

УДК 539.3

ЕЩЕ РАЗ О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОСТИ С КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

© 2024 г. В. Н. Акопян^{а, *}, А. А. Амирджанян^{а, **}, Л. В. Акопян^{а, ***}

^аИнститут механики Национальной Академии Наук Армении, Ереван, Армения

*e-mail: vhakobyan@sci.am,

**e-mail: amirjanyan@gmail.com,

***e-mail: lhakobyan@gmail.com

Поступила в редакцию 28.07.2023 г.

После доработки 10.10.2023 г.

Принята к публикации 11.10.2023 г.

Построено точное решение контактной задачи о вдавливании абсолютно жесткого штампа с прямым основанием с учетом трения в один из берегов конечной трещины, находящейся в однородной упругой плоскости. Принимается, что касательные контактные напряжения прямо пропорциональны нормальному контактному давлению. При этом считается, что коэффициент трения прямо пропорционален координате соприкасающихся точек контактирующих поверхностей. Выведена определяющая система уравнений задачи в виде неоднородной задачи Римана для двух функций с переменными коэффициентами, и построено ее замкнутое решение в квадратурах. Получены простые формулы для контактных напряжений и нормальной компоненты дислокации смещений точек берегов трещины. Изучены закономерности изменения контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от максимального значения коэффициента трения.

Ключевые слова: контактная задача, трение, штамп, трещина

DOI: 10.31857/S1026351924020099, EDN: uvzytt

1. Введение. Известно, что многие инженерные сооружения и конструкции по ряду причин содержат трещины и полностью или частично сцепленные включения. Вокруг этих концентраторов напряжений возникают быстро изменяющиеся локальные поля напряжений, которые часто приводят к частичному или полному разрушению конструкции. Поэтому изучение закономерностей изменения этих локальных полей напряжений является одним из приоритетных направлений развития контактных и смешанных задач теории упругости и механики разрушения. Это позволит провести более точный расчет конкретных конструкций и принять меры для предотвращения их разрушения.

Многие основополагающие результаты в этом направлении приведены в монографиях [1–5]. Что же касается контактных задач для упругих

тел с трещинами, когда на один из берегов трещины вдавливается жесткое включение, то первая работа в этом направлении принадлежит Д.И. Шерману [4]. В этой работе построено точное решение контактной задачи для упругой плоскости с трещиной, на одном из берегов которой спаяно тонкое жесткое включение. В дальнейшем замкнутое решение аналогичной осесимметричной контактной задачи для пространства с дискообразной трещиной было получено Г.Я. Поповым в [6]. В работах [7, 8] получены разрывные решения плоской и осесимметричной теории упругости для составных плоскостей и пространств с межфазными трещинами, на основе которых получены точные решения задач для составных плоскостей и пространств с частично оторванными от матрицы жесткими межфазными включениями. В монографии [9] и в работах [10–15] приведены замкнутые решения ряда осесимметричных и плоских смешанных и контактных задач для однородных и составных плоскостей и пространств с трещинами. Особо отметим работу [14], где численно-аналитическим методом механических квадратур, в рамках контактной модели Л.А. Галина, построено решение контактной задачи для плоскости с трещиной, на один из берегов которой вдавливается жесткий штамп.

Здесь же в рамках модели контакта с трением, предложенной в работе [15], построено точное решение задачи для однородной плоскости с трещиной, на один из берегов которой вдавливается жесткий штамп с трением.

2. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть однородная плоскость с коэффициентами Ламэ α и λ , отнесенная к декартовой системе координат Oxy , находящаяся в состоянии плоской деформации, на интервале $(-a, a)$ оси абсцисс расслаблена конечной трещиной и деформируется при помощи абсолютно жесткого штампа, вдавливаемого в нижний берег трещины при помощи нормальной сосредоточенной нагрузки величины P_0 , приложенной в центре штампа (рис. 1). Полагается, что под штампом, помимо нормальных контактных напряжений, возникают также касательные контактные напряжения,

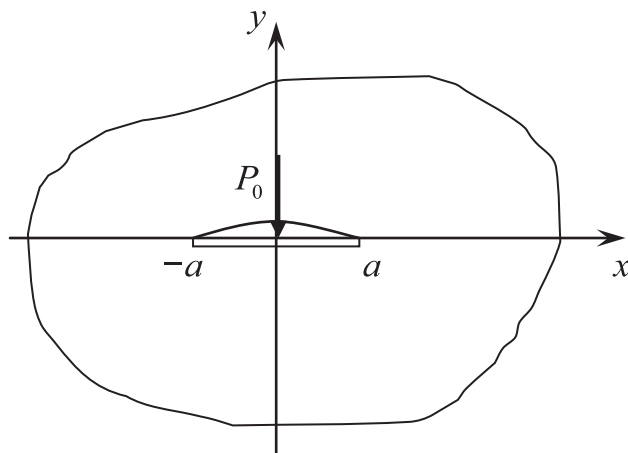


Рис. 1. Схематическое представление задачи.

которые связаны с нормальным контактным давлением законом сухого трения, коэффициент трения которого прямо пропорционален координатам точек контактирующих поверхностей [15].

Требуется построить замкнутое решение поставленной задачи, изучить закономерности изменения контактных напряжений, действующих под штампом, и раскрытие трещины в зависимости от максимального значения коэффициента трения.

