ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 5, с. 111–119

УДК 539.3

О МЕХАНИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ САМОСБОРКИ НАНОМАТЕРИАЛОВ

В. А. Бабешко[a,*], **О. В. Евдокимова**[b], **О. М. Бабешко**[a], **В. С. Евдокимов**[a]

[a] *Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*
[b] *Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия*
* *e-mail: babeshko41@mail.ru*

Поступила в редакцию 11.01.2023 г.
После доработки 20.01.2023 г.
Принята к публикации 23.01.2023 г.

В работе излагается механическая концепция самосборки наночастиц. Предполагается, что наночастицы являются деформируемыми штампами в плоской динамической контактной задаче, лежащими на границе многослойной деформируемой среды. Постоянная вибрация в микромире вызывается колебательной энергией фононов и магнонов. Ранее, в работах авторов изложена механическая концепция самоорганизации наночастиц. В ее основу положен высокочастотный резонанс, вызывающий образование стоячих волн. Они локализуют имеющиеся совокупности наночастиц на гребне стоячих волн. В основу самосборки наночастиц положен резонанс, ранее предсказанный академиком И.И. Воровичем и присущ только деформируемым штампам в контактных задачах на многослойной среде. Деформируемые наночастицы моделируются фракталами, представляющими упакованные блочные элементы, описываемые уравнением Гельмгольца. Резонанс деформируемых штампов позволяет осуществлять захват наночастиц, диктуемый кулоновскими силами притяжения. Показано, что соединение двух фракталов, порождает новый фрактал с объединенным носителем, а в случае множественного объединения, получается фрагмент наноматериала. Для реализации исследования впервые удалось построить высокоточное приближенное решение плоской контактной задачи о действии штампа любых конечных размеров на многослойное основание. Этот результат продиктован необходимостью аналитического построения теории самосборки наноматериалов.

Ключевые слова: граничные задачи, наночастицы, интегральные уравнения, высокочастотный резонанс, факторизация, самосборка

DOI: 10.31857/S057232992360007X, **EDN:** GFZOYW

Введение. Развивается механический подход для описания самосборки наноматериалов. Ранее в работе авторов был изложен механический подход самоорганизации наноматериалов [1]. В его основу был положен эффект, связанный с возникновением высокочастотных резонансов, вызывающих стоячие волны, амплитуды которых локализуют расположение наночастиц.

Самосборка является следующим этапом сопряжения самоорганизованных наночастиц в более крупные фрагменты. Механическая концепция самосборки наноматериалов выполняется при следующих естественных допущениях, и реализуется строго математически.

1. Наночастицы находятся на плоской границе деформируемого многослойного основания, и подвержены вибрации, порождаемой квазичастицами — фононами и маг-

нонами, постоянно присутствующими в микромире [2, 3]. Они являются носителями энергии при самосборке.

2. Между наночастицами существует как кулоновское отталкивание, так и притяжение после достижения связности, как и в химических или в квантовомеханических процессах при сближении ядер атомов. Отталкивание преодолевается энергией резонансов.

3. Наночастицы являются плоскими деформируемыми объектами, самоподобной формы, описываемыми упакованными блочными элементами. Последние, в результате самосборки, представляют открытое топологическое покрытие дискретного топологического пространства. Это означает, что они подобны кристаллическим частицам при выращивании кристаллов, что описывается в теориях, связанных с наноматериалами [4].

При этих предположениях оказывается возможным строго математически описать процесс самосборки механических объектов, как деформируемых вибрирующих штампов на деформируемом основании. Если самоорганизация использует высокочастотный резонанс, то самосборка, как средство преодоления возможного отталкивания наночастиц на некоторых расстояниях, и взаимного их захвата при сближении, использует резонанс, ранее предсказанный академиком И.И. Воровичем для деформируемых штампов, лежащих на основании [5–7]. Резонанс необходим для преодоления возможного кулоновского отталкивания одинаково заряженных частиц, которые, после слияния в связную структуру, приобретают объект того же заряда, но большей электрической емкости.

