

УДК 539.4

**СВЯЗАННАЯ ТЕРМОУПРУГОСТЬ ГЕМИТРОПНЫХ СРЕД.
ПСЕВДОТЕНЗОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА**

© 2023 г. Е. В. Мурашкин^{a,*}, Ю. Н. Радаев^{a,**}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: evmurashkin@gmail.com

**e-mail: radayev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.01.2023 г.

После доработки 22.01.2023 г.

Принята к публикации 23.01.2023 г.

В статье рассматривается проблема вывода определяющих уравнений для микрополярного термоупругого континуума GN-I в специфике стандартного псевдотензорного формализма. Псевдотензорный подход в большинстве случаев оправдан при моделировании гемитропных микрополярных тел, термомеханические свойства которых чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства. Приводятся минимально необходимые для понимания сведения из теории псевдотензоров. Привлекаются общие термодинамические подходы, обсуждаются уравнения баланса энтропии и различные формы баланса внутренней и свободной энергии Гельмгольца. Устанавливаются веса основных термомеханических псевдотензоров. В линейном приближении выводятся определяющие уравнения гемитропного микрополярного термоупругого континуума (GN-I) первого типа. В линейном приближении получена связанная система дифференциальных уравнений теплопроводности и динамических уравнений микрополярного термоупругого континуума GN-I.

Ключевые слова: псевдотензор, термодинамический потенциал, связанная термоупругость, теплопроводность, микроповорот, перемещение, микрополярный гемитропный континуум

DOI: 10.31857/S0572329922600876, EDN: JMQVBJ

1. Введение. Изучение термомеханических свойств современных конструкционных материалов и метаматериалов [1–6] оказывается возможным в результате синтеза аппарата современной термодинамики [7–9] и микроструктурных представлений [10–12]. Большинство биоматериалов и метаматериалов с точки зрения их термомеханических свойств чувствительны к преобразованиям, изменяющим ориентацию пространства¹, например, зеркальным отражениям и инверсиям пространства². Однако, следует понимать, что определяющие тензоры и определяющие постоянные линейных изотропных микрополярных сред не проявляют чувствительность к указанным преобразованиям. Наиболее простой моделью, с определяющими псевдоскалярами, чувствительными к упомянутым преобразованиям пространства, оказывается гемитропная микрополярная среда, задающаяся девятью определяющими псевдоскалярами.

¹ Мы считаем, что ориентация трехмерного пространства задается с помощью знака фундаментального ориентирующего псевдоскаляра sgn . [13, 14].

² Под инверсией трехмерного пространства мы подразумеваем преобразование координатного репера, сопоставляющее координатам их противоположные значения.

Термодинамические процессы, протекающие в термодинамических системах, с точки зрения математической модели определяются эволюцией параметров состояния³, составляющих термодинамический базис. Термодинамические процессы можно условно разделить на равновесные и неравновесные. Равновесным называется такой термодинамический процесс, при котором все состояния, через которые последовательно эволюционирует система, с достаточной степенью точности являются равновесными состояниями, т.е. когда все термодинамические характеристики чрезвычайно близки к своим средним значениям⁴. К таким процессам можно отнести медленно протекающие процессы, когда время релаксации достаточно мало, по сравнению с характерным временем перехода между двумя соседними равновесными состояниями. В этом случае процессы чаще всего рассматриваются как квазистатические, поскольку для динамических процессов высказанные условия в большинстве случаев нарушаются.

Кроме того, термодинамические процессы, можно разделить на обратимые и необратимые. Обратимым называется такой термодинамический процесс, для любых двух состояний которого фактически реализуются термодинамические процессы как в прямом, так и в обратном направлениях. Поясним сказанное на двух простых примерах. Рассмотрим в качестве примера модель атермической деформации цилиндрического упругопластического образца до и за пределом упругости (см. рис. 1). При значениях силовой нагрузки, ниже предела упругости σ_E , что на рисунке соответствует точкам кривой между состояниями 1 и 2, термодинамический процесс будет обратимым и разгрузка образца вернет процесс к начальному состоянию 1 [17]. При нагружении образца выше предела текучести (состояния 3 и 4) образец начнет проявлять неупругие свойства и процесс разгрузки пойдет по пути 4–5, а не вернется в состояние 1 по траектории 4 – 3 – 2 – 1, что означает необратимость процесса 1–4. В термодинамически необратимых процессах наблюдается неконтролируемое (неуправляемое, самопроизвольное) производство энтропии (uncontrollable entropy production).

Для описания состояния термодинамической системы используются функции, функционально зависящие от базиса термодинамических переменных (параметров состояния: энтропия, деформация, температура), и термодинамические потенциалы состояния (внутренняя энергия, свободная энергия Гельмгольца и другие энергетические формы).

