

УДК 539.374

О СБОРКЕ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКОЙ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИСКА С НЕКРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

© 2024 г. А. А. Буренин^а, А. В. Ткачева^{а, *}

^аИнститут машиноведения и металлургии ДВО РАН,
Комсомольск-на-Амуре, Россия

*e-mail: 4nansi4@mail.ru

Поступила в редакцию 03.05.2024 г.

После доработки 13.05.2024 г.

Принята к публикации 14.05.2024 г.

Решением неодноточечной краевой задачи теории плоских температурных напряжений рассчитывается уровень и распределение температурных напряжений в каждый момент времени процесса проведения технологической операции сборки составного диска горячей посадкой, когда охватываемая деталь сборки отлична от круговой пластины. Вычисляются остаточные напряжения в элементах сборки и итоговый натяг в ней после ее остывания до комнатной температуры. Текущие и остаточные напряжения рассчитываются в зависимости от предварительного нагрева охватывающего кольца, термомеханических свойств сопрягаемых деталей и их изначальной геометрии. Пределы текучести упруговязкопластических элементов сборки полагаются существенно зависимыми от местной температуры. Обращается внимание на необходимость исключения сингулярности при постановке граничных условий на поверхностях сопряжения деталей сборки.

Ключевые слова: упругость, вязкопластичность, температурные напряжения, горячая посадка, сборка с натягом, задача Гадолина

DOI: 10.31857/S1026351924050039, EDN: UBVBAN

Введение. В машиностроении в числе технологий сборки с натягом [1] остается востребованной операция горячей посадки цилиндрических деталей. Данная технологическая операция простая в своём производстве: холодную охватываемую деталь помещают в предварительно нагретую охватывающую (радиус цилиндрических деталей назначают заранее) и предоставляют возможность собранной конструкции остыть до комнатной температуры. Итогом является достаточно прочное соединение, удовлетворяющее назначенным функциональным требованиям. Технологическая операция горячей посадки таким способом полностью определяется процессом теплопроводности, выравнивающим распределение температуры по элементам соединения, доводя ее до однородно распределенной комнатной

температуры. В любой момент времени проведения операции посадки уровень и распределение температуры по формирующейся конструкции задают в ней соответствующее распределение температурных напряжений. Когда температура по сборке выравнивается и отпускается до комнатной, достигнутый уровень температурных напряжений в деталях сборки задает натяг в ней, определяя таким способом прочностные и иные функциональные качества собранной конструкции.

Красивую задачу теории неустановившихся температурных напряжений [2] моделирующую процесс горячей посадки называем задачей Гадолина [3–6], тем самым подчеркивая определяющую роль академика А.В. Гадолина в постановке данной проблемы применительно к сборке двухслойных стволов артиллерийских орудий [7].

Задача Гадолина является задачей расчета термомеханического процесса. Обычно [8] такой расчет производится последовательными шагами по времени, на каждом шаге которого разрешается задача о состоянии конструкции, то есть рассчитывается напряженно-деформированное состояние элементов в зависимости от достигнутого распределения температуры. Рассчитать такие состояния, особенно учитывая неизбежно возникающие области необратимого деформирования, бывает не просто [9–12]. Аналитическим расчетам в таких случаях способствует использование [3, 8, 13–15] кусочно-линейных пластических потенциалов, то есть классических условий пластичности максимальных касательных напряжений (условие Треска–Сен-Венана) или максимальных приведенных напряжений (условие Ишлинского–Ивлева) [16, 17].

Гладкое условие пластического течения максимальных октаэдрических напряжений (условие Мизеса [16, 17]) в качестве средств вычислений температурных напряжений в исследуемый момент времени заставляет обращаться к приближенным численным методам. Последние используются часто также в выборе условий пластичности Треска–Сен-Венана. Укажем некоторые публикации [18–21] разрешающие приближенным численным способом преимущественно одномерные задачи, включая задачу Гадолина о горячей посадке. Однако кусочно-линейные пластические потенциалы, помогающие аналитически рассчитать в зафиксированный момент времени температурные напряжения, несут в себе иную сложность. В условиях использования в расчетах данных потенциалов пластическая область разбивается на части [3, 5, 15, 22], где пластическое (вязкопластическое) течение подчинено различным системам уравнений в зависимости от соответствия напряжений разным граням или ребрам призм Треска или Ивлева [16, 17] в пространстве главных напряжений. Число подобластей в таком разделении может быть несколько; с возникновением повторных пластических течений [3, 23] число это только возрастает. В расчетах температурных напряжений в рамках одномерных задач Гадолина [3, 8, 14, 22–24] имеется возможность алгоритмически отследить моменты зарождения разных областей течения, их развитие с возможным делением, затуханием и схлопыванием. При решении задач теории температурных напряжений, отличных от одномерных, алгоритмически проследить за эволюцией различных областей пластических течений практически невозможно. Использование в расчетах гладкого условия пластичности Мизеса

оказывается здесь приемлемой альтернативой [6, 9, 24], так как в этом случае разделения области пластичности не происходит. В [6] сравниваются результаты расчетов, полученные с использованием классических условий пластического течения, максимальных касательных и максимальных октаэдрических напряжений.

Граничные условия неоднородных краевых задач теории неустановившихся температурных напряжений могут включать разрывы на граничных поверхностях задаваемых функций [6, 24]. Очевидно, что в процессе расчетов от такой сингулярности следует избавиться. Иначе [24] следует даже качественно ошибочный результат. Здесь рассматривается еще один вид сингулярности в задаваемых граничных условиях и указывается возможный способ избавления от такой особенности.

1. Постановка задачи. Исходные зависимости модели. Принимаем, что круглое тонкое кольцо с внешним радиусом $r = R_1$ и внутренним $r = R_2$ насаживается на тонкую пластину (рис. 1), две кромки которой AB и CD прямолинейны, а две другие $\widehat{AC}$ и $\widehat{BD}$ являются дугами окружности радиуса $r = R_3$. Таким образом сегменты AMB и CND (рис. 1) материалом не заполнены. Пластинку $ABDC$ считаем металлической с известными термомеханическими свойствами и называем далее охватываемой деталью сборки (I – рис. 1). Кольцо (II – рис. 1) также считаем изготовленным из металла, отличного от металла охватываемой детали I, и называем охватывающей деталью сборки. Последняя нагревается до некоторой достаточно высокой однородной температуры $T = T_*$, после чего в неё помещается охватываемая деталь I. Начало процесса посадки связываем с совпадением размеров $R_2 = R_3 = R$. При должном назначении R_2 и R_3 данное совпадение происходит достаточно быстро.

Целью расчетов считаем указание распределения изменяющихся температурных напряжений в элементах сборки во все последующие времена $t > 0$ технологической операции, включая распределение остаточных напряжений после остывания собранной конструкции до комнатной температуры.

