta_1 \approx 2.2507, \alpha_2 \approx 7.4976, \beta_2 \approx 2.7687, \alpha_3 \approx 10.713.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Здесь члены, не содержащие убывающие экспоненты, соответствуют случаю приложения нагрузки на бесконечности, рассмотренному в работе [43].

Вблизи вершины трещины подстановка (4.28)–(4.34) в (5.1) дает:

$$\begin{aligned}
\frac{K_1^{FD}}{Q_{FD}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-x_1)^{-1/2} + 3.226(-x_1)^{1/2} + 2.174(-x_1)^{3/2} + O(x_1^{5/2}) \\
\frac{K_1^{TD}}{Q_{TD}} &= -1.449 + 0.6814x_1 + 0.4941x_1^2 + O(x_1^3) \\
\frac{K_2^{TA}}{Q_{TA}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-x_1)^{-1/2} + 1.196(-x_1)^{1/2} + 0.2988(-x_1)^{3/2} + O(x_1^{5/2}) \\
\frac{K_2^{FA}}{Q_{FA}} &= -1.042 + 1.904x_1 - 1.007x_1^2 + O(x_1^3).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Для случая нагружения парой нормальных сил (FD) погрешность, даваемая асимптотикой (5.3), по сравнению с точным решением для $|x_1^0| = 0.3$ составляет 0.4% и уменьшается с ростом $|x_1^0|$. Погрешность, даваемая асимптотикой (5.4), для $|x_1^0| = 0.3$ составляет 0.39% и уменьшается с уменьшением $|x_1^0|$. Таким образом, существует область пересечения в районе $|x_1^0| = 0.3$, где обе асимптотики дают погрешности менее 0.5%.

Аналогично для случая нагружения парой продольных сил (ТА) погрешность, даваемая асимптотикой (5.3), по сравнению с точным решением для $|x_1^0| = 0.3$ составляет 0.54% и уменьшается с ростом $|x_1^0|$. Погрешность, даваемая асимптотикой (5.4), для $|x_1^0| = 0.3$ составляет 0.81% и уменьшается с уменьшением $|x_1^0|$. Таким образом, существует область пересечения в районе $|x_1^0| = 0.3$, где обе асимптотики дают погрешности менее 0.9%.

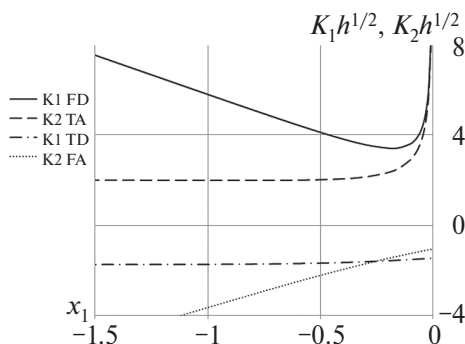


Рис. 4. Зависимости нормализованных значений КИН от действия пар сил, приложенных к берегам трещины в зависимости от координаты x_1 точек их приложения. Сплошная линия — K_1 от действия пары нормальных противоположно направленных сил; пунктирная линия — K_2 от действия пары продольных противоположно направленных сил; штрих-пунктирная линия — K_1 от действия пары продольных сонаправленных сил; точечная линия — K_2 от действия пары нормальных сонаправленных сил.

Еще лучше работают асимптотические представления для случая нагружения парой нормальных сил, действующих в одном направлении (ФА). Так погрешность, даваемая асимптотикой (5.3), с учетом лишь первого содержащего экспоненту члена по сравнению с точным решением для $|x_1^0| = 0.2$ составляет 0.08% и уменьшается с ростом $|x_1^0|$. Погрешность, даваемая асимптотикой (5.4), для $|x_1^0| = 0.2$ составляет 0.14% и уменьшается с уменьшением $|x_1^0|$. Таким образом, существует область пересечения в районе $|x_1^0| = 0.2$, где обе асимптотики дают погрешности менее 0.15%.

Несколько хуже работают асимптотические представления для

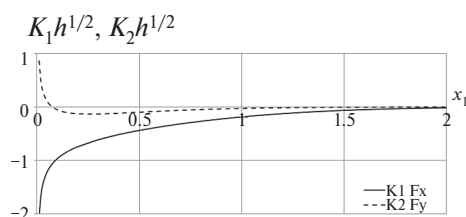


Рис. 5. Зависимости нормализованных значений КИН от действия сил, приложенных на продолжении линии трещины в зависимости от координаты x_1 точек их приложения. Сплошная линия — K_1 от действия продольной силы; пунктирная линия — K_2 от действия нормальной силы.

случая нагружения парой продольных сил, действующих в одном направлении (ТД). Погрешность, даваемая асимптотикой (5.4), для $|x_1^0| = 0.1$ составляет 0.65%, а для $|x_1^0| = 0.15$ — уже 1.45%. Погрешность же, даваемая асимптотикой (5.3), составляет для этих расстояний уже 12 и 8%, соответственно. Приемлемые результаты она дает лишь до $|x_1^0| = 0.4$, где значение относительной погрешности составляет 0.35%. Поэтому при расчетах необходимо в разложении (5.2) удерживать большее количество членов. Так, для достижения точности 0.5% для $|x_1^0| = 0.1$ необходимо удержать минимум 11 членов.

