ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 2, с. 160–165

УДК 539.735

К ВОПРОСУ КРУЧЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

© 2023 г. Б. Г. Миронов[a],*, Ю. Б. Миронов[b],**

[a]*Российский университет транспорта, Москва, Россия*

[b]*Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*

**e-mail: mbg.chspu@yandex.ru*

***e-mail: i.b.mironov@mtuci.ru*

Поступила в редакцию 08.06.2022 г.
После доработки 08.07.2022 г.
Принята к публикации 09.07.2022 г.

Настоящая работа посвящена изучению общих соотношений теории кручения стержней из идеального жесткопластического анизотропного материала. При этом предполагается, что стержень находится под действием внешнего давления, линейно меняющегося вдоль его образующей. Определено напряженно-деформированное состояние анизотропного стержня при произвольном условии пластичности. Найдены уравнения характеристик общих соотношений и компоненты напряжений идеформаций вдоль этих характеристик.

Ключевые слова: пластичность, анизотропия, кручение, деформация, напряжение

DOI: 10.31857/S0572329922600530, **EDN:** DGWBPU

Кручение – это вид деформации. Под влиянием моментов, действующих в поперечных сечениях стержня, эти сечения поворачиваются относительно друг друга. В результате происходит депланация сечений. При одинаковых депланациях различных сечений стержня в них возникают только касательные напряжения, которые не меняются вдоль образующей стержня. Исследования по теории кручения стержней из идеального жесткопластического материала содержатся в различных работах. Кручение стержней из идеальнопластического материала рассмотрено в работах [1–3]. В [3] изложены математические основы теории кручения стержней из изотропного материала. В работах [4, 5, 7] содержатся исследования по теории кручения призматических стержней из идеального жесткопластического анизотропного материала. Кручение призматических анизотропных стержней из идеального жесткопластического материала, находящихся под действием переменного внешнего давления, исследовано в [6]. В работах [8, 9] изучено кручение различных стержней из идеального жесткопластического материала при линеаризованном условии пластичности.

Пусть анизотропный цилиндрический или призматический стержень из идеального жесткопластического анизотропного материала закручивается вокруг своей оси. При этом предполагается, что боковая поверхность стержня свободна от нагрузок. В декартовой прямоугольной системе xyz стержень расположим так, чтобы его образующие были параллельны оси z. Предположим также, что стержень находится под линейно меняющимся внешним давлением, которое действует вдоль образующей стержня.

Компоненты напряжения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + \mu, \quad \tau_{xy} = 0, (\lambda, \mu - \text{const}) \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)\end{gathered} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \tag{2}$$

$$f(\tau_{xz}, \tau_{yz}) = 0 \tag{3}$$

Компоненты скоростей деформаций ε_{ij} определяются из соотношений

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0 \tag{4}$$

Имеют место соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{\varepsilon_{xz}}{\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \tag{5}$$

На контуре сечения стержня выполняется равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} \tag{6}$$

В соответствии с граничными условиями вектор $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ касательного напряжения на контуре поперечного сечения стержня направлен по касательной к ней.

Дифференцируем соотношение (3) по переменной x. Тогда получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

Согласно (7) уравнение равновесия (2) примет вид

$$-\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \tag{8}$$

Тогда из (8) получим систему уравнений для определения характеристик и соотношений вдоль них

$$\frac{dx}{-\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{yz}}{\lambda \dfrac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} \tag{9}$$

Из (9) вытекает, что характеристики уравнения (2) задаются в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} dx + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} dy = 0 \tag{10}$$

и вдоль характеристик верны соотношения

$$\tau_{xz} = \psi(\lambda(y + c_1)), \quad \tau_{yz} = \lambda(y + c_1) \tag{11}$$

где $f(\psi(\lambda(y + c_1)), \lambda(y + c_1)) = 0$, $c_1 = \text{const}$

Из уравнения (10) можно сделать вывод, что характеристики направлены по касательной к кривой текучести (3).

