

УДК 539.3

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПОГРАНСЛОЙ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ УДАРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НОРМАЛЬНОГО ТИПА

© 2024 г. И. В. Кириллова^{а,*}

^аФГБОУ ВО «СГУ им. Н.Г. Чернышевского», Саратов, Россия

* e-mail: nano-bio@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 21.06.2024 г.

После доработки 27.06.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

В данной статье построен метод решения краевой задачи для эллиптического погранслоя, имеющего место в тонкостенных оболочках вращения при ударных воздействиях нормального вида на лицевые поверхности. Эллиптический погранслой строится в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея и описывается эллиптическими уравнениями с граничными условиями, задаваемыми уравнениями гиперболического типа. В общем случае оболочек вращения не могут быть использованы методы решения уравнений для эллиптического погранслоя, разработанные для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны. Рассматриваемая ранее схема использования интегральных преобразований Лапласа и Фурье перестаёт работать, поскольку разрешающие уравнения становятся уравнениями с переменными коэффициентами. Предложенный в данной статье метод решения уравнений эллиптического погранслоя основан на использовании асимптотического представления изображений решения по Лапласу (по времени) в экспоненциальной форме. В работе приведён численный расчёт нормального напряжения по полученным аналитическим решениям для случая сферической оболочки.

Ключевые слова: асимптотический метод, эллиптический погранслой, оболочка вращения, сферическая оболочка, фронт поверхностных волн Рэлея, преобразование Лапласа, преобразование Фурье

DOI: 10.31857/S1026351924050045, EDN: UBVQQG

1. Введение. При ударных воздействиях нормального типа NW (в соответствии с классификацией У.К. Нигула [1,2]), возникает эллиптический погранслой, определяющий особый тип нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) в тонких пластинах и оболочках в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. Данный погранслой и выделяет нормальный тип ударного воздействия NW среди других видов ударных воздействий – продольного, изгибающего типа (LM) и продольного, тангенциального типа (LT).

Асимптотический подход к выводу уравнений теории оболочек был впервые разработан в трудах А.Л. Гольденвейзера [3, 4]. Концепция изменяемости напряженно-деформированного состояния (НДС) по координатам и её количественная оценка через показатели изменяемости позволила сформулировать принципы асимптотического интегрирования точных трёхмерных уравнений теории упругости в статике и получить этим методом уточнённые уравнения теории оболочек. Также удалось выделить составляющие НДС (безмоментная составляющая, простой краевой эффект и др.) как в статике, так и стационарной динамике, а также построить асимптотические методы их определения.

Разработанный для задач статики и стационарной динамики асимптотический подход дал возможность создать принципиально новую асимптотическую теорию нестационарных процессов деформации тонких оболочек [5–8], основанную на варианте метода сращиваемых разложений, позволяющего разделить фазовую область на различные участки, обладающие теми специфическими значениями показателей изменяемости и динамичности, которые соответствуют известным особенностям поведения нестационарных волн. В качестве таких особенностей, отличающих нестационарные задачи от задач статики и стационарной динамики, являются различные виды фронтов и квазифронтов, отражающих ударный характер приложения нагрузки.

В рамках разрабатываемой асимптотической теории нестационарных волн появилась необходимость нахождения новых асимптотических методов вывода приближенных теорий из точных трёхмерных уравнений теории упругости. Асимптотические уравнения двумерных составляющих, соответствующих классической теории Кирхгофа–Лява, получены в работе [5]. Общий подход к выводу уравнений для НДС в окрестностях фронтов волн и волновых квазифронтов изложен наиболее полно в работах [6–8]. В итоге были выделены безмоментная и изгибающая составляющая двумерной теории Кирхгофа–Лява, гиперболические погранслои в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига, параболический погранслой в окрестности квазифронта, связанного с ложным фронтом волны растяжения-сжатия по двумерной теории Кирхгофа–Лява и эллиптический погранслой в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. При различных типах ударных воздействий эти компоненты применяются в разных комбинациях, но полнота таких представлений доказывается наличием и определением расположения так называемых областей согласования соседних составляющих.

