

УДК 535.374

ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЯ УМЕНЬШЕНИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ С УВЕЛИЧЕНИЕМ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ ПОЛИКРИСТАЛЛА

© 2024 г. В. Ю. Марина^а, *

^аТехнический Университет Молдовы, Кишинев, Молдова

*e-mail: vasilemarina21@yahoo.com.

Поступила в редакцию 22.03.2024 г.

После доработки 29.04.2024 г.

Принята к публикации 03.05.2024 г.

С использованием трехуровневой конститутивной модели исследуется влияние фактора анизотропии кристаллов, коэффициента упрочнения, микроскопического предела упругости и функции плотности распределения предельных упругих деформаций подэлементов на формы диаграмм деформирования и условия разрушения поликристалла. Исходя на локальном уровне из теории максимальных нормальных напряжений на макроскопическом уровне установлен критерий разрушения, в котором фигурируют все параметры задачи. Исследуется влияние вида напряженного состояния и геометрической формы диаграммы нагружения на величину необратимой деформации, предшествующей начальному процессу разрушения. Из установленного критерия прочности следует эффект падения пластичности материала с ростом предела текучести. Обсуждается вопрос о критическом значении веса разрушенных подэлементов, при котором происходит образование макротрещины приводящее к полному разрушению элемента тела.

Ключевые слова: структура, напряжение, деформация, разрушение, пластичность, поликристалл, упрочнение, осредненные связи, несоответствия мер, подэлемент.

DOI: 10.31857/S1026351924050091, EDN: UAPTCL

Введение. Из анализа работ по теории необратимого деформирования и разрушения видно, что для описания новых эффектов наблюдаемых при деформировании твердых тел, работающих в усложненных термосиловых условиях, предлагаются все более сложные феноменологические определяющие уравнения [1–3]. Наибольшие успехи при описании сложных явлений, на основе минимальной информации о свойствах материала достигнуты в рамках многоуровневых моделей [4–6]. В настоящее время широкое применение получили двухуровневые модели [7–10]. Ключевым классификационным признаком моделей предложенным различными авторами является гипотеза связей микроскопических напряжений и

деформаций $-\tilde{t}_{ij}$, $\tilde{d}_{ij}$ и макроскопическими напряжениями и деформациями $-t_{ij}$, d_{ij} . Большинство авторов ограничиваются допущением об однородном деформированном состоянии элементов структуры $\tilde{d}_{ij} = d_{ij}$ или об однородном напряженном состоянии $\tilde{t}_{ij} = t_{ij}$.

Впервые модель, учитывающую влияние неоднородностей полей деформаций и напряжений на поведение поликристалла, разработал Кренер [11]. В основе модели лежит так называемая «самосогласованная схема», относящаяся к проблеме включения в бесконечную матрицу. Согласно этой схемы каждое зерно поликристалла последовательно рассматривается как включение в «матрицы» всех других зерен. Поведение поликристалла затем рассчитывается интегрированием по фактору ориентации зерен. В результате установлена линейная зависимость между флуктуациями тензоров напряжений и деформаций. К основным недостаткам моделей, основанных на подходе Кренера [11–13], следует отнести несогласованность с первым законом термодинамики (макроскопическая мера энергии деформирования больше осредненного значения микромеры) и завышенные внутренние напряжения в необратимой области деформирования¹.

Экспериментальные исследования при пропорциональном циклическом и сложном нагружении [14] выявили комплекс деформационных свойств, которые не могут быть объяснены в рамках классических подходов, связанных с наличием поверхности текучести в многоэлементных моделях. В частности, установлено, что интенсивность упрочнения по круговым траекториям на 30–40% больше, чем при пропорциональном циклическом нагружении (многоэлементные модели, основанные на поверхности текучести, предсказывают противоположный эффект); после перехода к нагружению вдоль траектории, расположенной под углом 90° к предварительному циклическому пропорциональному деформированию до стабилизации происходит скачкообразный рост интенсивности размаха напряжения; последующее пропорциональное нагружение после кругового нагружения приводит к разупрочнению. Статистические теории, за исключением [15–18], предсказывают противоположные эффекты. Это связано с разориентацией векторов напряжений в подэлементах многоэлементной модели при сложном нагружении. На самом деле под действием направленного распределения макроскопических напряжений во всем конгломерате и в ближайших материальных частицах происходят самосогласованные процессы необратимых деформаций. Сложная картина внешне не связанных между собой особенностей необратимого деформирования материалов, проявляемых при различных программах изменения нагрузки и температуры, становится обозримой и взаимосвязанной при использовании для её интерпретации принципы термодинамики необратимых процессов, осредненных связей, экстремума несоответствия мер и постулат об ортогональности флуктуаций тензоров напряжений и деформаций [15–19]. Установленные в [19] явления, протекающие при необратимом нагружении поликристалла: циклическое изменение объёмных и максимальных растягивающих

¹ Марина В. Ю. Многоэлементная модель среды, описывающая переменные сложные неизотермические процессы нагружения. Дисс. д-ра физ.-мат. наук. Киев, 1991. — 361с.

напряжений в часть элементов структуры при макроскопическом пропорциональном монотонном нагружении; наибольшие растягивающие напряжения возникают в элементе структуры в момент наступления текучести и др., раскрывают новые возможности при описании сложной картины деформирования и разрушения.

Хотя на основе перечисленных принципов возможности модели значительно расширились, в рамках двухуровневой модели среды не удастся описать в обычных для механики твердого тела терминах явления, связанные с площадкой и зубом текучести; влияние фактора анизотропии кристаллов на текучести и разрушения поликристалла. В данной работе рассмотрим трехуровневую модель, описывающую с единых позиций как процесс описываемые двухуровневых моделей среды [15–19], так и явления, связанные с нарушением монотонности диаграмм деформирования, уменьшения пластичности с увеличением предела текучести и другие эффекты.

1. Общие уравнения трехуровневой конститутивной модели. Фундаментальные понятия напряжения и деформации вводятся на трёх уровнях структуры: материальной анизотропной частицы – $\tilde{t}_{ij}$, $\tilde{d}_{ij}$, подэлемента – $\bar{t}_{ij}$, $\bar{d}_{ij}$ представительного объема – t_{ij} , d_{ij} . Подэлемент отождествляется со множеством всех материальных частиц внутри представительного объема ΔV_0 , имеющих одинаковый девиатор необратимых деформаций. Частицы, принадлежащие одному и тому же подэлементу, могут иметь различные положения и ориентации кристаллической решётки в представительном объёме ΔV_0 . Количество всех частиц с одинаковым девиатором необратимых деформаций определяет вес одного подэлемента, который не меняется в процессе нагружения.

На основе уравнений равновесия и геометрических соотношений Коши в работе [20] получены соотношения

$$t_{ij} = \langle \tilde{t}_{ij} \rangle = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{\Delta V_0} \tilde{t}_{ij} dV, \quad d_{ij} = \langle \tilde{d}_{ij} \rangle, \quad \langle \tilde{t}_{ij} \tilde{d}_{ij} \rangle = t_{pq} d_{pq}, \quad (1.1)$$

где $\tilde{t}_{ij}$, $\tilde{d}_{ij}$ – тензоры напряжений и деформаций в каждой точке области ΔV_0 соответственно, $\langle \cdot \rangle$ – знак осреднения по объёму ΔV_0 .

Для учета явления когерентности локальных процессов деформирования в [16] сформулирован принцип: все виды взаимодействия между материальными частицами в представительном объеме формируются под влиянием лишь одних осредненных связей. Согласно этому принципу, каждый подэлемент непосредственно взаимодействует со средой, наделенной осредненными свойствами, а согласованность непрерывной модели с первым законом термодинамики обеспечивается на основе постулата об ортогональности тензоров флуктуаций напряжений и деформаций [16, 21]

$$(\tilde{t}_{ij} - t_{ij})(\tilde{d}_{ij} - d_{ij}) = 0. \quad (1.2)$$

Разложив компоненты тензоров напряжений и деформаций на девиаторные σ_{ij} , ε_{ij} и шаровые составляющие $\sigma_0 \delta_{ij}$, $\varepsilon_0 \delta_{ij}$

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \tilde{t}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_0 \delta_{ij}, \quad \bar{t}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_0 \delta_{ij}, \\ \bar{d}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \bar{\varepsilon}_0 \delta_{ij}, \quad \tilde{d}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\varepsilon}_0 \delta_{ij}$$

на основе (1.2) установим первый тип уравнений связи макро и микросостояний

$$(\tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})(\varepsilon_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij}) = 3(\tilde{\sigma}_0 - \sigma_0)(\tilde{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0). \quad (1.3)$$

Для флуктуаций девиаторных составляющих примем линейные зависимости

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = B(\bar{\varepsilon}_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij}), \quad (1.4)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} = B'(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}), \quad (1.5)$$

где B, B' — внутренние параметры, содержащие информацию о характеристиках материальных частиц, которые отражают различие между флуктуациями напряжений и флуктуациями деформации на исследованных структурных уровнях.