Зависимости нормализованных значений КИН в зависимости от координаты x_1 приложения пар сил представлены на рис. 4.

В работе [33] для случая нагружения парой нормальных сил (рассмотренный случай FD) была предложена аппроксимационная формула, в используемых обозначениях записываемая в виде (здесь использовано значение δ посчитанное в [43], в работе [33] было использовано значение 0.673):

$$\frac{K_1^{FD}}{Q_{FD}} = \sqrt{12}(-x_1^0 + \delta) + \sqrt{\frac{2}{\pi(-x_1^0)}} - \left(0.815(-x_1^0)^{0.619} + 0.429\right)^{-1}. \quad (5.5)$$

Согласно проведенным расчетам ее погрешность не превышает 1% (в работе [33] ее погрешность оценивалась не более 1.1%).

5.2. Силы, приложенные на продолжении линии трещины. Значения КИН рассчитываются подстановкой в (3.8) выражения (4.25) для $x_1 \geq 0.1$ либо

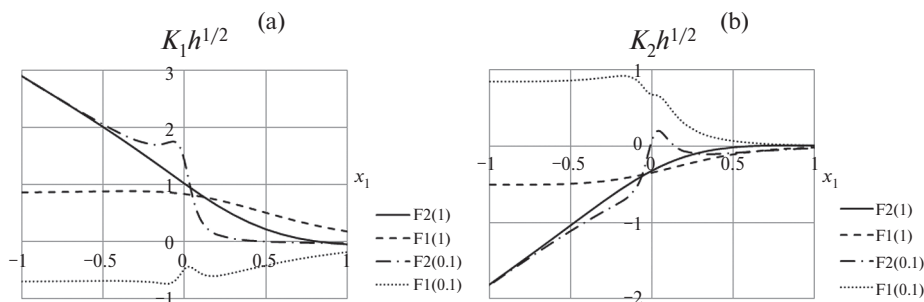


Рис. 6. Зависимости нормализованных значений K_1 — (а) и K_2 — (б) от действия сил, приложенных на внешней границе $x_2 = 1$ и линии, параллельной границе и отстоящей от линии трещины $x_2 = 0.1$ в зависимости от координаты x_1 точек их приложения. Сплошные линии — от действия нормальной силы $x_2 = 1$; пунктирные линии — от действия продольной силы $x_2 = 1$; штрих-пунктирные линии — от действия нормальной силы $x_2 = 0.1$; точечные линии — от действия продольной силы $x_2 = 0.1$.

(4.28)–(4.33) при $\theta = 0$ для $x_1 \leq 0.1$. Поскольку точки приложения сил являются внутренними точками, решение становится зависящим от коэффициента Пуассона. Расчеты проводились для $\bar{\nu} = 0.3$. Зависимости для ненулевых КИН представлены на рис. 5.

Представленные расчеты показывают, что при стремлении точки приложения сил к вершине трещины значения КИН отличаются в зависимости от того, стремиться ли координата точки приложения к нулю справа или слева. Пределы оказываются различны. Это обусловлено наличием корневой особенности поля производных смещений в вершине трещины.

5.3. Силы, приложенные к внешним границам либо к внутренним точкам полюсы. Значения КИН рассчитываются подстановкой в (3.8) выражений (4.24)–(4.26) для $|x_1| \geq 0.1$ либо – для $-0.1 \leq x_1 \leq 0.1, x_2 \leq 0.1$, либо по общим формулам (4.22), (4.23) для $-0.1 \leq x_1 \leq 0.1, 0.1 \leq x_2 \leq 1$. Зависимости для КИН представлены на рис. 6. Для внутренних точек решение становится зависящим от коэффициента Пуассона. Расчеты для $x_2 = 0.1$ проводились для $\bar{\nu} = 0.3$.

5.4. Распределенная нагрузка вблизи вершины трещин; связь с моделью когезионной зоны. Когезионные модели предполагают наличие некоторых, обычно малых, зон вблизи вершины трещины, в пределах которых действуют силы некоторой природы, достаточно большой интенсивности, компенсирующие сингулярность в вершине [54–56]. Для моды нормального отрыва эти силы сжимающие, для сдвиговой моды – продольные, противоположно направленные.

Пусть в пределах зоны $-a \leq x_1 \leq 0$ действуют когезионные силы $\sigma_{22}^c(x_1), \sigma_{12}^c(x_1)$. Их вклад в КИН можно вычислить интегрированием выражений для асимптотики ближнего поля – с помощью первой и третьей формул (5.4) с весами $\sigma_{22}^c(x_1), \sigma_{12}^c(x_1)$ соответственно. При весьма малом a достаточно лишь ведущих членов асимптотического разложения, определяемых КИН, в противном случае, можно удержать еще один или два члена асимптотического разложения (5.4).

