ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2024, № 2, с. 103–138

УДК 531.01, 531.32, 629.78

КВАТЕРНИОННЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ И ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ СПУТНИКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ В ПЕРЕМЕННЫХ КУСТААНХЕЙМО–ШТИФЕЛЯ И МОДИФИЦИРОВАННЫХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ: ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Ю. Н. Челноков[a], *

[a]*Институт проблем точной механики и управления РАН*

**e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 11.04.2023 г.
После доработки 09.06.2023 г.
Принята к публикации 17.06.2023 г.

В статье развита предложенная нами ранее в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел кватернионная регуляризация дифференциальных уравнений (ДУ) относительного возмущенного движения изучаемого тела: уравнений движения центра масс этого тела в системе координат, вращающейся в инерциальной системе координат по произвольно заданному закону, а также развита кватернионная регуляризация ДУ движения изучаемого тела относительно системы координат, связанной с Землей. Предложены новые кватернионные ДУ возмущенного движения искусственного спутника Земли относительно системы координат, связанной с Землей. Эти уравнения имеют (в новом времени) вид ДУ относительного движения возмущенного четырехмерного осциллятора в переменных Кустаанхеймо–Штифеля или в предложенных нами модифицированных четырехмерных переменных, дополненных ДУ уравнениями для энергии движения спутника и времени. В этих уравнениях возмущенного относительного движения спутника учитываются зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли. Предложенные уравнения, в отличие от классических уравнений, регулярны (не содержат особых точек типа сингулярности (деления на ноль)) для относительного движения спутника в ньютоновском гравитационном поле Земли. Уравнения удобны для применения методов нелинейной механики и высокоточных численных расчетов при исследовании орбитального движения спутника относительно Земли и прогнозе его движения.

Ключевые слова: возмущенная пространственная задача двух тел, искусственный спутник Земли, кватернионная регуляризация, регулярные кватернионные уравнения, абсолютное и относительное движения, переменные Кустаанхеймо–Штифеля, модифицированные четырехмерные переменные, энергия движения; зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли

DOI: 10.31857/S1026351924020044, **EDN:** uwielz

1. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для абсолютного движения. В основе небесной механики и астродинамики (механики космического полета) лежит векторное ньютоновское дифференциальное уравнение возмущенной пространственной задачи двух тел: уравнение для абсолютного движения второго (изучаемого) тела (для движения этого тела в инерциальной системе координат):

$$d^2\mathbf{r} / dt^2 + f(m+M)r^{-3}\mathbf{r} = \mathbf{p}(t,\mathbf{r},d\mathbf{r} / dt)\,. \tag{1.1}$$

В уравнении (1.1) $\mathbf{r}$ – радиус-вектор центра масс второго тела, проведенный из центра масс первого (центрального) тела; $r = |\mathbf{r}|$ – расстояние от центра масс второго тела до центра масс первого тела, m и M – массы второго и первого тел; f – гравитационная постоянная; $\mathbf{p}$ – вектор возмущающего ускорения центра масс второго тела, t – время.

Это уравнение вырождается при соударении второго тела с центральным телом (при равенстве нулю расстояния r между телами), что делает использование этого уравнения неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности.

Проблема устранения указанной особенности известна в небесной механике и астродинамике как проблема регуляризации дифференциальных уравнений задачи двух тел и восходит к Эйлеру (1765) [1] и Леви-Чивита (1920) [2–4], давшим решения одномерной и двумерной задачам о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений). Эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, так называемая спинорная или *KS*-регуляризация, была предложена Кустаанхеймо и Штифелем (1964–1965) [5, 6]. Она представляет собой обобщение регуляризации Леви-Чивита уравнений плоского движения и наиболее полно изложена в широко известной монографии Штифеля и Шейфеле (1971) [7].

Изучению различных аспектов кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел с использованием переменных Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-переменных) посвящены работы [8–25], а также работы автора статьи [26–46]. В работах приводятся результаты сравнения численного решения уравнений орбитального движения небесных и космических тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона) и в других переменных, которые свидетельствуют об эффективности использования *KS*-переменных и параметров Эйлера в задачах небесной механики и астродинамики.

В основе регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела, так называемое *KS*-преобразование, обобщающее преобразование Леви-Чивиты, имеющее вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_0 \\ u_2 & u_1 & -u_0 & -u_3 \\ u_3 & u_0 & u_1 & u_2 \\ u_0 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u}_{KS}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где x_k (k = 1, 2, 3) – декартовы координаты центра масс изучаемого тела в инерциальной системе координат X, имеющей начало в центре масс центрального тела и координатные оси, направленные на удаленные звезды; u_j (j = 0, 1, 2, 3) – новые переменные (KS-переменные), $L(\mathbf{u}_{KS})$ – обобщенная матрица Леви-Чивиты, называемая KS-матрицей, содержащая в левом верхнем углу двумерную квадратную матрицу Леви-Чивиты.

В скалярной записи преобразование (1.2) имеет вид:

$$x_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad x_2 = 2\left(u_1 u_2 - u_0 u_3\right), \quad x_3 = 2\left(u_1 u_3 + u_0 u_2\right) \quad (1.3)$$

и с точностью до перестановки индексов совпадает с отображением Хопфа (1931) [55].

Регулярные дифференциальные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля возмущенной пространственной задачи двух тел имеют в скалярной записи следующий вид [7]:

$$u_j'' - \frac{1}{2} h u_j = \frac{1}{2} r q_j, \quad j = 0,1,2,3\ , \quad (1.4)$$

$$h' = 2\left(q_0 u_0' + q_1 u_1' + q_2 u_2' + q_3 u_3'\right), \quad (1.5)$$

$$t' = r, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (1.6)$$

$$q_0 = u_0 p_1 - u_3 p_2 + u_2 p_3, \quad q_1 = u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3$$

$$q_2 = -u_2 p_1 + u_1 p_2 + u_0 p_3, \quad q_3 = -u_3 p_1 - u_0 p_2 + u_1 p_3\ .$$

Здесь верхний штрих – символ дифференцирования по новой независимой переменной τ, называемой фиктивным временем и связанной с временем t дифференциальным уравнением (1.6): $dt/d\tau = r$; h – кеплеровская энергия, рассматриваемая как дополнительная переменная и определяемая соотношениями:

$$h = \frac{1}{2} v^2 - f\left(m + M\right)\frac{1}{r}, \quad v = |\mathbf{v}|, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\ ,$$

p_k (k = 1,2,3) – проекции возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ центра масс второго тела на оси инерциальной системы координат. Время t также рассматривается как дополнительная (зависимая) переменная.

Уравнения (1.4)–(1.6) образуют систему десяти обыкновенных нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений относительно четырех переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_j, кеплеровской энергии h и времени t.

Уравнения (1.4) эквивалентны матричному уравнению:

$$\mathbf{u}_{ks}'' - \frac{1}{2} h\, \mathbf{u}_{ks} = \frac{1}{2} r\, L\left(\mathbf{u}_{ks}\right)\mathbf{P}_{ks}, \quad \mathbf{u}_{ks} = \left(u_1, u_2, u_3, u_0\right), \quad \mathbf{P}_{ks} = \left(p_1, p_2, p_3, 0\right),$$

где $\mathbf{u}_{ks}$ – четырехмерный вектор-столбец KS-переменных, $\mathbf{P}_{ks}$ – четырехмерный вектор-столбец, сопоставляемый трехмерному вектору возмущающего ускорения $\mathbf{p}$.

Отметим следующие основные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля (1.4)–(1.6) [34–37, 47–50, 56]:

– они, в отличие от ньютоновских уравнений, регулярны в центре притяжения;

– линейны для невозмущенных кеплеровских движений (в отличие от существенно нелинейных ньютоновских уравнений для этих движений) и имеют в этом случае (в новом времени τ ($dt = rd\tau$)) вид системы четырех независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковыми постоянными коэффициентами, равными отрицательной половинной кеплеровской энергии h:

$$u_j^{''} - \frac{1}{2}hu_j = 0, \quad h = \text{const}, \quad j = 0,1,2,3$$

для эллиптического кеплеровского движения, когда кеплеровская энергия $h < 0$, эти уравнения эквивалентны уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, квадрат частоты которого равен половине кеплеровской энергии, взятой со знаком минус;

– позволяют выработать единый подход (с использованием функций Штумпфа) к изучению всех трех типов кеплеровского движения;

– близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;

– позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Эти свойства регулярных уравнений позволили разработать эффективные методы нахождения решений в аналитической или численной форме таких трудных для классических методов задач, как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами. Так, Штифелем, Шейфеле, Бордовицыной, Шарковским, Fukushima и др. [7, 47–50] показано, что использование регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля позволяет повысить точность численного решения ряда задач небесной механики и астродинамики, например задачи о движении искусственного спутника Земли (ИСЗ) по орбитам с большими эксцентриситетами, от трех до пяти порядков по сравнению с решениями, полученными при использовании классических ньютоновских уравнений.

В основе регуляризации Кустаанхеймо–Штифеля, как уже отмечалось, лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат (1.3). Причем это преобразование состоит в переходе от трехмерного пространства декартовых координат x_k к четырехмерному пространству новых координат u_j. Поэтому вскоре после открытия KS-преобразования было рассмотрено использование кватернионов Гамильтона (четырехмерных гиперкомплексных чисел) и четырехмерных кватернионных матриц для регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел. Однако в своей книге Штифель и Шейфеле полностью отвергли эту идею, написав [7, с. 288], что “Любая попытка заменить теорию KS-матриц более популярной теорией кватернионных матриц приводит поэтому к неудаче или, во всяком случае, к очень громоздкому формализму". Позже (в конце 1970-х и начале 1980-х гг.) автором статьи в работах [26–29] было показано, что в действительности кватернионный подход к регуляризации позволяет дать прямой и наглядный вывод регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, а также позволяет дать наглядные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризующему *KS*-преобразованию. Этот подход позволяет раскрыть геометрический смысл неоднозначности *KS*-преобразования и позволяет получить более общие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, частным случаем которых (в скалярной записи) являются регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля.

Так, автором статьи было показано, что регуляризующее преобразование координат Кустаанхеймо–Штифеля (1.2) или (1.3) заключается в переходе от декартовых координат x_k центра масс второго тела в инерциальной системе координат к новым переменным u_j, которые являются нормированными определенным образом параметрами Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j, характеризующими ориентацию вращающейся в инерциальном пространстве системы координат η, ось η_1 которой направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс второго тела:

$$u_0 = r^{1/2}\lambda_0, \quad u_k = -r^{1/2}\lambda_k, \quad k = 1, 2, 3\,. \tag{1.7}$$

Нормирующий множитель равен квадратному корню из расстояния r от центра масс второго тела до центра притяжения, взятому со знаком плюс или минус.

В кватернионной записи эти соотношения имеют следующий вид:

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = r^{1/2}\left(\lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}\right) = r^{1/2}\bar{\lambda}\,, \tag{1.8}$$

где $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}$ – кватернион ориентации системы координат η в инерциальной системе координат X, $\bar{\lambda}$ – сопряженный кватернион: $\bar{\lambda} = \lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}$; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – векторные мнимые единицы Гамильтона.

Нами также установлено, что билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля

$$u_1u_0' - u_0u_1' + u_3u_2' - u_2u_3' = 0\,, \tag{1.9}$$

связывающее между собой переменные Кустаанхеймо–Штифеля u_j и их первые производные u_j' по переменной τ и играющее, по словам Штифеля и Шейфеле, основную роль в их построении регулярной небесной механики [7, с. 29], накладывает на движение системы координат η дополнительное (неголономное) условие, заключающееся в равенстве нулю проекции ω_1 вектора ω абсолютной угловой скорости системы координат η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ (ось η_1):

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2\left(-\lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_0\dot{\lambda}_1 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3\right) = \\ &= 2r^{-2}\left(u_1u_0' - u_0u_1' + u_3u_2' - u_2u_3'\right) = 0\,.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь и далее верхняя точка – символ дифференцирования по времени t.