Проведённые исследования показали, что ни одна из известных двумерных теорий не может описать полностью рассматриваемую волновую картину вследствие высокой изменяемости и принципиально разного поведения нестационарного НДС в малых окрестностях фронтов и квазифронтов.

В работах [8, 9] окончательно описано построение асимптотически оптимальных уравнений эллиптического погранслоя в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. Выявлены уникальные свойства этого погранслоя: поведение решения вне лицевых поверхностей оболочки описывается эллиптическими уравнениями, а на поверхности для потенциальных функций, определяющих решение, описывается гиперболическими

уравнениями. Отметим, что такие качественные свойства решения базируются на анализе дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости в классической задаче Лэмба [10], объясняющего эффект так называемых поверхностных волн. В работе [9] также получено решение для эллиптического погранслоя в случае цилиндрической оболочки: используются интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по продольной координате.

В общем случае оболочек вращения, когда разрешающие уравнения содержат переменные коэффициенты, метод их решения, разработанный в [9], неприменим. В данной статье описывается новый разработанный асимптотический метод решения искомых уравнений в случае нормальной ударной нагрузки на лицевые поверхности произвольных оболочек вращения. Используются асимптотические методы в пространстве интегрального преобразования Лапласа по времени. В качестве примера приведены результаты расчёта нормального напряжения для сферической оболочки.

2. Постановка задачи. Рассмотрим оболочку вращения, изображённую на рис. 1, где система координат (α, θ, z) привязана к срединной поверхности: α – длина дуги вдоль образующей, θ – угол в окружном направлении, z – внешняя нормаль к срединной поверхности. Напряжения и перемещения оболочки обозначим как σ_{ij} и v_i ($i, j = 1, 2$).

Для определенности рассмотрим осесимметричное НДС.

Граничные условия на лицевых поверхностях оболочки выберем в форме, аналогичной [9]:

$$\sigma_{33} = -P(\alpha, t), \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } z = \pm h, \quad |\alpha| \leq L,$$

$$\sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } z = \pm h, \quad |\alpha| > L,$$

где h – полутолщина оболочки, t – время, L – ширина кольца нагрузки на поверхности. Ударное воздействие $P(\alpha, t)$ определяется следующим образом

$$P = pH(L - \alpha)H(t) \quad \text{при } \alpha \geq 0,$$

$$P = pH(L + \alpha)H(t) \quad \text{при } \alpha \leq 0.$$

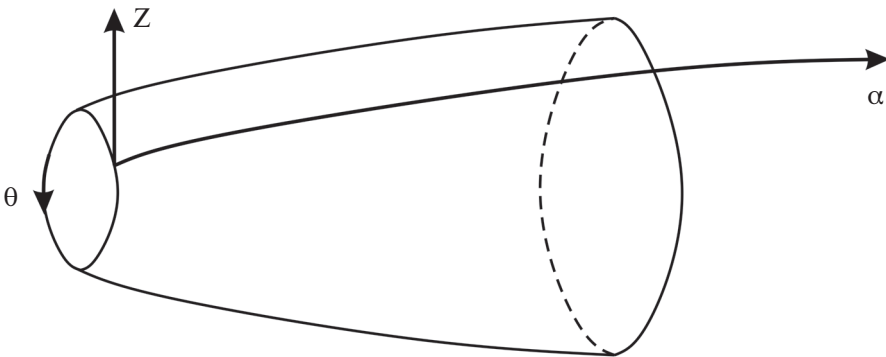


Рис. 1. Полубесконечная оболочка вращения.