Термодинамический подход к исследованию процессов деформирования микрополярных материалов использовался, например, в работах [10–12] и работах авторов [6, 18, 19], где проводится построение определяющих уравнений для упругих микрополярных материалов в терминах абсолютных тензоров. Однако, построение определяющих уравнений и термодинамических потенциалов для гемитропных микрополярных термоупругих сред на корректной основе требует привлечения аппарата алгебры псевдотензоров (см., например, [14, 20, 21]).

В настоящей работе обсуждаются вопросы вывода определяющих соотношений для микрополярного термоупругого континуума GN-I в терминах псевдотензоров. Приводятся (правда, в минимальной степени) основные понятия алгебры и анализа псевдотензоров [22–28]. Обсуждаются уравнения баланса энтропии и различные формы баланса внутренней и свободной энергии Гельмгольца. Вычисляются веса основных термомеханических величин. В линейном приближении выводятся определяющие уравнения гемитропного микрополярного связанного термоупругого континуума GN-I.

2. Псевдотензоры в трехмерном евклидовом пространстве. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство⁵. Выберем в пространстве криволинейную систему координат

³ В книге Л.И. Седова [15] упомянутые параметры обозначены через μ_j .

⁴ Данные представления характерны для курса “Теоретической физики” Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица [16].

⁵ Трехмерность пространства существенна для всех дальнейших рассуждений.

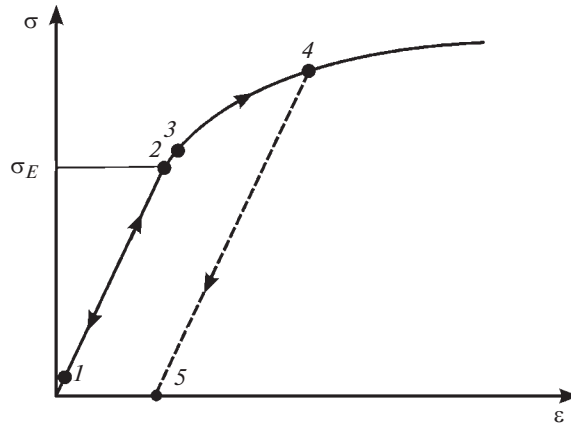


Рис. 1. Одноосное растяжение образца за предел текучести.

нат x^k ($k = 1, 2, 3$). Метрика пространства задается квадратом линейного элемента длины согласно

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{2.1}$$

где g_{ij} – компоненты метрического тензора. Компоненты фундаментального тензора g^{ij} связаны с метрическим тензором соотношением

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i \tag{2.2}$$

И метрический, и фундаментальный тензоры являются абсолютными (истинными) тензорами. То же самое относится к символу Кронекера δ_k^i .

Введем в рассмотрение локальные базисные триэдры, связанные с выбранной координатной системой в трехмерном пространстве: $\underset{a}{\boldsymbol{z}}$ ($a = 1, 2, 3$) – локальный ковариантный базис;

$\underset{b}{\boldsymbol{z}}$ ($b = 1, 2, 3$) – локальный контравариантный (взаимный) базис.

Базисные векторы и взаимные базисные векторы удовлетворяют следующему соотношению:

$$\underset{a}{\boldsymbol{z}} \cdot \underset{b}{\boldsymbol{z}} = \delta_a^b \quad (a = 1, 2, 3; b = 1, 2, 3)$$

Метаиндексы a и b (в отличие от тензорных индексов) записываются шрифтом “fraktur”.

С ориентацией локальных базисов связан фундаментальный объект псевдотензорной алгебры и многомерной геометрии – символы перестановок [23–25], которые не являются абсолютными тензорами и определяются согласно соотношениям:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{для троек } (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1, & \text{для троек } (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3) \\ -0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases} \tag{2.3}$$

Заметим, что ϵ -символы нарушают основные правила тензорного формализма, что видно уже по (2.3). Символы перестановок ϵ_{ijk} и ϵ^{ijk} являются относительными ковариантными тензорами (псевдотензорами) веса -1 (w.g.t. = -1) и одновременно – от-

носительными контравариантными тензорами веса +1 (w.g.t. = +1), поэтому было бы корректно использовать для них следующие обозначения:

$$\epsilon^{[-1]}_{ijk}, \quad \epsilon^{[+1]}_{ijk}$$

Далее сверху корневого символа относительного тензора в квадратных скобках будем отмечать его вес. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, не отражается нами в обозначениях.