Отметим, что регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля были получены нами [26, 27] в кватернионных матрицах [26] и в кватернионах Гамильтона [27] в общем случае, когда не требуется выполнения билинейного соотношения (1.9), т.е. когда проекция ω_1 вектора абсолютной угловой скорости системы координат η, определяемая соотношением (1.10), не равна нулю, а является произвольно задаваемой функцией времени.

Полученные нами кватернионные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля в случае, когда выполняется билинейное соотношение (1.9), имеют следующий вид [27] (см. также [36, 37]):

$$\mathbf{u}'' - \frac{1}{2}h\mathbf{u} = \frac{1}{2}r\mathbf{q}, \quad h' = 2\mathrm{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}' \circ \mathbf{q}\right), \quad t' = r \tag{1.11}$$

Здесь

$$\begin{gathered} r = \|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \\ \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x, \quad \mathbf{p}_x = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} \end{gathered} \tag{1.12}$$

$\mathbf{p}_x$ – отображение вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения центра масс изучаемого тела на инерциальный базис X, символ « $\circ$ » означает кватернионное умножение; верхняя черта – символ кватернионного сопряжения; scal(•) – скалярная часть кватерниона, стоящего в круглых скобках; $\mathbf{u}$ – кватернионная регулярная переменная, определяемая соотношениями (1.8).

В кватернионных уравнениях (1.11) в качестве переменных выступают кватернион $\mathbf{u}$, компонентами которого являются регулярные переменные Кустаанхеймо–Штифеля u_j, кеплеровская энергия h и время t. Эти уравнения имеют все ранее указанные достоинства регулярных уравнений (1.4)–(1.6), предложенных Кустаанхеймо и Штифелем.

Для нахождения декартовых координат x_k изучаемого тела в инерциальной системе координат X и проекций $v_k = dx_k/dt$ вектора его скорости $\mathbf{v}$ на оси этой системы координат служат кватернионные соотношения:

$$\begin{gathered} \mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \\ \mathbf{v}_x = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = d\mathbf{r}_x / dt = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{u} / dt) = 2r^{-1}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{u} / d\tau), \end{gathered} \tag{1.13}$$

где $\mathbf{r}_x$ и $\mathbf{v}_x$ – отображения векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ на инерциальный базис, v_k – проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ оси инерциальной системы координат X.

Позднее эффективность применения кватернионов для решения проблемы регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел была продемонстрирована в работах ряда зарубежных авторов [9–11, 14–17]. Так, в 2008 г. Вальдфогелем (Waldvogel) была опубликована статья [17] под названием "Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way" ("Кватернионы для регуляризации небесной механики: верный путь"), в которой говорится, что кватернионы "являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике". В работе [17] Вальдфогель говорит: "Это утверждение (имеется в виду цитированное ранее утверждение Штифеля и Шейфеле о бесперспективности использования в теории регуляризации кватернионных матриц) было впервые опровергнуто

Челноковым (1981), который представил теорию регуляризации пространственной задачи Кеплера, используя геометрические представления во вращающейся системе координат и кватернионные матрицы. В серии статей (например, 1992 и 1999) тем же автором была расширена теория кватернионной регуляризации и приведены практические применения".

Отметим вышедшую в 2011 г. книгу [36] автора статьи, в которой, в частности, излагается кватернионный метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенного пространственного центрального движения материальной точки, приводятся кватернионные регулярные модели небесной механики и астродинамики и даются их приложения к решению задач оптимального управления траекторным (орбитальным) движением космического аппарата. Также отметим обзорные работы [37–39] автора статьи по проблеме регуляризации уравнений небесной механики и астродинамики, вышедшие в 2013–2015 гг., а также его статью [41].

Логиновым и автором статьи [46] проведено сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых координатах и построенных нами [41, 42] регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой задачи в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, принимающих вид кватернионных регулярных уравнений (1.11) возмущенной пространственной задачи двух тел в случае отсутствия поля тяготения Луны.

Регулярные кватернионные уравнения в *KS*-переменных показали значительно более высокую точность в сравнении с уравнениями в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на 2 порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом – на 4 порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом – на 7 порядков. Отметим, что в книге Бордовицыной [47] приведены результаты численных исследований решений уравнений невозмущенной и возмущенной пространственной задачи двух тел (решений уравнений невозмущенного и возмущенного движения ИСЗ) ряда авторов с использованием известных канонических уравнений в *KS*-переменных и уравнений в декартовых координатах, демонстрирующие преимущество уравнений в *KS*-переменных перед уравнеми в декартовых координатах (в смысле точности их численного интегрирования). Сравнение этих результатов с нашими показало, что они в целом согласуются между собой.

Полученные нами результаты подтверждают значительные преимущества регулярных кватернионных уравнений в *KS*-переменных в задачах прогноза движения небесных и космических тел, а также в задачах коррекции параметров орбитального движения КА и инерциальной навигации в космосе.

Автором статьи также получены другие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и ИСЗ в новых четырехмерных переменных: модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, введенных автором статьи в работе [31] (см. также [36, 37]). Эти уравнения обладают всеми достоинствами выше приведенных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, но имеют более простую и симметричную структуру для движения второго тела (КА) в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники [31, 45].

Введение модифицированных переменных основано на выше приведенных геометрической и кинематической интерпретациях регуляризующего преобразования Кустаанхеймо–Штифеля и их билинейного соотношения. В случае Кустаанхеймо–Штифеля ось η_1 ранее введенной нами вращающейся системы координат η направляется по радиус-вектору **r** центра масс второго тела (спутника). Координаты x_i тела в инерциальной системе координат X связаны с переменными Кустаанхеймо–Штифеля u_j скалярными соотношениями (1.3) и первым кватернионным соотношением (1.13).

Нами предложено направить по радиус-вектору **r** не ось η_1 системы координат η, а ось η_3. В этом случае все кватернионные уравнения (1.11)–(1.13) сохраняютсвой вид, лишь вместо орта **i** необходимо взять орт **k** (это, кстати, демонстрирует удобство использования кватернионных моделей астродинамики). Новые переменные u_j, определяемые через параметры Эйлера, как и в случае Кустаанхеймо–Штифеля, формулами (1.7), будут связаны с координатами x_i соотношениями:

$$x_1 = 2r\left(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2\right) = 2\left(u_1u_3 - u_0u_2\right)$$
$$x_2 = 2r\left(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1\right) = 2\left(u_2u_3 + u_0u_1\right)$$
$$x_3 = r\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right) = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2\,,$$

которые отличны от соотношений (1.3) и в кватернионной записи имеют вид:

$$\mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = r\lambda \circ \mathbf{k} \circ \bar{\lambda} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{u}\,,$$

где новая кватернионная переменная $\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ имеет смысл, отличный от кватернионной переменной, использованной нами в случае Кустаанхеймо–Штифеля.

Расстояние r по-прежнему находится через новые переменные u_j по формуле:

$$r = \|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{u} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\,,$$

а отображение $\mathbf{v}_x$ вектора скорости **v** на инерциальный базис – по другой формуле:

$$\mathbf{v}_x = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = d\mathbf{r}_x / dt = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{k} \circ d\mathbf{u} / dt = 2r^{-1}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{k} \circ d\mathbf{u} / d\tau\,.$$

Модифицированные переменные u_j связаны с переменными Кустаанхеймо–Штифеля (будем их здесь обозначать u_{jKS} вместо ранее использованного обозначения u_j) соотношениями:

$$u_0 = (1/2)\left(u_{0KS} + u_{1KS} + u_{2KS} + u_{3KS}\right)$$
$$u_1 = -(1/2)\left(u_{0KS} - u_{1KS} - u_{2KS} + u_{3KS}\right)$$
$$u_2 = -(1/2)\left(u_{0KS} + u_{1KS} - u_{2KS} - u_{3KS}\right)$$
$$u_3 = -(1/2)\left(u_{0KS} - u_{1KS} + u_{2KS} - u_{3KS}\right)$$

и являются их линейными композициями.

В кватернионной записи эти соотношения принимают вид ортогонального преобразования:

$$\mathbf{u} = \alpha \circ \mathbf{u}_{KS}, \quad \alpha = (1/2)(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{u}_{KS} = u_{0KS} + u_{1KS}\mathbf{i} + u_{2KS}\mathbf{j} + u_{3KS}\mathbf{k} \quad ,$$

Билинейное соотношение для модифицированных переменных u_j имеет другой вид:

$$u_1 u_0' - u_0 u_1' + u_3 u_2' - u_2 u_3' = 0 .$$

Полученные нами в работах [31, 45] кватернионные уравнения движения спутника в гравитационном поле Земли в модифицированных четырехмерных переменных u_j обладают всеми достоинствами уравнений движения спутника в переменных Кустаанхеймо—Штифеля u_{jKS} (также полученных в этой статье), но имеют более простую и симметричную структуру. Это обусловлено тем, что выражения переменной $\gamma = \sin\varphi$ (φ — геоцентрическая широта), от которой зависит потенциал гравитационного поля Земли, через модифицированные переменные u_j могут быть представлены в двух различных, более компактных симметричных формах:

$$\gamma = 1 - 2r^{-1}\left(u_1^2 + u_2^2\right) = 2r^{-1}\left(u_0^2 + u_3^2\right) - 1, \quad r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

в сравнении с ее представлением:

$$\gamma = 2r^{-1}\left(u_{1KS}u_{3KS} + u_{0KS}u_{2KS}\right), \quad r = u_{0KS}^2 + u_{1KS}^2 + u_{2KS}^2 + u_{3KS}^2$$

в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, что и позволяет получить более простые и симметричные, чем в случае использования переменных Кустаанхеймо—Штифеля, уравнения движения спутника.

Более простые и симметричные структуры уравнений приводят к более эффективным вычислительным алгоритмам при численном интегрировании дифференциальных уравнений движения спутника. Удобство и эффективность использования полученных уравнений движения спутника в модифицированных переменных Кустаанхеймо—Штифеля для аналитического исследования движения показано нами в работе [45] на примере рассмотрения движения спутника в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются его центральная (ньютоновская) и зональные гармоники. В этой работе найдены первые интегралы уравнений движения спутника в модифицированных переменных в указанном случае, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения спутника замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности системы уравнений четвертого и третьего порядков.

Во всех работах по проблеме регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, известных автору статьи, рассматривается регуляризация уравнений движения центра масс второго (изучаемого) тела, описывающих движение тела относительно системы координат, движущейся в инерциальной системе координат поступательно, т.е. рассматривается регуляризация уравнений абсолютного движения центра масс изучаемого тела. В недавней работе автора статьи [43] ([44] – англоязычная версия этой статьи) предложено кватернионное решение задачи регуляризации уравнений движения центра масс изучаемого тела, описывающих движение тела в системе координат, вращающейся относительно инерциальной системы координат по произвольно заданному закону, т.е. предложена регуляризация уравнений относительного движения изучаемого тела. В этой работе также получены кватернионные регулярные уравнения изучаемого тела относительно системы координат, связанной с Землей, принимаемой за первое (центральное) тело.

В настоящей работе предлагаются более общие, в сравнении с работой [43], регулярные кватернионные уравнения возмущенного движения ИСЗ относительно системы координат, связанной с Землей, в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля и в модифицированных четырехмерных переменных, предложенных нами в работе [31]. В этих уравнениях относительного движения учитываются зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли. Полученные уравнения имеют вид уравнений относительного движения возмущенного четырехмерного осциллятора. Они, в отличие от классических уравнений, регулярны (не содержат особых точек типа сингулярности (деления на ноль)) для движения спутника в ньютоновском гравитационном поле. В этих уравнениях помимо основных переменных, которыми являются переменные Кустаанхеймо–Штифеля или наши модифицированные переменные, используются дополнительные переменные: энергия движения спутника и время. Уравнения удобны для высокоточных численных расчетов, проводимых при исследовании орбитального движения КА относительно Земли и прогнозе движения КА.