Микроскопические переменные делятся на переменные, усреднение значений которых зависят единственным образом от данных на поверхности представительного объёма, и переменные, зависящие и от элементов структуры материала. В [18, 21] предложен принцип: в реальных взаимодействиях несоответствие между макроскопической меры с подходящим средним значением микроскопического аналога, принимает экстремальное значение. В частности

$$\Delta = \langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle - \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle \langle \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle = \text{Extr}, \quad \langle \tilde{\sigma}_0 \tilde{\varepsilon}_0 \rangle - \langle \tilde{\sigma}_0 \rangle \langle \tilde{\varepsilon}_0 \rangle = \text{Extr}. \quad (1.6)$$

При описании необратимых процессов компоненты девиаторов тензоров деформаций $\tilde{\varepsilon}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \varepsilon_{ij}$ и элемента тела ε_{ij} представляются в виде суммы обратимых $\tilde{\varepsilon}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}, e_{ij}$ и необратимых компонент $\tilde{p}_{ij}, \bar{p}_{ij}, p_{ij}$: $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{e}_{ij} + \tilde{p}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{e}_{ij} + \bar{p}_{ij}$, $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + p_{ij}$. С учетом принятого определения понятия под-элемента $\tilde{p}_{ij} = p_{ij}$ соотношение (1.4), можно представить в виде

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} = B(\bar{e}_{ij} - \tilde{e}_{ij}). \quad (1.7)$$

Выражение для экстремума несоответствия между макроскопической меры с подходящим средним значением микроскопического аналога (1.6) примем в виде

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' = \text{Extr}. \quad (1.8)$$

$$\Delta' = \left\langle \left\langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{e}_{ij} \right\rangle_{\Omega} - \bar{\sigma}_{ij} \bar{e}_{ij} \right\rangle_{\Psi}, \quad \Delta'' = \left\langle \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} \right\rangle_{\Psi} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (1.9)$$

В формулах (1.9) $\langle \cdot \rangle_{\Omega}$ — знак осреднения по фактору ориентации кристаллической решетки Ω

$$\bar{t}_{ij} = \langle \tilde{t}_{ij} \rangle_{\Omega}, \bar{d}_{ij} = \langle \tilde{d}_{ij} \rangle_{\Omega}, \bar{\sigma}_{ij} = \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_{\Omega}, \dots \quad (1.10)$$

а $\langle \cdot \rangle_{\Psi}$ — по параметру разброса z

$$t_{ij} = \int_0^{\infty} \bar{t}_{ij} y(z) dz, \sigma_{ij} = \int_0^{\infty} \bar{\sigma}_{ij} y(z) dz, d_{ij} = \int_0^{\infty} \bar{d}_{ij} y(z) dz, \varepsilon_{ij} = \int_0^{\infty} \bar{\varepsilon}_{ij} y(z) dz, \quad (1.11)$$

где $y(z)$ – плотность распределения предельных упругих деформаций $\tau = \tau_0 + \theta \cdot z$. Различающий параметр z позволяет проследить за изменением предела упругости одного и того же подэлемента при различных условиях испытания (τ_0, θ – зависят от температуры, скорости нагружения и др.).

Выражения (1.1), (1.3), (1.5), (1.7)–(1.11) не содержат ссылки на свойства материала, поэтому справедливы как для описания обратимых, так и необратимых процессов деформирования. На их основе можно построить определяющие уравнения на макроскопическом уровне, если известны определяющие уравнения на микроскопическом уровне.

2. Определяющие уравнения на микроскопическом уровне. В обратимой области деформирования физические уравнения имеют наиболее простой вид

$$\tilde{t}_{ij} = \tilde{C}_{ijnm} \tilde{d}_{nm}, t_{ij} = \left(K - \frac{2}{3} G \right) d_{nn} \delta_{ij} + 2G d_{ij}. \quad (2.1)$$

На основе системы (1.1), (1.3) и (1.5), (1.12) можно вычислить макроскопические константы упругости G, K на основе констант $\tilde{C}_{ijnm}$ элементов структуры. Для однофазных поликристаллических материалов получены простые соотношения [21]

$$\Delta' = \frac{-6(A-1)^2 b \sigma_{ij} e_{ij}}{(3+2A+5Ab)[5+(2+3A)b]} = \text{Extr}, \quad G = C_{44} \frac{5+(2+3A)b}{3+2A+5Ab}, \quad b = \frac{B}{2C_{44}}. \quad (2.2)$$

Из (2.2) следуют формулы для модуля сдвига G и параметра неоднородности B [21]

$$G = G_M = \sqrt{G_V G_R}, \quad G_V = C_{44} \frac{3A+2}{5A}, \\ G_V = C_{44} \frac{5}{2A+3}, \quad b = \frac{B}{2C_{44}} = \sqrt{\frac{2A+3}{A(3A+2)}}, \quad (2.3)$$

где G_V – модуль сдвига, полученный Войгтом [22] в 1928 году в рамках приближения $\tilde{d}_{ij} = d_{ij}$; G_R – модуль сдвига, полученный Рейсом [23] в 1929 году в рамках приближения $\tilde{t}_{ij} = t_{ij}$.

В необратимой области деформирования физические уравнения имеют более комплексную структуру. Локальные законы необратимого деформирования статистического типа, предложенные другими авторами, связываются между собой только соотношениями типа (1.5). На самом деле под действием направленного распределения макроскопических напряжений во всем конгломерате и в ближайших материальных частицах происходит некоторая потеря индивидуальности локального элемента. Принципа осредненных связей распространяется не только на кинематические уравнения связей флуктуаций напряжений и деформаций (1.3)–(1.5), но и на параметры состояния [16,18]. Подэлементы в конгломерате не могут деформироваться сами по себе, а согласованным образом. Явление самосогласования процессов необратимого деформирования в рамках принципа осредненных связей представляется

в виде закона об одинаковой направленности процессов необратимого деформирования подэлементов в конгломерате [18]

$$\frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{p}} = \frac{dp_{ij}}{dp}, \quad \bar{p} = \sqrt{\bar{p}_{ij}\bar{p}_{ij}}, \quad p_{ij} = \langle \bar{p}_{ij} \rangle \quad (2.4)$$

и условием работы подэлементов за пределами упругости (условия текучести) [18]

$$\bar{e}_{ij} \frac{d\bar{p}_{ij}}{d\bar{\lambda}} = \tau(z, \gamma, T, s) + \bar{r} \frac{d\bar{p}}{d\bar{\lambda}}, \quad d\bar{\lambda} = \sqrt{d\bar{p}_{ij}d\bar{p}_{ij}},$$

$$\gamma = \frac{1}{\Psi'} \int_0^{\Psi'} \sqrt{\dot{\bar{p}}_{ij}\dot{\bar{p}}_{ij}} d\Psi, s = \langle \bar{s} \rangle, \quad (2.5)$$

где Ψ' — текущий вес необратимо деформированных подэлементов, $\bar{r}$ — трансляционное упрочнение подэлемента, γ — осредненная скорость необратимой деформации в подмножестве подэлементов деформируемых за пределами упругости, T — температура, $s = \langle \bar{s} \rangle$ — структурный параметр, характеризующий осредненное изотропное упрочнение подэлементов. Таким образом, влияние процесса самосогласования процессов необратимого деформирования на отклик подэлементов в конгломерате отражается путем простой замены локальных параметров состояния в физических законах подэлементов на их средние значения.

Закон об одинаковой направленности процессов необратимого деформирования подэлементов в конгломерате (2.4) и условие текучести (2.5) дополнены постулатом [18], согласно которому в подмножестве необратимо деформированных подэлементов в каждый момент времени существует хотя бы один подэлемент $z = z^*$, в котором

$$\bar{e}_{ij}(z^*, \dots) = \tau(z^*, \dots) \frac{dp_{ij}}{d\bar{\lambda}} + a\bar{p}_{ij}(z^*). \quad (2.6)$$

Равенства (2.4) следует рассматривать как условие о допустимых формах траекторий необратимых деформаций подэлементов в конгломерате. Это принципиальный новый закон движения локальных деформаций резко отличается от классических подходов, связанных с наличием поверхности текучести [15, 18]. В связи с этим изменяется понятие критерия текучести (2.5). На основе (2.4)–(2.6) и диаграмм деформирования при пропорциональном нагружении, перечисленные в водной части эффекты деформирования при сложном нагружении описываются естественным образом.

При построении модели следует выполнить и требование единственности решения задачи представления реального материала в модели. Для этого необходимо установить структуру зависимости $\tau(z, \gamma, T, s)$. В работе [16] был сформулирован закон центрального приращения, согласно которому предельные упругие деформации подэлементов можно представить в виде суммы двух независимых частей

$$\tau(z, \gamma, T, s) = \tau_*(z, \gamma, T) + s, \quad (2.7)$$

где $\tau_{\bullet}(z, \gamma, T)$ – предельные упругие деформации подэлементов в структурно стабильном состоянии; s – приращение предельных упругих деформаций подэлементов в результате изменения структуры при необратимом деформировании. Следуя рекомендациям [9, 16] предельные упругие деформации подэлементов в структурно стабильном состоянии представим в виде

$$\tau_{\bullet}(z, \gamma, T) = \tau_0(\gamma, T) + \theta(\gamma, T)z, \quad (2.8)$$

где $\tau_0(\gamma, T)$ – наименьший предел упругости в системе подэлементов, $\theta(\gamma, T)$ – параметр, влияющий на форму диаграммы деформирования материала.

Для более полного понимания сути исследуемой в работе трехуровневой конститутивной модели ограничимся случаем пропорционального нагружения

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon} = \frac{p_{ij}}{p}, \quad \sigma = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}, \quad p = \sqrt{p_{ij}p_{ij}}. \quad (2.9)$$

Если к (20) добавить допущение об упругой изотропии подэлементов, выражение (5) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}}{2G} - \frac{\sigma}{2G} &= \bar{e} - e = \frac{b'}{1+b'}(p - \bar{p}), \\ e &= \sqrt{e_{ij}e_{ij}}, \quad \bar{e} = \sqrt{\bar{e}_{ij}\bar{e}_{ij}}, \quad b' = B'/2G. \end{aligned} \quad (2.10)$$

На основе (16) (18)–(20), на участке линейного упрочнения подэлементов, получим следующие формулы для модулей обратимых и необратимых деформаций

$$\begin{aligned} \bar{e}(z, z', b) &= \frac{\bar{\sigma}(z, z', b)}{2G} = \begin{cases} \theta \frac{(1-\chi)bz' + \chi(1+b)z'}{b+\chi} + \tau_0, & z \leq z', \\ \theta z + \tau_0, & z > z', \end{cases} \\ \bar{p}(z, z', b') &= \begin{cases} \theta \frac{(1-\chi)(1+b')(z'-z)}{b'+\chi}, & z \leq z', \\ 0, & z > z', \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где χ – коэффициент линейного упрочнения подэлементов. Параметр z' разделяет зоны обратимо и необратимо деформированных подэлементов. Согласно (2.8), (2.10) параметр z' выражается через наблюдаемые макроскопические величины

$$\theta z' + \tau_0 = e + \frac{b'}{1+b'}p. \quad (2.12)$$

При пропорциональном нагружении слагаемое, связанное с изотропным упрочнением, не влияет на макроскопические процессы деформирования, поэтому при записи формул (2.11) пренебрегли.

