

ISSN 1024-7084

Номер 5

Сентябрь - Октябрь 2023



ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Номер 5, 2023

Установившаяся амплитуда нелинейных колебаний газового пузырька в жидкости под действием периодического внешнего давления при резонансе <i>А. Г. Петров</i>	3
Влияние параметров кавитатора и сопла на эффективность работы генератора импульсных струй <i>С. А. Очеретяный, В. В. Прокофьев</i>	10
Условия формирования глубоководных противотечений в северо-восточной части Черного моря <i>Н. В. Маркова, О. А. Дымова</i>	25
Автомодельные течения с ударной волной, движущейся к центру или к оси симметрии <i>Х. Ф. Валиев, А. Н. Крайко</i>	37
Расчет линейной устойчивости течения жидкости в плоском канале с волнистыми поперек потока стенками <i>Ю. Я. Трифонов</i>	47
Численное моделирование формирования и движения турбулентных вихревых облаков <i>М. А. Засимова, В. В. Рис, Н. Г. Иванов</i>	57
Тесты для валидационных задач аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена на структурированных поверхностях с экстраординарными перепадами давления <i>С. А. Исаев, А. Г. Судаков, Д. В. Никущенко, А. Е. Усачов, М. А. Зубин, А. А. Синявин, А. Ю. Чулюнин, Е. Б. Дубко</i>	70
Моделирование таяния-намерзания льда в задаче обтекания жидкостью малой неровности <i>Р. К. Гайдуков, В. Г. Данилов, А. В. Фонарева</i>	82
Неединственность и устойчивость поверхности кипения воды в геотермальном резервуаре <i>Г. Г. Цыпкин</i>	95
Частоты и профили стоячих изгибно-гравитационных волн <i>В. А. Калинин</i>	103
Удар микроструи воды по микроволокну <i>А. В. Базилевский, А. Н. Рожков</i>	110
Радиационно-конвективный нагрев поверхности марсианского спускаемого аппарата MSL при учете турбулентного характера обтекания <i>С. Т. Суржиков</i>	119
Излучательные характеристики ударно нагретого воздуха в видимой и инфракрасной областях спектра <i>П. В. Козлов, И. Е. Забелинский, Н. Г. Быкова, Г. Я. Герасимов, В. Ю. Левашов</i>	138

УДК 532

УСТАНОВИВШАЯСЯ АМПЛИТУДА НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ РЕЗОНАНСЕ

© 2023 г. А. Г. Петров

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 09.03.2023 г.

После доработки 13.05.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Исследуются вынужденные нелинейные колебания газового пузырька в жидкости, когда частота колебаний внешнего давления жидкости равна собственной частоте колебаний пузырька (резонанс). Методом осреднения выведена простая формула зависимости амплитуды колебаний газового пузырька от амплитуды внешнего давления и теплофизических характеристик газа и вязкости жидкости. Показано ее хорошее согласие с численными расчетами до значения амплитуды колебаний радиуса пузырька, сравнимого с его равновесным значением.

Ключевые слова: газовые пузырьки, вынужденные нелинейные колебания, резонанс, гомобаричность, жидкость

DOI: 10.31857/S1024708423600161, **EDN:** WOOMFM

Задача о колебаниях газового пузырька в жидкости под действием периодически меняющегося давления имеет долгую историю. К настоящему времени этот раздел механики жидкости и газа является классическим и представлен в сотнях статей и ряде монографий [1–4]. Миннаерт [5] экспериментально и теоретически изучил зависимость частоты свободных колебаний газового пузырька в жидкости. Им получена формула, связывающая частоту свободных колебаний пузыря с плотностью жидкости, давлением, радиусом пузыря в равновесном состоянии и показателем адиабаты газа γ . В [6] исследованы вынужденные колебания пузыря под воздействием внешних пульсаций давления в линейном приближении. При этом предполагалось, что давление внутри пузыря однородно (допущение о гомобаричности). В [7, 8] учитывается следующее за линейным (квадратичное) приближение, а также теплофизические свойства жидкости и газа. В [9, 10] обсуждаются правомерность условия гомобаричности и влияние теплофизических свойств жидкости на колебание пузырьков в жидкости.

Наибольшая сложность для анализа амплитуды колебаний пузырька представляет собой резонансный случай, когда частота внешних пульсаций давления равна частоте Миннаерта. В [11] отмечается, что линейное приближение дает для амплитуды в разы большее значение, чем численное ее значение, определенное из точного нелинейного уравнения. Даже учет квадратичных членов в уравнении дает значение, существенно отличающееся от точного. Ниже методом осреднения выведена простая формула зависимости амплитуды колебаний газового пузырька от амплитуды внешнего давления и теплофизических характеристик газа и жидкости. Показано ее хорошее согласие с численными расчетами до значения амплитуды колебаний радиуса пузырька, сравнимого с его равновесным значением.

1. УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Уравнение изменения радиуса пузырька R , как функции времени t' , можно получить из закона изменения энергии [11, 12]:

$$\frac{dE}{dt'} + \left[p_0 \left(1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right) + p_1 \cos \omega t' \right] 4\pi R^2 \frac{dR}{dt'} + 16\pi\mu R \left(\frac{dR}{dt'} \right)^2 = 0, \quad E = 2\pi\rho R^3 \left(\frac{dR}{dt'} \right)^2,$$

где E — кинетическая энергия жидкости, p_0 — невозмущенное давление жидкости, p_1 — амплитуда колебаний давления в жидкости, γ — показатель адиабаты газа внутри пузырька. Частота колебаний внешнего давления принимается равной собственной частоте пузырька (резонанс).

В диссипативном члене приведенного уравнения учитывается только вязкость жидкости μ . В линейном приближении амплитуда свободных колебаний за один период убывает в $\exp(\Lambda)$ раз, где Λ — декремент затухания выражается через вязкость жидкости: $\Lambda = 4\pi\mu/(\rho R_0^2\omega)$. Для учета тепловой (и других видов) диссипации удобно заменить μ на эффективную вязкость, выразив ее через декремент затухания $\mu = \rho R_0^2\omega\Lambda/(4\pi)$, где ω — частота свободных колебаний пузырька (Миннаерта). Как известно [1–4], для воздушных пузырьков в воде, радиусы которых меняются в диапазоне $R_0 \in (10^{-4}, 10^{-1})$ см, поверхностное натяжение практически не дает вклада в собственную частоту, а декремент затухания меняется в интервале $\Lambda \in (0.1, 0.16)$. Для малых пузырьков $R_0 < 10^{-4}$ см декремент обусловлен, главным образом, вязкостью воды, а для пузырьков большего размера — тепловыми эффектами. Разделив уравнение на $4\pi R^3 \dot{R}$, получим

$$\rho \left(\frac{3}{2} \frac{\dot{R}^2}{R} + \ddot{R} \right) + \frac{p_0}{R} \left(1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right) + \frac{p_1}{R} \cos \omega t + 4\mu \frac{\dot{R}}{R^2} = 0, \quad \dot{R} = \frac{dR}{dt'}, \quad \ddot{R} = \frac{d^2 R}{dt'^2}$$

Сделаем замену $t' = t/\omega$, $R = R_0(1 + z(t))$, $p_0 = \frac{\rho R_0^2}{3\gamma} \omega^2$, $p_1 = A\rho R_0^2 \omega^2$, $\mu = \frac{1}{4} \varepsilon \rho R_0^2 \omega$ и разделим уравнение на размерный множитель $\omega^2 R_0 \rho$, приведя его к безразмерному виду

$$\begin{aligned} \frac{A \cos(t)}{(1+z)} + \ddot{z} + g(z) + \frac{3\dot{z}^2}{2(1+z)} + \varepsilon \frac{\dot{z}}{(1+z)^2} = 0, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}, \quad \ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad \varepsilon = \Lambda/\pi \\ g(z) = \frac{1}{3\gamma(1+z)} \left[1 - \left(\frac{1}{1+z} \right)^{3\gamma} \right] = z - \frac{3}{2}(1+\gamma)z^2 + \frac{1}{6}(11+18\gamma+9\gamma^2)z^3 + O[z]^4 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь параметр ε выражается через декремент затухания и учитывает все виды потерь энергии. В линейном приближении уравнение имеет вид $A \cos t + \ddot{z} + z + \varepsilon \dot{z} = 0$. Оно имеет точное решение

$$z = -\frac{A}{\varepsilon} \sin t + C \exp \frac{-\varepsilon t}{2} \sin \left(-t \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \right), \quad \varepsilon = \frac{\Lambda}{\pi} = \frac{4\mu}{\rho R_0^2 \omega}. \quad (1.2)$$

Первое слагаемое — это установившееся гармоническое колебание, а второе — возмущение, зависящее от начальных условий. Возмущение за период колебаний убывает в $\exp(\Lambda)$ раз. Декремент затухания учитывает все механизмы потерь энергии. При декременте затухания $\Lambda = 0.1$, $A = \varepsilon = \Lambda/\pi$ имеем значение установившейся амплитуды $A/\varepsilon = 1$. Тогда как согласно численному решению точных уравнений при этих же значениях параметров имеем зависимость $z(t)$, изображенную сплошной линией на рис. 1 при $\gamma = 4/3$. Для нее установившаяся амплитуда вычисляется по формуле $a = 0.5 (\max z(t) - \min z(t))$, $t \in (290, 300)$. Она равна 0.366, т.е. почти в 3 раза меньше. Решение построено при начальных условиях $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ и приведено на отрезках времени: а) $t \in (0, 300)$, б) $t \in (290, 300)$.

На рис. 2 приведено сравнение численного решения точных уравнений $z(t)$ (синяя линия) с решением линейного приближения (1.2) при $\Lambda = 0.1$, $\varepsilon = \Lambda/\pi$, $A = \varepsilon$ и $\gamma = 4/3$. Начальные условия обоих решений нулевые: $z(0) = \dot{z}(0) = 0$. Тогда в линейном приближении (1.2) следует подставить $c = -2A/(\varepsilon\sqrt{4 - \varepsilon^2})$. Приведенный пример показывает, что вычисление амплитуды по линейному приближению не приемлемо.

Неприемлемо также и приближение уравнения (1.1), в котором в функции $g(z)$ учитываются квадратичные и кубические члены (кубическое приближение). Это видно из рис. 2, на котором приводится сравнение точной функции $z(t)$ (синяя линия) с численным решением кубического приближения (желтая линия).

Цель дальнейшего изложения — найти установившуюся амплитуду колебаний в зависимости от входящих в уравнение безразмерных параметров $\gamma, \Lambda = \pi\varepsilon, A$. Приведенные рис. 1–3 показы-

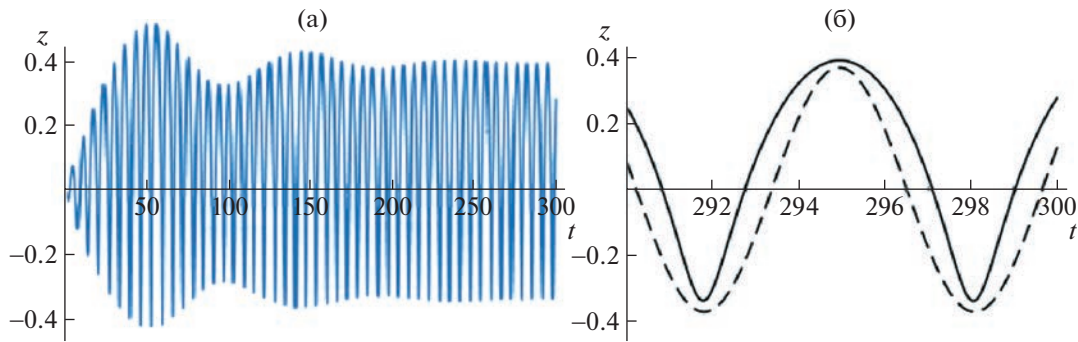


Рис. 1. Колебания относительного радиуса пузырька при $\gamma = 4/3$, $\Lambda = 0.1$, $A = \varepsilon = \Lambda/\pi$ и начальных условиях $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ на отрезках времени: $t \in (0, 300)$, $t \in (290, 300)$.

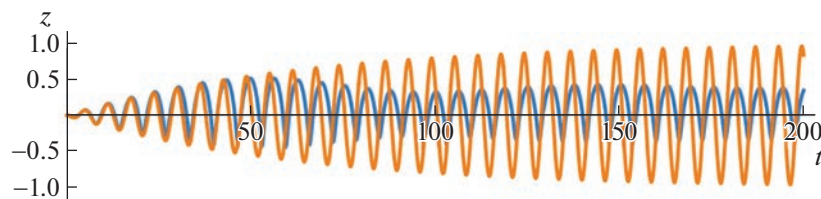


Рис. 2. Сравнение линейного приближения (желтая кривая) и точного решения (синяя кривая) колебаний относительного радиуса пузырька при $\gamma = 4/3$, $\Lambda = 0.1$, $A = \varepsilon = \Lambda/\pi$ и начальных условиях $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

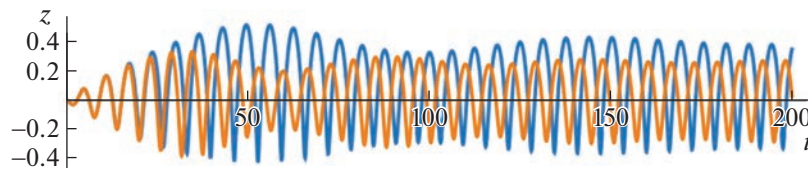


Рис. 3. Сравнение кубического приближения (желтая кривая) и точного решения (синяя кривая) колебаний относительного радиуса пузырька при $\gamma = 4/3$, $\Lambda = 0.1$, $A = \varepsilon = \Lambda/\pi$ и начальных условиях $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

вают, что решение невозможно получить обычными методами возмущений. Аналогичные сравнения точного численного решения с решениями различных приближений, что с графической точностью решения начинают совпадать только после 15-го приближения. Это сильно осложняет аналитическое исследование поставленной нелинейной задачи. Тем не менее ниже оно будет выведено и проведено сравнение с численными расчетами в широком диапазоне параметров.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ОСРЕДНЕНИЯ

Записываем уравнение колебаний в виде

$$\ddot{z} + z = F(t, z, \dot{z}), \quad F = -\varepsilon \left(A_1 \frac{\cos t}{(1+z)} + \frac{\dot{z}}{(1+z)^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{(\dot{z})^2}{(1+z)} - g(z) + z, \quad A = A_1 \varepsilon \quad (2.1)$$

Следуя методу осреднения (см. [13]), переменные z и $\dot{z}$ выражаем через новые переменные r и φ .

$$z = r \cos \varphi, \quad \dot{z} = -r \sin \varphi \quad (2.2)$$

Если $z(t)$ – гармоническое колебание, то переменные r и φ имеют смысл амплитуды и фазы этого колебания. Эти названия сохраняем и для нелинейных колебаний, в которых переменные r и φ со временем медленно изменяются. Это одна из основных идей метода осреднения (см. [13]).

С помощью подстановок находим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = -r \sin \varphi, & -\frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{dr}{dt} \sin \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = r \cos \varphi - f, \\ f &= F(t, r \cos \varphi, -r \sin \varphi) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Разрешаем систему относительно dr/dt и $rd\varphi/dt$

$$\frac{dr}{dt} = -f \sin \varphi, \quad r \frac{d\varphi}{dt} = r - f \cos \varphi$$

Будем считать φ независимой переменной и рассмотрим функции $r(\varphi)$, $t(\varphi) = \varphi + \tau(\varphi)$, где $\tau(\varphi)$ – это сдвиг фазы. Для введенных функций получим следующие уравнения:

$$\frac{dr}{d\varphi} = f_1, \quad \frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{d(t - \varphi)}{d\varphi} = f_2 \quad (2.4)$$

$$f_1 = \frac{-f \sin \varphi}{1 - (f/r) \cos \varphi}, \quad f_2 = \frac{1}{1 - (f/r) \cos \varphi} - 1 = \frac{(f/r)}{1 - (f/r) \cos \varphi} \quad (2.5)$$

Предполагая ε малым параметром, введем замены

$$r(\varphi) = \varepsilon^{1/3} r_0(\varphi), \quad \tau(\varphi) = \varepsilon^{1/3} \tau_0(\varphi) \quad (2.6)$$

Оценим по параметру ε правые части (2.5) уравнения (2.4). Сначала рассмотрим функцию F в (2.1). С помощью разложения (1.1), подстановки (2.2) и замены (2.6) оценим ведущее слагаемое в функции F

$$-g(z) + z = \frac{3}{2}(1 + \gamma)z^2 + \dots \sim \varepsilon^{2/3}.$$

Отсюда и (2.3) получаем оценку $f \sim \varepsilon^{2/3}$ и оценки для правых частей $f_1 \sim \varepsilon^{2/3}$, $f_2 \sim \varepsilon^{1/3}$. Таким образом, для новых переменных $r_0(\varphi)$, $\tau_0(\varphi)$ получим уравнения нормального вида с малыми параметрами в правых частях. По теореме Боголюбова можно приблизить решение уравнений решением уравнения с осредненными правыми частями.

В правые части (2.5) подставляем выражения (2.6), затем раскладываем их по параметру ε до членов порядка первой степени ε и найденные разложения осредняем по времени. Необходимые для этого преобразования проводятся в пакете Wolfram Mathematica. В главном по параметру ε осредненные уравнения имеют вид

$$\frac{dr_0}{d\varphi} = -\frac{1}{2}\varepsilon(A_1\tau_0 + r_0), \quad \frac{d\tau_0}{d\varphi} = \frac{\varepsilon^{1/3}((9\gamma^2 + 4)r_0^3 - 32A_1)}{64r_0}$$

Они описывают изменение переменных r_0 и τ_0 от заданных начальных значений до установившихся постоянных значений, при которых правые части равны нулю.

Приравняв к нулю правые части, найдем установившееся решение

$$r_0 = \left(\frac{32A_1}{(4 + 9\gamma^2)} \right)^{1/3}, \quad \tau_0 = - \left(\frac{32A_1}{(4 + 9\gamma^2)} \right)^{1/3} \frac{1}{A_1}$$

Принимая во внимание замену (2.6), для амплитуды $a = r$ и сдвига фазы t_0 получаем следующие асимптотические зависимости

$$a = \varepsilon^{1/3} r_0 = \left(\frac{32A_1\varepsilon}{(4 + 9\gamma^2)} \right)^{1/3}, \quad t_0 = \varepsilon^{1/3} \tau_0 = - \left(\frac{32A_1\varepsilon}{(4 + 9\gamma^2)} \right)^{1/3} \frac{1}{A_1}. \quad (2.7)$$

Согласно полученным асимптотическим формулам при $t \rightarrow \infty$ устанавливается гармоническое колебание $z = a \cos(t - t_0)$ с амплитудой и фазой (2.1). При $\gamma = 4/3$, $\Lambda = 0.1$, $A_1 = 1$ это гармо-

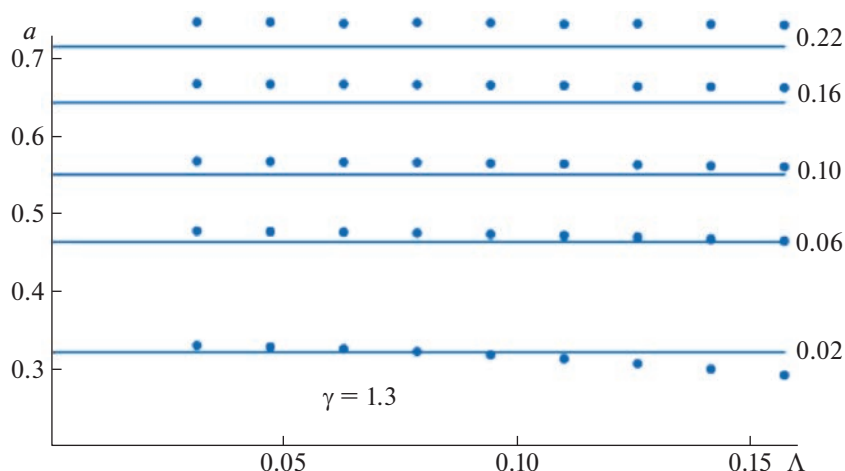


Рис. 4. Сравнение относительных амплитуд численного и асимптотического решений для установившихся колебаний при $\gamma = 1.3$, $\Lambda \in (0.02, 0.22)$.