Введем в рассмотрение ориентирующее трехмерное пространство псевдоскаляр (относительный скаляр веса +1 (w.g.t. = +1)), представляющий собой смешанное произведение базисных векторов:

$$e = e^{[+1]} = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 \quad (2.4)$$

и относительный скаляр отрицательного веса -1 (w.g.t. = -1):

$$\frac{1}{e} = e^{[-1]} = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 \quad (2.5)$$

Обратим внимание, что псевдоскаляр (2.4) с точностью до знака совпадает с объемом параллелепипеда, построенного на базисных векторах \mathbf{e}_i . Нетрудно показать, что в евклидовом пространстве справедливо равенство

$$e^2 = g > 0 \quad (2.6)$$

где g – детерминант метрического тензора. Условие $g = 1$ ($|e| = 1$) является фундаментальным для развития общей теории относительности [29] и, например, математической теории пластичности [30]. Важно отметить, что в этом случае абсолютные тензоры совпадают с псевдотензорами с точностью до знака, учитывая уравнение (2.8) получим

$$T^{h_1 h_2 \dots h_s \dots}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r} = (\text{sgn } e)^{-g} T^{[g]}_{h_1 h_2 \dots h_s \dots}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r} \quad (2.7)$$

Откуда следует, что псевдотензоры меняют свой знак на противоположный при изменении ориентации координатного репера если их вес нечетный. Подчеркнем, что $e > 0$ для правоориентированной координатной системы, $e < 0$ для левоориентированной координатной системы.

Псевдотензор $T^{[g]}_{h_1 h_2 \dots h_s \dots}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}$ веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней фундаментального ориентирующего псевдоскаляра можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$T^{[g]}_{h_1 h_2 \dots h_s \dots}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r} = e^{-g} T^{[g]}_{h_1 h_2 \dots h_s \dots}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r} \quad (2.8)$$

В дальнейшем изложении у фундаментальных символов, таких как e и g , указание на их вес будем опускать.

Ковариантная производная псевдотензорного поля $T^{[g]}_{h_1 h_2 \dots h_s \dots}_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}$ была введена О. Вебленом [26, 27] и вычисляется согласно [14, 24]:

$$\begin{aligned} \nabla_p \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} = & \partial_p \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} + \Gamma_{qp}^{h_1} \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{q h_2 \dots h_s} + \dots + \Gamma_{qp}^{h_s} \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots q} - \\ & - \Gamma_{k_1 p}^q \overset{[g]}{T}_{(n)\dots q k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} - \dots - \Gamma_{k_r p}^q \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots q}^{h_1 h_2 \dots h_s} - \overset{[g]}{g} \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r} \Gamma_{qp}^q \end{aligned} \quad (2.9)$$

В частности, для псевдоскаляра ковариантная производная, независимо от веса g , примет вид

$$\nabla_p \overset{[g]}{T} = \partial_p \overset{[g]}{T} - g \overset{[g]}{T} \Gamma_{sp}^s \quad (2.10)$$

где

$$\Gamma_{sp}^s = \frac{\partial_p e}{e}$$

Учитывая свойства символов Кристоффеля Γ_{sp}^s и соотношение (2.6), получим выражение для ковариантной производной (2.10)

$$\nabla_p \overset{[g]}{T} = \partial_p \overset{[g]}{T} - e^{-1} \overset{[g]}{g} T \partial_p e \quad (2.11)$$

Однако, существуют альтернативные подходы реализации ковариантного дифференцирования псевдотензора. Определим ковариантную производную псевдотензора произвольного ранга и целого веса g с помощью соотношения:

$$\nabla_p \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} = e^g \nabla_p (e^{-g} \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s}) \quad (2.12)$$

Кроме того, реализовать ковариантное дифференцирование псевдотензора с целым положительным весом ($g > 0$) можно с помощью символов перестановок согласно правилу⁶

$$\begin{aligned} \nabla_p \overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} = & (N!)^{-g} \underbrace{\epsilon^{[+1] k_{r+1} \dots k_{r+N}} \dots \epsilon^{[+1] k_{r+(g-1)N+1} \dots k_{r+Ng}}}_{g} \times \\ & \times \nabla_p \left(\overset{[g]}{T}_{(n)\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{h_1 h_2 \dots h_s} \underbrace{\epsilon^{[-1] k_{r+1} \dots k_{r+N}} \dots \epsilon^{[-1] k_{r+(g-1)N+1} \dots k_{r+Ng}}}_{g} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Все три вида реализации ковариантной производной (2.9), (2.12) и (2.13) являются эквивалентными, что было продемонстрировано в работе [31].

3. Термодинамические потенциалы состояния для гемитропных микрополярных термоупругих сред GN-I. Введем в рассмотрение внутреннюю энергию u в расчете на единицу массы. Понятие внутренней энергии, как физической величины, характеризующей элементарную термодинамическую систему, подробно обсуждается в классической монографии [16, С. 25–28]. Стандартное статистическое определение внутренней энергии элементарной термодинамической системы можно найти там же [16, с. 103–105]. В статистической физике во внутреннюю энергию системы включают энергию разных видов движения и взаимодействия входящих в систему частей: энергию поступательного, вращательного и колебательного движений атомов и молекул, энергию внутри- и межмолекулярного взаимодействия, энергию электронных оболочек атомов и др. В этом случае внутренняя энергия трактуется как физическая величина.