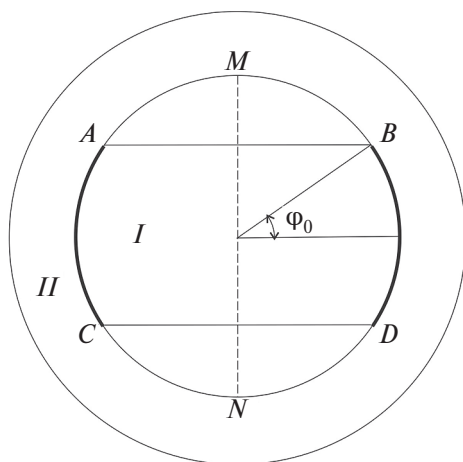


Рис. 1. Геометрия сборки.

Принимаем следующие допущения: материалы деталей сборки считаем упруговязкопластическими, пренебрегая упрочнением их в условиях возможного вязкопластического течения; пренебрегаем связанностью процессов деформирования и теплопроизводства, считая прирост тепла за счет деформирования пренебрежительно малым в сравнении с теплом, нагревшим изначально охватывающее кольцо до температуры T_* . Принятые допущения позволяют провести расчеты в рамках теории неустановившихся температурных напряжений, то есть в рамках несвязанной теории.

Деформации полагаются малыми, массовыми силами пренебрегается. Используется квазистатический подход, то есть силы инерции не учитываются. Тогда следствием законов сохранения является соотношения

$$\nabla \sigma = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{d\xi}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \sigma \cdot \varepsilon, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

В уравнении равновесия (1.1) σ – тензор напряжений. В уравнении баланса внутренней энергии (1.2) ρ – плотность; ξ – плотность распределения внутренней энергии; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{q}$ – векторы перемещений, скоростей и потока тепла; ε – тензор скоростей деформации Эйлера, t – текущее время.

Тензор малых деформаций разделяется на обратимую и необратимую (пластическую) составляющие

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) = \mathbf{e} + \mathbf{p}. \quad (1.3)$$

Функцию $\xi(\mathbf{d}, s)$, где s – плотность распределения энтропии, принимаем в качестве термодинамического потенциала, для которого $\partial \xi / \partial s = T$ – температура. Введем иной термодинамический потенциал $\psi(\mathbf{d}, T) = \xi(\mathbf{d}, T) - sT$, называемый свободной энергией. Принимаем, что плотность распределения свободной энергии не зависит от необратимых деформаций: $\psi = \psi(\mathbf{e}, T)$. Это позволяет разделить консервативную и диссипативную составляющие процесса деформирования так, что из (1.2) и (1.3) следует [26]

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi(\mathbf{e}, T)}{\partial \mathbf{e}}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \nabla T + \frac{1}{T} \sigma \cdot \varepsilon^p, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{J} = \rho s \mathbf{v} + \frac{1}{T} \mathbf{q}, \quad \varepsilon^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}, \quad \varepsilon^p + \varepsilon^e = \varepsilon.$$

Здесь $\mathbf{J}$ – вектор потока энтропии, ε^p – тензор скоростей пластических деформаций. Полагая материалы сопрягаемых элементов сборки изотропными и принимая простейшую (квадратную) зависимость для $\psi(\mathbf{e}, T)$ от инвариантов тензора $\mathbf{e}$ из (1.4) получим соотношения закона Дюамеля–Неймана

$$\boldsymbol{\sigma} = (\lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} + 3\alpha T_0 K \theta) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.6)$$

$$\theta = T_0^{-1} (T - T_0), \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$$

В (1.6) T_0 — температура свободного состояния (комнатная температура) материалов элементов сборки; λ , μ , K — упругие постоянные, параметры Ламе и модуль всестороннего сжатия, α — коэффициент линейного температурного расширения, $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Если в качестве закона теплопроводности принять линейный закон Фурье с постоянным коэффициентом теплопроводности, то из уравнения баланса энтропии (1.5) следует уравнение теплопроводности в форме

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \Delta \theta - \frac{1}{c T_0} (\nu \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon}^e - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^p) + w(\mathbf{x}, t). \quad (1.7)$$

Здесь a , ν , c — коэффициенты температуропроводности, связанности и удельная теплоемкость; $w(\mathbf{x}, t)$ — возможные распределенные источники тепла в деформируемом теле ($\mathbf{x}$ — радиус вектор места действия источника тепла). Принятые допущения позволяют не учитывать в (1.7) источники тепла, производимого за счет деформирования, поэтому далее используется уравнение теплопроводности в форме

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \Delta \theta + w(\mathbf{x}, t). \quad (1.8)$$

Вязкопластическое течение в материалах деталей сборки происходит в условиях соответствия напряжений уравнению поверхности нагружения $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$ в пространстве напряжений. При принятии условий принципа максимума Мизеса или постулата Драккера [16] имеем ассоциированный с поверхностью нагружения закон пластического течения

$$\boldsymbol{\epsilon}^p = \zeta \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \zeta > 0. \quad (1.9)$$

В качестве уравнения поверхности нагружения в пространстве напряжений (условия вязкопластического течения) принимаем следующее обобщение условия пластичности Мизеса [17]

$$f(\boldsymbol{\sigma}, k) = \sqrt{\frac{3}{2} (\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\epsilon}^p) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\epsilon}^p)} - k = 0. \quad (1.10)$$

Из (1.9) и (1.10) следует

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{2k} \Sigma^2 - 1 \right), \quad \Sigma^2 = \frac{3}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ \boldsymbol{\epsilon}^p &= \frac{1}{\eta} \frac{\Sigma - k}{\Sigma} \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В (1.9)–(1.11) $k = k(\theta)$ — предел текучести в опытах на одноосное растяжение при $\theta = \text{const}$. Из-за зависимости от местной температуры в разных точках

сопрягаемых деталей предел текучести принимает разные значения. Начало вязкопластического течения ($\epsilon^p \neq 0$) в точках сборки связано с достижением напряженными состояниями поверхности нагружения. Такой начальной поверхностью в пространстве главных напряжений σ_j оказывается боковая поверхность наклонного цилиндра Мизеса [16], образующие которого параллельны гидростатической оси: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Обобщение классического условия пластичности связываем с учетом вязкого сопротивления, считая $\eta = \text{const}$ коэффициентом такой вязкости.

Зависимость предела текучести от температуры $k = k(\theta)$ конкретизируем далее в форме

$$k = k(\theta) = k_0 y, \quad y = \left(\frac{\theta_p - \theta}{\theta_p} \right)^2, \quad \theta_p = \frac{T_p - T}{T_p}. \quad (1.12)$$

Здесь T_p – температура плавления, наименьшая из температур плавления материалов деталей, участвующих в сборке.

2. Условия сборки. Температурная задача. Согласно принимаемой теории неустановившихся температурных напряжений уровень и распределение температуры по элементам сборки рассчитывается первоначально и отдельно. Сформируем с этой целью температурную задачу. Уравнение теплопроводности (1.8) запишем в используемой далее цилиндрической системе координат (r, φ, z)

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t} = a_n \left(\frac{\partial^2 \theta_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta_n}{\partial \varphi^2} \right) - 2\beta_n \theta_n \quad (2.1)$$

В (2.1) $n = 1$ для охватываемой детали сборки (рис. 1), $n = 2$ для охватывающей. Коэффициенты β_n , задающие отток тепла с поверхностей пластин считаем далее постоянными.

