

УДК 531.3

ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БАЛКИ

© 2024 г. В. В. Саурин^{а,*}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

* e-mail: saurin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 18.04.2024 г.

После доработки 28.05.2024 г.

Принята к публикации 03.06.2024 г.

В статье рассматриваются задачи динамического изгиба балок полубесконечной длины. Для решения таких задач в статье применяется метод, основанный на удовлетворении законов сохранения, а именно, закона сохранения энергии, закона изменения количества движения и закона изменения момента количества движения. Полученные результаты сравниваются с аналитическим решением задачи о движении полубесконечного стержня, нагруженного на конце поперечной силой. Особенностью данного решения является то, что изменение напряжённо-деформированного состояния стержня характеризуется волновым фронтом. Считается, что все изменения в состоянии балки происходят с бесконечной скоростью. Показано, что в отличие от переноса продольных возмущений по длине балки, которые происходят с постоянной скоростью, изгибные возмущения распространяются с переменной скоростью, причём, с ростом времени эта скорость уменьшается и стремится к нулю в бесконечно удалённом положении волнового фронта балки. Обнаружено, что скорости распространения волнового фронта при передачи сосредоточенной силы и сосредоточенного момента отличается друг от друга. При этом скорость передачи поперечной силы почти в два раза превосходит скорость волнового фронта от изгибающего момента.

Ключевые слова: упругий стержень, начально-краевая задача, законы сохранения, волновой фронт

DOI: 10.31857/S1026351924050061, EDN: UAUTGX

1. Введение. Исследование динамического поведения конструкций и их элементов притягивает внимание ученых всего мира. Тем не менее остаётся ещё много вопросов, которые следуют рассмотреть более внимательно и скрупулезно. Следует отметить, что при значительном интересе к таким задачам большинство работ относятся к изучению собственных колебаний таких конструкции [1–3], в то время как решению волновых уравнений уделяется значительно меньшее внимание.

Хорошо известны задачи о продольных волновых движениях стержней, как однородных, так и не однородных, находящихся в условиях разных

стеснений [4–10]. В этих работах показано, что в стержне возникает волновой фронт, который движется по длине стержня со скоростью звука. При этом точка приложения нагрузки (свободный конец) движется также с постоянной скоростью, но в противоположную сторону. И это решение не вызывает никаких возражений у исследователей.

Значительно меньшее количество работ посвящено исследованию динамики стержней, подверженных импульсному воздействию. Можно отметить работы [11, 12], выполненные в Санкт-Петербурге под руководством академика Н.Ф. Морозова.

В литературе также известно аналитическое решение задачи о движении стержня бесконечной длины, нагруженного в некоторой точке поперечной силой [13]. Особенностью данного решения является то, что в решении отсутствует волновой фронт. Считается, что все изменения напряжённо деформированного состояния балки распространяются с бесконечной скоростью. В литературе нет объяснения этого факта. Можно предположить, что такое отличие может быть связано, во-первых, некорректностью описания данного явления. Во-вторых, это может соответствовать физической сущности рассматриваемого явления и все результаты корректны. В статье довольно подробно исследуются эти решения.

В статье применяется метод, основанный на удовлетворении законов сохранения, а именно, закона сохранения энергии, закона изменения количества движения и закона изменения момента количества движения.

Рассмотрены три задачи о движении однородного полубесконечной длины стержня под действием постоянными продольной силы, поперечной силы, а также сосредоточенного момента. Полученные результаты сравниваются друг с другом и с ранее полученными решениями.

2. Динамическое поведение балки под действием сосредоточенной продольной силы. Рассмотрим длинный однородный стержень постоянного сечения, показанный на рис. 1, у которого один конец расположен в точке $x = 0$, а другой уходит в бесконечность. Предположим, что продольные напряжения в стержне являются преобладающими настолько, что остальными компонентами тензора напряжений можно пренебречь. Материал, из которого сделан стержень, характеризуется модулем упругости E . Так, что

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t), \quad (2.1)$$

где $\sigma(x, t)$ – функция внутренних напряжений, а

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.2)$$

– функция деформаций, возникающих в процессе движения стержня.

Введем в рассмотрение функцию плотности количества движения p

$$p(x, t) = \rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Тогда динамическое уравнение равновесия для стержня, связывающее инерционную силу с изменением напряжения по длине стержня, имеет вид

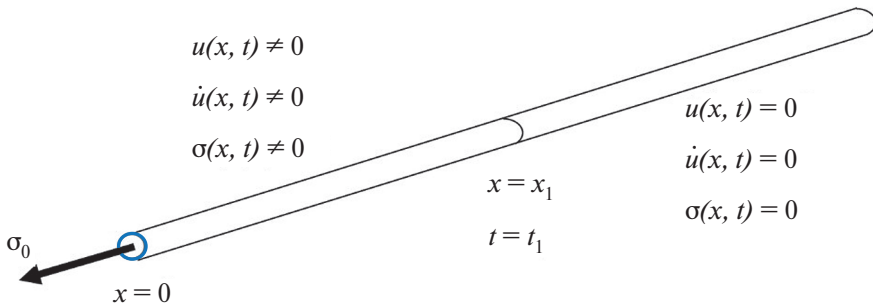


Рис. 1. Полубесконечный однородный стержень.

$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.4)$$

Используя соотношения (0.1)–(0.4), можно получить волновое уравнение

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.5)$$

определяющее скорость распространения продольных упругих волн в стержне

$$v_s = \sqrt{E/\rho}. \quad (2.6)$$

Здесь E – модуль Юнга, ρ – объемная плотность, u – функция перемещений точек стержня.

