

УДК 539.3

ОДИН ПОДХОД К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ УДАРА ОБОЛОЧЕК ТИПА С.П. ТИМОШЕНКО ОБ УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

© 2023 г. В. Р. Богданов^{а,*}

^а*Progressive Research Solutions Pty Ltd, Sydney, Australia*

^{*}*e-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com, mr.vbogdanov@gmail.com*

Поступила в редакцию 13.09.2022 г.

После доработки 15.09.2022 г.

Принята к публикации 06.10.2022 г.

В работе приводится попытка решить плоскую задачу удара упругой оболочки типа С.П. Тимошенко об упругое полупространство используя методику сведения задач динамики к решению бесконечной системы интегральных уравнений (БСИУ) Вольтерра второго рода. Показано, что такой подход не приемлем. При дискретизации редуцированной БСИУ Вольтерра второго рода получается плохо определенная система линейных алгебраических уравнений: с ростом порядка редуцирования определитель такой системы стремится в бесконечность. Это показывает ограниченность такого подхода.

Ключевые слова: удар, полупространство, плоская задача, цилиндрическая оболочка

DOI: 10.31857/S0572329923700058, EDN: QXYLLX

1. Введение. Подход [1–5] для решения задач динамики, заключающийся в сведении к решению бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода [6–8, 10], дает возможность определять напряженно-деформированное состояние упругих полупространства и слоя при проникании абсолютно твердых тел [1, 2, 7, 8, 10] и напряженно-деформированное состояние упругих оболочек типа Кирхгоффа–Лява и упругих полупространства и слоя при их соударении [3–6] и не позволяет так решать задачи удара упругих тел и оболочек типа С.П. Тимошенко. Кроме этого такой подход дает возможность определять неизвестные напряжения и перемещения только на поверхности основания. Это привело к целесообразности разработки других математических подходов и моделей. В [9, 11–14] разработан новый подход к решению задач удара и нестационарного взаимодействия в упругопластической математической постановке [15–19]. В нестационарных задачах действие ударника заменяется распределенной нагрузкой в области контакта, изменяющейся по линейному закону [20–22]. Решение задач для упругих оболочек [23–26], упругого полупространства [27–29], упругого слоя [30], упругого стержня [31, 32] было разработано с использованием метода функций влияния [33]. В [23] исследуется процесс нестационарного взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с упругим полупространством на так называемой “сверхзвуковой” стадии взаимодействия. Он характеризуется превышением скорости расширения области контактного взаимодействия скорости распространения волн растяжения–сжатия в упругом полупространстве. Решение было разработано с использованием функций влияния, соответствующих сосредоточенной силе или кинематическим воздействиям для упругого изотропного полупространства, которые были найдены и исследованы в [33].

$$\begin{aligned}
t' &= \frac{C_0 t}{R}, \quad x' = \frac{x}{R}, \quad z' = \frac{z}{R}, \quad u'_t = \frac{u_t}{R}, \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{K}, \quad v'_T = \frac{v_T}{C_0} \\
w'_T &= \frac{w_T}{R}, \quad p' = \frac{p}{KR}, \quad q' = \frac{q}{KR}, \quad M' = \frac{M}{\rho R^2}, \quad (i, j = x, y, z) \\
\beta^2 &= \frac{C_S^2}{C_0^2} = \frac{\mu}{K}, \quad \alpha^2 = \frac{C_p^2}{C_0^2} = \left(1 + \frac{4\mu}{3K}\right), \quad C_0^2 = \frac{K}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{3\mu}{3K + 4\mu}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ — вектор перемещения точек среды; σ_{zz} , σ_{xx} , σ_{xz} — не нулевые компоненты тензора напряжений среды; M — погонная масса оболочки; $v_T(t)$, $w_T(t)$ — скорость и перемещение оболочки как твердого тела. Далее будем использовать только безразмерные величины, поэтому штрих опускаем. Упругое полупространство и оболочка находятся в состоянии плоской деформации.

Дифференциальные уравнения (типа Тимошенко С.П.), выведенные Д.В. Тарлаковским по аналогии с [стр. 87, 34], которые описывают динамику цилиндрических оболочек и учитывают сдвиг и инерцию вращения поперечного сечения, в силу (2.1) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\gamma_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + (1 + a_4) \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + a_4 \Phi - a_4 u_0 + \beta_3 q \\
\eta_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - (1 + a_3) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - a_3 w_0 + \beta_4 p \\
\gamma_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - a_2 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - a_2 \Phi + a_2 u_0,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_0^2 &= \frac{C_0^2}{C_{02}^2}, \quad \eta_0^2 = \frac{C_0^2}{C_{01}^2}, \quad C_{01}^2 = \frac{E_0}{(1 - \nu_0)\rho_0}, \quad C_{02}^2 = \frac{b_1^2 E_0}{2(1 + \nu_0)}, \quad a_2 = \frac{6(1 - \nu_0)b_1^2 R^2}{h^2} \\
b_1^2 &= \frac{5}{6}, \quad a_3 = \frac{2}{(1 - \nu_0)b_1^2}, \quad a_4 = \frac{1}{a_3}, \quad \beta_3 = \frac{(1 - \nu_0)K^2 R}{E_0^2 h}, \quad \beta_4 = \frac{2(1 + \nu_0)K^2 R}{b_1^2 E_0^2 h}
\end{aligned}$$

где Φ — угол поворота нормального сечения к срединной поверхности, b_1^2 — коэффициент, учитывающий распределение касательных усилий в поперечном сечении оболочки, ν_0 , E_0 и ρ_0 — коэффициент Пуассона, модуль упругости Юнга и плотность материала оболочки, p и q — соответственно, радиальная и тангенциальная составляющие распределенной нагрузки, действующей на оболочку, R — радиус оболочки.