Дополнительно отметим, что полученные в статье уравнения относительного возмущенного движения спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и в наших модифицированных четырехмерных переменных, в отличие от известных уравнений возмущенного абсолютного движения спутника в этих переменных, позволяют непосредственно изучать движение спутника относительно Земли. При этом географическая долгота, фигурирующая в формулах, описывающих тессеральные и секториальные гармоники потенциала гравитационного поля Земли, вычисляется не по формулам, используемым в случае абсолютного движения и содержащим в явном виде время t, а по формулам, не содержащим время t. Широта и долгота, фигурирующие в потенциале гравитационного поля Земли, описывают положение спутника в системе координат, связанной с Землей, что также говорит об удобстве предлагаемых в статье уравнений относительного движения.

Отметим также, что проблема кватернионной регуляризации уравнений небесной механики и механики космического полета, основанная на использовании четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля или четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), а также применение этих регулярных уравнений в астродинамике активно разрабатываются зарубежными учеными и обсуждаются в ведущих журналах западной Европы и США.

2. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для относительного движения. В курсах теоретической механики для сложения движений с использованием векторного способа описания движения и для получения векторной формы уравнений относительного движения материальной точки используется векторная операция сложения переносного и относительного движений (в виде суммы двух векторов, описывающих переносное и относительное движения), т.е. используется аддитивная форма сложения движений. Для сложения движений с использованием кватернионного способа описания движения нами используется кватернионная операция в виде кватернионного произведения двух кватернионов, один из которых характеризует переносное движение, а другой – относительное, т.е. используется мультипликативная форма сложения движений. Это кардинальное отличие векторного и кватернионного способов описания движения (аддитивность и мультипликативность сложения движений) приводит к существенным отличиям в способах получения векторных и кватернионных дифференциальных уравнений динамики относительного движения материальной точки (т.е. уравнений относительного орбитального движения).

Векторный способ получения векторного дифференциального уравнения динамики относительного движения материальной точки основан на подстановке в векторное дифференциальное уравнение абсолютного движения материальной точки вместо вектора абсолютного ускорения векторной суммы переносного, относительного и кориолисова ускорений (в соответствии с теоремой о сложении ускорений), полученной в результате последовательного дифференцирования векторной суммы двух векторов, описывающих переносное и относительное движения (с использованием понятий абсолютной и локальной производных от вектора), и последующего введения сил инерции.

Наш способ получения кватернионного динамического уравнения относительного движения материальной точки основан на подстановке в полученное нами кватернионное дифференциальное уравнение абсолютного движения материальной точки вместо кватерниона, характеризующего положение точки в инерциальной системе координат, кватернионного произведения двух кватернионов, один из которых характеризует переносное движение, а другой – относительное движение, и последующего учета кватернионного кинематического уравнения переносного вращения.

Будем рассматривать движение второго (изучаемого) тела относительно системы координат Z, вращающейся относительно инерциальной системы координат X с угловой скоростью ω_e (ω_e – переносная угловая скорость). Эта система координат характеризует собой переносное движение. Начало системы координат Z совместим с началом системы координат X, а ее ориентацию в инерциальной системе координат X будем задавать нормированным кватернионом $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 + \mu_1\mathbf{i} + \mu_2\mathbf{j} + \mu_3\mathbf{k}$. Ориентацию ранее введенной системы координат η, ось η_1 которой направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс изучаемого тела, во вращающейся системе координат Z будем задавать нормированным кватернионом $\boldsymbol{\nu} = \nu_0 + \nu_1\mathbf{i} + \nu_2\mathbf{j} + \nu_3\mathbf{k}$.

Нормы кватернионов $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\nu}$ равны единице, а их компоненты μ_j и ν_j ($j = 0, 1, 2, 3$) являются параметрами Эйлера (Родрига–Гамильтона), характеризующими ориентации систем координат Z и η в системах координат X и Z соответственно. Ориентацию системы координат η в инерциальной системы координат X будем по-прежнему задавать нормированным кватернионом $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}$ (этот кватернион характеризует собой абсолютное движение в инерциальной системе координат).

Будем считать, что все введенные кватернионы являются собственными [57, 58]: каждый из них определен своими компонентами в своей, преобразуемой этим кватернионом, системе координат. Тогда в соответствии с кватернионной формулой сложения двух конечных поворотов [57–59] собственные кватернионы $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\nu}$ будут связаны соотношением:

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\nu}. \tag{2.1}$$

Эта формула является кватернионной формулой сложения переносного и относительного вращений.

Введем кватернионы

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = r^{1/2}\left(\lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}\right) = r^{1/2}\bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\lambda} = r^{-1/2}\bar{\mathbf{u}}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{s} = s_0 + s_1\mathbf{i} + s_2\mathbf{j} + s_3\mathbf{k} = r^{1/2}\left(\nu_0 - \nu_1\mathbf{i} - \nu_2\mathbf{j} - \nu_3\mathbf{k}\right) = r^{1/2}\bar{\boldsymbol{\nu}}, \quad \boldsymbol{\nu} = r^{-1/2}\bar{\mathbf{s}}. \tag{2.3}$$

Компоненты u_j и s_j ($j = 0, 1, 2, 3$) кватернионов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{s}$ связаны с параметрами Эйлера λ_j и ν_j и расстоянием r от центра масс второго тела до центра притяжения (центра масс первого (центрального) тела) соотношениями:

$$u_0 = r^{1/2}\lambda_0, \quad u_k = -r^{1/2}\lambda_k, \quad k = 1, 2, 3; \quad u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = r,$$

$$s_0 = r^{1/2}\nu_0, \quad s_k = -r^{1/2}\nu_k, \quad k = 1, 2, 3; \quad s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = r.$$

Эти компоненты являются переменными Кустаанхеймо–Штифеля, связанными с декартовыми координатами x_k и z_k центра масс изучаемого тела в инерциальной системе координат X и во вращающейся системе координат Z соотношениями:

$$\begin{aligned} &x_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad x_2 = 2\left(u_1u_2 - u_0u_3\right), \quad x_3 = 2\left(u_1u_3 + u_0u_2\right), \\ &z_1 = s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 - s_3^2, \quad z_2 = 2\left(s_1s_2 - s_0s_3\right), \quad z_3 = 2\left(s_1s_3 + s_0s_2\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

В кватернионной записи соотношения (2.4) имеют вид:

$$\mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{r}_z = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s}. \tag{2.5}$$

Из соотношений (2.1)–(2.3) следует соотношение

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}},$$

которым устанавливается связь основных кватернионных (четырехмерных) переменных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{s}$, характеризующих абсолютное и относительное движения точки (кватернион $\boldsymbol{\mu}$ характеризует переносное вращение).

Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для относительного движения (движения изучаемого тела относительно системы координат Z, вращающейся в инерциальной системе координат X по произвольно заданному закону $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(t)$) в переменных Кустаанхеймо–Штифеля имеют (во времени τ) вид уравнений [43, 44]:

$$\mathbf{s}'' + \mathbf{s} \circ \bar{\mu}'' \circ \mu + 2\mathbf{s}' \circ \bar{\mu}' \circ \mu - \frac{1}{2} h\mathbf{s} = -\frac{1}{2} r\mathbf{q}^* \tag{2.6}$$

$$h' = 2\mathrm{scal}\left(\left(\bar{\mathbf{s}}' + \bar{\mu} \circ \mu' \circ \bar{\mathbf{s}}\right) \circ \mathbf{q}^*\right) \tag{2.7}$$

$$t' = r = \|\mathbf{s}\| = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 . \tag{2.8}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \mathbf{q}^* = -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{p}_z = \bar{\mu} \circ \mathbf{p}_x \circ \mu, \\ \mathbf{p}_z = p_{1z}\mathbf{i} + p_{2z}\mathbf{j} + p_{3z}\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_x = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} . \end{gathered} \tag{2.9}$$

$\mathbf{p}_z$ и $\mathbf{p}_x$ – отображения вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения центра масс изучаемого тела на оси вращающейся Z и инерциальной X систем координат, p_{kz} и p_k – проекции вектора $\mathbf{p}$ на оси систем координат Z и X соответственно.

Производные в новом времени τ от кватерниона $\boldsymbol{\mu}$, характеризующие угловую скорость и угловое ускорение переносного вращения, имеют вид:

$$\begin{gathered} \mu' = r\left(d\mu(t) / dt\right) \\ \mu'' = r'\left(d\mu(t) / dt\right) + r^2\left(d^2\mu(t) / dt^2\right). \end{gathered}$$

Основное кватернионное уравнение (2.6) относительного движения получено нами в результате дифференцирования выше приведенного кватернионного соотношения $\mathbf{u} = \mathbf{s} \circ \bar{\mu}$ дважды по времени и подстановки результата дифференцирования в кватернионное дифференциальное уравнение абсолютного движения (в первое уравнение из системы уравнений (1.11)).

В уравнениях (2.6)–(2.8) в качестве переменных выступают кватернион $\mathbf{s}$, компонентами которого являются переменные s_j, кеплеровская энергия h и время t. Кватернион $\mathbf{s}$ характеризует относительное движение центра масс изучаемого тела. Эти уравнения, также как и уравнения (1.11) возмущенной пространственной задачи двух тел для абсолютного движения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, регулярны в центре притяжения. Они сложнее уравнений для абсолютного движения, но, в отличие от них, позволяют непосредственно изучать движение второго тела относительно не инерциальной, а выбранной вращающейся системы координат, связанной, например, с той или иной планетой.

Для нахождения декартовых координат z_k изучаемого тела во вращающейся системе координат Z и проекций $v_{rk} = dz_k/dt$ его вектора относительной скорости $\mathbf{v}_r$ на оси этой системы координат служат второе соотношение (2.5) и соотношения

$$\mathbf{v}_{rz} = v_{r1}\mathbf{i} + v_{r2}\mathbf{j} + v_{r3}\mathbf{k} = d\mathbf{r}_z \,/\, dt =$$
$$= \overline{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{s} \,/\, dt) + (d\overline{\mathbf{s}} \,/\, dt) \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s} = r^{-1}(\overline{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s}' + \overline{\mathbf{s}}' \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{s}),$$

где $\mathbf{v}_{rz}$ – отображение вектора относительной скорости $\mathbf{v}_r$ на вращающийся базис Z.

Используя кватернионное кинематическое уравнение переносного вращения

$$2\boldsymbol{\mu}' = r\boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\omega}_{ez},$$

где $\boldsymbol{\omega}_{ez}$ – отображение вектора угловой скорости ω_e вращающейся системы координат Z на ее же координатные оси, запишем уравнения (2.6)–(2.8) относительного движения в другом виде:

$$\mathbf{s}'' - r\mathbf{s}' \circ \boldsymbol{\omega}_{ez} - \frac{1}{2}\mathbf{s} \circ (r'\boldsymbol{\omega}_{ez} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ez}) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\omega_e^2 r^2 + h\right)\mathbf{s} = -\frac{1}{2}r\mathbf{q}^* \qquad (2.10)$$

$$h' = \mathrm{scal}\left((2\overline{\mathbf{s}}' + r\boldsymbol{\omega}_{ez} \circ \overline{\mathbf{s}}) \circ \mathbf{q}^*\right), \quad t' = r = \mathbf{s} \circ \overline{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (2.11)$$

Здесь $r' = 2(s_0 s_0' + s_1 s_1' + s_2 s_2' + s_3 s_3')$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{ez} = d\boldsymbol{\omega}_{ez} \,/\, dt$ – отображение вектора углового ускорения ε_e вращающейся системы координат Z на ее же координатные оси, $\omega_e = |\boldsymbol{\omega}_\mathrm{e}|$.