Предположим, что стержень в начальный момент времени находится в покое, т. е. перемещения и скорости всех точек стержня равны нулю

$$u(x, t) = \dot{u}(x, t) = 0, \quad t = 0. \quad (2.7)$$

В этот же момент времени к левому концу стержня ($x=0$) прикладывается сила σ_0 . Считается, что в процессе движения стержня эта сила не меняется. Изучим изменение состояния стержня в процессе его движения. После того, как сила была приложена к стержню, он начинает двигаться, растягиваясь вслед за силой. При этом возмущение точек стержня, вызванные внешней силой распространяется в противоположную сторону. Следовательно область возмущения увеличивается в процессе движения.

При этом точки стержня движутся таким образом, что можно выделить некоторую точку $x=x_1$ и соответствующий момент времени $t=t_1$. Слева от этой точки состояние стержня считается возмущенным

$$u(x, t) \neq 0, \quad \dot{u}(x, t) \neq 0, \quad \sigma(x, t) \neq 0, \quad x < x_1, \quad t < t_1, \quad (2.8)$$

а справа остается невозмущенным

$$u(x, t) = 0, \quad \dot{u}(x, t) = 0, \quad \sigma(x, t) = 0, \quad x > x_1, \quad t > t_1. \quad (2.9)$$

Со временем положение точки x_1 изменяется со скоростью v_f (скорость волнового фронта).

Для того чтобы описать динамическое поведение стержня нужно удовлетворить все законы сохранения, а именно закон сохранения энергии и закон изменения количества движения.

Предположим, чтобы удовлетворить всем законам сохранения можно выбрать функцию перемещений в виде линейной функции от пространственной координаты и времени

$$u(x, t) = a + bx + ct, \quad (2.10)$$

где a , b и c – неизвестные константы. Очевидно, что функция (2.10) тождественно удовлетворяет уравнение (2.5). Предположим также, что скорость волнового фронта также постоянна $v_f = \text{const}$.

Для того чтобы вычислить изменения кинетической ΔT и потенциальной ΔW энергий, а также работу внешних сил ΔA , выделим малый элемент стержня с координатой $x = x_1$ и длиной Δx . Используя введенное постоянство скорости волнового фронта, можно видеть, что справедливо следующее равенство

$$\Delta x = v_f \Delta t. \quad (2.11)$$

Здесь Δt – временной интервал, в течение которого произошло изменение в координате Δx . Тогда изменение кинетической энергии ΔT на этом интервале имеет вид

$$\Delta T = \rho \frac{v_d^2}{2} \Delta x, \quad (2.12)$$

где v_d – скорость деформирования стержня

$$v_d = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Для изменения потенциальной энергии получим следующее выражение

$$\Delta W = \frac{\sigma_0^2}{2E} \Delta x. \quad (2.14)$$

При этом прирост совершенной работы внешней силой σ_0 есть

$$\Delta A = \frac{\sigma_0^2}{E} \Delta x. \quad (2.15)$$

Тогда из закона сохранения энергии $\Delta T + \Delta W - \Delta A = 0$ находится скорость деформирования стержня

$$v_d = \frac{\sigma_0}{\sqrt{E\rho}}. \quad (2.16)$$

Закон изменения количества движения позволяет найти скорость волнового фронта v_f в явном виде. Для изменения количества движения p на заданном интервале Δx имеем следующее выражение

$$\Delta p = \rho v_d \Delta x. \quad (2.17)$$

Для приращения импульса силы Δf с учетом (2.11) получим

$$\Delta f = \sigma_0 \Delta t = \sigma_0 \frac{\Delta x}{v_f}. \quad (2.18)$$

Равенство правых частей равенств и позволяет выразить скорость волнового фронта v_f через скорость деформирования v_d

$$v_f = \frac{\sigma_0}{\rho v_d}. \quad (2.19)$$

Или с учетом

$$v_f = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.20)$$

Сравнение соотношений и позволяет сделать вывод, что скорость волнового фронта v_f равна скорости распространения продольных упругих волн в стержне v_s .

Учитывая, что движение точек стержня происходят с постоянной скоростью, то перемещения стержня можно записать в виде

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sigma_0}{E}(x - v_f t), \quad x < v_f t, \\ u &= 0, \quad x \geq v_f t. \end{aligned} \quad (2.21)$$

3. Динамический изгиб балки под действием сосредоточенного поперечной силы. Рассмотрим, как и в предыдущем случае, прямолинейный стержень полубесконечной длины, показанный на рис. 2. Считается, что стержень находится в покое, то есть перемещения $u(x) = 0$ и скорости $\dot{u}(x) = 0$ всех точек стержня равны нулю. В начальный момент времени $t = 0$ к концу стержня с координатой $x = 0$ прикладывается сосредоточенная поперечная сила $P_0 > 0$, которая воздействует на стержень всё время.

Задача состоит в том, чтобы определить напряжённо деформированное состояние стержня в любой момент времени.

Сначала кратко приведем основные результаты, полученные ранее [13], при решении данной задачи, основываясь на модели балки Эйлера–Бернулли. Из балочного уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta_1(x), \quad (3.1)$$

где $\delta_1(x)$ дельта функция, с помощью преобразования Фурье по x находим

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos z^2 t)}{z^2} \cos xz dz. \quad (3.2)$$

Здесь единицами измерения длины служит радиус инерции стержня $r = (J/S)^{1/2}$; времени – r/c_0 , где $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$; J , S – момент инерции и площадь поперечного сечения балки.

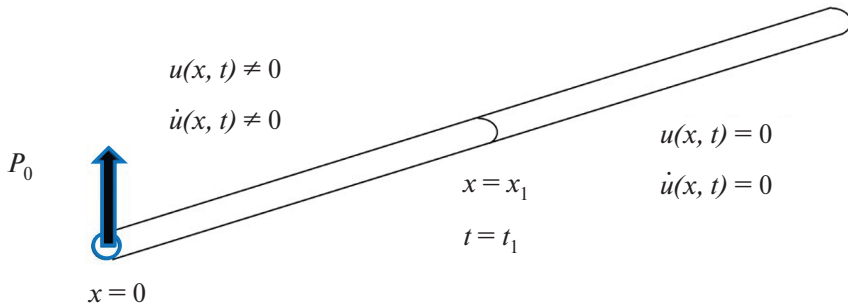


Рис. 2. Изгибаемый стержень сосредоточенной силой.