В процессе выполнения работы в двумерной постановке рассмотрена отдельная наночастица, как деформируемый штамп, моделируемый упакованным блочным элементом. Приведен пример уравнения резонансных частот, полученных в [8]. На следующем этапе рассматриваются две наночастицы, вошедшие в соприкосновение, как топологические объекты. Строится фактор топологического пространства. Соотношениями эквивалентности принимаются граничные условия наночастиц, как деформируемых объектов. В результате сопряжения двух наночастиц образуется новая, с совместным носителем, более крупная наночастица, представимая упакованным блочным элементом в дискретном топологическом пространстве [9]. Последовательность сопряжения наночастиц по описанному процессу, приведет к построению фрагмента материала. Для выполнения исследования, авторам впервые удалось построить высокоточное приближенное решение контактной задачи о действии штампа любых конечных размеров на многослойное основание.

Ранее, аналитические формулы для контактных напряжений для узких и широких относительных размеров штампов, строились асимптотически отдельными выражениями [10–13]. Также применялись численные методы, которые не эффективно для учета влияния концентрации напряжений в окрестностях краев штампов [14–18]. Исследование выполнено для материала простой реологии, описываемого уравнением Гельмгольца. Для использования этого подхода в случаях материалов сложных реологий, необходимо применить описанный в [19] метод разложения решений граничных задач для таких материалов по решениям, получаемым в настоящей работе.

1. Постановка задачи. На верхней границе многослойной среды вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1, ox_2 лежат в касательной плоскости. В областях $\Omega_1(-B \le x_1 \le B, |x_2| \le \infty)$ и $\Omega_2(A \le x_1 \le C, |x_2| \le \infty)$, $B \le A$ действует гармонически колеблющийся штамп по закону $\mathbf{e}^{-i\omega t}$, имитирующий наночастицу. В дальнейшем он представляется упакованным блочным элементом. Однако, для постановки и решения задачи, необходимо на некотором этапе рассмотреть случай абсолютно твердого штампа, действующего в условиях вибрации на многослойную среду. Методом, описанным в [20], исключив временной множитель, смешанная задача сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{l(\gamma)} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)q_\gamma(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1,x_2), \quad \gamma = B, C$$

$$l(B) = \Omega_B(-B \le x_1 \le B, |x_2| \le \infty), \quad l(C) = \Omega_C(A \le x_1 \le C, |x_2| \le \infty) \tag{1.1}$$

$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_\Gamma\int_\Gamma K(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2$$

Здесь $q(x_1,x_2)$ контактные напряжения под штампом, $f(x_1,x_2)$ – перемещения в зоне контакта, $k(x_1,x_2)$ – ядро интегрального уравнения, функция $K(\alpha_1,\alpha_2)$ – преобразование Фурье ядра интегрального уравнения.

Расположение контуров G связано с рассмотрением динамической контактной задачи, описано в [20], и состоит в правилах обхода полюсов функции $K(\alpha_1,\alpha_2)$ на вещественной оси. Задача состоит в рассмотрении случая деформируемого штампа. Разработанный авторами подход [19], а также результат, полученный в [8] открыли возможность использовать “фракталы”, т.е. упакованные блочные элементы, являющиеся решениями достаточно простых граничных задач, при исследовании граничных задач для многокомпонентных сред.

Решения сложных граничных задач представляются в виде комбинации фракталов. С учетом этой возможности, в качестве деформируемого штампа принимаются фракталы – решения граничных задач в рассматриваемых областях, являющиеся упакованными блочными элементами для уравнения Гельмгольца. Рассматриваются два случая. Полоса определяется соотношениями $-B \le x_1 \le B$, $|x_2| \le \infty$, случай B, и соотношениями $A \le x_1 \le C$, $|x_2| \le \infty$, $B \le A$, случай C.

Таким образом, в указанных областях необходимо построить упакованные блочные элементы, которые будут рассматриваться как деформируемые штампы. Ниже рассматривается двумерное уравнение Гельмгольца в указанных областях

$$[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2]\varphi(x_1,x_2) = g(x_1,x_2), \quad g(x_1,x_2) = q(x_1,x_2) - t(x_1,x_2) \tag{1.2}$$

Здесь $\varphi(x_1,x_2)$ – вертикальное перемещение в зоне контакта, $q(x_1,x_2)$ контактные напряжений, действующие на объект снизу, которые надо определить, $t(x_1,x_2)$ – заданные внешние воздействия сверху на объект.

