ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2024, № 5, с. 18–28

УДК 539.3

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТОВ В НЕКЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

В. А. Бабешко[a, *], О. В. Евдокимова[b], С. Б. Уафа[a], В. С. Евдокимов[a], О. М. Бабешко[a]

[a]*Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*
[b]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия*

**e-mail: babeshko41@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.05.2024 г.
После доработки 13.05.2024 г.
Принята к публикации 14.05.2024 г.

В работе впервые дается точное решение контактной задачи о не стационарном воздействии клиновидного, с прямым углом штампа, занимающего первый квадрант, на деформируемое многослойное основание. Основание, на которое действует жесткий штамп в форме четверти плоскости, может быть многослойным анизотропным композитным материалом. Предполагается, что для него можно построить функцию Грина, что позволяет получить интегральное уравнение контактной задачи. В качестве параметров, описывающих интегральное уравнение, принимаются геометрические декартовы координаты первого квадранта и параметр времени, изменяющийся на всей оси. Предполагается, что время в рассматриваемой граничной задаче следует из отрицательной бесконечности, пересекает начало координат и растет до бесконечности, охватывая весь временной интервал. Таким образом, исключено требование в постановке задачи Коше, когда необходимо задание начальных условий. В этой постановке задача сводится к решению трехмерного интегрального уравнения Винера–Хопфа. Попытки аналитического или численного решения этой задачи авторам не известны. Исследование и решение контактной задачи осуществлено с использованием блочных элементов в варианте, применимым к интегральным уравнениям. Доказывается, что построенное решение точно удовлетворяет интегральному уравнению. Изучены свойства построенного решения. В частности, показано, что решение нестационарной контактной задачи имеет более высокую концентрацию контактных напряжений на краях штампов и в угловой точке штампа, по сравнению со статическим случаем. Это соответствует наблюдаемым на практике более эффективным нестационарным воздействием жестких тел на деформируемые среды, для их разрушения, по сравнению со статическим. Результаты могут оказаться полезными в инженерной практике, сейсмологии, при оценке воздействия набегающих волн на фундаменты, в областях использования интегральных уравнений Винера–Хопфа в теории вероятности и статистики и других областях.

Ключевые слова: контактные задачи, трехмерное интегральное уравнение Винера–Хопфа, клиновидная область, блочный элемент, анизотропия, композит, факторизация

DOI: 10.31857/S1026351924050021, **EDN:** UBWXKY

Введение. Смешанные задачи, в том числе, контактные задачи, играют важную роль в самых разных областях практики. Они возникают в проблемах прочности и разрушения [1], распространения волн в упругих телах [2], акустике [3], неразрушающих методах контроля [4], теории рассеивания электромагнитных волн и создании элементной базы электроники [5], теории волн в жидкости [6,7], геофизике [8]. Работы [9–21] посвящены исследованиям смешанных, контактных задач теории упругости для неклассических областей, как для изотропных сред, так и для анизотропных материалов. Применяемые в этих работах методы включают разнообразие аналитических и численных подходов. Ряд этих подходов, опирающихся на метод интегральных уравнений, требует достаточно детального анализа свойств ядер интегральных уравнений. В то же время разработки и внедрение в инженерную практику новых анизотропных композитов, делает ряд перечисленных подходов не эффективными, что показано ниже. Развитый в [22] метод точного решения двумерного интегрального уравнения Винера–Хопфа для изотропной слоистой среды существенно опирался на глубокие знания свойств символа ядра интегрального уравнения, функцию $K(\alpha,\beta)$ преобразования Фурье ядра, который, в случае слоистой среды, является мероморфным. Покажем, что в случае анизотропной среды, такой метод не применим в связи с непреодолимыми сложностями, возникающими при попытке применения метода изотропного случая [22]. В качестве примера приводится случай анизотропной контактной задачи для термоэлектроупругого слоя [14].