6. Приложение: поле вблизи вершины трещины; несколько старших членов разложения. **6.1. Разложения производных смещений в окрестности вершины трещины с нецелыми степенями.** Для бесконечного тела с трещиной $x_1 \in]-\infty, 0]$, $x_2 = 0$ решения, удовлетворяющие условиям отсутствия нормальных и касательных напряжений на берегах, выраженные через комплексные потенциалы $\Phi(z), \Psi(z)$, $z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$ [57], могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \sum_k A_{k-1/2} z^{k-1/2} = \sum_k A_{k-1/2} r^{k-1/2} e^{i(k-1/2)\theta}, \\ \Psi(z) &= \sum_k B_{k-1/2} z^{k-1/2} = \sum_k B_{k-1/2} r^{k-1/2} e^{i(k-1/2)\theta},\end{aligned}\quad (6.1)$$

где $A_{k-1/2}, B_{k-1/2}$ – комплексные константы. Случай $k = 0$ соответствует сингулярному полю напряжений, характеризуемому КИН, $k < 0$ – членам с более высоким порядком сингулярности, не рассматриваемым здесь.

Напряжения и производные смещения выражаются следующим образом [57]:

$$\begin{aligned}\sigma_{22}(z) - i\sigma_{12}(z) &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \\ u_{1,1}(z) + iu_{2,1}(z) &= \frac{1}{2\mu} \left[\kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \right],\end{aligned}\quad (6.2)$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации; μ — модуль сдвига. Для $k = 1, 2$ решения, удовлетворяющие условиям

$$\sigma_{22}(r, \theta = 0) = \sigma_{22}^{(k-1/2)} r^{k-1/2}, \quad \sigma_{12}(r, \theta = 0) = \sigma_{12}^{(k-1/2)} r^{k-1/2} \quad (6.3)$$

и отсутствия нормальных и касательных напряжений на берегах трещины

$$\sigma_{22}(r, \theta = \pm\pi) - i\sigma_{12}(r, \theta = \pm\pi) = 0 \quad (6.4)$$

после несложных алгебраических преобразований приводятся к виду (4.31), (4.32).

6.2. Коэффициенты при дробных степенях разложения решения по расстоянию от вершины трещины в вспомогательных задачах о трещине в полосе. Лаплас-образы нормальных и касательных напряжений, действующих на продолжении трещины, имеют вид (4.6), (4.5). Их асимптотическое разложение на бесконечности представляется в виде рядов:

$$\frac{\hat{q}_2(p)}{M} = \sqrt{6}p^{-1/2} - (8I_2 + 3\pi)\frac{\sqrt{6}}{8}p^{-3/2} + (8I_2 + 3\pi)^2\frac{\sqrt{6}}{128}p^{-5/2} + O(p^{-7/2}), \quad (6.5)$$

$$\frac{\hat{q}_1(p)}{T} = \sqrt{2}p^{-1/2} - (8I_1 + \pi)\frac{\sqrt{2}}{8}p^{-3/2} + (8I_1 + \pi)^2\frac{\sqrt{2}}{128}p^{-5/2} + O(p^{-7/2}), \quad (6.6)$$

где I_2, I_1 — главные члены асимптотических разложений при $p \rightarrow \infty$ интегралов, входящих в функции $H_2^+(p), H_1^+(p)$ (4.12), (4.9), которые находятся по формулам [35, 58]

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{2} \operatorname{th} t \frac{\operatorname{sh} 2t - 2t}{\operatorname{sh}^2 t - t^2} \right) dt \approx 0.35685, \quad (6.7)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{2} \operatorname{th}^3 t \frac{\operatorname{sh} 2t + 2t}{\operatorname{sh}^2 t - t^2} \right) dt \approx 0.84334. \quad (6.8)$$

При выводе (6.5), (6.6) использовано свойство симметрии подынтегральных выражений функции $H_2^+(p), H_1^+(p)$ (4.12), (4.9), приводящее к равенству нулю следующего члена разложения интегралов, входящих в (4.12), (4.39).

Разложения оригиналов нормальных и касательных напряжений вблизи нуля находится применением обратного преобразования (4.2) к разложению образов (6.5), (6.6):

$$\frac{\sigma_{22}(x_1, 0)}{M} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} x_1^{-1/2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\pi} (8I_2 + 3\pi) x_1^{1/2} + \frac{(8I_2 + 3\pi)^2}{16\sqrt{6}\pi} x_1^{3/2} + O(x^{5/2}), \quad (6.9)$$

$$\frac{\sigma_{12}(x_1, 0)}{T} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x_1^{-1/2} - \frac{8I_1 + \pi}{2\sqrt{2}\pi} x_1^{1/2} + \frac{(8I_1 + \pi)^2}{48\sqrt{2}\pi} x_1^{3/2} + O(x^{5/2}). \quad (6.10)$$

Здесь главные члены разложения соответствуют, как и ожидалось, полю от КИН, вычисление коэффициентов при следующих членах разложений дает (4.33).