Здесь p – амплитуда нагрузки, а $H(t)$ – единичная функция Хевисайда. При этом рассматриваются однородные начальные условия

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 3) \quad \text{при } t = 0.$$

Разрешающие уравнения эллиптического погранслоя при рассматриваемых воздействиях описаны в [8]. В исходной форме они записываются относительно объёмных и сдвиговых потенциалов $\varphi_i, \psi_i (i = 1, 2)$, когда потенциальные функции φ_1, ψ_1 определяют распространение возмущений в положительном направлении оси z , а φ_2 и ψ_2 – в отрицательном. Ограничиваясь рассмотрением только волны, инициируемой лицевой поверхностью $z = -h$, выпишем, соответственно, разрешающую систему уравнений только для потенциалов φ_1, ψ_1 (индекс «1» опускаем) в безразмерной форме в координатах $\xi = \alpha/h, \zeta = z/h, \tau = c_2 t/h$ (c_2 – скорость волны сдвига). Тогда уравнения, описывающие НДС рассматриваемого погранслоя, имеют форму

$$\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} &= 0, \\ b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

и являются уравнениями эллиптического типа, где $a = \sqrt{1 - \varkappa^2 \varkappa_R^2}$; $b = \sqrt{1 - \varkappa_R^2}$; $\varkappa^2 = c_1/c_2 = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$; $\varkappa_R = c_R/c_2$; c_1 и c_R – скорости волн расширения и поверхностных волн Рэлея; ν – коэффициент Пуассона. Граничные условия на лицевой поверхности описываются уже гиперболическими уравнениями

$$\begin{aligned} \varkappa_R^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= \frac{(1 + \nu)h \varkappa_R B_\omega}{E} P, \quad \zeta = -1, \\ \left(a + \frac{\varkappa^2 \varkappa_R^2}{2a} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\varkappa^2}{2a} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{1}{2a} \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \\ + \left(g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= 0, \quad \zeta = \pm 1, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где E – модуль Юнга, $\varepsilon = h/R$ – малый параметр тонкостенности оболочки, R – характерное значение радиусов кривизны, B – расстояние до оси вращения, а постоянные g, k_c, B_ω определяются выражениями

$$g = 1 - \frac{\varkappa_R^2}{2}, \quad B_\omega = 2 \left[\frac{\varkappa_R}{1 - \varkappa_R^2} + \frac{\varkappa \varkappa_R}{1 - \varkappa^2 \varkappa_R^2} - \frac{4\varkappa_R}{2 - \varkappa_R^2} \right]^{-1}, \quad k_c = 2 + \varkappa_R B_\omega.$$

Отметим, что поведение НДС в области рассматриваемого погранслоя можно наглядно анализировать на примере нормального напряжения σ_{33} , выражающегося через потенциалы следующим образом:

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{(1+\nu)h} \left[\left(g + \frac{\varkappa_R^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{B'}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + \left(b + \frac{\varkappa_R^2}{2b} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2b} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \varepsilon \left(b + \frac{1}{2b} \right) \frac{B'}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right].$$

3. Асимптотическое решение для эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударном воздействии нормального типа на лицевые поверхности.

В цитируемой работе [8] приведено решение для рассматриваемого эллиптического погранслоя в случае цилиндрической оболочки. В этом случае уравнения (2.1)–(2.2) становятся уравнениями с постоянными коэффициентами, и для их решения были применены интегральные преобразования Лапласа по временной, а Фурье – по продольной переменной.

Разрешающие уравнения эллиптического погранслоя для рассматриваемого общего случая оболочек вращения имеют переменные коэффициенты, и поэтому вышеизложенная методика для нашего общего случая не подходит. Однако переменные коэффициенты являются при этом медленно изменяющимися по продольной координате. Это позволяет использовать в нашей работе, в качестве ключевого, метод экспоненциального представления в пространстве преобразования Лапласа по временной переменной. Главной особенностью предлагаемого здесь асимптотического подхода является определение выражения для изображения по Лапласу искомого решения в рассматриваемом случае оболочек вращения через известное решение для цилиндрической оболочки.