Уравнения состояния имеют вид

$$\sigma_y = c_{ykl}^{E,\theta} s_{kl} - e_{yk}^{\theta} E_k - \lambda_y^{E} \theta,$$
$$d_i = e_{ikl}^{\theta} s_{kl} + \varepsilon_y^{s,\theta} E_j + \rho_i^{S} \theta,$$
$$\eta = \lambda_{ij}^{E} s_y + \rho_i^{S} E_i + \alpha\theta.$$

Здесь σ – тензор напряжений; $c_{ijkl}^{\mathrm{E},\theta}$ – тензор упругих постоянных; s_{ij} – тензор деформаций упругой среды; E_i – компоненты вектора напряженности электрического поля; $\theta = T - T_0$; θ, T и T_0 – соответственно относительная, абсолютная и начальная температура; η – плотность энтропии; d_i – компоненты вектора электрической индукции; $e_{ki\,j}^{\theta}$ – тензор пьезомодулей; $\varepsilon_{ij}^{S,\theta}$ – тензор диэлектрических проницаемостей; ρ_i^S – пироэлектрические коэффициенты; $\alpha = \rho c_\varepsilon^E T_0^{-1}$; c_ε^E – удельная теплоемкость при постоянной деформации; ρ – плотность материала.

Исключая из приведенных соотношений все переменные, кроме w_i,ψ,θ, получаем систему динамических анизотропных уравнений в частных производных вида

$$c_{ijkl}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_i \partial x_i} + e_{kij}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_j} - \lambda_{ij}\frac{\partial \theta}{\partial x_j} + F_i = \rho\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2},$$

$$e_{ik}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_i \partial x_i} - \varepsilon_{ik}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_i} + \rho_i\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \quad i,\ j,\ k, = 1, 2, 3,$$

$$k_{ij}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} + W = T_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_{ij}\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \rho_i\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \alpha\theta\right).$$

Вид функции Грина приведен в [14] и совершенно не доступен для построения разложения символа интегрального уравнения Винера–Хопфа $K(\alpha,\beta)$, в форме, использованной в [22].

Тем не менее разработанные в [22] методы решения двумерных интегральных уравнений Винера–Хопфа для изотропного случая подсказали вид и способ построения решения трехмерного интегрального уравнения Винера-Хопфа для анизотропных композитов. В связи с этим был разработан подход, который обходит необходимость детального изучения символа $K(\alpha,\beta)$ интегрального уравнений. Он использует блочные элементы и метод факторизации применительно к интегральным уравнениям.

Область действия штампа описывается осями x, y первого квадранта декартовой системы координат, а параметр времени, изменяющейся на всей бесконечной оси, описывается координатой t, которая, в дальнейшем, для удобства обозначений системы координат, будет переобозначена на z. Таким образом, область действия штампа описывается геометрической и временной областью $\Omega(0 \le x, 0 \le y, 0 \le t)$.

...Ниже приводится аналитическое представление решения интегрального уравнения Винера–Хопфа в трехмерной геометрико-временной постановке в области $\Omega(0 \le x, 0 \le y, 0 \le t)$. Здесь рассмотрен случай произвольного во времени воздействия штампа на анизотропный композит в первом квадранте на основе нового подхода.

1. Постановка задачи. Рассматривается трехмерное интегральное уравнение Винера-Хопфа, заданное в первом квадранте [22]. Оно имеет вид

$$\mathrm{K}q = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty k(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)q(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta = f(x,y,z),$$

$$k(x,y,z) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\int_{\Gamma_3} K(\alpha,\beta,\gamma)e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}d\alpha d\beta d\gamma,$$

$$0 \le x \le \infty, \quad 0 \le y \le \infty, \quad 0 \le z \le \infty, \quad z \equiv t, \tag{1.1}$$

$$Q(\alpha,\beta,\gamma) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty q(\xi,\eta,\zeta)e^{i(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)}d\xi d\eta d\zeta,$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(\xi,\eta,\zeta)e^{i(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)}d\xi d\eta d\zeta.$$

