

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ НЕИНКРЕМЕНТАЛЬНОГО ПОДХОДА ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РАСЧЕТА БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕНЗОРНО-МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

© 2024 г. В. В. Чехов^{а,*}

^аКрымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Россия

^{*}*e-mail*: chekhovvv@cfuv.ru

Поступила в редакцию 27.01.2024 г.

После доработки 26.03.2024 г.

Принята к публикации 08.05.2024 г.

Для решения осесимметричных задач получено развитие тензорно-матричной системы уравнений МКЭ, описывающей финальное состояние больших деформаций несжимаемого упругого тела, получены аналитические выражения компонент матрицы частных производных этой системы. Приведены примеры вычисления инвертированного состояния кругового цилиндра, а также расчета уплотнительных колец.

Ключевые слова: уравнение МКЭ, тензорно-блочные матрицы, большие деформации, статический расчет, позиционная формулировка, осесимметричное состояние, мера деформации Фингера, несжимаемый материал, материал Муни–Ривлина

DOI: 10.31857/S1026351924050106, **EDN**: UANKNH

1. Введение. В настоящее время при решении задач геометрически нелинейного деформирования твердых тел при больших деформациях методом конечных элементов (МКЭ) наиболее распространен инкрементальный подход (метод последовательных нагружений) с возможным итерационным уточнением [1–18]. Он является наиболее универсальным, однако в ряде случаев возможно применение чисто итерационного подхода без отслеживания всего пути нагружения: например, когда возможна линеаризация либо полиномиальное приближение каких-то этапов решения [19–21], либо когда решаемая задача независима от истории нагружения и пути деформирования [22–25]. Это позволяет обойти некоторые проблемы инкрементального подхода [1, 26–31], обусловленные линеаризацией уравнений, трудностями прохождения особых точек, вырождением формы конечных элементов (КЭ) и др.

Геометрически нелинейные соотношения МКЭ могут базироваться на различных формах уравнения состояния и разных определениях меры деформации: например, Грина [2, 3, 8, 14, 17, 18, 30], логарифмической [10,

18, 25], Фингера [3, 12]. В качестве неизвестного может рассматриваться вектор перемещения [2, 3, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 30] либо радиус-вектор деформированного состояния [3, 7, 9, 11, 17, 25]. Последнее позволяет упростить формулировки для существенно нелинейных задач, не подчиняющихся гипотезе неизменности начальных размеров. Проблему роста уровня громоздкости геометрически нелинейных соотношений механики при комбинировании их с концепцией МКЭ, позволяет облегчить использование объектно-ориентированного подхода [32–38]. В рамках этого подхода становится возможной реализация МКЭ непосредственно в тензорной форме [2], естественной для геометрически нелинейных соотношений, без преобразования к чисто матричному виду на базе нотации Фойгта [18], часто используемому в реализациях МКЭ. При такой реализации может быть удобно использовать концепцию тензорно-блочной матрицы [39, 40], компонентами которой могут быть не только числа, но и тензоры произвольных рангов. Благодаря такой структуре сложность объектов распределяется по уровням абстракции, что должно облегчить работу с соотношениями, а также их реализацию. В представляемой здесь работе соотношения геометрически нелинейного МКЭ используют матрицы, компонентами которых являются тензоры в безиндексной форме, применяется подход на базе уравнения состояния в форме Фингера [41], меры деформации Фингера [41], а в качестве неизвестного используется радиус-вектор деформированной конфигурации. Для решения системы использована реализация итерационных методов из библиотеки GNU Scientific Library [42].

2. Используемая формулировка МКЭ. Для решения задачи статического нагружения тел из изотропных несжимаемых материалов с учетом больших деформаций используется конечноэлементная формулировка [23] на базе вариационного принципа Лагранжа, отнесенного к начальной конфигурации, и уравнения состояния в форме Фингера [41]. Несжимаемость материала реализована в виде требования неизменности объема каждого конечного элемента. Соответствующая система уравнений, записанная с использованием аппарата тензорно-блочных матриц, имеет следующий вид [23]:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A}(\{\mathbf{R}\}, \{p\})\} &= \{\mathbf{K}(\{\mathbf{R}\}, \{p\})\} + 2([L] + ({}^{[4]}[M]\{\mathbf{R}\}) \cdot \{\mathbf{R}\})\{\mathbf{R}\} - \{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{0}\}, \\ \{B(\{\mathbf{R}\})\} &= \{0\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\{\mathbf{f}\}$ — столбец узловых нагрузок, $\{\mathbf{R}\}$ и $\{p\}$ — неизвестные (соответственно, столбец узловых радиус-векторов деформированной конфигурации и вспомогательный столбец взвешенно усредненных величин давления в конечных элементах, обусловленного условием несжимаемости), $\{\mathbf{K}\}$, $[L]$, ${}^{[4]}[M]$ и $\{B\}$ — векторные и матричные величины (здесь ${}^{[4]}[M]$ — четырехмерная матрица, т.е. массив с 4 индексами), имеющие следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{[\alpha i]} &= -p_{[\alpha]} \iiint_{v_{[\alpha]}} ({}^0\nabla \mathbf{r})_{[\alpha]}^{-1} \cdot {}^0\nabla N_{[\alpha i]} dv, \quad L_{[\alpha ij]} = \iiint_{v_{[\alpha]}} {}^0\Psi_{[\alpha]} {}^0\nabla N_{[\alpha i]} \cdot {}^0\nabla N_{[\alpha j]} dv \\ M_{[\alpha ijk]} &= \iiint_{v_{[\alpha]}} {}^0\Psi_{[\alpha]} \left({}^0\nabla N_{[\alpha i]} \cdot {}^0\nabla N_{[\alpha j]} \right) \left({}^0\nabla N_{[\alpha k]} \cdot {}^0\nabla N_{[\alpha l]} \right) dv \end{aligned}$$

$$B_{[\alpha]} = \iiint_{V_{[\alpha]}} (III((\overset{0}{\nabla}\mathbf{r})_{[\alpha]}) - 1) dV, \quad (2.2)$$

где нуликом сверху обозначены величины, относящиеся к отсчетной недеформированной конфигурации тела, α — номер КЭ, i, j, k, l — номера узлов конечноэлементной сетки, $\overset{0}{\nabla}\mathbf{r}$ — градиент места [41], $N_{[\alpha]i}$ — функция формы, принадлежащая α -му КЭ и i -му узлу, III — кубический инвариант тензора 2-го ранга, ${}_1\Psi$ и ${}_2\Psi$ — функции от инвариантов меры деформации Фингера из уравнения состояния несжимаемого материала a -го КЭ в форме Фингера [41]:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + 2{}_1\Psi \mathbf{b} + 2{}_2\Psi \mathbf{b}^2. \quad (2.3)$$

Здесь $\mathbf{T}$ — тензор истинных напряжений Коши, $\mathbf{b} = (\overset{0}{\nabla}\mathbf{r})^T \cdot (\overset{0}{\nabla}\mathbf{r})$ — мера деформации Фингера, $\mathbf{1}$ — метрический (единичный) тензор.

Система уравнений (2.1) описывает финальное деформированное состояние конечноэлементной модели без использования инкрементального подхода и линеаризаций, и может быть решена непосредственно численными методами. Для повышения эффективности методы решения требуют задать матрицу частных производных этой системы. Система содержит достаточно сложные вложенные соотношения, поэтому для упрощения выведения компонентов матрицы производных использование безиндексной формы тензорных объектов является удобным. Аппарат дифференцирования по тензорному аргументу в безиндексной форме развивается и используется в механике твердого тела [41, 43–45]. Соотношения в этой области «можно трактовать как обобщение правила математического анализа о дифференцировании сложной функции» [45]. С использованием этой технологии для системы (2.1) получена матрица частных производных [24], применимая к общему трехмерному случаю, а также к случаю плоской деформации.

Целью данной работы является модификация и проверка практического применения системы (2.1) и матрицы ее частных производных для случая решения осесимметричных задач. Для этого у всех объектов системы требуется произвести переход от общего случая безиндексной тензорной нотации к частному случаю использования цилиндрической системы координат. Для проверки адекватности полученных результатов рассмотрено численное решение тестовых примеров.