Для задачи B в области $\Omega_B(-B < x_1 < B)$ граничные условия следующие

$$\varphi(x_1,x_2) = \varphi(-B,x_2), \quad x_1 = -B; \quad \varphi(x_1,x_2) = \varphi(B,x_2), \quad x_1 = B$$

Для задачи C в области Ω_C $(A < x_1 < C, |x_2| < \infty)$ вид

$$\varphi(x_1,x_2) = \varphi(A,x_2), \quad x_1 \to A; \quad \varphi(x_1,x_2) = \varphi(C,x_2) \quad x_1 \to C$$

Для обеих задач необходимо построить упакованные блочные элементы.

2. Построение одномерных интегральных уравнений. Способ их построения изложен во многих публикациях авторов, например, в [20]. Поставленные двумерные задачи (1.1), (1.2) сводятся к одномерным с вещественным параметром α_2, в результате применения преобразования Фурье по координате x_2.

Тогда интегральное уравнение (1.1) принимает вид

$$\mathbf{K}_0 q = \int_{l(\gamma)} k_0(x_1-\xi_1)q(\xi_1)d\xi_1 = f(x_1), \quad q(\xi_1) = q(\xi_1,\alpha_2), \quad k_0(x_1) = k(x_1,\alpha_2), \quad \gamma = B, C$$

$$k_0(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_0(\alpha_1)e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1, \quad K_0(\alpha_1) = K(\alpha_1,\alpha_2), \quad K_0(\alpha_1) = P_0^{-1}(\alpha_1)R_0(\alpha_1) \tag{2.1}$$

Ради краткости, считаем, что функция $K_0(\alpha_1)$ является четной, мероморфной, и на бесконечности обладает асимптотическим поведением $K_0(\alpha_1) = O(\alpha_1^{-1})$, $\operatorname{Im}\alpha_1 = 0$.

Таким свойством обладают ядра интегральных уравнений, построенные для смешанных задач на многослойной среде [20].

Функция $K_0(\alpha_1)$ представляется отношением двух целых функций $R_0(\alpha_1)$ и $P_0(\alpha_1)$, имеющих счетные множества нулей, уходящих на бесконечность в окрестностях мнимых осей.

Примеры смешанных задач, в которых встречаются подобные интегральные уравнения, имеются в многочисленных публикациях, например, в [20].

Граничные задачи (1.2) для блочного элемента становятся одномерными

$$\begin{gathered}
(\partial^2 x_1 + k^2)\varphi(x_1) = g(x_1), \quad g(x_1) = q(x_1) - t(x_1), \quad k^2 = p^2 - \alpha^2 \\
\varphi(x_1) = \varphi(x_1, \alpha_2), \quad g(x_1) = g(x_1, \alpha_2), \\
\varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(A), \quad x_1 \in \Omega_C; \quad \varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(C), \quad x_1 \to C, \quad x_1 \in \Omega_C \\
\varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(-B), \quad x_1 \to -B; \quad \varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(B), \quad x_1 \to B, \quad x_1 \in \Omega_B
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Применив к граничной задаче (2.2) метод блочного элемента [19], получим следующее представление для упакованных блочных элементов.

Для задачи B имеем

$$\begin{gathered}
\omega_B(\alpha_1) = \left[-e^{-i\alpha_1 B} k \frac{1}{\sin k2B}(e^{i(\alpha_1-k)2B} - 1) - i(\alpha_1 - k)e^{i\alpha_1 B}\right]\varphi_B(B) + \\
+ \left[-e^{i\alpha_1 B} k \frac{1}{\sin k2B}(-e^{-i(\alpha_1-k)2B} + 1) + i(\alpha_1 - k)e^{-i\alpha_1 B}\right]\varphi_B(-B) + \\
+ \frac{i}{2}\frac{1}{\sin k2B}\left\langle G_B(k)(-e^{i(\alpha_1+k)B} + e^{-i(\alpha_1+k)B}) + G_B(-k)(e^{i(\alpha_1-k)B} - e^{-i(\alpha_1-k)B})\right\rangle - G_B(\alpha_1) \\
G_B(\alpha_1) = \int_{-B}^{B} g_B(x_1)e^{i\alpha_1 x_1}dx, \quad Q_B(\alpha_1) = \int_{-B}^{B} q_B(x_1)e^{i\alpha_1 x_1}dx_1, \quad T_B(\alpha_1) = \int_{-B}^{B} t_B(x_1)e^{i\alpha_1 x_1}dx_1
\end{gathered} \tag{2.3}$$