В основном регулярном кватернионном дифференциальном уравнении (2.10) первое слагаемое $\mathbf{s}''$ в левой части уравнения характеризует относительное ускорение центра масс изучаемого тела во вращающейся системе координат Z, сумма слагаемых

$$-\frac{1}{2}\mathbf{s} \circ (r'\boldsymbol{\omega}_{ez} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ez}) - \frac{1}{4}\omega_e^2 r^2 \mathbf{s}$$

характеризует переносное ускорение, а слагаемое $-r\mathbf{s}' \circ \boldsymbol{\omega}_{ez}$ характеризует ускорение Кориолиса (напомним, что движение рассматривается в новом времени τ, определяемом дифференциальным соотношением $dt = rd\tau$).

Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел для относительного движения в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, имеют вид уравнений (2.6)–(2.8) или (2.10) и (2.11), в которых кватернион $\mathbf{q}^*$, содержащий отображение $\mathbf{p}_z$ вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения центра масс изучаемого тела на оси вращающейся системы координат Z, определяется другими соотношениями:

$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{p}_z = \boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{p}_x \circ \mu,$$

$$\mathbf{p}_x = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}.$$

Декартовы координаты z_i изучаемого тела во вращающейся системе координат Z находятся через модифицированные переменные Кустаанхеймо–Штифеля s_j по формулам:

$$z_1 = 2(s_1 s_3 - s_0 s_2), \quad z_2 = 2(s_2 s_3 + s_0 s_1), \quad z_3 = s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 + s_3^2, \quad (2.12)$$

которые в кватернионной записи имеют вид:

$$\mathbf{r}_z = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k} = \overline{\mathbf{s}} \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{s}. \tag{2.13}$$

Для нахождения проекций $v_{rk} = dz_k/dt$ вектора относительной скорости $\mathbf{v}_r$ тела на оси этой системы координат служит соотношение:

$$\mathbf{v}_{rz} = v_{r1}\mathbf{i} + v_{r2}\mathbf{j} + v_{r3}\mathbf{k} = \overline{\mathbf{s}} \circ \mathbf{k} \circ \left(d\mathbf{s} / dt\right) +$$

$$+ \left(d\overline{\mathbf{s}} / dt\right) \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{s} = r^{-1}\left(\overline{\mathbf{s}} \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{s}' + \overline{\mathbf{s}}' \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{s}\right), \tag{2.14}$$

где $\mathbf{v}_{rz}$ – по-прежнему отображение вектора относительной скорости $\mathbf{v}_r$ на вращающийся базис Z.

3. Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения изучаемого тела относительно Земли. Приведем регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения второго (изучаемого) тела относительно Земли, принимаемой за первое (центральное) тело, в переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Инерциальную систему координат X, в которой задается вращение системы координат Z, введем следующим образом: ее начало поместим в центр Земли O, ось OX_3 направим вдоль оси суточного вращения Земли к ее северному полюсу, а ось OX_1 – в точку весеннего равноденствия. Вращающуюся систему координат Z жестко свяжем с Землей (центральным телом), направив ее ось OZ_3 вдоль оси суточного вращения Земли (вдоль оси OX_3), а ось OZ_1 – вдоль линии пересечения плоскости экватора и гринвичского меридиана. Тогда ориентация вращающейся системы координат Z в инерциальной системе координат X будет характеризоваться нормированным кватернионом:

$$\overline{\mu} = \mu_0 + \mu_3\mathbf{k}, \quad \mu_0 = \cos\left(\left(\chi_0 + \Omega_E t\right) / 2\right), \quad \mu_3 = \sin\left(\left(\chi_0 + \Omega_E t\right) / 2\right),$$

где $\chi_0 = \mathrm{const}$ – значение угла χ разворота системы координат Z относительно системы координат X вокруг оси OX_3 в начальный момент времени, $\mathbf{\Omega}_E = \boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{const}$ – угловая скорость суточного вращения Земли.

В рассматриваемом случае сопряженные кватернионы

$$\overline{\mu}' = -\left(1/2\right)\Omega_E r\mathbf{k} \circ \overline{\mu}, \quad \overline{\mu}'' = -\left(\left(1/4\right)\Omega_E^2 r^2 + \left(1/2\right)\Omega_E r'\mathbf{k}\right) \circ \overline{\mu}. \tag{3.1}$$

Поэтому из уравнений (2.6)–(2.9) получаем следующие регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения изучаемого тела относительно Земли, принимаемой за центральное тело, в переменных Кустаанхеймо–Штифеля:

$$\mathbf{s}'' - \Omega_E r\mathbf{s}' \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2}\Omega_E r'\mathbf{s} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Omega_E^2 r^2 + h\right)\mathbf{s} = \frac{1}{2} r\,\mathbf{q}^*, \tag{3.2}$$

$$h' = \mathrm{scal}\left(\left(2\overline{\mathbf{s}}' + \Omega_E r\mathbf{k} \circ \overline{\mathbf{s}}\right) \circ \mathbf{q}^*\right), \tag{3.3}$$

$$t' = r = \|\mathbf{s}\| = \mathbf{s} \circ \overline{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \tag{3.4}$$

Здесь

$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{p}_z = (\mu_0 - \mu_3\mathbf{k}) \circ \mathbf{p}_x \circ (\mu_0 + \mu_3\mathbf{k})$$
$$r' = 2(s_0 s_0' + s_1 s_1' + s_2 s_2' + s_3 s_3'). \tag{3.5}$$

В уравнениях (3.2)–(3.4) в качестве переменных выступают кватернионная переменная $\mathbf{s}$, компоненты которой – переменные s_j, кеплеровская энергия h и время t, а в качестве независимой переменной – “фиктивное” время τ. Отметим, что уравнения (3.2) и (3.3) также следуют из уравнений (2.10) и (2.11), так как в рассматриваемом случае $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ez}} = \Omega_{\mathrm{E}}\mathbf{k} = \mathbf{const}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{E}} = 0$.

Уравнение (3.2) получено нами в работе [43]. Уравнение (3.7) работы [43] для кеплеровской энергии h, приведенное в этой работе, содержит ошибку: из правой части этого уравнения нужно убрать выражение, заключенное в квадратных скобках (это уравнение должно иметь вид уравнения (3.3) нашей статьи).

Введем вместо кеплеровской энергии h новую переменную h^+, определяемую соотношением:

$$h^+ = h + (1/2)\Omega_E^2 r^2.$$

Тогда уравнения (3.2) и (3.3) в переменных Кустаанхеймо–Штифеля примут следующий вид:

$$\mathbf{s}'' - \Omega_E r\mathbf{s}' \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2}\Omega_E r'\mathbf{s} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2}h^+\mathbf{s} = \frac{1}{2}r\,\mathbf{q}^*, \tag{3.6}$$

$$\left(h^+\right)' = \Omega_E^2 rr' + \mathrm{scal}\left(\left(2\bar{\mathbf{s}}' + \Omega_E r\mathbf{k} \circ \bar{\mathbf{s}}\right) \circ \mathbf{q}^*\right). \tag{3.7}$$

Регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения изучаемого тела относительно Земли в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля имеют вид уравнений (3.2)–(3.4) или (3.6), (3.7), (3.4), в которых кватернион $\mathbf{q}^*$, содержащий отображение $\mathbf{p}_z$ вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения центра масс изучаемого тела на оси вращающейся системы координат Z, определяется соотношениями, отличными от соотношений (3.5):

$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{p}_z = (\mu_0 - \mu_3\mathbf{k}) \circ \mathbf{p}_x \circ (\mu_0 + \mu_3\mathbf{k})$$

Декартовы координаты z_i изучаемого тела во вращающейся системе координат Z находятся через модифицированные переменные Кустаанхеймо–Штифеля s_j (напомним, что они обозначаются нами так же, как и переменные Кустаанхеймо–Штифеля) по формулам (2.12) или (2.13). Для нахождения проекций $v_{rk} = dz_k/dt$ вектора относительной скорости $\mathbf{v}_r$ тела на оси этой системы координат служит соотношение (2.14).

4. Кватернионные уравнения возмущенного абсолютного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо–Штифеля. В векторной форме дифференциальные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли имеют следующий вид:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial \Pi_E}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} = -\left(\frac{d\Pi}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}}\right) + \mathbf{p}$$

$$r = |\mathbf{r}|, \quad \Pi_E = \Pi + \Pi^*, \quad \Pi = \Pi(r) = -\frac{fm_E}{r},$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r} / dt)$$

где $\mathbf{r}$ – геоцентрический радиус-вектор спутника, m_E – масса Земли, $\prod_E$ – потенциал гравитационного поля Земли, $\Pi = \Pi(r)$ – его центральная составляющая, $\Pi^* = \Pi_z^*(\mathbf{r}) + \Pi_{ts}^*(t, \mathbf{r})$ – составляющая, обусловленная нецентральностью гравитационного поля Земли ($\Pi_z^*(\mathbf{r})$ – составляющая потенциала, содержащая зональные гармоники гравитационного поля Земли, $\Pi_{ts}^*(t, \mathbf{r})$ – составляющая потенциала, содержащая тессеральные и секториальные гармоники этого поля [60–62]), f – постоянная тяготения, $\mathbf{p}$ – возмущающее ускорение центра масс спутника от действующих на спутник других сил.

Кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного абсолютного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли (относительно инерциальной системы координат) в переменных Кустаанхеймо–Штифеля имеют следующий вид [45]:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{u} = -\frac{1}{4}\frac{\partial(r\Pi^*)}{\partial \mathbf{u}} + \frac{1}{2}r\mathbf{q}, \tag{4.1}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r\frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial t} + 2\operatorname{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q}\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \tag{4.2}$$

В уравнениях (4.1) и (4.2)

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_x), \quad \mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} =$$

$$= -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x, \quad \mathbf{p}_x = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} = \mathbf{p}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x)$$

$$\mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u},$$

$$\mathbf{v}_x = \dot{\mathbf{r}}_x = \dot{x}_1\mathbf{i} + \dot{x}_2\mathbf{j} + \dot{x}_3\mathbf{k} = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \dot{\mathbf{u}} = 2r^{-1}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ (d\mathbf{u} / d\tau)$$

полная энергия спутника h^* определяется соотношением:

$$h^* = h + \Pi^*(t, \mathbf{r}_x), \quad h = 2r\sum_{j=0}^{3}\dot{u}_j^2 + \Pi(r) = \frac{2}{r}\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{d\tau}\right)^2 + \Pi(r).$$

Систему координат X, в которой рассматривается движение спутника, введем следующим образом: ее начало O поместим в центр Земли, ось OX_3 направим к северному полюсу Земли, а ось OX_1 – в точку весеннего равноденствия.

Потенциал гравитационного поля Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник имеет вид [60–62]:

$$\Pi_E = \Pi(r) + \Pi_z^*(\mathbf{r}) + \Pi_{ts}^*(t,\mathbf{r}) = \Pi(r) + \Pi_z^*(r,\varphi) + \Pi_{ts}^*(r,\varphi,\lambda),$$

где составляющие потенциала

$$\Pi(r) = -\frac{fm_E}{r}, \quad r = |\mathbf{r}| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$\Pi_z^*(r,\varphi) = \frac{fm_E}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi), \quad \sin\varphi = x_3 / r \tag{4.3}$$

$$\Pi_{ts}^*(r,\varphi,\lambda) = -\frac{fm_E}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nk}(\sin\varphi)\big(C_{nk}\cos(k\lambda) + S_{nk}\sin(k\lambda)\big).$$

Здесь R – средний экваториальный радиус Земли, J_n – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли, P_n – полином Лежандра n-го порядка, φ – геоцентрическая широта, C_{nk} и S_{nk} – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли, P_{nk} – присоединенные функции Лежандра, λ – географическая долгота.

Географическая долгота определяется через декартовые координаты x_k спутника в системе координат X и переменные Кустаанхеймо–Штифеля u_j посредством соотношений:

$$\lambda = \lambda_a - \Omega_E t, \quad \lambda_a = \arctan\frac{x_2}{x_1} = \arctan\frac{2(u_1u_2 - u_0u_3)}{u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2}. \tag{4.4}$$

где λ_a – абсолютная долгота, Ω_E – угловая скорость суточного вращения Земли.