Подставляя (2.11) в (1.12) и интегрируя полученные выражения, установим зависимость между макроскопическими модулями девиаторов обратимых и необратимых деформаций в следующем параметрическом виде

$$p(z', b') = \frac{(1 - \chi)(1 + b')\theta}{b' + \chi} \varphi(z'), \quad \varphi(z') = \int_0^{z'} (z' - z) y(z) dz, \quad (2.13)$$

$$e(z', b') = \theta \left(z' - \frac{(1 - \chi)b'}{b' + \chi} \varphi(z') \right) + \tau_0. \quad (2.14)$$

3. Определение параметров неоднородности полей напряжений и деформаций. В формулах (1.5), (1.7), (2.12)–(2.14) фигурируют неизвестные параметры $B, B' = 2Gb'$, которые отражают неоднородности распределения напряжений и деформаций. Для определения этих параметров в связанной подстановке необходимо построить выражение для несоответствия мер (1.8), которая согласно (1.9) складывается из двух составляющих. Как и в работе [21] будем полагать, что выражение для несоответствия (2.2) остается справедливой и в необратимую область деформирования. Для составляющей несоответствия Δ'' (1.9) с учетом (21) получим

$$\Delta'' = 2G \frac{b'}{(1 + b')^2} \left[\langle \bar{p} \rangle^2 - \langle \bar{p}^2 \rangle \right], \quad \bar{p}^2 = \bar{p}_{ij} \bar{p}_{ij}. \quad (3.1)$$

Если экстремум несоответствия мер рассматривать не в связанной подстановке, полагая

$$\Delta' = \left\langle \langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{e}_{ij} \rangle_{\Omega} - \bar{\sigma}_{ij} \bar{e}_{ij} \right\rangle_{\Psi} = \text{Extr}, \quad \Delta'' = \langle \bar{\sigma}_{ij} \bar{e}_{ij} \rangle_{\Psi} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \text{Extr},$$

тогда параметр B можно вычислить на основе (2.3). Для несоответствия Δ'' из (3.1) с учетом (2.11), (2.13) получим выражение [17, 18]

$$\Delta'' = -2 \frac{(1 - \chi)b' u_p}{(b' + \chi)(1 + b')} = \text{Extr}, \quad u_p = \int p d\sigma - \frac{G\chi}{1 - \chi} p^2. \quad (3.2)$$

Так как величина u_p определяется на основе экспериментальных диаграмм материала, при нахождении экстремального значения несоответствия Δ'' , предполагается $u_p = \text{const}$. В этом случае из (3.2) следует формула, полученная в [17, 18]

$$b' = \sqrt{\chi}, \quad B' = 2G\sqrt{\chi} = \sqrt{2G \cdot 2G_0}, \quad (3.3)$$

где константа $\chi = G_0/G$ определяется на основе диаграмм деформирования элемента тела на линейных участках упрочнения.

Рассмотрим метод определения параметров b' и b в предположении $b' = k \cdot b$, $k = \text{const}$. Подставляя (2.2) и (3.2) в (1.8), получим

$$\frac{-6(A - 1)^2 b u_e}{(3 + 2A + 5Ab)[5 + (2 + 3A)b]} - 2 \frac{(1 - \chi) k b u_p}{(k b + \chi)(1 + k b)} = \text{Extr}, \quad (3.4)$$

где

$$u_e = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = 2Ge^2 = 2G \left[\tau_o + \theta \int_0^{z'} zy(z) dz + \theta z' \left(1 - \int_{z'}^{\infty} zy(z) dz \right) \right]^2, \quad (3.5)$$

$$u_p = 2G \frac{(1-\chi)(1+kb)\theta^2}{kb+\chi} \left[\int_0^{z'} (z'-z)^2 y(z) dz - \left(\int_0^{z'} (z'-z) y(z) dz \right)^2 \right]. \quad (3.6)$$

Дифференцируя (3.4) по параметру b при условии $u_e = \text{const}$, $u_p = \text{const}$, установим уравнение связующая неоднородности деформирования и нагружения в представительном объеме с физическими характеристиками материальных частиц и подэлементов

$$Z(b, A, \chi) = V(z', z_o), \quad z_o = \tau_o / \theta, \quad (3.7)$$

где

$$Z(b, A, \chi) = \frac{(\chi + kb)^{1.5} (1 + kb)^{0.5}}{(5Ab + 3 + 2A)[5 + (2 + 3A)b]} \sqrt{\frac{30(A-1)^2 (3 + 2A - A(2 + 3A)b^2)}{(1-\chi) \cdot k \cdot ((kb)^2 - \chi)}}, \quad (3.8)$$

$$V(z', z_o) = \frac{\sqrt{\int_0^{z'} (z'-z)^2 y(z) dz - \left(\int_0^{z'} (z'-z) y(z) dz \right)^2}}{z_o + \int_0^{z'} zy(z) dz + z'(1 - \int_0^{z'} y(z) dz)}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\sqrt{\chi}}{k} \leq b \leq \sqrt{\frac{3 + 2A}{A(2 + 3A)}}, \quad z_o = \frac{\tau_o}{\theta}. \quad (3.10)$$

В дальнейшем выражение (3.7) назовём уравнением связанности масштабных уровней, а параметр k — коэффициент связанности. Отметим, что в левой части уравнения связи масштабных уровней (3.7) фигурируют механические характеристики материальных частиц (функция $Z(A, \chi, b)$): параметр анизотропии A и коэффициент упрочнения χ , а в правой части — характеристики системы подэлементов (функция $V(z', \tau_o, \theta)$). Из (3.7)–(3.10) следует, что параметр неоднородности b в связанной подстановке экстремума несоответствия мер на уровнях материальных частиц и систем подэлементов изменяется в процессе необратимого деформирования. Если плотность распределения случайного параметра z известна, тогда для заданных A, χ из (3.7)–(3.10) определим z' для каждого значения параметра b , а затем из (2.13) установим зависимость между макроскопическими напряжениями и деформациями. Если в качестве функции плотности распределения предельных упругих деформаций $y(z)$ ($\tau = \tau_o + \theta \cdot z$) примем выражение

$$y(z) = \Theta^2 z e^{-\Theta \cdot z}, \quad (3.11)$$

то после интегрирования в (3.5) получим для функции $\varphi(z')$ формулу

$$\varphi(z') = \frac{\Theta z' - 2 + (2 + \Theta z') e^{-\Theta \cdot z'}}{\Theta}, \quad (3.12)$$

где Θ — константа материала, независимая от условий испытания.

Численный анализ соотношений (3.7) с учетом (3.9) и (3.11) показывает, что $V(z', z_0)$ можно с достаточной точностью аппроксимировать выражением

$$V(z, z_0) \approx V'(z, z_0) = \frac{c(z_0)z^n}{1 + d(z_0)z^n}, \quad (3.13)$$

$$c(z_0) = \frac{V(z_1, z_0)V(z_2, z_0)(z_1^n - z_2^n)}{[V(z_1, z_0) - V(z_2, z_0)](z_1 z_2)^n}, \quad d(z_0) = \frac{V(z_2, z_0)z_1^n - V(z_1, z_0)z_2^n}{[V(z_1, z_0) - V(z_2, z_0)](z_1 z_2)^n}. \quad (3.14)$$

Сопоставление функций $V(z, z_0)$ и $V'(z, z_0)$ проводилось при $n = 1.5$, $z_1 = 10^{-3}$, $z_2 = 7 \cdot 10^{-3}$, $z_0 = 5 \cdot 10^{-4}$, $z_0 = 10^{-3}$. Подставляя (3.13) в (3.7), установим простую аналитическую зависимость для переменной z'

$$z'(b, z_0) = \left[\frac{Z(b, A, \chi)}{c(z_0) - d(z_0)Z(b, A, \chi)} \right]^{2/3}. \quad (3.15)$$

Для упрощения записей, аргументы A, χ при функции $z'(b, z_0)$ $z'(b, z_0, A, \chi)$ не указаны.

Из анализа (3.8) следует весьма сложный вид функции $M(A, \chi, b)$. На рис. 1 представлены диаграммы $Z(b, A, \chi) \rightarrow Z(b, A)$ при двух значениях параметра анизотропии A и четырёх значениях коэффициента упрочнения χ . Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\Theta = 800$, $\tau_0 = 10^{-3}$, $k = 0.7$; $\chi_1 = 4 \cdot 10^{-3}$, $\chi_2 = 10^{-3}$, $\chi_3 = 10^{-3}$ — $A = 1.5$ (штрих пунктирные линии); $\chi_1 = 4 \cdot 10^{-3}$, $\chi_2 = 6.6 \cdot 10^{-4}$, $\chi_3 = 10^{-3}$ — $A = 3$ (сплошные линии). Согласно представленным на рис. 1 диаграмм, коэффициент упрочнения оказывает не только количественное, но и качественное влияние на поведение модели. Функция $Z(A, \chi, b)$ в интервале $\chi_2 < \chi \leq \chi_1$ имеет только одну точку перегиба, а в интервале $\chi_3 \leq \chi < \chi_2$ — две точки перегиба. При двух точках перегиба на графике обнаруживаются два экстремума. Кроме того, существует и критическое состояние ($\chi = \chi_2$), в котором

$$\frac{\partial Z(b, A, \chi)}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z(b, A, \chi)}{\partial b^2} = 0. \quad (3.16)$$

На основе (3.16) можно установить границу раздела качественных изменений свойств модели $\chi_* = \chi(A)$. Если коэффициент упрочнения $\chi > \chi_*$ тогда диаграмма деформирования, построенная на основе (2.13), (3.12) имеет монотонный вид. При $\chi < \chi_*$ на диаграмме деформирования появляется зуб текучести, а при $\chi = \chi_*$ — площадка текучести.