Помимо трактовки u как физической величины, связанной с элементарной термодинамической системой, в механике континуума ее приходится рассматривать как непрерывное физическое поле (physical field), поскольку континуум является объедине-

⁶ Антологичное правило справедливо, если целый вес отрицателен, т.е. $g < 0$.

нием элементарных термодинамических систем. В механике континуума значение u как физической величины не представляет интереса ни в теоретическом, ни в прикладном плане. Подлинный интерес представляет трактовка внутренней энергии как термодинамического потенциала состояния, т.е. как однозначной, непрерывной и ограниченной снизу функции базиса термодинамических переменных (параметров состояния). Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния. Например \bar{u} означает, что внутренняя энергия u рассматривается как термодинамический потенциал состояния, зависящий от некоторого конечного набора базисных термодинамических переменных (параметров состояния). В термомеханике микрополярных континуумов имеем:

- s – энтропия в расчете на единицу массы (абсолютный скаляр);
- $\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \epsilon_{ijk} \phi^{[+1]k}$ – асимметричный тензор деформации;
- $\kappa_{i.}^{[+1]j} = \nabla_i \phi^{[+1]j}$ – псевдотензор деформации изгиба–кручения.

Поворот ϕ^j может трактоваться двояко: либо как ковариантный псевдовектор отрицательного веса $\phi_{j}^{[-1]}$, либо как контравариантный псевдовектор положительного веса $\phi^{[+1]j}$. В настоящей работе в качестве псевдовектора поворота мы будем использовать контравариантный псевдовектор положительного веса $\phi^{[+1]j}$. Перечисленные выше переменные мы считаем образующими термодинамический базис в случае микрополярного термоупругого континуума GN-I.

Все сказанное выше можно выразить следующим уравнением:

$$u = \bar{u}(s, \epsilon_{ij}, \kappa_{i.}^{[+1]j}) \quad (3.1)$$

Фундаментальным утверждением (3.1) постулируется равенство физического значения внутренней энергии u (абсолютного скаляра, не зависящего от зеркальных отражений и инверсий трехмерного пространства) и значения функциональной зависимости \bar{u} .

Сопряженной к энтропии величиной в термодинамике выступает термодинамическая температура (абсолютная температура). Термодинамическая температура может вводиться статистически, как модуль канонического распределения Гиббса [16, с. 104–105]. В термомеханике континуума абсолютная температура θ (абсолютный скаляр) определяется как функция параметров термодинамического состояния и вычисляется как частная производная потенциальной функции (3.1) по энтропии s , т.е.

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}(s, \epsilon_{ij}, \kappa_{i.}^{[+1]j})}{\partial s} \quad (3.2)$$

Формула (3.2) наглядно демонстрирует отличие u от \bar{u} . В работах некоторых авторов [8, 7] приоритет отдается обратной к температуре величине $\frac{1}{\theta}$ – холодности (coldness).

Уравнение баланса внутренней энергии для линейных микрополярных теорий, как хорошо известно, имеет следующий вид

$$\rho \partial_t u = \rho^{ij} \partial_j \epsilon_{ij} + \mu_{i.}^{[-1]k} \partial_k \kappa_{i.}^{[+1]k} + \rho q - \nabla_i h^i \quad (3.3)$$

Здесь ∂ – производная по времени при фиксированных координатах x^k , t^{ik} – тензор силовых напряжений, ρ – массовая плотность (абсолютный скаляр), $\mu_{\cdot k}^{[-1]i}$ – псевдо-тензор моментных напряжений, q – лучистое тепло (абсолютный скаляр), h^i – абсолютный вектор потока тепла. В приближении малых деформаций мы считаем $\dot{a} = \partial a$.

В конвенциональном виде уравнение баланса энтропии примем

$$\rho \dot{s} = -\nabla_j J^j + \rho \sigma + \rho \xi \quad (3.4)$$

где J^j – абсолютный вектор потока энтропии, ξ – неконтролируемое производство энтропии⁷ (в единицу времени в расчете на единицу массы), σ – контролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы). Отметим, что ξ и σ являются абсолютными скалярами.

В термомеханике широко используется еще один термодинамический потенциал – свободная энергия Гельмгольца. Минус статистический смысл свободной энергии, приписывая ей отрицательный знак, введем с помощью преобразования Лежандра внутренней энергии

$$-\bar{\psi}(\theta, \epsilon_{ij}, \kappa_{\cdot i}^{\cdot j}) = \theta s - \bar{u}(s, \epsilon_{ij}, \kappa_{\cdot i}^{\cdot j}), \quad \theta = \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \quad (3.5)$$

Преобразование Лежандра и его основные свойства подробно обсуждаются в монографии [30, с. 155–157].