6.3. Регулярные члены разложения производных смещений в окрестности вершины трещины. Коэффициенты $U_1^{(0)}, U_{1,1}^{(0)}, U_{1,11}^{(0)}, U_2^{(0)}, U_{2,1}^{(0)}, U_{2,11}^{(0)}$ находятся с учетом того, что нерегулярные члены не дают вклада в поле производных

смещений на берегах трещины непосредственным использованием (4.22), (4.2) и свойства дифференцирования оригинала:

$$\frac{U_1^{(0)}}{M} = 6 + \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{is+1}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{12}(is+1, x_2=0)}{h_2^+(is+1)H_2^+(is+1)} ds \approx 5.0196, \quad (6.11)$$

$$\frac{U_{1,1}^{(0)}}{M} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(is+1)^2}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{12}(is+1, x_2=0)}{h_2^+(is+1)H_2^+(is+1)} ds \approx -2.3606, \quad (6.12)$$

$$\frac{U_{1,11}^{(0)}}{M} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(is+1)^3}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{12}(is+1, x_2=0)}{h_2^+(is+1)H_2^+(is+1)} ds - 3.423, \quad (6.13)$$

$$\frac{U_2^{(0)}}{T} = 6\delta_m + \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{21}(is+1, x_2=0)}{h_1^+(is+1)H_1^+(is+1)} ds \approx 3.808, \quad (6.14)$$

$$\frac{U_{2,1}^{(0)}}{T} = -6 + \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{is+1}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{21}(is+1, x_2=0)}{h_1^+(is+1)H_1^+(is+1)} ds \approx 3.808, \quad (6.15)$$

$$\frac{U_{2,11}^{(0)}}{T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(is+1)^2}{\sin^2(is+1) - (is+1)^2} \frac{B_{21}(is+1, x_2=0)}{h_1^+(is+1)H_1^+(is+1)} ds \approx 4.0268. \quad (6.16)$$

Остальные величины в (4.30) находятся из комбинаций условий равенства нулю нормальных и касательных напряжений на берегах трещины (а следовательно и их производных по x_1), уравнений равновесия (а также производных от них по координатам), в которых напряжения и деформации выражены через комбинации производных смещений.

7. Обсуждения и выводы. В настоящей работе рассмотрена двумерная задача теории упругости об изотропной полосе с центральной полубесконечной трещиной. Нагрузка в виде сосредоточенной силы предполагается приложенной в произвольной точке: на одном из берегов трещины, на внешней границе полосы либо к внутренней точке полосы. Решение для произвольной нагрузки, таким образом, в силу линейности задачи может быть получено суперпозицией. С использованием инвариантных взаимных интегралов (например, [44–46]) и решения для полосы, нагруженной изгибающими моментами и продольными силами [35, 52], приложенными на бесконечности, получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для рассматриваемой задачи. В общем случае выражения для КИН представлены в виде двойных интегралов, посчитанных численно. Рассмотрены случаи сил, приложенных к берегам трещины, границам полосы и внутренним точкам полосы.

Получены асимптотические выражения для случаев приложения сил вдали от вершины трещины в виде рядов по убывающим экспонентам, сходящимся тем быстрее, чем дальше точка приложения силы от вершины трещины. Коэффициенты рядов получены в виде однократных интегралов от алгебраических функций, посчитанных численно. Также получены асимптотические выражения для КИН в случае сил, приложенных к берегам трещины вблизи

ее вершины, в виде рядов по полуплоскостям и целым степеням расстояния до вершины.

Показаны совпадения полученных решений с известными решениями для частных случаев: нагрузки в виде пары нормальных сил, приложенных к берегам трещины и сил, приложенных вдали от вершины трещины.

Рассмотрена связь полученных решений с моделью когезионной трещины.

Отметим, что “нефизичность” некоторых полученных результатов, таких как различие значений КИН при стремлении к нулю расстояния между точкой приложения силы и вершиной трещины в зависимости от направления, по которому эти точки сближаются, объясняется асимптотическим характером самого сингулярного решения для поля напряжений и смещений вблизи вершины. В действительности, безусловно, бесконечных напряжений и деформаций существовать не может: при приближении к вершине и росте напряжений наступит момент, когда начнут влиять нелинейность, неупругость, дискретность структуры либо какие другие факторы. Однако все эти процессы будут управляться локальным полем, которое вполне можно определить из упругого решения, в частности представленного в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке госзадания (№ госрегистрации 124012500441-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zweben C., Smith W.S., Wardle M.W.* Test methods for fiber tensile strength, composite flexural modulus, and properties of fabric-reinforced laminates // *Composite Materials: Testing and Design (Fifth Conference)*. 1979. P. 228–262.
<https://doi.org/10.1520/STP36912S>
2. *Hofinger I., Oechsner M., Bahr H.-A., Swain M.V.* Modified four-point bend specimen for determining the interface fracture energy for thin, brittle layers // *Int. J. Fracture*. 1998. V. 92. P. 213–220.
3. *Thery P.-Y., Poulain M., Dupeux M., Braccini M.* Spallation of two thermal barrier coating systems: experimental study of adhesion and energetic approach to lifetime during cyclic oxidation // *J. Mater. Sci.* 2009. V. 44. P. 1726–1733.
<https://doi.org/10.1007/s10853-008-3108-x>
4. *Hutchinson R.G., Hutchinson J.W.* Lifetime assessment for thermal barrier coatings: tests for measuring mixed mode delamination toughness. // *J. Am. Ceram. Soc.* 2011. V. 94. № s1. P. S85–S95.
<https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2011.04499.x>
5. *Vaunois J.-R., Poulain M., Kanouté P., Chaboche J.-L.*, Development of bending tests for near shear mode interfacial toughness measurement of EB-PVD thermal barrier coatings // *Eng. Frac. Mech.* 2017. V. 171. P. 110–134.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.11.009>
6. *Monetto I., Massabò R.* An analytical solution for the inverted four-point bending test in orthotropic specimens // *Eng. Fract. Mech.* 2021. V. 245. P. 107521.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107521>
7. *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of composite structural members. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 2004. 470 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-08589-9>
8. *Banks-Sills L.* Interface fracture and delaminations in composite materials. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer, International Publishing, Cham, 2018. 120 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-60327-8>

9. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 94–112.
10. Глаголев В.В., Маркин А.А. Влияние модели поведения тонкого адгезионного слоя на значение j -интеграла // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 90–98.
<http://doi.org/10.31857/S0572329922020118>
11. Глаголев В.В., Маркин А.А. Предельные состояния адгезионных слоев при комбинированном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 6. С. 39–46.
<http://doi.org/10.31857/S0572329923600019>
12. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
13. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers // Int. J. Fract. 1990. V. 43. P. 1–18.
14. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials // Adv. Appl. Mech. 1991. V. 29. P. 63–191.
[http://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70164-9](http://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70164-9)
15. Massabò R., Brandinelli L., Cox B.N. Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam // Int. J. Eng. Sci. 2003. V. 41. № 13–14. P. 1497–1518.
[http://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00029-6](http://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00029-6)
16. Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials // J. Mech. Phys. Solids. 2004. V. 52. № 1. P. 193–214.
[http://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](http://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
17. Andrews M.G., Massabò R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // Eng. Fract. Mech. 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.
<http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
18. Кургузов В.Д. Моделирование отслоения тонких пленок при сжатии // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7. № 1. С. 91–99.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.10>
19. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // Eng. Failure Anal. 2015. V. 47. (Part B) P. 338–344.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>
20. Begley M.R., Hutchinson J.W. The mechanics and reliability of films, multilayers and coatings. Cambridge University Press. 2017.
<https://doi.org/10.1017/9781316443606>
21. Ватульян А.О., Морозов К.Л. Об исследовании отслоения от упругого основания на основе модели с двумя коэффициентами постели // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 64–76.
<https://doi.org/10.31857/S0572329920020130>
22. Ватульян А.О., Морозов К.Л. Исследование процесса отслоения неоднородного покрытия // ПМТФ. 2021. Т. 62. № 6 (370). С. 138–145.
<http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20210616>
23. Obreimoff J.W. The splitting strength of mica // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 1930. V. 127. № 805. P. 290–297.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1930.0058>
24. Gilman J.J., Fracture / Ed. B.L. Averbach et al. NY: John Wiley and Sons Inc., 1959. P. 193–221.
25. Suo Z. Delamination specimens for orthotropic materials // J. Appl. Mech. 1990. V. 57. № 3. P. 627–634.
<https://doi.org/10.1115/1.2897068>
26. Grekov M.A., Morozov N.F. Some modern methods in mechanics of cracks. In V. Adamyan, et al. (Eds.), Operator theory: advances and applications // Modern analysis and applications. Birkhäuser. 2009. V. 191. P. 127–142.
https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_8

27. *Ripling E.J., Mostovoy S., Patrick R.L.* Materials research standards // Materials Research and Standards. 1964. № 3 P. 129–134.
28. *Kanninen M.F.* An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest // Int. J. Fract. 1973. V. 9. 83–92.
<https://doi.org/10.1007/BF00035958>
29. *Gross B., Srawley J.E.* Stress intensity factors by boundary collocation for single-edge notch specimens subjected to splitting forces. NASA, 1966.
30. *Понов Г.Я.* Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании // ПММ. 1961. Т. 25. № 2. С. 342–355.
31. *Ентов В.М., Салганик Р.Л.* О балочном приближении в теории трещин // Изв. АН СССР. 1965. № 5. С. 95–102.
32. *Fichter W.B.* The stress intensity factor for the double cantilever beam // Int. J. Fract. 1983. V. 22. P. 133–143.
<https://doi.org/10.1007/BF00942719>
33. *Foote R.M.L., Buchwald V.T.* An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // Int. J. Fract. 1985. V. 29. P. 125–134.
<https://doi.org/10.1007/BF00034313>
34. *Златин А.Н., Храпков, А.А.* Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 31. С. 1009–1010.
35. *Khrapkov A.A.* Winer-Hopf method in mixed elasticity theory problems. B.E. Vedenev VNIIG Publ. House. 2001.
36. *Салганик Р.Л., Устинов К.Б.* Задача о деформировании упруго заделанной пластины, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 4. С. 50–62.
37. *Georgiadis H.G., Papadopoulos G.A.* Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen // Z. Angew. Math. Phys. 1990. V. 41. P. 889–899.
<https://doi.org/10.1007/BF00945841>
38. *Устинов К.Б., Лисовенко Д.С., Ченцов А.В.* Ортотропная полоса с центральной полубесконечной трещиной под произвольными нормальными нагрузками, приложенными вдали от вершины трещины // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2019. Т. 23. № 4. С. 657–670.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1736>
39. *Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // Eng. Failure Analysis. 2020. V. 110. P. 104410.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
40. *Устинов К.Б.* Т-напряжения в ортотропной полосе с центральной полубесконечной трещиной нагруженной вдали от вершины трещины // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 4.
41. *Устинов К.Б., Борисова Н.Л.* Расслоение полосы состоящей из двух одинаковых ортотропных полуполос с осями изотропии симметрично наклоненными к границе раздела // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 5.
42. *Ustinov K.B., Idrisov, D.M.* On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: exact analytical solutions for some particular cases // ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. 2021. V. 101. № 4. P. e202000239.
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000239>
43. *Ustinov K.* On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // Eur. J. Mech. A Solids. 2019. V. 75. P. 56–69.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>
44. *Chen F.H.K., Shield R.T.* Conservation laws in elasticity of the J-integral type // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). 1977. V. 28. P. 1–22.
<https://doi.org/10.1007/BF01590704>