Движение упругой среды описывается скалярным потенциалом ϕ и ненулевой компонентой векторного потенциала ψ , которые удовлетворяют волновым уравнениям [1–8]:

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\alpha^2 \partial t^2}, \quad \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\beta^2 \partial t^2}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

Физические величины выражаются через волновые потенциалы следующим образом:

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{xx} = \Theta - \sigma_{zz}$$

$$\sigma_{zz} = (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right), \quad \sigma_{xz} = 2\beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - 2\beta^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

$$\Theta = \sigma_{zz} + \sigma_{xx} = 2(1 - b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Рассмотрим начальную стадию процесса удара упругих оболочек о поверхность упругого полупространства, когда не возникает пластических деформаций и величина заглубления оболочки в среду мала. Задача взаимодействия упругих оболочек с упругим полупространством решается в линейной постановке, поэтому выполняем линеаризацию краевых условий [1–8, 10]: краевые условия с возмущенной поверхности сносим на не возмущенную поверхность тел, которые деформируются.

Как видно из рис. 1, проекции функций u_0 , w_0 , p и q на оси $O'z$ и $O'x$ определяются так:

$$\begin{aligned} pr_z w_0(t, \theta) &= w_0(t, \theta) \cos \theta, & pr_x w_0(t, \theta) &= -w_0(t, \theta) \sin \theta, & pr_z u_0(t, \theta) &= u_0(t, \theta) \sin \theta \\ pr_x u_0(t, \theta) &= u_0(t, \theta) \cos \theta, & pr_z p(t, \theta) &= p(t, \theta) \cos \theta, & pr_x p(t, \theta) &= -p(t, \theta) \sin \theta \\ pr_z q(t, \theta) &= q(t, \theta) \sin \theta, & pr_x q(t, \theta) &= q(t, \theta) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тогда при контакте, который происходит в условиях жесткого сцепления, в системе координат zOx перемещения u_z , u_x и напряжения σ_{zz} и σ_{zx} в поверхностных точках области контакта запишутся в виде:

$$\begin{aligned} u_z(t, x, 0) &= w_T(t) - f(x) - w_0(t, \theta) \cos \theta - u_0(t, \theta) \sin \theta \\ u_x(t, x, 0) &= -w_0(t, \theta) \sin \theta + u_0(t, \theta) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{zz}(t, x, 0) = -p(t, \theta) \cos \theta - q(t, \theta) \sin \theta, \quad \sigma_{zx}(t, x, 0) = -p(t, \theta) \sin \theta + q(t, \theta) \cos \theta$$

где функция $f(x)$ описывает профиль оболочки. В случае кругового цилиндра $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

Радиальная и тангенциальная составляющие распределенной нагрузки, действующей на оболочку, выражаются через нормальные и тангенциальные напряжения, возникающие на поверхности полупространства в зоне контакта.

$$p(t, \theta) = -\sigma_{zz}(t, x, 0) \cos \theta - \sigma_{xz}(t, x, 0) \sin \theta, \quad |\theta| < \theta^* \quad (2.7)$$

$$q(t, \theta) = -\sigma_{zz}(t, x, 0) \sin \theta + \sigma_{xz}(t, x, 0) \cos \theta, \quad |\theta| < \theta^* \quad (2.8)$$

где $2\theta^*$, как видно из рис. 1, есть величина сектора оболочки, контактирующего с полупространством.

Кинематическое условие, определяющее полуразмер области контакта $x^*(t)$ запишется следующим образом:

$$w_T(t) - f(x) - u_z(t, x, 0) - w_0(t, \theta) \cos \theta - u_0(t, \theta) \sin \theta \begin{cases} = 0, & |x| \leq x^*(t) \\ < 0, & |x| > x^*(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

Предполагаем, что область контакта односвязная, а это утверждение эквивалентно тому, что нормальные к площадке контакта напряжения являются сжимающими:

$$\sigma_{zz}|_{z=0} < 0, \quad |x| < x^*(t) \quad (2.10)$$

На основании (2.4), граничные условия при отсутствии трения в зоне контакта можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial t} \Big|_{z=0} &\equiv V(t, x) = v_T(t) - \frac{\partial w_0(t, \theta)}{\partial t} \cos \theta - \frac{\partial u_0(t, \theta)}{\partial t} \sin \theta, \quad |x| < x^*(t) \\ \sigma_{zx} &= 0; \quad |x| > x^*(t), \quad \sigma_{zx}|_{z=0} = 0, \quad |x| < \infty \end{aligned} \quad (2.11)$$

Начальные условия для потенциалов φ и ψ — нулевые:

$$\varphi|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \psi|_{t=0} = \frac{\partial \psi}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (2.12)$$

Для задачи удара упругой оболочки об упругое полупространство скорость и перемещение ударяющегося тела находятся из уравнения движения путем его интегрирования.