В задаче C получаем

$$\begin{gathered}
\omega_C(\alpha_1) = \left[\frac{e^{i\alpha_1 A}k}{\sin k(C - A)}(e^{i(\alpha_1-k)(C-A)} - 1) - i(\alpha_1 - k)e^{i\alpha_1 C}\right]\varphi(C) + \\
+ \left[\frac{e^{i\alpha_1 C}k}{\sin k(C - A)}(e^{-i(\alpha_1-k)(C-A)} - 1) + i(\alpha_1 - k)e^{i\alpha_1 A}\right]\varphi(A)\Big\rangle + \\
+ \frac{i}{2\sin k(C - A)}\Big\langle G(k)(-e^{-ikA+i\alpha_1 C} + e^{-ikC+i\alpha_1 A}) + G(-k)(e^{ikA+i\alpha_1 C} - e^{ikC+i\alpha_1 A}) - G(\alpha_1)
\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$G_C(\alpha_1) = Q_C(\alpha_1) - T_C(\alpha_1), \quad \omega_C(k) = 0$$

$$G_C(\alpha_1) = \int_{A}^{C} g_C(x_1)e^{i\alpha_1 x_1}dx_1, \quad Q_C(\alpha_1) = \int_{A}^{C} q_C(x_1)e^{i\alpha_1 x_1}dx_1, \quad T_C(\alpha_1) = \int_{A}^{C} t_C(x_1)e^{i\alpha_1 x_1}dx_1$$

Вертикальные перемещения от блочных элементов имеют вид

$$\varphi_\gamma(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_\gamma(\alpha)}{\alpha^2 - k^2}e^{-i\alpha x_1}d\alpha, \quad \gamma = B, C \tag{2.5}$$

Для приведения смешанной граничной задачи к интегральному уравнению приравняем перемещения (2.1) $f_\lambda(x_1)$ в зоне контакта, составленные для многослойного основания, и перемещения упакованного блочного элемента (2.5) $\varphi_\gamma(x_1)$. В обеих задачах предварительно применяем к ним преобразование Фурье. Для случаев обоих задач это дает соотношения

$$K_0(\alpha_1)Q_\gamma(\alpha_1) + E_\gamma(\alpha_1) = -(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}Q_\gamma(\alpha_1) + S_\gamma(\alpha_1)$$
$$S_\gamma(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}\left\langle \omega_\gamma(\alpha_1) + Q_\gamma(\alpha_1)\right\rangle, \quad \gamma = B, C$$

Здесь $E_\gamma(\alpha_1)$ часть поверхности границы многослойной среды, свободная от контакта. Объединив члены, содержащие преобразования Фурье контактных напряжений и применив к этим равенствам обращение Фурье по параметру α_1, получаем два интегральных уравнения Винера–Хопфа на конечных отрезках

$$\mathbf{K}q_\gamma = \int\limits_{l(\gamma)} k(x_1 - \xi_1)q_\gamma(\xi_1)d\xi_1 = s_\gamma(x_1), \quad l(B) = [-B \le x_1 \le B]$$
$$l(C) = [A \le x_1 \le C], \quad k(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1}d\alpha_1 \tag{2.6}$$
$$K(\alpha_1) = K_0(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}$$

Заметим, что оба уравнения содержат в правой части неизвестные функционалы $Q_C(k)$, $Q_C(-k)$, $Q_B(k)$, $Q_B(-k)$ решений интегральных уравнений, которые находятся после обращения интегральных уравнений. Это одна из особенностей, присущая контактным задачам для деформируемых штампов, взятых в виде упакованных блочных элементов.

В работе [8] доказана возможность нахождения всех функционалов и объяснена их роль в рассматриваемых задачах. В динамических контактных задачах они лежат в основе построения уравнений, описывающих дискретные резонансные частоты в задачах с деформируемым штампом, предсказанные академиком И.И. Воровичем [5, 6]. Эти уравнения построены и входят в знаменатели решений контактных задач с деформируемым штампом для некоторых их размеров, полученных в [8], а также приведены в [9]. Резонансы, описываемые ими, формируемые квазичастицами – фононами и магнонами, порождают механические процессы движения наночастиц, приводящих в результате случайных подвижек к захвату подходящих, в соответствии с граничными условиями, наночастиц и их удержанию. Эти резонансы способны вызывать как вертикальные, так и горизонтальные подвижки частиц [21]. В настоящей работе доказывается, что этот процесс и полученные в [8, 9] формулы оказываются справедливыми для любых относительных размеров наночастиц. Например, в [8] получены формулы, описывающие резонансные частоты для случая В, имеющие вид

$$D_{11}(k)D_{22}(-k) - C_{13}(k)C_{23}(-k) = 0$$

Входящие в представление функции, являются аналитическими, содержащими параметр частоты. В работе [8] они получены только для ограниченных значений параметра штампа большого относительного размера. Для построения подобного уравнения для всех относительных размеров штампа ниже впервые, строится высокоточное решение интегрального уравнения (2.1) для любого конечного отрезка $l(B)$.