Дифференцируя интеграл по времени (здесь дифференцирование под знаком интеграла допустимо), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin z^2 t \cos zx}{z^2} dz = \frac{\kappa}{2} \{F(\kappa) - C(\kappa)\} + \sqrt{\frac{t}{\pi}} \sin\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right), \quad \kappa = \frac{x^2}{4t}, \quad (3.3)$$

где $F(\kappa)$ и $C(\kappa)$ – интегралы Френеля:

$$F(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\kappa} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad C(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\kappa} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt. \quad (3.4)$$

Интегрируя по частям (0.25) получим

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \left\{ \sin\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right) - \kappa \cos\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \sqrt{\pi \kappa} [S(\kappa) - F(\kappa)] + \sqrt{\pi \kappa^2} [1 - F(\kappa) - S(\kappa)] \right\}. \quad (3.5)$$

Функция перемещений (3.5) представлена на рис. 3 для трех моментов времени. Из представленных зависимостей видно, что решение определено на всем диапазоне $x > 0$, $t > 0$ и нельзя выделить такую точку x_1 (как это было сделано в предыдущем разделе), определяющую положение волнового фронта. Другими словами, скорость распространения возмущения по длине балки равна бесконечности. Также стоит отметить осциллирующий характер решения.

Характерной особенностью полученного решения является то, что оно представимо в виде

$$u = t^{\frac{2}{3}} v(\kappa). \quad (3.6)$$

Амплитуда прогиба растёт пропорционально $t^{3/2}$, а форма, как функция $\kappa = x^2/4t$, остается постоянной (в функции от x , оставаясь подобной самой себе, расширяется пропорционально \sqrt{t} . При $x=0$ ($\kappa=0$))

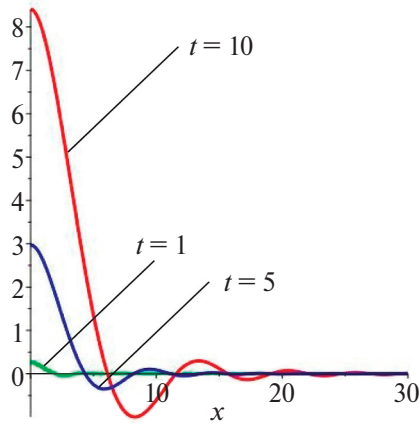


Рис. 3. Функция перемещений u для моментов времени $t=1, 5, 10$.

$$u = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{\frac{3}{2}}. \quad (3.7)$$

При $x \rightarrow \infty$

$$u \sim -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \frac{\sin\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right)}{\kappa^2}. \quad (3.8)$$

Таким образом, прогиб стержня описывается осциллирующей функцией. Для кривизны балки из следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left\{ \cos\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{\pi\kappa} [1 - F(\kappa) - C(\kappa)] \right\} \quad (3.9)$$

При $\kappa=0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sqrt{\frac{t}{2\pi}}. \quad (3.10)$$

А при $\kappa \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \frac{\sin\left(\kappa + \frac{\pi}{4}\right)}{\kappa}. \quad (3.11)$$

Для того чтобы решить эту задачу, удовлетворяя, как и в предыдущем параграфе законам сохранения, сделаем два важных предположения. Во-первых, в некоторый момент времени $t=t_1$ существует такая точка $x=x_1$ (рис. 3), которая разделяет стержень на две части. При $x > x_1$ все точки стержня находятся

в покое (2.9). А при $x < x_1$ все точки стержня имеют не нулевые перемещения и скорости (2.8).

Во-вторых, для всех точек $x < x_1$ напряжённо деформированное состояние стержня является однородным и удовлетворяет следующему уравнению состояния

$$u_{xxx} - \frac{P_0}{EJ} = 0. \quad (3.12)$$

Также будем считать, что положение точки x_1 является непрерывной функцией времени t .

Трижды интегрируя уравнение (0.33) по координате x получим следующее выражение для функции перемещений

$$u(x, t) = \frac{P_0 x^3}{6EJ} + \frac{c_1(t)x^2}{2} + c_2(t)x + c_3(t). \quad (3.13)$$

Здесь $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ есть неизвестные функции времени. В дальнейшем аргументы у функций будут опущены.

Удовлетворяя условие непрерывности функции перемещений в точке $x = x_1(t)$ и исключая функцию c_3 , получим следующую функцию перемещений

$$u = P_0 \frac{x^3 - x_1^3}{6EJ} + c_1 \frac{x^2 - x_1^2}{2} + c_2(x - x_1). \quad (3.14)$$

Функция скоростей u_t находится простым дифференцированием функции перемещений по времени

$$u_t = c_{1t} \frac{x^2 - x_1^2}{2} - c_{2t}(x - x_1) - \frac{P_0 x_1^2 x_{1t}}{2EJ} - x_{1t} c_2 - x_1 c_{2t}. \quad (3.15)$$

После сделанных предположений задача заключается в нахождении трех неизвестных функций времени x_1 , c_1 и c_2 . Для определения этих функций воспользуемся законами сохранения, а именно, законами сохранения энергии, изменения количества движения и изменения момента количества движения.