Уравнение движения центра масс оболочки в задаче удара с начальной скоростью V_0 имеет вид:

$$M \frac{d^2 w_T(t)}{dt^2} = P(t) \quad (2.13)$$

$$v_T(t)|_{t=0} = V_0, \quad w_T(t)|_{t=0} = 0 \quad (2.14)$$

$$P(t) = 2 \int_0^{x^*(t)} \sigma_{zz}(t, x, 0) dx \quad (2.15)$$

Справедливо условие отсутствия возмущений перед фронтом продольных волн и условие затухания возмущений на бесконечности.

3. Методика решения. Так как процесс удара — кратковременный, область возмущений в каждый момент времени t является конечной. Ограничиваясь конечным интервалом времени взаимодействия ($0 \leq t \leq T$), можно выделить область полупространства, которая к моменту времени T охватывает всю зону возмущений. С этой точки зрения для времен ($0 \leq t \leq T$) упругое полупространство можно заменить упругой полуполосой ($|x| \leq l; z \geq 0$), до границ которой к моменту времени T не доходят возмущения.

$$l = \alpha T + x^*(T) \quad (3.1)$$

Таким образом, для времен ($0 \leq t \leq T$) рассматриваемая задача сводится к нестационарной задаче для полуполосы при смешанных граничных условиях на ее торце.

На боковых гранях полуполосы выбираем, например, условия скользящей заделки:

$$u_x|_{|x|=l} = 0, \quad \sigma_{zx}|_{|x|=l} = 0 \quad (3.2)$$

Рассмотрим начально-краевую задачу (2.2), (2.3), (2.11)–(2.14). Представим нормальные $w_0(t, \theta)$ и тангенциальные $u_0(t, \theta)$ перемещения точек срединной поверхности оболочки и радиальные $p(t, \theta)$ и тангенциальные $q(t, \theta)$ составляющие распределенной внешней нагрузки, действующей на оболочку в виде тригонометрических рядов Фурье.

$$w_0(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{0n}(t) \cos(n\theta) \quad (3.3)$$

$$u_0(t, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}(t) \sin(n\theta) \quad (3.4)$$

$$p(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cos(n\theta) \quad (3.5)$$

$$q(t, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin(n\theta) \quad (3.6)$$

$$\Phi(t, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \sin(n\theta) \quad (3.7)$$

Подставляя равенства (3.3)–(3.7) в систему уравнений (2.2), приравнявая коэффициенты при $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$ и применяя к полученным уравнениям преобразование Лапласа по переменной t с параметром s , приходим к соотношениям, связывающим изображения по Лапласу коэффициентов рядов (3.3)–(3.7) (здесь и далее верхний индекс “ L ” означает изображение по Лапласу):

$$w_{0,0}^L(s) = \frac{\beta_4 p_0^L(s)}{\eta_0^2 s^2 + a_3} \quad (3.8)$$

$$w_{0,n}^L(s) = Q_{11}^L(n, s) p_n^L(s) + Q_{12}^L(n, s) q_n^L(s) \quad (3.9)$$

$$u_{0,n}^L(s) = Q_{21}^L(n, s) p_n^L(s) + Q_{22}^L(n, s) q_n^L(s) \quad (3.10)$$

$$\Phi_n^L(s) = Q_{31}^L(n, s) p_n^L(s) + Q_{32}^L(n, s) q_n^L(s) \quad (3.11)$$

где

$$Q_{ij}^L(n, s) = \frac{\Delta_{ij}(s)}{\Delta(s)}, \quad (i = \overline{1, 3}; j = 1, 2; n = \overline{1, \infty})$$

$$\Delta_{21}(n, s) = -\beta_4 n [a_2 + (1 + a_4)(\gamma_0^2 s^2 + n^2)]$$

$$\Delta_{22}(n, s) = \beta_3 [(\eta_0^2 s^2 + n^2)(\gamma_0^2 s^2 + n^2) + (\eta_0^2 a_2 + \gamma_0^2 a_3) s^2 + a_3 n^2 + a_2 a_3]$$

$$\Delta_{11}(n, s) = \beta_4 [(\gamma_0^2 s^2 + n^2)(\gamma_0^2 s^2 + n^2) + a_2 + a_4]$$

$$\Delta_{12}(n, s) = -\beta_3 n [(1 + a_3)(\gamma_0^2 s^2 + n^2) + a_2 a_3]$$

$$\Delta_{31}(n, s) = \beta_4 a_2 [n(\gamma_0^2 s^2 + n^2) - 1], \quad \Delta_{32}(n, s) = \beta_3 a_2 [\eta_0^2 s^2 + a_3(1 - n^2)]$$