Мысленно разделив плоскость по оси абсцисс на две полуплоскости и снабдив все характерные величины нижней и верхней полуплоскостей соответственно индексами 1 и 2, поставленную задачу сформулируем в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0) \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \tau_{xy}^{(2)}(x, 0), \quad (|x| > a) \\ u^{(1)}(x, 0) &= u^{(2)}(x, 0)\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$v^{(1)}(x, 0) = v^{(2)}(x, 0)$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = -f \frac{x}{a} \sigma_y^{(2)}(x, 0), \quad (|x| < a) \quad (2.2)$$

$$v^{(2)}(x, 0) = \delta.$$

Здесь $\sigma_y^{(j)}(x, y)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ ($j = 1, 2$) – компоненты тензора напряжений, действующих в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, $u^{(j)}(x, y)$ и $v^{(j)}(x, y)$ ($j = 1, 2$) горизонтальные и нормальные составляющие вектора смещений в соответствующих полуплоскостях, f – максимальное значение коэффициента трения, а δ – жесткое смещение штампа по направлению оси Oy .

Для решения граничной задачи (2.1)–(2.2) используем разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости с межфазной трещиной, приведенные в [8], которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (2.1). При помощи этих решений для напряжений, действующих на берегах трещины и производных от смещений точек берегов трещины, для однородной плоскости получим выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \frac{1}{2} \sigma(x) + \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds, \\ \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \frac{1}{2} \tau(x) - \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds, \\ v_2'(x, 0) &= -\frac{1}{2} v'(x) - \frac{1}{4\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds - \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds,\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$u'_2(x, 0) = -\frac{1}{2}u'(x) - \frac{1}{4\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds,$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma_y^{(2)}(x, 0) = -\sigma_y^{(2)}(x, 0), \\ \tau(x) &= \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = -\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = f \frac{x}{a} \sigma_y^{(2)}(x, 0) = -f \frac{x}{a} \sigma(x), \\ u^{(1)}(x, 0) - u^{(2)}(x, 0) &= u(x), \quad v^{(1)}(x, 0) - v^{(2)}(x, 0) = v(x),\end{aligned}$$

$$\vartheta_1 = \frac{\mu^2}{(\lambda + 3\mu)}, \quad \vartheta_2 = \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 3\mu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Используя представления (2.3), удовлетворим условиям на берегах трещины (2.2), предварительно продифференцировав последнее из них. В результате для определения неизвестных функций $\sigma(x)$, $\tau(x)$ и функций дислокации смещений $u'(x)$ и $v'(x)$ придем к следующей определяющей системе сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma(x) + \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds &= 0, \\ \frac{1}{2}\tau(x) - \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds &= 0, \\ \frac{1}{2}v'(x) + \frac{1}{4\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s-x} ds &= 0, \\ \tau(x) &= -f \frac{x}{a} \sigma(x).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Систему (2.4) нужно рассматривать при условиях равновесия штампа и непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\int_{-a}^a \sigma(x) dx = P_0, \quad \int_{-a}^a v'(x) dx = 0, \quad \int_{-a}^a u'(x) dx = 0. \tag{2.5}$$

Далее из второго и третьего уравнений исключим скачок горизонтальных смещений. Тогда с первым и последним уравнениями (2.3) придем к системе:

$$\begin{aligned}
\sigma(x) + \frac{\alpha}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds + \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds &= 0 \\
\alpha \tau(x) - \beta v'(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds &= 0 \\
\tau(x) = -f \frac{x}{a} \sigma(x),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\alpha = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, \quad \beta = \frac{2(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\vartheta_2}.$$

Теперь, подставляя значение функции $\tau(x)$ из последнего уравнения (2.6) в первые два уравнения, после некоторых выкладок с учетом первого условия (2.5) придем к следующей определяющей системе сингулярных интегральных уравнений второго рода с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\sigma(x) - \frac{f\alpha x}{\pi a} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \frac{\beta}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-x} ds &= A \quad \left(A = \frac{f\alpha}{\pi a} P_0 \right) \\
f\alpha \frac{x}{a} \sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds + \beta v'(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений второго рода с переменными коэффициентами (2.7) при первых двух условиях (2.5).

3. Решение системы определяющих уравнений. Для построения решения системы (2.7) при первых двух условиях (2.5) введем в рассмотрение аналитические во всей комплексной плоскости, разрезанной по интервалу $(-a, a)$, функции

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-z} ds, \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{v'(s)}{s-z} ds \tag{3.1}$$

и, используя формулы Племеля–Сохоцкого [4, 16], систему (2.7) напомним в виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^+(x) \left[1 - \frac{f\alpha x i}{a} \right] - \Phi_1^-(x) \left[1 + \frac{f\alpha x i}{a} \right] + i\beta [\Phi_2^+(x) + \Phi_2^-(x)] &= A \\
\Phi_1^+(x) \left[1 - \frac{f\alpha x i}{a} \right] + \Phi_1^-(x) \left[1 + \frac{f\alpha x i}{a} \right] - i\beta [\Phi_2^+(x) - \Phi_2^-(x)] &= 0
\end{aligned}$$

Отсюда после некоторых простых выкладок придем к следующей задаче Римана для двух функций:

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(x) &= v_1(x)\Phi_2^-(x) + f_1(x) \\ \Phi_2^+(x) &= v_2(x)\Phi_1^-(x) + f_2(x).\end{aligned}\quad (3.2)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}v_1(x) &= -\frac{i\beta}{1 - icx/a}, \quad v_2(x) = -\frac{i[1 + icx/a]}{\beta}, \\ f_1(x) &= \frac{A}{2(1 - icx/a)}, \quad f_2(x) = -\frac{iA}{2\beta}, \quad (c = f\alpha),\end{aligned}$$

а верхние индексы $+$ и $-$ здесь и далее будут означать значения комплексной функции соответственно на верхнем и нижнем берегах интервала интегрирования.