Анализ (3.15) с учетом (3.8), (3.14) показывает резкое уменьшение параметра b' , при переходе от обратимого деформирования к необратимому деформированию. Относительные флуктуации деформаций увеличиваются с ростом p , а относительные флуктуации напряжений уменьшаются. При $\chi \leq \chi_*$ падение b' на начальном этапе течения настолько резкое, что макроскопическая деформация растет при постоянном или даже при снижении напряжения. На

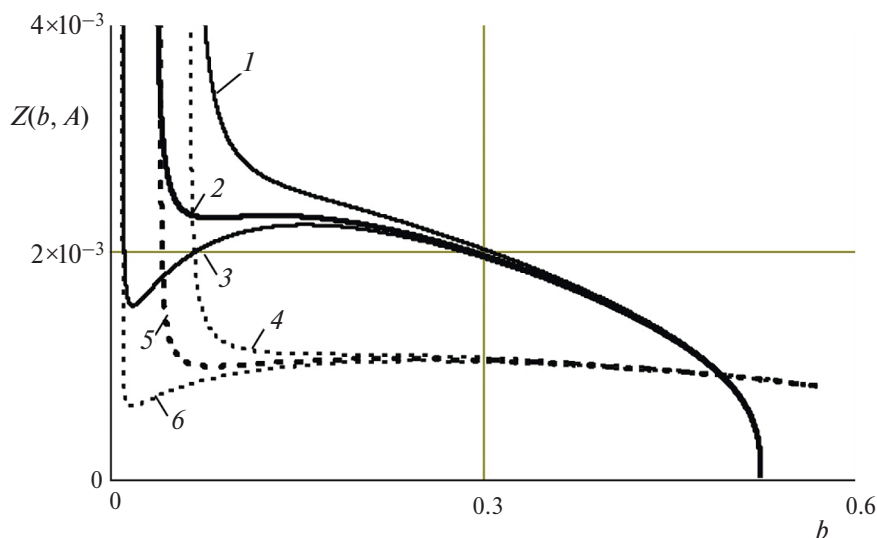


Рис. 1. Влияние коэффициента упрочнения на взаимосвязь масштабных уровней.

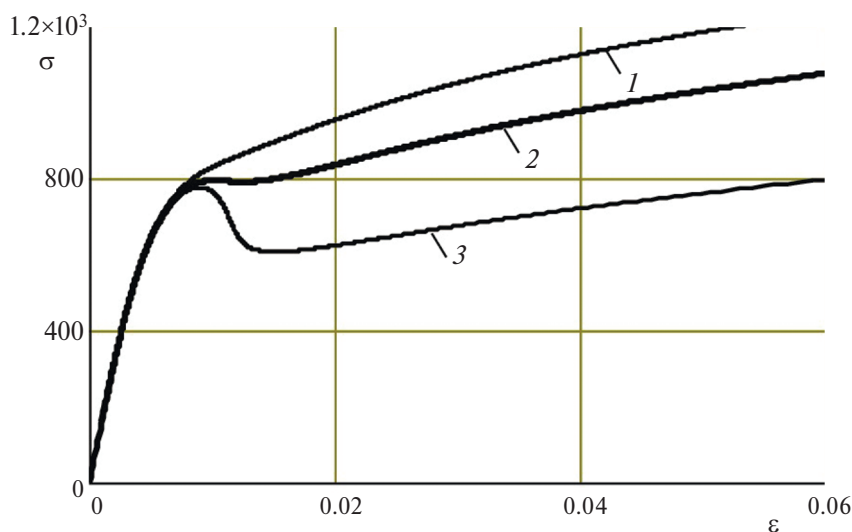


Рис. 2. Влияние коэффициента упрочнения на вид диаграмм деформирования, σ [МПа].

рис. 2 представлены диаграммы деформирования, рассчитанные на основе (2.13), (2.14) с учетом (3.15), для трех значений коэффициента упрочнения: $\chi_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ (кривая – 1), $\chi_2 = 10^{-3}$ (кривая – 2), $\chi_3 = 10^{-4}$ (кривая – 3). Остальные параметры имеют следующие значения: $\tau_0 = 10^{-3}$, $\Theta = 500$, $A = 3$, $k = 1$, $C_{44} = 11.6 \cdot 10^4$ МПа, $z_0 = 10^{-3}$. Заметим, что при замене переменную z' в (2.13), (2.14) на $z'(b, z_0)$ (3.15), имеем: $p(z', b') \rightarrow p(b')$, $e(z', b') \rightarrow e(b')$, $\varphi(z') \rightarrow \varphi(b')$.

4. Анализ общей зависимости для максимальных нормальных напряжений в системе подэлементов. Представляя шаровые тензоры деформаций в виде обратимых $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\sigma}_0/3K$ и необратимых частей $\bar{p}_0$, постулат об ортогональности тензоров флуктуаций напряжений и деформаций (2) примет вид

$$(\bar{\sigma}_0 - \sigma_0)^2 + K(\bar{\sigma}_0 - \sigma_0)(\bar{p}_0 - p_0) = \frac{K}{3B}(\bar{\sigma} - \sigma)^2, \quad \bar{\varepsilon}_0 = \frac{\bar{\sigma}_0}{K} + \bar{p}_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{K} + p_0. \quad (4.1)$$

Предполагая в (4.1), что необратимое изменение объема пропорционально длине траектории необратимой деформации: $\bar{p}_0 = k_0 \bar{p}$, $\bar{p}_0 = \langle \bar{p}_0 \rangle = k_0 p$, получим [19]

$$\bar{\sigma}_0 - \sigma_0 = M(\bar{\sigma} - \sigma), \quad (4.2)$$

$$M = \frac{(1+b)(1+\mu)}{2b(1-2\mu)} \left(-k_0 \pm \sqrt{k_0^2 + \frac{4(1-2\mu)b}{3(1+\mu)(1+b)^2}} \right), \quad (4.3)$$

где μ — коэффициент Пуассона, k_0 — константа материала. Согласно [19] выбор знака в (4.3) имеет принципиальное значение. При знаке „+” подэлементы с малыми значениями пределов текучести необратимо деформируются в условиях действия высоких растягивающих объемных напряжений, а подэлементы с большими значениями пределов текучести подвергаются действиям сжимающих объемных напряжений. При отрицательном знаке в (4.3) наблюдается обратная картина.

Известно, что объемные необратимые деформации металла малы и являются эффектами второго порядка по сравнению с упругим и поэтому выражение для параметра M можно упростить

$$M = \pm \sqrt{\frac{(1+\mu)}{3(1-2\mu)b}}. \quad (4.4)$$

Флуктуации объемных напряжений в системе подэлементов (4.1) с учетом (4.4) можно ещё выразить через флуктуации модулей девиаторов необратимых деформаций

$$\bar{\sigma}_0(b, z, z', \tau_o, z_o) = \sigma_0 \pm \frac{\sqrt{2GKb}}{1+b} [p(b, z', \tau_o, z_o) - \bar{p}(b, z, z', \tau_o, z_o)]. \quad (4.5)$$

Согласно (4.5) объемные напряжения в упруго деформированных подэлементах ($\bar{p}(z', z', b, \tau_o, z_o) = 0$) линейно зависят от макроскопической необратимой деформации $p = p(z', b, \tau_o, z_o)$. Коэффициент пропорциональности аннулируется только в предельных вариантах $b = \infty$ (однородное деформированное состояние), $b = 0$ (однородное напряженное состояние) и принимает наибольшее значение при $b = 1$. Как следует из (2.3) значение $b = 1$ соответствует чисто упругому поведению изотропного тела.

Главные значения девиаторов напряжений $\bar{\sigma}_1$ в подэлементах можно выразить через модули $\bar{\sigma}$ и параметром вида девиатора d

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\sigma}_0 + \bar{\sigma}_1, \quad \bar{\sigma}_1 = D(d)\bar{\sigma}, \quad D(d) = 1/\sqrt{2(1+d+d^2)}, \quad d = \bar{\sigma}_3/\bar{\sigma}_1 = \sigma_3/\sigma_1. \quad (4.6)$$

Отметим, что виды девиаторов в подэлементах и элементе тела совпадают, поэтому параметр d принимает одинаковые значения для всего множества подэлементов и выражается через макроскопические величины. На основе (4.5), (4.6) в работе [19] получено общее выражение для максимальных нормальных напряжений $\bar{\tau}_1$ в системе подэлементов.

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1(b, z, z', \tau_o, z_o) = & \sigma_0 + D(d)\bar{\sigma}(b, z, z', \tau_o, z_o) \pm \\ & \pm \frac{\sqrt{2GKb}}{1+b} [p(b, z', \tau_o, z_o) - \bar{p}(b, z, z', \tau_o, z_o)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Формулы (4.1)–(4.7) были установлены и исследованы (при допущении $b = \text{const}$) в [19]. В рамках трехуровневой конститутивной модели, согласно (3.15) параметр b становится зависящим от z' и характеристик материала. При этом z' выражается через b и системы констант материала A, χ, τ_o, z_o в явном виде. Тогда формулы для необратимых деформаций и модуля девиатора тензора напряжений можно представить в удобном для анализа виде

$$\begin{aligned} p(b, \tau_o, z_o) = & \frac{\tau_o}{z_o} \frac{(1-\chi)(b+1)}{b+\chi} \varphi(b, z_o), \\ \varphi(b, z_o) = & \frac{\Theta z'(b, z_o) - 2 + (2 + \Theta z'(b, z_o))e^{-\Theta z'(b, z_o)}}{\Theta}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\sigma(b, \tau_o, z_o) = 2G\tau_o \left[1 + \frac{z'(b, z_o)}{z_o} - \frac{(1-\chi)b\varphi(b, z_o)}{(b+\chi)z_o} \right], \quad (4.9)$$

$$z'(b, z_o) = \left[\frac{Z(b, A, \chi)}{c(z_o) - d(z_o)Z(b, A, \chi)} \right]^{2/3}. \quad (4.10)$$

Функция $Z(b, A, \chi)$ при заданных значениях параметров A, χ определяется на основе формулы (3.8), а коэффициенты $c(z_o), d(z_o)$ из (3.14). Задавая различные значения параметра b в интервале неравенства (4.4) из (4.10) находим переменную $z'(b, z_o)$, а затем из (4.8)–(4.10) устанавливаем зависимость $\sigma \sim p$.