$$\Delta(s) = \eta_0^2 \gamma_0^4 [s^6 + A_a s^4 + B_b s^2 + C_c], \quad A_a = ((2\eta_0^2 + \gamma_0^2)n^2 + a_3 \gamma_0^2 + a_4 \eta_0^2)/(\eta_0^2 \gamma_0^2)$$

$$B_b = ((\eta_0^2 + 2\gamma_0^2)n^4 + ((a_3 - 2)\gamma_0^2 + a_4 \eta_0^2)n^2 + a_2(\eta_0^2 \gamma_0^2 + a_3 \gamma_0^2 - a_4 \eta_0^2) + \gamma_0^2)/(\eta_0^2 \gamma_0^4)$$

$$C_c = (n^6 - 2n^4 + (a_2 \eta_0^2 + 1)n^2 + a_3 a_4 \eta_0^2)/(\eta_0^2 \gamma_0^4)$$

Тогда применяя к (3.8)–(3.11) обратное преобразование Лапласа, по теореме о свертке оригиналов двух функций имеем:

$$\dot{w}_{0,0}(t) = \frac{\beta_4}{\eta_0^2} \int_0^t p_0(\tau) \cos \frac{t - \tau}{\eta_0(a_4)^{1/2}} d\tau \quad (3.12)$$

$$\dot{w}_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau) Q_{11}(n, t - \tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) Q_{12}(n, t - \tau) d\tau \quad (3.13)$$

$$\dot{u}_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau) Q_{21}(n, t - \tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) Q_{22}(n, t - \tau) d\tau \quad (3.14)$$

$$\dot{\Phi}_n(t) = \int_0^t p_n(\tau) Q_{31}(n, t - \tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) Q_{32}(n, t - \tau) d\tau, \quad (n = \overline{1, \infty}) \quad (3.15)$$

где

$$Q_{ij}(n, t) = 4[(\Delta_r R_{ij} + \Delta_i I_{ij})\text{ch}(r_0 t) \cos(\sigma_0 t) + (\Delta_i R_{ij} - \Delta_r I_{ij})\text{sh}(r_0 t) \sin(\sigma_0 t)] / (\Delta_r^2 + \Delta_i^2) + \\ + \frac{2\Delta_{ij}(n, s_1^2)(H(s_1^2)\text{ch}(s_1 t) + H(-s_1^2)\cos(s_1 t))}{\Delta'(s_1^2)}$$

$$R_{11} = \beta_4 [\gamma_0^4 r_1 + \gamma_0^2(2n^2 + a_2 + a_4)r_2 + n^2(n^2 + a_2 + a_4)]$$

$$I_{11} = \beta_4 [\gamma_0^4 \sigma_1 + \gamma_0^2(2n^2 + a_2 + a_4)\sigma_2]$$

$$R_{22} = \beta_3 [\eta_0^2 \gamma_0^2 r_1 + ((\gamma_0^2 + \eta_0^2)n^2 + \eta_0^2 a_2 + \gamma_0^2 a_3)r_2 + n^2(n^2 + a_3) + a_2 a_3]$$

$$I_{22} = \beta_3 [\eta_0^2 \gamma_0^2 \sigma_1 + ((\gamma_0^2 + \eta_0^2)n^2 + \eta_0^2 a_2 + \gamma_0^2 a_3)\sigma_2]$$

$$R_{12} = -\beta_3 n [(1 + a_3)(\gamma_0^2 r_2 + n^2) + a_2 a_3], \quad I_{12} = -\beta_3 n (1 + a_3) \gamma_0^2 \sigma_2, \quad I_{21} = -\beta_4 n (1 + a_4) \gamma_0^2 \sigma_2$$

$$R_{21} = -\beta_4 n [(1 + a_4)(\gamma_0^2 r_2 + n^2) + a_2]$$

$$\Delta_r = \eta_0^2 \gamma_0^4 [6r_1 + 4A_a r_2 + 2B_b], \quad \Delta_i = \eta_0^2 \gamma_0^4 [6\sigma_1 + 4A_a \sigma_2]$$

$$\Delta'(s) = \eta_0^2 \gamma_0^4 [6s^4 + 4A_a s^2 + 2B_b]$$

Здесь $H(x)$ – единичная функция Хевисайда, выражения s_1 , r_i , σ_i ($i = 1; 2$) определяются из решения Кардано [стр. 43, 35].

$$w_{0,0}(t) = \frac{\beta_4(a_4)^{1/2}}{\eta_0} \int_0^t p_0(\tau) \sin \frac{t-\tau}{\eta_0(a_4)^{1/2}} d\tau$$

$$w_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau) \tilde{Q}_{11}(n, t-\tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) \tilde{Q}_{12}(n, t-\tau) d\tau \quad (3.16)$$

$$u_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau) \tilde{Q}_{21}(n, t-\tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) \tilde{Q}_{22}(n, t-\tau) d\tau \quad (3.17)$$

$$\Phi_n(t) = \int_0^t p_n(\tau) \tilde{Q}_{31}(n, t-\tau) d\tau + \int_0^t q_n(\tau) \tilde{Q}_{32}(n, t-\tau) d\tau, \quad (n = \overline{1, \infty}) \quad (3.18)$$