3. Градиент места для осесимметричного случая. Рассмотрим описание задачи деформирования, когда в качестве материальных координат $\{q^1, q^2, q^3\}$ рассматриваются цилиндрические координаты $\overset{0}{\rho}, \overset{0}{\varphi}, \overset{0}{z}$. В этом случае радиус-вектор $\overset{0}{\mathbf{r}}$ и базисные векторы $\overset{0}{\mathbf{e}}_i = (\partial \overset{0}{\mathbf{r}}) / (\partial q^i)$ отсчетной конфигурации приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) &= \overset{0}{\mathbf{i}}_1 \overset{0}{\rho} \cos \varphi + \overset{0}{\mathbf{i}}_2 \overset{0}{\rho} \sin \varphi + \overset{0}{\mathbf{i}}_3 z, \\ \overset{0}{\mathbf{e}}_\rho &= \overset{0}{\mathbf{i}}_1 \cos \varphi + \overset{0}{\mathbf{i}}_2 \sin \varphi, \quad \overset{0}{\mathbf{e}}_\varphi = \rho(-\overset{0}{\mathbf{i}}_1 \sin \varphi + \overset{0}{\mathbf{i}}_2 \cos \varphi), \quad \overset{0}{\mathbf{e}}_z = \overset{0}{\mathbf{i}}_3, \end{aligned}$$

где $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орты вспомогательной декартовой системы координат, которые отсюда можно выразить так:

$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{e}_\rho \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \frac{\sin \varphi}{\rho}, \quad \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_\rho \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \frac{\cos \varphi}{\rho}, \quad \mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_z. \quad (3.1)$$

Взаимный базис в цилиндрической системе: $\mathbf{e}^\rho = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}^\varphi = \mathbf{e}_\varphi / \rho$, $\mathbf{e}^z = \mathbf{e}_z$.

Радиус-вектор деформированной конфигурации выразим с учетом того, что в случае осевой симметрии перемещение не зависит от угловой координаты:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\rho, \varphi, z, t) = \mathbf{r}(\rho, \varphi, z) + \mathbf{u}(\rho, z, t) = & \left(\rho + u(\rho, z, t) \right) \mathbf{i}_1 \cos \left(\varphi + v(\rho, z, t) \right) + \\ & + \left(\rho + u(\rho, z, t) \right) \mathbf{i}_2 \sin \left(\varphi + v(\rho, z, t) \right) + \left(z + w(\rho, z, t) \right) \mathbf{i}_3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где u, v и w — компоненты перемещения $\mathbf{u}$ в цилиндрических координатах, t — параметр времени. Отсюда, с подстановкой (3.1), получаются выражения для базисных векторов деформированной конфигурации $\mathbf{e}_i = (\partial \mathbf{r}) / (\partial q_i)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \frac{\partial(\rho \cos v)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \sin v)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\rho \sin v \mathbf{e}_\rho + \frac{\rho}{\rho} \cos v \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{e}_z &= \frac{\partial(\rho \cos v)}{\partial z} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \sin v)}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Построенные соотношения позволяют определить градиент места:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{r} = \mathbf{e}^s \mathbf{e}_s &= \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho^2} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z = \frac{\partial(\rho \cos v)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \sin v)}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z - \frac{\rho}{\rho^2} \sin v \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\rho + \frac{\rho}{\rho^3} \cos v \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial(\rho \cos v)}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\rho + \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \sin v)}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Сведем задачу к двумерной, для чего зададим соответствие координат $q^1 \equiv \rho$, $q^2 \equiv z$, $q^3 \equiv \varphi$ и исключим из рассмотрения деформацию кручения, зафиксировав угловую координату:

$$\left. \nabla \mathbf{r} \right|_{\varphi = \varphi = \text{const}} = F^{st} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_t = F_t^s \mathbf{e}_s \mathbf{e}^t,$$

$$F^{st} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} & 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \rho/\rho^3 \end{bmatrix}, \quad F_t^s = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} & 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \rho/\rho \end{bmatrix}.$$

Отметим, что если бы для радиус-вектора деформированной конфигурации в цилиндрических координатах вместо (3.2) использовалась зависимость общего вида

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\rho, \varphi, z, t) = & \mathbf{i}_1 \rho(\rho, \varphi, z, t) \cos \varphi(\rho, \varphi, z, t) + \\ & + \mathbf{i}_2 \rho(\rho, \varphi, z, t) \sin \varphi(\rho, \varphi, z, t) + \mathbf{i}_3 z(\rho, \varphi, z, t), \end{aligned}$$

то это привело бы к выражению для градиента места

$$\nabla \mathbf{r} = F^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$

$$F^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cos(\varphi - \varphi) \right) & \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \sin(\varphi - \varphi) \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \cos(\varphi - \varphi) \right) & \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \sin(\varphi - \varphi) \right) \\ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\rho \cos(\varphi - \varphi) \right) & \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\rho \sin(\varphi - \varphi) \right) \end{bmatrix},$$

имеющего при $\varphi = \varphi = \text{const}$ вырожденную матрицу компонент.

При переходе к конечноэлементной аппроксимации, в плоскости двумерного КЭ компоненты деформированного радиус-вектора выражаются при помощи базисных функций через свои узловые значения:

$$\mathbf{r}_{[\alpha]} = \sum_i N_{[\alpha i]} \mathbf{R}_{[i]},$$

где α — номер КЭ, $\mathbf{R}_{[i]}$ — радиус-вектор деформированного состояния i -го узла конечноэлементной сетки, суммирование производится по всем узловым точкам расчетной модели. Отсюда, МКЭ-аппроксимация градиента места имеет следующий вид:

$$(\nabla \mathbf{r})_{[\alpha]} = \sum_i \nabla N_{[\alpha i]} \mathbf{R}_{[i]} + \frac{\rho}{\rho} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^3. \quad (3.3)$$

4. Другие особенности осесимметричного случая. Градиент места в явной либо неявной форме входит во все соотношения (2.2), поэтому применение полученного выражения (3.3) позволяет использовать систему уравнений МКЭ (2.1) для осесимметричных расчетов. Заметим, что за исключением подчеркнутого множителя выражение (3.3) совпадает с аналогичным для случая плоской деформации [24]. Укажем также и другие моменты, которые следует учитывать при применении системы (2.1) в осесимметричном случае — тоже с подчеркиванием слагаемых и множителей, отсутствующих в случае плоской деформации, что удобно для совместной реализации обоих этих случаев в одном общем приложении.

При вычислении всех компонентов (2.2) в осесимметричном случае интегрирование по объему конечного элемента сводится к интегрированию по его площади сечения s в локальных координатах элемента:

$$\iiint_{v_{[\alpha]}} \dots d^0 v = \underline{\underline{2\pi}} \int \dots \underline{\underline{d}}^0 s = \underline{\underline{2\pi}} \int \dots \underline{\underline{\rho}}^0 \frac{ds}{ds} d^0 s.$$

Мера деформации Фингера и ее первый инвариант:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{[\alpha]} &= (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{r})_{[\alpha]}^T \cdot (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{r})_{[\alpha]} = \sum_i \sum_k (\underline{\underline{\nabla}} N_{[\alpha i]} \cdot \underline{\underline{\nabla}} N_{[\alpha k]}) \mathbf{R}_{[i]} \mathbf{R}_{[k]} + \underbrace{\left(\frac{\rho}{0} \right)^2 \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_3^0}, \\ I(\mathbf{b}_{[\alpha]}) &= 1 \cdots \mathbf{b}_{[\alpha]} = \sum_i \sum_k (\underline{\underline{\nabla}} N_{[\alpha i]} \cdot \underline{\underline{\nabla}} N_{[\alpha k]}) (\mathbf{R}_{[i]} \cdot \mathbf{R}_{[k]}) + \underbrace{\left(\frac{\rho}{0} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

5. Матрица частных производных для осесимметричного случая. Поскольку в соотношениях осесимметричного случая, в сравнении со случаем плоской деформации, появляются дополнительные члены, то следует заново построить также и компоненты матрицы частных производных, необходимой для эффективного решения системы (2.1). Дифференцирование дополнительного слагаемого $(\rho/0) \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_3^0$, имеющегося в выражении (3.3) для градиента места, проведем с учетом аппроксимации МКЭ

$$\rho_{[\alpha]} = \sum_i N_{[\alpha i]} \rho_{[i]},$$

где $\rho_{[i]}$ — узловые ρ -компоненты радиус-вектора:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = \sum_i N_{[\alpha i]} \frac{\partial \rho_{[i]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = N_{[\alpha n]} \frac{\partial \rho_{[n]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = N_{[\alpha n]} \mathbf{e}_s^0 \frac{\partial \rho_{[n]}}{\partial R_{[n]}^s} = N_{[\alpha n]} \mathbf{e}_s^0 \delta_s^1 = N_{[\alpha n]} \mathbf{e}_1^0.$$