Закон сохранения энергии имеет вид

$$T_0(t) + \Pi_0(t) - A_0(t) = 0 \quad (3.16)$$

Для кинетической энергии имеем следующее выражение

$$\begin{aligned} T_0(t) = & \frac{\rho x_1^5 c_{1t}}{15} + \frac{\rho x_1^4 x_{1t} c_{1t}}{3} + \frac{\rho x_1^3 x_{1t}^2 c_{1t}^2}{2} + \frac{\rho P_0 x_1^5 c_{1t} x_{1t}}{6EJ} + \frac{\rho P_0 x_1^4 x_{1t}^2 c_1}{2EJ} + \\ & + \frac{\rho P_0^2 x_1^5 x_{1t}^2}{8EJ^2} + \frac{5\rho x_1^4 c_1 c_2}{24} + \frac{\rho x_1^3 x_{1t} c_{1t} c_2}{3} + \frac{\rho x_1^3 x_{1t} c_{2t} c_1}{2} + \rho x_1^2 x_{1t}^2 c_1 c_2 + \\ & + \frac{\rho P_0 x_1^4 c_{2t} x_{1t}}{4EJ} + \frac{\rho P_0 x_1^3 x_{1t}^2 c_{2t}}{2EJ} + \frac{\rho x_1^3 c_{2t}^2}{6} + \frac{\rho x_1^2 c_{2t} x_{1t} c_2}{2} + \frac{\rho x_1 x_{1t}^2 c_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Понятно, что любой квалифицированный исследователь способен выпписать это соотношение в явном виде. Выражение приведено только для того, чтобы продемонстрировать насколько сложно в него входят неизвестные функции.

Потенциальная энергия имеет следующее представление

$$W_0 = \int_0^{x_1(t)} \frac{(P_0 x)^2}{6EJ} dx = \frac{P_0^2 x_1^3}{6EJ}. \quad (3.18)$$

И работа внешних сил

$$A_0 = P_0 u(t, 0) = -P_0 x_1 \left(\frac{x_1 c_1}{2} + \frac{x_1^2}{6EJ} + c_2 \right). \quad (3.19)$$

Подстановка выражений (3.17)–(3.19) в равенство позволяет скомпоновать одно обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение, зависящее от трех неизвестных функций x_1 , c_1 и c_2 .

Выражение для плотности количества движения стержня имеет вид

$$p(x, t) = \rho u_t. \quad (3.20)$$

Закон изменения количества движения (условие динамического равновесия) дает

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{x_1} \rho u_t dx \right)_t - P_0 = & -2\rho x_1^2 c_{1t} x_{1t} - \rho x_1 c_1 x_{1t}^2 - \frac{\rho x_1^3 c_{1tt}}{3} - \rho x_1^2 c_1 x_{1tt} - \\ & - \frac{\rho P_0 x_1^2 x_{1t}^2}{EJ} - \frac{\rho P_0 x_1^3 x_{1t}}{2EJ} - 2\rho x_1 c_{2t} x_{1t} - \frac{\rho x_1^2 c_{2tt}}{2} - \rho x_1 c_2 x_{1tt} - P_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Выражение для плотности момента количества движения стержня имеет вид

$$l_0 = \rho u_t x. \quad (3.22)$$

Изменение моментов вычислим относительно точки $x = 0$. Момент от силы P_0 равен нулю. Тогда выражение $dL/dt = 0$ ведет к $L = \text{const}$. В начальный момент времени $L = 0$. Отсюда вытекает, что $L = 0$. Следовательно момент количества движения не зависит от времени и равен нулю

$$L = \int_0^{x_1} l_0 dx = 3x_1^2 c_{1t} + 12x_1 c_1 x_{1t} + \frac{6P_0}{EJ} x_1^2 x_{1t} + 4x_1 c_{2t} + 12c_2 x_{1t} = 0. \quad (3.23)$$

Таким образом имеем три нелинейных дифференциальных уравнения, а именно, (3.16) с подстановками (3.17)–(3.19), и уравнения (3.21) и (3.23) относительно трех переменных функций x_1 , c_1 и c_2 .

Введем в рассмотрение две новые функции x_2 и c_3

$$x_2 = x_1^2, \quad c_3 = c_1 x_1, \quad (3.24)$$

подстановка которых в систему уравнений приводит компоненты этих уравнений к однородному виду относительно степеней функций x_2 , c_2 и c_3 . Тогда используя замену

$$\{x_2 = b_1 t, \quad c_3 = b_2 t, \quad c_2 = b_3 t\}, \quad (3.25)$$

получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров $\{b_1, b_2, b_3\}$

$$108\rho b_1 b_2^2 + 330\rho b_1 b_2 b_3 + 260\rho b_1 b_3^2 + \frac{80\rho P_0 b_1^2 b_2}{EJ} + \frac{120\rho P_0 b_1^2 b_3}{EJ} + \frac{15\rho P_0^2 b_1^3}{EJ^2} + 240P_0 b_2 + 480P_0 b_3 + \frac{160P_0^2 b_1}{EJ} = 0, \quad (3.26)$$

$$10\rho EJ b_1 b_2 + 18\rho EJ b_1 b_3 + 3\rho P_0 b_1^2 + 24P_0 EJ = 0, \quad (3.27)$$

$$15EJ b_2 + 20EJ b_3 + 6P_0 b_1 = 0. \quad (3.28)$$

Эта система уравнений имеет единственное аналитическое решение

$$\left\{ \begin{aligned} b_1 &= \sqrt{\frac{10EJ(385\sqrt{13} - 1373)}{27\rho}}, & b_2 &= \frac{8\sqrt{30}P_0(40 - 11\sqrt{13})}{3\sqrt{\rho EJ(385\sqrt{13} - 1373)}}, \\ b_3 &= -\frac{P_0(1027 - 275\sqrt{13})}{\sqrt{30\rho EJ(85\sqrt{13} - 1373)}} \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

или приближенное значение

$$\left\{ b_1 = 2.368\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}, \quad b_2 = 1.272\frac{P_0}{\sqrt{\rho EJ}}, \quad b_3 = -1.665\frac{P_0}{\sqrt{\rho EJ}} \right\}. \quad (3.30)$$