где

$$\tilde{Q}_{ij}(n, t) = 4[(\delta_r R_{ij} + \delta_i I_{ij})\text{sh}(r_0 t) \cos(\sigma_0 t) + (\delta_i R_{ij} - \delta_r I_{ij})\text{ch}(r_0 t) \sin(\sigma_0 t)] / (\delta_r^2 + \delta_i^2) + \\ + \frac{2\Delta_{ij}(n, s_1^2)(H(s_1^2)\text{sh}(s_1 t) + H(-s_1^2)\sin(s_1 t))}{s_1 \Delta'(s_1^2)}, \quad \delta_r = r_0 \Delta_r - \sigma_0 \Delta_i, \quad \delta_i = \sigma_0 \Delta_r + r_0 \Delta_i$$

Применим к системе уравнений (2.3) преобразование Лапласа по переменной t (s – параметр преобразования) и метод Фурье разделения переменных [1–5], учитывая четность по x потенциала φ и нечетность ненулевой компоненты векторного потенциала ψ , и потребуем удовлетворение условий (2.16)–(2.17). Тогда в пространстве трансформант Лапласа получим следующие представления для волновых потенциалов [7, 8, 10]:

$$\begin{aligned}\varphi^L(s, x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) \exp \left(-z \sqrt{\frac{s^2}{\alpha^2} + \lambda_n^2} \right) \cos \lambda_n x \\ \psi^L(s, x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) \exp \left(-z \sqrt{\frac{s^2}{\beta^2} + \lambda_n^2} \right) \sin \lambda_n x\end{aligned}\quad (3.19)$$

где $\lambda_n = n\pi/l$, $(n = \overline{1, \infty})$ – собственные числа задачи, которые соответствуют условию скользящей заделки (3.3).

В (3.25) $A_n(s)$ и $B_n(s)$ определяются из граничных условий. Из представлений (3.19) и соотношений (2.4) следует, что искомые функции на поверхности полупространства представляются в виде рядов по системе собственных функций задачи.

$$u_z(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{zn}(t) \cos \lambda_n x \quad (3.20)$$

$$u_x(t, x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{xn}(t) \sin \lambda_n x \quad (3.21)$$

$$\sigma_{zz}(t, x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zn}(t) \cos \lambda_n x \quad (3.22)$$

$$\sigma_{zx}(t, x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zxn}(t) \sin \lambda_n x \quad (3.23)$$

Так же, как в [1–5] определяется зависимость между гармониками вертикальной составляющей скорости и нормальных напряжений на поверхности полупространства [6–8, 10]:

$$\sigma_{zn}(t) = -\alpha \left(V_n(t) + \int_0^t V_n(\tau) F(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned}F_n(t) &= -\alpha \lambda_n J_1(\alpha \lambda_n t) + 2b \beta \lambda_n \left\{ \beta^2 \lambda_n^2 t^2 (\bar{J}_0(\alpha \lambda_n t) - \bar{J}_0(\beta \lambda_n t)) - J_1(\alpha \lambda_n t) + J_1(\beta \lambda_n t) \right\} \\ &\quad + \beta \lambda_n t (b J_0(\alpha \lambda_n t) - J_0(\beta \lambda_n t)) + (2 - b^2) \bar{J}_0(\alpha \lambda_n t) - \bar{J}_0(\beta \lambda_n t)\end{aligned}$$

Здесь $J_0(t)$, $J_1(t)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно, а функцию $\bar{J}_0(t)$ определим так: $\bar{J}_0(t) = \int_0^t J_0(\tau) d\tau$.

Далее, удовлетворим смешанным граничным условиям (2.11). Из (2.11), (3.24) и получим следующее представление для вертикальной составляющей скорости на поверхности полупространства:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \cos \lambda_n x &= H(x^* - |x|) \{ v_T(t) - \dot{w}_0(t, \theta) \cos \theta - \dot{u}_0(t, \theta) \sin \theta \} - \\ &\quad - H(|x| - x^*) \sum_{n=0}^{\infty} \cos \lambda_n x \int_0^t V_n(\tau) F_n(t - \tau) d\tau\end{aligned}\quad (3.25)$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.25) с учетом $x = \sin \theta$, вытекающим из геометрических соображений в области контакта, и представляя обе части (3.25) в виде рядов по $\cos \lambda_n x$, получим бесконечную систему интегральных уравнений (БСИУ) Вольтерра

второго рода (3.26) относительно неизвестных гармоник скорости на поверхности полупространства ($n = 0, \infty$):

$$V_n(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(1)}(x^*) \int_0^t V_m(\tau) F_m(t - \tau) d\tau + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\alpha_{mn}^{(2)}(x^*) \dot{w}_{0m}(t) + \alpha_{mn}^{(3)}(x^*) \dot{u}_{0m}(t) \right] \times \\ \times \int_0^t V_m(\tau) F_m(t - \tau) d\tau = C_n(x^*) v_T(t) \quad (3.26)$$