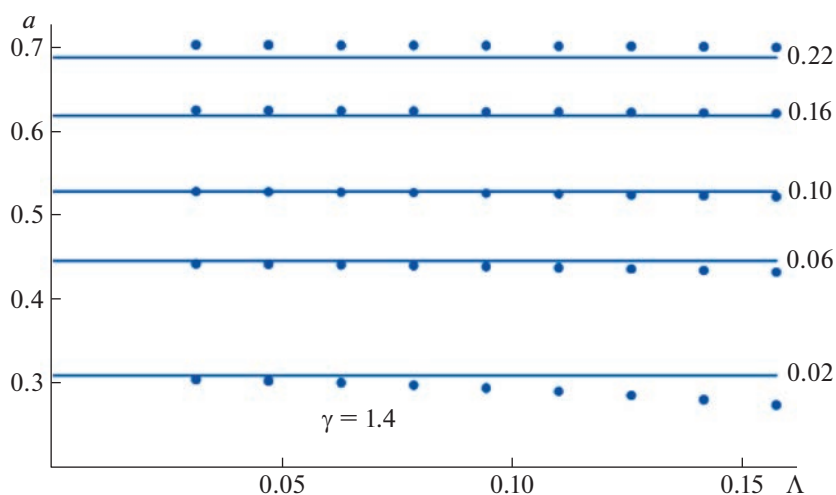


Рис. 5. Сравнение относительных амплитуд численного и асимптотического решений для установившихся колебаний при $\gamma = 1.4$, $\Lambda \in (0.02, 0.22)$.

ническое колебание изображено на рис. 1 штриховой линией. Оно имеет амплитуду $a = 0.370$, близкую к значению $a = 0.366$, которое найдено из численного решения точных уравнений. Как видно из рис. 1, амплитуда и фаза, определенные по асимптотическим формулам (2.1), удовлетворительно согласуются с точными значениями. Согласие улучшается по мере уменьшения параметра $\varepsilon = \Lambda/\pi$.

Формулу (2.1) для амплитуды удобно представить в виде

$$a = \left(\frac{32A}{(4 + 9\gamma^2)} \right)^{1/3} = \left(\frac{32p_1}{3\gamma(4 + 9\gamma^2)p_0} \right)^{1/3}, \quad A = \frac{p_1}{3\gamma p_0} \quad (2.8)$$

Эта формула показывает хорошее согласие с точными численными расчетами практически для всех физически реализуемых значений параметров γ , Λ и A и весьма больших амплитуд колебаний радиуса пузырька. Амплитуда может достигать значения $0.7R_0$ и с хорошей точностью определяться по формуле (2.8). Кроме того, численные расчеты подтверждают, что амплитуда колебаний пузырька практически не зависит от декремента затухания. Эти результаты иллюстрируются на рис. 4, 5 и 6, на которых изображены зависимости установившейся относительной амплитуды a от относительной амплитуды колебаний внешнего давления $A = p_1/(3\gamma p_0)$.

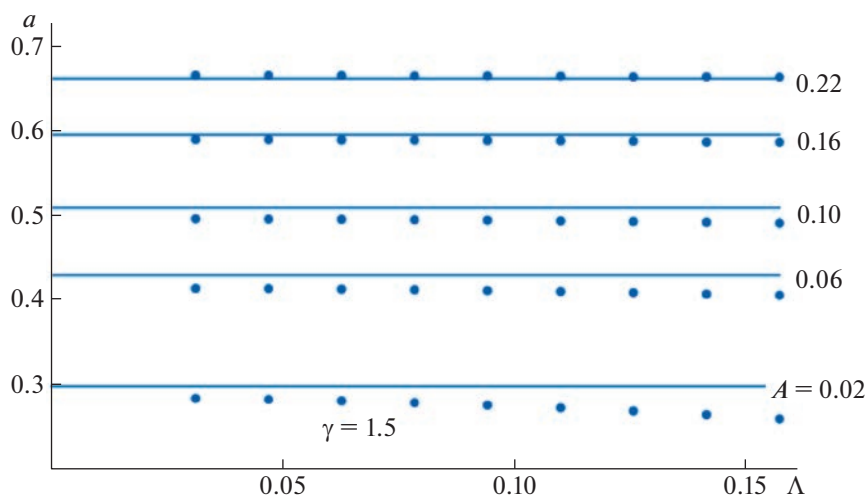


Рис. 6. Сравнение относительных амплитуд численного и асимптотического решений для установившихся колебаний при $\gamma = 1.5$, $\Lambda \in (0.02, 0.22)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показывают рис. 4, 5 и 6, формула (2.2) для установившейся относительной амплитуды $a = R_1/R_0$ при резонансной частоте зависит только от показателя адиабаты γ и отношения амплитуды колебаний внешнего давления p_1 к его равновесному значению p_0 . Эта зависимость хорошо подтверждается численными расчетами точных уравнений, как для малых амплитуд внешнего давления p_1/p_0 , так и для достаточно больших, при которых амплитуда радиуса достигает значения $0.7R_0$. Зависимость справедлива для большинства газов с показателями адиабаты γ от значения 1.3 до значения 1.5 и практически всех реально существующих декрементов затухания.

Однако полученная формула (2.2) не всегда применима. Следует исключить частоты, в два раза большие собственным частотам деформационных мод. Радиусы пузырьков R_0 , для которых выполнено условие резонанса с n -й деформационной модой, находятся согласно [14, 15]. Выражения для частоты ω радиальной моды и частоты ω_n n -й деформационной моды

$$\omega^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho R^2} + \frac{2\sigma(3\gamma - 1)}{\rho R^3}, \quad \omega_n^2 = \frac{2(n-1)(n+1)(n+2)}{\rho R^3} \sigma$$

Затем из уравнения $\omega^2/\omega_n^2 = 4$ находим радиусы пузырьков R_0 :

$$\frac{R_0}{R_\sigma} = \frac{2(n-1)(n+1)(n+2) + 1}{3\gamma} - 1, \quad R_\sigma = \frac{2\sigma}{p_0},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Для воздушных пузырьков в воде имеем:

$$\sigma = 0.073 \text{ Н/м}, \quad p_0 = 105 \text{ Па}, \quad \gamma = 1.4, \quad R_\sigma = 1.4 \text{ мк}$$

Значения радиусов пузырьков, удовлетворяющие такому резонансному условию, приведены в табл. 1. В этих случаях вся энергия радиальных колебаний перекачивается в деформационную моду, что приводит к многократному увеличению ее амплитуды и дроблению пузырька. Очевидно, что для радиусов пузырьков, близких к этим значениям, формула (2.2) не будет работать.

Таблица 1. Радиусы пузырьков R_0 в мм, для которых частота Миннаерта в два раза больше частоты n -й деформационной моды

Номер моды n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Радиус R_0	0.07	0.026	0.0599	0.111	0.185	0.286	0.418	0.585	0.791

Отметим, что в [16] исследуются резонансы других порядков, но главным образом численно. Работы [17–19] посвящены исследованию в линейном приближении вынужденных колебаний пузырьков не только газовых, но и паровых.

Работа поддержана грантом РФФИ № 22-21-00833.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Plesset M., Prosperetti A.* Bubble Dynamics and Cavitation // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1977. V. 9. P. 145.
2. *Leighton T.* The Acoustic Bubble. London: Academic Press, 1994. 633 p.
3. *Низматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1. 464 с.
4. *Brennen C.* Cavitation and Bubble Dynamics. New York: Oxford University Press, 1995. 254 p.
5. *Minnaert M.* Musical Air Bubbles and the Sounds of Running Water // *Philosophical Magazine*. 1933. V. 16. P. 235.
6. *Pfriem H.* Zur thermischen Dämpfung in kugelsymmetrisch schwingenden Gasblasen // *Akust. Z.* 1940. Bd. 5. S. 202.
7. *Devin C.* Survey of Thermal, Radiation, and Viscous Damping of Pulsating Air Bubbles in Water // *J. Acoust. Soc. Am.* 1959. V. 31. P. 1654.
8. *Prosperetti Andrea.* The thermal behaviour of oscillating gas bubbles // *Journal of Fluid Mechanics*. 1991. V. 222. P. 587–616.
9. *Avdeev A.A.* Gas bubble pulsations in an acoustic field (resonance and boundaries of the polytropic approximation) // *High temperature*. 2014. V. 52. P. 851–860.
10. *Khabeev N.S., Shagapov V.S.* Towards the problem of homobaricity in bubble dynamics // *Int. J. of Math. Trends and Techn. (IJMTT)*. V. 66. P. 156–159.
11. *Голубятников А.Н., Украинский Д.В.* О динамике сферического пузырька в неньютоновских жидкостях // *ИЗВ. РАН. МЖГ*. 2021. № 4. С. 52–62.
12. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994. 560 с.
13. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
14. *Вановский В.В., Петров А.Г.* Колебания газового пузырька в жидкости при резонансе частот радиальной и произвольной осесимметричной моды колебаний 2: 1 // *Доклады Академии наук*. 2011. Т. 437. № 3. С. 331–335.
15. *Вановский В.В., Петров А.Г.* Резонансный механизм дробления газового пузырька в жидкости // *Доклады Академии наук*. 2012. Т. 444. № 4. С. 385–389.
16. *Crum L.A., Prosperetti A.* Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids: An interpretation of some experimental results // *J. Acoust. Soc. Am.* 1983. 73 (1).
17. *Хабеев Н.С.* Резонансные свойства паровых пузырьков // *ПММ*. 1981. Т. 45.
18. *Хабеев Н.С.* К вопросу о резонансах пузырька, радиально пульсирующего в жидкости // *ИФЖ*. 2009. Т. 82. № 6.
19. *Khabeev N.* Resonance properties of soluble gas bubbles // *Int. J. Heat Mass. Trans.* 2006. V. 49. № 5–6.

УДК 532.5

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ КАВИТАТОРА И СОПЛА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАБОТЫ ГЕНЕРАТОРА ИМПУЛЬСНЫХ СТРУЙ

© 2023 г. С. А. Очеретяный^{а,*}, В. В. Прокофьев^{а,**}

^аМГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*E-mail: ocheret@imec.msu.ru

**E-mail: vlad.prokof@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.12.2022 г.

После доработки 13.04.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Для создания генератора периодических импульсных струй используется режим кавитационных автоколебаний в гидравлической системе, содержащей вентилируемую каверну с отрицательным числом кавитации. Исследовано влияние параметров кавитатора и выходного сопла генератора на интенсивность ударного воздействия истекающей жидкости на экран, расположенный перпендикулярно направлению истечения струй. Получено, что увеличение длины сопла может значительно увеличить эффективность генератора, а плавное сужение канала перед кавитатором может способствовать увеличению рабочего диапазона генератора в сторону больших поддувов газа. Показано, что имеет место масштабный эффект — с ростом давления напора жидкости относительная интенсивность автоколебаний падает, однако имеет тенденцию к выходу на горизонтальную асимптоту.

Ключевые слова: струйное течение, каверна, отрицательное число кавитации, кавитационные автоколебания, пульсационные технологии

DOI: 10.31857/S1024708422600981, **EDN:** OGFLMM

Исследования течений жидкости в присутствии вентилируемой каверны с отрицательным числом кавитации, проведенные в Институте механики МГУ [1–3], показали, что при определенных условиях в гидравлической системе возникают кавитационные автоколебания с высокой интенсивностью пульсаций давления, как в каверне, так и в области выше по течению. Этот режим может быть использован при создании генератора импульсных струй. Наиболее очевидное применение такой генератор может найти в технологиях водоструйной разработки полезных ископаемых. Современные исследования показывают, что производительность водоструйных технологий быстро возрастает при увеличении давления воды. Однако получение стационарных струй с высокими параметрами сопряжено с большими техническими трудностями. Все большее распространение получают пульсирующие и импульсные струи жидкости высокого давления, эффективность которых значительно превышает стационарные струи. В монографии [4] приводится обзор исследований задачи импульсной генерации высоконапорных струй. Для получения струй с очень высокими параметрами обычно применяют импульсные водометы (жидкость получает импульс за счет удара ускоряемого пороховыми газами поршня) и гидропушки (жидкость в стволе ускоряется вместе с поршнем). Отметим, что наиболее близкое отношение к рассматриваемой в настоящей статье теме имеет схема безпоршневого импульсного водомета — жидкая масса ускоряется непосредственно газом. Расчеты и эксперимент [4, 5] показали, что скорость таких струй может достигать 1600 м/с при достаточно большой дальности при истечении, как в воздух, так и в затопленное водой пространство. Отметим, что применение такого способа для создания режима периодических импульсных струй затруднительно из-за сложности “перезарядки” устройства.

При более умеренных скоростях высоконапорные гидроструи находят применение при разработке полезных ископаемых, таких как уголь, руда. Исследования способов разрушения материалов струями, проводимые различными научными коллективами (см. [6]), показали, что их эффективность сильно зависит от характера прилагаемых нагрузок: статические (непрерывные) или динамические (пульсирующие), которые создаются струей жидкости, воздействующей на разрушаемый объект. Исследования [6] показали, что происходит заметный рост производи-

тельности струйных установок, использующих пульсирующие технологии, а также снижение удельной энергоемкости разрушения материалов и снижение потребления воды, что обеспечивает допустимую влажность добываемого полезного ископаемого. Для успешного применения гидроимпульсного способа разрушения, обеспечивающего создание повторно-переменных нагрузок, необходимы эффективные и удобные в эксплуатации устройства, формирующие импульсные струи требуемых параметров. В [6] приводится обзор устройств, способных обеспечивать пульсационный режим работы струйных установок. В том числе описывается воздушный пульсатор, где прерывистость течения создается за счет периодического введения порций воздуха в струю жидкости. Как правило, в таких установках для организации пульсирующих режимов работы используются механические устройства.

В настоящее время известны примеры струйного течения в гидравлической системе, где имеют место устойчивые интенсивные кавитационные автоколебательные режимы при постоянных параметрах, подаваемых в систему воды и воздуха, без каких-либо механических систем, возбуждающих колебания [2, 7]. При определенных условиях реализуется развитый автоколебательный режим, близкий к прерывистому течению с весьма малым потреблением жидкости, который может быть использован для организации генерации периодических импульсных струй.

Изучение механизма автоколебаний показало, что важным фактором является фазовый сдвиг колебаний давления в форкамере и каверне; так, на осциллограмме перепада давления на кавитаторе на каждом периоде формируются два импульса — положительный импульс способствует истечению дискретной жидкой массы, благодаря отрицательному импульсу истечение прекращается или даже имеет место выброс газа из каверны в форкамеру (описание и схему установки см. ниже, в п. 1). В настоящей работе исследуются автоколебательные режимы в гидравлической магистрали, содержащей сопротивление (кавитатор), вентилируемую газовую каверну и сужающийся канал (сопло), через который жидкость и газ истекают в атмосферу. При умеренных поддувах газовая полость удерживается в области за кавитатором, но с ростом поддува воздуха пульсации, а также среднее давление в каверне увеличивается и происходит все более значительный выброс воздуха в область перед кавитатором — при этом автоколебания продолжают, но происходит заметное изменение их параметров. Важным параметром является соотношение гидравлических сопротивлений кавитатора и сопла. При большом сопротивлении кавитатора, когда ширина втекающей в каверну струи меньше ширины минимального сечения сопла, автоколебания наблюдаются только при значительных поддувах воздуха в каверну. При уменьшении сопротивления кавитатора режим колебаний с выбросом газа в подводящую воду магистраль сдвигается в сторону меньших поддувов газа. Было проведено изучение масштабного эффекта в диапазоне давлений напора жидкости от 0.05 до 0.4 МПа. Экспериментальные данные показали, что величина интенсивности пульсаций давления в каверне, отнесенная к давлению напора, уменьшается с ростом напора, однако имеет тенденцию к выходу на горизонтальную асимптоту, что хорошо согласуется с результатами теоретических расчетов.

1. ПЛОСКАЯ СТРУЙНАЯ УСТАНОВКА

Схема плоской модели кавитационного генератора импульсных струй показана на рис. 1: струя истекает из форкамеры 1 через зазор $D = 10$ мм между кромкой кавитатора 2 и прямолинейной стенкой канала. За кавитатором образуется вентилируемая газовая полость 3. Сопло установки состоит из входной части (окружность радиусом 10 мм), канала шириной $H_0 = 10$ мм 4 и линейно сужающейся части 5 с шириной выходного сечения $H_e = 6$ мм. Перед кавитатором может стоять конфузور (6), на выходе из сопла коллиматор — насадок постоянного сечения 7. На рис. 1 схематически показано стационарное идеальное течение жидкости с замыканием каверны на твердой стенке. Экспериментальные данные получены при давлении напора жидкости 0.1 МПа. Исследована зависимость интенсивности ударных воздействий на экран от дистанции до экрана, а также от длины сопла (изменялась длина центральной части сопла или длина концевой насадки (коллиматора)). Также проведены исследования влияния формы кавитатора на интенсивности ударного воздействия на экран, установленный перпендикулярно направлению истечения струй из генератора. Проводилась запись осциллограмм пульсаций давления в форкамере, каверне и в угловой точке 8, где происходит ударное взаимодействие струи с плоской стенкой — экраном 9 (описание экспериментальной аппаратуры дано в [8]).

В качестве гидравлических характеристик течения использовались осредненные по времени величины давлений в форкамере и каверне, а также измеренные в стационарных условиях расходы в подводящих жидкость и газ магистралях. По осциллограммам давления определялась ведущая частота автоколебаний, а также средняя за период записи осциллограммы интенсивность

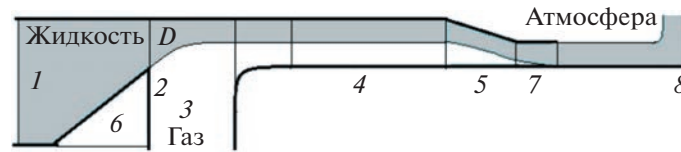


Рис. 1. Схема плоской струйной установки.

пульсаций давления в форкамере A_0 , каверне A_k и интенсивность ударных импульсов A_m в угловой точке экрана 8 (см. рис. 1). Средняя амплитуда пульсаций давления определялась следующим образом: на каждом периоде колебаний определялась разность максимального и минимального значений давления, затем находилась средняя величина по всем полным периодам автоколебаний за время записи осциллограммы (время записи и количество точек выбирались из условий, чтобы запись содержала не менее 10 периодов автоколебаний и на каждый импульс приходилось не менее 10 точек записи). Изучались только режимы автоколебаний самой низкой, первой моды (см. [8]).

Основные безразмерные параметры течения: коэффициент давления в каверне C_d , коэффициент поддува газа в каверну C_q , число Струхала Sh

$$C_d = \frac{\bar{p}_k - p_a}{\bar{p}_0 - p_a} = \frac{p_k}{P_0}, \quad C_q = \frac{Q_g}{Q_l}, \quad Sh = f \frac{D}{V_\infty}, \quad V_\infty = \sqrt{2P_0/\rho_l}.$$

Здесь верхняя черта означает осреднение величины по времени, p_k и p_0 — давление в каверне и в форкамере установки, p_a — атмосферное давление, Q_g — объемный расход поддуваемого в каверну газа при давлении в каверне, Q_l — расход жидкости, ρ_l — плотность жидкости, f — характерная (ведущая) частота автоколебаний.

Влияние геометрических характеристик сопла и кавитатора изучались при неизменных: ширине щели кавитатора ($D = 10$ мм), входном сужении (окружность радиусом 10 мм), ширине участка постоянного сечения 10 мм (4 на рис. 1), неизменном сужении сопла 5 с 10 до 6 мм; режимы автоколебаний соответствовали первой (низкочастотной) моде — см. [8]. Эффективность генерации импульсов для различных режимов течения и для различных параметров сопла и кавитатора оценивалась только путем сравнения величин A_m/P_0 .