Отсюда, согласно правилам дифференцирования сложных функций,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} \begin{pmatrix} \rho^0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}^3 \\ \rho & & \end{pmatrix} &= \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_3 & \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} + \rho \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}^s & \mathbf{e}^3 & \mathbf{e}_s \end{pmatrix} + \frac{\rho^0}{\rho} \mathbf{e}_3 \frac{\partial \mathbf{e}^3}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = \\
&= \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_3 & N_{[\alpha n]} \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^s \mathbf{e}^3 \mathbf{e}_s \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho} N_{[\alpha n]} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_3 & g^{1s} \mathbf{e}^3 \mathbf{e}_s \end{pmatrix} = \frac{N_{[\alpha n]}}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}^3 & \mathbf{e}_1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)
\end{aligned}$$

Матрица частных производных системы (2.1) состоит из четырех блоков [24]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{A}, B)}{\partial(\mathbf{R}, p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

где для общего трехмерного расчета и случая плоской деформации блок $[\partial \mathbf{A} / \partial p]$ имеет компонентами

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p} \right)_{[\alpha]} = - \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \mathbf{r} \end{pmatrix}_{[\alpha]}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha i]} \end{pmatrix} d\mathbf{v},$$

а слагаемые, составляющие блок $[\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{R}]$, если их обозначить следующим образом [24]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{R}} \end{bmatrix} = \sum_{\alpha} \left([\mathbf{D}\mathbf{K}]_{[\alpha]} + 2([\mathbf{D}\mathbf{L}]_{[\alpha]} + [\mathbf{D}\mathbf{M}]_{[\alpha]}) \right)$$

имеют такие компоненты:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\mathbf{K}_{[\alpha in]} &= \rho_{[\alpha]} \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \mathbf{r} \end{pmatrix}_{[\alpha]}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha n]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \mathbf{r} \end{pmatrix}_{[\alpha]}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha i]} \end{pmatrix} d\mathbf{v}, \\
\mathbf{D}\mathbf{L}_{[\alpha in]} &= \sum_j \mathbf{R}_{[j]} \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha i]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha j]} \end{pmatrix} \frac{\partial_1 \Psi_{[\alpha]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} d\mathbf{v} + \mathbf{1} L_{[\alpha in]}, \\
\mathbf{D}\mathbf{M}_{[\alpha in]} &= \\
&= \sum_k \sum_j \left((\mathbf{R}_{[k]} \cdot \mathbf{R}_{[j]}) \left(\left\langle \sum_l \mathbf{R}_{[l]} \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha i]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha j]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha k]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha l]} \end{pmatrix} \frac{\partial_2 \Psi_{[\alpha]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} d\mathbf{v} \right\rangle + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{1} \iiint_{\mathfrak{V}_{[\alpha]}} \partial_2 \Psi_{[\alpha]} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha i]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha j]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha k]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla N_{[\alpha n]} \end{pmatrix} d\mathbf{v} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \mathbf{R}_{[k]} \mathbf{R}_{[j]} \int \int \int_{\mathbf{v}_{[\alpha]}} {}^0_2 \Psi_{[\alpha]} \left(\left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \right) \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \right) + \right. \\ \left. + \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \right) \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha k]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \right) \right) + d\mathbf{v} \Bigg\}.$$

При получении компонент матрицы (5.2) для осесимметричного расчета, с учетом (5.1), выражения для $(\partial A / \partial p)_{[\alpha]}$ и $\mathbf{DK}_{[\alpha n]}$ останутся без изменений. Члены $\mathbf{DL}_{[\alpha n]}$ и $\mathbf{DM}_{[\alpha n]}$ получим для осесимметричного случая на примере материала Муни-Ривлина [41], у которого

$${}_1\Psi = {}_1C + {}_2C I(\mathbf{b}), \quad {}_2\Psi = -{}_2C. \quad (5.3)$$

Для этого, продифференцировав 1-й инвариант меры деформации Фингера (4.1):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} I(\mathbf{b}_{[\alpha]}) = 2 \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \cdot \left(\overset{0}{\nabla} \mathbf{r} \right)_{[\alpha]} + \frac{\frac{\rho}{0} N_{[\alpha n]} \overset{0}{\mathbf{e}}^1}{\frac{\rho}{\rho}} \right)$$

и, определив $\frac{\partial {}_1\Psi_{[\alpha]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = {}_2C_{[\alpha]} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} I(\mathbf{b}_{[\alpha]})$, в результате получаем

$$\mathbf{DL}_{[\alpha n]} = {}_2C_{[\alpha]} \sum_j \mathbf{R}_{[j]} \int \int \int_{\mathbf{v}_{[\alpha]}} \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\nabla} N_{[\alpha j]} \right) \left(\overset{0}{\nabla} N_{[\alpha n]} \cdot \left(\overset{0}{\nabla} \mathbf{r} \right)_{[\alpha]} + \frac{\frac{\rho}{0} N_{[\alpha n]} \overset{0}{\mathbf{e}}^1}{\frac{\rho}{\rho}} \right) d\mathbf{v} + {}_1L_{[\alpha n]},$$

а в выражении для $\mathbf{DM}_{[\alpha n]}$, очевидно исчезнет слагаемое, обозначенное угловыми скобками, поскольку для модели Муни-Ривлина $(\partial {}_2\Psi_{[\alpha]})/(\partial \mathbf{R}_{[n]}) = 0$.

Чтобы получить компоненты блока $[\partial B / \partial \mathbf{R}]$, перепишем (3.3) в виде

$$\left(\overset{0}{\nabla} \mathbf{r} \right)_{[\alpha]} = S_{\bar{p}}^{\bar{q}} \overset{0}{\mathbf{e}}^{\bar{p}} \overset{0}{\mathbf{e}}_{\bar{q}} + \frac{\frac{\rho}{0} \overset{0}{\mathbf{e}}^3 \overset{0}{\mathbf{e}}_3}{\frac{\rho}{\rho}}$$

(по индексам с верхней чертой суммировать до 2), где обозначено

$$S_p^q = \sum_i \overset{0}{\nabla}_p N_{[\alpha i]} R_{[i]}^q.$$

Отсюда

$$III \left(\overset{0}{\nabla} \mathbf{r} \right)_{[\alpha]} = \frac{\frac{\rho}{0}}{\frac{\rho}{\rho}} (S_1^1 S_2^2 - S_1^2 S_2^1).$$

С учетом того, что

$$\frac{\partial S_p^q}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = \overset{0}{\nabla}_p N_{[\alpha n]} \overset{0}{\mathbf{e}}^q,$$

получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} III(\nabla \mathbf{r})_{[\alpha]} = \frac{\rho}{0} \sum_i \left(\nabla_1^0 N_{[\alpha n]} \nabla_2^0 N_{[\alpha i]} - \nabla_2^0 N_{[\alpha n]} \nabla_1^0 N_{[\alpha i]} \right) * \\ * \left(R_{[i]}^2 \mathbf{e}^1 - R_{[i]}^1 \mathbf{e}^2 \right) + \frac{N_{[\alpha n]}^0}{\rho} \mathbf{e}^1 (S_1^1 S_2^2 - S_1^2 S_2^1).$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \mathbf{R}} \right)_{[\alpha n]} = \frac{\partial B_{[\alpha]}}{\partial \mathbf{R}_{[n]}} = \sum_i \iiint_{\mathcal{V}_{[\alpha]}} \frac{\rho}{0} \left(\nabla N_{[\alpha n]}^0 \times \nabla N_{[\alpha i]}^0 \right)^3 dv \left(R_{[i]}^2 \mathbf{e}^1 - R_{[i]}^1 \mathbf{e}^2 \right) + \\ + \mathbf{e}^1 \iiint_{\mathcal{V}_{[\alpha]}} \frac{N_{[\alpha n]}^0}{\rho} (S_1^1 S_2^2 - S_1^2 S_2^1) dv.$$

Таким образом, для осесимметричного случая получены аналитические выражения для всех компонент матрицы частных производных.