Для решения задачи описания самосборки наночастиц, имитируемых упакованными блочными элементами, ниже излагается новый высокоточный приближенный подход, позволяющий построение решений интегральных nуравнений Винер-Хопфа (2.6) для любого конечного отрезка [–B, B], $0 < B < \infty$. Ранее это делалось отдельно для случаев малых и больших относительных величин отрезков областей контакта [10–13].

3. Построение высокоточного приближенного решения интегральных уравнений на отрезке. Метод построения приближенного решения интегрального уравнения (2.6) дает следующая теорема.

Теорема [22]. Пусть имеются два интегральных уравнения

$$\mathbf{K}_1 q_1 = \int_{-B}^{B} k_1(x-s) q_1(s) ds = f(x) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{K}_2 q_2 = \int_{-B}^{B} k_2(x-s) q_2(s) ds = f(x), \quad k_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} K_n(u) e^{-iux} du, \quad n = 1, 2 \tag{3.2}$$

Пусть для ядер интегральных уравнений справедлива оценка

$$\begin{gathered} |K_1(u) - K_2(u)| |1 + u^2|^{0,5(1+\delta)} < \frac{4\varepsilon}{2(\delta_1 - \delta) r - 1}, \quad u \in G, \\ \delta_1 > \delta > 0.5, \quad r > r_0 = 2(\delta_1 - \delta), \quad r > r_0 > 1 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Тогда решения интегральных уравнений близки в следующем смысле

$$\max|q_1(x) - q_2(x)|\sqrt{\mathrm{B}^2 - x^2} < M\varepsilon, \quad |x| \le B$$

Постоянная M не зависит от ε.

Здесь контур G совпадает с вещественной осью в статических контактных задачах и отклоняется от нее лишь в небольших окрестностях, обходя вещественные полюсы, в динамических задачах.

Способ построения приближения ядер рациональными функциями с любой точностью, описан в ряде работ, например, в [7] и здесь не повторяется.

Применим эти результаты для построения высокоточного решения интегрального уравнения рассматриваемой контактной задачи, справедливого для любых конечных значений параметра B.

Для построения приближенного решения интегрального уравнения с ядром $\mathrm{K}_2(\mathrm{u})$. возьмем, в качестве исходного, интегральное уравнение (3.1) с ядром $\mathrm{K}_1(\mathrm{u})$, записанное в следующем виде

$$\begin{gathered} \int_{-B}^{B} k_1(x-s) q(s,B) ds = f(x), \quad k_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} K_1(u) e^{-iux} du \\ K_1(u) = \frac{\operatorname{sh} u}{u \operatorname{ch} u} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Его точное решение $q_0(s, B)$ для любых конечных $\mathbf{B}$ и для $f(x) = 1$ построено в [23] и имеет вид

$$q_0(s,B) = \frac{1}{\pi Q_{-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} B)\sqrt{2\operatorname{ch} B - 2\operatorname{ch} s}}$$

Здесь $Q_{-1/2}(\operatorname{ch} B)$ – функция Лежандра.

Для построения решения этого интегрального уравнения для произвольной, один раз дифференцируемой функции $f(x)$, справедлива формула М.Г. Крейна [23], свободная от применения сингулярного интеграла

$$\begin{gathered} q_1(s,B) = \frac{1}{2M'(B)}\left[\frac{d}{dB}\int_{-B}^{B} q_0(s,B) f(s) ds\right] q_0(x,B) - \frac{1}{2}\int_{|x|}^{B} q_0(x,\xi)\frac{d}{d\xi} \times \\ \times\left[\frac{1}{M'(\xi)}\frac{d}{d\xi}\int_{-\xi}^{\xi} q_0(s,\xi) f(s) ds\right] d\xi - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{|x|}^{B}\frac{q_0(x,\xi)}{M'(\xi)}\left[\int_{-\xi}^{\xi} q_0(s,\xi) df(s)\right] d\xi, \quad |x| < B \end{gathered} \tag{3.5}$$

Таким образом, достаточно осуществить построение приближенного решения интегрального уравнения для случая $f(x) = 1$, чтобы получить решение для случая произвольной функции $f(x)$.