Следуя работе [11], построим решения системы (3.2), имеющие интегрируемые особенности в концевых точках интервала интегрирования. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned}\ln v_1(x) &= \ln \left[-\frac{i\beta}{1 - icx/a} \right] = \ln \left| \beta / \sqrt{1 + (cx/a)^2} \right| + i \left[2\pi k - \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{cx}{a} \right] \\ \ln v_2(x) &= \ln \left[-\frac{i[1 + icx/a]}{\beta} \right] = \ln \left[\frac{\sqrt{1 + (cx/a)^2}}{\beta} \right] + i \left[2\pi n - \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{cx}{a} \right].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\ln[v_1(x)v_2(x)] &= \ln \left| -\frac{1 + icx/a}{1 - icx/a} \right| + \\ &+ i \arg[v_1(x)v_2(x)] = i \left[2\pi(k + n) - \pi + 2 \arctg \frac{cx}{a} \right] \\ \ln[v_1(x)/v_2(x)] &= \ln |v_1(x)/v_2(x)| + \\ &+ i \arg[v_1(x)/v_2(x)] = \ln \left[\frac{\beta^2}{1 + (cx/a)^2} \right] + 2\pi i(k - n)\end{aligned}$$

где k и n — целые числа.

Канонические решения соответствующей однородной задачи Римана даются формулами [11]:

$$\begin{aligned}X_1^{(k,n)}(z) &= \frac{1}{z-a} \exp \left[\frac{1}{2} \Gamma_0^{(k,n)}(z) + \frac{1}{2} \Gamma^{(k,n)}(z) \right] \\ X_2^{(k,n)}(z) &= \frac{1}{z-a} \exp \left[\frac{1}{2} \Gamma_0^{(k,n)}(z) - \frac{1}{2} \Gamma^{(k,n)}(z) \right].\end{aligned}\quad (3.3)$$

По формулам, приведенным в [9], для функций $\Gamma_0^{(k,n)}(z)$ и $\Gamma^{(k,n)}(z)$ получим следующие выражения:

$$\Gamma_0^{(k,n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln[v_1(s)v_2(s)]}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{i \left[2\pi(k+n) - \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{cs}{a} \right]}{s-z} ds$$

$$\Gamma^{(k,n)}(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \ln \left[\frac{v_1(\tau)}{v_2(\tau)} \right] \frac{d\tau}{B^+(\tau)(\tau-z)} =$$

$$= \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \left\{ \ln \left[\frac{\beta^2}{1 + (c\tau/a)^2} + 2\pi i(k-n) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d\tau}{B^+(\tau)(\tau-z)} \right\}, \quad \left(B(z) = \sqrt{(z+a)(z-a)} \right).$$

Легко проверить, что эти решения будут иметь интегрируемые особенности в точке $x = -a$ только в двух случаях, когда $k = 1$; $n = 0$ и $k = n = 1$. В первом из этих случаев

$$\Gamma_0^{(1,0)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{i \left[\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{cs}{a} \right]}{s-z} ds \quad (3.4)$$

$$\Gamma^{(1,0)}(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \left\{ \ln \left[\frac{\beta^2}{1 + (c\tau/a)^2} \right] + 2\pi i \right\} \frac{d\tau}{B^+(\tau)(\tau-z)},$$

а во втором случае

$$\Gamma_0^{(1,1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{i \left[3\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{cs}{a} \right]}{s-z} ds \quad (3.5)$$

$$\Gamma^{(1,1)}(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \left\{ \ln \left[\frac{\beta^2}{1 + (c\tau/a)^2} \right] \right\} \frac{d\tau}{B^+(\tau)(\tau-z)}.$$

Общее решения задачи Римана (3.3) запишем в виде:

$$\Phi_j(z) = C_1 X_j^{(1,0)}(z) + C_2 X_j^{(1,1)}(z) + \frac{1}{2} \Phi_j^{(1,0)}(z) + \frac{1}{2} \Phi_j^{(1,1)}(z) \quad (j = 1, 2), \quad (3.6)$$

где C_1 и C_2 — неизвестные постоянные, подлежащие определению, а функции $\Phi_j^{(1,0)}(z)$ и $\Phi_j^{(1,1)}(z)$ ($j = 1, 2$) — частные решения системы (3.2), построенные на основе каждой из канонических решений, и даются формулами [11]:

$$\Phi_j^{(1,n)}(z) = X_j^{(1,n)}(z) \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{-a}^a \frac{F_+^{(1,n)}(s) ds}{s-z} - (-1)^j \frac{B(z)}{4\pi i} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,n)}(s) ds}{B^+(s)(s-z)} \right\} \quad (3.7)$$

$$F_{\pm}^{(1,n)}(x) = \frac{f_1(s)}{X_1^{(1,n)+}(s)} \pm \frac{f_2(s)}{X_2^{(1,n)+}(s)}, \quad (j = 1, 2; n = 0, 1).$$