Рассмотрим сначала поведение потенциала ψ на границе $\zeta = -1$, определяемое первым уравнением системы (2.2), которое для его изображения по Лапласу примет вид

$$\varkappa_R^2 \frac{d^2 \psi_0^L}{d\xi^2} - s^2 \psi_0^L + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{d\psi_0^L}{d\xi} = \frac{(1+\nu)h}{E} \frac{\varkappa_R B_\omega}{b} P^L, \quad (3.1)$$

$$\psi_0 = \psi|_{\zeta=-1}, \quad \psi_0^L = \int_0^\infty \psi_0 e^{-s\tau} d\tau, \quad P^L = \begin{cases} \frac{P}{s}, & |\xi| \leq L, \\ 0, & |\xi| > L, \end{cases}$$

где s – параметр преобразования Лапласа.

Проанализируем свойства решения для двойного интегрального преобразования (Лапласа по времени и Фурье по продольной координате) граничного значения потенциальной функции ψ_0 в случае цилиндрической оболочки. Оно легко получается из (3.1) при $B(\xi_0) = \text{const}$:

$$\psi_0^{LF} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1+\nu)h}{E} p \frac{\varkappa_R B_\omega}{b} \frac{\sin \chi L}{s\chi(\varkappa_R^2 \chi^2 + s^2)},$$

$$\psi_0^F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \psi_0 e^{-i\chi\xi} d\xi. \quad (3.2)$$

Обращение преобразования Фурье для изображения (3.2) даёт, в соответствии с [11], следующее выражение для ψ_0^L :

$$\begin{aligned} \xi_0 \leq L_0 : \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\kappa_R B_\omega}{E} p \frac{1}{s^3} \left[1 - \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\xi_0 - L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} + e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} \right) \right], \\ \xi_0 \geq L_0 : \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\kappa_R B_\omega}{E} p \frac{1}{s^3} \left(e^{-\frac{\xi_0 - L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} - e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\kappa_R \varepsilon} s} \right), \quad L_0 = \varepsilon L, \quad \xi_0 = \frac{\alpha}{R}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В решении (3.3) слагаемые с $e^{\pm \frac{\xi_0 \pm L_0}{\kappa_R \varepsilon} s}$ определяют волны, возбуждаемые границами приложения ударной поверхностной нагрузки $\xi_0 = \pm L_0$. Так, в области $\xi_0 > 0$ граница $\xi_0 = L_0$ возбуждает прифронтовое поле в окрестности условного фронта поверхности волн Рэлея $\xi_0 = \kappa_R \tau_0 + L_0$ (слагаемое $\exp\{-[(\xi_0 - L_0)/(\kappa_R \varepsilon)]s\}$) и прифронтовое поле в окрестности фронта $\xi_0 = L_0 - \kappa_R \tau_0$ (слагаемое $\exp\{[(\xi_0 - L_0)/(\kappa_R \varepsilon)]s\}$). В этой же области $\xi_0 > 0$ граница $\xi_0 = -L_0$ возбуждает прифронтовое поле в окрестности фронта $\xi_0 = \kappa_R \tau_0 - L_0$ (слагаемое $\exp\{-[(\xi_0 + L_0)/(\kappa_R \varepsilon)]s\}$).

Отметим, что решение (3.3) можно непосредственно получить из (3.1) как линейную комбинацию частного решения неоднородного уравнения и общих решений уравнения однородного, определяющих вышеописанные волновые поля. Проведенный анализ позволяет построить асимптотическое решение уравнения (3.1) для общего случая оболочек вращения. Так, решения для волновых составляющих можно получить из однородного уравнения

$$\kappa_R^2 \frac{d^2 \psi_0^L}{d\xi^2} - s^2 \psi_0^L + \varepsilon k_c \frac{B'}{B} \frac{d\psi_0^L}{d\xi} = 0 \quad (3.4)$$

методом экспоненциальных представлений с погрешностью $O(\varepsilon)$ в виде

$$\psi_0^L = C(s) \Psi(\xi_0, s) e^{\frac{\lambda(s)\xi_0}{\varepsilon}}, \quad (3.5)$$

где $\lambda(s)\xi_0/\varepsilon$ – специальный вид функции изменямости, $C(s)$ – постоянная интегрирования, а $\Psi(\xi_0, s)$ – медленно изменяющаяся функция интенсивности, представляемая разложением в степенной ряд по малому параметру ε .