Детальное исследование формулы (4.7) в предположении $b = \text{const}$ проводилось в работе [19]. Анализ (4.7) с учетом формул (3.3), (4.8), (4.9) показывает, что качественные закономерности изменения наибольших нормальных напряжений $\bar{\tau}_1$ в системе подэлементов, установленные в [19] сохраняются и при $b \neq \text{const}$. В зависимости от знака корня уравнения ортогональности (4.4) возможны два варианта: наибольшее растягивающее напряжение возникает в граничащем подэлементе, разделяющем текущую зону необратимо деформированных подэлементов от обратимой зоны ($M > 0$) или в подэлементе с наименьшим пределом упругости ($M < 0$). Показано, что в случае $M > 0$ в каждом подэлементе наибольшее нормальное напряжение возникает в момент наступления текучести, затем наблюдается уменьшение с ростом

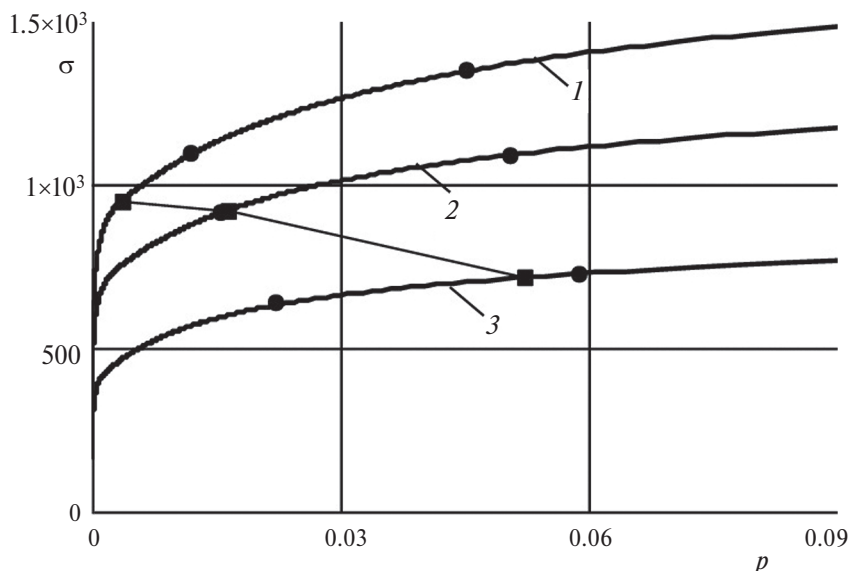


Рис. 3. Диаграммы деформирования при различных условиях испытания, σ [МПа].

необратимой деформации. В данном варианте опасность разрушения подэлемента минует после наступления текучести. В зависимости от прочностных характеристик подэлементов при $M > 0$ возможны все варианты разрушения. Если $M < 0$, возможно только вязкое разрушение.

Численные исследования поведения модели проведем для гипотетического материала, диаграммы деформирования которого при трех условиях испытания (трех разных: скоростей деформирования, температур, размеров зерна). На рис. 3 представлены (сплошные линии) диаграммы деформирования, построенные на основе (4.6)–(4.10) при следующих характеристиках материала: на уровне кристалла – $A = 2.6$, $K = 17.3 \cdot 10^4$ МПа, $C_{44} = 11.6 \cdot 10^4$ МПа и на уровне систем подэлементов – $\Theta = 500$, $\tau_0 = 10^{-3}$, $2 \cdot 10^{-3}$, $2.5 \cdot 10^{-3}$; $z_\infty = 1 \cdot 10^{-3}$, $0.67 \cdot 10^{-3}$, $0.5 \cdot 10^{-3}$, $\chi = 4 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 4 представлены диаграммы предельных растягивающих напряжений в системе подэлементов для материала диаграмма деформирования, у которого совпадает с диаграммой – 3 на рис. 3. Сплошные диаграммы соответствуют положительному корню уравнения ортогональности, а прерывистые – отрицательному. Предельная диаграмма изменения $\bar{\tau}_1(z, z')$ совпадает с диаграммами нагружения обратимо деформированных подэлементов $z = z'$ если $M > 0$ (кривая – 1) и с диаграммой нагружения подэлемента с наименьшим пределом текучести $z = 0$, если $M < 0$ (кривая – 5). Как уже было отмечено при $M > 0$ наибольшее нормальное напряжение в подэлементе возникает в момент наступления текучести. Диаграммы деформирования подэлементов с исходными пределами текучести: $\tau = \tau_0(1 + z/z_\infty) = 0.0025, 0.0041, 0.0085$ для варианта $M > 0$ на рис. 4 обозначены соответственно цифрами 2, 3, 4, а для $M < 0$ – 6, 7, 8. Наибольшие нормальные напряжения в подэлементах

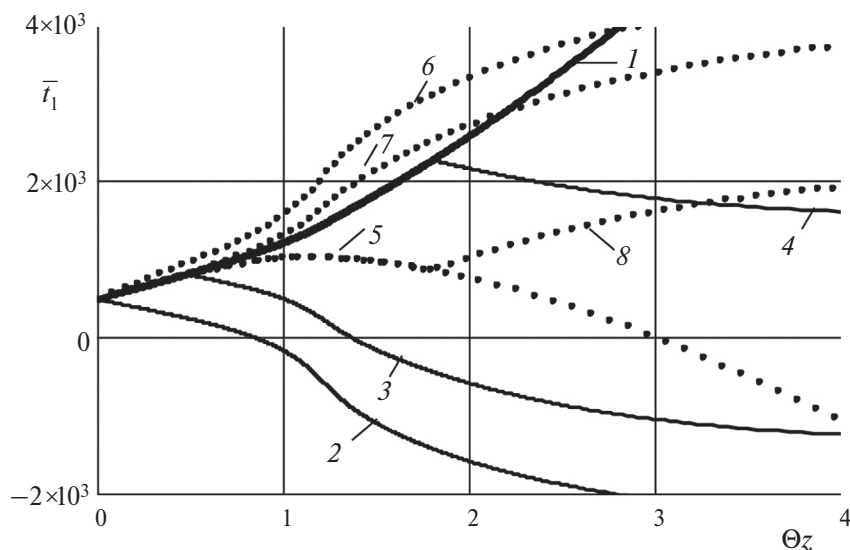


Рис. 4. Предельные растягивающее напряжение в системе подэлементов, $\bar{\tau}_1$ [МПа].

с малыми значениями пределов текучести изменяются по более сложным законам (кривые — 2, 3 при $M > 0$ и 6, 7 при $M < 0$), чем в подэлементах с большими значениями пределов текучести (кривая — 4 при $M > 0$ и кривая — 8 при $M < 0$). С ростом необратимой деформации уменьшение наибольшего нормального напряжения в часть подэлементов сопровождается изменением знака. Эффект циклического деформирования, в часть подэлементов, при монотонном макроскопическом нагружения, открытый в работе [19] демонстрирует с одной стороны степень сложности взаимодействий в представительном объеме, а с другой — сложные явления и процессы описываются на основе простых и ясных принципов. При $M < 0$ напряжения в обратимо деформированных подэлементах совпадают с текущим напряжением в подэлементе с минимальным пределом текучести. После наступления текучести в данном подэлементе нормальное напряжение $\bar{\tau}_1(z, z')$ растет. Интенсивность роста $\bar{\tau}_1(z, z')$ с увеличением необратимой деформации затухает, стремясь к постоянному значению. Следовательно, поведение модели в случаях $M > 0$ и $M < 0$ качественно различаются. В силу этого спектр возможности исследуемой модели значительно шире, чем у других многоэлементных моделей.

5. Описание эффекта снижения пластичности с увеличением прочностных характеристик материала. Предельные диаграммы изменения наибольшего нормального напряжения в системе подэлементов определяются на основе (4.7) при условии $z = z'$. В этом случае согласно (2.11)

$$\bar{\sigma}(z', z') = 2G\tau_0 \left(1 + \frac{z'}{z_0} \right) = \sigma + \frac{2Gb}{1+b} p, \quad \bar{p}(z', z') = 0,$$

и формула (4.7) для варианта модели $M > 0$ принимает вид

$$\bar{t}_1(b, \tau_o, z_o) = (A + D(d))\sigma(b, \tau_o, z_o) + \frac{2G}{1+b} \left(bD(d) + \sqrt{\frac{Kb}{2G}} \right) p(b, \tau_o, z_o). \quad (5.1)$$

Диаграммы $\bar{t}_1(b, \tau_o, z_o)$ при одноосном растяжении для трех значений системы параметров τ_o, z_o (соответствуют характеристикам диаграмм, представленных на рис. 3) показаны на рис. 5. Кривые, обозначенные одинаковыми цифрами на рис. 3 и 5, соответствуют одинаковым механическим характеристикам материала. Согласно рис. 5 на диаграммах изменения наибольшего нормального напряжения в системе подэлементов выделяются три участка. На начальном этапе необратимого деформирования диаграмма $\bar{t}_1(b, \tau_o, z_o)$ близка к линейной. При значениях $\bar{t}_1(b, \tau_o, z_o) > 2000$ МПа зависимость $\bar{t}_1(b, \tau_o, z_o)$ также близка к линейной. Нелинейный переход от одного участка к другому характеризуется резким падением параметра кинематической связи как на уровне материальных частиц, так и на уровне подэлементов. Если в обратной области деформирования относительные флуктуации напряжений мало отличаются от относительных флуктуаций деформаций, то на начальном участке необратимого течения происходит быстрое уменьшение параметра b . Вследствие этого относительная неоднородность распределения деформаций сильно увеличивается по сравнению с относительной неоднородностью распределения напряжений.

На втором линейном участке роста наибольшего нормального напряжения $\bar{t}_1(b, \tau_o, z_o)$ наклон $d\bar{t}_1/dz'$ уменьшается с ростом пологости диаграммы деформирования, связанный с параметром θ . Если диаграммы деформирования отличаются только начальным пределом текучести τ_o , то диаграммы $\bar{t}_1(b, \tau_o, z_o)$ при различных значениях τ_o параллельны на третьем участке.

Для выявления характера изменения наибольшего нормального напряжения $\bar{t}_1(b, \tau_o, z_o)$ в материале, диаграммы деформирования которого представлены на рис. 3, рассмотрим два состояния $\bar{t}_1 = 2000$ МПа, $\bar{t}_1 = 4000$ МПа, отмеченные кружочками на рис. 5. При данном значении $\bar{t}_1$ определим соответствующие значения переменной $z'(b, z_o)$, а затем из (4.8)–(4.10) найдем координат (σ, p) . Соответствующие значения координат на диаграммах деформирования, представленных на рис. 3, отмечены кружочками. Первые точки на диаграммах деформирования соответствуют состоянию, при котором наибольшее нормальное напряжение в системе подэлементов принимает значение $\bar{t}_1 = 2000$ МПа, а второе напряжению — $\bar{t}_1 = 4000$ МПа. Численные результаты показывают, что точки состояния с одинаковым значением наибольшего нормального напряжения в системе подэлементов на диаграммах $\sigma \sim p$ ложатся на одной прямой. Положение точки состояния на диаграмме деформирования (при заданном $\max \bar{t}_1$) с уменьшением предела текучести смещается в сторону роста необратимой деформации. Выявленный эффект согласуется с установленной в опытах закономерность: с увеличением прочностных характеристик материала пластичность уменьшается.