На основании инволютивности преобразования Лежандра, получим

$$\bar{u}(s, \epsilon_{ij}, \kappa_{\cdot i}^{\cdot j}) = \theta s - (-\bar{\psi}(\theta, \epsilon_{ij}, \kappa_{\cdot i}^{\cdot j})), \quad s = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \quad (3.6)$$

откуда следует

$$s = \bar{s}(\theta, \epsilon_{ij}, \kappa_{\cdot i}^{\cdot j}), \quad \bar{s} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \quad (3.7)$$

4. Определяющие уравнения гемитропного микрополярного термоупругого континуума GN-I. Уравнение баланса свободной энергии можно получить подстановкой соотношений (3.4) и (3.5) в уравнение (3.3). В результате несложных преобразований получим

$$-\rho(\partial \psi + s \partial \theta) + t^{ij} \partial \epsilon_{ij} + \mu_{\cdot k}^{[-1]i} \partial \kappa_{\cdot i}^{\cdot k} - J^j \nabla_j \theta + \nabla_j (\theta J^j - h^j) + \rho(q - \sigma \theta) = \rho \xi \theta \quad (4.1)$$

В предположении

$$\theta J^j = h^j, \quad \sigma \theta = q \quad (4.2)$$

уравнение (4.1) преобразуется к одной из приведенных форм

$$-\rho(\partial \psi + s \partial \theta) + t^{ij} \partial \epsilon_{ij} + \mu_{\cdot k}^{[-1]i} \partial \kappa_{\cdot i}^{\cdot k} - \theta^{-1} h^j \nabla_j \theta = \rho \xi \theta \quad (4.3)$$

Для необратимых термодинамических процессов справедливо следующее фундаментальное неравенство:

$$C \partial \theta + A^{ij} \partial \epsilon_{ij} + B_{\cdot k}^{[-1]i} \partial \kappa_{\cdot i}^{\cdot k} + \theta^{-1} h^j \nabla_j \theta = -\rho \xi \theta \leq 0 \quad (4.4)$$

где

⁷ Например за счет лучистого тепла (radiant heat).

$$\begin{aligned}
C &= \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{s}} + \rho \bar{s} \\
A^{ij} &= \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon_{ij}} - t^{ij} \\
B_{\cdot k}^{[-1] i} &= \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \kappa_{\cdot k}^{[+1] i}} - \mu_{\cdot k}^{[-1] i}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Откуда следуют определяющие соотношения

$$\begin{aligned}
\bar{s} &= -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \\
t^{ij} &= \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \epsilon_{ij}} \\
\mu_{\cdot k}^{[-1] i} &= \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \kappa_{\cdot k}^{[+1] i}}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$J^j = \bar{J}^j (\nabla_k \ln \theta)$$

Для неконтролируемого производства энтропии справедливо уравнение

$$\rho \xi = -\theta^{-2} h^j \nabla_j \theta = -\theta^{-1} J^j \nabla_j \theta = -\bar{J}^j (\nabla_k \ln \theta) \nabla_j \ln \theta, \quad \inf \theta > 0 \tag{4.7}$$

На основании уравнения баланса энтропии (3.4) при учете (4.6) получаем нелинейное уравнение теплопроводности

$$\rho \frac{\partial \bar{s}}{\partial \epsilon_{ij}} \partial_j \epsilon_{ij} + \rho \frac{\partial \bar{s}}{\partial \kappa_{\cdot k}^{[+1] i}} \partial_j \kappa_{\cdot k}^{[+1] i} + \rho \frac{\partial \bar{s}}{\partial \theta} \partial_j \theta = -\theta^{-1} \nabla_j h^j + \theta^{-1} \rho q \tag{4.8}$$

Линеаризованную по базисным термодинамическим переменным, свободную энергию для микрополярного термоупругого континуума GN-I можно принять в форме

$$2\rho \bar{\Psi} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{[-2] i \cdot l \cdot} \kappa_{\cdot s \cdot m}^{[+1] i \cdot} \kappa_{\cdot l \cdot}^{[+1] i \cdot} + H_3^{[-1] isl \cdot} \epsilon_{is} \kappa_{\cdot l \cdot}^{[+1] i \cdot} + G_1^{is} \epsilon_{is} \theta + G_2^{[-1] i \cdot} \kappa_{\cdot s \cdot}^{[+1] i \cdot} \theta + F \theta^2 \tag{4.9}$$

Здесь H_1^{islm} , $H_2^{[-2] i \cdot l \cdot}$, $H_3^{[-1] isl \cdot}$, G_1^{is} , $G_2^{[-1] i \cdot}$, F — определяющие тензоры и псевдотензоры микрополярного термоупругого континуума GN-I, $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$ — малый температурный инкремент (считается малой первого порядка), θ_0 — референциальная температура. Веса

определяющих псевдотензоров сведены в таблицу 1. Отметим, что $H_3^{[-1] isl \cdot}$ и $G_2^{[-1] i \cdot}$ являются определяющими псевдотензорами, чувствительными к преобразованиям зеркального отражения трехмерного пространства.