Функция $K(\alpha,\beta,\gamma)$, в общем случае комплекснозначная, порождается решением анизотропной граничной задачи в многослойной среде, является непрерывной и суммируемой на осях по трем аргументам, с поведением на бесконечности вида.

$$\begin{gathered} K(\alpha,\beta,\gamma)=O(\alpha^{-1}),\ \beta=\text{const},\ \gamma=\text{const}, \\ K(\alpha,\beta,\gamma)=O(\beta^{-1}),\ \alpha=\text{const},\ \gamma=\text{const}. \\ K(\alpha,\beta,\gamma)=O(\gamma^{-1}),\ \alpha=\text{const},\ \beta=\text{const},\ |\alpha|,|\beta|,|\gamma|\to\infty. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Примеры материалов, имеющих анизотропную структуру, в том числе, композитных, приведены во многих работах, в частности в [9–21].

Для интегрального уравнения (1.1) справедливы теоремы единственности [14].

Теорема 1. Пусть вещественная или мнимая составляющие функции $K(\alpha,\beta,\gamma)$ знакопостоянные на вещественных осях (α,β,γ). Тогда интегральное уравнение (1.1) имеет единственное решение.

Для случая динамических контактных задач справедлива приведенная ниже теорема единственности [14]

Теорема 2. Пусть вещественные полюсы функции $K(\alpha,\beta,\gamma)$ последовательно чередуются с нулями при движении по контурам Γ_1, Γ_2, Γ_3. Тогда интегральное уравнение (1.1) имеет единственное решение.

Доказана.

Теорема 3. В условиях единственности, решение интегрального уравнения (1.1) для произвольной с непрерывной и суммируемой на осях первой производной функции $f(x,y,z)$ дается формулой

$$q(x,y,z)=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Q(\alpha,\beta,\gamma)e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}d\alpha d\beta d\gamma. \tag{1.3}$$

Здесь приняты обозначения [14]

$$\begin{gathered} Q_1(\alpha,\beta,\gamma)=K^{-1}F-K^{-1}_{+\alpha}\{K^{-1}_{-\alpha}F\}_{-\alpha}-K^{-1}_{+\alpha+\beta}\{K^{-1}_{+\alpha-\beta}\{K^{-1}_{-\alpha}F\}_{+\alpha}\}_{-\beta}- \\ -K^{-1}_{+\alpha+\beta+\gamma}\{K^{-1}_{+\alpha+\beta-\gamma}\{K^{-1}_{+\alpha-\beta}\{K^{-1}_{-\alpha}F\}_{+\alpha}\}_{+\beta}\}_{-\gamma}, \\ Q_2(\alpha,\beta,\gamma)=K^{-1}F-K^{-1}_{+\beta}\{K^{-1}_{-\beta}F\}_{-\beta}-K^{-1}_{+\beta+\gamma}\{K^{-1}_{+\beta-\gamma}\{K^{-1}_{-\beta}F\}_{+\beta}\}_{-\gamma}- \\ -K^{-1}_{+\beta+\gamma+\alpha}\{K^{-1}_{+\beta+\gamma-\alpha}\{K^{-1}_{+\beta-\gamma}\{K^{-1}_{-\beta}F\}_{+\beta}\}_{+\gamma}\}_{-\alpha}, \\ Q_3(\alpha,\beta,\gamma)=K^{-1}F-K^{-1}_{+\gamma}\{K^{-1}_{-\gamma}F\}_{-\gamma}-K^{-1}_{+\gamma+\alpha}\{K^{-1}_{+\gamma-\alpha}\{K^{-1}_{-\gamma}F\}_{+\gamma}\}_{-\alpha}- \\ -K^{-1}_{+\gamma+\alpha+\beta}\{K^{-1}_{+\gamma+\alpha-\beta}\{K^{-1}_{+\gamma-\alpha}\{K^{-1}_{-\gamma}F\}_{+\gamma}\}_{+\alpha}\}_{-\beta}, \\ Q(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{3}\left[Q_1(\alpha,\beta,\gamma)+Q_2(\alpha,\beta,\gamma)+Q_3(\alpha,\beta,\gamma)\right]. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Операторы в фигурных скобках имеют вид