2. ДАЛЬНОБОЙНОСТЬ СТРУИ

На рис. 2 и 3 приведены зависимости C_d , Sh и интенсивности пульсаций давления A_k и A_m от коэффициента поддува C_q для сопла общей длиной 30 мм (входное сужение, участок постоянно-

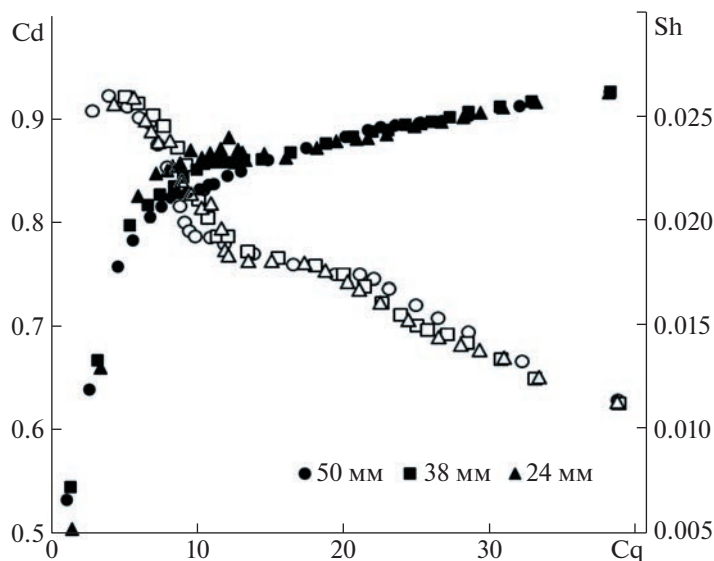


Рис. 2. Зависимости C_d от C_q (левая шкала, заливные знаки) и Sh от C_q (правая шкала, прозрачные знаки) при длине сопла 30 мм, $P_0 = 0.1$ МПа, для трех значений расстояния от среза сопла до экрана (24, 38, 50 мм).

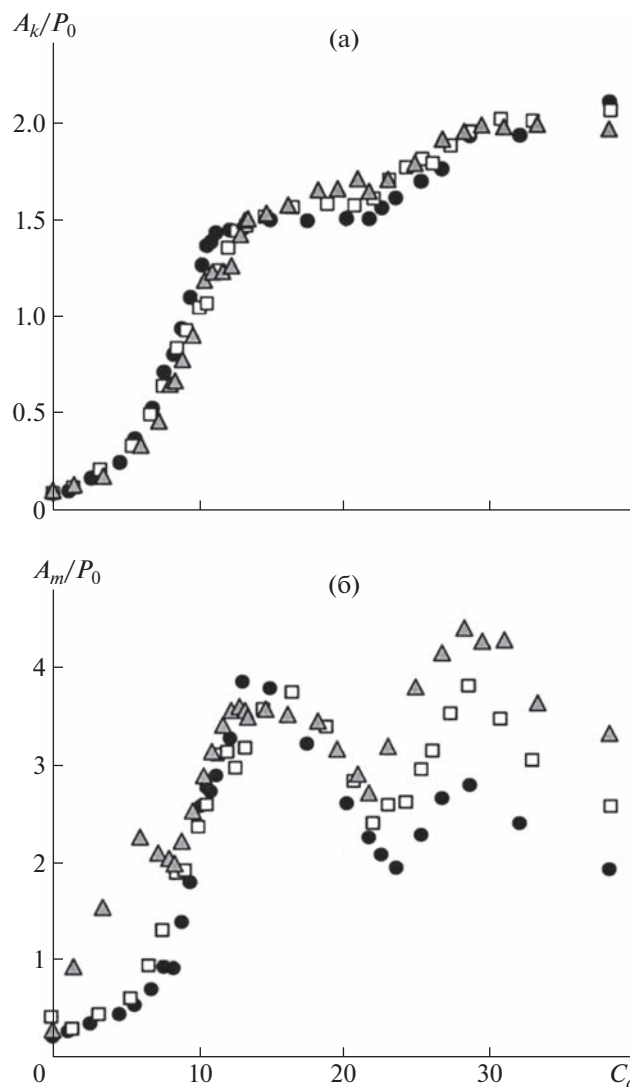


Рис. 3. Зависимости относительной интенсивности пульсаций давления в каверне (а) и ударных импульсов давления на экране (б) от коэффициента поддува при длине сопла 30 мм, $P_0 = 0.1$ МПа, для трех значений расстояния от среза сопла до экрана (24, 38, 50 мм). Обозначения точек те же, что и на рис. 2.

го сечения, выходное сужение) при различных величинах расстояния от среза сопла до экрана: 24, 38 и 50 мм.

В исследованном диапазоне дистанций до экрана (примерно 4–8 калибров выходного сечения сопла) эта величина практически не влияет на характеристики пульсаций в сопле. В зависимости от величины поддува газа C_q характер течения меняется существенно. При небольших поддувах ($C_q \sim 1$) струя истекает из щели D (рис. 1) практически стационарно; с ростом C_q начинается интенсивный рост давления в каверне (или коэффициента давления C_d), а также интенсивности пульсаций давления в каверне (рис. 3а). Частота пульсаций падает (рис. 2), что можно объяснить уменьшением скорости распространения волн вдоль границы каверны с ростом давления [8]. При значениях коэффициента поддува C_q , больших 10, изменение этих параметров замедляется. При этих поддувах каверна уже не ограничивается плоскостью кавитатора (2, на рис. 1) – начинаются все более интенсивные выбросы газа в область перед кавитатором (в форкамеру 1, рис. 1), что существенно меняет конфигурацию течения. Интенсивность пульсаций давления в каверне (рис. 3а) монотонно растет с ростом C_q , а вот амплитуда ударного воздействия порций жидкости на экран (в точке 8, рис. 1) имеет два максимума (рис. 3б). Второй максимум находится в области автоколебаний с существенными выбросами газа в форкамеру. Видно, что для дистанции до экрана 25 мм второй максимум больше первого. Это можно объяснить эффек-

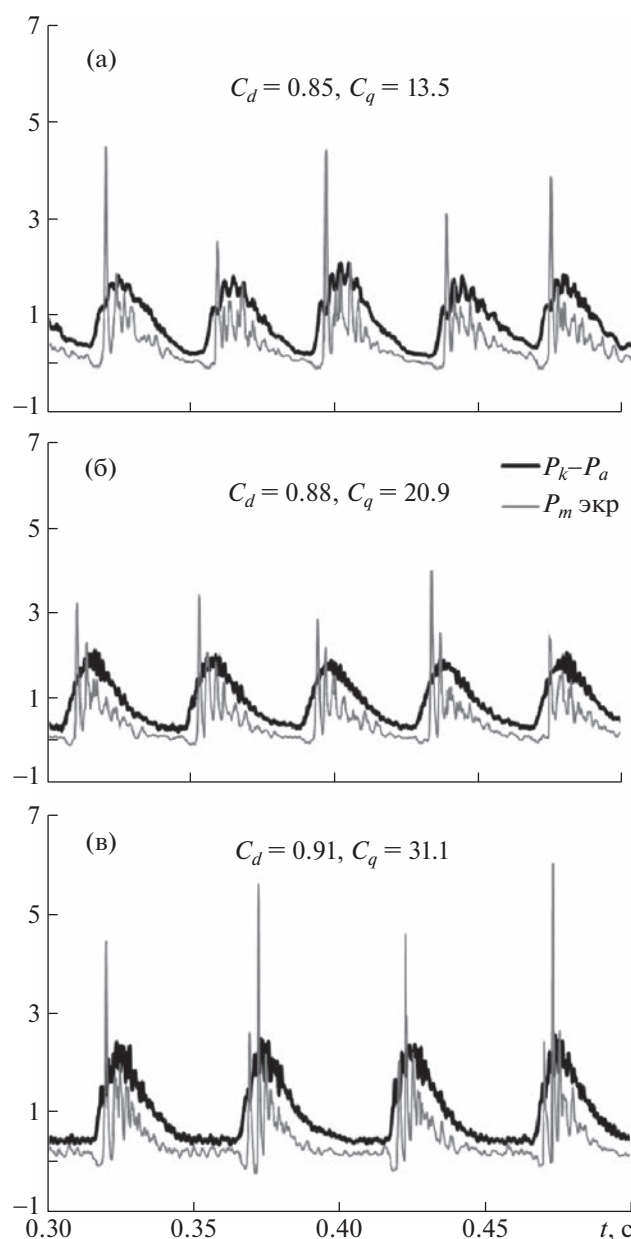


Рис. 4. Осциллограммы пульсаций давления в каверне (жирная линия) и в угловой точке экрана (тонкая) для сопла длиной 30 мм, при дистанции до экрана 25 мм для различных значений (C_d , C_q). Давление напора $P_0 = 0.1$ МПа.

том увеличения дистанции разгона порции жидкости за счет пространства, вытесненного газом в форкамере, да и давление газа в каверне здесь выше. Видно, что первый максимум почти не меняется с изменением дистанции от 25 до 50 мм, второй же быстро уменьшается с удалением экрана от среза сопла и при дистанции 50 мм он уже заметно меньше первого. Это говорит о значительном возмущении струйного течения при наличии выбросов в форкамеру, в результате чего дальнобойность струйной установки в режиме отсутствия выбросов в форкамеру гораздо выше, чем при наличии выбросов. Однако с точки зрения увеличения ударного воздействия на экран второй режим имеет перспективу, по крайней мере при использовании небольших дистанций от среза сопла до экрана.

На рис. 4 и 5 приведены фрагменты осциллограмм (длительностью 0.2 с) пульсаций давления в каверне p_k и в угловой точке экрана p_m при $P_0 = 0.1$ МПа для двух дистанций от среза сопла до экрана: 25 и 50 мм. Длительность записи каждого режима составляла 1 с, шаг записи по време-

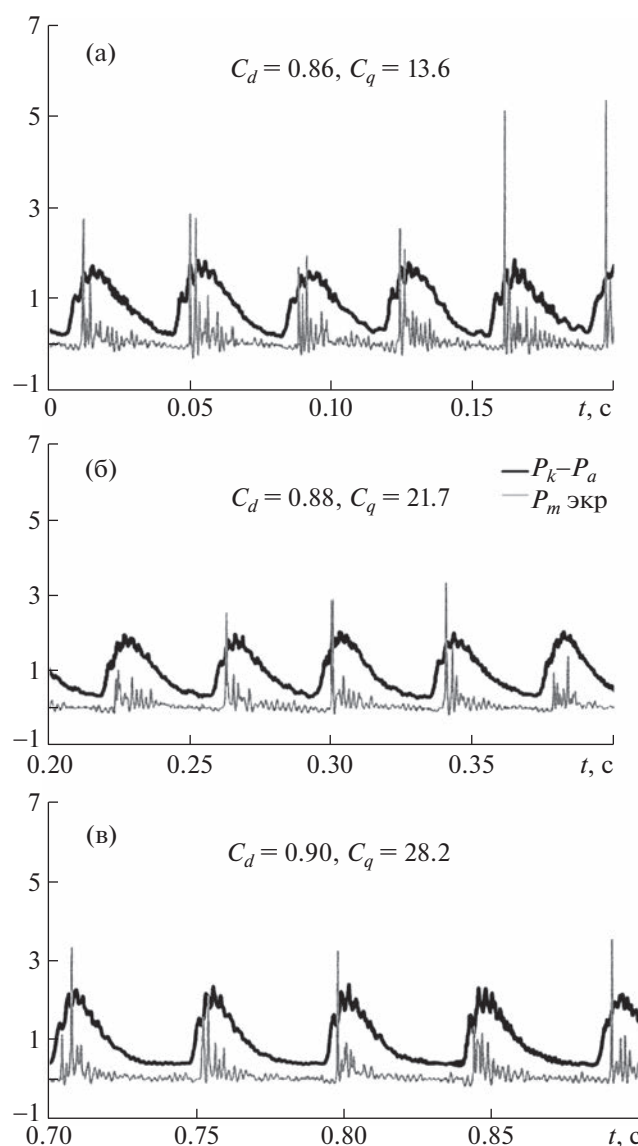


Рис. 5. Осциллограммы пульсаций давления в каверне (жирная линия) и в угловой точке экрана (тонкая) для сопла длиной 30 мм, при дистанции до экрана 50 мм для различных значений (C_d , C_q). Давление напора $P_0 = 0.1$ МПа.

ни 10^{-4} с. Видно, что для представленных случаев осцилляции давления в каверне близки к периодическим, импульсы давления на экране имеют ударный характер, а их амплитуда имеет значительный разброс. Представленные на рис. 4 и 5 осциллограммы получены для различных величин поддувов и соответствуют областям первого максимума, минимума и второго максимума осредненной величины амплитуды ударных импульсов (см. рис. 3б). Для дистанции до экрана 25 мм амплитуда пульсаций для второго максимума (рис. 4в, тонкие линии) выше, чем для первого максимума (рис. 4а). Видно, что ударное взаимодействие струи с экраном генерирует целую последовательность коротких импульсов. Для автоколебаний без выбросов газа в форкамеру наибольшую амплитуду имеет первый импульс, за которым следует последовательность затухающих импульсов, при наличии выбросов это не так. Осциллограммы для дистанции 50 мм (рис. 5а) показывают, что характер воздействия струй на экран для режима без выбросов почти не изменился. Для второго режима (рис. 5 в) амплитуда импульсов значительно падает.

Итак, в режиме автоколебаний без выброса газа в форкамеру получают более устойчивые струи жидкости, однако второй режим также заслуживает внимания — так как здесь можно получить более интенсивное воздействие при малых расстояниях до экрана.

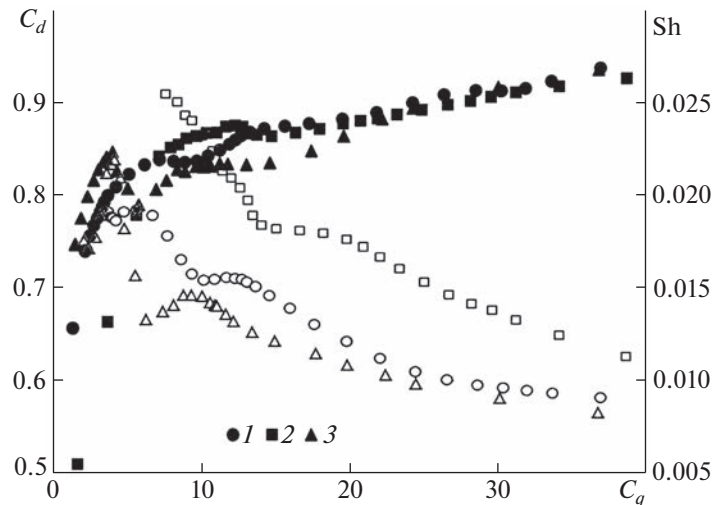


Рис. 6. Зависимость C_d от C_q (левая шкала, залитые знаки) и Sh от C_q (правая, прозрачные знаки) для сопел длиной 55, 30 мм, а также длиной 30 мм с коллиматором 25 мм (1, 2 и 3 соответственно). Давление напора $P_0 = 0.1$ МПа.

3. ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ СОПЛА

Проведены сравнительные исследования трех сопел — два сопла длиной 55 и сопло длиной 30 мм (длина менялась за счет изменения длины среднего разгонного участка). Третье сопло имело также длину 55 мм, форма его проточной части совпадала с 30 мм соплом, но за сужением 5 (см. рис. 1) имелся участок постоянного сечения — коллиматор 7 (рис. 1) шириной 6 мм и длиной 25 мм. В работе [5] отмечено полезное влияние коллиматора на интенсивность ударного воздействия на препятствие струи, истекающей из сопла гидропушки.

На рис. 6 и 7 приведены зависимости C_d , Sh и интенсивности пульсаций давления A_k и A_m от коэффициента поддува C_q для сопла длиной 55, 30 мм и длиной 30 мм с коллиматором 25 мм (кривые 1, 2, 3 соответственно). Если сравнить кривые 1 и 2, то видно, что с увеличением длины разгонного участка среднее давление в камере меняется мало, интенсивность пульсаций давления немного увеличивается, частота пульсаций значительно падает (в 1.5–2 раза), а интенсивность ударного воздействия на экран значительно увеличивается. Наличие коллиматора также уменьшает частоту автоколебаний и увеличивает ударное воздействие на экран (если сравнивать кривые 2 и 3 на рис. 7). Причем в режиме отсутствия выбросов газа за кавитатор увеличение длины сопла за счет разгонного участка или коллиматора (кривые 1 и 3 на рис. 11) дает примерно одинаковый эффект увеличения ударного давления на экране, а при наличии выбросов (с увеличением интенсивности поддува) эффективность коллиматора заметно падает.

На рис. 8 представлены расчетные зависимости скорости V/V_∞ (а) передней границы движущейся в канале сопла порции жидкости и давления в камере $(p_k - p_a)/P_0$ (б) от координаты этой границы X/D для тех же трех конфигураций с той же нумерацией кривых, что и на рис. 6. Здесь $X/D = 0$ — координата входа в сопло, $X/D = 3$ или 5.5 координата выходного сечения для сопел длиной 30 или 55 мм. Теоретическая модель [8] не учитывает влияние выбросов газа за кавитатор, поэтому для анализа выбрано значение коэффициента расхода газа $C_q = 15$, при котором имеют место интенсивные автоколебания, но еще отсутствуют существенные выбросы газа за кавитатор. Соответствующие значения C_d и Sh , определяющие начальную скорость порции жидкости и ее массу, выбраны на основании данных рис. 8 и 9. Видно, что скорость передней границы порции жидкости на выходе для сопла длиной 55 мм заметно больше, чем для сопла длиной 30 мм (кривые 1 и 2 на рис. 8а). Из сравнения кривых 1 и 3 того же рисунка видно, что на выходе из коллиматора за счет потерь в узком канале скорость границы жидкости близка к скорости на выходе из короткого сопла. Тем не менее эксперимент показывает, что наличие коллиматора увеличивает ударное воздействие на экран. Возможно, это связано с увеличением массы жидкости, имеющей высокую скорость на выходе из сопла (в нашем случае увеличивается и общая масса жидкой порции в связи с уменьшением частоты автоколебаний, см. рис. 6). На рис. 8б приведены графики роста давления в камере как функции координаты передней границы порции

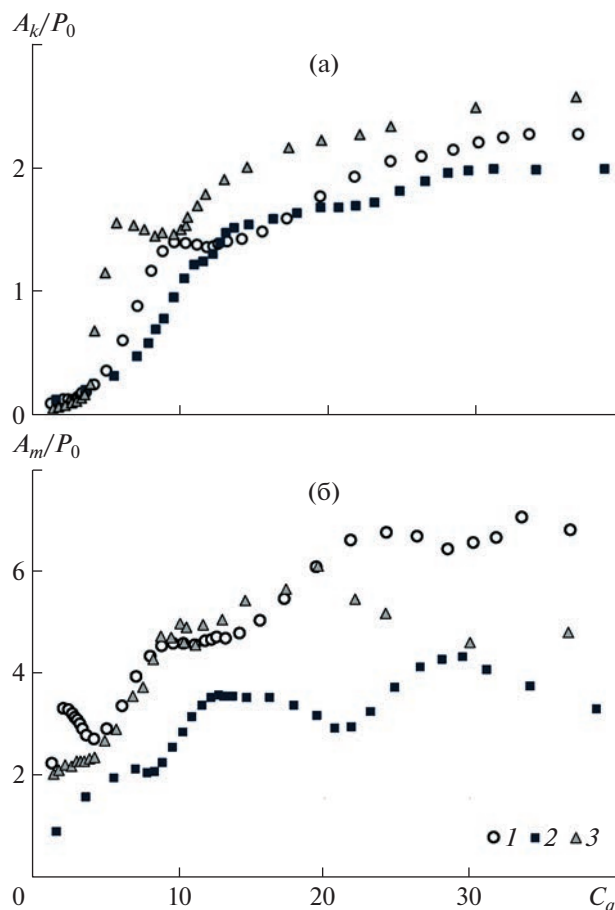


Рис. 7. Зависимость относительной интенсивности пульсаций давления в камере (а) и ударных импульсов давления на экране (б) от коэффициента поддува для тех же условий, что и на рис. 6.