Для определяющих псевдотензоров H_1^{islm} , $H_2^{[-2] i \cdot l \cdot}$ справедливы условия симметрии

$$H_1^{islm} = H_1^{lmis}, \quad H_2^{[-2] i \cdot l \cdot} = H_2^{[-2] l \cdot i \cdot}$$

Воспользовавшись определяющими соотношениями (4.6), в итоге получим

$$\begin{aligned}
 t^{is} &= H_1^{islm} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} H_3^{[1]isl} \kappa_{l \cdot}^m + \frac{1}{2} G_1^{is} \theta \\
 \mu_{\cdot s}^{[1]i} &= H_2^{[2]i \cdot l} \kappa_{l \cdot}^m + \frac{1}{2} H_3^{[1]lmi} \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} G_2^{[1]i} \cdot s \theta \\
 2\rho \bar{s} &= -G_1^{is} \epsilon_{is} - G_2^{[1]i \cdot s} \kappa_{i \cdot}^s - 2F\theta \\
 h^i &= -G_3^{is} \nabla_s \theta
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

5. **Линейный гемитропный микрополярный термоупругий континуум.** Полученная энергетическая форма (4.9) используется, как правило, при построении моделей гемитропных микрополярных упругих континуумов. Определяющие тензоры и псевдотензоры для линейного гемитропного микрополярного упругого континуума нечувствительны к поворотам координатного репера, поэтому для них будут справедливы следующие координатные представления⁸

$$\begin{aligned}
 H_1^{islm} &= a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl} \\
 H_2^{[2]islm} &= a_2 g^{is} g^{lm} + b_2 g^{il} g^{sm} + c_2 g^{im} g^{sl} \\
 H_3^{[1]islm} &= a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl} \\
 G_1^{is} &= g^{is} d_1, \quad G_2^{[1]is} = g^{is} d_2^{[1]}, \quad G_3^{is} = g^{is} d_3
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь a_a, b_a, c_a, d_a ($a = 1, 2, 3; g = 0, -1, -2$) – двенадцать определяющих псевдоскаляры гемитропного микрополярного термоупругого тела GN-I. Метаиндекс a – нумерует определяющие псевдоскаляры. С точки зрения тензорной алгебры a_a, b_a, c_a, d_a , как минимум, являются полуизотропными инвариантами.

Подставив координатные представления (5.1) в определяющие соотношения (4.10), получим

$$\begin{aligned}
 t^{is} &= (a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl}) \epsilon_{lm} + \\
 &+ \frac{1}{2} (a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl}) \kappa_{lm} + \frac{1}{2} d_1^{[1]} \theta g^{is} \\
 \mu_{\cdot s}^{[1]i} &= (a_2 g^{is} g^{lm} + b_2 g^{il} g^{sm} + c_2 g^{im} g^{sl}) \kappa_{lm} + \\
 &+ \frac{1}{2} (a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl}) \epsilon_{lm} + \frac{1}{2} d_2^{[1]} \theta g^{is}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

⁸ Подразумевается использование произвольной координатной криволинейной сетки. Алгоритм представления тензоров с постоянными коэффициентами подробно описан в монографиях (см. [22, с. 167], [32, с. 70], [33, с. 445]) и работах [34, 35].

$$2\rho\bar{s} = -g^{is} d_1 \epsilon_{is} - g^{is} d_2 \kappa_{is} - 2F\theta$$

$$h_i = -d_3 \nabla_i \theta.$$

Вместо определяющих псевдоскаляров a , b , c , d можно перейти к конвенциональным определяющим псевдоскалярам, таким как: G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; L – характерная микродлина; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – не имеющие физической размерности псевдоскаляры; α – коэффициент линейного теплового рас-

ширения; β – коэффициент теплового изгиба–кручения; λ – коэффициент теплопроводности; c – теплоемкость на единицу массы при $\epsilon_{is} = 0$ (см. [36, 37]). В этом случае характерная микродлина L будет псевдоскаляром отрицательного веса -1 .