В результате выполнения построения приближенного решения для уравнения (3.1), будет построена, с использованием требования (3.3), функция $K_2(u)$, вида

$$K_2(u) = K_1(u)\Pi(u)$$

Здесь $\Pi(u)$ – рациональная функция, имеющая конечное число нулей и полюсов. Построив функцию $K_2(u)$, которая равна $K_1(u)\Pi(u)$ и применив к ней метод фиктивного поглощения, детально изложенный в [22], построим высокоточное приближенное решение интегрального уравнения (3.2) с этим ядром, справедливое для всех конечных значений параметра B.

Алгоритм метода фиктивного поглощения состоит в следующем [22].

Пусть имеются два интегральных уравнения (3.1) и (3.2) со свойствами ядер

$$K_2(u) = K_1(u)\Pi(u), \quad \Pi(u) = \prod_{m=1}^{M}\frac{u - z_m}{u - \xi_m}, \quad M < \infty$$

Пусть известен обратный оператор $\mathbf{K}_1^{-1}$. Тогда решение интегрального уравнения (3.2) дается формулой

$$q_2 = \mathbf{V}^{-1}\Pi^{-1}(u)\mathbf{V}[\mathbf{K}_1^{-1}f - \mathbf{K}_1^{-1}\varphi] + \varphi$$

Здесь вводимая функция φ имеет носитель на отрезке $[-B, B]$ и содержит M неизвестных постоянных. Метод фиктивного поглощения позволяет путем решения конечной системы алгебраических уравнений, для определения M постоянных, строить точные решения интегральных уравнений с ядрами, преобразования Фурье которых отличаются множителем на рациональную функцию $\Pi(u)$. В рассматриваемом случае, решение имеет вид

$$q_2(s, B) = \frac{n(s, B)}{\pi Q_{-1/2}(\operatorname{ch}B)\sqrt{2\operatorname{ch}B - 2\operatorname{ch}s}}$$

Функция $n(s, B)$ непрерывна на отрезке $[-B, B]$. Важно заметить, что построенное решение содержит асимптотические формулы, справедливые, как для малых относительных размеров штампов, так и для больших.

Так, в случае малых относительных размеров штампов справедлива оценка $Q_{-1/2}(\operatorname{ch}B) = O(\ln B)$, $B \to 0$, свойственная малым размерам штампа [10–13]. Таким образом, контактная задача для любой отдельно взятой наночастицы, произвольного конечного размера, решается построением высокоточного приближенного решения, описанным выше способом.

Найденные, в результате решения интегральных уравнений, контактные напряжения вносятся во внешние формы соответствующих упакованных блочных элементов.

4. Самосборка наночастиц в более крупные фрагменты материала. В основе самосборки наночастиц лежит свойство полилинейных и, в частности, внешних форм, составлять линейное пространство [24]. Их сумма остается в линейном пространстве. Это свойство переносится на упакованные блочные элементы, фракталы, определяемые внешними формами, имитируя наночастицы. В рамках механической концепции процесс самосборки наночастиц, описываемых фракталами, происходит после преодоления, благодаря резонансным явлениям И.И. Воровича, возможного отталкивания одинаково заряженных наночастиц. В квантовой механике сталкиваются с подобной ситуацией при решении задача сближений одинаково заряженных ядер атомов. Соприкоснувшись, они объединяются в более крупный фрактал. Этот процесс является построением фактор-топологии в дискретном топологическом пространстве. Как сказано выше, фракталы – это упакованные блочные элементы, которые могут быть разноразмерными. Для этого берутся интегральные представления двух фракталов, имеющих носители $[-B, B]$ и $[A, C]$ с внешними формами (2.3) и (2.4). При сближении носителей наночастиц до соприкосновения границ, возникает равенство $B = A$. В результате сложения упакованных блочных элементов, с учетом одинаковых граничных условий, как отношений эквивалентности фактор-топологий, и выполнения преобразований, получается новый блочный элемент. Он имеет носитель, равный объединению носителей исходных блочных элементов, образовывая фактор-топологическое пространство. Дальнейший процесс самосборки состоит в объединениях уже больших фрагментов наноматериала в цельный объект и приводит к открытому топологическому покрытию построенного дискретного фактор-топологического пространства [25]. Оно же является наноматериалом, подобно более сложному, двумерному, изучавшемуся в [26]. Рассмотрен случай простой реологии наночастиц и наноматериала. В случае сложной реологии, решения граничных задач для них разлагаются на фракталы материалов более простых реологий по схемам, представленным в [9, 19, 26]. При построении фактор-топологий отношения эквивалентности берутся в форме соответствующих граничных условий. Таким образом, при самосборке сохраняются механические и физические свойства материалов наночастиц вследствие выполнения законов механики деформируемого твердого тела.