жидкости в сопле. Качественно картина соответствует графикам рис. 7а — самый быстрый рост давления в камере наблюдается в случае сопла с коллиматором. То, что давление в камере в момент достижения границей жидкости выходного сечения сопла на рис. 8б несколько ниже реальной амплитуды пульсаций давления в камере, можно объяснить тем, что процесс расчета останавливался в момент достижения границей жидкой порции среза сопла.

4. ВЛИЯНИЕ КОНФУЗОРА

Выше отмечено, что режим течения с выбросом в область перед кавитатором представляет интерес с точки зрения получения максимального ударного воздействия струй на препятствие. Данные рис. 3б свидетельствуют об уменьшении дальности струи в этом режиме. Была проведена серия экспериментов с целью определить влияние линейного конфузора перед кавитатором на формирование импульсных струй. Ширина проточной части между кавитатором и стенкой камеры оставалась неизменной ($D = 10$ мм), использовалось сопло длиной 55 мм (1 на рис. 6), расстояние от среза сопла до экрана 25 мм. С ростом длины конфузора (уменьшением угла сужения) толщина струи, истекающей в камеру, увеличивается, однако растут потери, связанные с ростом сопротивления конфузора (см. [9]).

На рис. 9–10 приведены зависимости C_d , Sh и интенсивности пульсаций давления A_k и A_m от коэффициента поддува газа C_q для конфузоров с углами сужения 90° , 27° , 11° . Данные рис. 9 и 10 показывают, что при наличии конфузора начинается более раннее развитие интенсивных автоколебательных режимов. Частота автоколебаний несколько падает, что может быть связано с увеличением толщины втекающей в камеру струи, а интенсивность автоколебаний растет. Для конфузора с углом сужения 27° заметное увеличение величины средней амплитуды импульсов

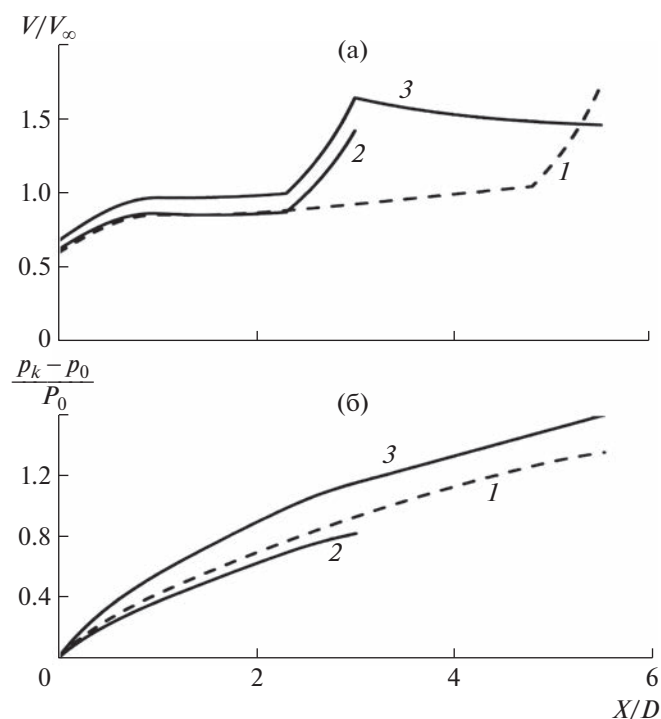


Рис. 8. Расчетные зависимости скорости V/V_∞ (а) и давления $(p_k - p_0)/P_0$ (б) от координаты X/D движущейся по каналу сопла передней границы жидкой порции для тех же условий, что и на рис. 6 (с той же нумерацией кривых).

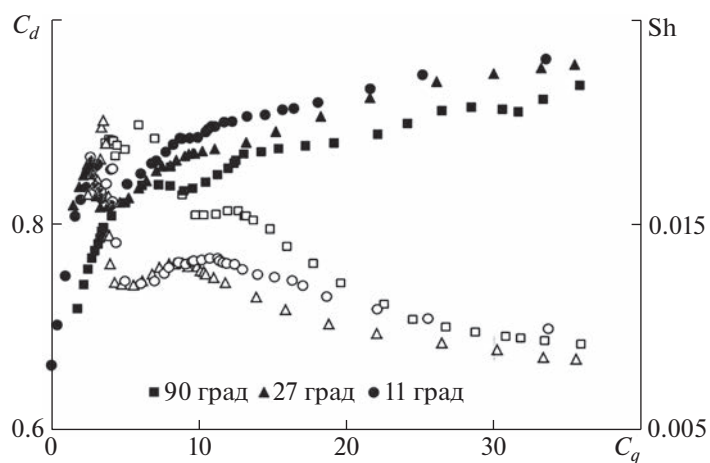


Рис. 9. Зависимость C_d от C_q (левая шкала, залитые знаки) и Sh от C_q (правая шкала, прозрачные знаки) для сопла длиной 55 мм (кривая 1 на рис. 6) при наличии перед кавитатором линейного конфузора с углами сужения 90°, 27°, 11°.

давления на экране по сравнению с кавитатором пластиной (90°) наблюдается практически во всем диапазоне поддува, см. рис. 10б. Для наиболее длинного конфузора (11°) наблюдается увеличение средней амплитуды импульсов давления на экране по сравнению с пластиной только в первом из упомянутых выше режимов. Таким образом, применение кавитатора с плавным сужением (конфузором) может существенно увеличить амплитуду импульсного воздействия генератора на экран.

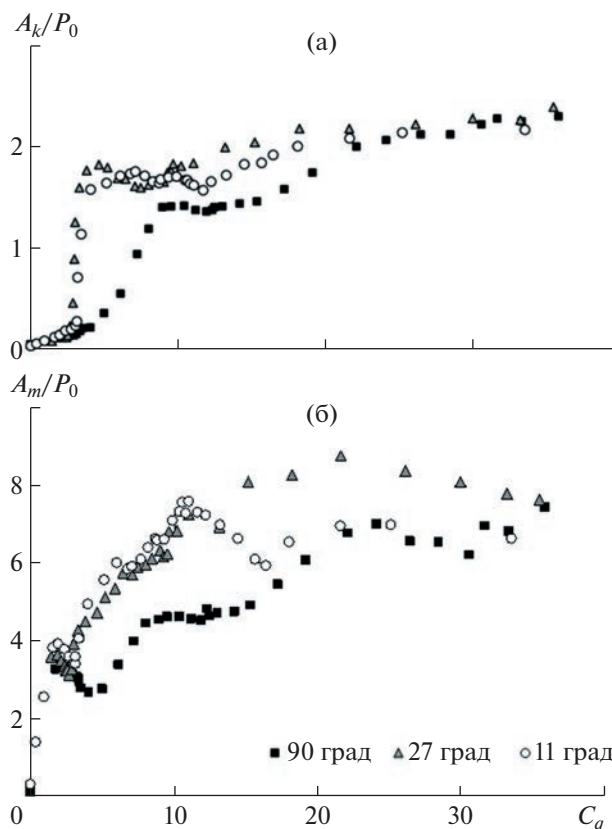


Рис. 10. Зависимость относительной интенсивности пульсаций давления в камере (а) и ударных импульсов давления на экране (б) от коэффициента поддува для тех же условий, что и на рис. 9.

5. ВЛИЯНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ КАВИТАТОРА

Из показанного выше следует, что с ростом поддува газа в камеру режим работы генератора импульсных струй в некоторый момент переходит в режим автоколебаний с периодическим выбросом выброса газа в область перед кавитатором. Этот момент в первую очередь определяется соотношением гидравлических сопротивлений кавитатора и сопла.

На рис. 11, 12 представлены характеристики течения в генераторе импульсных струй при фиксированных параметрах сопла (длина 55 мм, аналогично 1 на рис. 6), и расстоянии от среза сопла до экрана 25 мм при различных сопротивлениях кавитатора. Это достигалось в основном путем изменения ширины зазора $D = 23, 10, 5$ мм, в первых двух случаях использовался кавитатор пластина (угол 90°), в последнем линейный конфузор с углом наклона 33.7° . Здесь за характеристику втекающей в камеру через зазор D струи удобно принять ее ширину H_j вдали от кавитатора, которая вычислялась, в рамках теории идеальной жидкости, по измеренным расходу жидкости и давлению в камере при стационарном режиме течения без поддува газа. Кривые 1–3 на рис. 11, 12 соответствуют $H_j = 15.1, 6.6, 4.4$ мм.

Рост сопротивления кавитатора приводит к затягиванию перехода к режиму с выбрасыванием газа в область перед кавитатором, при этом в камеру истекает более тонкая струя. При $H_j = 4.4$ мм (кривая 3 на рис. 11, 12) ширина струи меньше минимальной ширины сопла (может происходить истечение без взаимодействия со стенками сопла), однако развитие колебаний все же начинается, но при больших расходах газа, а амплитуда колебаний A_k и ударных импульсов A_m гораздо меньше, чем в других случаях. При $H_j = 6.6$ мм (кривая 2) — ширина струи несколько превосходит минимальную ширину сопла. Здесь пульсации давления в камере и амплитуда ударных давлений на экране значительно возрастают, по сравнению с более тонкой струей. При дальнейшем увеличении ширины струи (1, на рис. 12) выбросы газа за кавитатор начинаются еще при меньших поддувах, пульсации давления в камере увеличиваются, а вот амплитуда ударных

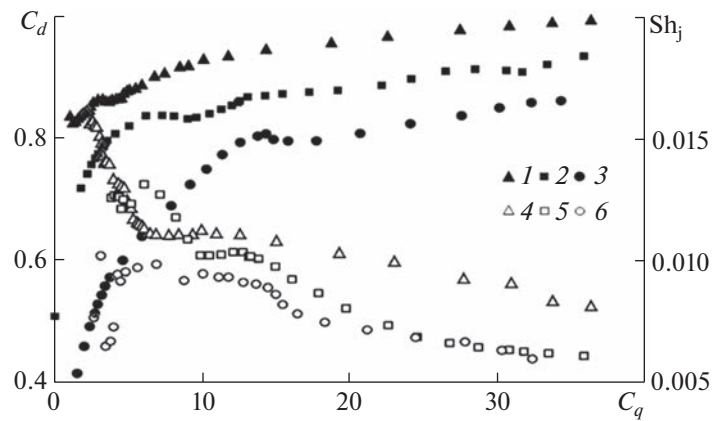


Рис. 11. Зависимость C_d от C_q (левая шкала, залитые знаки) и Sh_j от C_q (правая шкала, прозрачные знаки) для сопла длиной 55 мм (без коллиматора), дистанция до экрана 25 мм для различных величин D и различных характерных величин ширины истекающей в каверну струи $H_j = 15.1, 6.6, 4.4$ мм (кривые 1–3 и 4–6 соответственно).

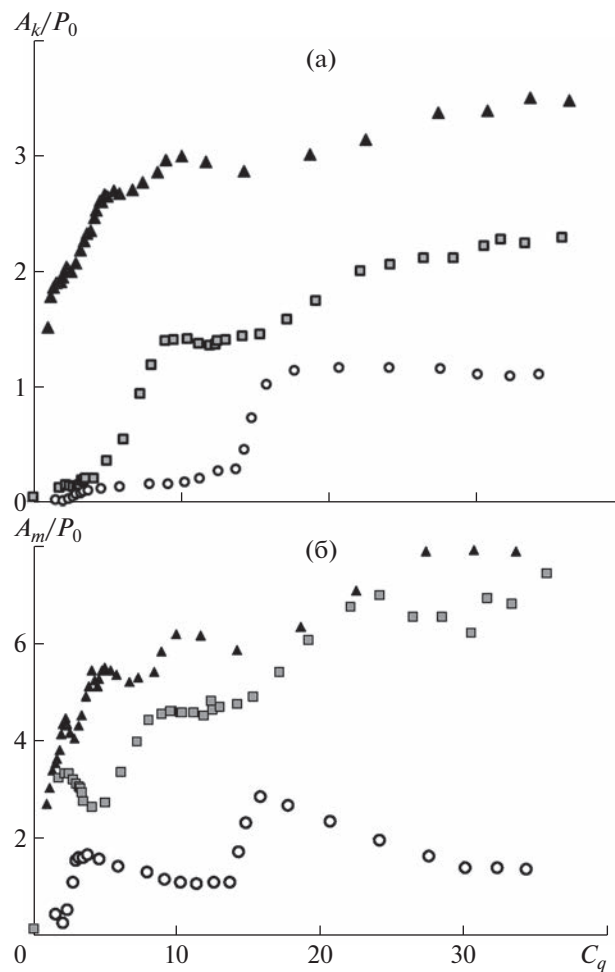


Рис. 12. Зависимость относительной интенсивности пульсаций давления в каверне (а) и ударных импульсов давления на экране (б) от коэффициента поддува для тех же условий, что и на рис. 11.

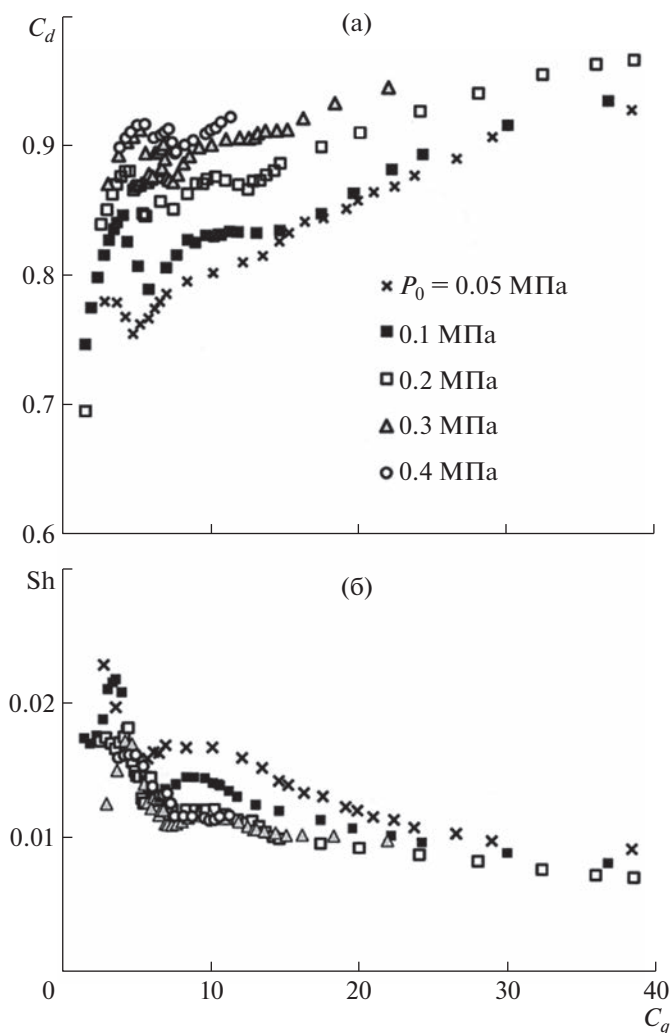


Рис. 13. Зависимости C_d (а) и Sh (б) от C_q для сопла общей длиной 55 мм (с коллиматором длиной 25 мм), при различных величинах давления напора P_0 .

импульсов A_m растет незначительно (см. рис. 12). На рис. 11 представлены графики для числа Sh_j , где в качестве характерной длины используется характерная ширина струи H_j . Близость значений этого числа в области развитых автоколебаний ($C_q = 8–15$) для всех трех случаев (см. рис. 11) показывает, что частота здесь примерно обратно пропорциональна ширине струи H_j .

6. МАСШТАБНЫЙ ЭФФЕКТ

Все представленные выше экспериментальные данные получены для давления напора $P_0 = 0.1$ МПа. Ранее было показано [8], что в зависимости от скорости течения имеет место масштабный эффект, т.е. безразмерные параметры автоколебаний A_k/P_0 зависят от P_0 . Были проведены исследования зависимости безразмерных характеристик пульсаций давления от P_0 для сопла общей длиной 55 мм (сопло длиной 30 мм и коллиматор длиной 25 мм) в диапазоне давлений напора P_0 от 0.05 до 0.4 МПа.

Масштабный эффект виден уже на рис. 13, где показаны зависимости C_d и Sh от C_q . С увеличением давления напора P_0 , коэффициент давления при фиксированном C_q растет (см. рис. 13а). Тем самым переход автоколебаний к режиму с выбросом газа за кавитатор будет происходить при меньших значениях коэффициента объемного расхода C_q . Однако с ростом P_0 масштабный эффект уменьшается. Данные для числа Струхала (рис. 13б) показывают, что для P_0 больших 0.2 МПа изменение становится незначительным. Более сильно масштабный эффект влияет на

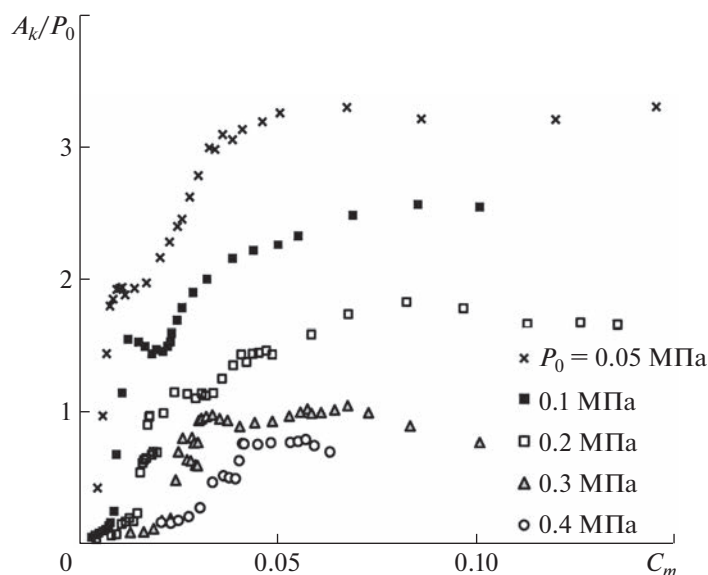


Рис. 14. Зависимость относительной интенсивности пульсаций давления в каверне для сопла общей длиной 55 мм (с коллиматором длиной 25 мм), при различных величинах давления напора P_0 .

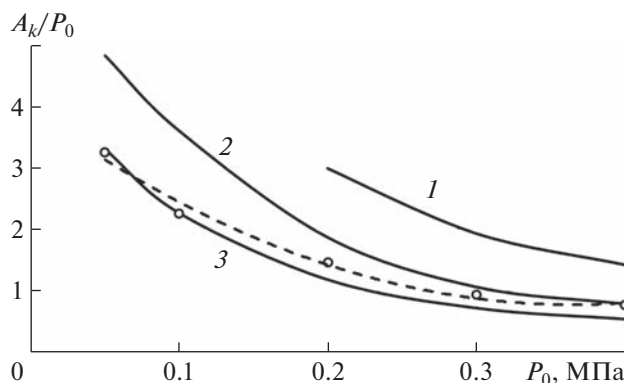


Рис. 15. Теоретические зависимости A_k/P_0 от давления напора P_0 при $C_m = 0.05$ для начального объема каверны 2×10^{-3} , 3×10^{-3} , 4×10^{-3} м³ (1, 2 и 3 соответственно). Сравнение с экспериментальными данными (штрихи).

величину относительных пульсаций давления A_k/P_0 , которая уменьшается с ростом P_0 , см. рис. 14. Кроме того, измерения интенсивности колебаний давления в каверне показали, что диапазон существования автоколебаний, если его оценивать в терминах C_q , с ростом P_0 существенно уменьшается. На рис. 14 вместо относительного объемного расхода C_q по горизонтальной оси отложены значения относительного массового расхода газа $C_m = M_g/M_l = (\rho_{gk}/\rho_l)C_q$ (M_g , ρ_{gk} — массовый расход газа и плотность газа при среднем давлении в каверне, M_l , ρ_l — массовый расход и плотность жидкости в установке). В терминах коэффициента массового расхода C_m диапазон существования устойчивых автоколебаний с ростом напора сохраняется, что может свидетельствовать о том, что с ростом P_0 будут сохраняться автоколебательные режимы при сохранении относительного массового расхода газа и жидкости. Кроме того, с ростом P_0 снижение относительной величины пульсаций давления в каверне замедляется.