Подставляя (3.5) в (3.4), получаем с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ следующее уравнение

$$(\kappa_R^2 \lambda^2 - s^2) \Psi - \varepsilon \left(2\kappa_R^2 \lambda \Psi' + k_c \frac{B'}{B} \lambda \Psi \right) = 0,$$

которое даёт выражение для функции изменямости

$$\lambda = \pm \frac{1}{\kappa_R} s$$

и нулевое приближение для функции интенсивности

$$\Psi(\xi_0, s) = \frac{1}{B^{k_r}}, \quad k_r = \frac{k_c}{2\alpha_R^2}.$$

Поскольку частное решение неоднородного уравнения (3.1) с погрешностью $O(\varepsilon)$ записывается в виде

$$\psi_0^L = -\frac{(1+\nu)h\alpha_R B_\omega}{E} \frac{1}{b} p \frac{1}{s^3},$$

полностью соответствующему такому же частному решению в (3.3), то общее решение уравнения (3.1) может быть получено при использовании волновых решений (3.5) за счёт выбора постоянных интегрирования $C(s)$ при условии его непрерывности в точках $\xi_0 = \pm L_0$. В итоге получаем следующее решение:

$$\begin{aligned} \xi_0 \leq L_0: \quad \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\alpha_R B_\omega}{E} \frac{1}{b} \frac{1}{s^3} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \left(e^{\frac{\xi_0 - L_0}{\alpha_R \varepsilon} s} + e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\alpha_R \varepsilon} s} \right) \right], \\ \xi_0 \geq L_0: \quad \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\alpha_R B_\omega}{E} \frac{1}{2b} \frac{1}{s^3} \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \left(e^{-\frac{\xi_0 - L_0}{\alpha_R \varepsilon} s} - e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\alpha_R \varepsilon} s} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Полученное решение (3.6) полностью обобщает соответствующее решение (3.3) для случая цилиндрической оболочки. Поскольку нас интересуют асимптотики только в малых окрестностях условных фронтов волн Рэлея, то решение (3.6) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \xi_0 \leq L_0: \quad \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\alpha_R B_\omega}{E} \frac{1}{b} \frac{1}{s^3} \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\xi_0 - L_0}{\alpha_R \varepsilon} s} + e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\alpha_R \varepsilon} s} \right) \right], \\ \xi_0 \geq L_0: \quad \psi_0^L &= -\frac{(1+\nu)h\alpha_R B_\omega}{E} \frac{1}{2b} \frac{1}{s^3} \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \left(e^{-\frac{\xi_0 - L_0}{\alpha_R \varepsilon} s} - e^{-\frac{\xi_0 + L_0}{\alpha_R \varepsilon} s} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, из вида асимптотики решения (3.7) следует, что она связана с соответствующим решением для цилиндрической оболочки следующим образом:

$$\psi_0^L = \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \psi_{0,c}^L, \quad (3.8)$$

где $\psi_{0,c}^L$ является соответствующим решением для цилиндрической оболочки.