Аналогично, дифференцируем уравнение (3) по y и подставим полученное соотношение в уравнение равновесия (2). Тогда имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \tag{12}$$

а из (12) следует справедливость соотношений

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{-\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{d\tau_{xz}}{\lambda \dfrac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \tag{13}$$

Из системы уравнений (13) получим, что вдоль характеристик (10) справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = \lambda\left(x + c_2\right), \quad \tau_{yz} = \varphi\left(\lambda\left(x + c_2\right)\right) \tag{14}$$

где $f\left(\lambda\left(x + c_2\right), \varphi(\lambda(x + c_2)\right) = 0,\ c_2 = \text{const}$

Компоненты напряжения в ходе кручения стержня в данной точке тела остаются постоянными. Тогда соотношения (4) и (5) можно проинтегрировать. Считая, что в начальный момент компоненты деформации e_{ij} равны нулю, получим

$$e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0, \quad \frac{e_{xz}}{\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{e_{yz}}{\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \tag{15}$$

Учитывая, что компоненты перемещений u, v, w определяются из соотношений

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y) \tag{16}$$

где w – депланация, θ – крутка, представим соотношения связи между компонентами деформации и компонентами перемещения в следующем виде

$$e_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta y\right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta x\right) \tag{17}$$

Согласно (17) получим

$$\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = \theta. \tag{18}$$

Последнее уравнение из соотношений (15) запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} e_{xz} - \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} e_{yz} = 0 \tag{19}$$

Дифференцируем уравнение (19) по переменной x

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\frac{\partial e_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = e_{yz}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}\partial \tau_{xz}}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}\right) - e_{xz}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}\partial \tau_{yz}}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right) \tag{20}$$

Согласно (20) уравнение (18) примет вид

$$\begin{gathered} -\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\frac{\partial e_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} = \\ = \theta\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} - e_{yz}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}\partial \tau_{xz}}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}\right) + e_{xz}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}\partial \tau_{yz}}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right) \end{gathered} \tag{21}$$

Из соотношения (21) получим следующую систему уравнений для определения характеристик соотношения (19) и соотношений вдоль них

$$\frac{dx}{-\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} = \frac{de_{xz}}{\theta\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} - e_{yz}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2}\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}\partial \tau_{xz}}\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}\right) + e_{xz}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2}\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}\partial \tau_{yz}}\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\right)} \tag{22}$$

Таким образом, из (22) вытекает, что уравнение характеристик соотношения (19) имеют вид (10), а соотношения вдоль характеристик (10) определяются из уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} de_{xz} + \left(-e_{yz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) + e_{xz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \right) dx = -\theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} dx \\
\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} de_{xz} + \left(e_{yz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) - e_{xz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \right) dy = \theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} dy
\end{gathered} \tag{23}$$

Согласно (19) из первого уравнения соотношений (23) получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \frac{de_{xz}}{dx} - e_{xz} \left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}}{\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) \right) = -\theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \tag{24}$$

Согласно (10) и (11) из (24) следует

$$e_{xz} = \theta (y + c_3) \tag{25}$$

где $c_3 = \text{const}$. При этом компонента деформации e_{yz} определяется из соотношения (19) с учетом (25).

Аналогично, дифференцируем соотношение (19) по y и получим, что вдоль характеристик (10) справедливы соотношения

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} de_{yz} + \left(e_{yz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) - e_{xz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) \right) dx = -\theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} dx \\
\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} de_{yz} + \left(-e_{yz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) + e_{xz} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) \right) dy = \theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} dy
\end{gathered} \tag{26}$$

С учетом (19) из второго уравнения соотношений (26) получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \frac{de_{yz}}{dy} + e_{yz} \left(-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz}^2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz} \partial \tau_{xz}} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) + \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{xz}}}{\dfrac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{yz}^2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau_{xz} \partial \tau_{yz}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) \right) = \theta \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \tag{27}$$

Согласно (10) и (11) из (27) следует

$$e_{yz} = -\theta (x + c_4) \tag{28}$$

где $c_4 = \text{const}$. При этом компонента деформации e_{xz} определяется из соотношения (19) с учетом (28).