6. Численные исследования. Описанные выше теоретические результаты были реализованы в виде прототипа приложения, предназначенного для решения задач небольшой размерности (без учета и использования разреженности матриц). Были проведены расчеты больших деформаций для некоторых задач, позволяющие оценить адекватность соотношений, возможности метода, а также выявить особенности его практического применения. В расчетах использовались изопараметрические четырехугольные сирендиповы КЭ первого порядка с четырьмя узлами. Во всех расчетах для решения использовались процедуры из библиотеки GNU Scientific Library [42]. Среди представленных в ней методов численного решения систем нелинейных уравнений, использующих аналитически задаваемую матрицу частных производных (варианты метода Ньютона и гибридного метода Пауэлла), наилучшие свойства по захвату решения и сходимости на рассмотренных здесь примерах показал решатель `gsl_multirroot_fdfsolver_gnewton`, реализующий модификацию метода Ньютона с улучшением глобальной сходимости путем дополнительно выполняемой оптимизации размера шага в касательном направлении, минимизирующей евклидову норму невязки [46]. Форма начального приближения задавалась из инженерных соображений с точки зрения максимальной близости к предполагаемому решению. Начальное приближение для величин $\{p\}$ задавалось соответствующим исходному ненагруженному состоянию. В этом случае в уравнении состояния (2.3) тензор напряжений Коши $\mathbf{T}$ является нулевым, а мера деформации Фингера $\mathbf{b}$ — единичным тензором, и уравнение состояния принимает вид

$$\mathbf{0} = (-p + 2_1\Psi + 2_2\Psi) \mathbf{1}$$

откуда для модели материала Муни—Ривлина (5.3) начальное значение величины давления в элементах равно

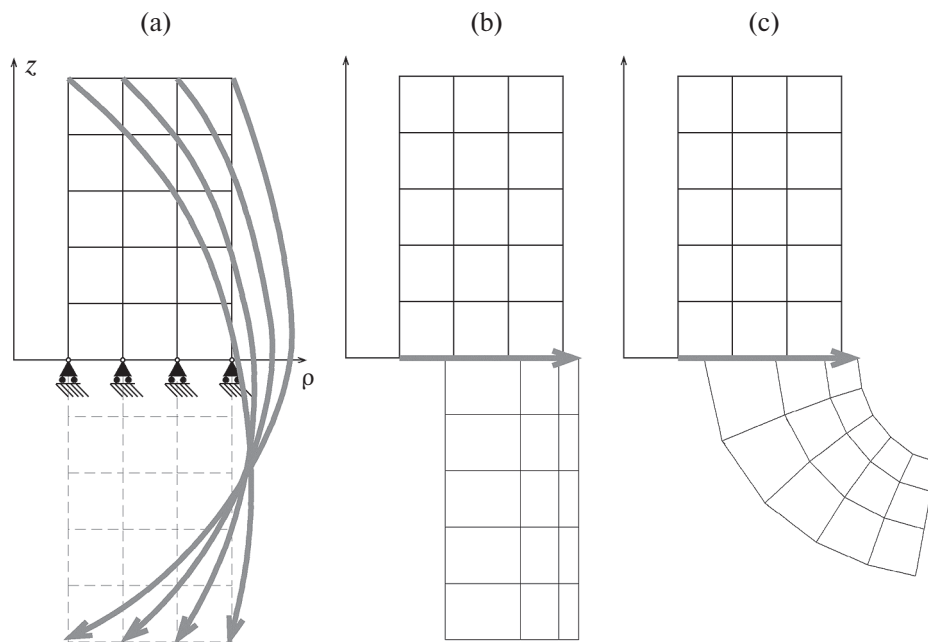


Рис. 1. Расчетная модель с формой начального приближения и варианты деформированного состояния задачи о выверачивании кругового цилиндра.

$$p = 2_1C + 4_2C.$$

Следует отметить, что такой подход в задании начального приближения оказался достаточно результативным: в большинстве случаев решатель уверенно сходится к ожидаемому решению.

Определение состояния вывернутого наизнанку кругового цилиндра относится к непростым задачам нелинейной упругости [10]. В [23] был рассмотрен пример вычисления этого состояния как задача плоской деформации, а теперь аналогичный расчет этой же модели был проведен в сечении другой координатной плоскости, уже как осесимметричная задача. Расчетная схема МКЭ для этой задачи, а также начальное приближение, показаны на рис. 1, а. У исходной формы цилиндра внутренний и внешний радиусы равны соответственно 3 и 12 см, высота 15 см. Константы материала: $_1C = 0.15$ МПа, $_2C = 0.094$ МПа. Граничные условия в перемещениях задавались с точки зрения обеспечения плоской деформации: узлы конечноэлементной сетки, находящиеся на нижнем торце исходной конфигурации цилиндра, зафиксированы в направлении оси z , а для узлов, находившихся до деформирования на верхнем торце, задано в виде ограничения значение z -координаты в деформированном состоянии, обеспечивающее сохранение начальной высоты цилиндра. Фиксация узлов вдоль радиальной координаты поначалу не производилась, поскольку ожидалось, что ее значения будут получены в процессе расчета. Однако при этом выявились проблемы со сходимостью, которая не была достигнута даже после 5000 итераций (этот же эффект наблюдался и в другой задаче,

см. ниже). Эти проблемы могут быть связаны с возможной неединственностью решения нелинейной задачи (например, здесь с точки зрения механики возможны решения, когда вывернут не весь цилиндр, а только некоторая его часть). Когда же в одном из узлов было в качестве ограничения задано перемещение по оси z , величина которого взята из решения соответствующей задачи плоской деформации [23], то процесс сошелся за 6 итераций. Результат расчета показан на рис. 1, б. Значения радиальных координат $\rho_{[i]}$ слоев узловых точек в полученном решении в сравнении с аналогичными величинами из решения, вычисленного ранее по теории плоской деформации, приведены в таблице:

Таблица. 1. Результаты расчета координат узлов сетки для задачи выворачивания цилиндра

осесимметричный расчет	5.521	9.668	11.770	12.864
плоская деформация [23]	5.532	9.674	11.770	12.864

Очевидно, что по величинам перемещений полученное решение совпадает с результатом решения задачи плоской деформации. Аналогично, решения совпадают также и при вычислении компонент девиаторов напряжений Коши. При вычислении же самих напряжений точность расчетов оказалась ниже из-за различия в величинах элементных давлений $\{p\}$, которые оказались заметно меньше (около 30%) полученных по теории плоской деформации. Можно предположить, что это отличие обусловлено различным пониманием смысла этих давлений, являющихся взвешенно усредненными по площади КЭ.

Следует заметить, что рассмотренная задача по существу является одномерной: значения всех величин постоянны по координате z , поэтому в расчетной схеме можно было бы для высоты цилиндра ограничиться минимальным значением, достаточным для моделирования посредством одного слоя КЭ. Однако, если отменить ограничения, обеспечивающие состояние плоской деформации, и попытаться рассмотреть ее для случая плоского напряженного состояния (т.е. не задавать ограничений по оси z на исходном верхнем крае цилиндра), то задача станет уже двумерной. Результат соответствующего расчета показан на рис. 1, с. Здесь можно видеть, что имеет место эффект расширения свободного конца инвертированного цилиндра (явление, достаточно проблематичное для теоретического рассмотрения [10]). Поэтому, для получения плоского напряженного состояния высоту цилиндра следует увеличить и рассматривать участок сечения, достаточно удаленный от свободного конца.

Еще два численных примера связаны с расчетом уплотнительных колец различных типов поперечного сечения. Расчеты подобных деталей актуальны [47, 48] ввиду их широкого промышленного использования. В рассматриваемых примерах стенки гнезда, в которое помещается уплотнительное кольцо, полагались абсолютно жесткими и задавались в виде граничных условий «в перемещениях» (т.е. путем фиксации соответствующего значения координаты у узлов поверхности кольца, контактирующих со стенкой). Поскольку

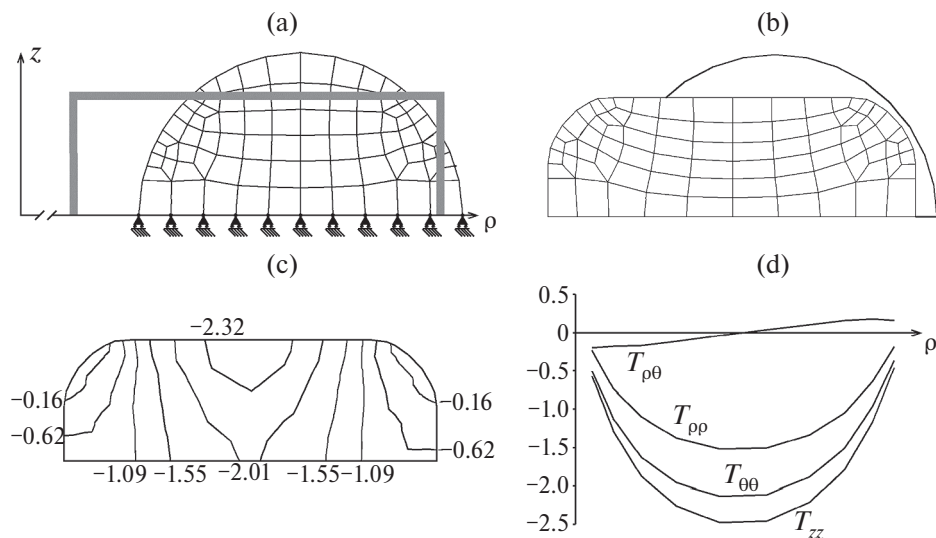


Рис. 2. Расчетная модель и результаты расчетов уплотнительного кольца круглого сечения.