Тригонометрические функции $\cos(k\lambda)$ и $\sin(k\lambda)$ находятся через функции $\cos\lambda$ и $\sin\lambda$ с помощью кватернионных соотношений, вытекающих из формулы Муавра:

$$\cos 2\lambda + \mathbf{i}\sin 2\lambda = (\cos\lambda + \mathbf{i}\sin\lambda)\circ(\cos\lambda + \mathbf{i}\sin\lambda) = (\cos\lambda + \mathbf{i}\sin\lambda)^2$$

$$\cos 3\lambda + \mathbf{i}\sin 3\lambda = (\cos\lambda + \mathbf{i}\sin\lambda)^3, \cdots, \cos(k\lambda) + \mathbf{i}\sin(k\lambda) = (\cos\lambda + \mathbf{i}\sin\lambda)^k.$$

Уравнения возмущенного абсолютного движения спутника в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в переменных Кустаанхеймо–Штифеля в скалярной записи имеют вид [45]:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*u_j &= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi^+}{\partial r}\right)u_j - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma}\right)u_j^* - \\ &- \frac{1}{4\left(x_1^2 + x_2^2\right)}\frac{\partial\Pi_{ts}^+}{\partial\lambda}\left(x_1\frac{\partial x_2}{\partial u_j} - x_2\frac{\partial x_1}{\partial u_j}\right) + \frac{1}{2}rq_j, \quad j = 0,1,2,3.\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r\frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial t} + 2\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{d\tau}q_j\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r\,. \tag{4.6}$$

Здесь

$$u_0^* = u_2, \quad u_1^* = u_3, \quad u_2^* = u_0, \quad u_3^* = u_1\,,$$

$$\Pi^+ = \Pi_z^+(r,\gamma) + \Pi_{ts}^+(r,\gamma,\lambda), \quad \gamma = \sin\varphi = \cos\vartheta = x_3\,/\,r\,,$$

$$\Pi_z^+(r,\gamma) = r\,\Pi_z^*(r,\gamma) = fm_E\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma)\,,$$

$$\Pi_{ts}^+(r,\gamma,\lambda) = r\,\Pi_{ts}^*(r,\gamma,\lambda) =$$

$$= -fm_E\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nk}(\gamma)\big(C_{nk}\cos(k\lambda) + S_{nk}\sin(k\lambda)\big)\,,$$

$$r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2; \quad x_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2\,,$$

$$x_2 = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad x_3 = 2(u_1u_3 + u_0u_2)\,,$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_1}{\partial u_0} = 2u_0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u_1} = 2u_1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u_2} = -2u_2, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u_3} = -2u_3, \\ &\frac{\partial x_2}{\partial u_0} = -2u_3, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u_1} = 2u_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = 2u_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial u_3} = -2u_0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Географическая долгота λ определяется через переменные Кустаанхеймо–Штифеля u_j и $\Omega_E t$ посредством соотношений (4.4).

В кватернионной записи уравнения (4.5) и (4.6) принимают вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r}\right)\mathbf{u} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma}\right)\mathbf{u}^* - \\ &- \frac{1}{4\left(x_1^2 + x_2^2\right)}\frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda}\left(x_1\frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{u}} - x_2\frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{u}}\right) + \frac{1}{2}r\mathbf{q} \\ &\frac{dh^*}{d\tau} = r\frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial t} + 2\,\mathrm{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau}\circ\mathbf{q}\right) \\ &\frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u}\circ\bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь

$$\mathbf{u}^* = u_0^* + u_1^*\mathbf{i} + u_2^*\mathbf{j} + u_3^*\mathbf{k} = u_2 + u_3\mathbf{i} + u_0\mathbf{j} + u_1\mathbf{k}\,,$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial x_i}{\partial u_0} + \frac{\partial x_i}{\partial u_1}\mathbf{i} + \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\mathbf{j} + \frac{\partial x_i}{\partial u_3}\mathbf{k}, \quad i = 1,2$$

частные производные $\partial x_i / \partial u_j$ определяются соотношениями (4.7).

5. Кватернионные уравнения возмущенного абсолютного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в модифицированных четырехмерных переменных. Уравнения возмущенного абсолютного движения спутника в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, обозначаемых, как и переменные Кустаанхеймо–Штифеля, "u_j", в скалярной записи имеют в сравнении с уравнениями в классических переменных Кустаанхеймо–Штифеля более простой вид. Они были получены нами в работе [45] и после преобразований частных производных $\partial\lambda / \partial u_j$, фигурирующих в этих уравнениях, принимают следующий вид:

$$\frac{d^2u_k}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^* u_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma-1}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi^+}{\partial r}\right)u_k - \frac{1}{4}\frac{\partial\Pi_{ts}^+}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u_k} + \frac{1}{2}rq_k, \quad k = 0,3\,, \tag{5.1}$$

$$\frac{d^2u_s}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^* u_s = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma+1}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi^+}{\partial r}\right)u_s - \frac{1}{4}\frac{\partial\Pi_{ts}^+}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u_s} + \frac{1}{2}rq_s, \quad s = 1,2\,, \tag{5.2}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r\Omega_E\frac{\partial\Pi_{ts}^*}{\partial\lambda} + 2\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{du_j}{d\tau}q_j\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r\,. \tag{5.3}$$

Здесь

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u_0} = \frac{u_3}{u_0^2 + u_3^2}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial u_1} = -\frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2},$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial u_2} = \frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial u_3} = -\frac{u_0}{u_0^2 + u_3^2},$$

$$\Pi^+ = \Pi_z^+(r,\gamma) + \Pi_{ts}^+(r,\gamma,\lambda),$$

$$\Pi_z^+(r,\gamma) = r\,\Pi_z^*(r,\gamma) = fm_E\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma), \tag{5.4}$$

$$\Pi_{ts}^+(r,\gamma,\lambda) = r\,\Pi_{ts}^*(r,\gamma,\lambda) = -fm_E\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nk}(\gamma)\big(C_{nk}\cos(k\lambda) + S_{nk}\sin(k\lambda)\big),$$

$$\gamma = \sin\varphi = \cos\vartheta = x_3 / r =$$
$$= r^{-1}\left(u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2\right) = 1 - 2r^{-1}\left(u_1^2 + u_2^2\right) = 2r^{-1}\left(u_0^2 + u_3^2\right) - 1\,,$$

$$r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad x_1 = 2(u_1u_3 - u_0u_2)$$

$$x_2 = 2(u_2u_3 + u_0u_1), \quad x_3 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 + u_3^2\,,$$

Географическая долгота λ определяется через модифицированные переменные Кустаанхеймо–Штифеля u_j посредством соотношений, отличных от соотношений (4.4) в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и имеющих следующий вид:

$$\lambda = \lambda_a - \Omega_E t, \quad \lambda_a = \arctan\frac{x_2}{x_1} = \arctan\frac{u_2u_3 + u_0u_1}{u_1u_3 - u_0u_2}. \tag{5.5}$$

В кватернионной записи уравнения (5.1)–(5.3) принимают вид:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma \mp 1}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi^+}{\partial r}\right)\mathbf{u} - \frac{1}{4}\frac{\partial\Pi_{ts}^+}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{u}} + \frac{1}{2}r\mathbf{q}, \tag{5.6}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r\Omega_E\frac{\partial\Pi_{ts}^*}{\partial\lambda} + 2\operatorname{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau}\circ\mathbf{q}\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r. \tag{5.7}$$

Здесь

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = -\mathbf{k}\circ\mathbf{u}\circ\mathbf{p}_x, \quad \mathbf{p}_x = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} = \mathbf{p}_x\left(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x\right),$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{u}} == \frac{\partial\lambda}{\partial u_0} + \frac{\partial\lambda}{\partial u_1}\mathbf{i} + \frac{\partial\lambda}{\partial u_2}\mathbf{j} + \frac{\partial\lambda}{\partial u_3}\mathbf{k} = \frac{u_3}{u_0^2 + u_3^2} - \frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2}\mathbf{i} + \frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2}\mathbf{j} - \frac{u_0}{u_0^2 + u_3^2}\mathbf{k},$$

$$\gamma - 1 = -2r^{-1}\left(u_1^2 + u_2^2\right), \quad \gamma + 1 = 2r^{-1}\left(u_0^2 + u_3^2\right).$$

Знак “–” берется для первого и четвертого уравнения системы (5.6), эквивалентной четырем скалярным уравнениям, когда $j = 0, 3$, а знак “+” – для второго и третьего уравнения этой системы, когда $j = 1, 2$.

Отметим, что кватернион $\mathbf{q} = -\mathbf{k}\circ\mathbf{u}\circ\mathbf{p}_x$, фигурирующий в уравнениях (5.6) и (5.7), отличается от кватерниона $\mathbf{q} = -\mathbf{i}\circ\mathbf{u}\circ\mathbf{p}_x$, фигурирующего в уравнениях (4.1) и (4.2): вместо орта **i** используется орт **k**. Это обусловлено тем, что при введении наших модифицированных переменных вместо переменных Кустаанхеймо–Штифеля вдоль радиус-вектора **r** центра масс спутника направляется не ось η_1 вращающейся системы координат η, а ее ось η_3.

6. Кватернионные уравнения возмущенного относительного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Для получения уравнения возмущенного относительного движения спутника (относительно Земли) в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в переменных Кустаанхеймо–Штифеля продифференцируем кватернионное соотношение $\mathbf{u} = \mathbf{s}\circ\bar{\mu}$ дважды по переменной τ и подставим результат дифференцирования, а таже соотношение для переменной **u** в уравнения (4.8). Получим:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\mathbf{s}}{d\tau^2}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}} + 2\frac{d\mathbf{s}}{d\tau}\circ\frac{d\bar{\boldsymbol{\mu}}}{d\tau} + \mathbf{s}\circ\frac{d^2\bar{\boldsymbol{\mu}}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{s}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}} = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Pi^+}{\partial r}\right)\mathbf{s}\circ\bar{\boldsymbol{\mu}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma}\right)\mathbf{u}^* -\end{gathered} \tag{6.1}$$

$$-\frac{1}{4\left(x_1^2+x_2^2\right)}\frac{\partial\Pi_{ts}^{+}}{\partial\lambda}\left(x_1\frac{\partial x_2}{\partial\mathbf{u}}-x_2\frac{\partial x_1}{\partial\mathbf{u}}\right)+\frac{1}{2}r\mathbf{q}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau}=r\frac{\partial\Pi_{ts}^{*}}{\partial t}+2\operatorname{scal}\left(\left(\mu\circ\frac{d\bar{\mathbf{s}}}{d\tau}+\frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\tau}\circ\bar{\mathbf{s}}\right)\circ\mathbf{q}\right),$$

$$\frac{dt}{d\tau}=r=\mathbf{s}\circ\bar{\mathbf{s}}=s_0^2+s_1^2+s_2^2+s_3^2$$

Умножим первое кватернионное уравнение системы (6.1) справа на кватернион $\boldsymbol{\mu}$. Получим:

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{d\tau^2}+2\frac{d\mathbf{s}}{d\tau}\circ\frac{d\bar{\mu}}{d\tau}\circ\mu+\mathbf{s}\circ\frac{d^2\bar{\mu}}{d\tau^2}\circ\mu-\frac{1}{2}h^*\mathbf{s}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma}-\frac{\partial\Pi^+}{\partial r}\right)\mathbf{s}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma}\right)\mathbf{u}^*\circ\mu- \tag{6.2}$$

$$-\frac{1}{4\left(x_1^2+x_2^2\right)}\frac{\partial\Pi_{ts}^{+}}{\partial\lambda}\left(x_1\frac{\partial x_2}{\partial\mathbf{u}}-x_2\frac{\partial x_1}{\partial\mathbf{u}}\right)\circ\mu+\frac{1}{2}r\mathbf{q}\circ\mu\,.$$