На рис. 15 приведены теоретические зависимости относительной интенсивности пульсаций давления в каверне от давления напора для различных величин начального объема каверны

(2×10^{-3} , 3×10^{-3} , 4×10^{-3} м³ – 1, 2 и 3 соответственно). Была использована одномерная модель помпажного режима [8]. За максимальное давление в каверне принимался максимум давления в интервале времени, ограниченном сверху моментом достижения передней границей жидкой порции выходного сечения сопла. Начальная скорость и масса жидкой порции в расчетах задавались по измеренным в эксперименте C_d и Sh при $C_m = 0.05$. Кроме того, на рис. 15 приведены измеренные значения интенсивности пульсации давления в каверне при $C_m = 0.05$ при объеме каверны $\sim 10^{-3}$ м³. Видно качественное соответствие экспериментальных и расчетных кривых. Теория и эксперимент показывают эффект снижения относительных пульсаций давления в каверне с ростом давления напора P_0 , однако теоретические расчеты показали (см. [8]), что при $C_q = \text{const}$ зависимости выходят на горизонтальную асимптоту. Видно (рис. 15), что тенденция выхода на горизонтальную асимптоту имеет место и на практике. Впрочем, вопрос о работе генератора при больших напорах требует дальнейшего изучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены исследования автоколебательных режимов течения в гидравлической магистрали, содержащей сопротивление (кавитатор), вентилируемую газовую каверну и сужающийся канал (сопла), через который жидкость и газ истекают в атмосферу. Показана возможность использования режима автоколебаний для создания периодических импульсных струй. В отличие от известных импульсных установок, периодический режим прерывистого истечения жидкости реализуется здесь при постоянных параметрах, подаваемых в систему жидкости и газа, без применения каких-либо механических устройств.

Выяснено, что в области развитых автоколебаний существуют два различных режима течения – режим, где каверна в процессе пульсаций ограничена сечением кавитатора (при умеренных поддувах) и, при увеличении поддува, возникает режим с интенсивными выбросами газа в область перед кавитатором (в форкамеру). Показано, что дальнобойность истекающей из сопла в атмосферу импульсной струи заметно падает в этом режиме, по сравнению с режимом без выбросов за кавитатор. Однако на небольших дистанциях (до 4-х калибров выходного сечения сопла) интенсивность импульсов давления на экране во втором режиме превосходит режим без выбросов газа в область перед кавитатором. Показано, что плавное сужение канала перед кавитатором может способствовать существенному увеличению амплитуды импульсов давления на экране. Исследования показали, что увеличение длины сопла (рассматривалось увеличение длины как за счет центральной вставки, так и за счет применения коллиматора на выходе из сопла) способствует увеличению амплитуды ударных импульсов на экране.

Было проведено изучение масштабного эффекта в диапазоне давлений напора жидкости от 0.05 до 0.4 МПа. Экспериментальные данные показали, что величина интенсивности пульсаций давления в каверне, отнесенная к давлению напора, уменьшается с ростом напора, однако имеет тенденцию к выходу на горизонтальную асимптоту, что согласуется с результатами теоретических расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов И.И., Прокофьев В.В. Закономерности развития волн на поверхности каверны с отрицательным числом кавитации // Доклады РАН. 2006. Т. 409. № 1. С. 43–47.
2. Козлов И.И., Очеретяный С.А., Прокофьев В.В. Автоколебательные режимы в жидкой струйной завесе, разделяющей газовые области с различными давлениями // Изв. РАН МЖГ. 2013. № 6. С. 33–43.
3. Очеретяный С.А., Прокофьев В.В. Влияние сужения сопла на работу генератора периодических импульсных струй // Изв. РАН МЖГ. 2022. № 2. С. 14–26.
4. Семко А.Н. Импульсные струи жидкости высокой скорости и их применение: монография / Под общ. ред. А.Н. Семко. Донецк: ДонНУ. 2014. 370 с.
5. Atanov G.A., Semko A.N. Numerical Analysis of the Jet Flows of Compressible Water // Proc. of International Summer Scientific School “High Speed Hidrodynamics”. June 2004, Cheboksary. Computational Publications. Russia. 2004. P. 39–44.

6. *Савченко Н.В., Яхно О.М.* Гидродинамические способы создания пульсирующих струй для гидроразрушения твердых материалов // Вестник Сумского гос. ун-та. Сер. Технические науки. 2003. № 12 (58). С. 92–98.
7. *Шкапов П.М., Благовещенский И.Г., Гартиг Е.Б., Дорошенко С.А.* О гистерезисном характере развития автоколебаний в гидрролинии с ограниченной искусственной газовой каверной на выходе // Наука и образование. Электронное науч.-техн. изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 10. С. 1–10.
8. *Прокофьев В.В., Очеретяный С.А., Яковлев Е.А.* Использование кавитационных автоколебательных режимов для генерации периодических импульсных струй // ПМТФ. 2021. Т. 62. № 1. С. 97–108.
9. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям / Под ред. И.Е. Идельчик. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1960. 464 с.

УДК 532.5:551.465

УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ГЛУБОКОВОДНЫХ ПРОТИВОТЕЧЕНИЙ В СЕВЕРО-ВОСТОЧНОЙ ЧАСТИ ЧЕРНОГО МОРЯ

© 2023 г. Н. В. Маркова^а, О. А. Дымова^{а,*}

^аМорской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия

*E-mail: olgadym@yahoo.com

Поступила в редакцию 23.01.2023 г.

После доработки 20.05.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

На основе результатов численного моделирования проведено исследование факторов возникновения узких нестационарных течений, формирующихся в Черном море в нижней части постоянного пикноклина и глубже. Предпосылки генерации глубоководных противотечений в гидрофизических полях Черного моря изучены на примере его северо-восточного региона, где они обнаруживаются наиболее часто. В сентябре 2016 г. и феврале 2017 г. противотечения в районе северокавказского побережья были зафиксированы по данным наблюдений буя-профилера ARGO ID6901833. На основе численной модели МГИ с разрешением 1.6 км и ассимиляцией данных гидрологических наблюдений температуры и солёности выполнено численное моделирование гидрофизических полей Черного моря для периода 2016–2017 гг. По результатам расчета воспроизведено изменение направления глубоководных течений в указанном районе, проанализированы поля основных гидрофизических параметров и их производные характеристики. Показано влияние мезомасштабных антициклонических вихрей и градиентов плотности на структуру и изменчивость поля скорости. Установлено, что противотечения распространялись в антициклоническом направлении вдоль материкового склона на горизонтах от 50–100 до 500 м в течение нескольких суток, а их формирование происходило в условиях ослабления циклонического Основного Черноморского течения в верхнем слое моря и усиления Керченского антициклона.

Ключевые слова: Черное море, моделирование, течения, противотечения, плотность, скорость, антициклонические вихри

DOI: 10.31857/S1024708423600057, **EDN:** TSHOAY

Как было показано в ряде исследований по изучению динамики вод Черного моря, структура поля скорости под постоянным пикноклином, ядро которого находится на глубинах 50–100 м, а нижняя граница — около 300 м, значительно отличается от динамики вышележащего слоя. Единного круговорота бассейнового масштаба — Основного Черноморского течения (ОЧТ), распространяющегося над материковым склоном в верхнем 200-метровом слое моря в циклоническом направлении, под основным пикноклином не наблюдается. Глубоководные слои характеризуются существенно меньшими (в среднем на порядок) значениями скорости, преобладанием мезомасштабных вихрей разного знака завихренности и узкими нестационарными течениями [1, 2]. Согласно всем имеющимся на сегодняшний день данным, гипотеза единого сплошного антициклонического течения (противотечения) под ОЧТ, высказанная еще в публикации Неймана 1943 г. [3], не подтверждается. В то же время в ряде работ говорится об обнаружении под ОЧТ течений (или возможно частей вихревых структур), направленных противоположно основной струе ОЧТ и ранее принимаемых за части единого противотечения. Согласно этим исследованиям, локально противотечения обнаруживались как в слое основного пикноклина (50–300 м) [4, 5], так и в более глубоких слоях [6].

Более точно описать обнаруженные динамические структуры на основе данных измерений не позволяют малое количество и нерегулярность натурных наблюдений. Сложность проведения измерений скорости течений и существенная стратификация черноморских вод до последнего времени не давали возможности детально изучить трехмерное поле течений, поэтому особенно глубоководной циркуляции Черного моря чаще всего оставались за пределами основных на-

правлений исследований. Тем не менее в ряде работ внимание этой проблеме все же было уделено, в том числе приведены возможные объяснения особенностей динамики глубоководных течений. Так, например, в [7] было дано теоретическое обоснование усиления черноморских течений с глубиной, а в [4] показаны возможные причины противотечения, связанные с потоками плавучести на границах бассейна.

В последующих работах на основе численного моделирования были рассчитаны трехмерные поля течений Черного моря и показано наличие в различных частях моря глубоководных течений антициклонической направленности [8–12], однако детально эти особенности не исследовались из-за недостатка данных наблюдений, которые являются основой валидации любых численных расчетов.

В начале 2000-х гг. стартовала программа регулярных наблюдений параметров морской среды в Черном море при помощи автономных профилирующих буев-профилемеров ARGO. Были получены первые данные о дрейфе буев на различных глубинах, что позволило показать общую циклоническую направленность черноморской циркуляции [13–15], а также со временем накопить данные о профилях температуры и солёности вод Черного моря, используемые сейчас для валидации и ассимиляции при численном моделировании динамики морской среды.

В представленной работе внимание сфокусировано на одной из наиболее интересных особенностей поля течений Черного моря — узких нестационарных глубоководных противотечениях антициклонической направленности, распространяющихся вдоль материкового склона под основным пикноклином. В северо-восточном регионе они впервые были обнаружены при анализе численных расчетов на основе модели МГИ [16, 17], и в последующем их формирование было подтверждено данными натурных наблюдений и численными расчетами на основе других современных численных моделей [18–20]. На основе результатов численного моделирования было также показано, что аналогичные течения могут формироваться и в других районах Черного моря [19, 21], однако, учитывая труднодоступность данных наблюдений, настоящее исследование ограничено районом северокавказского побережья, для которого нашлись подходящие натурные данные для сопоставления.

Образование глубоководных противотечений в целом не имеет однозначного объяснения. Кроме указанных выше работ, в исследовании [22] было установлено, что совместный эффект бароклинности и рельефа дна (СЭБИР) может способствовать их генерации, а в работе [20] на основе 4-х численных моделей показано формирование таких противотечений в северо-восточной части моря в периоды наличия больших градиентов плотности в направлении северокавказского побережья. В статье [23] для Бенгальского залива было определено, что противотечения вблизи его западной границы являются, по сути, частями глубоководных вихрей разного масштаба. Таким образом, антициклоны могут выступать в качестве генераторов струйного течения между периферией вихря и свалом глубин, а также изменять наклон изопикнических поверхностей, вследствие чего могут формироваться внутренние волны и градиентные течения. В районе северокавказского побережья Черного моря вихревая динамика также довольно интенсивна и носит сложный характер, а по данным контактных [24] и спутниковых наблюдений [25] определяется бимодальный режим поверхностных течений.

1. МЕТОДИКА РАСЧЕТА И ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДАННЫЕ

Период 2016–2017 гг. выбран для рассмотрения в силу того, что по данным наблюдений ARGO [<http://www.coriolis.eu.org>] в этом временном интервале были неоднократно зафиксированы развороты траектории движения автономного буя-профилемера № 6901833, дрейфовавшего вдоль северокавказского побережья. Так, после запуска 1 июня 2016 г. в юго-восточной части Черного моря буй переносился течениями в циклоническом направлении (сонаправленно ОЧТ — на северо-запад) на своей парковочной глубине 200 м, но 6 сентября 2016 г. он развернулся и стал дрейфовать в обратном, юго-восточном направлении (рис. 1).

Этот дрейф продолжался 40 суток при корректном выполнении бую заданных станций профилирования гидрологических параметров. Новый разворот буя и возврат к его первоначальной траектории последовали 15 октября, и далее буй дрейфовал на северо-запад сонаправленно ОЧТ. Зимой 2017 г. буй опять дважды развернулся, но совершил подобный маневр уже за более короткое время (с 3 по 13 февраля), и при этом средняя скорость его движения была выше. Подобные изменения направления движения автономного буя-профилемера могли быть обусловлены как его переносом мезомасштабными вихревыми структурами, образующимися и/или движущимися вдоль материкового склона, так и наличием глубоководного течения антициклонической на-

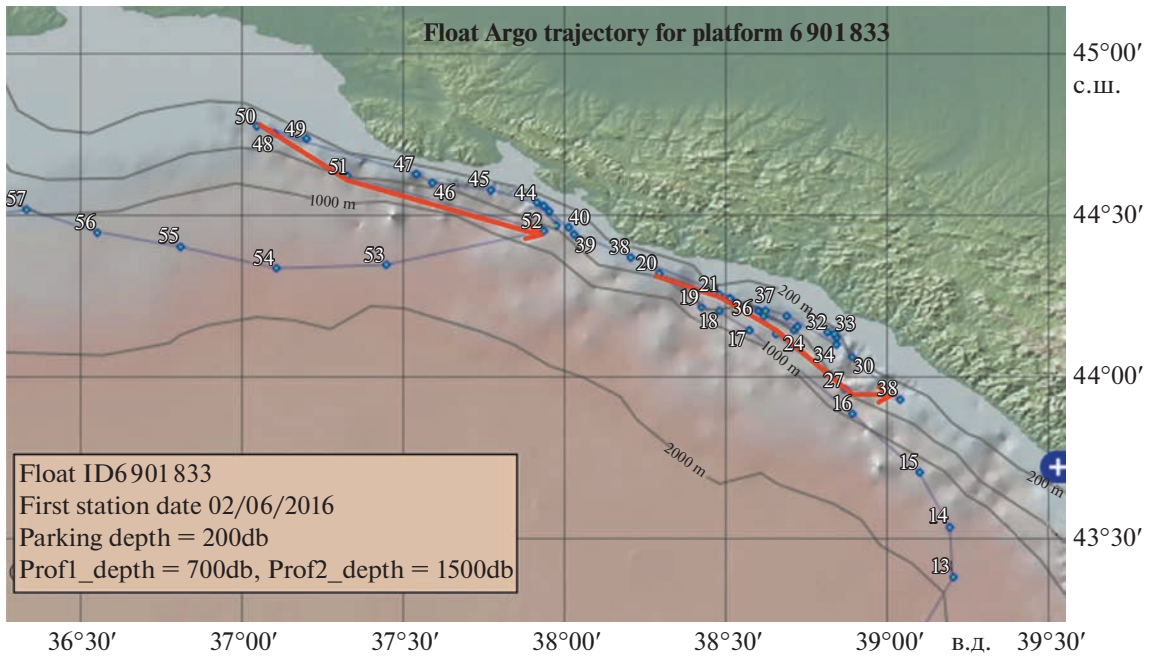


Рис. 1. Траектория буя-профилемера ARGO № 6901833 в районе северокавказского побережья в конце 2016 – начале 2017 г. (цифрами отмечены номера станций, красными стрелками показаны перемещения буя на юго-восток, период между станциями 5 сут).

правленности (противотечения относительно направления циркуляции на поверхности). Как упомянуто выше, в рассматриваемом районе ранее уже идентифицировались случаи проявления антициклонических течений под основным пикноклином [18–21]. Поэтому подобное поведение буя послужило основанием предположить наличие противотечений и в 2016–2017 гг. и исследовать условия их генерации на основе оценки пространственно-временной изменчивости модельных гидрофизических полей.

Для воспроизведения гидрофизических полей Черного моря в 2016–2017 гг. использовалась версия модели Морского гидрофизического института (модель МГИ) [26] с пространственным разрешением 1.6 км, дополненная процедурой усвоения натурных данных температуры и солености. Модель основана на полных уравнениях термогидродинамики океана в приближениях Буссинеска и гидростатики

$$u_t - (\xi + f)v + wu_z = -g\zeta_x - \frac{1}{\rho_0}(P^1 + E)_x + (v_v u_z)_z - v_H \nabla^4 u \quad (1.1)$$

$$v_t + (\xi + f)u + wv_z = -g\zeta_y - \frac{1}{\rho_0}(P^1 + E)_y + (v_v v_z)_z - v_H \nabla^4 v \quad (1.2)$$

$$P = g\rho_0\zeta + g\int_0^z \rho d\mu = g\rho_0\zeta + P^1 \quad (1.3)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (1.4)$$

$$\zeta_t + \int_0^H (u_x + v_y) dz = (Pr - Ev)/\rho_1 \quad (1.5)$$

$$T_t + (uT)_x + (vT)_y + (wT)_z = -\kappa_H \nabla^4 T + (\kappa_T T_z)_z + (\rho_0 c_p)^{-1} I_z + A^T \quad (1.6)$$

$$S_t + (uS)_x + (vS)_y + (wS)_z = -\kappa_H \nabla^4 S + (\kappa_S S_z)_z + A^S \quad (1.7)$$

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha_1 T - \alpha_2 T^2 + \alpha_3 S - \alpha_4 ST) \quad (1.8)$$

Уравнения модели (1.1–1.8) приведены в авторской записи согласно [26], где u, v, w – компоненты вектора скорости, ζ – уровень моря, f – параметр Кориолиса, g – ускорение свободного падения, P – давление, H – глубина моря, Pr – скорость выпадения осадков, Ev – скорость испарения с поверхности моря, T и S – температура и соленость, I – солнечная радиация, c_p – удельная теплоемкость морской воды, A^T и A^S – ассимиляционные источники, ρ – плотность, ρ_0 – средняя плотность морской воды, ρ_1 – плотность пресной воды, ν_H и κ_H – коэффициенты горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии, ν_V – коэффициент вертикальной турбулентной вязкости, κ_T и κ_S – коэффициенты вертикальной турбулентной диффузии тепла и соли, α_i – коэффициенты термического расширения и солёностного сжатия, ξ – относительная завихренность, E – кинетическая энергия. Индексы x, y, z, t указывают на дифференцирование по соответствующей координате.

Вертикальный турбулентный обмен в формулах (1.1), (1.2), (1.6), (1.7) параметризован с помощью модели замыкания Меллора-Ямады уровня 2.5 [27]. Уравнение состояния задается нелинейной зависимостью от температуры и солёности по формуле (1.8). Величины всех коэффициентов и особенности численной реализации модели подробно представлены в работе [26].

Уравнение (1.5) получено в предположении выполнения линеаризованного кинематического условия на свободной поверхности ($z = 0$) $w = -\xi_z + (Pr - Ev)\rho_1^{-1}$. Граничные условия на свободной поверхности ($z = 0$) для уравнений (1.1), (1.2), (1.6), (1.7) имеют вид

$$\rho_0 \nu_V u_z = -\tau^x, \quad \rho_0 \nu_V v_z = -\tau^y, \quad \rho_0 \kappa_T T_z = Q^T, \quad \kappa_S S_z = (Ev - Pr) S_0 \rho_1^{-1} + \gamma(S_0 - S^{cl}),$$

где τ^x и τ^y – касательные напряжения трения ветра, Q^T – поток тепла из атмосферы, S_0 – поверхностная солёность, S^{cl} – климатическая солёность, γ – параметр релаксации. На твердых участках границы задаются условия отсутствия нормальных потоков импульса, тепла и соли. Трение о дно не учитывается. В модели учитываются стоки рек и водообмен через проливы путем задания на жидких участках границы климатических температуры и солёности, а также скорости, рассчитанной через среднемесячные климатические расходы [28] (условие Дирихле). Один раз в сутки проводится усвоение данных наблюдений температуры и солёности: усвоение поверхностной температуры – по схеме, описанной в [26], вертикальных профилей температуры и солёности – по упрощенной процедуре четырехмерного анализа [29]. Процедура усвоения [29] основана на методике последовательной оптимальной интерполяции, когда ковариационные функции полей температуры и солёности вычисляются в предположении однородности и изотропности. Параметры ассимиляции для расчетов гидрофизических полей Черного моря с высоким пространственным разрешением предложены в [30]. По вертикали данные измерений сгруппированы в соответствии с глубинами расчетных горизонтов модели. В силу особенностей реализации процедуры четырехмерного анализа данные наблюдений усваиваются, если хотя бы две станции измерений на конкретную дату находятся на расстоянии менее 20 км от узла сетки модели [30].