используемый в данной работе неинкрементальный подход не подходит для задач, зависящих от пути нагружения, то наличие сил трения в модели не учитывалось, таким образом предполагается использование смазки.

При задании граничных условий при расчете уплотнительных колец заранее точно не известны границы зон контакта кольца со стенками гнезда. Для решения этой проблемы в процессе расчетов сформировался следующий эвристический алгоритм:

1. Узлы внешней границы недеформированного кольца, выходящие за пределы габаритов гнезда, включаются в зону контакта, т.е. их ортогональная к поверхности стенки гнезда компонента радиус-вектора исключается из числа неизвестных и фиксируется значением соответствующей координаты стенки;

2. Производится расчет напряженно-деформированного состояния при данном варианте граничных условий. По результатам этого расчета анализируется состояние и корректируется принадлежность узлов внешней границы кольца к зоне контакта;

- если среди граничных узлов, не включенных в зону контакта, появились узлы, выходящие за габариты гнезда, то они включаются в зону контакта путём фиксации соответствующей компоненты радиус-вектора значением координаты стенки;

- если среди узлов, включенных в зону контакта, обнаруживается узел, имеющий в прилегающих конечных элементах положительную (т.е. растягивающую) нормальную компоненту напряжений, ортогональную стенке (т.е. «пытающийся отделиться от стенки» вовнутрь гнезда), то он исключается из зоны контакта путём освобождения соответствующей компоненты радиус-вектора и возврата ее в число неизвестных.

3. Если среди узлов границы кольца не нашлось таких, которые перечислены в п. 2, то расчет завершается и полученный результат считается

окончательным. Если же имела место коррекция таких узлов, то снова выполняется переход к п. 2.

Использование такого подхода в приводимых ниже примерах успешно завершалось (за исключением одного упомянутого ниже эксперимента с граничными условиями), потребовав около пяти шагов коррекции граничных условий.

Рассмотрим пример расчета уплотнительного кольца круглого сечения для герметизации фланцевого соединения трубопровода [49]. Кольцо внутренним диаметром 6 см и диаметром сечения 3 мм, изготовленное из резины НО-68-1 с модулем упругости $E = 4$ МПа, требуется поместить в гнездо с внутренним диаметром 58.8 мм, шириной 3.4 мм и высотой 2.2 мм. Ввиду симметрии задачи рассматривается только ее верхняя половина. Поскольку у материала Муни модуль упругости закона Гука соответствует величина $6({}_1C + {}_2C)$ [50], то для расчетов была выбрана неогуксовская модель (${}_2C = 0$) с константой ${}_1C = E/6 = 0.667$ МПа. На рис. 2, а показана конечноэлементная модель, у которой полужирным прямоугольником показаны габариты гнезда. В качестве начального приближения использовался результат линейно-упругого расчета (вспомогательный осесимметричный линейно-упругий расчет выполнялся при помощи студенческой версии пакета ELCUT, использующего треугольные КЭ [51]). Последовательно проведенные шаги расчета по описанному выше алгоритму с коррекцией узлов, входящих в область контакта, требовали, соответственно, 13, 4, 4, 5 и 5 итераций. Получившееся в результате деформированное состояние можно видеть на рис. 2, б. На рис. 2, с показано поле компоненты напряжений T_{zz} . Единицы измерения напряжения на этом и других рисунках — МПа. Как известно [49], в деформированном кольце распределение контактных напряжений по ширине контакта приближенно описывается параболическим законом с максимальным напряжением в точке наибольшей деформации, равным

$$\frac{5}{6} E \left(\sqrt{\frac{d}{h}} - \frac{h}{d} \right) = 1.45 \text{ МПа},$$

где d — диаметр сечения кольца, h — высота гнезда. На рис. 2, д можно увидеть соответствующее распределение zz -компоненты, а также других компонент тензора напряжений Коши, по радиальной координате верхней поверхности контакта, полученное в проведенном расчете. Его действительно можно считать параболой, имеющей максимум, равный 2.4 МПа, что качественно согласуется с приближенной формулой, с учетом того, что значения напряжений в МКЭ-приложениях, основанных на вариационном принципе Лагранжа, вычисляются более грубо, чем значения перемещений.

Для рассматриваемого уплотнительного кольца был также проведен тестовый расчет, в котором граничные условия были заданы только в осевом направлении (ограничение на высоту то же — 2.2 мм), а в радиальном направлении ограничения не ставились. При этом проявились проблемы со сходимостью, аналогичные наблюдавшимся в описываемой выше задаче об инвертировании цилиндра, когда у него тоже не фиксировались перемещения в радиальном направлении: невязка в течение итераций убывает чрезвычайно

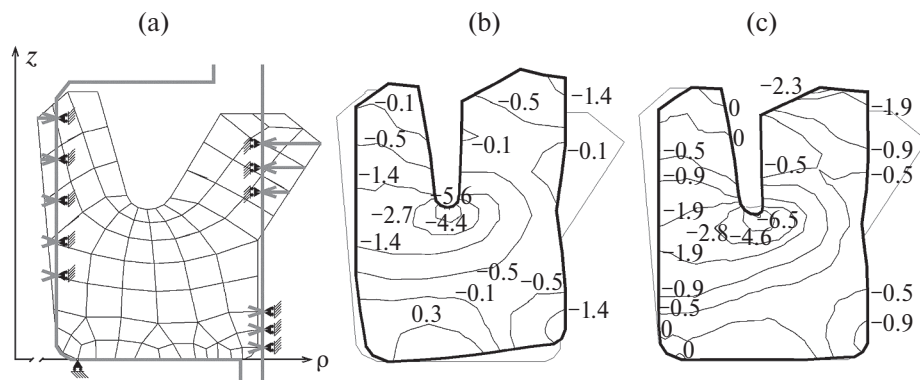


Рис. 3. Расчетная модель и результаты расчетов манжетного уплотнительного кольца.

медленно, и при этом текущие приближения принимают непропорционально большое значение ρ -координаты (в частности, для рассматриваемого уплотнительного кольца внутренний радиус достигал 48.5 мм). Эти проблемы можно связать с тем, что у данной двумерной расчетной схемы, если ее рассматривать как задачу плоской деформации, очевидно не должно быть сходимости, поскольку без поперечного закрепления становятся допустимыми перемещения модели как твердого тела вдоль горизонтальной оси, т.е. отсутствует единственность решения. По-видимому, наличия подчеркнутых членов в формулах, отличающих этот случай от плоской деформации, оказывается недостаточно для появления сходимости. Таким образом, при решении осесимметричных задач предлагаемым способом следует задавать новую ρ -координату хотя бы в одной узловой точке модели (в частности, в телах, не имеющих сквозных осевых отверстий, это условие выполняется автоматически).

Еще один пример осесимметричного расчета — анализ напряженно-деформированного состояния манжетного уплотнителя поршня [52]. В качестве материала использован полиуретан СКУ-ПФЛ с константами ${}_1C = 0.83$ МПа, ${}_2C = 2.5$ МПа. Рассматривается расчетный случай [48], соответствующий номинальному размещению уплотнителя в корпусе цилиндра либо обратному ходу поршня [47]. Расчетная схема МКЭ и граничные условия в перемещениях показаны на рис. 3, а. Размеры гнезда, в котором требуется разместить: диаметр внутренний 20 см, внешний 30 см, высота 13 см. В результате применения описанного выше алгоритма окончательный расчет для получения решения потребовал 6 итераций. Деформированное состояние уплотнителя, полученное в результате расчета, а также картина распределения радиальной составляющей тензора напряжения Коши, показаны: без задания ограничения на высоту гнезда на рис. 3, б, и со всеми ограничениями на рис. 3, с. По рисунку можно судить о распределении напряжения вблизи поверхностей контакта. Рассматриваемый уплотнитель имеет кромки разного вида: внешнюю практически постоянной толщины и внутреннюю, сужающуюся к концу и имеющую малый угол наклона относительно центральной оси. Можно видеть, что максимум сжимающего напряжения по внешней кромке достигается на ее конце. У внутренней же кромки напряжение на конце близко к нулю,

а максимальное значение достигается у ее основания. Такое распределение контактных напряжений соответствует известным [53] результатам, когда при толщине кромки, уменьшающейся к концу, максимум эпюры находится вдали от конца кромки, а при толщине, близкой к постоянной, максимум напряжения смещен к концу кромки.