Из решения (3.30) следует, что искомые функции $x_1(t)$, $c_1(t)$ и $c_2(t)$ имеют вид

$$x_1 = 1.539\left(\frac{EJ}{\rho}\right)^{1/4}\sqrt{t}, \quad c_1 = \frac{0.827P_0}{\sqrt{EJ}\sqrt{\rho EJ}}\sqrt{t}, \quad c_2 = -\frac{1.665P_0}{\sqrt{\rho EJ}}t. \quad (3.31)$$

Таким образом функцию перемещений балки можно представить в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} P_0 \left(\frac{0.167}{EJ} x^3 - \frac{1.665}{\sqrt{\rho EJ}} xt + \frac{0.975}{\sqrt{\rho}\sqrt{\rho EJ}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{0.413}{\sqrt{EJ}\sqrt{\rho EJ}} x^2 \sqrt{t} \right), & x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1. \end{cases} \quad (3.32)$$

Характерное распределение перемещений по длине балки представлено на рис. 4. Важно отметить, что присутствует волновой фронт (точка x_1). Наличие

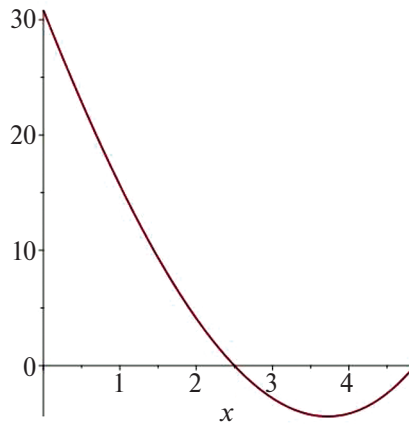


Рис. 4. Перемещения балки в момент времени $t = 10$ при следующих значениях параметров $EJ = \rho = M_0 = 1$.

отрицательных перемещений объясняется тем, что суммарный момент количества движения балки всегда равен нулю.

Соответственно, для скоростей точек балки имеем следующее представление

$$u_t(x, t) = \begin{cases} P_0 \left(-\frac{1.664}{\sqrt{\rho EJ}} x + \frac{0.207}{\sqrt{EJ \sqrt{\rho EJ}}} \frac{x^2}{\sqrt{t}} + \frac{1.462\sqrt{t}}{\sqrt{\rho \sqrt{\rho EJ}}} \right), & x < x_1. \\ 0, & x \geq x_1. \end{cases} \quad (3.33)$$

При этом скорость волнового фронта $v_f(t)$ является величиной переменной и равна

$$v_f(t) = 0.769 \left(\frac{EJ}{\rho} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{t}}. \quad (3.34)$$

Важно отметить, что скорость волнового фронта зависит от жесткостных и инерционных характеристик балки и не зависит от величины перерезывающей силы P_0 . Стоит отметить, что с увеличением времени скорость волнового фронта уменьшается и стремится к нулю при бесконечном распространении возмущения. Скорость точки приложения нагрузки является корневой функцией времени в процессе движения и равна

$$u_t(0, t) = \frac{1.462 P_0}{\sqrt{\rho \sqrt{\rho EJ}}} \sqrt{t}. \quad (3.35)$$

4. Динамический изгиб балки под действием сосредоточенного момента.

Рассмотрим прямолинейный стержень полубесконечной длины, показанный на рис. 5. Считается, что стержень находится в покое, то есть перемещения $u(x) = 0$ и скорости $\dot{u}(x) = 0$ всех точек стержня равны нулю. В начальный

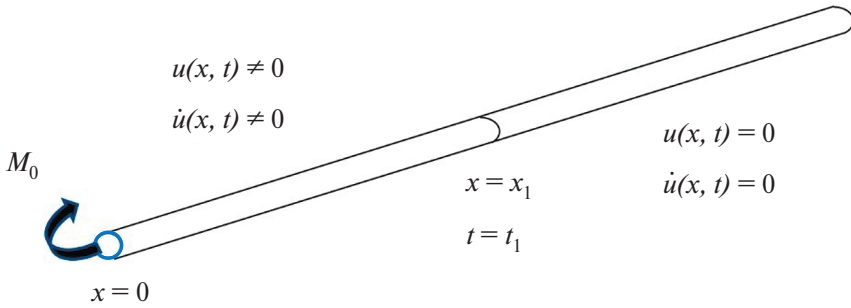


Рис. 5. Изгибаемый стержень сосредоточенным моментом.

момент времени $t=0$ к концу стержня с координатой $x=0$ прикладывается сосредоточенный изгибающий момент $M_0 > 0$, который воздействует на стержень всё время $t > 0$.

Также введены инерционные (линейная плотность материала ρ) и жесткостные (изгибная жёсткость EJ) характеристики стержня. Здесь E – модуль Юнга и J – момент инерции сечения. Считается, что все характеристики стержня постоянны и не изменяются, как по длине, так и во времени.

Задача состоит в том, чтобы определить напряжённо деформированное состояние стержня в любой момент времени. Для решения этой задачи сделаем два важных предположения. Во-первых, предположим, что в некоторые моменты времени $t=t_1$ существует такая точка $x=x_1$ (рис. 5), которая разделяет стержень на две части. При $x > x_1$ все точки стержня остаются в покое (2.9). А при $x < x_1$ все точки стержня имеют не нулевые перемещения и скорости (2.8). Во-вторых, предполагается, что для всех точек $x < x_1$ напряжённо деформированное состояние стержня является однородным и удовлетворяет следующему уравнению состояния

$$EJu_{xx} - M_0 = 0. \quad (4.1)$$

Также будем считать, что положение точки x_1 является непрерывной функцией времени t . Все, сделанные здесь предположения аналогичны тем, которые были сделаны в предыдущем параграфе.