В рассматриваемом случае значения канонических решений $X_j^{(1,n)}(z)$ ($j = 1, 2; n = 0, 1$), определяемые формулами (3.3), на верхнем и нижнем берегах разреза $(-a, a)$ будут даваться формулами:

$$\begin{aligned} X_1^{(1,0)+}(x) &= -\frac{\chi(x)}{\omega(x)}, \quad X_1^{(1,0)-}(x) = i\frac{\chi(-x)}{\omega(x)}, \quad X_2^{(1,0)+}(x) = i\nu_2(x)\frac{\chi(-x)}{\omega(x)} \\ X_2^{(1,0)-}(x) &= -\frac{\chi(x)}{\omega(x)\nu_1(x)}, \quad X_1^{(1,1)+}(x) = -\frac{\chi(x)}{\omega(-x)}, \quad X_1^{(1,1)-}(x) = -i\frac{\chi(-x)}{\omega(-x)} \\ X_2^{(1,1)+}(x) &= -i\nu_2(x)\frac{\chi(-x)}{\omega_1(-x)}, \quad X_2^{(1,1)-}(x) = -\frac{\chi(x)}{\nu_1(x)\omega(-x)} \\ \chi(x) &= \sqrt[4]{q(x)}e^{3\pi i/4}e^{i\psi_*(x)}e^{\psi_1(x)}, \quad \omega(x) = (a+x)^{1/4+\gamma(x)}(a-x)^{3/4-\gamma(x)} \end{aligned}$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{cx}{a}, \quad \psi_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\left[\operatorname{arctg} \frac{cs}{a} - \operatorname{arctg} \frac{cx}{a} \right]}{s-x} ds$$

$$\psi_*(x) = \frac{1}{2} [\operatorname{arctg}(cx/a) + \psi_2(x)], \quad q(x) = \frac{\beta^2}{1 + (cx/a)^2}$$

$$\psi_2(x) = -\frac{B^+(x)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\ln q(\tau) d\tau}{B^+(\tau)(\tau-x)} = \frac{B^+(x)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\ln [1 + (cx/a)^2] d\tau}{B^+(\tau)(\tau-x)}.$$

Отметим, что при выводе последней из этих формул было использовано соотношение [17]:

$$\int_{-a}^a \frac{ds}{\sqrt{a^2 - s^2}(s-x)} = 0 \quad (|x| < a).$$

Используя вышеприведенные формулы, для функций $F_{\pm}^{(1,n)}(x)$ ($n = 0, 1$) получим выражения:

$$\begin{aligned} F_+^{(1,0)}(x) &= iA\omega(x)F(x), \quad F_-^{(1,0)}(x) = A\omega(x)F(-x) \\ F_+^{(1,1)}(x) &= -iF_+^{(1,0)}(-x) = A\omega(-x)F(-x) \\ F_-^{(1,1)}(x) &= iF_-^{(1,0)}(-x) = iA\omega(-x)F(x) \\ F(x) &= \frac{[(1+cx/a)\cos\psi_*(x) - (1-cx/a)\sin\psi_*(x)]}{\sqrt[4]{4q(x)}\exp[\psi_1(x)][1+(cx/a)^2]}. \end{aligned}$$

Определим постоянные C_j ($j = 1, 2$). Для этого сравним коэффициенты при z^{-1} разложения функций $\Phi_j(z)$ ($j = 1, 2$) на бесконечности по представлениям (3.1) и (3.7). Используя первые два условия (2.5), получим:

$$\begin{aligned} iC_1 + C_2 &= -\frac{e^{-B_0/2}P_0}{2\neq i} - iD_0 - D_1, \\ -iC_1 + C_2 &= -iD_0 + D_1 \end{aligned}$$

Откуда при помощи значения интеграла [17]

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(1+(cx)^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\neq \ln \left[\frac{1+\sqrt{1+c^2}}{2} \right]$$

найдем

$$C_1 = \frac{e^{-B_0/2}P_0}{4\neq} + iD_1, \quad C_2 = -\frac{e^{-B_0/2}P_0}{4\neq i} - iD_0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{8\neq} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,0)}(s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}}, \quad D_1 = \frac{1}{8\neq} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,1)}(s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}} \\ B_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\ln q(\tau)d\tau}{\sqrt{a^2-\tau^2}} = \ln \left[\frac{2\beta}{1+\sqrt{1+c^2}} \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что $D_1 = -iD_0$. Действительно, так как $F_-^{(1,1)}(x) = iF_-^{(1,0)}(-x)$,

то можем записать

$$D_1 = \frac{1}{4\neq} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,1)}(s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = \frac{i}{4\neq} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,0)}(-s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = \frac{i}{4\neq} \int_{-a}^a \frac{F_-^{(1,0)}(s)ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = iD_0.$$