7. Заключение. Выполненное исследование позволяет сделать следующие выводы:

- использование тензорно-матричной формы для нелинейного уравнения МКЭ позволило относительно легко выполнить аналитические преобразования (в частности, получение матрицы частных производных) для осесимметричного случая, благодаря инкапсуляции тензорных операций внутри матричных компонент;

- реализация неинкрементального подхода с использованием глобально сходящейся модификации метода Ньютона дает путь к отысканию финального состояния существенно нелинейных задач на основе приближенного задания формы предполагаемого решения из физических соображений;

- в рамках неинкрементального подхода возможно создание специализированного приложения для расчета уплотнительных колец с использованием последовательной коррекции зоны контакта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *De Souza Neto E.A., Feng Y.T.* On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snap-backs' // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1999. V. 179. № 1–2. P. 81–89. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00042-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00042-0)
2. *Arciniega R.A., Reddy J.N.* Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2007. V. 196. № 4-6. P. 1048–1073. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.08.014>
3. *Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У.* Численное исследование конечных деформаций упругих тел. III. Постановка задачи и алгоритмы решения // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки.* 2009. Т. 151. № 3. С. 108–120.
4. *Bauer S., Schäfer M., Grammenoudis P., Tsakmakis Ch.* Three-dimensional finite elements for large deformation micropolar elasticity // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2010. V. 199. № 41–44. P. 2643–2654. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.05.002>
5. *Роговой А.А., Столбова О.С.* Процедура восполнения напряжений при решении геометрически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов // *ПММ.* 2010. Т. 74. Вып. 6. С. 992–1008.
6. *Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim.* Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures // *Finite Elem. Anal. Des.* 2011. V. 47. № 3. P. 237–246. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.10.005>
7. *Cavalieri F.J., Cardona A.* An augmented Lagrangian technique combined with a mortar algorithm for modelling mechanical contact problems // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2013. V. 93. № 4. P. 420–442. <https://doi.org/10.1002/nme.4391>

8. Галанин М.П., Крылов М.К., Лотоцкий А.П., Родин А.С. Учет больших пластических деформаций в задаче высокоскоростного нагружения алюминиевой ленты // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 66–79.
9. Kan Z., Peng H., Chen B. Complementarity framework for nonlinear analysis of tensegrity structures with slack cables // AIAA J. 2018. V. 56. № 12. P. 5013–5027.
<https://doi.org/10.2514/1.J057149>
10. Nedjar B., Baaser H., Martin R., Neff P. A finite element implementation of the isotropic exponentiated Hencky-logarithmic model and simulation of the eversion of elastic tubes // Comput. Mech. 2018. V. 62. P. 635–654.
<https://doi.org/10.1007/s00466-017-1518-9>
11. Rabelo J.M.G., Becho J.S., Greco M., Cimini C.A.J. Modeling the creep behavior of GRFP truss structures with positional finite element method // Latin American J. Solids Structures. 2018. V. 15. № 2. e17.
<https://doi.org/10.1590/1679-78254432>
12. Fakhrutdinov L.R., Abdrakhmanova A.I., Garifullin I.R., Sultanov L.U. Numerical investigation of large strains of incompressible solids // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1158. № 2. 022041.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022041>
13. Sultanov L. U. Computational algorithm for investigation large elastoplastic deformations with contact interaction // Lobachevskii J Math. 2021. V. 42. P. 2056–2063.
<https://doi.org/10.1134/S199508022108031X>
14. Liu Zh., McBride A., Ghosh A., Heltai L., Huang W., Yu T., Steinmann P., Saxena P. Computational instability analysis of inflated hyperelastic thin shells using subdivision surfaces // Comput. Mech. 2024. V. 73. P. 257–276.
<https://doi.org/10.1007/s00466-023-02366-z>
15. Таубин А.Г., Румянцев К.А., Комендантов А.В. Особенности деформирования изделий из высокоэластичных материалов, содержащих внутренние полости // Труды Крыловского государственного научного центра. 2020. № S1. С. 108–114.
<https://doi.org/10.24937/2542-2324-2020-1-S-I-108-114>
16. Bich Quyen, Ngoc Tien. Penalty function method for geometrically nonlinear buckling analysis of imperfect truss with multi-freedom constraints based on mixed FEM. // E3S Web of Conf. 2023. V. 410.
<https://doi.org/10.1051/e3sconf/202341003028>
17. Сагдатуллин М.К. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования оболочек средней толщины // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 130–148.
<https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148>
18. De Borst R., Crisfield M., Remmers J., Verhoosel C. Non-linear finite element analysis of solids and structures: second edition. John Wiley, Sons Ltd, 2012. 516 p.
<https://doi.org/10.1002/9781118375938>
19. Ladevèze P. Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation. NY: Springer-Verlag, 1999. 220 p.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1432-8>
20. Gotsulyak E.A., Luk'yanchenko O.K., Kostina E.V., Garan I.G. Geometrically nonlinear finite-element models for thin shells with geometric imperfections // Int. Appl. Mech. 2011. V. 47. P. 302–312.
<https://doi.org/10.1007/s10778-011-0461-2>

21. *Tolle K., Marheineke N.* Extended group finite element method // *Appl. Numer. Math.* 2021. V. 162. P. 1–19.
<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.12.008>
22. *Korelc J.* Semi-analytical solution of path-independent nonlinear finite element models // *Finite Elem. Anal. Des.* 2011. V. 47. № 3. P. 281–287.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.10.006>
23. *Chekhov V.V.* Matrix FEM equation describing the large-strain deformation of an incompressible material // *Int. Appl. Mech.* 2011. V. 46. P. 1147–1153.
<https://doi.org/10.1007/s10778-011-0407-8>
24. *Chekhov V.V.* Modification of the finite-element method to apply to problems of the equilibrium of bodies subject to large deformations // *Int. Appl. Mech.* 2013. V. 49. P. 658–664.
<https://doi.org/10.1007/s10778-013-0599-1>
25. *Boy Vasconcellos D, Greco M.* Logarithmic strain tensor in the positional formulation of FEM // XLIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2023).
26. *Шапиро А.А.* Задачи с конечными деформациями в пакетах ANSYS и LS-DYNA. Верификация использующихся численных методов // *Электронный научный журнал Нефтегазовое дело.* 2004. № 1. С. 20.
27. *Гетман И.П., Карякин М.И., Устинов Ю.А.* Анализ нелинейного поведения круглых мембран с произвольным профилем по радиусу // *ПММ.* 2010. Т. 74. Вып. 6. С. 917–927.
28. *Щербакова А.О.* Применение метода конечных элементов к расчету больших перемещений плоской линейно-упругой конструкции // *Вестник ЮУрГУ Сер. Матем. Мех. Физ.* 2011. № 5. С. 83–91.
29. *Azikri H.P., Ávila C.R., Belo I.M., Beck A.T.* The Tikhonov regularization method in elastoplasticity // *Appl. Math. Model.* 2012. V. 36. № 10. P. 4687–4707.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.086>
30. *Léger S., Fortin A., Tibirna C., Fortin M.* An updated Lagrangian method with error estimation and adaptive remeshing for very large deformation elasticity problems // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2014. V. 100. № 13. P. 1006–1030.
<https://doi.org/10.1002/nme.4786>
31. *Léger S., Haché J., Traoré S.* Improved algorithm for the detection of bifurcation points in nonlinear finite element problems // *Comput. Struct.* 2017. V. 191. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.06.002>
32. *Бакулин В.Н., Каледин В.О., Каледин Вл.О., Кузнецова Е.В., Репинский В.В.* Объектно-ориентированная реализация метода конечных элементов // *Матем. Моделирование.* 2003. Т. 15. № 2. С. 77–82.
33. *Kumar S.* Object-oriented finite element analysis of metal working processes // *J. Softw. Engineering & Applications.* 2010. V. 3. № 6. P. 572–579.
<https://doi.org/10.4236/jsea.2010.36066>
34. *Копысов С.П., Кузьмин И.М., Недождогин Н.С., Новиков А.К., Рычков В.Н., Сагдеева Ю.А., Тонков Л.Е.* Параллельная реализация конечно-элементных алгоритмов на графических ускорителях в программном комплексе FESstudio // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2014. Т. 6 № 1. С. 79–97.
<https://doi.org/10.20537/2076-7633-2014-6-1-79-97>