Часть поверхности $r = R$, где сопряжения пластин отсутствует обозначим через Φ_1 так, что при $\varphi \in \Phi_1$ имеем: $\varphi_0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0$ и $\pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_0$ (рис. 1). Для поверхности сопряжения Φ_2 аналогично запишем: $\varphi \in \Phi_2$; $\pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi + \varphi_0$ и $2\pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi + \varphi_0$. Тогда начальные условия температурной задачи запишутся в форме

$$\theta_1(r, \varphi, 0) = 0 \quad \text{при} \quad r \leq R \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \quad \text{и} \quad \varphi \in \Phi_2, \quad (2.2)$$

$$\theta_2(r, \varphi, 0) = \theta_* \quad \text{при} \quad R \leq r \leq R_1.$$

$$\theta_* = T_0^{-1}(T_* - T_0).$$

Условие теплообмена деталей сборки по общей их поверхности сопряжения записываются в виде

$$\begin{aligned} \theta_1(R, \varphi, t) &= \theta_2(R, \varphi, t) \\ \chi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \chi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad \text{при} \quad \varphi \in \Phi_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь χ_1, χ_2 — соответственно коэффициенты теплопроводности материалов деталей сборки.

Теплоотдачу от кромок сопрягаемых пластин в окружающую среду зададим с помощью условий

$$\begin{aligned} \chi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1} &= \beta_2 \theta_2(R_1, \varphi, t), \\ \chi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \Big|_{r=R} &= -\beta_2 \theta_2(R_1, \varphi, t) \quad \text{при } \varphi \in \Phi_1, \\ \chi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \sin \varphi + \chi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi} \cos \varphi &= \beta_1 \theta_1(r, \varphi, t) \quad \text{при } \begin{cases} \varphi \in \Phi_1, \\ r = R \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Начальные (2.2) и граничные (2.3), (2.4) условия формируют краевую задачу для уравнения теплопроводности (2.1), предназначенную определению распределения температуры $\theta_1(r, \varphi, t)$ по охватываемой пластине и температуры $\theta_2(r, \varphi, t)$ по охватываемому кольцу (рис. 1). В качестве упрощающего допущения в (2.1)–(2.4) принимается, что коэффициенты теплоотдачи β_n ($n = 1, 2$) являются постоянными. Разрешая сформированную температурную задачу последовательными шагами по времени, устанавливаем достигнутое к рассматриваемому моменту времени искомое распределение температуры по сопрягаемым элементам сборки.

3. Термомеханическая задача. Принятием условий плоских напряженных состояний зависящая переменная u_z исключается из числа искомых неизвестных. В числе неизвестных остаются перемещения $u_r(r, \varphi, t)$, $u_\varphi(r, \varphi, t)$ и ненулевые компоненты деформаций

$$d_{rr} = u_{r,r}; \quad d_{\varphi\varphi} = r^{-1}(u_{\varphi,\varphi} + u_r); \quad d_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\varphi}}{r} + r \left(\frac{u_\varphi}{r} \right)_{,r} \right). \quad (3.1)$$

В (3.1) координатой после запятой обозначена частная производная по ней. Этими зависимостями деформации в каждый момент времени (квазистатическое приближение) связываются с перемещениями. С их помощью в условиях плоских напряженных состояний ($\sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = \sigma_{zz} = 0$) задаются, следуя зависимостям закона Дюамеля–Неймана (1.6), ненулевые компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= l_1 u_{r,r} + l_2 r^{-1}(u_{\varphi,\varphi} + u_r) - 2\alpha T_0 l_3 \theta, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= l_1 r^{-1}(u_{\varphi,\varphi} + u_r) + l_2 u_{r,r} - 2\alpha T_0 l_3 \theta, \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(r^{-1} u_{r,\varphi} + r(r^{-1} u_\varphi)_{,r} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$l_1 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad l_2 = \frac{\mu(5\lambda + 6\mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad l_3 = \frac{3\mu K}{\lambda + 2\mu}.$$

В выбранной системе цилиндрических координат уравнения равновесия (1.1) в рассматриваемом случае записываются [27] в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{rr,r} + r^{-1}\sigma_{r\varphi,\varphi} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) &= 0, \\ \sigma_{r\varphi,r} + r^{-1}\sigma_{\varphi\varphi,\varphi} + 2r^{-1}\sigma_{r\varphi} &= 0.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Подстановка (3.2) в (3.3) позволяет записать систему двух дифференциальных уравнений относительно двух искомых функций $u_r(r, j, t)$ и $u_\varphi(r, j, t)$.

$$\begin{aligned}l_1(u_{r,rr} + r^{-1}u_{r,r} + r^{-2}u_r) + \mu r^{-2}u_{r,\varphi\varphi} + l_2r^{-1}u_{\varphi,r\varphi} - 2\alpha T_0 l_3 \theta_{,r} &= 0, \\ l_3r^{-1}u_{\varphi,r\varphi} + \mu u_{\varphi,rr} + l_1r^{-2}u_{\varphi,\varphi\varphi} + l_2r^{-2}u_{r,\varphi} + 3\mu r^{-1}u_{\varphi,r} - 5\mu r^{-2}u_\varphi - 2\alpha T_0 l_3 \theta_{,\varphi} &= 0.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Дифференциальные уравнения (3.4) справедливы в каждой точке обеих деталей сборки, поэтому они не снабжены указанием на выбираемую деталь. Материалы элементов сборки продолжают деформироваться обратимо (упруго) до поры пока напряжения (3.2) не достигнут поверхности нагружения (1.10). До этого момента времени деформированные состояния в каждой точке материалов сборки в каждый рассматриваемый момент технологической операции горячей посадки подчинены системе уравнений (3.4). Также считается, что в этих уравнениях распределение температуры $\theta = \theta(r, \varphi, t)$ найдено предварительно и отдельно решением соответствующей температурной задачи.

Расчет возникающих температурных деформаций и напряжений согласно (3.4) требует постановки для этой системы дифференциальных уравнений необходимых граничных условий. На контактной поверхности (линии) $r = R$ и $\varphi \in \Phi_2$ деталей сборки считаем непрерывными радиальные компоненты вектора перемещений и тензора напряжений

$$\begin{aligned}u_r^{(1)}(R, \varphi, t) &= u_r^{(2)}(R, \varphi, t), \\ \sigma_{rr}^{(1)}(R, \varphi, t) &= \sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi, t)\end{aligned}\quad \text{при } \varphi \in \Phi_2. \quad (3.5)$$

На свободных краях сопрягаемых пластин имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(2)}(R_1, \varphi, t) &= \sigma_{r\varphi}^{(2)}(R_1, \varphi, t) = 0, \\ \sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi, t) &= \sigma_{r\varphi}^{(2)}(R, \varphi, t) = 0\end{aligned}\quad \text{при } \varphi \in \Phi_1, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(1)}(r, \varphi, t) \sin(\varphi) + \sigma_{r\varphi}^{(1)}(r, \varphi, t) \cos \varphi &= 0, \\ \sigma_{r\varphi}^{(1)}(r, \varphi, t) \sin(\varphi) + \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, \varphi, t) \cos \varphi &= 0\end{aligned}\quad \text{при } \begin{cases} r = R \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi}, \\ \varphi \in \Phi_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Не запрещаем проскальзывания материалов деталей сборки вдоль их поверхностей сопряжения. Однако требование закона сухого трения запрещает проскальзывание до преодоления напряжениями $|\sigma_{r\varphi}|$ своего некоторого предельного значения

$$|\sigma_{r\varphi}^{(1)}(R, \varphi, t)| = |\sigma_{r\varphi}^{(2)}(R, \varphi, t)| \leq g(\varphi, t) \quad \text{при } \varphi \in \Phi_2. \quad (3.8)$$