$$\{G(\alpha,\beta,\gamma)\}_{+\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{G(\xi,\beta,\gamma)}{\xi-\alpha}d\xi,\ \alpha\in\Pi_\alpha^+,$$

$$\{G(\alpha,\beta,\gamma)\}_{-\alpha} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{G(\xi,\beta,\gamma)}{\xi-\alpha}d\xi,\ \alpha\in\Pi_\alpha^-,$$

$$\{G(\alpha,\beta,\gamma)\}_{+\beta} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{G(\alpha,\eta,\gamma)}{\eta-\beta}d\eta,\ \beta\in\Pi_\beta^+,$$

$$\{G(\alpha,\beta,\gamma)\}_{-\beta} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{G(\alpha,\eta,\gamma)}{\eta-\beta}d\eta,\ \beta\in\Pi_\beta^-,$$

$$\{G(\alpha,\beta,\gamma)\}_{+\gamma} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_3}\frac{G(\alpha,\beta,\zeta)}{\zeta-\gamma}d\zeta,\ \gamma\in\Pi_\gamma^+,$$

$$\{G(\alpha,\beta,\gamma)\}_{-\gamma} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_3}\frac{G(\alpha,\beta,\zeta)}{\zeta-\gamma}d\zeta,\ \gamma\in\Pi_\gamma^-,$$

$$\begin{aligned}
K_{+\alpha}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\ln K(\xi,\beta,\gamma)}{\xi-\alpha}d\xi,\ \alpha\in\Pi_\alpha^+,\\
K_{-\alpha}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\ln K(\xi,\beta,\gamma)}{\xi-\alpha}d\xi\right),\ \alpha\in\Pi_\alpha^-,\\
K_{+\beta}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\ln K(\alpha,\eta,\gamma)}{\eta-\beta}d\eta,\ \beta\in\Pi_\beta^+,\\
K_{-\beta}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\ln K(\alpha,\eta,\gamma)}{\eta-\beta}d\eta\right),\ \beta\in\Pi_\beta^-,\\
K_{+\gamma}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_3}\frac{\ln K(\alpha,\beta,\zeta)}{\zeta-\gamma}d\zeta,\ \gamma\in\Pi_\gamma^+,\\
K_{-\gamma}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_3}\frac{\ln K(\alpha,\beta,\zeta)}{\zeta-\gamma}d\zeta\right),\ \gamma\in\Pi_\gamma^-.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь Π_α^+, Π_α^- – комплексные области выше, плюс, и ниже, минус, контура Γ_1, Π_β^+, Π_β^- – области выше, плюс, и ниже, минус, контура Γ_2, Π_γ^+, Π_γ^- – области выше, плюс, и ниже, минус, контура Γ_3.

Удовлетворение построенного решения (1.3) интегральному уравнению (1.1) осуществляется достаточно просто подстановкой его в интегральное уравнение и учета свойств факторизованных функций (1.4) в интеграле Фурье.

2. Свойства решения (1.3) интегрального уравнения (1.1). 1. Покажем, что интегральное уравнение (1.1) точно удовлетворяется функцией (1.3), (1.4).

Внесем функцию $q(x,y,z)$ в интегральное уравнение (1.1), представленное в виде

$$Kq = \frac{1}{8\pi^3}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty K(\alpha,\beta,\gamma)e^{-i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)]}q(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta d\alpha d\beta d\gamma =$$

$$= f(x,y,z).$$

После использования обозначений (1.1) получим представление

$$Kq = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty K(\alpha,\beta,\gamma)Q(\alpha,\beta,\gamma)e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}d\alpha d\beta d\gamma = f(x,y,z).$$

Внесем в эту формулу $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ из (1.4) и исследуем интеграл слева. В результате не сложного анализа исключения членов, обращающих интеграл в ноль, убеждаемся, что получается соотношение

$$Kq = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty F(\alpha,\beta,\gamma)e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}d\alpha d\beta d\gamma = f(x,y,z).$$

Применение метода факторизации и блочного элемента доказывает, что носителем решения является первый квадрант.