35. *Kanber B., Yavuz M.M.* Object-oriented programming in meshfree analysis of elastostatic problems // *Int. J. of Eng. Applied Sciences (IJEAS)*. 2015. V. 7. № 2. P. 1–18.
<https://doi.org/10.24107/ijeas.251244>
36. *Добромыслов В.В., Александров А.Е., Востриков А.А.* Разработка инструментальных средств конечноэлементного анализа на основе компонентной технологии // *Инновации и инвестиции*. 2015. № 8. С. 135–139.
37. *Eyheramendy D., Saad R., Zhang L.* An object-oriented symbolic approach for the automated derivation of Finite Element contributions // *Adv. Eng. Softw.* 2016. V. 94. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.01.010>
38. *Badia S, Martín AF, Principe J.* FEMPAR: an object-oriented parallel finite element framework // *Arch. Comput. Methods Eng.* 2018. V. 25. P. 195–271.
<https://doi.org/10.1007/s11831-017-9244-1>
39. *Chekhov V.V.* Tensor-based matrices in geometrically non-linear FEM // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2005. V. 63. № 15. P. 2086–2101.
<https://doi.org/10.1002/nme.1343>
40. *Никабадзе М.У.* Задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы с некоторыми приложениями к механике // *Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.* 2018. Т. 150. С. 40–77.
41. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
42. *GSL Reference Manual.* URL: <https://www.gnu.org/software/gsl/doc/latex/gsl-ref.pdf> (дата обращения: 20.08.2024)
43. *Лурье А.И.* Дифференцирование по тензорному аргументу // *Вопросы математической физики*. Л.: Наука, 1976. С. 48–57.
44. *Димитриенко Ю.И.* Тензорное исчисление: Учеб. Пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001. 575 с.
45. *Роговой А.А.* Формализованный подход к построению моделей механики деформированного твердого тела. Часть 1. Основные соотношения механики сплошных сред. Пермь: УрО РАН, 2020. 288 с.
46. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику: Учебное пособие для вузов. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2008. 504 с.
47. *Yang B., Salant R.F.* Numerical analysis compares the lubrication of U seal and step seal // *Sealing Technology*. 2009. V. 2009. № 3. P. 7–11.
[https://doi.org/10.1016/S1350-4789\(09\)70132-1](https://doi.org/10.1016/S1350-4789(09)70132-1)
48. *Belforte G., Conte M., Manuello Bertetto A., Mazza L., Visconte C.* Experimental and numerical evaluation of contact pressure in pneumatic seals // *Tribol. Int.* 2009. V. 42. № 1. P. 169–175.
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2008.04.010>
49. *Аврущенко Б.Х.* Резиновые уплотнители. Л.: Химия, 1978. 136 с.
50. *Bathe K.-J.* Finite element procedures. Prentice Hall, 1996. 1037 с.
51. *ELCUT* Новый подход к моделированию полей. URL: <https://elcut.ru> (дата обращения: 20.08.2024)
52. *KD piston seal with asymmetric lips.* URL: <https://astonseals.com/pdf/prodotti/gb/KD.pdf> (дата обращения: 20.08.2024)
53. *Кондаков Л.А., Голубев А.И., Овандер В.Б. и др.* Уплотнения и уплотнительная техника: Справочник. М.: Машиностроение, 1986. 464 с.

APPLICATION OF THE NON-INCREMENTAL APPROACH TO AXISYMMETRIC FEM ANALYSIS OF LARGE STRAIN IN TENSOR-BASED MATRIX FORM

Vladimir V. Chekhov^{a, *}

^a*V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia*

^{*}*e-mail: chekhovvv@cfov.ru*

Abstract. For the tensor-matrix FEM system of equations describing the final state of large deformations of an incompressible elastic body, a development to solve axisymmetric problems is obtained. Also, analytical expressions for the components of the partial derivatives matrix of the system are obtained. Examples of calculating the everted state of a circular cylinder, as well as analysis of sealing rings are described.

Keywords: FEM equation, tensor-block matrices, large strain, static analysis, positional formulation, axisymmetric state, Finger strain measure, incompressible material, Mooney-Rivlin material

REFERENCES

1. *De Souza Neto E.A., Feng Y.T.* On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snap-backs' // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1999. 179 (1-2). P. 81–89.
[https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00042-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00042-0)
2. *Arciniega R.A., Reddy J.N.* Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 196 (4-6). 2007. P. 1048–1073.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.08.014>
3. *Golovanov A.I., Konoplev Yu.G., Sultanov L.U.* Numerical Investigation of Large Deformations of Hyperelastic Solids. III. Statements of Problem and Solution Algorithms // *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki.* 2009. 151 (3). P. 108–120. (in Russian)
4. *Bauer S., Schäfer M., Grammenoudis P., Tsakmakis Ch.* Three-dimensional finite elements for large deformation micropolar elasticity // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2010. 199 (41-44). P. 2643–2654.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.05.002>
5. *Rogovoi A.A., Stolbova O.S.* A stress recovery procedure for solving geometrically non-linear problems in the mechanics of a deformable solid by the finite element method // *J. Appl. Math. Mech.* 2010. 74 (6). P. 710–720.
6. *Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim.* Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures // *Finite Elements in Analysis and Design.* 2011. 47 (3). P. 237–246.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.10.005>
7. *Cavaleri F.J., Cardona A.* An augmented Lagrangian technique combined with a mortar algorithm for modelling mechanical contact problems // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2013. 93 (4). P. 420–442.
<https://doi.org/10.1002/nme.4391>

8. *Galanin M.P., Krylov M.K., Lototskii A.P., Rodin A.S.* Large Plastic Strains in the Problem of High-Speed Loading of an Aluminum Ribbon // *Mech. Solids*. 2017. 52 (2). P. 172–183.
<https://doi.org/10.3103/S0025654417020078>
9. *Kan Z., Peng H., Chen B.* Complementarity Framework for Nonlinear Analysis of Tensegrity Structures with Slack Cables // *AIAA Journal*. 2018. 56 (12). P. 5013–5027.
<https://doi.org/10.2514/1.J057149>
10. *Nedjar B., Baaser H., Martin R., Neff P.* A finite element implementation of the isotropic exponentiated Hencky-logarithmic model and simulation of the eversion of elastic tubes // *Computational Mechanics*. 2018. 62. P. 635–654. doi:10.1007/s00466-017-1518-9
11. *Rabelo J.M.G., Becho J.S., Greco M., Cimini C.A.J.* Modeling the creep behavior of GFRP truss structures with Positional Finite Element Method // *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2018. 15 (2): e17.
<https://doi.org/10.1590/1679-78254432>
12. *Fakhrutdinov L.R., Abdrakhmanova A.I., Garifullin I.R., Sultanov L.U.* Numerical investigation of large strains of incompressible solids // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. 1158 (2). 022041.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022041>
13. *Sultanov L.U.* Computational Algorithm for Investigation Large Elastoplastic Deformations with Contact Interaction // *Lobachevskii J Math.* 2021. 42. P. 2056–2063.
<https://doi.org/10.1134/S199508022108031X>
14. *Liu Zh., McBride A., Ghosh A., Heltai L., Huang W., Yu T., Steinmann P., Saxena P.* Computational instability analysis of inflated hyperelastic thin shells using subdivision surfaces // *Comput. Mech.* 2024. 73. P. 257–276.
<https://doi.org/10.1007/s00466-023-02366-z>
15. *Taubin A.G., Rumiantsev K.A., Komendantov A.V.* Specifics of deformation of articles from highly elastic materials with inner cavities // *Transactions of the Krylov State Research Centre*. 2020. 1(S-I). P. 108–114. (in Russian)
<https://doi.org/10.24937/2542-2324-2020-1-S-I-108-114>.
16. *Bich Quyen, Ngoc Tien.* Penalty function method for geometrically nonlinear buckling analysis of imperfect truss with multi-freedom constraints based on mixed FEM. // *E3S Web of Conferences*. 2023. 410.
<https://doi.org/10.1051/e3sconf/202341003028>
17. *Sagdatullin M.K.* Numerical modeling of nonlinear deformation processes for shells of medium thickness // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023. Vol. 19, No 2. P. 130–148. (in Russian)
<https://doi.org/10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148>
18. *De Borst R., Crisfield M., Remmers J., Verhoosel C.* Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Second Edition. John Wiley & Sons Ltd, 2012. 516 pp.
<https://doi.org/10.1002/9781118375938>
19. *Ladevèze P.* Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation. NY: Springer-Verlag, 1999. 220 pp.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1432-8>
20. *Gotsulyak E.A., Luk'yanchenko O.K., Kostina E.V., Garan I.G.* Geometrically nonlinear finite-element models for thin shells with geometric imperfections // *Int. Appl. Mech.* 2011. 47. P. 302–312.
<https://doi.org/10.1007/s10778-011-0461-2>