Дважды интегрируя уравнение (0.57) по координате x , получим следующее выражение для функции перемещений

$$u(x, t) = -\frac{M_0 x^2}{2EJ} - a_1(t)x - b_1(t). \quad (4.2)$$

Здесь $a_1(t)$ и $b_1(t)$ есть неизвестные функции времени. Аргументы у функций в дальнейшем опускаются.

Удовлетворяя условие непрерывности функции перемещений в точке $x=x_1$ и исключая функцию b_1 , получим следующую функцию перемещений

$$u = \frac{M_0 (x_1^2 - x^2)}{2EJ} + a_1(x_1 - x). \quad (4.3)$$

Функция скоростей u_t находится простым дифференцированием функции перемещений по времени

$$u_t = a_{1t}(x_1 - x) + \left(\frac{M_0 x_1}{EJ} + a_1 \right) x_{1t}. \quad (4.4)$$

После сделанных предположений задача заключается в нахождении двух неизвестных функций времени x_1 и a_1 . Для определения этих функций воспользуемся законами сохранения, а именно, законами сохранения энергии, изменения количества движения и изменения момента количества движения.

Закон сохранения энергии запишем в виде

$$T_0(t) + \Pi_0(t) - A_0(t) = 0, \quad (4.5)$$

где $T_0(t)$ – кинетическая энергия балки, $\Pi_0(t)$ – ее потенциальная энергия, $A_0(t)$ – работа внешних сил, совершенная над балкой. Все эти величины вычислены в момент времени t .

Для кинетической энергии имеем следующее выражение

$$\begin{aligned} T_0 = \int_0^{x_1} \frac{\rho u_t^2}{2} dx = \frac{\rho a_t^2 x_1^3}{6} + \frac{\rho a x_1^2 a_t x_{1t}}{2} + \frac{\rho a_1^2 x_1 x_{1t}^2}{2} + \\ + \frac{\rho M_0 x_1^3 a_{1t} x_{1t}}{2EJ} + \frac{\rho M_0 a_1 x_1^2 x_{1t}^2}{EJ} + \frac{\rho M_0^2 x_1^3 x_{1t}^2}{2EJ^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Потенциальная энергия имеет следующее представление

$$W_0 = \int_0^{x_1} \frac{M_0^2}{2EJ} dx = \frac{M_0^2 x_1}{2EJ}. \quad (4.7)$$

И работа внешних сил

$$A_0 = \int_0^{x_1} u_x \Big|_{x=0} dx = -M_0 a_1. \quad (4.8)$$

Подстановка выражений (4.6)–(4.8) в равенство позволяет скомпоновать одно обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение, зависящее от двух неизвестных функций x_1 и a_1 .

Выражение для плотности количества движения стержня имеет вид

$$p(x, t) = \rho u_t(x, t) \quad (4.9)$$

Тогда закон изменения количества движения (условие динамического равновесия) имеет вид $dP(t)/dt = F = 0$. Следовательно, $P(t) = C = \text{const}$. Начальное условие $P(0) = 0$ позволяет определить константу $C = 0$. Тогда закон изменения количества движения эквивалентен равенству нулю интеграла от скоростей балки по ее длине

$$\int_0^{x_1} u_t dx = \frac{\rho x_1^2 a_{1t}}{2} + \rho x_1 x_{1t} a_1 + \frac{\rho M_0 x_1^2 x_{1t}}{EJ} = 0. \quad (4.10)$$

Выражение для плотности момента количества движения стержня имеет вид

$$l_0 = \rho u_t x. \quad (4.11)$$

Изменение моментов вычислим относительно точки $x = 0$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^{x_1} l_0 dx \right] - M_0 &= \frac{\rho x_1^3 a_{1tt}}{6} + \frac{\rho x_1^2 x_{1tt} a_1}{2} + \rho x_1^2 x_{1t} a_{1t} + \\ &+ \rho x_1 a_1 x_{1t}^2 + \frac{\rho M_0 x_1^3 x_{1tt}}{2EJ} + \frac{\rho M_0 x_1^2 x_{1t}^2}{2EJ} - M_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом, для нахождения двух неизвестных функций $\{x_1, a_1\}$ имеется три нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5), (4.10) и (4.12). Найти точное решение такой задачи весьма затруднительно. Это связано, во-первых, с тем, что уравнения, входящие в систему, являются нелинейными. Во-вторых, система уравнений является переопределенной. На три уравнения приходится только две переменные. То есть, для того чтобы существовало решение этой системы, уравнения должны быть зависимы. Проанализировать эту систему в полном объеме вряд ли удастся. Однако, построить некоторое частное решение вполне возможно.

Для начала, попробуем специальной подстановкой преобразовать к более удобному, однородному относительно степеней неизвестных функций виду. Введем в рассмотрение две новые функции x_2 и a_2

$$x_2 = x_1^2, \quad a_2 = a_1 x_1. \quad (4.13)$$

Используя замену (4.13), уравнения (4.5), (4.10) и (4.12) соответственно преобразуются к виду

$$\begin{aligned} 4\rho EJ^2 a_{2t}^2 x_2^2 + 2\rho EJ^2 a_{2t} x_{2t} a_2 x_2 + \rho EJ^2 x_{2t}^2 a_2^2 + 6\rho M_0 EJ a_{2t} x_{2t} x_2^2 + \\ + 3\rho M_0 EJ x_{2t}^2 a_2 x_2 + 3\rho M_0^2 x_{2t}^2 x_2^2 + 24M_0 EJ^2 a_2 x_2 + 12M_0^2 EJ x_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$2M_0 x_{2t} x_2 + 2EJ a_{2t} x_2 + EJ x_{2t} a_2 = 0, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho a_{2tt} x_2^3}{6} + \frac{\rho x_{2tt} x_2^2 a_2}{2} + \rho a_{2t} x_{2t} x_2^2 + \rho x_{2t}^2 x_2 a_2 + \\ + \frac{\rho M_0 x_{2tt} x_2^3}{2EJ} + \frac{3\rho M_0 x_{2t}^2 x_2^2}{2EJ} - M_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из представления уравнений (4.16)–(4.17) видно, что переменные $x_2(t)$ и $c_2(t)$ входят однородно (с одинаковыми степенями) в уравнения. Таким образом, подстановка $\{x_2 = b_1 t, c_2 = b_2 t\}$ сводит систему дифференциальных уравнений соответственно к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров $\{b_1, b_2\}$