45. *Cho Y.J., Beom H. G., Earmme, Y.Y.* Application of a conservation integral to an interface crack interacting with singularities // *Int. J. Fracture*. 1994. V. 65. P. 63–73.
<https://doi.org/10.1007/BF00017143>
46. *Sladek J., Sladek V.* Evaluations of the T-stress for interface cracks by the boundary element method // *Eng. Fract. Mech.* 1997. V. 56. № 6. P. 813–825.
[https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00131-2](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00131-2)
47. *Eshelby J.D.* The force on an elastic singularity // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*. 1951. V. 244. № 877. P. 87–112.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1951.0016>
48. *Cherepanov G.P.* Crack propagation in continuous medium: PMM // *J. Appl. Math. Mechanics*. 1967. V. 31. № 3. P. 503–512.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(67\)90034-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(67)90034-2)
49. *Rice J.R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *J. Appl. Mech.* 1968. V. 35. № 2. P. 379–386.
<https://doi.org/10.1115/1.3601206>
50. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // *J. Appl. Mech.* 1957. V. 24. № 3. P. 361–364.
<https://doi.org/10.1115/1.4011547>
51. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
52. *Ustinov K.B., Monetto I., Massabò R.* Analytical solutions for an isotropic strip with a central semi-infinite crack: T-stresses, displacements of boundaries, stress intensity factor due to a force acting at the crack.
<https://doi.org/10.2139/ssrn.4786695>
53. *Ustinov K., Massabò R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *Int. J. Sol. Struct.* 2022. V. 248. P. 111600.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600>
54. *Леонов М.Я., Панасюк В.В.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле // *Прикл. механика*. 1959. Т. 5. № 4. С. 391–401.
55. *Баренблатт Г.И.* О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении // *ПММ*. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 434–444; Вып. 4. С. 706–721; Вып. 5. С. 893–900.
56. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. Phys. Solids*. 1960. V. 8. № 2. P. 100–104.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
57. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 709 с.
58. *Гихов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

STRESS INTENSITY FACTORS AT THE TOP OF THE CENTRAL SEMI-INFINITE CRACK IN AN ARBITRALLY LOADED ISOTROPIC STRIP

K. B. Ustinov^{a, *}

A.Yu. Ishlinsky Institute for problem in Mechanics RAS, Moscow, Russia

**e-mail: ustinov@ipmnet.ru*

Abstract. A two-dimensional problem of elasticity theory on an isotropic strip with a central semi-infinite crack is considered. The load in the form of a concentrated force is assumed to be applied at an arbitrary point of the strip. Using invariant mutual integrals and solutions for a strip loaded with bending moments and longitudinal forces applied at infinity, expressions for stress intensity factors (SIF) for the problem under consideration are obtained. The cases of forces applied at the crack faces, at the strip boundaries and at the internal points of the strip are considered. Asymptotic expressions are obtained for the cases of application of forces far from the crack tip and forces applied at the crack faces near its tip. The obtained solutions are shown to coincide with known solutions for special cases: loads in the form of a pair of normal forces applied to the crack faces and forces applied far from the crack tip.