Факт достижения критического значения $\max \bar{t}_1$ в одном подэлементе или в группе подэлементов предельного состояния ещё не означает разрушение элемента тела. Разрушение каждого подэлемента следует отождествлять с появлением новой микротрещины в представительном объеме. Для разрушения

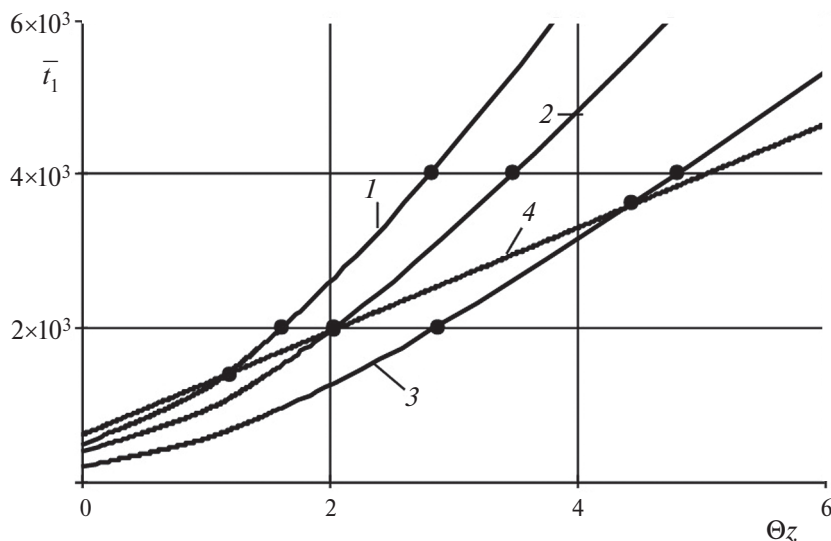


Рис. 5. Диаграммы наибольших растягивающих напряжений в подэлементах, $\bar{\tau}_1$ [МПа].

элемента тела количество микротрещин должно достичь некоторую критическую величину, необходимую для слияния и образования макроскопической трещины, которое приводит к разрушению. Критическую плотность трещин будем связать с весом разрушенных подэлементов. Оценка критического веса разрушенных подэлементов выходит за рамки данной работы. Будем предполагать, что полное разрушение элемента тела происходит при уменьшении веса в пределах: $\Delta\Psi = 0.05 \div 0.1$. Если предполагать, что предельное значение $\max \bar{\tau}_1 = r$ одинаково для всего множества подэлементов, тогда условие разрушения элемента тела можно представить в виде

$$\Psi_5 = 1 - \Psi = \int_{z'(b_0, z_0)}^{\infty} y dz = e^{-\Theta z'(b_0, z_0)} + \Theta z'(b_0, z_0) e^{-\Theta z'(b_0, z_0)} \geq \Delta\Psi \quad (5.2)$$

где b_0 — значение параметра b в момент достижения $\max \bar{\tau}_1$ значения r . Для диаграмм, представленных на рис. 3, при достижении наибольшего нормального напряжения значения $\max \bar{\tau}_1 = 2000$ МПа текущий вес обратимо деформированных подэлементов принимают значения (диаграмма 1 — 0.218, 2 — 0.395, 3 — 0.518). При $\max \bar{\tau}_1 = 4000$ МПа текущий вес обратимо деформированных подэлементов принимают соответствующие значения: 0.048, 0.138, 0.228. Если значение $\max \bar{\tau}_1 = 4000$ МПа совпадает с напряжением отрыва, тогда полное хрупкое разрушение произойдет при достижении на диаграмме — 1 состояния: $\sigma = 1340$ МПа, $p = 0.045$, а на диаграмме — 2 состоянии: $\sigma = 1082$ МПа, $p = 0.051$. Когда нагружение элемента тела соответствует условиям диаграммы — 3, в состоянии $\max \bar{\tau}_1 = 4000$ МПа перестанут воспринимать внешнюю нагрузку только группа подэлементов с общим весом 0.048 (4.8%). В результате модуль девиатора тензора напряжения (на диаграмме — 3) сначала упадет с $\sigma = 721$ МПа

до $\sigma = 689$ МПа, а затем процесс деформирования будет продолжаться с новым ростом напряжений.

Рассмотрим более общее предположение относительно критического значения напряжения отрыва подэлементов. Согласно рекомендации [19] критическое значение напряжения отрыва в отдельном подэлементе следует коррелировать с его пределом текучести. В линейном приближении условие разрушения подэлемента можно представить в виде

$$2G(r + hz) \geq R(z), \quad (5.3)$$

где параметры r и h зависят от накоплений повреждений в подэлементе. Влияние повреждаемости на r и h в данной работе не рассматривается.

В случае, когда предел прочности подэлемента увеличивается с ростом его предела текучести, картина разрушения элемента тела претерпевает существенные изменения. При $h \neq 0$ внезапное хрупкое разрушение подэлементов невозможно. В рассматриваемом варианте ($M > 0$) происходит последовательное хрупкое разрушение подэлементов (предельное состояние достигается в упругом состоянии подэлемента). Разрушение элемента тела развивается как процесс накопления разрушенных подэлементов.

Пусть при $z' = z_*$ выполняется условие разрушения в подэлементе $z = z_*$. В силу непрерывности функции (5.3) дальнейший рост макроскопической деформации приводит к выполнению условия разрушения в новых подэлементах. Обозначим через z'_* текущее значение z в подэлементе, разделяющим зону разрушенных подэлементов от упруго деформированных подэлементов. Тогда при расчете напряжений и деформаций подмножество подэлементов $z_* \leq z \leq z'_*$ следует исключить из анализа. Учитывая это при интегрировании выражений (2.11) по фактору разброса z получим

$$p(z', b) = \begin{cases} \int_0^{z'_*} \bar{p}(z, z', b) y(z) dz, & z' \leq z_*, \\ \int_0^{z_*} \bar{p}(z, z', b) y(z) dz, & z' > z_*, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\sigma(z', b) = 2G \begin{cases} \int_0^{z'_*} \bar{e}(z, z', b) y(z) dz + \bar{e}(z', z', b) \int_{z'_*}^{\infty} y(z) dz, & z' \leq z_*, \\ \int_0^{z_*} \bar{e}(z, z', b) y(z) dz + \bar{e}(z', z', b) \int_{z'_*}^{\infty} y(z) dz, & z' > z_*, \end{cases} \quad (5.5)$$

Взаимосвязь между переменными z'_* и z' получено в виде

$$z'_* = z_* + \frac{1}{2Gh} (\bar{t}_1(b, z') - \bar{t}_1(b, z_*)). \quad (5.6)$$

На рис. 6 представлены численные результаты полученные на основе (5.4)–(5.6) для пяти условий испытания гипотетического материала: $\Theta = 800$, $\chi = 0.01$, $A = 2.6$, $G = 8.1 \cdot 10^4$ МПа, $K = 1.8 \cdot 10^5$ МПа; $\tau_0 = 10^{-3}(1), 1.4 \cdot 10^{-3}(2), 1.7 \cdot 10^{-3}(3), 2.3 \cdot 10^{-3}(4), 3 \cdot 10^{-3}(5)$; $\theta = 1(1), 1.2(2), 1.5(3), 1.7(4), 2(5)$. Диаграммы на рис. 6 различаются только числовыми значениями параметров τ_0 , $\theta =$

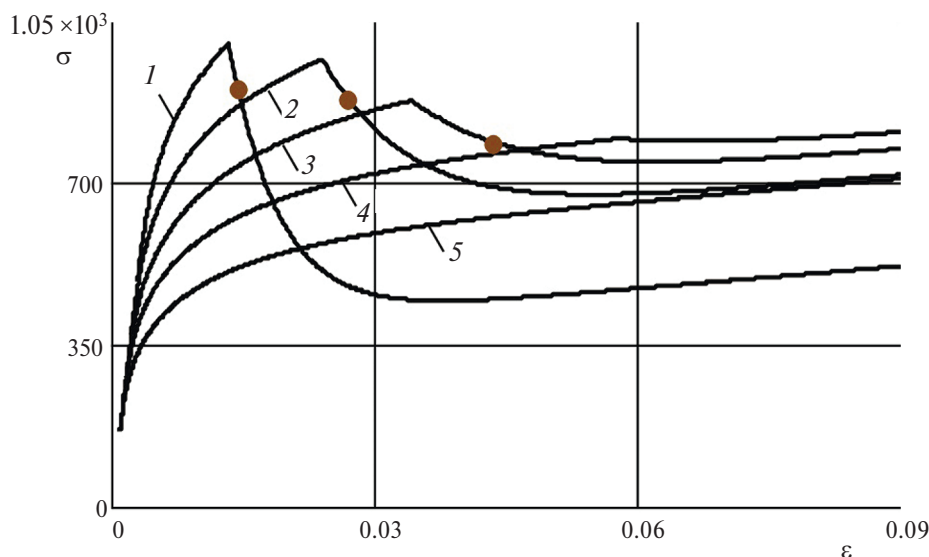


Рис. 6. Влияние условий разрушения подэлементов на диаграммы деформирования, σ [МПа].

$= \tau_0/z_0$. К причинам изменения этих параметров могут относиться скорость деформирования, температура испытания, размер зерна. В скобках указан номер диаграммы, рассчитанный при соответствующих значениях параметров τ_0 , θ . Точками на рис. 6 отмечены состояния, в которых количество разрушенных подэлементов достигло значение $\Delta\psi = 0.1$. Предполагается, что при таком весе (10%) образуется макротрещина, которая приводит к разрушению элемента тела. Диаграммы деформирования, представленные на рис. 6, рассчитаны в предположении отсутствия эффекта слияния и образования макротрещин. При абстрагировании от свойств трещин процесс разрушения подэлементов приводит к падению напряжения до определенного уровня, а затем наблюдается новый рост σ .