$$7\rho EJ^2 b_1 b_2^2 + 9\rho EJM_0 b_1^2 b_2 + 3\rho M_0^2 b_1^3 + 24EJ^2 M_0 b_2 + 12EJM_0^2 b_1 = 0, \quad (4.17)$$

$$2M_0 b_1 + 3EJb_2 = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\rho M_0}{4EJ} b_1^2 + \frac{\rho b_1 b_2}{3} - M_0 = 0. \quad (4.19)$$

Видно, что проще всего разрешить уравнения (4.18) и (4.19). В результате имеем

$$\left\{ b_1 = 6\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}, b_2 = -\frac{4M_0}{\sqrt{EJ\rho}} \right\}. \quad (4.20)$$

Можно убедиться, что подстановка (4.20) тождественно удовлетворяет уравнению (4.17).

Из решения (4.20) следует, что искомые функции $x_1(t)$ и $a_1(t)$ имеют вид

$$x_1 = \sqrt{6t}\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}, \quad a_1 = -\frac{2M_0}{3}\sqrt{\frac{6t}{EJ\rho EJ}}. \quad (4.21)$$

Таким образом функцию перемещений балки (0.59) можно представить в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} -M_0 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x\sqrt{8t}}{\sqrt{3}} + t \right), & x < \sqrt{6t}\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}, \\ 0, & x \geq \sqrt{6t}\sqrt{\frac{EJ}{\rho}}. \end{cases} \quad (4.22)$$

Характерное распределение перемещений по длине балки представлено на рис. 6. Важно отметить, что присутствует волновой фронт (точка x_1). Наличие отрицательных перемещений объясняется тем, что суммарное количество движения балки всегда равно нулю.

Соответственно, для скоростей точек балки имеем следующее представление

$$u_t(x, t) = \begin{cases} M_0 \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3t}\sqrt{\rho EJ^3}} - \frac{1}{\sqrt{\rho EJ}} \right), & x < \sqrt{6t}\sqrt{\frac{EJ}{\rho}} \\ 0, & x \geq \sqrt{6t}\sqrt{\frac{EJ}{\rho}} \end{cases} \quad (4.23)$$

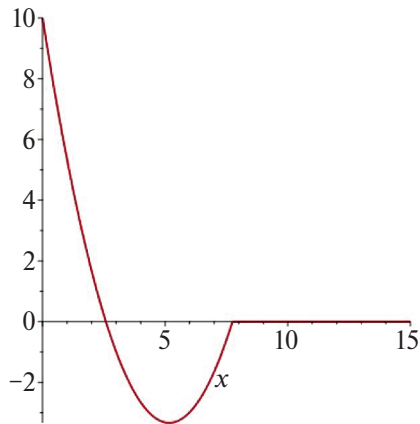


Рис. 6. Перемещения балки в момент времени $t = 10$ при следующих значениях параметров $EJ = \rho = M_0 = 1$.

При этом, скорость волнового фронта $v_f(t)$ является величиной переменной и равна

$$v_f(t) = \sqrt{\frac{3}{2t} \sqrt{\frac{EJ}{\rho}}}. \quad (4.24)$$

Важно отметить, что скорость волнового фронта зависит от жесткостных и инерционных характеристик балки и не зависит от величины изгибающего момента M_0 . С увеличением времени скорость волнового фронта уменьшается и стремится к нулю при бесконечном распространении возмущения. Скорость точки приложения нагрузки постоянна в процессе движения и равна

$$u_t(0, t) = -\frac{M_0}{\sqrt{\rho EJ}}. \quad (4.25)$$

5. Некоторые выводы и сопоставления.

1. Из условия выполнения интегральных законов, а именно, закона сохранения энергии, закона изменения количества движения и закона изменения момента количества движения решены аналитически три задачи нестационарной динамики стержня.

2. Построены точные выражения для перемещений балки для этих трёх задач. Следует отметить, что если при продольных движениях функция перемещений (0.21) точно удовлетворяет волновое уравнение (0.5), то функции изгибных перемещений (0.53) и (0.77) не удовлетворяют волновому уравнению (0.22).

3. Все построенные решения характеризуется наличием в балке волнового фронта. При этом в аналитическом решении волнового уравнения (0.22) все динамические возмущения распространяются по длине балки с бесконечной скоростью в отсутствие волнового фронта.

4. Показано, что в отличие от передачи продольных возмущений по длине балки, которые происходят с постоянной скоростью, изгибные возмущения распространяются с переменной скоростью, причём, с ростом времени это скорость уменьшается и стремится к нулю в бесконечно удаленной точке балки.

5. Из представленных решений следует, что скорости распространения волнового фронта для передачи сосредоточенной силы и сосредоточенного момента отличается друг от друга. При этом скорость передачи поперечной силы почти в два раза превосходит скорость волнового фронта от изгибающего момента.