Из уравнений (3.1) получаем:

$$2\bar{\mu}'\circ\mu=-\Omega_E r\mathbf{k}\,,\quad \bar{\mu}''\circ\mu=-(1/2)\Big((1/2)\Omega_E^2r^2+\Omega_E r'\mathbf{k}\Big), \tag{6.3}$$

С учетом этих соотношений, а также соотношений

$$\mathbf{u}^*\circ\boldsymbol{\mu}=\left(u_2+u_3\mathbf{i}+u_0\mathbf{j}+u_1\mathbf{k}\right)\circ\left(\mu_0+\mu_3\mathbf{k}\right)=s_2+s_3\mathbf{i}+s_0\mathbf{j}+s_1\mathbf{k}=\mathbf{s}^*,$$

$$x_1^2+x_2^2=z_1^2+z_2^2,\quad x_1\frac{\partial x_2}{\partial\mathbf{u}}-x_2\frac{\partial x_1}{\partial\mathbf{u}}=\mathbf{s}^*\circ\left(x_1\mathbf{i}+2x_2\mathbf{j}\right)\circ\mu\,,$$

$$\mathbf{q}\circ\mu=-\mathbf{i}\circ\mathbf{u}\circ\mathbf{p}_x\circ\mu=-\mathbf{i}\circ\mathbf{s}\circ\bar{\mu}\circ\mathbf{p}_x\circ\mu=-\mathbf{i}\circ\mathbf{s}\circ\mathbf{p}_z=\mathbf{q}^*$$

уравнение (6.2) принимает вид:

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{d\tau^2}-\Omega_E r\frac{d\mathbf{s}}{d\tau}\circ\mathbf{k}-\frac{1}{2}\Omega_E r'\mathbf{s}\circ\mathbf{k}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Omega_E^2r^2+h^*\right)\mathbf{s}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma}-\frac{\partial\Pi^+}{\partial r}\right)\mathbf{s}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi^+}{\partial\gamma}\right)\mathbf{s}^*- \tag{6.4}$$

$$-\frac{1}{4\left(z_1^2+z_2^2\right)}\frac{\partial\Pi_{ts}^{+}}{\partial\lambda}\mathbf{s}^*\circ\left(x_1\mathbf{i}+2x_2\mathbf{j}\right)\circ\boldsymbol{\mu}^2+\frac{1}{2}r\mathbf{q}^*.$$

Это кватернионное уравнение необходимо дополнить дифференциальными скалярными уравнениями для полной энергии спутника h^* и времени t, получающимися из второго и третьего уравнений системы (6.1) и имеющими вид:

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r\Omega_E \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial \lambda} + \mathrm{scal}\left(\left(2\frac{d\bar{\mathbf{s}}}{d\tau} + \Omega_E r \mathbf{k} \circ \bar{\mathbf{s}}\right) \circ \mathbf{q}^*\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r\,. \qquad (6.5)$$

В уравнениях (6.4) и (6.5)

$$r = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad \mathbf{s}^* = s_2 + s_3\mathbf{i} + s_0\mathbf{j} + s_1\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}^* = -\mathbf{i} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z, \quad \mathbf{p}_z = \bar{\boldsymbol{\mu}} \circ \mathbf{p}_x \circ \boldsymbol{\mu} = (\mu_0 - \mu_3\mathbf{k}) \circ \mathbf{p}_x \circ (\mu_0 + \mu_3\mathbf{k}) =$$

$$= \left[\cos(\chi_0 + \Omega_E t)\, p_1 + \sin(\chi_0 + \Omega_E t)\, p_2\right]\mathbf{i} +$$

$$+ \left[\cos(\chi_0 + \Omega_E t)\, p_2 - \sin(\chi_0 + \Omega_E t)\, p_1\right]\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$$

$$x_1 = \left(\mu_0^2 - \mu_3^2\right) z_1 - 2\mu_0\mu_3 z_2 = \cos(\chi_0 + \Omega_E t)\, z_1 - \sin(\chi_0 + \Omega_E t)\, z_2$$

$$x_2 = \left(\mu_0^2 - \mu_3^2\right) z_2 + 2\mu_0\mu_3 z_1 = \cos(\chi_0 + \Omega_E t)\, z_2 + \sin(\chi_0 + \Omega_E t)\, z_1$$

$$z_1 = s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 - s_3^2, \quad z_2 = 2(s_1 s_2 - s_0 s_3), \quad z_3 = 2(s_1 s_3 + s_0 s_2)$$

$$\mu^2 = \mu \circ \mu = (\mu_0 + \mu_3\mathbf{k})^2 = \cos(\chi_0 + \Omega_E t) + \sin(\chi_0 + \Omega_E t)\mathbf{k}\,.$$

Присутствующие в этих уравнениях потенциалы Π^+, Π_{ts}^+ и Π_{ts}^* определяются соотношениями (5.4) и третьим из соотношений (4.3).

После вычисления частных производных $\partial \Pi^+ / \partial r$, $\partial \Pi^+ / \partial \gamma$, $\partial \Pi_{ts}^+ / \partial \lambda$ и $\partial \Pi_{ts}^* / \partial \lambda$ в полученные соотношения необходимо будет подставить выражения для переменных $\boldsymbol{r}, \gamma = \sin\phi$ и λ (расстояния, синуса широты и географической долготы) через основные переменные s_j ($j = 0, 1, 2, 3$) в соответствии с формулами:

$$r = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad \gamma = \sin\varphi =$$

$$= \cos\vartheta = x_3 / r = z_3 / r = 2(s_1 s_3 + s_0 s_2) / r$$

$$\lambda = \arctan\frac{z_2}{z_1} = \arctan\frac{2(s_1 s_2 - s_0 s_3)}{s_0^2 + s_1^2 - s_2^2 - s_3^2}\,. \qquad (6.6)$$

Полученные уравнения (6.4) и (6.5) возмущенного относительного движения в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в переменных Кустаанхеймо–Штифеля s_j, в отличие от уравнений возмущенного абсолютного движения спутника (4.8) в переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_j, позволяют непосредственно изучать движение спутника относительно Земли. При этом географическая долгота λ, фигурирующая в третьей формуле (4.3) для тессеральных и секториальных гармоник Π_{ts}^* потенциала гравитационного поля Земли, вычисляется не по формулам

(5.5), используемым в случае абсолютного движения и содержащим в явном виде время t, а по формуле (6.6), не содержащей время t.

7. Кватернионные уравнения возмущенного относительного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в модифицированных четырехмерных переменных. Для получения уравнения возмущенного относительного движения спутника (относительно Земли) в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля продифференцируем кватернионное соотношение $\mathbf{u} = \mathbf{s} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}$ дважды по переменной τ и подставим результат дифференцирования, а также соотношение для переменной $\mathbf{u}$ в уравнения (5.6) и (5.7). Получим:

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{d\tau^2} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}} + 2\frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \circ \frac{d\bar{\boldsymbol{\mu}}}{d\tau} + \mathbf{s} \circ \frac{d^2\bar{\boldsymbol{\mu}}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{s} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma \mp 1}{r}\frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r}\right)\mathbf{s} \circ \bar{\mu} - \frac{1}{4}\frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} + \frac{1}{2}r\mathbf{q} \tag{7.1}$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r\Omega_E \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial \lambda} + 2\mathrm{scal}\left(\left(\boldsymbol{\mu} \circ \frac{d\bar{\mathbf{s}}}{d\tau} + \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\tau} \circ \bar{\mathbf{s}}\right) \circ \mathbf{q}\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r$$

Здесь

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = -\mathbf{k} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}} \circ \mathbf{p}_x,$$

$$\mathbf{p}_x = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k} = \mathbf{p}_x\left(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x\right).$$

Умножим первое кватернионное уравнение системы (7.1) справа на кватернион $\boldsymbol{\mu}$. Получим:

$$\frac{d^2\mathbf{s}}{d\tau^2} + 2\frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \circ \frac{d\bar{\mu}}{d\tau} \circ \mu + \mathbf{s} \circ \frac{d^2\bar{\mu}}{d\tau^2} \circ \mu - \frac{1}{2}h^*\mathbf{s} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma \mp 1}{r}\frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r}\right)\mathbf{s} - \frac{1}{4}\frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} \circ \mu + \frac{1}{2}r\mathbf{q} \circ \mu .$$

Это уравнение с учетом соотношений (6.3) и соотношений

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}} \circ \mu = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_0} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}\mathbf{i} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_2}\mathbf{j} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_3}\mathbf{k}\right) \circ \mu =$$

$$= \left(\frac{u_3}{u_0^2 + u_3^2} - \frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2}\mathbf{i} + \frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2}\mathbf{j} - \frac{u_0}{u_0^2 + u_3^2}\mathbf{k}\right) \circ \mu =$$

$$= \left(\frac{\mu_0 s_3 - \mu_3 s_0}{s_0^2 + s_3^2} - \frac{\mu_0 s_2 + \mu_3 s_1}{s_1^2 + s_2^2}\mathbf{i} + \frac{\mu_0 s_1 - \mu_3 s_2}{s_1^2 + s_2^2}\mathbf{j} - \frac{\mu_0 s_0 + \mu_3 s_3}{s_0^2 + s_3^2}\mathbf{k}\right) \circ \left(\mu_0 + \mu_3\mathbf{k}\right) =$$

$$= \frac{s_3}{s_0^2 + s_3^2} - \frac{s_2}{s_1^2 + s_2^2}\mathbf{i} + \frac{s_1}{s_1^2 + s_2^2}\mathbf{j} - \frac{s_0}{s_0^2 + s_3^2}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q} \circ \mu = -\mathbf{k} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_x \circ \mu = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \bar{\mu} \circ \mathbf{p}_x \circ \mu = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z = \mathbf{q}^*$$

преобразуется к следующему виду:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2\mathbf{s}}{d\tau^2} - \Omega_E r \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2}\Omega_E r' \mathbf{s} \circ \mathbf{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Omega_E^2 r^2 + h^*\right)\mathbf{s} = \\
= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma \mp 1}{r}\frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r}\right)\mathbf{s} - \\
-\frac{1}{4}\frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda}\left(\frac{s_3}{s_0^2 + s_3^2} - \frac{s_2}{s_1^2 + s_2^2}\mathbf{i} + \frac{s_1}{s_1^2 + s_2^2}\mathbf{j} - \frac{s_0}{s_0^2 + s_3^2}\mathbf{k}\right) + \frac{1}{2} r \mathbf{q}^* .
\end{gathered} \tag{7.2}$$

Здесь

$$r = \mathbf{s} \circ \bar{\mathbf{s}} = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \tag{7.3}$$

$$\begin{gathered}
\gamma = \sin\varphi = \cos\vartheta = z_3 / r = r^{-1}\left(s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 + s_3^2\right) = \\
= 1 - 2r^{-1}\left(s_1^2 + s_2^2\right) = 2r^{-1}\left(s_0^2 + s_3^2\right) - 1
\end{gathered} \tag{7.4}$$

$$\gamma - 1 = -2r^{-1}\left(s_1^2 + s_2^2\right), \quad \gamma + 1 = 2r^{-1}\left(s_0^2 + s_3^2\right), \tag{7.5}$$

$$\lambda = \arctan\frac{z_2}{z_1} = \arctan\frac{s_2 s_3 + s_0 s_1}{s_1 s_3 - s_0 s_2} \tag{7.6}$$

$$z_1 = 2\left(s_1 s_3 - s_0 s_2\right), \quad z_2 = 2\left(s_2 s_3 + s_0 s_1\right), \quad z_3 = s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 + s_3^2, \tag{7.7}$$

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{q} \circ \mu = -\mathbf{k} \circ \mathbf{s} \circ \mathbf{p}_z , \tag{7.8}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{p}_z = \bar{\mu} \circ \mathbf{p}_x \circ \mu = \left(\mu_0 - \mu_3 \mathbf{k}\right) \circ \mathbf{p}_x \circ \left(\mu_0 + \mu_3 \mathbf{k}\right) = \\
= \left[\cos\left(\chi_0 + \Omega_E t\right) p_1 + \sin\left(\chi_0 + \Omega_E t\right) p_2\right]\mathbf{i} + \\
+ \left[\cos\left(\chi_0 + \Omega_E t\right) p_2 - \sin\left(\chi_0 + \Omega_E t\right) p_1\right]\mathbf{j} + p_3 \mathbf{k} .
\end{gathered} \tag{7.9}$$

Кватернионное уравнение (7.2) в переменных s_j ($j = 0, 1, 2, 3$) необходимо дополнить дифференциальными скалярными уравнениями для полной энергии спутника h^* и времени t, получающимися из второго и третьего уравнений системы (7.1) и имеющими вид:

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r\Omega_E \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial \lambda} + \operatorname{scal}\left(\left(2\frac{d\bar{\mathbf{s}}}{d\tau} + \Omega_E r \mathbf{k} \circ \bar{\mathbf{s}}\right) \circ \mathbf{q}^*\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r . \tag{7.10}$$

Здесь кватернион $\mathbf{q}^*$ в отличие от первого уравнения из подсистемы (6.5) определяется соотношениями (7.8) и (7.9).