На основе (3.4), (5.1) и (5.3) установим критерий начала процесса разрушения. Параметр разброса z в формуле (5.3) можно выразить (в граничащем подэлементе) с помощи (3.4) через макровеличины

$$R = 2G \left(r - z_0 h + \frac{hz_0}{\tau_0} e + \frac{bhz_0 \cdot p}{(1+b)\tau_0} \right). \quad (5.7)$$

Учитывая (5.7) в (5.1) после несложных преобразований, установим условие начала процесса квазихрупкого разрушения

$$\begin{aligned} & \left(c + D(d) - \frac{hz_0}{\tau_0} \right) e(b, \tau_0, z_0) + \\ & + \left(bD(d) - \frac{hz_0}{\tau_0} b + \sqrt{\frac{(1+\mu)b}{3(1-2\mu)}} \right) \frac{p(b, \tau_0, z_0)}{1+b} \geq r - z_0 h. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Представление физических формул в безразмерном виде имеет ряд достоинств. Если, например, сравнить диаграммы деформирования с ГЦК и ОЦК-решетками с учетом поправок на модуль сдвига и температуру плавления, то окажется, что диаграммы для большинства металлов с ОЦК-решеткой лежат ниже, чем диаграммы для металлов с ГЦК-решеткой, причем степень упрочнения также существенно ниже. Можно перечислить много других преимуществ.

В условии начала разрушения (5.8) (в дальнейшем назовём критерий прочности) фигурируют три вида параметров: τ_0, z_0 — характеризуют формы диаграмм деформирования (без разрушения); c, d — влияние вида напряженного состояния; h, r — прочность материала. В соответствии с (5.8) критерий прочности представляет линейную функцию модулей тензоров напряжений и необратимых деформаций. Коэффициенты при модулях девиаторов тензоров обратимых e и необратимых деформаций p зависят от вида напряженного состояния и свойства материала. Учитывая, что необратимая деформация определяется на основе равенства $p = \varepsilon - \sigma/2G$, критерий прочности (5.8) можно представить ещё в виде линейной функции модулей девиаторов тензоров напряжений σ и деформации ε . Таким образом, исходя на локальном уровне из критерия наибольшего нормального напряжения, на макроскопическом уровне установили критерий прочности, в котором фигурируют как параметры, отражающие влияние вида напряженного состояния, так и реологические свойства материала (параметры τ_0, z_0 предполагаются зависящими от условий внешнего воздействия). Важно отметить, что в установленном критерием прочности фигурируют только механические характеристики, полученные в опытах на одноосное растяжение.

На основе полученного критерия прочности в виде линейной зависимости между обратимых и необратимых деформаций или напряжений и необратимых деформаций установим следующее фундаментальное свойство: увеличение прочности неминуемо приводит к снижению пластичности. Заметим, что для установления причин снижения пластичности с увеличением предела текучести, нарушения монотонности диаграмм деформирования на начальном этапе необратимого течения, положения о совпадении среднегеометрических значений величин найденные в предельных вариантах с величинами полученных на основе исследуемой модели, априори не закладывают в модель какие-то предпосылки. Подобные эффекты естественным образом вытекают из принципов осредненных связей, ортогональности тензоров флуктуаций напряжений и деформаций и экстремума несоответствия меры.

Влияние вида напряженного состояния на критерий прочности материала (диаграммы деформирования при трех условиях испытания представлены на рис. 3, $r = 0.0038$, $h = 2.56$) исследовалось на примере четырех напряженных состояний: одноосное растяжение ($A = 1/6^{1/2}$, $d = -0.5$); двухосное растяжение ($A = (2/3)^{1/2}$, $d = -2$); одноосное сжатие ($A = -1/(6)^{1/2}$, $d = -2$); двухосное сжатие ($A = -(2/3)^{1/2}$, $d = -2$). Результаты расчетов, выполненные на основе критерия (5.8) с учетом формул (4.8), для материала диаграммы деформирования которого при трех условиях испытания показаны на рис. 3, представлены на рис. 7. Диаграммы $\sigma \sim \varepsilon, -\varepsilon$, отмеченные одинаковыми номерами на рис. 7 и

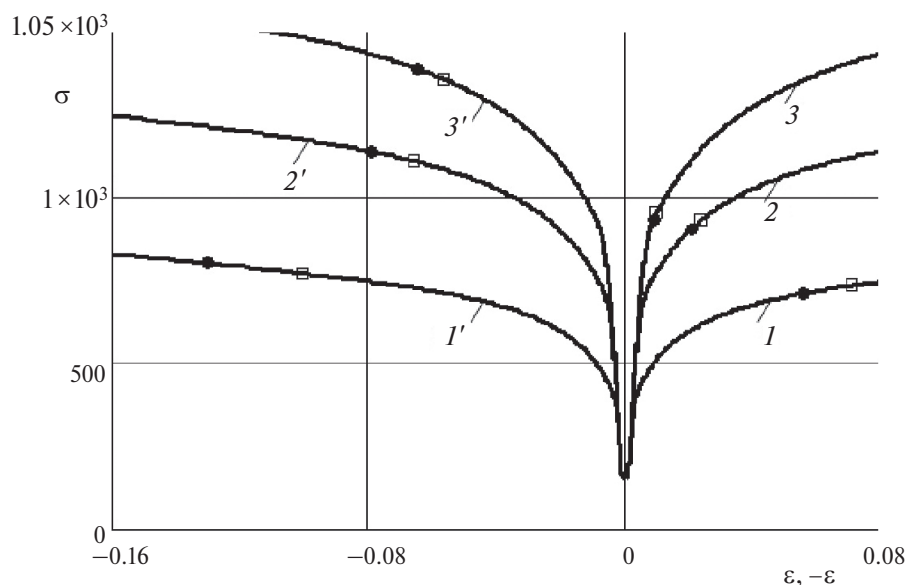


Рис. 7. Влияние вида напряженного состояния на начальный момент разрушения, σ [МПа].

рис. 3 соответствуют одним и тем же значениям параметров состояния τ_0, z_0 . Кружочками на диаграммах $\sigma \sim \epsilon, -\epsilon$ обозначены начальные моменты разрушения (для принятых характеристик прочности материала: $r = 0.0038, h = 2.56$) при одноосном растяжении и сжатии. Квадратиками на рис. 7 обозначены соответствующие состояния при двухосном растяжении и сжатии. На момент начала разрушения оказывают влияние первый инвариант напряжений (параметр $A = \sigma_0/\sigma$) и вид девиатора тензора напряжений ($d = \sigma_3/\sigma_1$). Данные параметры оказывают противоположные эффекты на пластичность материала. В силу этого из рис. 7 видно, что при двухосном растяжении пластичность несколько больше, чем при одноосном растяжении, а при двухосном и одноосном сжатии наблюдается обратная картина.

Сопоставляя численные значения пластических деформаций, отмеченные кружками на рис. 7 (при чистом растяжении), установим, что в условиях нагружения характерных для диаграммы — 1 пластическая деформация в момент начала процесса разрушения в 3.4 раза больше, чем в условиях диаграммы — 2 и в 17 раз больше в условиях, соответствующих диаграммы — 3. Это указывает на сильное снижение пластичности с ростом условного предела текучести. При переходе от одноосного растяжения к одноосному сжатию пластичность материала растет. Сравнение значений пластических деформаций в момент начала разрушения при одних и тех же значениях τ_0, z_0 при растяжении и сжатии показывает, что для условий диаграммы — 1 больше в 2.45 раз, для диаграммы — 2 в — 4.8 и для диаграммы — 3 в 18.7 раз. Согласно приведенным результатам пластичность при сжатии особенно сильно растет в состояниях с большими значениями предела текучести. Хрупкий материал при растяжении деформируется, как пластичный при сжатии.

Важнейшей характеристикой состояния в момент разрушения первого подэлемента является текущий вес упруго деформированных подэлементов ψ_e (вычисляется на основе формулы (5.2)). При весе $\psi_e \geq \Delta\psi \sim 0.1 \div 0.05$ происходит квазихрупкое разрушение. Если $\psi_e < \Delta\psi$ появление небольшого количества трещин в элементе тела не приводит к его разрушению. Приведем данные для состояний отмеченные кружочками на рис. 7) при растяжении и сжатии. Если процесс деформирования происходит по диаграмме — 1, тогда $\psi_e = 0.064$ при растяжении и $\psi_e = 0.003$ при сжатии. Для диаграммы — 2, $\psi_e = 0.409; 0.076$, а для третьей диаграммы $\psi_e = 0.672; 0.174$. Первые цифры относятся к испытанию материала на растяжении, а вторые — при сжатии. Согласно приведенным значениям веса упругодеформированных подэлементов в момент возникновения первой микротрещины можно сделать следующие выводы. Если исходить из допущения, что слияние микротрещин и образование макротрещины происходит при $\psi_e \geq 0.1$, тогда квазихрупкое разрушение произойдет при испытании на растяжении в случаях диаграмм 2 и 3. Разрушение в условии испытания на сжатии возможно только в случае диаграммы — 3. При допущении $\psi_e \geq 0.05$ квазихрупкое разрушение возможно для диаграмм — 2, 3 как в испытаниях на растяжении, так и на сжатии, а для диаграммы — 1 возможно только квазихрупкое разрушение при растяжении.

Таким образом, в рамках исследуемой модели удастся описать сложную картину влияния вида напряженного состояния на процесс разрушения материала на основе диаграмм деформирования, полученных в опытах на растяжение или кручение тонкостенных образцов и значений фактора анизотропии и коэффициента упрочнения кристаллов. Эффект снижения пластичности материала с увеличением предела текучести получает естественное описание.

Заключение. Исследована трехуровневая конститутивная модель, описывающая с единых позиций поведение материалов с монотонными и немонотонными диаграммами деформирования. Получено уравнение связанности масштабных уровней, в котором фигурируют механические характеристики материальных частиц (константы упругости и коэффициент упрочнения кристаллов) и термомеханических характеристик системы подэлементов (плотность распределения предельных упругих деформаций подэлементов). Установлено, что при переходе от обратимого состояния к необратимому состоянию, неоднородность распределения деформаций сильно увеличивается по сравнению с неоднородностью распределения напряжений. При значении коэффициента упрочнения, характерного для стадии легкого скольжения, падение параметра неоднородности на начальном этапе необратимого течения настолько резкое, что макроскопическая деформация может расти при постоянном или даже при снижении напряжения (создаются условия разгрузки в части необратимо деформированных подэлементов).

Проанализирована общая зависимость для растягивающих напряжений $\max \dot{\epsilon}_1$ в системе подэлементов. Выражение для наибольшего растягивающего напряжения (при $M > 0$ возникает в подмножестве обратимо деформированных подэлементов) представлено в виде линейной комбинации модулей девиаторов напряжений σ и необратимых деформаций p . Коэффициент при модуле σ зависит только от вида напряженного состояния, а при модуле p

зависит еще от количества необратимо деформированных подэлементов. Данный коэффициент на начальной стадии необратимого деформирования уменьшается более, чем в два раза, а затем асимптотически приближается к постоянному значению. При $p > 1\%$ наибольшее растягивающее напряжение линейно зависит от σ и p . Положение точки состояния на диаграмме деформирования (при заданном $\max \bar{\epsilon}_1$) с увеличением предела текучести смещается в сторону уменьшения необратимой деформации.