Зависимость $g(\varphi, t)$ в (3.8) от координаты φ и времени t определяется зависимостью этого параметра от местной температуры $\theta = \theta(R, \varphi, t)$. Иногда считают, что условие (3.8) выполняется в течении всего процесса термомодеформирования и знак неравенства в нем заменяют равенством. Трение в таком случае оказывается независимым от нормального давления. Опыты показывают, что такое положение приемлемо при развитых вязкопластических течениях в условиях повышенных температур (закон Зеделя). Но процесс операции горячей посадки, протекающей действительно при высоких $\theta \leq \theta_*$ температурах, невозможно считать развитым процессом вязкопластического течения. Последний существует в материалах элементов сборки ограниченное время. До его зарождения и после его остановки по поверхности сопряжения контактируют упругие тела. Проскальзывание начинается после преодоления барьера (3.8); закон трения скольжения в его общей для процесса форме зададим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi}^{(2)}(R, \varphi, t) &= -\sigma_{r\varphi}^{(1)}(R, \varphi, t) = \\ &= f(\varphi, t) \left| \sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi, t) \right| + \gamma(\varphi, t) \left| v_{\varphi}^{(1)}(R, \varphi, t) - v_{\varphi}^{(2)}(R, \varphi, t) \right|, \\ \sigma_{r\varphi}^{(2)}(R, \varphi, t) &> g(\varphi, t), \quad \varphi \in \Phi_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь $f(\varphi, t)$ и $\gamma(\varphi, t)$ коэффициенты трения скольжения и вязкого трения соответственно. Их зависимость от φ и t вытекает из зависимости от местной температуры $\theta(R, \varphi, t)$. Принимаем ее в форме

$$g(\varphi, t) = g_0 y, \quad f(\varphi, t) = f_0 y, \quad \gamma(\varphi, t) = \gamma_0 y, \quad y = \left[\theta_p^{-1}(\theta_p - \theta) \right]^2. \quad (3.10)$$

Граничными условиями (3.5)–(3.9) в каждый рассчитываемый момент времени формируются разрывы в компонентах σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ тензора напряжений в точках A , B , C , D (рис. 1), то есть в пограничных точках областей Φ_1 и Φ_2 поверхности сопряжения $r = R$. Алгоритмы приближенных численных расчетов должны включать в себя процедуры сглаживания подобных разрывов. В [6, 24] показано, что если этим не озаботиться специально, то можно получить ошибки в расчетах не только количественные, но и качественные. По примеру [24] укажем первоначально способ исключения разрывов $\sigma_{r\varphi}$. С этой целью усложним зависимости (3.10), приняв их в форме

$$g(\varphi, t) = g_0 \xi(\varphi, \delta) y, \quad f(\varphi, t) = f_0 \xi(\varphi, \delta) y, \quad \gamma(\varphi, t) = \gamma_0 \xi(\varphi, \delta) y, \quad (3.11)$$

$$\xi(\varphi, \delta) = (\varphi_0 - \varphi) \left(\varphi_0 + \varphi + \frac{1 - 2\varphi_0 \delta + \delta^2}{\delta} \right) \quad \text{при } \varphi = \varphi_B \text{ и } \varphi = \varphi_C,$$

$$\xi(\varphi, \delta) = (\varphi_0 - \varphi) \left(\varphi_0 + \varphi + \frac{1 - 2\varphi_0 \delta - \delta^2}{\delta} \right) \quad \text{при } \varphi = \varphi_A \text{ и } \varphi = \varphi_D.$$

В (3.11) g_0, f_0, γ_0 – постоянные коэффициенты трения при комнатной температуре. В точках A , B , C и D (рис. 1) переменные параметры трения g, f, γ равны нулю, но уже в соответствующих соседних точках $\varphi_{A,D} + \delta$, $\varphi_{B,C} - \delta$ трение восстанавливается ($\xi(\varphi_B - \delta) = 1$). Таким способом с помощью специального задания параметров трения сглаживаем разрыв в граничных условиях для

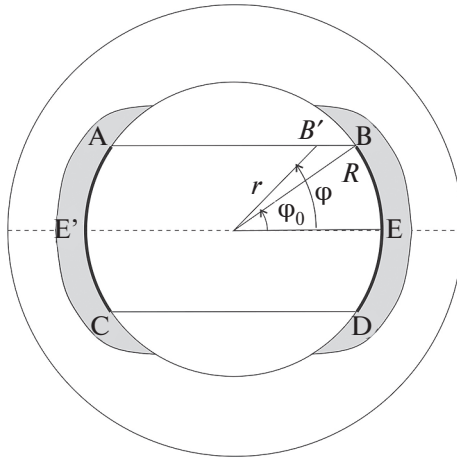


Рис. 2. Область вязкопластического течения: зарождение и развитие.

$\sigma_{r\varphi}$ в точках A, B, C и D области сопряжения (рис. 1). Параметр отступления δ от пограничных точек областей Φ_1 и Φ_2 выбираем в ходе вычислений.

В пограничных точках A, B, C и D (рис. 1) компоненты тензора напряжений претерпевают разрыв. В краевых условиях (3.6) и (3.7) следует привести сглаживание как вдоль поверхности (линии) $r = R$ для условий (3.6) так и вдоль плоскости (прямой) $r = R \sin(\varphi_0) \sin^{-1}(\varphi)$ для условий (3.7). Поясним принимаемую процедуру сглаживания на примере точки B (рис. 1 и рис. 2); в других точках сопряжения последующие действия аналогичны. В граничной области Φ_1 , свободной от нагрузок, выделим малую подобласть $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \delta_1$, считая, что в этой области $\sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi, t)$ изменяется по закону

$$\sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi, t) = -K(\varphi^2 - \varphi_0^2) + \left(2K\varphi_0 + K\delta_1 - \frac{\sigma_{0r}}{\delta_1}\right)(\varphi - \varphi_0) + \sigma_{0r}. \quad (3.12)$$

В (3.12) K — модуль всестороннего сжатия для материала охватывающей детали сборки; δ_1 — назначаемое увеличение координаты φ от φ_0 ; σ_{0r} — радиальное напряжений σ_{rr} в точке B , рассчитанное на предыдущем шаге вычислений: $\sigma_{0r} = \sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi_0, t)$; $\sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi_0, 0) = 0$.