где

$$\alpha_{mn}^{(1)}(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_{x^*}^l \cos \lambda_m x \cos \lambda_n x dx, \quad \alpha_{mn}^{(2)}(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{x^*} \sqrt{1 - x^2} D_{1m}(x) \cos \lambda_n x dx \\ \alpha_{mn}^{(3)}(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{x^*} x B_{1m}(x) \cos \lambda_n x dx, \quad C_n(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{x^*} \cos \lambda_n x dx, \quad N_n^2 = \int_0^l \cos^2 \lambda_n x dx \\ D_{1m}(x) = \cos(m\pi/2) T_m(x) + \sin(m\pi/2) U_m(x) \\ B_{1m}(x) = \sin(m\pi/2) T_m(x) - \cos(m\pi/2) U_m(x)$$

Здесь $T_m(x)$ и $U_m(x)$ — полиномы Чебышева первого и второго рода.

Функции $\dot{w}_{0m}(t)$, $\dot{u}_{0m}(t)$ и $\dot{\Phi}_n(t)$ определяются из соотношений (3.12)–(3.15), однако в них фигурируют неизвестные функции $p_n(t)$ и $q_n(t)$. Займемся их исключением, для этого используем условия (2.7), (2.8), которые можно переписать, используя (3.24) в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cos n\theta = \alpha H(\theta^* - |\theta|) \cos \theta \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda_n \sin \theta) \left(V_n(t) + \int_0^t V_n(\tau) F_n(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.27)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \sin n\theta = \alpha H(\theta^* - |\theta|) \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda_n \sin \theta) \left(V_n(t) + \int_0^t V_n(\tau) F_n(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.28)$$

Используя ортогональность функций $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$, получим соотношения, устанавливающие связь между гармониками разложений в ряды функций p , q и V :

$$p_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{mn}^{(1)}(\theta^*) \left(V_m(t) + \int_0^t V_m(\tau) F_m(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.29)$$

$$q_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{mn}^{(2)}(\theta^*) \left(V_m(t) + \int_0^t V_m(\tau) F_m(t - \tau) d\tau \right) \quad (3.30)$$

где

$$\gamma_{mn}^{(1)}(\theta^*) = \frac{\alpha}{\bar{N}_n^2} \int_0^{\theta^*} \cos \theta \cos n\theta \cos(\lambda_m \sin \theta) d\theta \\ \gamma_{mn}^{(2)}(\theta^*) = \frac{\alpha}{\tilde{N}_n^2} \int_0^{\theta^*} \sin \theta \sin n\theta \cos(\lambda_m \sin \theta) d\theta \\ \bar{N}_n^2 = \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta d\theta, \quad \tilde{N}_n^2 = \int_0^{\pi} \sin^2 n\theta d\theta$$

Таким образом, окончательный вид разрешающей БСИУ Вольтерра второго рода будет следующий:

$$\begin{aligned}
& V_n(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(1)}(x^*) \int_0^t V_m(\tau) F_m(t - \tau) d\tau + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(2)}(x^*) \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \gamma_{km}^{(1)}(\theta^*(\tau)) \left(V_k(\tau) + \int_0^{\tau} V_k(\xi) F_k(\tau - \xi) d\xi \right) Q_{11}(m, t - \tau) d\tau + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(2)}(x^*) \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \gamma_{km}^{(2)}(\theta^*(\tau)) \left(V_k(\tau) + \int_0^{\tau} V_k(\xi) F_k(\tau - \xi) d\xi \right) Q_{12}(m, t - \tau) d\tau + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(3)}(x^*) \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \gamma_{km}^{(1)}(\theta^*(\tau)) \left(V_k(\tau) + \int_0^{\tau} V_k(\xi) F_k(\tau - \xi) d\xi \right) Q_{21}(m, t - \tau) d\tau + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(3)}(x^*) \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \gamma_{km}^{(2)}(\theta^*(\tau)) \left(V_k(\tau) + \int_0^{\tau} V_k(\xi) F_k(\tau - \xi) d\xi \right) Q_{22}(m, t - \tau) d\tau = \\
& = C_n(x^*) v_T(t). \quad (n = \overline{0, \infty})
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Для решения задачи, когда скорость проникания оболочки $v_T(t)$ – наперед заданная функция, достаточно численно реализовать уравнения (3.31).

Выражение для силы реакции упругого полупространства (2.15), используя (3.24) перепишем в виде:

$$P(t) = -2 \int_0^{x^*(t)} \sigma_{zz}(t, x, 0) dx = 2\alpha \left\{ v_T(t) x^*(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x^*}{\lambda_n} \int_0^t V_n(\tau) F_n(t - \tau) d\tau \right\} \tag{3.32}$$

Уравнение движения оболочки (2.13) с начальными условиями принимает вид:

$$M \frac{dv_T(t)}{dt} = -2\alpha \left\{ v_T(t) x^*(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n x^*}{\lambda_n} \int_0^t V_n(\tau) F_n(t - \tau) d\tau \right\} \tag{3.33}$$

Для решения задачи удара с начальной скоростью V_0 , систему уравнений (3.32) необходимо дополнить уравнением движения (3.33).