Исходя на локальном уровне из критерия наибольшего нормального напряжения, на макроскопическом уровне установлен критерий прочности, в котором фигурируют как механические характеристики материала, полученные в простых опытах на растяжение, так и параметры вида напряженного состояния и девиатора тензора напряжений. Исследовано влияние параметров, характеризующие вид напряженного состояния на величину необратимой деформации в начальный момент разрушения. Установлены уравнения, описывающие зависимость между напряжениями и деформациями на этапе роста количества разрушенных подэлементов. Обсуждается вопрос о критическом значении веса разрушенных подэлементов, при котором происходит образование макротрещины, приводящее к полному разрушению элемента тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
2. *Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И.* Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
3. *Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г.* Физические уравнения термовязкопластичности. Киев: Наукова думка, 1982. 238 с.
4. *Макаров В.П.* Моделирование процессов деформации и разрушения на мезоуровне // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 109–130.
5. *Трусов П.В.* Классические и многоуровневые конститутивные модели для описания поведения металлов и сплавов: проблемы и перспективы (в порядке обсуждения) // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 69–82.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921010128>
6. *Marina V.Yu. and Marina V.I.* Single approach to the description of the relation between micro-and macrostates in reversible and irreversible deformation of polycrystals // Int. Appl. Mech. 2021. V. 57. № 6. P. 707–719.
<https://doi.org/10.1007/s10778-022-01120-x>
7. *Besseling J. F.* Theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain-hardening, creep recovery and secondary creep // J. Appl. Mech. 1958. № 4. P. 529–536.
8. *Гохфельд Д.А., Садаков О.С.* Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
9. *Марина В.Ю.* Уравнения упругопластического тела при пропорциональном неизо-термическом нагружении // Прикладная механика. 1997. № 6. С. 9–17.
10. *Марина В.Ю., Марина В.И.* Анализ соотношений между локальными и общими механическими параметрами, применяемыми для описания поведения поликристаллических материалов // Металлофизика и новейшие технологии. 2020. Т. 42. № 3. С. 415–431.
<https://doi.org/10.15407/mfint.42.03.0415>

11. *Kroner E.* On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics // *Inst. J. Eng. Sci.* 1963. V. 1. № 2. P. 261–278. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90037-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90037-5)
12. *Шермогор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
13. *Flipona B., Kellera C., Queyb R., Barbea F.* A full-field crystal – plasticity analysis of bimodal polycrystals // *Int. J. Solids Struct.* 2020. V. 184. P. 178–192. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.02.005>
14. *Tanaka E., Murakami S., Ooka M.* Effects of strain path shapes on nonproportional cyclic plasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* 1985. V. 33. № 6. P. 559–575. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(85\)90003-1](https://doi.org/10.1016/0022-5096(85)90003-1)
15. *Кадашевич Ю. И., Марина В. Ю., Помыткин С. П.* Об одной тенденции в развитии статической теории неупругости, учитывающей микронапряжения // *Изв. РАН. МТТ.* 1998. № 1. С. 13–18.
16. *Марина В. Ю.* Нелокальный подход к проблеме необратимого деформирования неоднородного тела. Численные исследования в механике сплошных сред. Кишинёв: Штиинца, 1987. С. 47–53
17. *Марина В. Ю.* Единый подход к описанию реологических свойств стабильных и нестабильных материалов. Численные методы решения задач волновой динамики. Кишинёв: Штиинца, 1990. С. 76–85.
18. *Марина В. Ю.* Определяющие уравнения микронеоднородной среды при сложном монотонном нагружении // *Изв. АН Молдовы. Серия математика.* 1997. № 2. С. 26–36.
19. *Марина В. Ю.* Закономерности изменения предельных значений инвариантов напряжений и деформаций в микронеоднородных средах // *Изв. РАН. МТТ.* 2023. № 3. С. 73–98. <https://doi.org/10.31857/S0572329922700015>
20. *Hill R.* The elastic behavior of a crystalline aggregate // *Proceedings of the Physical Society. Section A.* 1952. V. 65. № 5. P. 349–354. <https://doi.org/10.1088/0370-1298/65/5/307>
21. *Марина В. Ю.* Принципы перехода от микро к макро напряжённно-деформированному состоянию. // *Изв. АН Молдовы. Серия математика.* 1998. № 2. С. 16–24.
22. *Voigt W.* *Lehrbuch der Kristallphysik.* Leipzig und Berlin: Teubner, 1928. 978 p.
23. *Reuss A.* Berechnung der Fliesgrenze von Misch-Kristallen auf Grund der Plastizitäts-Bedingung für Einkristalle // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 1929. № 9. P. 49–58. <http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19290090104>

DESCRIPTION OF THE PHENOMENON OF DECREASING PLASTICITY WITH INCREASING YIELD STRENGTH OF POLYCRYSTAL

V. Yu. Marina^{a, *}

^a *Technical University of Moldova, Chisinau, Moldova*

^{*} *e-mail: vasilemarina21@yahoo.com*

Abstract. Using a three-level constitutive model, the influence of the crystal anisotropy factor, the hardening coefficient, the microscopic elastic limit and the

distribution density function of the limiting elastic deformations of subelements on the shape of the deformation diagrams and the fracture conditions of a polycrystal is studied. Based on the theory of maximum normal stresses at the local level, a failure criterion was established at the macroscopic level, which includes all the parameters of the problem. The influence of the type of stress state and the geometric shape of the loading diagram on the magnitude of irreversible deformation preceding the initial process of destruction is investigated. From the established strength criterion follows the effect of a decrease in the plasticity of the material with increasing yield strength. The question of the critical value of the weight of destroyed subelements is discussed, at which a macrocrack forms, leading to the complete destruction of the body element.

Keywords: structure, stress, deformation, fracture, plasticity, polycrystal, hardening, averaged connections, inconsistencies of measures, subelement

REFERENCES

1. *Ilyushin A.A.* Continuum mechanics. M.: Moscow State University Publishing House, 1990. 310 p.
2. *Novozhilov V.V., Kadashevich Yu.I.* Microstresses in structural materials. L.: Mechanical Engineering, 1990. 223 p.
3. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G.* Physical equations of thermoviscoplasticity. Kyiv: Naukova Dumka, 1982. 238 p.
4. *Makarov V.P.* Modeling of deformation and fracture processes at the mesolevel // *Izv. ANR. MTT.* 1999. No. 5, P. 109–130.
5. *Trusov P.V.* Classical and multi-level constitutive models for describing the behavior of metals and alloys: problems and prospects (in order of discussion) // *Izv. ANR. MTT.* 2021. No. 1. P. 69–82.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921010128>.
6. *Marina V.Yu. and Marina V.I.* Single Approach to the Description of the Relation Between Micro-and Macrostates in Reversible and Irreversible Deformation of Polycrystals. *International Applied Mechanics*, Vol. 57, No. 6, P. 707–719. 2021.
<https://doi.org/10.1007/s10778-022-01120-x>.
7. *Besseling J.F.* Theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain-hardening, creep recovery and secondary creep // *Journal of Applied Mechanics*. 1958. No. 4. P. 529–536.
8. *Gokhfeld D. A., Sadakov O. S.* Plasticity and creep of structural elements under repeated loading. M.: Mechanical Engineering, 1984. 256 p.
9. *Marina V.Yu.*, Equations of an elastoplastic body under proportional non-isothermal loading // *Applied mechanics*. 1997. No. 6. P. 9–17.
10. *Marina V.Yu., Marina V.I.*, Analysis of the relationships between local and general mechanical parameters used to describe the behavior of polycrystalline materials. // *Metallophysics. Newest Technologies*. 2020. V. 42. No. 3. P. 415–431.
<https://doi.org/10.15407/mfint.42.03>.
11. *Kroner E.* On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics Gauge theory with dislocations. – *Inst. I.Engng. Sci* 1. 1963. P. 261–278.
12. *Shermogor T.D.*, Theory of elasticity of micro-inhomogeneous media. M.: Nauka, 1977. 400 p.

13. *Flipona B., Kellera C., Queyb R., Barbea F.* A Full-field Crystal – Plasticity Analysis of Bimodal Polycrystals // International Journal of Solids and Structures 184, 2020. P. 178–192.
14. *Tanaka E., Murakami S., Ooka M.* Effects of strain path shapes on nonproportional cyclic plasticity//J. Mech. Phys. Solids. 1985. Vol. 33. No. 6. P. 559–575.
15. *Kadashevich Yu.I., Marina V.Yu., Pomytkin S.P.* On one trend in the development of the static theory of inelasticity, taking into account microstresses // Izv. ANR. MTT. 1998. No. 1, P. 13–18.
16. *Marina V.Yu.* Nonlocal approach to the problem of irreversible deformation of an inhomogeneous body. Numerical studies in continuum mechanics. Chisinau: Shtiintsa, 1987. P. 47–53
17. *Marina V.Yu.* A unified approach to describing the rheological properties of stable and unstable materials. Numerical methods for solving problems of wave dynamics. Chisinau: Shtiintsa, 1990. P. 76–85.
18. *Marina V.Yu.* Constitutive equations of a micro-inhomogeneous medium under complex monotonic loading//Proceedings of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics series. 1997. No. 2. P. 26–36.
19. *Marina V.Yu.* Patterns of changes in the limiting values of stress and strain invariants in micro-inhomogeneous media // Izv. ANR. MTT. 2023. No. 3, P. 127–152. <https://doi.org/10.31857/S0572329922700015>.
20. *Hill R.* The elastic behavior of a crystalline aggregate. Proc. Soc. 1952. A 65, no. 389. P. 349–354.
21. *Marina V.Yu.* Principles of transition from micro to macro stress-strain state//News of the Academy of Sciences of Moldova. Series mathematics, 1998. No. 2. P. 16–24.
22. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. – Leipzig und Berlin: Teubner, 1928. 978 s.
23. *Reuss A.* Berechnung der Fliesgrenze von Misch-Kristallen auf Grund der Plastizitäts-Bedinnung für Einkristalle // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 9. – H. 1. 1929. P. 49–58.