Keywords: analytical solution, bi-lateral Laplace transform, Wiener–Hopf method, reciprocity theorem, invariant reciprocal integrals

REFERENCES

1. Zweben C., Smith W.S., Wardle M.W. Test methods for fiber tensile strength, composite flexural modulus, and properties of fabric-reinforced laminates // Composite Materials: Testing and Design (Fifth Conference), ASTM International 1979.
<https://doi.org/10.1520/STP36912S>
2. Hofinger I., Oechsner M., Bahr H.-A., Swain M.V. Modified four-point bend specimen for determining the interface fracture energy for thin, brittle layers // Int. J. Fracture. 1998. V. 92. P. 213–220.
3. Thery P.-Y., Poulain M., Dupeux M., Braccini M. Spallation of two thermal barrier coating systems: experimental study of adhesion and energetic approach to lifetime during cyclic oxidation // J. Mater. Sci. 2009. V. 44. P. 1726–1733.
<https://doi.org/10.1007/s10853-008-3108-x>
4. Hutchinson R.G., Hutchinson J.W. Lifetime assessment for thermal barrier coatings: tests for measuring mixed mode delamination toughness // J. Am. Ceram. Soc. 2011. V. 94. P. S85–S95.
<https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2011.04499.x>
5. Vaunois J.-R., Poulain M., Kanouté P., Chaboche J.-L. Development of bending tests for near shear mode interfacial toughness measurement of EB-PVD thermal barrier coatings // Eng. Frac. Mech. 2017. V. 171. P. 110–134.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.11.009>
6. Monetto I., Massabò R. An analytical solution for the inverted four-point bending test in orthotropic specimens // Eng. Fract. Mech. 2020.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech>

7. *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of composite structural members. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2004.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-08589-9>
8. *Banks-Sills L.* Interface fracture and delaminations in composite materials, springer briefs in applied sciences and technology. Springer, International Publishing, Cham., 2018.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-60327-8>
9. *Goldstein R.V., Perelmuter M.N.* An interface crack with bonds between the surfaces // *Mech. Solids*. 2001. V. 36. № 1. P. 77–92.
10. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Influence of the model of the behavior of a thin adhesion layer on the value of the j-integral // *Mech. Solids*. 2022. V. 57. № 2. P. 278–285.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422020169>
11. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Limit states of adhesive layers under combined loading // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. № 6. P. 1960–1966.
<https://doi.org/10.3103/S0025654423600204>
12. *Aleksandrov V.M., Mkhitarian S.M.* Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers. M.: Nauka, 1983. 487 p.
13. *Suo Z., Hutchinson J.W.* Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.* 1990. V. 43. P. 1–18.
<https://doi.org/10.1007/BF00018123>
14. *Hutchinson J.W., Suo Z.* Mixed mode cracking in layered materials // *Adv. Appl. Mech.* Ed. J.W. Hutchinson, T.Y. Wu. 1992. V. 29. P. 63–191.
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70164-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70164-9)
15. *Massabò R., Brandinelli L., Cox B.N.* Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam // *Int. J. Eng. Sci.* 2003. V. 41. № 13–14. P. 1497–1518.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00029-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00029-6)
16. *Li S., Wang J., Thouless M.D.* The effects of shear on delamination in layered materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 2004. V. 52. № 1. P. 193–214.
[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X)
17. *Andrews M.G., Massabò R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>
18. *Kurguzov V.D.* Modeling of delamination of thin films under compression // *Computational continuum mechanics*. 2014. V. 7. № 1. P. 91–99 (In Russian).
19. *Ustinov K.B.* On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Eng. Failure Anal.* 2015. V. 47. № 14. P. 338–344.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>
20. *Begley M.R., Hutchinson J.W.* The mechanics and reliability of films, multilayers and coatings. Cambridge University Press, 2017.
<https://doi.org/10.1017/9781316443606>
21. *Vatulyan A.O., Morozov K.L.* Investigation of delamination from an elastic base using a model with two coefficients of subgrade reaction // *Mech. Solids*. 2020. № 2. P. 207–217.
<https://doi.org/10.3103/S002565442002017X>
22. *Vatulyan A.O., Morozov K.L.* Study of the process of delamination of a non-uniform coating // *Appl. Mech. Tech. Phys.* 2021. V. 62. № 6 (370). P. 138–145 (In Russian).
23. *Obreimoff J.W.* The splitting strength of mica // *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 1930. V. 127. P. 290–297.
24. *Gilman J.J.* Fracture / Ed. B.L. Averbach et al. NY: John Wiley and Sons, Inc., 1959. P. 193–221.
25. *Suo Z.* Delamination specimens for orthotropic materials // *J. Appl. Mech.* 1990. V. 57. № 3. P. 627–634.
<https://doi.org/10.1115/1.2897068>