Область контакта определяется с учетом подъема среды из условия:

$$\begin{aligned}
& \delta_{1j} v_T t + \delta_{2j} \int_0^t v_T(\tau) d\tau - f(x^*) - \sum_{n=0}^{\infty} \cos \lambda_n x^* \int_0^t V_n(\tau) d\tau - \\
& - \sqrt{1 - x^{*2}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n \arcsin x^*) \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t [\gamma_{mn}^{(1)}(\arcsin x^*(\tau)) \tilde{G}_{11}(n, t - \tau) + \\
& + \gamma_{mn}^{(2)}(\arcsin x^*(\tau)) \tilde{G}_{12}(n, t - \tau)] \left(V_m(\tau) + \int_0^{\tau} V_m(\xi) F_m(\tau - \xi) d\xi \right) d\tau - \\
& - x^* \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n \arcsin x^*) \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t [\gamma_{mn}^{(1)}(\arcsin x^*(\tau)) \tilde{G}_{21}(n, t - \tau) + \\
& + \gamma_{mn}^{(2)}(\arcsin x^*(\tau)) \tilde{G}_{22}(n, t - \tau)] \left(V_m(\tau) + \int_0^{\tau} V_m(\xi) F_m(\tau - \xi) d\xi \right) d\tau \begin{cases} = 0, & |x| < x^*(t) \\ < 0, & |x| > x^*(t) \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

здесь $\delta_{ij} = \{0, \text{если } i \neq j; 1, \text{если } i = j\}$ – символ Кронекера. Индекс $j = 1$ соответствует случаю, когда тело проникает в среду со скоростью, изменяющейся по наперед заданному закону (постановка 1); если скорость проникающего тела известна только в начальный момент времени $t = 0$, а в последующие моменты определяется из уравнения

движения (постановка 2), тогда $j = 2$. Если в соотношении (3.34) исключить четвертое слагаемое, то получим условие, из которого определяется граница области контакта без учета подъема среды.

4. Численная реализация. Для расчетов были выбраны стальная оболочка и алюминиевое и стальное полупространства. Порядок редукции N БСИУ Вольтерра второго рода будем выбирать из соображений практической сходимости. Для сглаживания осцилляций, возникающих при суммировании конечного числа членов ряда, а также явлений Гиббса вблизи точек слабого разрыва, применялась операция усреднения, определенная в [1–5], состоящая, в случае суммы конечного числа членов тригонометрического ряда, к почленному умножению членов конечной суммы на σ_n — множителю Ланцоша (4.1) [7, 8, 10].

$$\sigma_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0 \\ \frac{\sin(n\pi/N)}{n\pi/N}, & \text{если } n \neq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Для вычисления интегралов применялся метод механических квадратур, в частности симметричная квадратурная формула Грегори для равноотстоящих узлов. Задача Коши для дифференциального уравнения (3.33) решалась методом Адамса (формулы замкнутого типа) [1–5] порядка m_1 с локальной ошибкой усечения $O(\Delta t^{m_1+1})$ [6–8, 10]. В результате дискретизации получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Расчеты показали, что с увеличением порядка редукции N определитель матрицы СЛАУ неограниченно увеличивается. СЛАУ является плохо определенной: при стремлении в бесконечность порядка редукции N значение определителя матрицы СЛАУ тоже стремится в бесконечность. Это происходит из-за того, что по параметру n ядра $Q_{11}(n, t)$, $Q_{22}(n, t)$ в (3.19), (3.20) имеют асимптотику $\exp(O(n))$, а $\tilde{Q}_{11}(n, t)$ и $\tilde{Q}_{22}(n, t)$ в (3.22) и (3.23) имеют асимптотику $O(1/n) \exp(O(n))$. Методы регуляризации Тихонова и ортогональных многочленов не дают возможности нейтрализовать такую экспоненциальную особенность. Подход [1–5] для решения задач динамики не дает возможности исследовать удар упругих оболочек типа С.П. Тимошенко и упругих тел об упругое основание [6–8, 10]. Кроме этого, этот подход дает возможность определять напряженно деформированное состояние только на поверхности среды, в которую проникает ударник.

Заключение. В результате попытки решить плоскую задачу удара цилиндрической оболочки типа С.П. Тимошенко о поверхность упругого полупространства, применяя методику [1–5], была выявлена ограниченность этой методики. Данная методика не позволяет решать плоские задачи динамики для уточненных оболочек типа С.П. Тимошенко и упругих тел.