Значит, постоянные C_j ($j = 1, 2$) можем представить в следующем виде:

$$C_1 = \frac{e^{-B_0/2}P_0}{4\neq} - D_0, \quad C_2 = iC_1.$$

Далее для определения контактного давления и нормального составляющего дислокации смещений по формулам Племяля–Сохоцкого [4] получим формулы:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = C_1 \left[X_1^{(1,0)+}(x) - X_1^{(1,0)-}(x) \right] + \\ &\quad + C_2 \left[X_1^{(1,1)+}(x) - X_1^{(1,1)-}(x) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\Phi_1^{(1,0)+}(x) - \Phi_1^{(1,0)-}(x) \right] + \frac{1}{2} \left[\Phi_1^{(1,1)+}(x) - \Phi_1^{(1,1)-}(x) \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
v'(x) = & \Phi_2^+(x) - \Phi_2^-(x) = C_1 \left[X_2^{(1,0)+}(x) - X_2^{(1,0)-}(x) \right] + \\
& + C_2 \left[X_2^{(1,1)+}(x) - X_2^{(1,1)-}(x) \right] \frac{1}{2} \left[\Phi_2^{(1,0)+}(x) - \Phi_2^{(1,0)-}(x) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left[\Phi_2^{(1,1)+}(x) - \Phi_2^{(1,1)-}(x) \right].
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя в формулы (3.8) и (3.9) приведенные значения функций и введя обозначения

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= \sqrt[4]{4q(x)} \exp[\psi_1(x)] [\cos \psi_*(x) + \sin \psi_*(x)] \\
Q_2(x) &= \sqrt[4]{4q(x)} \exp[\psi_1(x)] [(1 + cx/a) \cos \psi_*(x) - (1 - cx/a) \sin \psi_*(x)] \\
\psi_*(x) &= \frac{1}{2} [\arctg(cx/a) + \psi_2(x)],
\end{aligned}$$

после некоторых математических выкладок для нормального контактного давления и нормального составляющего дислокации смещений точек берегов трещины получим выражения:

$$\sigma(x) = \eta_1(-x) + \eta_1(x), \quad v'(x) = \frac{1}{\beta} [\eta_2(-x) - \eta_2(x)]. \quad (3.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\eta_i(x) &= \frac{A}{4[1 + (cx/a)^2]} + \frac{Q_i(x)}{\omega(x)} \left(C_1 + \frac{A}{4} I_1(x) \right) + \frac{A}{4} \frac{Q_i(x)}{\omega(-x)} I_2(x), \quad (i = 1, 2) \\
I_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\omega(s) F(s)}{s - x} ds, \quad I_2(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\omega(-s) F(s) ds}{\sqrt{a^2 - s^2} (s - x)}.
\end{aligned}$$

Касательные контактные напряжения можно определять по последней из соотношений системы (2.6). Горизонтальный же компонент дислокации смещения точек берегов трещины $u'(x)$ можно определить, решив второе или третье уравнение системы (2.4) или же уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)}{s - x} ds = f \frac{x}{2\vartheta_2 a} \sigma(x) - \alpha v'(x), \quad (3.11)$$

которое получается при помощи линейной комбинации указанных уравнений. Решение уравнения (3.11) при третьем из условий (2.5) записывается в виде [4]:

$$u'(x) = - \frac{1}{2\pi\vartheta_2 a \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - s^2} (fs\sigma(s) - 2\vartheta_2 a \alpha v'(s)) ds}{s - x}.$$

Отметим, что в частном случае, когда трение отсутствует, будем иметь:

$$c = A = \gamma(x) = \psi_1(x) = \psi_2(x) = F(x) = D_0 = 0,$$

$$Q_1(x) = Q_2(x) = \sqrt{2\beta}, \quad e^{B_0/2} = \sqrt{\beta}, \quad q(x) = 2\ln\beta, \quad C_1 = \frac{P_0}{4\pi\sqrt{\beta}},$$

$$\omega(x) = (a+x)^{1/4}(a-x)^{3/4}.$$

Тогда из формул (3.10) и (3.11) для нормального контактного давления и нормальной составляющей дислокации смещений точек берегов трещины получим выражения:

$$\sigma(x) = \frac{\sqrt{2}P_0}{4\pi} \left[\frac{1}{\omega(x)} + \frac{1}{\omega(-x)} \right]$$

$$v'(x) = -\frac{\sqrt{2}P_0}{4\pi\beta} \left[\frac{1}{\omega(x)} - \frac{1}{\omega(-x)} \right],$$

которые точно совпадают с результатами работы [13], если в них принять коэффициент трения равным нулю.

4. Численные расчеты. Приведем также некоторые численные результаты. Очевидно, что численные значения контактных напряжений и раскрытие трещины можно вычислить при помощи выше полученных формул. Однако мы пойдем другим путем и построим решение системы (2.7) численно-аналитическим методом механических квадратур, который, на наш взгляд, более общий и дает возможность решать аналогичные задачи для ограниченных областей, т.е. когда интегральные уравнения будут содержать регулярные части. С этой целью сформулируем систему (2.6) на интервале $(-1, 1)$ и, обозначив

$$\sigma_*(x) = a\sigma(ax) / P_0, \quad v'_*(x) = v'(ax), \quad \frac{\beta a}{P_0} = \beta_*,$$