Сравнивая (5.2) с аналогичными формулами в [37, формулы (2.12)]:

$$A_1 = G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, \quad A_2 = G L L c_3, \quad A_3 = G$$

$$A_4 = G L L, \quad A_5 = 2G c_1, \quad A_6 = 2G L L c_2$$

$$A_7 = G L c_4, \quad A_8 = G L c_5, \quad A_9 = G L c_6$$
(5.3)

для безразмерных определяющих псевдоскаляров удобно ввести новые обозначения

$$c_1 = c_1, \quad c_2 = c_2, \quad c_3 = c_3$$

$$c_4 = 2c_6, \quad c_5 = 2c_4, \quad c_6 = -4c_5$$
(5.4)

Подставляя (5.4) в (5.3), получим

$$A_1 = G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, \quad A_2 = G L L c_3, \quad A_3 = G$$

$$A_4 = G L L, \quad A_5 = 2G c_1, \quad A_6 = G L L c_2$$

$$A_7 = 2G L c_6, \quad A_8 = 2G L c_4, \quad A_9 = -4G L c_5$$
(5.5)

откуда, учитывая определяющие уравнения (5.2), можно установить

$$a = 2 A_1, \quad b + c = 2 A_3, \quad b - c = e^2 A_5$$

$$a = 2 A_2, \quad b + c = 2 A_4, \quad b - c = e^{-2} A_6$$

$$a = 2 A_7, \quad b + c = 2 A_8, \quad b - c = -A_9$$
(5.6)

Подставляя (5.5) в (5.6) и выражая a , b , c , в итоге получим

$$a = 2G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, \quad b = G(1 + e^2 c_1), \quad c = G(1 - e^2 c_1)$$

Таблица 1. Веса определяющих тензоров и псевдотензоров связанной термоупругой гемитропной среды

| Терминологическое обозначение | Символьное обозначение | Вес | Преобразование к абсолютному тензору |
|--------------------------------------------------------------------|------------------------|-----|-----------------------------------------|
| определяющий тензор i (first constitutive tensor) | H_1^{ism} | 0 | |
| определяющий псевдотензор ii (second constitutive pseudotensor) | $H_2^{i.l.s.m}$ | -2 | $H_2^{i.l.s.m} = e^2 H_2^{[-2]i.l.s.m}$ |
| определяющий псевдотензор iii (third constitutive pseudotensor) | $H_3^{isl.m}$ | -1 | $H_3^{isl.m} = e H_3^{[-1]isl.m}$ |
| определяющий тензор iv (firth constitutive tensor) | G_1^{is} | 0 | |
| определяющий псевдотензор v (fifth constitutive pseudotensor) | $G_2^{i.s}$ | -1 | $G_2^{i.s} = e G_2^{[-1]i.s}$ |
| определяющий скаляр vi (sixth constitutive scalar) | | | |

$$\begin{aligned}
 a_2^{[-2]} &= 2G L L c_3, & b_2^{[-1][-1]} &= G L L (1 + e^{-2} c_2^{[+2]}) \\
 c_2^{[-2]} &= G L L (1 - e^{-2} c_2^{[+2]}), & a_3^{[-1]} &= 4G L c_6 \\
 b_3^{[-1]} &= 2G L (c_4 - c_5), & c_3^{[-1]} &= 2G L (c_4 + c_5)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$d_1 = -4G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha, \quad d_2^{[-1]} = -4G L L \beta, \quad d_3 = k, \quad F = -\frac{\rho c}{\theta_0}$$

Принимая обозначения для определяющих постоянных

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6 \tag{5.8}$$

или, с учетом (5.4)

$$c'_4 = 2c_6 + c_4 - c_5, \quad c'_5 = c_4 + c_5, \quad c'_6 = 4c_5 \tag{5.9}$$

уравнение теплопроводности и динамические уравнения можно представить в окончательной форме

$$\begin{aligned}
 &G[(1 + e^2 c_1^{[-2]}) \nabla^s \nabla_s u^i + (1 - e^2 c_1^{[-2]} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla^i \nabla_k u^k + 2 c_1^{[-2]} \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l + \\
 &+ L c_4^{[-1]} \nabla^i \nabla_k \phi^k + L c_5^{[-1]} \nabla^k \nabla_k \phi^i] - 2G \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \nabla_i \theta = -\rho(f^i - \partial_t u^i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G \frac{[-1][-1]}{L L} \left[\left(1 + \frac{1}{e^2} c_2 \right) \nabla^s \nabla_s \phi_i + \left(1 - \frac{1}{e^2} c_2 + 2c_3 \right) \nabla_i \nabla_k \phi^k + \right. \\
& \left. + L^{-1} c_4' \nabla_i \nabla^k u_k + L^{-1} c_5' \nabla^k \nabla_k u_i + L^{-1} c_6' \epsilon_{isi} \nabla^s \phi^i \right] - \\
& - 2eG c_1 \frac{[-2]}{L} \frac{[+1]}{L} \phi_i - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l - 2G \frac{[-1][-1][+1]}{L L} \beta \nabla_i \theta = -\rho \frac{[-1]}{L} \frac{[-2]}{L} \frac{[+1]}{L} \phi_i \\
& \nabla_s \nabla^s \theta - \frac{cD}{\lambda} \partial_s \theta - 2G \alpha \frac{1+\nu}{*} \frac{\theta_0}{1-2\nu} \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla_s \partial_s u^s - 2G \frac{[-1][-1][+1]}{L L} \beta \frac{\theta_0}{*} \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla_s \partial_s \phi + \frac{\rho q}{\lambda} = 0
\end{aligned}$$

где f_i – вектор массовых сил, \mathfrak{S} – момент микроинерции, l_i – вектор массовых моментов.