2. Покажем, что полученное решение (1.3) переходит в точное решение интегрального уравнения (1.1) для случая, когда уравнение (1.1) распадается на одномерные уравнения, решаемые традиционным одномерным методом уравнений Винера–Хопфа [5]. Это происходит, когда в ядре интегрального уравнения (1.1) имеет место разделение переменных, то есть $k(x,y,z) = k_1(x)_2(y)k_3(z)$. Оно случается при наличии у преобразования Фурье ядра $K(\alpha,\beta,\gamma)$, называемого символом интегрального уравнения, со свойством $K(\alpha,\beta,\gamma) = K_1(\alpha)K_2(\beta)K_3(\gamma)$. Выполняя над символом требуемые формулой (1.4) вычисления, находим, что все двойные операции над $K_1(\alpha)$, $K_2(\beta)$ и $K_3(\gamma)$ обращаются в ноль. Остаются решения одномерных интегральных уравнений Винера–Хопфа по каждой координате.

3. Исследуем концентрации контактных напряжений на разных множествах границы штампа, даваемых полученным решением.

1) В решениях, представленных формулой (1.4), первые справа члены формируют вырожденную составляющую решения, описывающую его в зоне, дальней от границ четверть плоскости. Поэтому оно не содержит концентраций напряжений. Заметим, что вырожденная составляющая формируется поровну каждой из осей.

2) Вторые члены содержат граничные концентрации напряжений, свойственные одномерным интегральным уравнениям Винера–Хопфа [14].

Подобно одномерному случаю [14], они дают на прямолинейных границах штампа особенности вида $x^{-1/2}$, $y^{-1/2}$ и $z^{-1/2}$.

3) Третьи члены описывают концентрацию напряжений в угловой точке штампа, которая свойственна статической двумерной контактной задаче,

без нестационарного воздействия. Она формируется в результате оценки интеграла

$$q_0(x,y,z) = \frac{1}{8\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[K^{-1}_{+\alpha+\beta}\{K^{-1}_{+\alpha-\beta}\{K^{-1}_{-\alpha}F\}_{+\alpha}\}_{-\beta}]e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}d\alpha d\beta d\gamma \quad (2.1)$$

при одновременном предельном переходе $x\to 0$, $y\to 0$, $z\to 0$.

В качестве примера покажем правило формирования первого члена подынтегральной функции для случая, когда взят простейший анизотропный символ $K(\alpha,\beta,\gamma)$, обладающий свойством (1.2), имеющий вид

$$K(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha^2+s_1\beta^2+s_2\gamma^2+A^2)^{-\frac{1}{2}},\ \ A>0,\quad s_1,s_2 = \text{const}.$$

Для общего случая его оказывается достаточно, так как он содержит такие же предельные поведения (1.2) на бесконечности. При осуществлении факторизации по какому-нибудь параметру, остальные находятся на вещественной оси. Факторизовав функцию $K(\alpha,\beta,\gamma)$ по параметру α на верхнюю полуплоскость, получаем

$$K_{+\alpha}(\alpha,\beta,\gamma) = [\alpha+i(s_1\beta^2+s_2\gamma^2+A^2)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}} = O(\alpha^{-\frac{1}{2}})\quad A>0.$$

Факторизацию функции $K_{+\alpha}(\alpha,\beta,\gamma)$ по параметру $\boldsymbol{\beta}$ на правую комплексную полуплоскость можно выполнить точно, в интегральном виде, нормализовав $K_{+\alpha}(\alpha,\beta,\gamma)$ по $\boldsymbol{\beta}$ на бесконечности. Для этого рассмотрим функцию, стремящуюся к единице при $|\boldsymbol{\beta}|\to\infty$. Имеем

$$G(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{i}(\beta^2+c^2)^{\frac{1}{4}}K_{+\alpha}(\alpha,\beta,\gamma)\to 1,\quad |\beta|\to\infty,\quad c = s_1^{-1}(s_2\gamma^2+A^2),$$