Таким образом, нами получены уравнения (7.2) и (7.10) возмущенного движения спутника относительно Земли в ее гравитационном поле с учетом зональных, тессеральных и секториальных гармоник этого поля в модифицированных переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Присутствующие в этих уравнениях потенциалы $\prod^+$, $\prod_{ts}^+$ и $\prod_{ts}^*$ определяются соотношениями (5.4) и третьим из соотношений (4.3). После вычисления частных производных $\partial\prod^+/\partial r$, $\partial\prod^+/\partial\gamma$, $\partial\prod_{ts}^+/\partial\lambda$ и $\partial\prod_{ts}^*/\partial\lambda$ в полученные соотношения необходимо будет подставить выражения для переменных $r, \gamma = \sin\varphi$ и λ (расстояния, синуса широты и географической долготы) через основные переменные s_j в соответствии с формулами (7.3)–(7.7).

Полученные уравнения (7.2) и (7.10) возмущенного относительного движения спутника в модифицированных переменных s_j, в отличие от уравнений возмущенного абсолютного движения спутника (5.6) и (5.7) в модифицированных переменных u_j, позволяют непосредственно изучать движение спутника относительно Земли. При этом географическая долгота λ, фигурирующая в третьей формуле (4.3) для тессеральных и секториальных гармоник $\prod_{ts}^*$ потенциала гравитационного поля Земли, вычисляется не по формулам (4.4), используемым в случае абсолютного движения и содержащим в явном виде время t, а по формуле (7.6), не содержащей время t.

Отметим, что уравнения (7.2) и (7.10) возмущенного движения спутника относительно Земли в модифицированных переменных s_j имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями (6.4) и (6.5) этого движения спутника в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, обозначаемых нами также s_j. Это обусловлено тем, что выражения переменной $\gamma = \sin\varphi$ (φ – геоцентрическая широта), от которой зависит потенциал гравитационного поля Земли, через модифицированные переменные могут быть представлены в двух различных, более компактных симметричных формах:

$$\gamma = \sin\varphi - 2r^{-1}\left(s_1^2 + s_2^2\right) = 2r^{-1}\left(s_0^2 + s_3^2\right) - 1, \quad r = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

в сравнении с ее представлением

$$\gamma = \sin\varphi = 2\left(s_1 s_3 + s_0 s_2\right) / r, \quad r = s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, что и позволяет получить более простые и симметричные, чем в случае использования переменных Кустаанхеймо–Штифеля, уравнения движения спутника.

Заключение. Во всех работах, посвященных проблеме регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, известных автору статьи, рассматривается регуляризация уравнений абсолютного движения второго (изучаемого) тела, т.е. рассматривается регуляризация уравнений движения центра масс изучаемого тела, описывающих движение тела относительно системы координат, движущейся в инерциальной системе координат поступательно.

В статье развита предложенная нами в работе [43] кватернионная регуляризация уравнений относительного движения изучаемого тела, т.е. уравнений движения центра масс изучаемого тела, описывающих движение этого тела в системе координат, вращающейся в инерциальной системе координат по произвольно заданному закону, а также развита предложенная в этой работе кватернионная регуляризация уравнений движения изучаемого тела относительно системы координат, связанной с Землей, принимаемой за первое (центральное) тело.

Предложены регулярные кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли относительно системы координат, связанной с Землей, в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля и в модифицированных четырехмерных переменных, предложенных нами ранее. В полученных уравнениях относительного возмущенного движения учитываются зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли. Эти уравнений удобны для изучения движения ИСЗ, поскольку многие силы, действующие на спутник, и в первую очередь сила притяжения Земли (точнее, потенциал гравитационного поля Земли), зависят от относительных координат местоположения спутника: от географических координат (широты и долготы) спутника, а не от его абсолютных координат в инерциальной системе координат.

Полученные уравнения имеют вид уравнений относительного движения четырехмерного возмущенного осциллятора. Они, в отличие от классических уравнений, регулярны (не содержат особых точек типа сингулярности (деления на ноль)) для движения спутника в ньютоновском гравитационном поле Земли под действием возмущающих сил, в описании которых не содержатся отрицательные степени расстояния спутника до центра Земли выше первой. В этих уравнениях помимо основных переменных, которыми являются переменные Кустаанхеймо–Штифеля или наши модифицированные переменные, используются дополнительные переменные: энергия движения спутника и время. Новая независимая переменная связана с временем дифференциальным соотношением Зундмана, содержащим расстояние спутника до центра масс Земли.

Полученные уравнения относительного возмущенного движения спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и в наших модифицированных четырехмерных переменных, в отличие от уравнений возмущенного абсолютного движения спутника в этих переменных, позволяют непосредственно изучать движение спутника относительно Земли. При этом географическая долгота, фигурирующая в формуле, описывающей тессеральные и секториальные гармоники потенциала гравитационного поля Земли, вычисляется не по формулам, используемым в случае абсолютного движения и содержащим в явном виде время t, а по формулам, не содержащим время t.

Уравнения возмущенного движения спутника относительно Земли в модифицированных переменных имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями этого движения спутника в переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Это обусловлено тем, что выражения геоцентрической широты, от которой зависит потенциал гравитационного поля Земли, через модифицированные переменные представляются в двух различных, более компактных симметричных формах в сравнении с ее представлением в переменных Кустаанхеймо–Штифеля.

Полученные уравнения удобны для применения методов нелинейной механики и высокоточных численных расчетов при исследовании орбитального движения КА относительно Земли и прогнозе движения КА.

Отметим, что обзор работ по кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенного центрального движения материальной точки с использованием переменных Кустаанхеймо–Штифеля и модифицированных четырехмерных переменных (уравнений, традиционно рассматриваемых в рамках теории абсолютного движения материальной точки) был дан автором статьи в его недавней работе [63].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
2. *Levi-Civita T.* Traiettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. mat. pura appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
3. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144.
4. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du problem restreint des trois corps // Opere mathematiche. 1956. № 2. P. 411–417.
5. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7.
6. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Angew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
7. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. [*Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.]
8. *Velte W.* Concerning the regularizing *KS*-transformation // Celest. Mech. 1978. V. 17. P. 395–403.
9. *Vivarelli M.D.* The *KS* transformation in hypercomplex form // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1983. V. 29. P. 45–50.
10. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // Celest. Mech. 1988. V. 41. P. 359–370.
11. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex *KS*-transformation // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1991. V. 50. P. 109–124.
12. *Шагов О.Б.* О двух видах уравнений движения искусственного спутника Земли в осцилляторной форме // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 3–8.
13. *Deprit A, Elipe A. and Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1994. V. 58. P. 151–201.
14. *Vrbrik J.* Celestial mechanics via quaternions // Can. J. Phys. 1994. V. 72. P. 141–146.
15. *Vrbrik J.* Perturbed Kepler problem in quaternion form // J. Phys. 1995. V. 28. P. 193–198.
16. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2006. V. 95. P. 201–212;
http://doi.org/10.1007/978-1-4020-5325-2_11
17. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. V. 102. № 1. P. 149–162;
http://doi.org/10.1007/s10569-008-9124-y
18. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics // MNRAS 400. 2009. № 1. P. 228–231;
https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x

19. *Zhao L.* Kustaanheimo–Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20. № 1. P. 19–36;
https://doi.org/10.1134/S1560354715010025
20. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo–Stiefel space induced by the Hopf fibration // Mon. Notices Royal Astron. Soc. 2016. V. 459. № 3. P. 2444–2454;
https://doi.org/10.1093/mnras/stw780
21. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2017. V. 127. P. 343–368;
https://doi.org/10.1007/s10569-016-9730-z
22. *Breiter S., Langner K.* Kustaanheimo–Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2017. V. 128. P. 323–342;
https://doi.org/10.1007/s10569-017-9754-z
23. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2018. V. 130. P. 68;
https://doi.org/10.1007/s10569-018-9862-4
24. *Breiter S., Langner K.* The Lissajous–Kustaanheimo–Stiefel transformation // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. P. 9;
https://doi.org/10.1007/s10569-019-9887-3
25. *Ferrer S., Crespo F.* Alternative Angle-Based Approach to the *KS*-Map. An interpretation through Symmetry // J. Geometric Mech. 2018. V. 10. № 3. P. 359–372;
https://doi.org/10.3934/jgm.2018013
26. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21. [*Chelnokov Yu.N.* On the regularization of the equations of the three-dimensional two body problem // Mech. Solids. 1981. V. 16. № 2. P. 1–10].
27. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158. [*Chelnokov Yu.N.* Regular equations of the three-dimensional two-body problem // Mech. Solids. 1984. V. 19. № 1. P. 1–7].
28. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. М., 1985. 36 с. Деп. в ВИНИТИ 13.12.85. № 218628-В.
29. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 2: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. М., 1985. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 13.22.85. № 8629-В.
30. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космические исследования. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770. [*Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I // Cosmic Research. 1992. V. 30. № 6. P. 612–621].
31. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // Космические исследования. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15. [*Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // Cosmic Research. 1993. V. 31. № 3. P. 409–418].
32. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 20–30. [*Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. I // Mech. Solids. 1993. V. 28. № 1. P. 16–25].
33. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 3–15. [*Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. II // Mech. Solids. 1993. V. 28. № 2. P. 1–12].

34. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в механике космического полета // Гироскопия и навигация. 1999. № 4. С. 47–66.
35. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 5. С. 18–44. [*Chelnokov Yu.N.* Analysis of optimal motion control for a material point in a central field with application of quaternions // J. Comp. Syst. Sci. Int. 2007. V. 46. № 5. P. 688–713].
36. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
37. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401. [*Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I // Cosmic Research. 2013. V. 51. № 5. P. 353–364. https://doi.org/10.7868/S0023420613050026].
38. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Космические исследования. 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336. https://doi.org/10.7868/S0023420614030029 [*Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. II // Cosmic Research. 2014. V. 52. № 4. P. 304–317. https://doi.org/10.1134/S0010952514030022].
39. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. III // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 5. С. 430–446. https://doi.org/10.7868/S0023420615050040 [*Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics, astrodynamics, and trajectory motion control. III // Cosmic Research. 2015. V. 53. № 5. P. 394–409. https://doi.org/10.1134/S0010952515050044].
40. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений задачи двух тел и ограниченной задачи трех тел // В сборнике: XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров. 2015. С. 4051–4053;
URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=24826037
41. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54. [*Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the eguations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // Mech. Solids. 2017. V. 52. № 6. P. 613–639. https://doi.org/10.3103/S0025654417060036].
42. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. II // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 6. С. 41–63. https://doi.org/10.31857/S057232990000712-3 [*Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: II // Mech. Solids. 2018. V. 53. № 6. P. 634–651. https://doi.org/10.3103/S0025654418060055].
43. *Челноков Ю.Н.* Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // ПММ. 2018. Т. 82. № 6. С. 721–733: https://doi.org/10.31857/S003282350002736-9
44. *Chelnokov Yu.N.* Perturbed spatial two-body problem: regular quaternion equations of relative motion // Mech. Solids. 2019. V. 54. № 2. P. 169–178: https://doi.org/10.3103/S0025654419030075

45. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли // Космические исследования. 2019. **Т**. 57. № 2. **С**. 117–131. https://doi.org/10.1134/S002342061902002X [*Chelnokov Yu.N.* Quaternion equations of disturbed motion of an artificial Earth satellite // Cosmic Research. 2019. V. 57. № 2. P. 101–114. https://doi.org/10.1134/S0010952519020023].
46. *Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю.* Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сборник материалов: XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, 2021. С. 292–295.
47. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
48. *Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.* Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007.
49. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // Astronomical J. 2005. V. 129. № 5. P. 2496:
http://doi.org/10.1086/429546
50. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // Astronomical J. 2007. V. 133. № 6. P. 2815:
http://doi.org/10.1086/518165
51. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A.* A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2007. V. 97. P. 131–150:
http://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3
52. *Bau G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // Monthly Notices Royal Astron. Soc. 2015. V. 454. № 3. P. 2890–2908:
https://doi.org/10.1093/mnras/stv2106
53. *Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Rozengren A.J.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semianalytical orbit propagation methods // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. № 5. P. 21:
https://doi.org/10.1007/s10569-019-9897-1
54. *Bau G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. P. 10:
https://doi.org/10.1007/s10569-020-9952-y
55. *Hopf H.* Uber die Abbildungen der dreidimensionalen Sphare auf die Kugelflache // Math. Ann. 1931. V. 104. № 1. P. 637–665.
56. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 205 с.
57. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 511 с.
58. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
59. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
60. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1971. 584 с.
61. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика: Методы теории движения искусственных небесных тел. М.: Наука, 1983. 351 с.

62. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.– Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований. 2010. 352 с.
63. *Chelnokov Y.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math. Mech. - Engl. 2022. V. 43. № 1. P. 21–80: https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9

UDC 531.01, 531.32, 629.78

QUATERNION REGULAR EQUATIONS OF THE TWO-BODY PROBLEM AND THE PROBLEM OF THE MOTION OF A SATELLITE IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF THE EARTH IN THE KUSTAANHEIMO-STIFEL VARIABLES AND MODIFIED FOUR-DIMENSIONAL VARIABLES: DYNAMICS OF RELATIVE MOTION

© 2024 г. Yu. N. Chelnokov[a, *]

[a]*Institute for Problems of Precision Mechanics and Control RAS, Saratov, Russia*

**e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Abstract – The article develops the quaternion regularization of differential equations (DE) of the relative perturbed motion of the body under study, which we previously proposed within the framework of the perturbed spatial problem of two bodies: the equations of motion of the center of mass of this body in a coordinate system rotating in an inertial coordinate system according to an arbitrarily given law, and also develops a quaternion regularization of the motion DEs for the body under study relative to the coordinate system associated with the Earth. New quaternion DEs for the perturbed motion of an artificial Earth satellite relative to the coordinate system associated with the Earth are proposed. These equations have (in new times) the form of DE for the relative motion of a perturbed four-dimensional oscillator in the Kustaanheimo-Stiefel variables or in the modified four-dimensional variables we proposed, supplemented by DEs for the satellite's motion energy and time. These equations for the perturbed relative motion of the satellite take into account the zonal, tesseral and sectorial harmonics of the Earth's gravitational field. The proposed equations, in contrast to classical equations, are regular (do not contain special points such as singularity (division by zero)) for the relative motion of a satellite in the Newtonian gravitational field of the Earth. The equations are convenient for applying methods of nonlinear mechanics and high-precision numerical calculations when studying the orbital motion of a satellite relative to the Earth and predicting its motion.

Keywords: perturbed spatial two-body problem, artificial Earth satellite, quaternion regularization, regular quaternion equations, absolute and relative motion, Kustaanheimo-Stiefel variables, modified four-dimensional variables, energy of motion; zonal, tesseral and sectorial harmonics of the Earth's gravitational field

REFERENCES

1. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
2. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. mat. pura appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
3. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144.
4. *Levi-Civita T.* Sur la resolution qualitative du problem restreint des trois corps // Opere matematiche. 1956. № 2. P. 411–417.
5. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7.
6. *Kustaanheimo P.* Stiefel E. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Angew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
7. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971.
8. *Velte W.* Concerning the regularizing *KS*-transformation // Celest. Mech. 1978. V. 17. P. 395–403.
9. *Vivarelli M.D.* The *KS* transformation in hypercomplex form // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1983. V. 29. P. 45–50.
10. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // Celest. Mech. 1988. V. 41. P. 359–370.
11. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex *KS*-transformation // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1991. V. 50. P. 109–124.
12. *Shagov O.B.* On two types of equations of motion of an artificial Earth satellite in oscillatory form // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of solids. 1990. № 2. P. 3–8.
13. *Deprit A, Elipe A. and Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1994. V. 58. P. 151–201.
14. *Vrbrik J.* Celestial mechanics via quaternions // Can. J. Phys. 1994. V. 72. P. 141–146.
15. *Vrbrik J.* Perturbed Kepler problem in quaternion form // J. Phys. 1995. V. 28. P. 193–198.
16. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2006. V. 95. P. 201–212.
17. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. V. 102. № 1. P. 149–162.
18. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics // MNRAS 400. 2009. P. 228–231; https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x. arXiv:0803.4441
19. *Zhao L.* Kustaanheimo–Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20. № 1. P. 19–36; https://doi.org/10.1134/S1560354715010025
20. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo–Stiefel space induced by the Hopf fibration // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2016. V. 459. № 3. P. 2444–2454.
21. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // Celest. Mech. Dyn. Astron., September 2016.
22. *Breiter S. and Langner K.* Kustaanheimo–Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2017. V. 128. P. 323–342.
23. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous–Levi-Civita transformation // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2018. V. 130. P. 68.

24. *Breiter S., Langner K.* The Lissajous–Kustaanheimo–Stiefel transformation // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. P. 9.
25. *Ferrer S., Crespo F.* Alternative Angle-Based Approach to the *KS*-Map. An interpretation through Symmetry // Journal of Geometric Mechanics. 2018. V. 10. № 3. P. 359–372.
26. *Chelnokov Yu.N.* On the regularization of the equations of the three-dimensional two body problem // Mech. Solids. 1981. V. 16. № 6. P. 1–10.
27. *Chelnokov Yu.N.* Regular equations of the three-dimensional two-body problem // Mech. Solids. 1984. V. 19. № 1. P. 1–7.
28. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Methods in the Problems of Perturbed Motion of a Material Point, Part 1: General Theory. Applications to the Problem of Regularization and to the Problem of Satellite Motion. Available from VINITI. № 218628-V (Moscow, 1985) [in Russian].
29. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Methods in the Problems of Perturbed Motion of a Material Point, Part 2: Three-Dimensional Problem of Unperturbed Central Motion. Problem with Initial Conditions, Available from VINITI, № 8629-V (Moscow, 1985) [in Russian].
30. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I // Cosmic Research. 1992. V. 30. № 6. P. 612–621.
31. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // Cosmic Research. 1993. V. 31. № 3. P. 409–418.
32. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. I // Mech. Solids. 1993. V. 28. № 1. P. 16–25.
33. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. II // Mech. Solids. 1993. V. 28. № 2. P. 1–12.
34. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in space flight mechanics // Gyroscopy and navigation. 1999. № 4. P. 47–66.
35. *Chelnokov Yu.N.* Analysis of optimal motion control for a material point in a central field with application of quaternions // J. Comp. Syst. Sci. Int. 2007. V. 46. № 5. P. 688–713.
36. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion models and methods of dynamics, navigation and motion control. M.: Fizmatlit, 2011.
37. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I // Cosmic Research. 2013. V. 51. № 5. P. 353–364; https://doi.org/10.7868/S0023420613050026
38. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. II // Cosmic Research. 2014. V. 52. № 4. P. 304–317; https://doi.org/10.1134/S0010952514030022
39. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics, astrodynamics, and trajectory motion control. III // Cosmic Research. 2015. V. 53. № 5. P. 394–409; https://doi.org/10.1134/S0010952515050044
40. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the two-body problem and the limited three-body problem // In the collection: XI All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics. Collection of reports. Compiled by: D.Yu. Akhmetov, A.N. Gerasimov, Sh.M. Khaidarov. 2015. P. 4051–4053. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=24826037

41. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the eguations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // Mech. Solids. 2017. Vol. 52. № 6. P. 613–639; https://doi.org/10.3103/S0025654417060036
42. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: II // Mech. Solids. 2018. V. 53. № 6. P. 634–651; https://doi.org/10.3103/S0025654418060055
43. *Chelnokov Yu.N.* Perturbed spatial problem of two bodies: regular quaternion equations of relative motion // Applied Mathematics and Mechanics. 2018. T. 82. № 6. P. 721–733; https://doi.org/10.31857/S003282350002736-9
44. *Chelnokov Yu.N.* Perturbed spatial two-body problem: regular quaternion equations of relative motion // Mech. Solids. 2019. V. 54. № 2. P. 169–178; https://doi.org/10.3103/S0025654419030075
45. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion equations of disturbed motion of an artificial Earth satellite // Cosmic Research. 2019. V. 57. № 2. P. 101–114; https://doi.org/10.1134/S0010952519020023
46. *Chelnokov Yu.N., Loginov M.Yu.* New quaternion models of regular mechanics of space flight and their applications in problems of forecasting the motion of cosmic bodies and inertial navigation in space // Collection of materials: XXVIII St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. St. Petersburg, 2021. P. 292–295.
47. *Bordovitsyna T.V.* Modern numerical methods in problems of celestial mechanics. M.: Nauka, 1984.
48. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A.* Theory of motion of artificial Earth satellites. Analytical and numerical methods. Tomsk: Publishing house Tom. University, 2007.
49. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // The Astronomical Journal. 2005. V. 129. № 5. P. 2496; http://doi.org/10.1086/429546
50. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // The Astronomical Journal. 2007. V. 133. № 6. P. 2815.
51. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A.* A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech. Dyn. Astron. February 2007; https://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3
52. *Bau G., Bombardelli C., Pelaez J., Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. September 2015.
53. *Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Rozengren A.J.* Non-averaged regularized formulations as an alternative to semianalytical orbit propagation methods // Celest. Mech. Dyn. Astron. May 2019.
54. *Bau G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // Celest. Mech. Dyn. Astron. January 2020.
55. *Hopf H.* Uber die Abbildungen der dreidimensionalen Sphare auf die Kugelflache // Math. Ann. 1931. V. 104. № 1. P. 637–665.
56. *Brumberg V.A.* Analytical algorithms of celestial mechanics. M.: Nauka, 1980.
57. *Chelnokov Yu.N.* Quaternionic and biquaternionic models and methods of solid mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion. M.: Fizmatlit, 2006.
58. *Branets V.N., Shmyglevsky I.P.* Application of quaternions in problems of rigid body orientation. M.: Nauka, 1973.
59. *Zhuravlev V.F.* Fundamentals of theoretical mechanics. M.: Fizmatlit, 2008.

60. *Abalakin V.K., Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G., Ryabov Yu.A.* A reference guide to celestial mechanics and astrodynamics. M.: Nauka, 1976.
61. *Duboshin G.N.* Celestial mechanics: Methods of the theory of motion of artificial celestial bodies. M.: Nauka, 1983.
62. *Demin V.G.* Movement of an artificial satellite in a non-central gravitational field. M.–Izhevsk: Research Center "Regular and Chaotic Dynamics", Izhevsk Institute of Computer Research. 2010.
63. *Chelnokov Y.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). 2022. Vol. 43. № 1. P. 21–80;
https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9