Используемый вариант модели реализован на регулярной сетке $(1/48)^\circ$ по долготе и $(1/66)^\circ$ по широте, по вертикали заданы 27 неравномерно распределенных z -горизонтов со сгущением к поверхности. Батиметрия бассейна построена по данным EMODnet [<http://portal.emodnet-bathymetry.eu>] с разрешением $(1/8)'$. В качестве атмосферного форсинга использованы данные реанализа ERA5 с разрешением $(1/4)^\circ$ на каждый час по времени [doi: 10.24381/cds.adbb2d47].

Численный эксперимент проводился в два этапа. На первом этапе модель была запущена на более крупной сетке 5 км и с начальными условиями, соответствующими 1 января 2015 г. Начальные поля были построены по данным реанализа CMEMS для Черного моря [31], они включали данные об уровне моря, температуре, солёности и горизонтальных компонентах скорости. Расчет проводился на один год с использованием форсинга ERA5 и усвоением данных о температуре поверхности моря и профилей температуры и солёности ARGO. Полученная таким образом контрольная точка на 1 января 2016 г. была линейно интерполирована в узлы сетки 1.6 км, и далее эти поля использовались как стартовые для второго этапа – расчета с высоким разрешением. На этом этапе эксперимент проводился с 1 января 2016 г. по 1 марта 2017 г. с усвоением данных измерений, включающих данные профилирования температуры и солёности ARGO [<http://www.coriolis.eu.org>] и БОД МГИ (87, 89, 91 рейсы НИС “Профессор Водяницкий”) [<http://bod-mhi.ru/>], а также спутниковых наблюдений температуры поверхности моря (центр морских исследований Copernicus, продукт SST_BS_SST_L3S_NRT_OBSERVATIONS_010_013). Выходными данными модели являются среднесуточные поля уровня, температуры, солёности и компонент скорости.

Таблица 1. Среднеквадратические отклонения между модельными и натурными температурой и соленостью

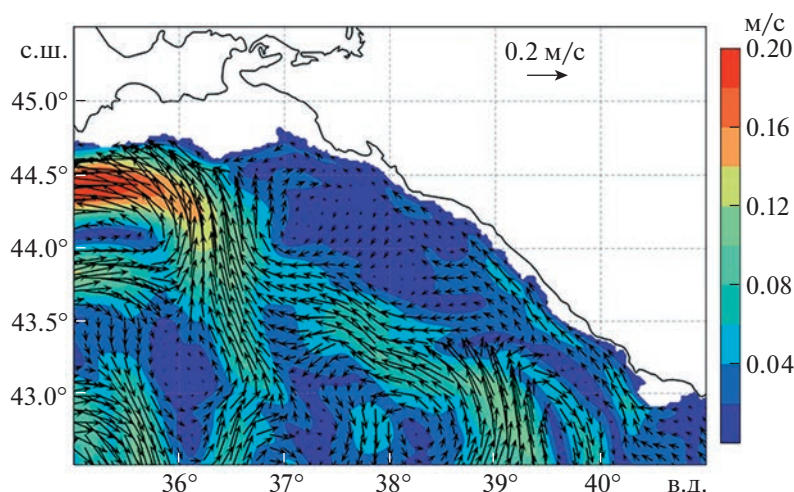
Глубина, м	Температура, °С	Соленость, ‰
0–5	0.905	0.177
5–30	2.006	0.106
30–100	0.525	0.288
100–300	0.137	0.260
300–800	0.057	0.076
800–1500	0.020	0.079

Результаты расчета валидировались по данным наблюдений. В качестве примера сопоставления в табл. 1 представлены среднеквадратические отклонения модельных данных от данных измерений, полученных с помощью буя-профилера ARGO № 6901833 за период 2 июня 2016 г. – 28 февраля 2017 г. Методика валидации подробно описана в [26]. Из таблицы видно, что наибольшая ошибка в рассчитанных полях температуры приходится на слой 5–30 м и равна 2.006°С, а в полях солености – на слой 30–100 м со значением 0.288‰. Отметим, что полученные отклонения не превышают дисперсию самих данных измерений в указанных слоях, составившую 3.48°С и 0.45‰ соответственно.

2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

По результатам проведенного численного моделирования было установлено, что в сентябре-октябре 2016 г. в районе северо-восточного свала глубин на горизонтах от 50–100 до 500 м события формирования узких струйных противотечений происходили дважды. Глубоководные противотечения распространялись вдоль северокавказского побережья на юго-восток со скоростями 3–10 см/с в период с 11 по 23 сентября 2016 г. и со скоростями 3–20 см/с в период с 6 по 18 октября 2016 г. На рис. 2 показано поле течений на горизонте 200 м в начале сентября, когда циркуляция в указанном слое носила еще циклонический характер, а скорости течений были направлены вдоль берега на северо-запад и не превышали 6 см/с. В это время уже начинал свое формирование Керченский антициклонический вихрь с центром около (44.5° с.ш., 37° в.д.) и диаметром примерно 100 км.

К середине сентября структура поля скорости в регионе изменилась: сформировавшийся Керченский антициклон достиг максимальной глубины 700 м, произошло усиление антициклонической завихренности поля скорости и появление противотечения от периферии вихря на юго-восток, вдоль северокавказского побережья. На дату 16 сентября (рис. 3а) противотечение

**Рис. 2.** Модельное поле течений в северо-восточной части Черного моря 4 сентября 2016 г. на горизонте 200 м.

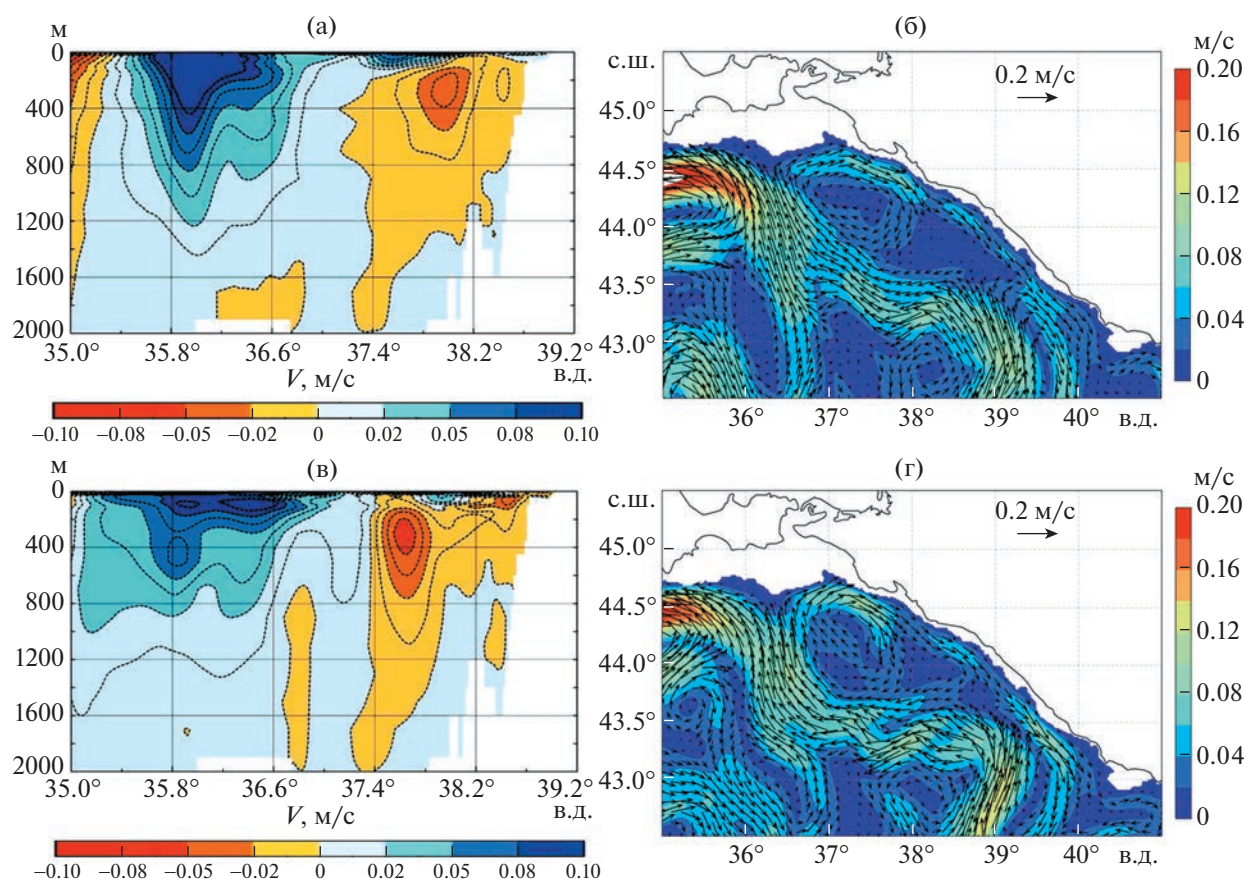


Рис. 3. Модельные поля скорости: меридиональная составляющая на зональном разрезе вдоль 44.23° с.ш. (а, в) и векторы скорости на горизонте 200 м (б, г) – 16 сентября (а, б) и 10 октября (в, г) 2016 г.

наблюдалось с глубины 75 м, его скорости на этом горизонте составляли 3–5 см/с, а на глубине 200 м, где дрейфовал буй ARGO, скорости противотечения достигали 10 см/с (рис. 3б). К горизонту 500 м течения постепенно ослабевали до значений 4–6 см/с, распространялись вдоль побережья на юго-восток и достигали района Гагаутской банки. Таким образом, время жизни рассматриваемого противотечения составило 13 сут, а его протяженность вдоль побережья – около 500 км.

Синхронно с изменениями интенсивности Керченского антициклона, противотечение ослабевало и вновь начало обнаруживаться только через 2 нед, с 6 октября 2016 г. (рис. 3в). К 9–10 октября его структура уже четко прослеживалась от зоны действия вновь усилившегося Керченского антициклона (рис. 3г). Протяженность противотечения на горизонтах 50–500 м вдоль побережья на юго-восток в этот период составила уже более 700 км, его скорости на горизонтах 50–100 м 10 октября достигали 19–20 см/с, на горизонте 200 м – 9 см/с, на горизонте 500 м – 5 см/с. С 12–13 октября сплошность струи противотечения была нарушена: в центральной своей части оно существенно ослабло, и начиная с 14 октября происходила смена направления течений вдоль всего побережья со значениями скорости до 3 см/с. К 18 октября противотечение уже не определялось. Таким образом, время жизни противотечения в октябре 2016 г. составило также 13 сут.

События формирования противотечений наблюдаются и в зимний период, когда при более интенсивном вертикальном перемешивании плотностная стратификация довольно слаба. Так, в феврале 2017 г. противотечение сформировалось на горизонтах от 100 до 500 м, т.е. верхняя его граница была глубже, чем в начале осени предыдущего года. На рис. 4 показаны поля гидрофизических характеристик в моменты отсутствия противотечения (рис. 4а) и его развитой фазы (рис. 4б). Скорости противотечения в феврале 2017 г. составили: на горизонте 100 м – до 12 см/с, на глубинах 150–200 м – до 4–5 см/с, на горизонте 500 м – максимум 3 см/с. Время жизни про-

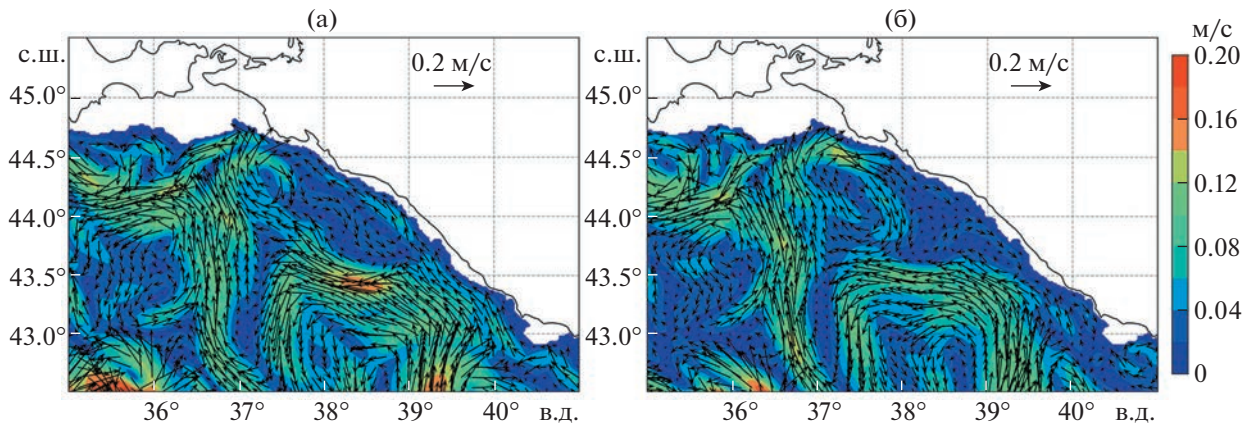


Рис. 4. Поля скорости в северо-восточной части Черного моря 1 февраля 2017 (а) и 9 февраля 2017 (б) на горизонте 200 м.

тивотечения в этот период составило 12 суток, а его протяженность вдоль побережья — около 300 км.

В обоих описанных событиях противотечение возникает в результате усиления Керченского антициклона. Можно предположить, что генерация противотечения зависит от накачки энергии Керченским антициклоном между периферией вихря и узким, крутым материковым склоном, характерным для северо-восточной части Черного моря.

Изменение интенсивности ОЧТ, его меандрирование, формирование и развитие антициклонов справа от стрежня влекут соответствующие изменения в термохалинной структуре и плотностной стратификации вод Черного моря. Рассмотрим детально трансформацию гидрофизических полей в северо-восточной части моря в сентябре 2016 г., когда были получены данные буя-профилимера ARGO. В динамике верхнего слоя в этот период наблюдалось ослабление ОЧТ. Как видно из рис. 5а, 4 сентября прибрежное циклоническое течение было прижато к берегу, а его скорость достигала 40–45 см/с. К 16 сентября скорость уменьшилась до 25–30 см/с и течение несколько отделилось от берега. Результаты моделирования качественно согласуются с картами поверхностных геострофических течений (рис. 5в, г), полученными в МГИ РАН по комбинированным данным о ветре и альтиметрии [http://dvs.net.ru/mp/data/201609vw_ru.shtml].

Совместный анализ термохалинной и динамической структуры вод вблизи северокавказского побережья показал, что при ослаблении циклонической циркуляции (рис. 5б) и развитии Керченского антициклона (рис. 3б) увеличивается соленость вод около материкового склона (рис. 6а), происходит выравнивание изопикнических поверхностей в слое 75–250 м (рис. 6б) и даже изменение угла наклона изопикн в слое 400–700 м (рис. 6в). При этом наблюдается усиление меридионального переноса глубинных вод в южном направлении: как видно из рис. 6в меридиональная составляющая скорости течения отрицательна и достигает значений минус 6 см/с в слое 150–500 м.

Анализ динамических характеристик циркуляции показал, что в сентябре 2016 г. в районе над материковым склоном южнее г. Туапсе в период дрейфа буя-профилимера произошла смена знака относительной завихренности $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ с положительного (циклоническая завихренность, рис. 7а) на отрицательный (антициклоническая завихренность, рис. 7б).

В работе [32] показано, что качественную оценку динамических свойств циркуляции, в том числе и мезомасштабных движений, целесообразно проводить на основе уравнения потенциального вихря в формулировке Россби, т.к. слагаемые уравнения имеют размерность завихренности, и эта форма записи упрощает физическую интерпретацию результатов. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\sigma = \Delta\psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \Delta\psi + f^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

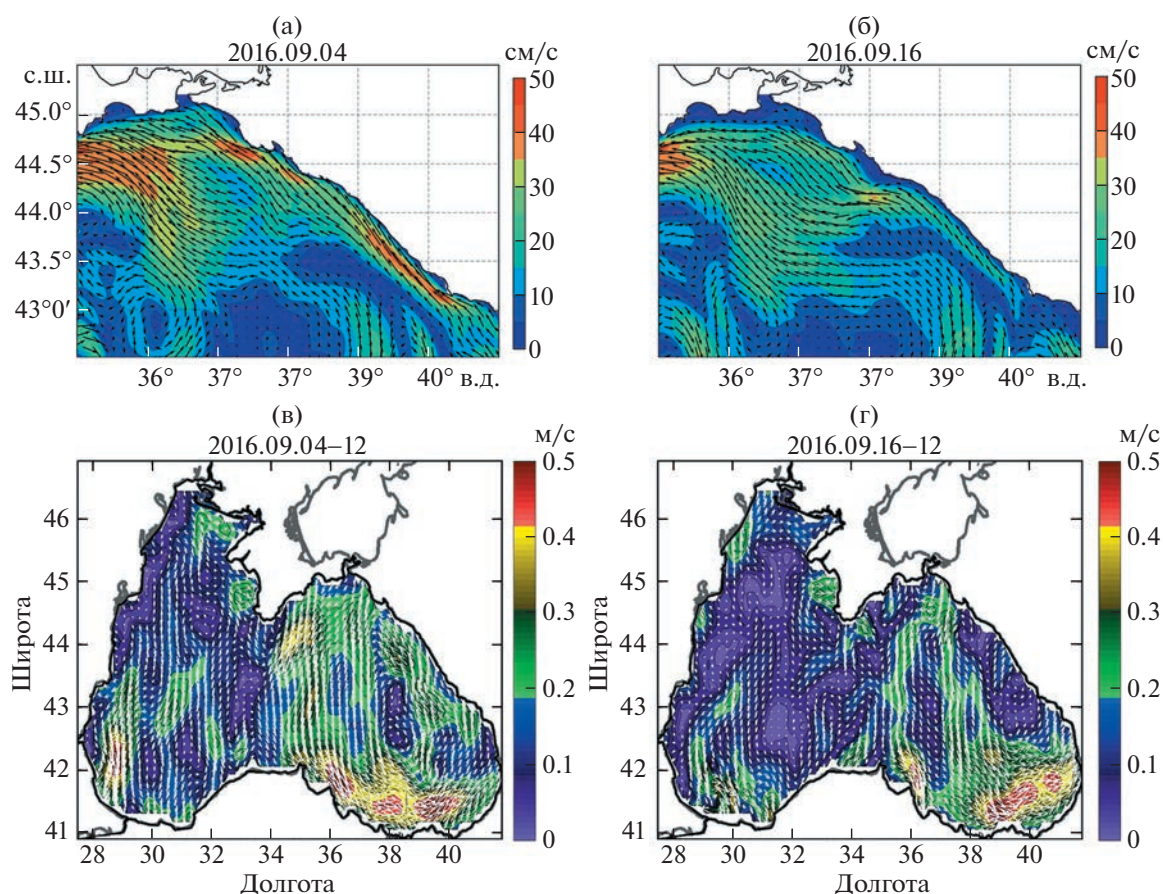


Рис. 5. Модельные поля скорости на горизонте 5 м (а, б) и скорость поверхностных течений по данным ветра и альтиметрии (в, г) [http://dvs.net.ru/mp/data/201609vw_ru.shtml] на даты 4 сентября (а, в) и 16 сентября (б, г) 2016 г.