21. *Tolle K., Marheineke N.* Extended group finite element method // *Applied Numerical Mathematics*, 2021. 162, P. 1–19.
<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.12.008>
22. *Korelc J.* Semi-analytical solution of path-independent nonlinear finite element models // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2011. 47 (3). P. 281–287.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2010.10.006>
23. *Chekhov V.V.* Matrix FEM equation describing the large-strain deformation of an incompressible material // *Int. Appl. Mech.* 2011. 46. P. 1147–1153.
<https://doi.org/10.1007/s10778-011-0407-8>
24. *Chekhov V.V.* Modification of the finite-element method to apply to problems of the equilibrium of bodies subject to large deformations // *Int. Appl. Mech.* 2013. 49. P. 658–664.
<https://doi.org/10.1007/s10778-013-0599-1>
25. *Boy Vasconcellos D, Greco M.* Logarithmic strain tensor in the positional formulation of FEM // *XLIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2023)*.
26. *Shapiro A.A.* Finite strain problems in ANSYS and LS-DYNA. Applied numerical methods verification // *Network journal «Oil and Gas Business»*. 2004. 1. P. 20. (in Russian)
URL: <https://ogbus.ru/article/view/zadachi-s-konechnymi-deformatsiyami-v-paketax-ansys-i-ls-dyna-v/23357> (accessed on 20 August 2024)
27. *Getman I.P., Karyakin M.I., Ustinov Yu.A.* Analysis of the non-linear behaviour of circular membranes with an arbitrary radial profile // *J. Appl. Math. Mech.* 2010. 74 (6). P. 654–662.
28. *Scherbakova A.O.* The finite element method use for large displacements calculations of plane linear-elastic structures // *Vestnik YuUrGU. Serija «Matematika. Mehanika. Fizika»*. 2011. № 32 (249), Issue 5. P. 83–91. (in Russian)
URL: <https://vestnik.susu.ru/mmph/issue/viewIssue/47/23> (accessed on 20 August 2024)
29. *Aziki H.P., Ávila C.R., Belo I.M., Beck A.T.* The Tikhonov regularization method in elastoplasticity // *Applied Mathematical Modelling*. 2012. 36 (10). P. 4687–4707. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.086>
30. *Léger S., Fortin A., Tibirna C., Fortin M.* An updated Lagrangian method with error estimation and adaptive remeshing for very large deformation elasticity problems // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2014. 100 (13). P. 1006–1030.
<https://doi.org/10.1002/nme.4786>
31. *Léger S., Haché J., Traoré S.* Improved algorithm for the detection of bifurcation points in nonlinear finite element problems // *Computers & Structures*. 2017. 191. P. 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.06.002>
32. *Bakulin V.N., Kaledin V.O., Kaledin V.I., Kuznetsova E.V., Repinsky V.V.* Object-oriented realization of finite element method // *Matematicheskoe modelirovanie*. 2003. 15 (2); P. 77–82. (in Russian)
33. *Kumar S.* Object-Oriented Finite Element Analysis of Metal Working Processes // *J. Software Engineering & Applications*. 2010. 3. P. 572–579.
<https://doi.org/10.4236/jsea.2010.36066>
34. *Kopysov S.P., Kuzmin I.M., Nedožogin N.S., Novikov A.K., Rychkov V.N., Sagdeeva Y.A., Tonkov L.E.* Parallel implementation of a finite-element algorithms on a graphics accelerator in the software package FESstudio // *Computer Research and Modeling*. 2014. 6 (1). P. 79–97. (in Russian)
<https://doi.org/10.20537/2076-7633-2014-6-1-79-97>

35. *Kanber B., Yavuz M.M.* Object-oriented programming in meshfree analysis of elastostatic problems // International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS). 2015. 7 (2). P. 1–18.
<https://doi.org/10.24107/ijeas.251244>
36. *Dobromyslov V.V., Alexandrov A.E., Vostrikov A.A.* Development of instrumental tools finite element analysis based on component technology // Innovatsii i investitsii. 2015. 8, P. 135–139. (in Russian)
37. *Eyheramendy D., Saad R., Zhang L.* An object-oriented symbolic approach for the automated derivation of Finite Element contributions // Advances in Engineering Software. 2016. 94. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.01.010>
38. *Badia S, Martín AF, Principe J.* FEMPAR: An Object-Oriented Parallel Finite Element Framework // Arch Comput Methods Eng. 2018. 25. P. 195–271.
<https://doi.org/10.1007/s11831-017-9244-1>
39. *Chekhov V.V.* Tensor-based matrices in geometrically non-linear FEM // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2005. 63 (15). P. 2086–2101.
<https://doi.org/10.1002/nme.1343>
40. *Nikabadze M.U.* Eigenvalue Problems for Tensor-Block Matrices and Their Applications to Mechanics // J. Math. Sci. (N.Y.) 2020. 250. P. 895–931.
<https://doi.org/10.1007/s10958-020-05053-z>
41. *Lurie A.I.* Non-Linear Theory of Elasticity. North-Holland: Amsterdam, 1990. 618 pp.
42. GSL Reference Manual. URL: <https://www.gnu.org/software/gsl/doc/latex/gsl-ref.pdf> (accessed on 20 August 2024)
43. *Lurie A.I.* Differentiation with Respect to Tensor Argument.// Problems of Mathematical Physics. Nauka: Leningrad, 1976. P. 48–57. (in Russian)
44. *Dimitrienko Yu.I.* Tensor Analysis and Nonlinear Tensor Functions. — Springer Dordrecht, 2002. 662 pp.
<https://doi.org/10.1007/978-94-017-3221-5>
45. *Rogovoy A.A.* A Formalized Approach to the Construction of Models of Deformable Solid Mechanics. Part I. Basic Relations of Continuum Mechanics. — Perm, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences: Yekaterinburg, Russia, 2020. 288 pp. (in Russian) URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44190094> (accessed on 20 August 2024)
46. *Fedorenko R.P.* Introduction to Computational Physics — MFTI, Moscow, 1994. 528 pp. (in Russian)
47. *Bo Yang, Salant R.F.* Numerical analysis compares the lubrication of U seal and step seal // Sealing Technology. 2009. 2009 (3). P. 7–11.
[https://doi.org/10.1016/S1350-4789\(09\)70132-1](https://doi.org/10.1016/S1350-4789(09)70132-1)
48. *Belforte G., Conte M., Manuello Bertetto A., Mazza L., Visconte C.* Experimental and numerical evaluation of contact pressure in pneumatic seals // Tribology International. 2009. 42 (1). P. 169–175.
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2008.04.010>
49. *Avrushchenko B.Kh.* Rubber Seals. Khimiya, Leningrad, 1978. 136 pp. (in Russian)
50. *Bathe K.-J.* Finite element procedures. Prentice Hall, 1996. 1037 pp.
51. ELCUT A New Approach to Field Modeling. (in Russian)
URL: <https://elcut.ru> (accessed on 20 August 2024)
52. KD piston seal with asymmetric lips.
URL: <https://astonseals.com/pdf/prodotti/gb/KD.pdf> (accessed on 20 August 2024)

53. *Kondakov L.A., Golubev A.I., Ovander V.B., et al.* Uplotneniya i uplotnitel'naya tekhnika: spravochnik (Seals and Sealing Machines: Handbook), Eds.: Golubev A.I. and Kondakov L.A. Moscow: Mashinostroenie, 1986. 464 pp. (in Russian)