Вывод. Выполненные в настоящей работе аналитические построения дают возможность исследовать процесс самосборки наночастиц разных размеров и переносить исследования на материалы сложных реологий. До конца нет ясности о механизме удержания наночастиц, который должен проясниться при рассмотрении наночастиц многокомпонентных материалов сложных реологий. Поэтому исследования настоящей работы, по мнению авторов, дадут возможность изучения свойств самосборки наночастиц для случаев многокомпонентных материалов сложной реологии. Особо следует отметить изложенный способ построения высокоточного приближенного решения контактных задач для областей контакта любых конечных размеров. Этот подход допускает применение в различных областях теории прочности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00128.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Об одной механической модели самоорганизации наночастиц // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 6. С. 72–78. https://doi.org/10.31857/S0572329922060034
2. *Клеменс П.* Влияние тепловых и фононных процессов на затухание ультразвука // Физическая акустика. М.: Мир, 1968. Т. 3. С. 244–284.
3. *Гутфельд Р.* Распространение тепловых импульсов // Физическая акустика. М.: Мир, 1973. Т. 5. С. 267–332.
4. *Арефьева Л.П., Шебзухова И.Г.* Смачивание и анизотропия межфазной энергии на границе контакта нанокристаллов индия с ориентированной подложкой // Физ.-хим. аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. 2018. № 10. С. 27–34. https://doi.org/10.26456/pcascnn/2018.10.027
5. *Ворович И.И.* Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 817–820.
6. *Ворович И.И.* Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.
7. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.

8. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О контактных задачах с деформируемым штампом // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84. № 1. С. 25–34. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34

9. *Бабешко В.А., Хрипков Д.А., Евдокимов В.С., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* Построение дискретного топологического пространства самосборки для упакованных блочных элементов, имитирующих наночастицы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 3. С. 38–46. https://doi.org/10.31429/vestnik-19-3-38-46

10. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

11. *Айзикович С.М.* Асимптотическое решение одного класса парных уравнений при больших значениях параметра // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 5. С. 1037.

12. *Александров В.М., Костырева Л.А.* Плоская контактная задача для предварительного несжимаемого слоя // ПММ. 2009. Т. 73. № 6. С. 977–982.

13. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.

14. *Raous M., Cangeŕmi L., Cocou M.* A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1999. V. 177. P. 383–399.

15. *Shillor M., Sofonea M., Telega J.J.* Models and analysis of quasistatic contact. Lect. Notes Phys. V. 655. Berlin: Springer, 2004.

16. *Guler M.A., Erdogan F.* The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // Int. J. Mech. Sci. 2007. V. 49. № 2. P. 161–182. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006

17. *Ke L.-L., Wang Y.-S.* Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // Eur. J. Mech. A. Solids. 2007. V. 26. № 1. P. 171–188. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007

18. *Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S.* On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces // Tribol. Int. 2007. V. 40. № 4. P. 574–579. https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008

19. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования // ДАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 499. № 1. С. 30–35. https://doi.org/10.31857/S2686740021040039

20. *Ворович И.И.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.

21. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mech. 2018. V. 229. P. 4727–4739. hpps//doi.org/ https://doi.org/10.1007/s00707-018-2255-7

22. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.

23. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967. 508 с.

24. *Ефимов Н.В.* Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977. 87 с.

25. *Голованов Н.Н., Ильютко Д.П., Носовский Г.В., Фоменко А.Т.* Компьютерная геометрия. М.: Академия, 2006. 512 с.

26. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Трещины нового типа и модели некоторых наноматериалов // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 13–20. hpps//doi.org/ https://doi.org/10.31857/S0572329920050025