запишем ее в виде:

$$\sigma_*(x) - \frac{cx}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_*(s)}{s-x} ds + \frac{\beta_*}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v'_*(s)}{s-x} ds = A_* \quad \left(A_* = \frac{f\alpha}{\pi} \right)$$

$$cx\sigma_*(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_*(s)}{s-x} ds + \beta_* v'_*(x) = 0. \quad (4.1)$$

Далее введем в рассмотрение новые искомые функции $\varphi_j(x)$ ($j = 1, 2$) по формулам:

$$\sigma_*(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad v'_*(x) = \frac{\sqrt{1+c^2}}{\beta_*} [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)].$$

Подставляя эти значения искомым функции в систему (4.1), после некоторых преобразований для определения функций $\varphi_j(x)$ ($j = 1, 2$) приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{1+c^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(s)ds}{s-x} + \left[\left(cx + \sqrt{1+c^2} \right)^2 + 1 \right] \varphi_1(x) + c^2(x^2-1)\varphi_2(x) &= A_* \\ -\frac{2\sqrt{1+c^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(s)ds}{s-x} + \left[\left(cx - \sqrt{1+c^2} \right)^2 + 1 \right] \varphi_2(x) + c^2(x^2-1)\varphi_1(x) &= A_{**}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

При этом первые два условия (2.5) через функции $\varphi_j(x)$ ($j = 1, 2$) запишутся в следующем виде:

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(s)ds = 0.5 \quad (j = 1, 2). \quad (4.3)$$

Несложно заметить, что в первом уравнении доминирующей, в смысле особенности, является функция $\varphi_1(x)$, так как коэффициент при функции $\varphi_2(x)$ равен нулю при $x = \pm 1$, а во втором уравнении — $\varphi_2(x)$. Кроме того, очевидно, что если во втором уравнении системы (4.2) заменим x на $-x$ и обозначим $\varphi_2(-x) = \varphi_1(x)$, то получим первое уравнение системы (4.2), т.е. $\varphi_2(x) = \varphi_1(-x)$. Определим поведение функции в концевых точках интервала интегрирования. Используя соотношение [16]:

$$\int_a^b \frac{\chi(\xi)d\xi}{(\xi-c)^\gamma(\xi-\eta)} = \pm \pi \frac{ctg\pi\gamma}{(\eta-c)^\gamma} \chi(c) + \Phi(\eta),$$

где нужно взять верхний знак в случае, когда $c = a$, и нижний знак, когда $c = b$, а функция $\Phi(\eta)$ принадлежит классу H в окрестности точки c , при помощи первого уравнения (4.2) несложно убедиться, что функция $\varphi_1(x)$, как и в выше полученных замкнутых решениях, в точке $x = -1$ имеет степенную особенность типа $(1+x)^{-\gamma}$, а в точке $x = 1$ — степенную особенность типа $(1+x)^{\gamma-1}$. При помощи второго же уравнения (4.2) убеждаемся, что функция $\varphi_2(x)$ в точке $x = -1$ имеет степенную особенность типа $(1+x)^{\gamma-1}$, а в точке $x = 1$ степенную особенность типа $(1+x)^{-\gamma}$, где

$$\gamma = 0.5 + \frac{1}{\pi} \arctg \left[\sqrt{1+c^2} - c \right] = 0.75 - \frac{1}{2\pi} \arctg(c).$$

Исходя из вышесказанного, искомые функции представим в виде:

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi_1^*(x)}{(1+x)^\gamma(1-x)^{1-\gamma}}, \quad \varphi_2(x) = \frac{\varphi_2^*(x)}{(1+x)^{1-\gamma}(1-x)^\gamma},$$

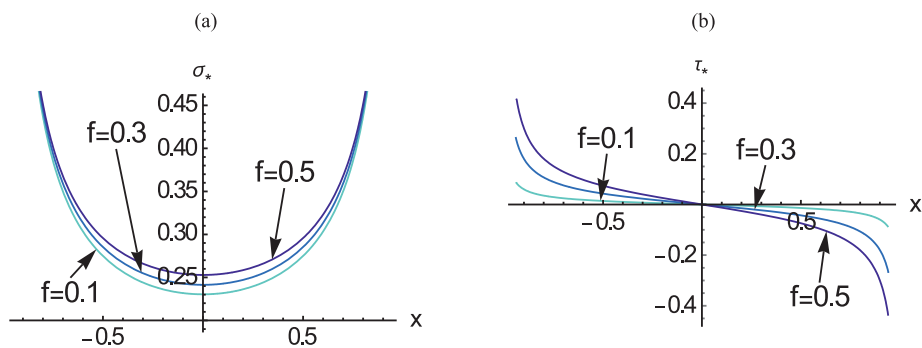


Рис. 2. Нормальное (а) и касательное (б) контактные напряжения.

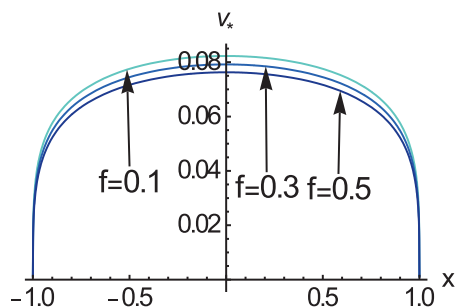


Рис. 3. Раскрытие трещины.