Перейдём к определению потенциалов φ, ψ в основной области. Анализируем систему (2.1)–(2.2) и выражение (2.3), приходим к выводу, что только первое уравнение в граничных условиях (2.2) содержит в асимптотически главной части волновой оператор, определяющий НДС в окрестностях условных фронтов поверхностных волн Рэлея. Следовательно, только в этом уравнении нужно учитывать величины нулевого и первого порядка малости;

в остальных же уравнениях достаточно удерживать только асимптотически главные величины. Следовательно, аналогично зависимости (3.8), все компоненты НДС могут быть представлены в виде

$$\sigma_{ij}^L = \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \sigma_{j,c} \quad v_i^L = \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} v_{i,c}^L.$$

где $\sigma_{j,c}, v_{i,c}^L$ соответствующие решения для случая цилиндрической оболочки. Следовательно, аналогичные зависимости имеют место и для оригиналов:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} \sigma_{j,c} \quad v_i^L = \left(\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right)^{k_r} v_i.$$

Окончательно, используя результаты решения задачи об эллиптическом погранслое для цилиндрической оболочки [8], получаем следующее решение для напряжения σ_{33} :

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = \frac{B_\omega p}{2\pi r_R} \left[\frac{B(L_0)}{B(\xi_0)} \right]^{k_r} & \left[-\operatorname{arctg} \left(\frac{2La(\zeta + 1)}{a^2(\zeta + 1)^2 - L^2 + (\xi - r_R \tau)^2} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left(\frac{2Lb(\zeta + 1)}{b^2(\zeta + 1)^2 - L^2 + (\xi - r_R \tau)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Асимптотический анализ решения (3.9) показывает, что вне малых окрестностей условного фронта волны Рэлея его порядок уменьшается до $O(\varepsilon)$. Отметим также следующую особенность рассматриваемого решения: вне узкой прифронтальной зоны эллиптического погранслоя [8,9] порядка $O(\varepsilon^2)$ решение для σ_{33} имеет порядок $O(1)$ только в малой приторцевой зоне $\zeta + 1 = O(\varepsilon)$. Следовательно, важнейшее предположение о достаточности отдельного рассмотрения волн, инициируемых каждой лицевой поверхностью, полностью оправдывается при построении решения в этой области:

$$\xi_0 - (r_R \tau_0 \pm L_0) = O(\varepsilon^2),$$

где, как и показывают численные расчёты, имеет место первый скачок напряжения σ_{33} .

4. Анализ решения для эллиптического погранслоя в случае сферической оболочки. Рассмотрим свойства решения для нормального напряжения σ_{33} в зависимости от пространственных переменных и времени на примере сферической оболочки. На рис. 2 изображена схема сечения срединной поверхности такой оболочки плоскостью, проходящей через центр сферы. Для наглядности определения зависимости B (расстояния от текущей точки срединной поверхности до оси вращения) введены следующие обозначения: точка T – пересечение торцевой поверхности со срединной линией; точка A соответствует координате α_0 ; точка O_2 – граничная точка оси вращения; α_0 – текущая

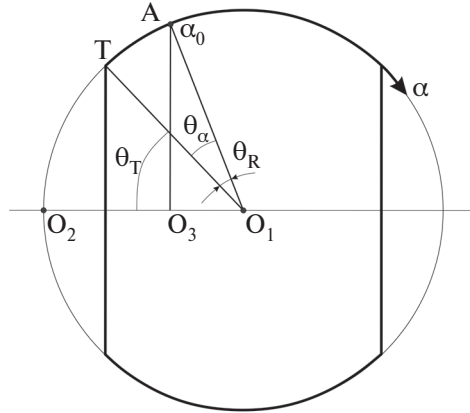


Рис. 2. Геометрия сечения сферической оболочки.