Предположим, что условие пластичности (3) задано в виде

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b^2} = k^2 \qquad (a = \text{const},\ b = \text{const}) \tag{29}$$

Тогда с учетом (29) из соотношений (11) получим

$$\tau_{xz} = \pm \frac{a\lambda}{b} \sqrt{\frac{k^2 b^2}{\lambda^2} - (y + c_1)^2}, \qquad \tau_{yz} = \lambda (y + c_1) \tag{30}$$

Пусть точка (x_0, y_0) принадлежит контуру поперечного сечения стержня и через нее проходит характеристика, $\tau_{xz}(x_0, y_0) = \tau_x^0, \tau_{yz}(x_0, y_0) = \tau_y^0$. Тогда в соответствии с уравнением (30) вдоль этой характеристики имеем

$$\tau_{xz} = \pm\frac{a\lambda}{b}\sqrt{\frac{k^2b^2}{\lambda^2} - \left(y - \left(y_0 - \frac{\tau_y^0}{\lambda}\right)\right)^2}, \quad \tau_{yz} = \lambda\left(y - \left(y_0 - \frac{\tau_y^0}{\lambda}\right)\right) \tag{31}$$

При этом уравнение характеристики, проходящей точку (x_0, y_0) контура поперечного сечения стержня, запишется в виде

$$\frac{\left(x - \left(x_{0-}\frac{b^2\tau_x^0}{a^2\lambda}\right)\right)^2}{b^2} + \frac{\left(y - \left(y_0 - \frac{\tau_y^0}{\lambda}\right)\right)^2}{a^2} = \frac{b^2k^2}{a^2\lambda^2} \tag{32}$$

Аналогично, согласно (29) из (14) получим

$$\tau_{xz} = \lambda(x + c_2), \quad \tau_{yz} = \pm\frac{b\lambda}{a}\sqrt{\frac{k^2a^2}{\lambda^2} - (x + c_2)^2} \tag{33}$$

Тогда, согласно (14) из (33), вдоль характеристики имеем

$$\tau_{xz} = \lambda\left(x - \left(x_0 - \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right)\right), \quad \tau_{yz} = \pm\frac{b\lambda}{a}\sqrt{\frac{k^2a^2}{\lambda^2} - \left(x - \left(x_0 - \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right)\right)^2} \tag{34}$$

В соответствии с (34) уравнение характеристики, проходящей точку (x_0, y_0) контура поперечного сечения стержня, примет вид

$$\frac{\left(x - \left(x_0 - \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right)\right)^2}{b^2} + \frac{\left(y - \left(y_0 - \frac{a^2\tau_y^0}{b^2\lambda}\right)\right)^2}{a^2} = \frac{a^2k^2}{b^2\lambda^2} \tag{35}$$

Согласно (25) и (31) из (19) имеем

$$e_{xz} = \theta(y + c_3), \quad e_{yz} = \frac{b\theta\left(y - \left(y_0 - \frac{\tau_y^0}{\lambda}\right)\right)(y + c_3)}{\pm a\sqrt{\frac{k^2b^2}{\lambda^2} - \left(y - \left(y_0 - \frac{\tau_y^0}{\lambda}\right)\right)^2}} \tag{36}$$

Аналогично, согласно (28) и (34) из (19) получим

$$e_{yz} = -\theta(x + c_4), \quad e_{xz} = -\frac{a\theta\left(x - \left(x_0 - \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right)\right)(x + c_4)}{\pm b\sqrt{\frac{k^2a^2}{\lambda^2} - \left(x - \left(x_0 - \frac{\tau_x^0}{\lambda}\right)\right)^2}} \tag{37}$$

На линиях разрыва напряжений следует положить

$$e_{xz} = e_{yz} = 0 \tag{38}$$

так как они являются следом исчезающих жестких областей.

Из соотношений (38) определяются константы c_3 и c_4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. *Прагер В., Ходж Ф.Г.* Теория идеальнопластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
3. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
4. *Быковцев Г.И.* Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред. Сборник статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.
5. *Миронов Б.Г., Митрофанова Т.В.* К вопросу о кручении анизотропных стержней // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 196–199.
6. *Козлова Л.С., Миронов Б.Г.* Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 3. С. 107–113.
7. *Миронов Б.Г., Митрофанова Т.В.* Деформированное состояние трансляционно-анизотропных тел при кручении // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. 2014. № 4 (72). С. 57–60.
8. *Mironov B.G., Mironov Y.B.* Torsion of non-uniform cylindrical and prismatic rods made of ideally plastic material under linearized yield criterion // Mech. Solids. 2020. V. 55. No. 6. P. 813–819. https://doi.org/10.3103/S0025654420060102
9. *Mironov B.G., Mironov Y.B.* Problem on torsion of rods made of a hardening material under the action of variable external pressure using a linearized plasticity condition // Mech. Solids. 2022. V. 57. No. 2. P. 271–277. https://doi.org/10.3103/S0025654422020182