отсюда по формуле факторизации из (1.5)

$$K_{+\alpha+\beta}(\alpha,\beta,\gamma) = (\beta+ic)^{-\frac{1}{4}}\exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\ln G(\alpha,\eta)}{\eta-\beta}d\eta,\quad \beta\in\Pi^+_\beta.$$

В результате получаем оценку

$$K_{+\alpha+\beta}(\alpha,\beta,\gamma)\to C(\beta+ic)^{-\frac{1}{4}} = O(\beta^{-\frac{1}{4}}),\quad |\beta|\to\infty.$$

Совершенно аналогично оцениваются другие члены со второй факторизацией. Внося эти оценки в (2.1), получим, в результате несложного анализа

$$q_0(x,y,z) = O(r^{-\frac{3}{4}}),\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Заметим, что этот результат близок к вычисленному приближенным методом в работе [17].

4) Поведение четвертых членов в (1.4) изучается подобно третьим, но уже осуществляется третья факторизация по не тронутому параметру, в частность, по параметру γ. В результате таких же вычислений, получаем

$$K_{+\alpha+\beta+\gamma}(\alpha,\beta,\gamma) = O(\gamma^{-\frac{1}{8}}).$$

Аналогично для других членов с тройной факторизацией. Суммировав особенности по всем трем осям, сходящимся в угловой точке штампа, в результате получаем описание концентрации контактных напряжений в вершине штампа, которая имеет вид

$$q(x,y,z) = O(r^{-\frac{7}{8}}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to 0.$$

Сопоставляя варианты 3) и 4) заключаем, что наличие не стационарного воздействия на штамп – увеличивает величину концентрацию контактных напряжений в вершине штампа до уровня $r^{-7/8}$, в сравнении с $r^{-3/4}$ и, тем самым, усиливает его разрушительное воздействие на слой.

Последнее наблюдается на практике: подвижным ножом легче разрезать деформируемую среду, чем при статическом давлении на нож.

Выводы. Полученное решение трехмерного интегрального уравнения Винера–Хопфа, имеет приложение в сейсмологии. Выявлен наиболее опасный участок граница литосферной плиты – угловые множества, а также наиболее уязвимые зоны фундаментов – они в углах его площади. Кроме этого, полученный результат может найти применения в довольно многочисленных примерах приложений одномерного интегрального уравнения Винера–Хопфа, приведенных во введении к настоящей статье, в частности, при конструировании объектов из анизотропных композитов, где возникают такие контактные задачи. Возможно, результат окажется полезным и в других областях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Кубанского научного фонда, региональный проект 24-11-20006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Freund L.B.* Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge, UK. Cambridge University Press, 1998. 520 p.
2. *Achenbach J.D.* Wave propagation in Elastic Solids. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam: North-Holland. 1973. 480 p.
3. *Abrahams, I.D., Wickham, G.R.* General Wiener-Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors // J. Appl. Math. 1990. V. 50. № 3. P. 819–838.
4. *Norris, A.N., Achenbach J.D.//* Elastic wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversely isotropic material // J. Appl. Math. Mech. 1984. 37. P. 565–580.
5. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 280 с.
6. *Ткачева Л.А.* Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45. № 3. С. 136–145.
7. *Chakrabarti A., George A.J.* Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves // Appl. Math. Lett. 1994. V. 7. № 3. P. 43–47. https://doi.org/10.1016/0893-9659(94)90070-1
8. *Davis A.M.J.* Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline // Geophysics, Astrophysics, Fluid Dynamics. 1987. V. 39. № 1–2. P. 25–55. https://doi.org/10.1080/03091928708208804
9. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