В точке $B(R, \varphi_0)$ напряжения $\sigma_{r\varphi}^{(2)}(R, \varphi_0, t) = 0$ за счет принятого закона трения (3.9)–(3.11) на сопрягаемых поверхностях. Условия (3.7) требуют в таком случае, чтобы $\sigma_{rr}^{(2)}(R, \varphi_0, t) = 0$ и $\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}(R, \varphi_0, t) = 0$ (рис. 2). Эти условия выполненными быть не могут; в граничных условиях (3.7) в точке B возникает разрыв. Сглаживание их производим, назначая отступ от точки B до точки B' (рис. 2) вдоль прямой BA ($r = R \sin(\varphi_0) \sin^{-1}(\varphi)$) на расстояние $\delta_2 = R(\cos(\varphi_0) - \sin(\varphi_0) \operatorname{ctg}(\varphi)) = |BB'|$. Параметр δ_2 назначается, как и иные подобные δ и δ_1 в процессе вычислений. По аналогии с (3.12) добиваемся таким способом, чтобы левые части равенства (3.7) изменялись от приписанных им значений $\sigma_{rr}(R, \varphi_0, t) = \sigma_{0r}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}(R, \varphi_0, t) = \sigma_{0\varphi}$ в точке B отрезка до нуля в точке B' (рис. 2).

Расчеты согласно сформированной задачи для системы уравнений (3.4) с граничными условиями (3.5)–(3.12) продолжаем последовательными шагами по времени до тех пор, пока не выполняются условия вязкопластического течения (1.10) в некоторых точках деформируемой области. Расчеты показывают, что впервые эти условия в форме

$$f(\sigma, k) = \sqrt{\frac{3}{2} \tau \cdot \tau} - k = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2} - k = 0 \quad (3.13)$$

выполняются в точках E и E' сборки (рис. 2). От этих точек по материалу охватывающего кольца развиваются область вязкопластического течения.

В последующие моменты времени эта область может занимать полностью область контакта Φ_2 и даже выходить за предел данной области, как это показано на рис. 2 (выделенная область). В рамках такой области соотношения ассоциированного закона вязкопластического течения (1.11) позволяет записать

$$\varepsilon_{rr}^p = h(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = h(2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}), \quad \varepsilon_{r\varphi}^p = h\sigma_{r\varphi}, \quad \varepsilon_{zz}^p = -h(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), \quad (3.14)$$

$$h = \frac{\Sigma^2 - k^2}{3\Sigma^2}; \quad \Sigma^2 = \frac{3}{2} \tau \cdot \tau = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2.$$

Следствием (1.3) и (1.6) являются уравнения равновесия. В перемещениях (аналог (3.4)) уравнения равновесия приводят к соотношениям справедливым в областях вязкопластического течения

$$\begin{aligned} l_1 u_{r,rr} + \mu r^{-2} u_{r,\varphi\varphi} + (l_2 + \mu) r^{-1} u_{\varphi,r\varphi} + l_1 r^{-1} u_{r,r} - (l_1 + \mu) r^{-2} u_{\varphi,\varphi} - l_1 r^{-1} u_r - \\ - l_1 p_{rr,r} - l_2 p_{\varphi\varphi,r} - \mu r^{-1} p_{r\varphi,\varphi} - (l_1 - l_2) r^{-1} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + 2\alpha l_3 T_0 \theta_{,r} = 0; \\ l_1 r^{-2} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \mu u_{\varphi,rr} + (l_2 + \mu) r^{-1} u_{r,r\varphi} - \mu r^{-1} u_{\varphi,r} + (l_1 - \mu) r^{-2} u_{r,\varphi} - \mu r^{-2} u_{\varphi} - \\ - l_1 r^{-1} p_{\varphi\varphi,\varphi} - l_2 r^{-1} p_{rr,\varphi} - \mu p_{r\varphi,r} - 2\mu r^{-1} p_{r\varphi} - 2\alpha l_3 T_0 r^{-1} \theta_{,\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В отличие от (3.4) уравнения равновесия (3.15) включает в себя накопленные к рассчитываемому моменту времени необратимые деформации p_{rr} , $p_{r\varphi}$, $p_{\varphi\varphi}$ и их производные по пространственным координатам. Если считать, что на предыдущем шаге вычислений пластические деформации достигли значений $\tilde{p}_{rr}$, $\tilde{p}_{r\varphi}$, $\tilde{p}_{\varphi\varphi}$, то для их значений вычисляемого шага расчетов возможно, следуя (3.14), записать приближенные зависимости

$$\begin{aligned} p_{rr} &= h(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})\Delta t + \tilde{p}_{rr}, \\ p_{\varphi\varphi} &= h(2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})\Delta t + \tilde{p}_{\varphi\varphi}, \\ p_{zz} &= -h(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})\Delta t + \tilde{p}_{zz}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Эти соотношения необходимы при формулировке краевых задач для уравнений (3.15) с соответствующими граничными условиями в конечных разностях.

4. Некоторые результаты вычислений. Расчеты проводятся последовательными шагами по времени. На каждом таком шаге предварительно рассчитывается уровень и распределение по элементам сборки температуры. Это позволяет рассчитать на этом же шаге параметры напряженно-деформируемых состояний в материалах деталей конструкции. С этой целью разрешается конечно-разностный аналог уравнений равновесия, то есть уравнений (3.4) для упругой области либо (3.15) для области вязкопластического течения. Система конечно-разностных уравнений учитывает в своей записи граничные условий (3.5)–(3.12). После расчетов имеем в данный момент времени распределения по сборке температуры, деформаций и температурных напряжений и на такой основе производим последующий шаг вычислений. Рассчитывая состояние сборки на каждом шаге таких вычислений, устанавливаем время и место зарождения и остановки вязкопластического течения, расположение упругопластических границ в материалах сопрягающихся деталей. Последние могут продвигаться в упругую область, развивая область течения (нагружающая упругопластическая граница), или в область вязкопластического деформирования, тормозя течение (разгружающая граница). В процессе остывания собранной конструкции продвигающаяся разгружающая упругопластическая граница приводит к схлопыванию вязкопластической области, и дальнейшее деформирование оказывается уже упругим при наличии приобретенных необратимых пластических деформаций. Эти деформации приводят к формированию поля остаточных напряжений при полном остывании сборки до комнатной температуры. Расчет процесса релаксации остаточных напряжений выходит за рамки используемой здесь математической модели.

Прежде всего, отметим следствия расчетов, позволяющие сделать некоторые выводы качественного характера для процесса проводимой конкретной операции посадки:

- вязкопластическому деформированию подвержен только материал охватывающего кольца сборки; материал охватываемой пластины в течение всего процесса протекания технологической операции деформируется обратимо (упруго);

- развитие областей вязкопластического течения в охватывающем кольце начинается от точек E и E' (рис. 2) области контакта Φ_2 ;

- разгружающая упругопластическая граница начинает свое продвижение по материалу охватывающего кольца также из точек E и E' (рис. 2), области деформирования;

- повторных (обратимых) вязкопластических течений в рассматриваемом случае процесса посадки не возникает.