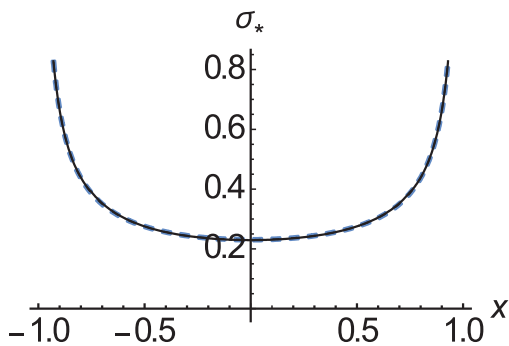


Рис. 4. Нормальное контактное давление по принятой модели и по модели контакта Галина.

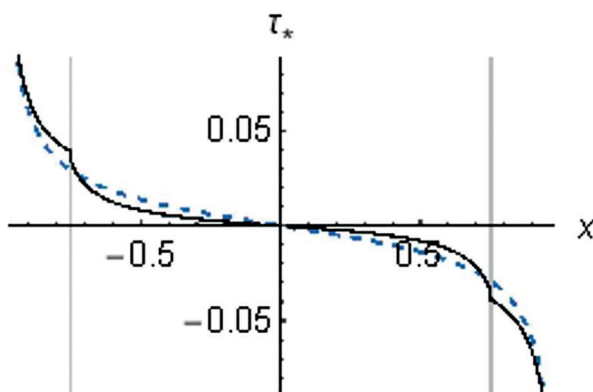


Рис. 5. Касательное контактное напряжение по принятой модели и по модели контакта Галина.

где функции $\varphi_1^*(x)$ и $\varphi_2^*(x)$ – ограниченные, гладкие функции на замкнутом интервале $[-1, 1]$.

Подставляя эти выражения функции $\varphi_j(x)$ ($j = 1, 2$) в систему (4.2) и в условия (4.3) по обычной процедуре [18], для определения функций $\varphi_j^*(x)$ ($j = 1, 2$) в точках коллокации ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) приходим к системе алгебраических уравнений.

Проведены численные расчеты и вычислены значения приведенного контактного давления $\sigma_*(x)$, касательного контактного напряжения $\tau_*(x) = -fx\sigma_*(x)$ и раскрытия трещины $v_*(x) = v(ax)/a$ в случае, когда $v = 0.3$, $aE/P_0 = 1$ для различных значений максимального значения коэффициента трения f .

Результаты вычислений приведены в виде графиков (рис. 2–5). На рис. 2 приведены графики нормального давления и касательных напряжений под включением в зависимости от максимального значения коэффициента трения f . Из них видно, что контактное давление мало зависит от f , тогда как при увеличении f касательные напряжения возрастают.

На рис. 3 приведены графики раскрытия трещины с использованной здесь модели трения в случае, когда $f = 0.1, 0.3, 0.5$. Из них явствует, что при увеличении максимального значения коэффициента трения раскрытие трещины уменьшается.

На рис. 4 и рис. 5 приведены графики нормального давления и касательных напряжений под включением, вычисленные с использованием здесь принятой модели трения (пунктирные линии) и модели контакта Л.А. Галина (сплошные линии) в случае, когда $\rho = 0.1$. Как видно из графиков, нормальные давления почти не отличаются друг от друга, а касательные напряжения довольно близки и мало отличаются друг от друга.

5. Заключение. Таким образом, изучено плоско-деформированное состояние однородной упругой плоскости с конечной трещиной, на один из берегов которой вдавливается абсолютно жесткий штамп с трением, когда касательные контактные напряжения связаны с нормальным контактным давлением законом сухого трения. При этом считается, что коэффициент трения зависит от

координат соприкасающихся точек контактирующих поверхностей и прямо пропорционален им. Выведено ключевое уравнение в виде задачи Римана для двух функций, и построено ее точное решение. Построено решение задачи также численно-аналитическим методом механических квадратур, и изучены закономерности изменения контактных напряжений и раскрытия трещины в зависимости от максимального значения коэффициента трения. Проведен сравнительный анализ с решением той же задачи в рамках контактной модели Л.А. Галина.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта 21Т-2С209.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270 с.
3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
5. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стацук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
6. Попов Г.Я. О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения. В сб.: “Современные проблемы механики и авиации”, посв. И.Ф. Образцову. 1980. С. 156–162.
7. Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 31–46.
8. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной // Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т. 48. № 4. С. 57–65.
9. Hakobyan V.N. Stress concentrators in continuous deformable bodies. *Advanced Structured Materials*. V. 181. Springer, 2022. 397 p.
10. Ильина И.И., Сильвестров В.В. Задача о тонком жестком включении, отсоединившемся вдоль одной стороны от среды. // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 3. С. 153–166.
11. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 907–912.
12. Mkhitarian S.M. On the stress-strain state of an elastic infinite plate with a crack expanding by means of smooth thin inclusion indentation// *Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*. 2019. V. 72. № 4. P. 38–64.
<http://doi.org/10.33018/72.4.4>
13. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Контактная задача для однородной плоскости с трещиной // Известия НАН РА. Механика. 2020. Т. 73. № 4. С. 3–12.
<http://doi.org/10.33018/73.4.1>
14. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Dashtoyan L.L., Sahakyan A.V. Indentation of an Absolutely Rigid Thin Inclusion into One of the Crack Faces in an Elastic Plane Under Slippage at the