Удобно и целесообразно использовать методику [1–8, 10] для решения задач динамики для калибровки вычислительного [1] процесса в упругопластической постановке на упругом этапе, которая применялась для решения [9, 11–14] задач удара и нестационарного взаимодействия [15–22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богданов В.Р. Impact a circular cylinder with a flat on an elastic layer // Transfer of Innovative Technologies. 2018. V. 1 (2). P. 68–74.
<https://doi.org/10.31493/tit1812.0302>
2. Богданов В.Р. Impact of a hard cylinder with flat surface on the elastic layer // Underwater Technologies. 2017. V. 5. P. 8–15.
3. Богданов В.Р., Левицкая Е.Р., Приходько Т.Б., Радзивил Е.Ю., Самборская Л.Р. Дослідження плоского удару оболонки об пружний шар // Вісник Національного транспортного університету. 2009. № 19. С. 283–292.

4. Кубенко В.Д., Богданов В.Р. Плоская задача удара оболочек об упругое полупространство // Прикл. механика. 1995. 31. № 6. С. 78–86.
5. Кубенко В.Д., Богданов В.Р. Осесимметричная задача удара оболочек об упругое полупространство // Прикл. механика. 1995. Т. 31. № 10. С. 56–63.
6. Кубенко В.Д., Попов С.Н., Богданов В.Р. Удар упругой цилиндрической оболочки о поверхность упругого полупространства // Доповіді НАН України. 1995. № 7. С. 40–44.
7. Кубенко В.Д., Попов С.Н. Плоская задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 7. С. 69–77.
8. Попов С.Н. Вертикальный удар жесткого кругового цилиндра боковой поверхностью об упругое полупространство // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 12. С. 41–47.
9. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Определение вязкости разрушения материала с использованием расчета пространственного упругопластического динамического деформирования // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 87–99.
10. Богданов В.Р. Плоска задача про удар жорсткого циліндра об пружний шар // Вісник Києвск. нац. унів. Мех. Мат. 2015. № 34. С. 42–47.
11. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Плоская деформация упругопластического материала с профилем формы компактного образца (динамическое нагружение) // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 111–120.
12. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделирование роста пластических деформаций при ударе на основе численного решения задачи плоского напряженного состояния // Вестник МАИ. 2013. Т. 20. № 3. С. 196–201.
13. Богданов В.Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісник Київського ун-ту. 2009. № 2. С. 51–56.
14. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Плоский деформований стан матеріалу з нерухомою тріщиною із врахуванням процесу розвантаження // Математичні методи і фізико механічні поля. Львів. 2012. 55. № 3. С. 132–138.
15. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісник Київського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. 2010. № 4. С. 51–54.
16. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану // Вісник Львівського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. 2010. Вып. 73. С. 192–204.
17. Bohdanov V.R., Sulym H.T. Evaluation of crack resistance based on the numerical modelling of the plane strained state // Mater. Sci. 2011. V. 46. № 6. P. 723–734.
<https://doi.org/10.1007/s11003-011-9346-0>
18. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделирование подрастания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния // 36. наукових праць “Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій”. Дніпропетровськ. 2011. № 15. С. 33–44.
19. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Международный научно-технический сборник “Надежность и долговечность машин и сооружений”. 2010. № 33. С. 153–166.
20. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Просторове моделювання процесу підростання тріщини на основі числового розв'язування 36. наукових праць “Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій”. Дніпропетровськ. 2012. № 19. С. 10–19.
21. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделювання руху тріщини у компактному зразку на основі числового розв'язування просторової задачі // Збірник наукових праць “Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла”. Дніпропетровськ. 2012. № 13. С. 60–68.
22. Богданов В.Р. О пространственной деформации упругопластического материала с профилем формы компактного образца // Теоретическая и прикладная механика. Донецьк. 2011. № 3 (49). С. 51–58.
23. Федотенков Г.В. Удар цилиндрической оболочки по упругой полуплоскости. М.: МАИ, 2001. 100 с.
24. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия физ.-мат. науки. 2018. 160. № 3. С. 561–577.

25. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д., Федотенков Г.В. Нестационарное напряженно-деформированное состояние композитной цилиндрической оболочки // Механика композиционных материалов и конструкций. 2020. 26. № 4. С. 544–559.
https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2020.26.04.544_559.08
26. Вестяк А.В., Игуменов Л.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Воздействие нестационарного давления на тонкую сферическую оболочку с упругим наполнителем // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 4. С. 443–452.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.37>
27. Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Произвольный этап нестационарного контактного взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2012. № 20. С. 19–26.
28. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Труды МАИ. 2014. № 78. С. 1–26.
29. Игуменов Л.А., Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная задача о движении поверхностной нагрузки по упругому полупространству // Мат. методы физ.-мех. поля. 2013. Т. 56. № 2. С. 157–163.
30. Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Медведский А.Л. Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Труды МАИ. 2013. № 71. С. 1–21.
31. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii J. Math. 2019. 40. № 4. P. 439–447.
<https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>
32. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length // J. Appl. Eng. Sci. 2020. 18. № 4. P. 687–692.
<https://doi.org/10.5937/jaes0-28073>
33. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995. 352 с.
34. Сагомонян А.Я. Удар и проникание тел в жидкость. М.: МГУ, 1986. 169 с.
35. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). 4-е издание. М.: Наука, 1977. 830 с. = Korn G., Korn T. Mathematical handbook: For scientists and engineers. N.Y.: McGraw Hill, 1968