Эти выводы справедливы именно для рассмотренной операции посадки. Ранее [3, 22] отмечалось, что возможно формирование разгружающей упругопластической границы на поверхности останавливающейся нагружающей границы и продвижение её в направлении обратном направлению движения нагружающей упругопластической границы. Это характерно в случае использования в расчетах условий пластичности (вязкопластичности) максимальных приведенных напряжений (условие Ишлинского–Ивлева) [3, 23]. Повторные пластические течения в условиях плоских напряженных состояниях, как в рассматриваемом случае, не возникают (исключение [15]); они

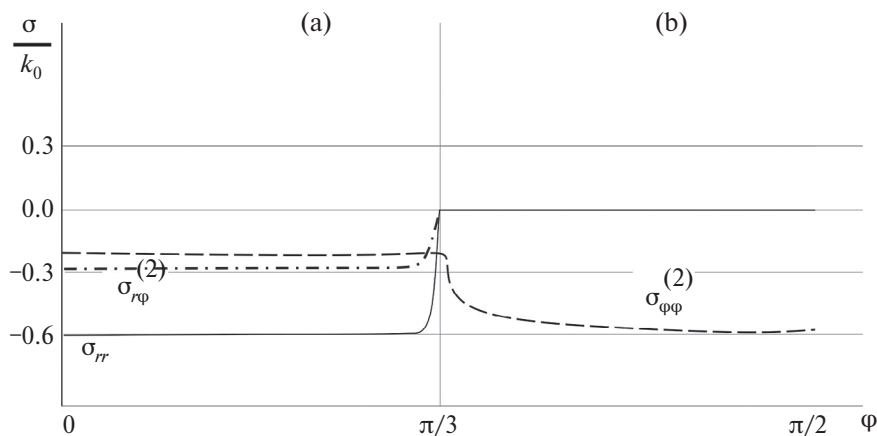


Рис. 3. Остаточные напряжения при $r = R$ в материале охватывающего кольца.

с необходимостью возникают в случае сборки длинномерных конструкций, двухслойных валов и труб [3, 6, 8, 22, 23].

Характерное распределение (рис. 3) остаточных напряжений по поверхности охватывающего кольца $r = R$, включающей в себя как поверхность константа Φ_2 , так и свободную поверхность Φ_1 , показано на рис. 3. При получении графических зависимостей принималось, что охватывающее кольцо изготовлено из латуни ($\lambda = 66.92$ ГПа, $\mu = 44.61$ ГПа, $k_0 = 350$ МПа, $a = 18 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $T_p = 1040$ °С, $T_0 = 400$ °С, $\alpha = 16.2 \cdot 10^{-6}$ (1/°С)), а охватываемая пластинка из бронзы ($k_0 = 290$ МПа, $\lambda = 58.26$ ГПа, $\mu = 38.84$ ГПа, $a = 36 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $T_p = 937$ °С, $T_0 = 20$ °С, $a = 19.1 \cdot 10^{-6}$ (1/°С)). Геометрические размеры деталей сборки задавались значениями: $R = 0.04$ м, $R_1 = 0.05$ м, $\varphi = \pi/3$.

На рис. 4 более детально указаны остаточные напряжения в элементах сборки при подходе к точке В, разделяющей область контакта Φ_2 и свободную от нагрузки область Φ_1 . Рисунком (рис. 4,а) показаны распределения остаточных напряжений при сглаживании разрывов в граничных условиях ($\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0.01\pi$), в то время как на рис. 4,б) графические зависимости построены в условиях $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0$. Присутствие не только количественных, но и качественных различий в графических зависимостях, подчеркивает необходимость использования отмеченных здесь процедур сглаживания.

Заключение. Рассмотренная здесь задача Гадолина [7] о сборке с натягом за счет горячей посадки цилиндрических деталей, выполненных из упругопластических материалов, является характерным примером задач, направленных на моделирование технологических операций изготовления металлоизделий. Технологический процесс рассчитывается за счет разрешения в каждый его момент времени краевой задачи теории температурных напряжений в упругопластических материалах. Таким способом прослеживается эволюция температурных напряжений во время проведения операции, включая расчет сформировавшегося распределения остаточных напряжений. Последние, чаще всего, оказываются основной целью проводимых вычислений, так как именно они задают функциональные качества итоговой конструкции.

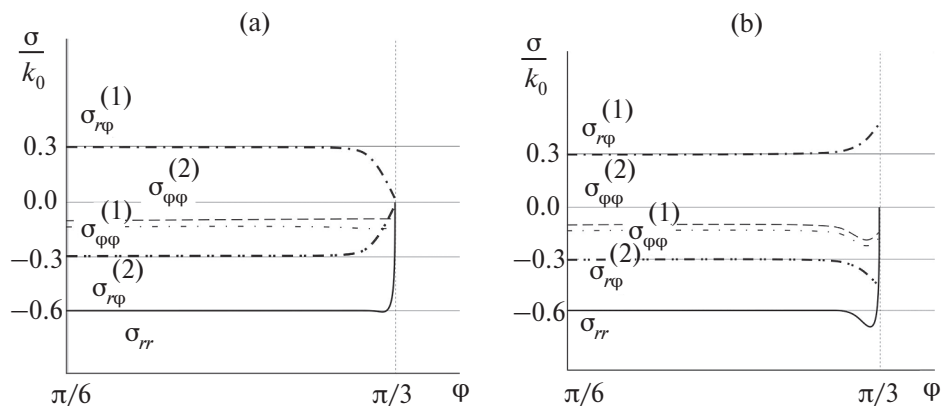


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений в окрестности пограничной точки В: (а) — $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0.01\pi$; $\varphi_0 = \pi/3$; (б) — $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0$; $\varphi_0 = \pi/3$.

Предполагаемый способ расчета изменяющихся в условиях проведения технологической операции температурных напряжений не запрещает учет упрочнения материалов сопрягаемых деталей при их пластическом деформировании как изотропного, так и трансляционного [28]. Учет кинематического упрочнения особенно необходим при возникновении повторных пластических течений [3, 29] в процессе разгрузки и остывания сборки.

Для исключения сингулярности в заданных граничных условиях используется искусственный прием сглаживания в разрывах значений задаваемых напряжений на граничных поверхностях сопрягаемых деталей. Показывается, что иначе следуют ошибочные результаты (сравнение 4,а,б). Именно подобные ошибки неоднократно встречаются [30–32] в результате расчетов температурных напряжений в собираемых конструкциях. Современная механика деформирования твердых тел располагает [33–37] набором средств для избежание ошибочного влияния сингулярности в задаваемых граничных условиях на следуемые результаты расчетов. Некоторые такие предложения [33, 34] обладают признаками универсальности. Принятый здесь искусственный способ этого лишен. Он только преследует цель показать, что исключение сингулярности в граничных условиях бывает совершенно необходимо. На разработанном примере это удалось продемонстрировать.

Работа выполнена в рамках государственного задания Хабаровского Федерального научного центра Дальневосточного отделения Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берникер Е.И. Посадка с натягом в машиностроении. М., Л.: Машиностроение, 1966. 168 с.
2. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.