- Ends // In Book: *Altenbach H., Bauer S., Belyaev K., et al. (eds). Advances in Solid and Fracture Mechanics. A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of N. Morozov.* 2022. P. 187–197.
15. *Акопян В.Н., Акопян Л.В.* Об одной модели трения применительно к контактным задачам теории упругости // Изв. НАН РА. Механика. 2023. Т. 76. № 2. С. 20–31.
<http://doi.org/10.54503/0002-3051-2023.76.2-20>
 16. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
 17. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
 18. *Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A.* Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. V. 991. 012070.
<http://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070>

UDC 539.3

ON A CONTACT PROBLEM FOR A HOMOGENEOUS PLANE WITH A FINITE CRACK UNDER FRICTION

© 2024 г. V. Hakobyan^{a, *}, H. Amirjanyan^{a, **}, L. Hakobyan^{a, ***}

^a*Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia,
Yerevan, Armenia*

^{*}*e-mail: vhakobyan@sci.am,*

^{**}*e-mail: amirjanyan@gmail.com,*

^{***}*e-mail: lhakobyan@gmail.com*

Abstract — An exact solution to the contact problem of indentation of an absolutely rigid punch with a straight base, taking into account friction, into one of the edges of a finite crack located in a homogeneous elastic plane was derived. It is assumed that shear contact stresses are directly proportional to normal contact pressure. In this case, it is assumed that the friction coefficient is directly proportional to the coordinates of the contacting points of the contacting surfaces. The governing system of equations for the problem was derived in the form of the heterogeneous Riemann problem for two functions with variable coefficients and its closed solution is constructed in quadratures. Simple formulas for contact stresses and the normal dislocation component of displacements of crack edge points were obtained. The patterns of changes in contact stresses and crack opening depending on the maximum value of the friction coefficient have been studied.

Keywords: contact problem, friction, stamp, crack

REFERENCES

1. Galin L.A., 1980. Contact Problems in the Theory of Elasticity and Viscoelasticity. Nauka, 1980. 304 p.
2. Shtaerman I.Ya. Contact Problem of Elasticity Theory. Gostekhizdat, 1949. 270 p.
3. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. The Stress Distribution near Cracks in Plates and Shells. Kiev: Naukova Dumka, 1976. 443 p.
4. Muskhelishvili N.I. Some Problems of Mathematical Theory of Elasticity. M.: Nauka, 1966. 708 p.
5. Berezhnitsky L., Panasiuk V., Staschuk N. 1983. Interaction of Rigid Linear Inclusions and Cracks in Deformable Body. Kiev: Naukova Dumka, 1983. 288 p.
6. Popov G.Ya. About Concentration of the Elastic Stresses Near Thin Detached Inclusion. "Contemporary Problems of Mechanics and Aviation", Dedicated to I. Abramtsov. 1980. P. 156–162.
7. Hakobyan V.N., Mirzoyan S.E., Dashtoyan L.L. Axisymmetric Mixed Boundary Value Problem for Composite Space with Coin-Shaped Crack // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2015. № 3 (60). P. 31–46;
<https://doi.org/10.18698/1812-3368-2015-3-31-46>
8. Hakobyan V.N. 1995. On One Mixed Problem for Composite Plate, Weakened by Crack // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. 1995. V. 48. № 4. P. 57–65.
9. Hakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, Advanced Structured Materials, V. 181. Springer, 2022. 397 p.
10. Il'ina I.I., Silvestrov V.V. The Problem of a Thin Interfacial Inclusion Detached from the Medium Along One Side // Mech. Solids. 2005. V. 40. № 3. P. 153–166.
11. Cherepanov G.P. Solution of a Linear Boundary Value Problem of Riemann for Two Functions and its Application to Certain Mixed Problems in the Plane Theory of Elasticity // J. Appl. Math. Mechanics. 1962. V. 26. № 5. P. 907–312.
12. Mkhitaryan S.M. On the Stress-Strain State of an Elastic Infinite Plate with a Crack Expanding by Means of Smooth Thin Inclusion Indentation // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. 2019. V. 72. № 4. P. 38–64;
<https://doi.org/10.33018/72.4.4>
13. Hakobyan V.N., Hakobyan L.V. Contact problem for a homogeneous plane with crack // Proc. NAS RA. Mechanics. 2020. V. 73. № 4. P. 3–12.
14. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Dashtoyan L.L., Sahakyan A.V. Indentation of an Absolutely Rigid Thin Inclusion into One of the Crack Faces in an Elastic Plane Under Slippage at the Ends. In Book: Altenbach H., Bauer S., Belyaev K. et al. (eds), Advances in Solid and Fracture Mechanics, A Liber Amicorum to Celebrate the Birthday of N. Morozov. 2022. P. 187–197.
15. Hakobyan V.N., Hakobyan L.V. On a model of friction for contact problems of the theory of elasticity // Proc. NAS RA. Mechanics. 2023. V. 76. № 2. P. 20–31;
<https://doi.org/10.54503/0002-3051-2023.76.2-20>
16. Muskhelishvili N.I. Singular integral equations. Moscow: Nauka, 1968. 511 p.
17. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and Series. Moscow: Nauka, 1981. 738 p.
18. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // IOP Conf. Series: J. Physics: Conf. Series. 2018. V. 991. 012070;
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070>