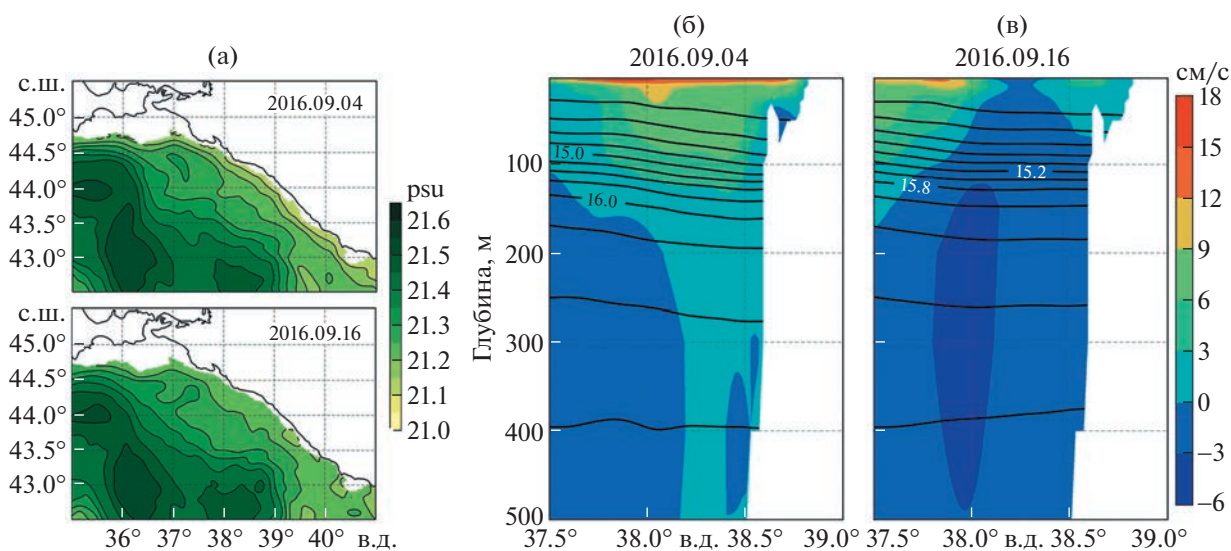


Рис. 6. Модельное поле солёности на горизонте 200 м (а). Меридиональная скорость течения (цвет) и изолинии условной плотности (черные линии) на зональном разрезе вдоль 43.8° с.ш. на 4 сентября (б) и 16 сентября (в) 2016 г.

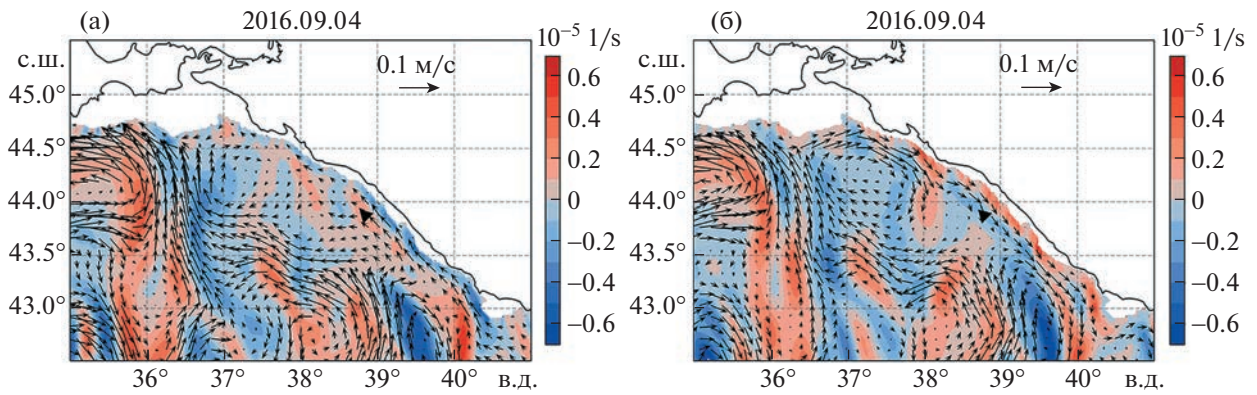


Рис. 7. Относительная завихренность вектора скорости (цвет) и поле скорости (стрелки) на горизонте 200 м на 04.09.2016 (а) и 16.09.2016 (б). ▲ — точка с координатами 38.82° в.д., 43.83° с.ш.

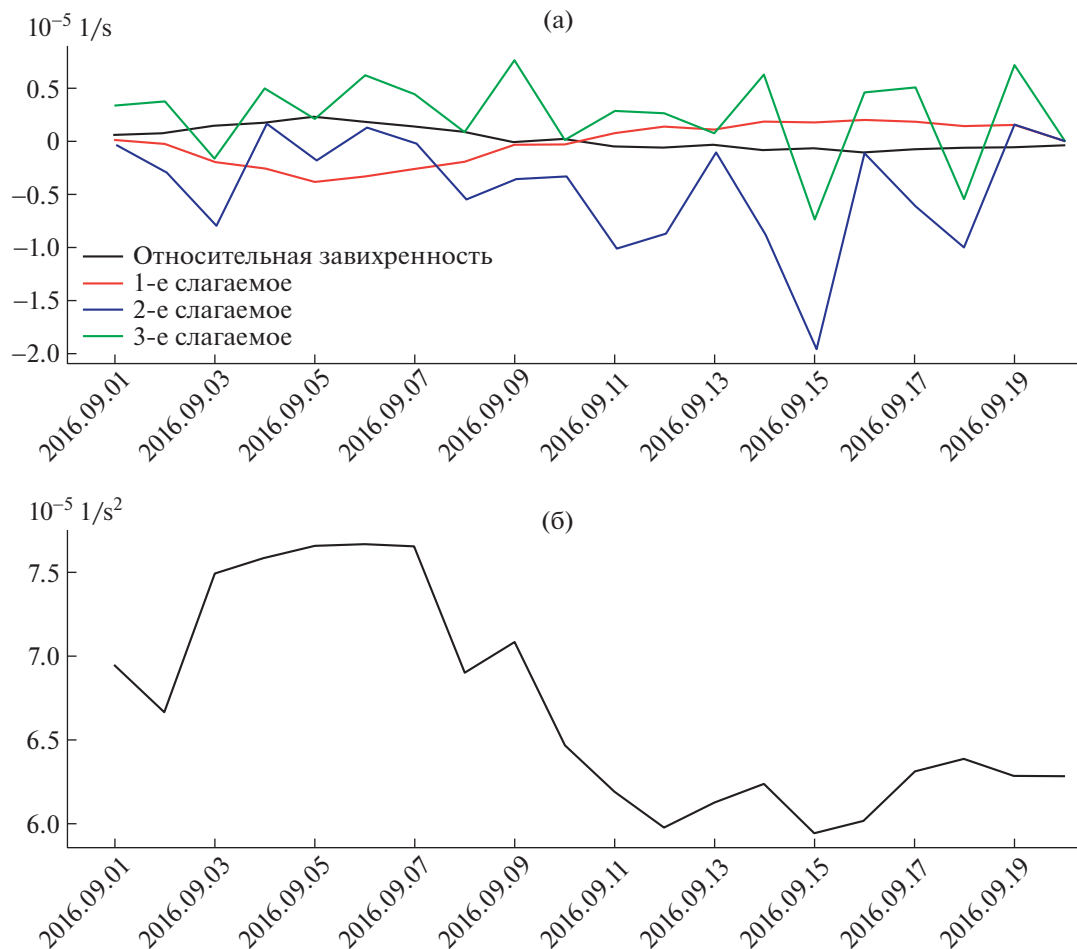


Рис. 8. Изменение со временем относительной завихренности поля скорости и слагаемых уравнения (2.1) (а) и квадрата частоты плавучести (б) на горизонте 200 м в точке (38.82° в.д., 43.83° с.ш.).

где σ — потенциальный вихрь, Δ — горизонтальный оператор Лапласа, ψ — функция тока, N — частота Брента–Вайсяля.

Функция тока была рассчитана по горизонтальным компонентам вектора скорости, следуя [33]. Плотность морской воды нелинейно зависит от температуры и солёности и рассчитана

по формуле (1.8). Так как в модели МГИ ось z направлена вниз, квадрат частоты Брента–Вайсяля вычисляется по формуле $N^2 = \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}$.

Несмотря на то что основным допущением при выводе (2.1) является квазигеострофическое приближение, мы применяем это уравнение к нашим результатам аналогично [32], исходя из того, что модельные данные получены в приближении гидростатики (1.3), и число Россби для исследуемого района много меньше единицы (не превышает 0.05).

Выполненный анализ вкладов всех слагаемых в уравнении (2.1) показал, что наибольший по модулю вклад дает второе слагаемое. На рис. 8 представлено изменение со временем завихренности поля скорости и слагаемых уравнения (2.1), а также квадрата частоты плавучести в период с 1 по 20 сентября 2016 г. в точке (38.82° в.д., 43.83° с.ш.), показанной треугольником на рис. 7. Из рис. 8 видно, что в первой половине сентября наблюдается увеличение абсолютных значений второго и третьего слагаемых (рис. 8а, синяя и зеленая кривые). Во втором и третьем слагаемом уравнения (2.1) квадрат частоты Брента–Вайсяля стоит в знаменателе, следовательно, уменьшение N^2 должно приводить к росту абсолютной величины потенциальной завихренности. Поведение кривой N^2 на рис. 8б подтверждает это заключение. Таким образом, на основе анализа слагаемых уравнения (2.1) можно заключить, что изменение знака завихренности поля скорости в стрекне вдольсклонового течения на горизонте дрейфа буя № 6901833 происходило вследствие уменьшения частоты плавучести.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что численная модель МГИ воспроизводит разворот глубоководных течений вблизи северокавказского побережья, наблюдаемый посредством дрейфующего буя-профилемера ARGO № 6901833. Узкие противотечения, в которые попадал буй осенью 2016 г. и зимой 2017 г., распространялись вдоль свала глубин на горизонтах от 50–100 до 500 м. Зимой вследствие интенсивного конвективного перемешивания в поверхностном слое верхняя граница противотечений оказалась глубже, чем в осенний период.

По результатам модельного эксперимента проведен анализ динамических и термохалинных характеристик циркуляции в районе появления противотечений. Получено, что при ослаблении циклонической поверхностной циркуляции и усилении мезомасштабного антициклонического вихря вблизи материкового склона (Керченского антициклона) происходит формирование и развитие антициклонического вдольсклонового течения. Источником противотечения на начальном этапе, по-видимому, является кинетическая энергия вихря, которая концентрируется между периферией вихря и крутым материковым склоном. Развитие и распространение противотечения вдоль склона происходит на фоне выравнивания изопикнических поверхностей вследствие увеличения солёности вод вблизи материкового склона.

Анализ бюджета слагаемых в уравнении потенциального вихря подтверждает, что смена знака относительной завихренности поля скорости в исследуемом районе определяется величиной частоты плавучести: при выравнивании изопикнических поверхностей частота плавучести уменьшается, что в свою очередь приводит к отрицательной (т.е. антициклонической) завихренности.

Доработка модели МГИ для проведения расчетов с усвоением данных наблюдений, проведение численного эксперимента и валидация результатов выполнены О.А. Дымовой при финансовой поддержке гранта РНФ № 22-77-10056. Оценка влияния стратификации на формирование особенностей глубоководных течений проведена Н.В. Марковой при поддержке гранта РНФ 22-17-00150. Анализ бюджета слагаемых в уравнении потенциального вихря выполнен в рамках темы госзадания ФГБУН ФИЦ МГИ по теме № FNNN-2021-0003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Murray J.W., Izdar E. The 1988 Black Sea Oceanographic Expedition: Overview and new discoveries // Oceanography. 1989. V. 2 (1). P. 15–21.
2. Oguz T., Latun V.S., Latif M.A., Vladimirov V.V., Sur H.I., Markov A.A., Özsoy E., Kotovshchikov B.B., Ereemeev V.V., Ünlüata Ü. Circulation in the surface and intermediate layers of the Black Sea // Deep-Sea Res. 1993. V. 40. № 8. P. 1597–1612.
[https://doi.org/10.1016/0967-0637\(93\)90018-X](https://doi.org/10.1016/0967-0637(93)90018-X)
3. Neumann G. Über den Aufbau und die Frage der Tiefenzirkulation des Schwarzen Meeres // Ann. Hydrogr. und marit. Meteorol. 1943. Bd. 71 (1). № 4/6. P. 1–20.

4. Булгаков С.Н., Коротаев Г.К., Уайтхед Дж.А. Роль потоков плавучести в формировании крупномасштабной циркуляции и стратификации вод моря. Ч. 1, 2 // Изв. АН СССР. ФАО. 1996. Т. 32. № 4. С. 548–564.
5. Еремеев В.Н., Кушнир В.М. Слоистая структура течений и вертикальный обмен в Черном море // Океанология. 1996. Т. 36. № 1. С. 13–19.
6. Латун В.С. О движениях глубинных слоев Черного моря. Комплексные океанографические исследования Черного моря. Севастополь: МГИ АН УССР, 1989. С. 9–16.
7. Коротаев Г.К. Интенсификация с глубиной циркуляции в мезомасштабном бассейне под влиянием рельефа дна // Мор. гидрофиз. журн. 2005. № 26. С. 3–10.
8. Демьшев С.Г., Кыш В.В., Инюшина Н.В. Сезонная изменчивость и трансформация с глубиной климатических горизонтальных течений Черного моря по результатам ассимиляции в модели новых климатических данных температуры и солёности // Мор. гидрофиз. журн. 2005. № 6. С. 28–45.
9. Петренко Л.А., Кушнир В.М. Климатические придонные течения в Черном море // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2006. Вып. 14. С. 477–486.
10. Кордадзе А.А., Деметрашвили Д.И., Сурмава А.А. Численное моделирование гидрофизических полей Черного моря в условиях чередования атмосферных циркуляционных процессов // Изв. РАН. ФАО. 2008. Т. 44. № 2. С. 227–238.
11. Архипкин В.С., Косарев А.Н., Гиппиус Ф.Н., Мигали Д.И. Сезонная изменчивость климатических полей температуры, солёности и циркуляции вод Черного и Каспийского морей // Вестник МГУ. Сер. 5. География. 2013. № 5. С. 33–44.
12. Лукьянова А.Н., Багаев А.В., Пластун Т.В., Маркова Н.В., Залесный В.Б., Иванов В.А. Исследование глубоководной циркуляции Черного моря по результатам численного моделирования и натурным данным: Численные эксперименты на основе модели ИВМ РАН и сравнение с данными Банка данных МГИ РАН // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон моря. 2016. № 3. С. 9–14.
13. Korotaev G., Oguz T., Riser S. Intermediate and deep currents of the Black Sea obtained from autonomous profiling floats // Deep-Sea Res. II: Topical Studies in Oceanography. 2006. V. 53. № 17–19. P. 1901–1910.
14. Poulain P.-M., Menna M., Zu Z. Geostrophic currents in the Mediterranean and Black Seas derived from Argo float profiles // Argo-Italy Project. 2016. URL: <https://www.researchgate.net/publication/308983483>
15. Markova N.V., Bagaev A.V. The Black Sea deep current velocities estimated from the data of ARGO profiling floats // Physical Oceanography. 2016. V. 3. P. 23–35.
<https://doi.org/10.22449/1573-160X-2016-3-23-35>
16. Демьшев С.Г., Иванов В.А., Маркова Н.В., Черкесов Л.В. Построение поля течений в Черном море на основе вихреразрешающей модели с ассимиляцией климатических полей температуры и солёности // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2007. Вып. 15. С. 215–226.
17. Demyshev S.G., Ivanov V.A., Markova N.V. Analysis of the Black Sea climatic fields below the main pycnocline obtained on the basis of assimilation of the archival data on temperature and salinity in the numerical hydrodynamic model // Physical Oceanography. 2009. 19(1). P. 1–12.
18. Островский А.Г., Зацепин А.Г., Соловьев В.А., Цибульский А.Л., Швоев Д.А. Автономный мобильный аппаратно-программный комплекс вертикального зондирования морской среды на заякоренной буйковой станции // Океанология. 2013. Т. 53. № 2. С. 1–10.
19. Коршненко Е.А., Дианский Н.А., Фомин В.В. Воспроизведение глубоководной циркуляции Черного моря с помощью модели INMOM и сопоставление результатов с данными буев ARGO // Морской гидрофиз. журн. 2019. Т. 35. № 3. С. 220–232.
20. Demyshev S.G., Dymova O.A., Markova N.V., Korshenko E.A., Senderov M.V., Turko N.A., Ushakov K.V. Undercurrents in the northeastern Black Sea detected on the basis of multi-model experiments and observations // J. Mar. Sci. Eng. 2021. 9 (9), 933.
<https://doi.org/10.3390/jmse9090933>
21. Demyshev S.G., Dymova O.A., Markova N.V., and Piotukh V.B. Numerical experiments on modeling of the Black Sea deep currents // Physical Oceanography. 2016. № 2. P. 38–50.
<https://doi.org/10.22449/1573-160X-2016-2-34-45>
22. Саркисян А.С., Иванов В.Ф. Совместный эффект бароклинности и рельефа дна как важный фактор в динамике морских течений // Изв. АН СССР. ФАО. 1971. Т. 7. № 2. С. 173–188.
23. Francis P.A., Jithin A.K., Chatterjee A., Mukherjee A., Shankar D., Vinayachandran P.N., Ramakrishna S.S.V.S. Structure and dynamics of undercurrents in the western boundary current of the Bay of Bengal // Ocean Dyn. 2020. V. 70. P. 387–404.
24. Титов В.Б. Морфометрические параметры и гидрофизические характеристики прибрежных антициклонических вихрей в Черном море // Метеорология и гидрология. 2002. № 4. С. 67–73.
25. Каримова С.С. Вихревые течения в Черном море // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2008. Т. 5. № 2. С. 95–101.

26. *Demyshev S.G., Dymova O.A.* Analysis of the annual mean energy cycle of the Black Sea circulation for the climatic, basin-scale and eddy regimes // *Ocean Dyn.* 2022. 72. P. 259–278.
<https://doi.org/10.1007/s10236-022-01504-0>
27. *Mellor G.L., Yamada T.* Development of a turbulence close model for geophysical fluid problems // *Rev. Geophys. Space Phys.* 1982. 20. P. 851–875.
28. Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Т. 4. Черное море. Вып. 1. Гидрометеорологические условия / Под ред. А.И. Симонова, Э.Н. Альтмана. СПб.: Гидрометеоиздат, 1991. С. 103–262.
29. *Кныш В.В., Моисеенко В.А., Саркисян А.С., Тимченко И.Е.* Комплексное использование измерений на гидрофизических полигонах океана в четырехмерном анализе // *Докл. АН СССР.* 1970. Т. 252. № 4. С. 832–836.
30. *Демышев С.Г., Евстигнеева Н.А., Алексеев Д.В., Дымова О.А., Миклашевская Н.А.* Анализ динамических и энергетических характеристик циркуляции вод у берегов Западного Крыма на основе ассимиляции данных наблюдений в численной модели динамики Черного моря // *Мор. гидрофиз. журн.* 2021. Т. 37. № 1. С. 23–40.
<https://doi.org/10.22449/0233-7584-2021-1-23-40>
31. *Lima L., Aydogdu A., Escudier R., Masina S., Ciliberti S.A., Azevedo D., Peneva E.L., Causio S., Cipollone A., Clementi E., Creti S., Stefanizzi L., Lecci R., Palermo F., Coppini G., Pinardi N., and Palazov A.* Black Sea Physical Reanalysis (CMEMS BS-Currents) (Version 1) // Copernicus Monitoring Environment Marine Service (CMEMS). 2020.
https://doi.org/10.25423/CMCC/BLKSEA_MULTIYEAR_PHY_007_004
32. *Жмур В.В., Новоселова Е.В., Белоненко Т.В.* Потенциальная завихренность в океане: подходы Эртеля и Россби с оценками для Лофотенского вихря // *Изв. РАН. ФАО.* 2021. Т. 57. № 6. С. 721–732.
<https://doi.org/10.31857/S0002351521050151>
33. *Li Z., Chao Y., & McWilliams J.C.* Computation of the Streamfunction and Velocity Potential for Limited and Irregular Domains // *Mon. Weather Rev.* 2006. V. 134 (11). P. 3384–3394.

УДК 532.5: 533.6.011.5

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ С УДАРНОЙ ВОЛНОЙ, ДВИЖУЩЕЙСЯ К ЦЕНТРУ ИЛИ К ОСИ СИММЕТРИИ

© 2023 г. Х. Ф. Валиев^а, А. Н. Крайко^{а,*}

^аЦентральный институт авиационного моторостроения (ЦИАМ) им. П.И. Баранова, Москва, Россия

*E-mail: akraiko@ciam.ru

Поступила в редакцию 04.06.2023 г.