3. Буренин А.А., Ткачева А.В. Эволюция температурных напряжений в задаче Гадолина о сборке двухслойной упругопластической трубы // Вестн. ПНИПУ. Сер. Мех. 2020. № 3. С. 20–31. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.3.03>
4. Попов А.Л., Челобеев Д.А., Бухалов В.И. Задача Гадолина в упругопластической постановке // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 804–812. <https://doi.org/10.31857/S003282350002744-8>
5. Буренин А.А., Ткачева А.В., Фирсов С.В. Задача Гадолина о сборке двухслойного вала горячей посадкой с испытанием соединения на отрыв // Весн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26. № 3. С. 480–499. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1928>
6. Буренин А.А., Ткачева А.В. Задача Гадолина о процессе сборки двухслойной предварительно напряженной трубы // ПМТФ. 2023. Т. 64. № 5. С. 225–240. <https://doi.org/10.15372/PMTF202315249>
7. Гадолин А.В. Теория орудий, скрепленных обручами // Артилл. Журнал. 1861. № 12. С. 1033–1071.
8. Буренин А.А., Ткачева А.В., Щербатюк Г.А. К расчетам неуставившихся температурных напряжений в упругопластических телах // Вычисл. мех. спл. сред. 2017. Т. 10. № 3. С. 245–259. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.20>
9. Дац Е.П., Мурашкин Е.В., Ткачева А.В., Щербатюк Г.А. Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 32–43.
10. Александров С.Е., Ломакин Е.В., Дзенг Й.–Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // Докл. РАН. 2012. Т. 443. № 3. С. 310–312.
11. Сёмка Э.В. Об алгоритме вычисления параметров состояния термопластического диска // Вестник Башк. ун-та. Серия: мат. мех. Уфа. 2021. № 1. С. 10–15. <https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2021.1.2>
12. Александров С.Е., Лямина Е.А., Новожилова О.В. Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние в тонком полой диске // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 3. С. 43–48.
13. Дац Е.П., Петров М.Р., Ткачева А.В. Кусочно-линейные пластические потенциалы в задачах теории температурных напряжений о сборке горячей посадкой // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. 2015. Т. 26. № 4. С. 163–179.
14. Дац Е.П., Ткачева А.В., Шпорт Р.В. Сборка конструкции «кольцо в кольцо» способом горячей посадки // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 204–213.
15. Буренин А.А., Каинг М., Ткачева А.В. К расчету плоских напряженных состояний в теории неуставившихся температурных напряжений в упругопластических телах // ДВМЖ. 2018. Т. 18. № 2. С. 131–146.
16. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
17. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 704.
18. Gajer U. A concise treatment of the shrink fit with elastic plastic hub // Int. Solids Struct. 1992. V. 29. P. 2463–2469.

19. *Mack W.* Thermal assembly of on elastic – plastic hub a solid shaft // *Arch. Appl. Mech.* V. 63. P. 42–50.
<https://doi.org/10.1007/BF00787908>
20. *Bengeri M., Mack W.* The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mechanica.* 1994. V. 103. P. 243–257. <https://doi.org/10.1007/BF01180229>
21. *Kovacs A.* Residual stresses in thermally loaded shrink fit // *Period. Polytech., Mech. Eng.* 1996. V. 40. № 2. P. 103–112.
22. *Буренин А.А., Матвеев В.П., Ткачева А.В.* Температурные напряжения в процессе сборки двухслойного вала способом горячей посадки // *Уч. Зап. КнАГТУ.* 2018. Т. 35. № 3. С. 31–41.
23. *Буренин А.А., Ткачева А.В.* О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 3. С. 86–99.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919030073>
24. *Буренин А.А., Ткачева А.В.* К расчетам технологической операции сборки горячей посадкой цилиндрических деталей // *ПММ.* 2022. Т. 86. № 4. С. 595–611.
<https://doi.org/10.31857/S0032823522040051>
25. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во Иностран. лит., 1963. 312 с.
26. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
27. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983. 399 с.
28. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
29. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В.* Возможность повторного пластического течения при общей разгрузки упругопластической среды // *Докл. РАН.* 2000. Т. 375. № 6. С. 767–769.
30. *Erena D., Vazquez J., Navarro C., Talimi R.* Numerical study on the influence of artificial internal stress relief groove on fretting fatigue in a shrink-fitted assembly // *Tribol. Int.* 2020. V. 151. P. 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2020.106443>
31. *Потянихин Д.А., Дубенко Е.М.* Расчет напряженно-деформированного состояния заклепочного соединения, полученного с помощью азотного охлаждения заклепки // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния.* 2018. № 3(37). С. 134–144.
32. *Buczkowski R., Kleiber M.* A study of the surface roughness in elastic-plastic shrink fitted joint // *Tribol. Int.* 2016. V. 98. P. 125–132.
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2016.02.021>
33. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Нелокальные решения сингулярных задач математической физики и механики // *ПММ.* 2018. Т. 82 Вып. 4. С. 459–471.
<https://doi.org/10.31857/S003282350000204-4>
34. *Горайнов В.В., Попов М.И., Чернышов А.Д.* Решение задачи о напряжениях в отром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 5. С. 113–130.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919050088>
35. *Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И.* Существование и единственность R_ν – обобщенного решения задачи для системы Ламе с угловой сингулярностью // *Дифф. уравнения.* 2019. Т. 55. №6. С. 848–856.
<https://doi.org/10.1134/S0374064119060104>

36. Поликарпов М.В., Пеньков В.Б. Сосредоточенные силовые воздействия в методе граничных состояний // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. 2020. № 1(43). С. 34–44. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.43.1.004>
37. Ломакин Е.В., Лурье С.А., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О. Об уточнении напряженного состояния в прикладных задачах упругости за счет градиентных эффектов // ДАН. 2019. Т. 489. № 6. С. 51–57. <http://dx.doi.org/10.31857/S0869-56524896585-591>

ON THE ASSEMBLY OF A HOT-FIT ELASTIC-VISCOPLASTIC DISK WITH A NON-CIRCULAR INCLUSION

A. A. Burenin, A. V. Tkacheva*

*Institute of Mechanical Science and Metallurgy, Far Eastern Branch
of the Russian Academy of Sciences*

*e-mail: 4nansi4@mail.ru

Abstract. The solution of a non-one-dimensional boundary value problem of the theory of plane temperature stresses is used to calculate the level and distribution of temperature stresses at each time point during the process of performing the technological operation of assembling a composite disk by hot fitting, when the enclosed assembly part is different from a circular plate. Residual stresses in the assembly elements and the resulting interference fit in it after its cooling to room temperature are calculated. Current and residual stresses are calculated depending on the preliminary heating of the enclosing ring, the thermomechanical properties of the mating parts and their initial geometry. The yield strengths of the elastic-viscoplastic elements of the assembly are assumed to be essentially dependent on the local temperature. Attention is drawn to the need to exclude singularity when setting boundary conditions on the mating surfaces of the assembly parts.

Keywords: elasticity, viscoplasticity, temperature stresses, shrink fit, interference fit, Gadolin problem.