Заключение. В настоящей статье рассмотрен сравнительно новый подход к математическому моделированию связанной термоупругой гемитропной среды.

1. Предложены новые подходы к построению энергетических форм и уравнений механики микрополярной термоупругости.

2. Получены уравнение теплопроводности и динамические уравнения гемитропного микрополярного термоупругого GN-I континуума в псевдотензорной формулировке.

3. Использовались общие термодинамические принципы неравновесной термодинамики.

4. Анизотропные определяющие псевдотензоры в представлении квадратичной энергетической формы включают: 3 псевдотензора четвертого ранга, 3 псевдотензора второго ранга и один абсолютный скаляр.

5. Анизотропная энергетическая форма редуцировалась к гемитропной с помощью специальных координатных представлений для определяющих псевдотензоров.

6. Рассмотрены различные варианты определяющих скаляров и псевдоскаляров, в том числе, конвенционально используемые материальные псевдоскаляры: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная микролина (являющаяся псевдоскаляром отрицательного веса, чувствительным к отражениям трехмерного пространства), коэффициент линейного теплового расширения; коэффициент теплового искажения, коэффициент теплопроводности, теплоемкость на единицу массы и псевдоскаляры, не имеющие физической размерности.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Turpin J.P., Bossard J.A., Morgan K.L. et al. Reconfigurable and tunable metamaterials: a review of the theory and applications // Int. J. Antennas Propag. 2014. V. 2014. P. 429837. <https://doi.org/10.1155/2014/429837>
2. Giorgio I., Hild F., Gerami E. et al. Experimental verification of 2D cosserat chirality with stretch-micro-rotation coupling in orthotropic metamaterials with granular motif // Mech. Res. Commun. 2022. P. 104020. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.104020>
3. Reasa D.R., Lakes R.S. Nonclassical Chiral Elasticity of the Gyroid Lattice // Phys. Rev. Lett. 2020. V. 125. P. 205502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.205502>
4. Askari M., Hutchins D.A., Thomas P.J. et al. Additive manufacturing of metamaterials: A review // Addit. Manuf. 2020. V. 36. P. 101562. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101562>
5. Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. Metamaterial models of continuum multiphysics // Труды международной школы-конференции молодых ученых “Механика 2016”. Цахкад-

- зор, Армения, 03–07 октября 2016. Ереван: Национальный университет архитектуры и строительства Армении, 2016. С. 160–163.
6. Ковалев В.А., Мурашкин Е.В. О принципе термомеханической ортогональности в проблемах моделирования сложных сред и метаматериалов // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2019. № 1(49). Р. 20–31.
<https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.39.1.003>
 7. Müller I., Ruggeri T. Rational extended thermodynamics. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013. 411 p.
 8. Truesdell C. Rational thermodynamics: a course of lectures on selected topics. New York: McGraw-Hill, 1969. 208+ix p.
 9. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer, 1960. P. 226–858.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2
 10. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // Acta Mech. 1974. V. 20. № 1. P. 105–131.
<https://doi.org/10.1007/BF01374965>
 11. Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Springer, 1972. 286 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>
 12. Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
 13. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 668 с.
 14. Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412.
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>
 15. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 592 с.
 16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Часть 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.
 17. Радаев Ю.Н. Задачи и теоремы по курсу “Математическая теория пластичности”. Самара: Самарский гос. ун-т, 1996. 80 с.
 18. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
 19. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
 20. Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 424–444.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
 21. Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 4. С. 752–761.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
 22. Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с.
 23. Schouten J.A. Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
 24. Sokolnikoff I. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc., 1964. 361 p.
 25. Synge J.L., Schild A. Tensor Calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. 334 p.
 26. Veblen O., Thomas T.Y. Extensions of relative tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. V. 26. P. 373–377.
 27. Veblen O. Invariants of Quadratic Differential Forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
 28. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ: С приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 411 с.
 29. Копф А. Основы теории относительности Эйнштейна. М.: ГТТИ, 1933. 175 с.
 30. Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самар. гос. ун-т, 2006. 340 p.
 31. Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та

- им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2022. № 1(51). Р. 17–26.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>
32. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
33. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 p.
34. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2022. № 2(52). Р. 106–115.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>
35. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2022. № 2(52). Р. 118–127.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>
36. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2018. V. 22. № 3. Р. 504–517.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>
37. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 3. С. 457–474.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>