10. *Горячева И.Г., Мещерякова А.Р.* Моделирование накопления контактно-усталостных повреждений и изнашивания в контакте неидеально гладких поверхностей. // Физическая мезомеханика. 2022. Т. 25. № 4. С. 44–53.
11. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
12. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
13. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.
14. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Науч. мир, 1999. 246 с.
15. *Ватульян А.О.* Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 727–734.
16. *Колесников В.И., Беляк О.А.* Математические модели и экспериментальные исследования – основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов. М.: Физматлит, 2021. 216 с.
17. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
18. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 335 с.
19. *Kushch V.I.* Micromechanics of composites: multipole expansion approach. Oxford; Waltham: Elsevier Butterworth-Heinemann. 2013. 489 p.
20. *McLaughlin R.* A study of the differential scheme for composite materials // Int. J. Eng. Sci. 1977. V. 15. P. 237–244.
21. *Garces, G. Bruno G., Wanner A.* Load transfer in short fibre reinforced metal matrix composites // Acta Materialia. 2007. V. 55. № 16. P. 5389–5400. https://doi.org/10.1016/j.actamat.2007.06.003
22. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Точное решение универсальным методом моделирования контактной задачи в четверти плоскости многослойной среды. // ПММ. 2022. Т. 86. № 5. С. 628–637. https://doi.org/10.31857/S0032823522050046

ON NONSTATIONARY CONTACT PROBLEMS FOR ANISOTROPIC COMPOSITES IN NONCLASSICAL AREAS

V. A. Babeshko[a,*], O. V. Evdokimova[b], S. B. Uafa[a], V. S. Evdokimov[a], O. M. Babeshko[a]

[a]Kuban State University, Krasnodar, 350040 Russia
[b]Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, 344006 Russia
**e-mail: babeshko41@mail.ru*

Abstract. For the first time, an exact solution is given to the contact problem of the non-stationary action of a wedge-shaped, right-angled stamp occupying the first quadrant, which act on a deformable multilayer base. The base, which is affected by a rigid stamp in the shape of a quarter plane, can be a multilayer anisotropic composite material. It is assumed that it is possible to construct a Green's function for it, which makes it possible to construct an integral equation of the contact problem. The geometric Cartesian coordinates of the first quadrant and the time parameter, which varies along the entire axis, are taken as parameters describing the integral equation. It is assumed that time in the boundary value problem under consideration follows from negative infinity, crosses the origin and grows to infinity, covering the entire time interval. Thus, there is no requirement in the formulation of the Cochet problem when it is necessary to set initial conditions. In this formulation, the problem is reduced to solving the three-dimensional Wiener-Hopf integral equation. The authors are not aware of any attempts to solve this problem analytically or numerically. The investigation and solution of the contact problem was carried out using block elements in a variant applicable to integral equations. It is proved that the constructed solution exactly satisfies the integral equation. The properties of the constructed solution are studied. In particular, it is shown that the solution of the non-stationary contact problem has a higher concentration of contact stresses at the edges of the stamps and at the angular point of the stamp, compared with a static case. This corresponds to the observed in practice more effective non-stationary effect of rigid bodies on deformable media, for their destruction, compared with static. The results may be useful in engineering practice, seismology, in assessing the impact of incoming waves on foundations, in the areas of using Wiener-Hopf integral equations in probability theory and statistics, and other areas.

Keywords: contact problems, three-dimensional Wiener-Hopf integral equation, wedge-shaped domain, block element, anisotropy, composite, factorization