REFERENCES

1. Bernicker E.I. Interference fit in mechanical engineering. M., L.: Mechanical engineering. 1966. 168 p. (in Russian)
2. Parkus H. Instationäre warmespannungen. Wien: Springer-Verlag. 1959.
3. Burenin A.A., Tkacheva A.V. Evolution of temperature stresses in the Gadolin problem of assembling a two-layer elastic-plastic pipe // Vestn. PNIPU. Ser. Mekh. 2020. No. 3. P. 20–31. (in Russian)
4. Bukhalov V.I., Popov A.L., Chelyubeev D.A. Gadolin's theory in elastoplastic formulation Mechanics of Solids. 2019. T. 54. № 2. С. 356–63.
5. Burenin A.A., Tkacheva A.V., Firsov S.V. Gadolin's problem on assembling a two-layer shaft by hot fitting with a joint tear-off test// Vesn. Sam. state tech. univ. Ser. Phys.-math. sciences. 2022. Vol. 26, No. 3. P. 480–499. (in Russian)

6. *Burenin A.A., Tkacheva A.V.* Gadolin problem of assembling a prestressed two-layer pipe Journal of applied mechanics and technical physics 64 № 5. 2023. P. 929–942.
DOI: 10.1134/s002189442305022x
7. *Gadolin A.V.* Theory of guns fastened with hoops // Artillery Journal. 1861. No. 12. P. 1033–1071. (in Russian)
8. *Burenin A.A., Tkacheva A.V., Shcherbatyuk G.A.* Calculation of the unsteady thermal stresses in elastoplastic solids Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. T. 59. № 7. C. 1197–1210.
9. *Dats E.P., Murashkin E.V., Tkacheva A.V., Shcherbatyuk G.A.* thermal stresses in an elastoplastic tube depending on the choice of yield conditions Mechanics of Solids. 2018. T. 53. № 1. C. 23–32.
10. *Aleksandrov S.E., Lomakin V., Dzeng I.-R.* Solution of the thermoelastoplastic problem for a thin disk of plastically compressible material subjected to thermal loading Doklady Physics. 2012. T. 57. № 3. C. 136–139.
11. *Semka E.V.* On the algorithm for calculating the state parameters of a thermoplastic disk // Bulletin of Bashkir University. Series: mat. mech. Ufa. 2021. No. 1. P. 10–15.
12. *Aleksandrov S.E., Lyamina E.A., Novozhilova O.V.* The influence of the relationship between yield strength and temperature on the stress state in a thin hollow disk Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2013. T. 42. № 3. C. 214–218.
13. *Dats E.P., Petrov M.R., Tkacheva A.V.* Piecewise linear plastic potentials in problems of the theory of thermal stresses on hot-fit assembly // Bulletin of ChSPU named after I.Ya. Yakovlev. Limit State Mechanics. 2015. Vol. 26, No. 4. P. 163–179. (in Russian)
14. *Dats E.P., Tkacheva A.V., Shport R.V.* Assembly of the “ring in ring” structure by the method of hot fitting // Bulletin of the ChSPU named after I. Ya. Yakovlev, Series: Mechanics of the limit state. 2014, No. 4 (22). P. 204–213. (in Russian)
15. *Burenin A.A., Kaing M., Tkacheva A.V.* On the calculation of plane stress states in the theory of unsteady temperature stresses in elastic-plastic bodies// Far Eastern Mechanical Engineering Journal. 2018. Vol. 18, No. 2. P. 131–146. (in Russian)
16. *Bykovtsev G.I., Ivlev D.D.* Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian)
17. *Ishlinsky A.Yu., Ivlev D.D.* Mathematical theory of plasticity. Moscow: Fizmatlit, 2001, p. 704. (in Russian)
18. *Gamer U.* A concise treatment of the shrink fit with elastic plastic hub // Int. Solids Struct. 1992. V. 29. P. 2463–2469.
DOI:10.1007/BF01174165
19. *Mack W.* Thermal assembly of on elastic – plastic hub a solid shaft // Arch. Appl. Mech. V. 63. P. 42–50.
DOI: 10.1007/BF00787908
20. *Bengeri M., Mack W.* The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit// Acta Mechanica 1994, Vol. 103. P. 243–257.
DOI:10.1007/BF01180229
21. *Kovacs A.* Residual stresses in thermally loaded shrink fit// Period. Polytech., Mech. Eng. 1996. V. 40, № 2. P. 103–112.
22. *Burenin A.A., Matveenko V.P., Tkacheva A.V.* Temperature stresses during the assembly of a two-layer shaft by hot fitting // Uch. Zap. KnAGTU. 2018. Vol. 35, No. 3. P. 31–41. (in Russian)

23. *Burenin A.A., Tkacheva V.E.* Assembly of a two-layered metal pipe by using shrink fit Mechanics of Solids. 2019. T. 54. № 4. C. 559–569.
24. *Burenin A.A., Tkacheva A.V.* On the calculations of the technological operation of hot-fitting assembly of cylindrical parts // PMM. 2022. Vol. 86, No. 4. P. 595–611. (in Russian)
25. *Prager W.* Introduction to mechanics of continua. Grinn and Co. USA. 1961.
26. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations and elastic aftereffect. Vladivostok: Dalnauka. 2013. 312 p. (in Russian)
27. *Germain P.* Cours de mecanique des milieux continus. Tome 1. Theorie genelale. Paris. 1973.
28. *Ivlev D.D., Bykovtsev G.I.* Theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka. 1971. 232 p. (in Russian)
29. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Polonik M.V.* The possibility of reiterated plastic flow at the overall unloading of an elastoplastic medium Doklady Physics. 2000. T. 45. № 12. C. 694–696.
30. *Erena D., Vazquez J., Navarro C., Talimi R.* Numerical study on the influence of artificial internal stress relief groove on fretting fatigue in a shrink-fitted assembly // Tribol. Int. 2020. V. 151. P. 1–9.
DOI: 10.1016/j.triboint.2020.106443
31. *Potyanykhin D.A., Dubenko E.M.* Calculation of the stress-strain state of a riveted joint obtained using nitrogen cooling of the rivet // Vestn. ChSPU named after I.Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of the Limit State. 2018. No. 3(37). P. 134–144. (in Russian)
32. *Buczkowski R., Kleiber M.* A study of the surface roughness in elastic-plastic shrink fitted joint // Tribol. Int. 2016. V. 98. P. 125–132.
DOI: 10.1016/j.triboint.2016.02.021
33. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* Nonlocal solutions to singular problems of mathematical physics and mechanics. Mechanics of Solids. 2018. T. 53. № S. C. 135–144.
34. *Goryainov V.V., Popov M.I., Chernyshov A.D.* Solving the stress problem in a sharp wedge-whaped cutting tool using the quick decomposition method and the problem of matching boundary conditions. Mechanics of Solids. 2019. T. 54. № 7. C. 1083–1097.
35. *Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I.* Existence and uniqueness of an rv-generalized solution of the dirichlet problem for the lamé system with a corner singularity Differential Equations. 2019. T. 55. № 6. C. 832–840.
36. *Penkov V.B., Polikarpov M.V.* Concentrated force actions in the boundary state method // Vestn. ChSPU named after I.Ya. Yakovlev. Series: Limit State Mechanics. 2020. No. 1. P. 34–44. (in Russian)
37. *Lomakin E.V., Lurie S.A., Rabinskiy L.N., Solyaev Y.O.* Refined stress analysis in applied elasticity problems accounting for gradient effects Doklady Physics. 2019. T. 64. № 12. C. 482–486.