26. Grekov M.A., Morozov N.F. Some modern methods in mechanics of cracks. In V. Adamyan et al. (Eds.), *Operator theory: advances and applications. Modern analysis and applications*. P. 127–142. Basel: Birkhäuser, 2009.
https://doi.org/10.1007/978-3-7643-9921-4_8
27. Kipling E.J., Mostovoy S., Patrick R.L. Materials research standards 4. 1964. № 3. P. 129–134.
28. Kanninen M.F. An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest // *Int. J. Fract.* 1973. V. 9. P. 83–92.
<https://doi.org/10.1007/BF00035958>
29. Gross B., Srawley J.E. Stress intensity factors by boundary collocation for single-edge notch specimens subjected to splitting forces, NASA TN D-3295. 1966.
30. Popov G.Ya. Bending of a semi-infinite slab lying on a linearly deformable base // *PMM.* 1961. V. 2. P. 342–355 (In Russian).
31. Entov V., Salganik R., On beam approximation in crack theory // *Izv. AN SSSR. Mehanika.* 1965. V. 5. P. 95–102 (In Russian).
32. Fichter W.B. The stress intensity factor for the double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1983. V. 22. № 2. P.133–143.
<https://doi.org/10.1007/BF00942719>
33. Foote R.M.L., Buchwald T. An exact solution for the stress intensity factor for a double cantilever beam // *Int. J. Fract.* 1985. V. 29. № 3. P. 125–134.
<https://doi.org/10.1007/BF00034313>
34. Zlatin A.N., Khrapkov A.A. A Semi-infinite crack parallel to the boundary of the elastic half-plane // *Sov. Phys. Dokl.* 1986. V. 31. P. 1009–1010.
35. Khrapkov A. Winer-Hopf method in mixed elasticity theory problems. B.E. Vedenev VNIIG Publishing House, 2001.
36. Salganik R.L., Ustinov K.B. Deformation problem for an elastically fixed plate modeling a coating partially delaminated from the substrate (plane strain) // *Mech. Solids.* 2012. V. 47. № 4. P. 415–425.
<https://doi.org/10.3103/S0025654412040061>
37. Georgiadis H.G., Papadopoulos G.A. Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen // *Z. Angew. Math. Phys.* 1990. V. 41. № 6. P. 889–899.
<https://doi.org/10.1007/BF00945841>
38. Ustinov K.B., Lisovenko D.S., Chentsov A.V. Orthotropic strip with a central semi-infinite crack under arbitrary normal loads applied far from the crack tip // *Bull. Samara State Tech. University. Ser.: Phys. Math. Sci.* 2019. V. 23. № 4. P. 657–670 (In Russian).
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1736>
39. Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Eng. Failure Analysis* 2020. V. 110. P. 104410 (In Russian).
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
40. Ustinov K.B. T-stress in an orthotropic strip with a central semi-infinite crack loaded far from the crack tip // *Mech. Solids*, accepted for publication.
41. Ustinov K.B., Borisova N.L. Splitting of a strip consisting of two identical orthotropic half-strips with isotropy axes symmetrically inclined to the interface // *Mech. Solids*, accepted for publication.
42. Ustinov K.B., Idrisov, D.M. On delamination of bi-layers composed by orthotropic materials: exact analytical solutions for some particular cases // *ZAMM.Z. Angew. Math. Mech.* 2021. V. 101. № 4. P. e202000239.
<https://doi.org/10.1002/zamm.202000239>
43. Ustinov K. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *Eur. J. Mech. A Solids.* 2019. V. 75. P. 56–69.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>

44. *Chen F.H.K., Shield R.T.* Conservation laws in elasticity of the J-integral type // J. appl. Math. Phys. (ZAMP). 1977. V. 28. № 1–22.
<https://doi.org/10.1007/BF01590704>
45. *Cho Y.J., Beom H.G., Earmme, Y.Y.* Application of a conservation integral to an interface crack interacting with singularities // Int. J. Fracture. 1994. V. 65. P. 63–73.
<https://doi.org/10.1007/BF00017143>
46. *Sladek J., Sladek V.* Evaluations of the t-stress for interface cracks by the boundary element method // Eng. Fract. Mech. 1997. V. 56. № 6. P. 813–825.
[https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00131-2](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00131-2)
47. *Eshelby J.D.* The force on an elastic singularity // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1951. V. 244. P. 87–112.
<https://doi.org/10.1098/rsta.1951.0016>
48. *Cherepanov G.P.* The propagation of cracks in a continuous medium // J. Appl. Math. Mech. 1967. V. 31. № 3. P. 503–512.
49. *Rice J.R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // J. Appl. Mech. 1968. V. 35. P. 379–386.
<https://doi.org/10.1115/1.3601206>
50. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. № 3. P. 361–364.
<https://doi.org/10.1115/1.4011547>
51. *Cherepanov G.P.* Mechanics of brittle fracture. McGraw Hill Higher Education. 935 p.
52. *Ustinov K.B., Monetto I., Massabò R.* Analytical solutions for an isotropic strip with a central semi-infinite crack: T-stresses, displacements of boundaries, stress intensity factor due to a force acting at the crack. To be published 2024.
53. *Ustinov K., Massabò R.* On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // Int. J. Sol. Struct. 2022. V. 248. 111600.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600>
54. *Leonov M.Ya., Panasyuk V.V.* Development of finest cracks in a solid // Prikl. Mekhanika. 1959. V. 5. № 4. P. 391–401.
55. *Barenblatt G.I.* On the equilibrium cracks formed during the brittle fracture // PMM [Appl. Math. Mech.], 1959. V. 23. № 3. P. 434–444; № 4. P. 706–721; № 5. P. 893–900.
56. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids, 1960. V. 8. № 2. P. 100–104.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
57. *Muskhelishvili, N.I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. P. Noordhoff Limited, Groningen-Holland, third ed., 1953. P. 471.
58. *Gakhov F.D.* Boundary value problems. Pergamon Press, 1966.