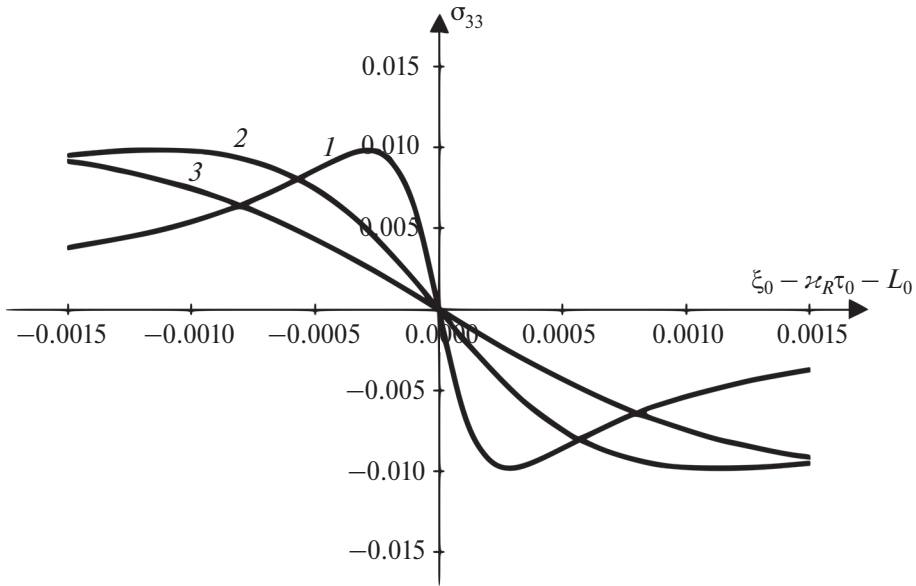


Рис. 3. График нормального напряжения σ_{33} в малой окрестности условного фронта волны Рэлея $\xi_0 = \nu_R \tau_0 + L_0$ в момент времени $\tau_0 = 1$ для значений нормальной координаты $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$.

координата; углы θ_T и θ_α соответствуют радиусам до точек T и A . Поскольку $\theta_\alpha = \alpha/R$, получаем выражение для $B(\alpha_0)$ через α_0 и угол θ_T

$$B = R \sin \theta_R = \sin \left(\theta_T + \frac{\alpha}{R} \right). \quad (4.1)$$

Выражение (4.1) даёт возможность полностью определить закон распределения напряжения σ_{33} по координатам и времени в области действия эллиптического погранслоя.

На рис. 3. изображены графики нормального напряжения σ_{33} в малой окрестности условного фронта волны Рэлея $\xi_0 = \nu_R \tau_0 + L_0$, возбуждаемого границей приложения нагрузки $\xi_0 = L_0$. Здесь кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям нормальной координаты $\zeta = -0.99, -0.96, -0.92$. Расчёты проведены для момента безразмерного времени $\tau_0 = 1$. Геометрические и механические параметры принимались следующими: $L_0 = 0.2$, $\theta_T = 0.93$, $\nu = 0.3$, $\nu_R = 0.93$.

Расчёты подтверждают выводы предшествующего параграфа: первый скачок напряжения сосредоточен в узкой прифронтной зоне и полностью сосредоточен в малой окрестности лицевой поверхности.

5. Заключение. В данной статье впервые представлен специфический асимптотический метод решения задачи для эллиптического погранслоя в произвольных оболочках вращения при ударных поверхностных нагрузках нормального типа. Он основан на решении на первом этапе базовой задачи для граничного значения потенциальной функции методом экспоненциальных представлений в пространстве интегрального преобразования Лапласа по временной переменной с последующим представлением компонент НДС через соответствующие компоненты эталонной задачи для цилиндрической оболочки. Проведённые численные расчёты полностью подтверждают правильность предложенного асимптотического подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nigul U.* Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // *Int. J. Solids Struct.* 1969. V. 5. № 6. P. 607–627.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90031-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90031-6)
2. *Нигул У.К.* Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям // *ПММ.* 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 308–332.
3. *Гольденвейзер А.Л.* Теория тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
5. *Каплунов Ю.Д., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю.* Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек // *ПММ.* 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 83–91.
6. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 176 с.
7. *Kaplunov J.D., Nolde E. V., Kossovich L.Y.* Dynamics of thin walled elastic bodies. Academic Press, 1998. 226 p.
8. *Кириллова И.В., Коссович Л.Ю.* Асимптотическая теория волновых процессов в оболочках вращения при ударных поверхностных и торцевых нормальных воздействиях // *Изв. РАН. МТТ.* 2022. № 2. С. 35–49.
<https://doi.org/10.31857/S057232992202012X>

9. Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Уточненные уравнения эллиптического погранслоя в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа // Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4. № 1. С. 113–120.
10. Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости. Доклады Академии наук. 2004. Т. 395. № 4. С. 482–484.
11. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of integral equations. 2nd ed. Chapman & Hall/CRC Press, 2008. 1108 p.

ELLIPTIC BOUNDARY LAYER IN SHELLS OF REVOLUTION UNDER SURFACE SHOCK LOADING OF NORMAL TYPE

I. V. Kirillova^{a, *}

^a*Saratov State University, Saratov, Russia*

^{*}*e-mail: nano-bio@info.sgu.ru*

Abstract. This article presents a method for solving the boundary-value problem for an elliptic boundary layer occurring in thin-walled shells of revolution under impact loads of normal type applied to the face surfaces. The elliptic boundary layer is formed in the vicinity of the conditional front of Rayleigh surface waves and is described by elliptic equations with boundary conditions determined by hyperbolic equations. In the general case of shells of revolution, methods for solving elliptic boundary layer equations developed for shells of revolution with zero Gaussian curvature cannot be applied. The previously considered approach using Laplace and Fourier integral transforms fails because the governing equations become equations with variable coefficients. The method proposed in this article for solving the equations of the elliptic boundary layer is based on the use of asymptotic representations of the Laplace-transformed solutions (in time) in exponential form. Numerical calculations of normal stresses based on the obtained analytical solutions are provided for the case of a spherical shell.

Keywords: asymptotic method, elliptic boundary layer, shell of revolution, spherical shell, front of Rayleigh surface waves, Laplace transform, Fourier transform

REFERENCES

1. Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Int. J. Solid and Structures. Vol. 5. № 6. 1969. P. 607–627.
2. Nigul U. Comparison of the results of the analysis of transient wave processes in shells and plates according to the theory of elasticity and approximate theories // Applied Mathematics and Mechanics. 1969. Vol. 33. Issue 2. Pp. 308–332.
3. Gol'Denveizer A.L. Theory of Elastic Thin Shells // Pergamon. 1961, p. 680.
4. Gol'Denveizer A.L., Lidskiy V.B., Tovstik P.E. Free vibrations of thin elastic shells. 1979. 384 p.

5. *Kaplunov Yu.D., Kirillova I.V., Kossovich L.Yu.* Asymptotic integration of the dynamic equations of the theory of elasticity for the case of thin shells. *J. Appl. Math. Mech.* Volume 57, Issue 1, pp. 95–103.
6. *Kossovich L.Yu.* Non-stationary problems of the theory of elastic thin shells. Saratov, 1986, 176 p.
7. *Kaplunov J.D., Nolde E. V., Kossovich L.Y.* Dynamics of thin walled elastic bodies // Academic Press. 1998. P. 226.
8. *Kirillova I.V., Kossovich L.Y.* Asymptotic theory of wave processes in shells of revolution under surface impact and normal end actions *Mechanics of Solids*. 2022. Т. 57. № 2. P. 232–243.
9. *Kirillova I.V., Kossovich L.Y.* refined equations of elliptic boundary layer in shells of revolution under normal shock surface loading. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*. 2017. Т. 50. № 1. С. 68–73.
10. *Kaplunov Yu.D., Kossovich L.Yu.* Asymptotic model for calculating the far field of a Rayleigh wave in the case of an elastic half-plane. *Reports of the Academy of Sciences*. 2004. Vol. 395. No. 4. Pp. 482–484.
11. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of integral equations. 2nd ed. Chapman & Hall/CRC Press. 2008. P. 1108.