REFERENCES

1. *Freund L.B.* Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge, UK. Cambridge University Press. 1998. p. 520
2. *Achenbach J.D.* Wave propagation in Elastic Solids. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam: North-Holland. 1973. p. 480
3. *Abrahams I.D. & Wickham G.R.* General Wiener-Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors // Journal of Applied Mathematics. 1990. 50. P. 819–838.
4. *Norris A.N. & Achenbach J.D.* // Elastic wave diffraction by a semi infinite crack in a transversely isotropic material // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1984. 37. P. 565–580.
5. *Noble B.* Metod Vinera-Hopfa [The Wiener-Hopf method]. M.: Ill. 1962. 280 p.
6. *Tkacheva L.A.*Ploskaa zadacha o vibrasii plavaushei uprugoi plastini pod deistviem periodicheskoi vneshnei nagruzki [The planar problem of vibrations of a floating elastic plate under the action of periodic external load] // Applied mechanics and technical physics. 2004. Vol. 45. No. 5 (273). pp. 136–145. (In Russian)
7. *Chakrabarti A., George A.J.* Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves // Applied Mathematics Letters. 1994. 7. P. 43–47.
8. *Davis A.M.J.* Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline // Geophysics, Astrophysics, Fluid Dynamics. 1987. 39. P. 25–55.
9. *Goryacheva I.G.* Mehanika friksionnogo vzaimodeistvia [Mechanics of frictional interaction]. – M.: Nauka, 2001. – 478 p. (In Russian)

10. *Goryacheva I.G., Meshcheryakova A.R.* Modelirovanie nakoplenia kontaktno-ustalostni povrejdenii I isnashivania v kontakte ne idealno gladkih poverhnostei [Modeling of accumulation of contact fatigue damage and wear in contact of imperfectly smooth surfaces]. // Physical mesomechanics. 2022. Vol. 25. No. 4. pp. 44–53. (In Russian).
11. *Bazhenov V.G., Igumnov L.A.* Metodi granichnih integralnih uravneni I granichnih elementov [Methods of boundary integral equations and boundary elements.] M.: Physical education, 2008. 352 p. (In Russian).
12. *Kalinchuk V.V., Belyankova T.I.* Dinamika poverhnosti neodnorodnogo [Dynamics of the surface of inhomogeneous media.] Fizmatlit, 2009. 312 p. (In Russian).
13. *Kalinchuk V.V., Belyankovat I.* Dinamicheskie kontaktnie zadachi v prednapragennih telah [Dynamic contact problems for prestressed bodies]. Fizmatlit, 2002. – 240 p. (In Russian).
14. *Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D.* Dinamika massivnih tel I resonansnie iavlenia v deformiruemih sredah [Dynamics of massive bodies and resonant phenomena in deformable media] / M., Nauka 1999. 246 p. (In Russian).
15. *Vatulyan A.O.* Kontaktnie zadachi so ssepleniem dla anisotropnogo sloia [Contact problems with coupling for an anisotropic layer.] // Applied Mathematics and Mechanics. 1977. Vol. 41. v. 4. C. 727–734. (In Russian).
16. *Kolesnikov V.I., Belyak O.A.* Matematicheskoe modelirovanie I exsperementalnie issledovania-osnovadla poluchenia heterogennih antifriksionnih materialov [Mathematical models and experimental studies – the basis for the design of heterogeneous antifriction materials]. M.: Fizmatlit, 2021. 265 p. (In Russian).
17. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko J.F.* Dinamika neodnorodnoi lineino uprugoi sredi [Dynamics of inhomogeneous linear elastic media]. M.: Nauka, 1989. 344 p. (In Russian).
18. *Christensen R.* Vvedenie v mehaniku kompozitov [Introduction to the mechanics of composites]. Moscow: Mir. 1982. 335 p. (In Russian).
19. *Kushch V.I.* Micromechanics of composites: multipole expansion approach. – Oxford; Waltham: Elsevier Butterworth-Heinemann. 2013. 489 p.
20. *McLaughlin R.* A study of the differential scheme for composite Materials // International Journal of Engineering Science. 1977. Vol. 15. P. 237–244.
21. *Garces G., Bruno G., Wanner A.* Load transfer in short fibre reinforced metal matrix composites // Acta Materialia. 2007. Vol. 55. P. 5389–5400.
22. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Tochnoe reshenie universalnim metodom modelirovania kontaktnoi zadachi v chetverti ploskosti mnogosloinoi sredi [The exact solution by a universal method of modeling a contact problem in a quarter plane of a multilayer medium.] // Applied Mathematics and Mechanics. 2022. Vol. 86. № 5. P. 628–637.
https://doi.org/10.31857/S0032823522050046 (In Russian)