Работа выполнена в рамках Госзадания № 124012500437-9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nayfeh A.H., Abdelrahman W.G.* An approximate model for wave propagation in rectangular rods and their geometric limits // JVC. 2000. V. 6. № 1. P. 3–17.
<https://doi.org/10.1177/107754630000600101>
2. *Clough R.W. and Penzien J.* Dynamics of Structures. New York: McGraw-Hill, 1993. 634 p.
3. *Cortes F., Elejabarrieta M.J.* Longitudinal vibration of a damped rod—part I: complex natural frequencies and mode shapes // Int. J. Mech. Sci. 2006. V. 48. № 9. P. 969–975.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.03.010>
4. *Abramson H. N., Plass H. J., Ripperger, E. A.* Stress wave propagation in rods and beams // in Advances in Applied Mechanics. New York: Academic Press, 1958. V. 5. P. 111–194.
5. *Morse R. W.* The velocity of compressional waves in rods rectangular cross sections // J. Acoust. Soc. Am. 1950. V. 22. P. 219–223.
6. *Hsueh W.J.* Free and forced vibrations of stepped rods and coupled system // JSV. 1999. V. 226. № 5. P. 891–904.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2249>
7. *Krawczuk M., Grabowska J., Palacz M.* Longitudinal wave propagation, part I: comparison of rod theories // JSV. 2006. V. 295. № 3–5. P. 461–478.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.12.048>
8. *Yang, K.* A unified solution for longitudinal wave propagation in an elastic rod // JSV. 2008. V. 314. № 1–2. P. 307–329.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.007>
9. *Gan C.B., Wei, Y.M., and Yang, S.X.* Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section // JSV. 2014. V. 333. № 2. P. 434–445.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.09.010>
10. *Bayanov E.V., Gulidov A.I.* Propagation of elastic waves in circular rods homogeneous over the cross section // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2011. V. 52. № 5. P. 808–814.
<https://doi.org/10.1134/S0021894411050166>
11. *Беляев А.К., Ма Ч.-Ч., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П., Шурпатов А.О.* Динамика стержня при продольном ударе телом // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 3. С. 506–515.
12. *Беляев, А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Тонкий стержень при продольном динамическом сжатии // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 4. С. 19–34.
13. *Слепян Л.И.* Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.

DYNAMIC BENDING OF A BEAM

V. V. Saurin^{a, *}^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, IPMech RAS, Moscow, Russia*^{*}*e-mail: saurin@ipmnet.ru*

Abstract. The article discusses problems of dynamic bending for beams of semi-infinite length. To solve such problems, the article uses a method based on the implementation of the conservation laws, namely, the law of energy conservation, the law of change in momentum and the law of change in angular momentum. The results obtained are compared with the analytical solution for the problem of a semi-infinite beam motion loaded at the free end with a transverse force. The peculiarity of this solution is that the change in the stress-strain state of the rod is characterized by a wave front. It is considered that all changes in the state of the beam occur at an infinite speed. All designed solutions are characterized by the presence of a wave front in the beam. It is shown that, in contrast to the transfer of longitudinal disturbances along the length of the beam, which occur at a constant speed, bending disturbances propagate at a variable speed, and, with increasing time, this speed decreases and tends to zero at an infinitely distant point of the beam. It was discovered that the propagation velocity of the wave front during the transfer of concentrated force and concentrated moment differs from each other. In this case, the speed of transverse force transfer is almost twice as high as the speed of the wave front from the bending moment.

Keywords: elastic rod, initial-boundary value problem, conservation laws, wave front

REFERENCES

1. *Nayfeh A.H., Abdelrahman W.G.* An Approximate Model for Wave Propagation in Rectangular Rods and Their Geometric Limits // *Journal of Vibration and Control*, 2000. V. 6 №1. P. 3–17.
<https://doi.org/10.1177/107754630000600101>
2. *Clough R.W. and Penzien J.* Dynamics of Structures// McGraw-Hill, 1993, New York, 634 P.
3. *Cortes F., Elejabarrieta M.J.* Longitudinal vibration of a damped rod—part I: complex natural frequencies and mode shapes// *International Journal of Mechanical Sciences*. 2006. V. 48, P. 969–975.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.03.010>.
4. *Abramson H.N., Plass H.J., and Ripperger E.A.* Stress wave propagation in rods and beams // in *Advances in Applied Mechanics*, 1958. V. 5, Academic Press, New York, P. 111–194.
5. *Morse R.W.* The velocity of compressional waves in rods rectangular cross sections // *Journal of the Acoustical Society of America*, 1950. V. 22, P. 219–223.
6. *Hsueh W.J.* Free and forced vibrations of stepped rods and coupled system// *Journal of Sound and Vibration*, 1999. V. 226, № 5, P. 891–904.
<https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2249>.

7. *Krawczuk M., Grabowska J., and Palacz M.* Longitudinal wave propagation, part I: comparison of rod theories// *Journal of Sound and Vibration*, 2006. V. 295. P. 461–478.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.12.048>.
8. *Yang K.* A unified solution for longitudinal wave propagation in an elastic rod// *Journal of Sound and Vibration*, 2008. V. 314. P. 307–329.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.007>.
9. *Gan C. B., Wei Y.M., and Yang S.X.* Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section// *Journal of Sound and Vibration*, 2014. V. 333. P. 434–445.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.09.010>.
10. *Bayanov E.V., Gulidov A.I.* Propagation of elastic waves in circular rods homogeneous over the cross section// *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011. Vol. 52. No. 5. P. 808–814.
<https://doi.org/10.1134/S0021894411050166>.
11. *Belyaev A.K., Ma Ch.-Ch., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P., Shurpatov A.O.* Dynamics of a rod under longitudinal impact by a body // *Bulletin of St. Petersburg State University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2017. Vol. 4 (62). Issue. 3. P. 506–515.
<https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.312>. (in Russian)
12. Thin rod under longitudinal dynamic compression // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics*. 2017. No. 4. P. 19–34. (in Russian)
13. *Slepyan L.I.* Non-stationary elastic waves. L.: Sudostroenie, 1972, 376 p. (in Russian)