После доработки 06.06.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Изучаются одномерные течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) совершенного газа с показателем адиабаты γ за ударной волной, движущейся к центру ($v = 3$) или к оси ($v = 2$) симметрии по неподвижному холодному газу. Допускаются течения с отраженной ударной волной и течения, заканчивающиеся при одновременном приходе в центр симметрии ударной волны и поршня, сжавшего газ в точку или в линию.

Ключевые слова: центр (ось) симметрии, поршни и ударные волны, огибающая C^- -характеристик, неавтомодельные ударные волны, автомодельные течения сжатия в точку (в линию)

DOI: 10.31857/S1024708423700060, **EDN:** YNXIMR

Первое автомодельное решение с отраженной ударной волной нашел К. Гудерлей. В его решении показатель автомодельности $n = n_*(v, \gamma) < 1$ находится из условия существования изучаемого течения. При $n = n_*(v, \gamma)$ возможны также не рассматривавшиеся ранее автомодельные течения с поршнем, расширяющимся из центра симметрии после прихода в него сходящейся ударной волны. Внимание к течениям с $n \neq n_*(v, \gamma)$ в 2015–2017 гг. привлекли В. Куропатенко с коллегами. Выполненный ниже анализ этих течений показал, что построенные для $n > n_*(v, \gamma)$ течения с отражением ударной волны автомодельны лишь в криволинейном треугольнике плоскости координата-время. Одна из его сторон – отрезок траектории автомодельной ударной волны, не дошедшей до центра симметрии. При $n < n_*(v, \gamma)$ получаются построенные В. Куропатенко полностью автомодельные течения сжатия газа в точку.

1. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБ ОТРАЖЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ОСИ ИЛИ ЦЕНТРА СИММЕТРИИ

В 1942 г. К. Гудерлей [1] (см. также [2, 3]) решил задачу об отражении ударной волны (УВ) от оси или от центра симметрии (ниже, – от “центра симметрии – ЦС”). При приближении УВ к ЦС ее интенсивность растет неограниченно. Возможно, поэтому в [1] искали автомодельные решения с сильной УВ IS, движущейся по неподвижному холодному газу со скоростью $D = D(t) < 0$ с началом отсчета времени t в момент прихода УВ IS в ЦС. Для совершенного газа его радиальная скорость u , скорость звука a , плотность ρ и давление p за сильной УВ равны [2–5]:

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} D, \quad a = -\frac{\sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}}{\gamma + 1} D, \quad \rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad p = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 D^2 \quad (1.1)$$

При радиальной координате r параметры течения представляются в одной из двух эквивалентных форм с автомодельной переменной ξ или τ :

$$\xi = Cr \times \begin{cases} (-t)^{-n}, & t \leq 0, \\ t^{-n}, & t > 0; \end{cases} \quad \tau = \frac{Ct}{r^k}, \quad k = \frac{1}{n} \quad (1.2)$$

$$u = n \frac{r}{t} U, \quad a = n \frac{r}{t} A, \quad \rho = \rho_0 R, \quad p = \rho_0 n^2 \frac{r^2}{t^2} P, \quad P = \frac{R}{\gamma} A^2$$

В решении К. Гудерлея показатель степени n подлежит определению, U , A и R – функции ξ или τ , а константа C произвольна. К. Гудерлей работал с переменной ξ , конечной на УВ IS, бесконечной на оси r и равной нулю на полуоси $t > 0$. Единая для всех t переменная τ с $C > 0$ монотонно растёт от отрицательной величины на УВ IS до нуля на оси r и до бесконечности на полуоси $t > 0$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения, которые получаются при подстановке представлений (1.2) с переменной τ в уравнения, описывающие нестационарные течения идеального совершенного газа с единственной ненулевой r -компонентой вектора скорости u , сводятся к системе

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dU} &= \frac{Af_2}{2(1-U)f_1}, \quad \frac{d\tau}{dU} = \gamma k \frac{\tau f}{f_1}, \quad \frac{d \ln R}{dU} = \frac{f_3}{(1-U)f_1} \\ f &= (1-U)^2 - A^2, \quad f_1 = \gamma(1-U)(k-U)U + (2k-2-\gamma U)A^2 \\ f_2 &= \gamma[2(k-U) - \gamma(\gamma-1)U]f + (\gamma-1)f_1, \quad f_3 = f_1 - \gamma Uf \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подстановка тех же представлений в условия (1.1), в которых в силу этих представлений $D = r_{IS}/(kt) = nr_{IS}/t$, даёт

$$U_{IS} \equiv U(\tau_{IS}) = \frac{2}{\gamma+1}, \quad A_{IS} = -\frac{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{\gamma+1}, \quad R_{IS} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (1.4)$$

Не входящую в уравнения (1.3) и в условия (1.4) константу C можно выбрать такой, чтобы величина τ_{IS} была равна любому числу, например, -1 . Представление УВ IS степенной кривой $r^{k>1} = -Ct$, приходящей при $t = 0$ в ЦС, не гарантирует существования такого течения. Понять это поможет анализ интегральных кривых и особых точек первого уравнения (1.3). На оси r при $r > 0$ переменная $\tau = 0$, а u и a конечны. Согласно (1.2) такое возможно только при $U(0) = A(0) = 0$. Поэтому для любых $k > 1$ интегральные кривые решений, содержащих ось r или ее конечный отрезок, из точки IS с U и A из (1.4) должны прийти в начало координат $A = U = 0$ плоскости UA . Но точка IS лежит под данной на рис. 1 штрихами “звуковой” прямой: $A = U - 1$. На ней равна нулю функция f из второго уравнения (1.3), а идущая из точки IS интегральная кривая должна ее пересечь. При произвольном k в точке пересечения интегральной кривой со звуковой прямой функция $f_1 \neq 0$, и у τ вместо монотонного роста возникает локальный максимум $\tau = \tau_{0*}$, исключающий продолжение решения на $\tau > \tau_{0*}$. На рис. 1 и далее стрелки на интегральных кривых указывают направление роста переменной τ , а на красной кривой равна нулю функция $f_1(U, A)$.

Каждой точке прямой: $A = U - 1$ плоскости UA в плоскости rt отвечает кривая с $dr/dt = u - a$, как у S^- -характеристик. Эти кривые, однако, – не S^- -характеристики, а их огибающие, поскольку при $f_1 \neq 0$ на них не выполняется условие совместности для S^- -характеристик. Огибающая становится S^- -характеристикой, если в точке пересечения выполняются два равенства: $f = 0$ и $f_1 = 0$. Их следствие – равенство $f_2 = 0$ делает точку пересечения особой точкой (седлом – SP или узлом – NP) первого уравнения (1.3). По интегральной кривой, совпадающей с одной из сепаратрис седла или с главным усом узла, переход через звуковую прямую становится возможным, а выбор $n = n_*(v, \gamma)$ позволяет интегральной кривой соединить особую точку с точкой IS. Для $v = 3$ и $\gamma = 5/3$ именно такая ситуация с седлом SP и $n_* = 0.68838$ изображена на рис. 1. Начало координат $A = U = 0$ – узел первого уравнения (1.3) с пришедшей в него жирной интегральной кривой, пересекающей звуковую прямую. Для $v = 2$ и 3 и нескольких значений γ величины $n_* = n_*(v, \gamma)$ приведены в табл. 1.

При $k = k_* = 1/n_* > 1$ за УВ IS в момент ее прихода в ЦС бесконечны p и энтропийная функция $S = \gamma p / \rho^\gamma$. При любом увеличении в отраженной УВ RS функция S в ЦС (при $r = 0$ и $t > 0$) остается бесконечной. Но газ с $p = \infty$ мгновенно расширяется до конечного давления и нулевой плотности, которые, сохранив $S = \infty$, обращают в бесконечность скорость звука $a = (\gamma p / \rho)^{1/2} =$

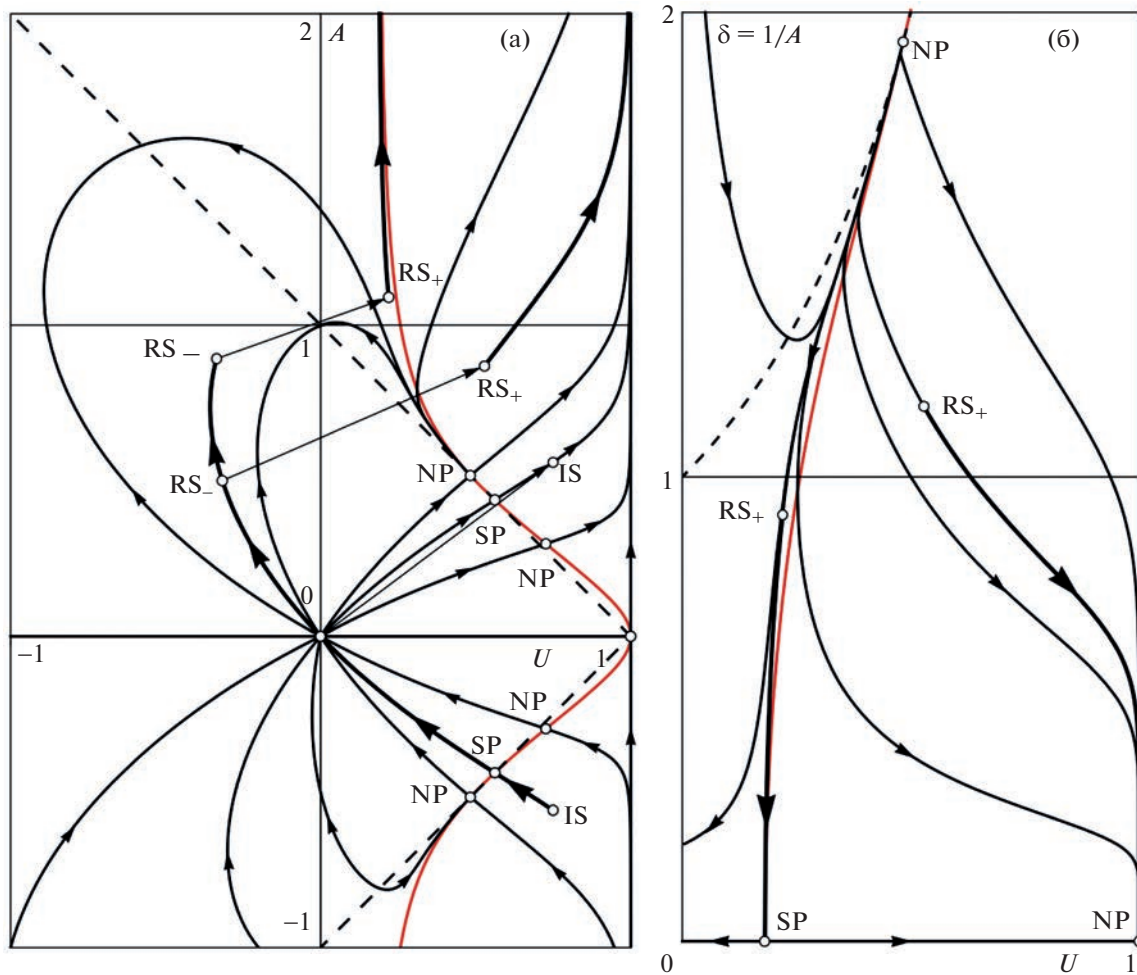


Рис. 1. Интегральные кривые, особые точки, “звуковые” прямые: $f = 0$ и УВ RS (верхняя стрелка) решения К. Гудерлея для $\nu = 3$, $\gamma = 5/3$ и $n_* = 0.68838$.

$= n_*(r/t)A = \infty$ на полуоси $t > 0$. Значит, $A(\tau = \infty) = \infty$, и переход от A к переменной $\delta = 1/A$ приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dU} &= \frac{\delta f_2}{2(U-1)f_1}, \quad \frac{d\tau}{dU} = \gamma k_* \frac{\tau f}{f_1} \\ f &= (1-U)^2 \delta^2 - 1, \quad f_1 = \gamma(1-U)(k_* - U)U\delta^2 + 2(k_* - 1) - \nu\gamma U \\ f_2 &= (\gamma - 1)f_1 + \gamma[2(k_* - U) - \nu(\gamma - 1)U]f \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ось U , на которой $\delta = 0$, – интегральная кривая первого уравнения (1.5). Иные интегральные кривые прийти на эту ось могут только в ее особые точки: $\delta = 0$, $U = 1$ и $\delta = 0$, $U = 2(k_* - 1)/(\nu\gamma)$. На рис. 1б первая из них – узел, а вторая – седло. В узле в силу второго уравнения (1.5) переменная τ конечна, а в седле $\tau = \infty$. Поэтому часть искомой интегральной кривой – отрезок сепаратрисы седла. В точку RS_+ сепаратриса решения попадает скачком (верхней стрелкой на рис. 1а) из точки RS_- , причем для U_+ и A_+ за отраженной УВ RS верны формулы [5]:

$$\begin{aligned} U_+ &= 1 - \frac{2A^2 + (\gamma - 1)(1 - U_-)^2}{(\gamma + 1)(1 - U_-)} \\ A_+ &= \frac{\sqrt{2(\gamma - 1)[\gamma(1 - U_-)^4 - A^4] + (6\gamma - \gamma^2 - 1)A^2(1 - U_-)^2}}{(\gamma + 1)(1 - U_-)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Таблица 1. Показатели степени $n_0 = n_0(v, \gamma)$ и $n_* = n_*(v, \gamma)$

v	γ	n_0	n_*
2	3	0.33333	0.77567
2	5/3	0.60000	0.81562
2	7/5	0.71429	0.83532
2	4/3	0.75000	0.84226
2	6/5	0.83333	0.86116
3	3	0.25000	0.63641
3	5/3	0.50000	0.68838
3	7/5	0.62500	0.71717
3	4/3	0.66667	0.72769
3	6/5	0.76923	0.75714

При построении решения точка RS_- с U_- и A_- на пришедшей из точки IS интегральной кривой выбирается так, чтобы в согласии с равенствами (1.6) точка RS_+ попала на идущую на рис. 1б сверху сепаратрису седла первого уравнения (1.5).

В большем масштабе 4-й квадрант рис. 1а и часть rt -диаграммы, которая, отвечая жирному отрезку интегральной кривой, соединившей точку IS с началом координат $U = A = 0$, представлены на рис. 2. На рис. 2б левая (правая) вышедшая из точки I жирная кривая — UB IS (траектория поршня), а соединяющие их отрезки — C^- -характеристики. Один из них, соединяющий точку 0^- с началом координат, — C^- -характеристика, отвечающая седлу SP на звуковой прямой рис. 2а. На не показанной на rt -диаграмме полуоси $t > 0$ скорость газа $u = n_* r U / t = 0$, как и должно быть в ЦС.

При том, что решением К. Гудерлея занимались многие исследователи, наиболее полные и надежные результаты получены авторами данной статьи [5–8]. Правда, все, начиная с К. Гудерлея, прошли мимо автомодельных решений с поршнем, начавшим расширение из ЦС в момент прихода туда UB IS решения К. Гудерлея. Восполним этот пробел.

Положив в (1.6) $A_- = U_- = 0$, придем к значениям

$$U_+ = U_{IS} = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad A_+ = A_{IS} = \frac{\sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}}{\gamma + 1} \quad (1.7)$$

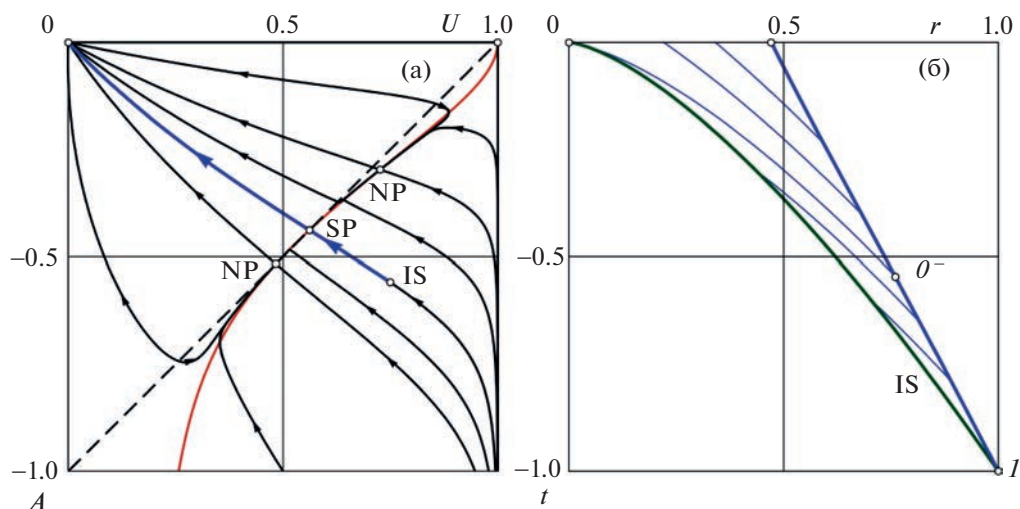


Рис. 2. Квадрант IV плоскости UA (а) и часть rt -диаграммы (б) решения К. Гудерлея с отражением UB от ЦС для $v = 3$, $\gamma = 5/3$ и $n_* = 0.68838$.

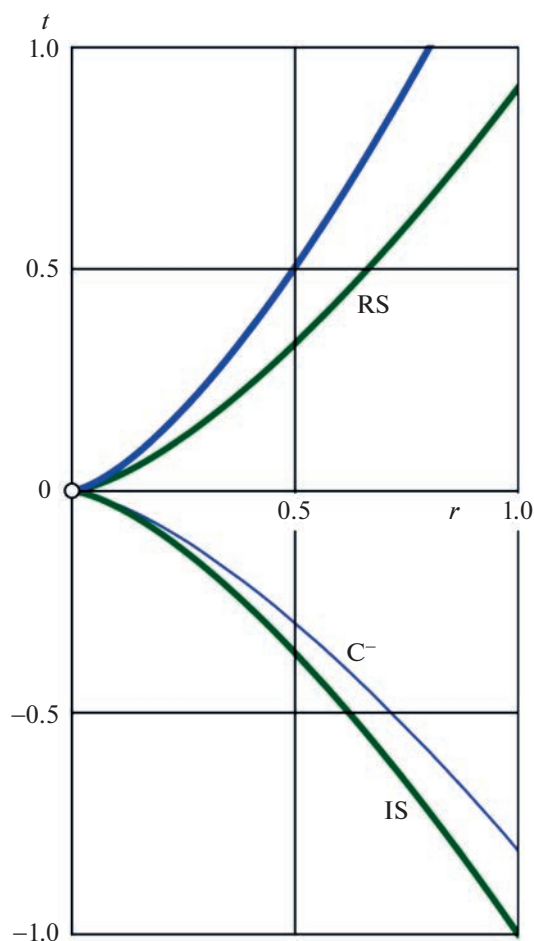


Рис. 3. rt -Диаграмма автомодельного течения с поршнем, начавшим расширяться из ЦС при приходе в него УВ IS, для $\nu = 3$, $\gamma = 5/3$ и $n = n_* = 0.68838$.

за движущейся от ЦС сильной УВ, показанной на рис. 1а стрелкой между началом координат и верхней точкой IS. УВ с U_{IS} и A_{IS} из (1.7) — самая интенсивная из множества УВ, значения U_- и A_- которых отвечают точкам отрезка жирной интегральной кривой из 2-го квадранта рис. 1а. Интегральные кривые, дающие изменения U и A от УВ до поршня, заканчиваются в узле $U = 1$, $\delta = 0$ рис. 1б. На рис. 3 приведена rt -диаграмма одного из таких автомодельных течений с прежними ν , γ и n_* , но с $U_- \approx -0.32$ и $A_- = 0.50$ и еще одной стрелкой на рис. 1а. Левая верхняя кривая на рис. 3 — траектория поршня, расширяющегося при $t \geq 0$ из ЦС.

2. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В. КУРОПАТЕНКО С УДАРНОЙ ВОЛНОЙ, ИДУЩЕЙ К ОСИ ИЛИ К ЦЕНТРУ СИММЕТРИИ

Продолжим изучение течений с УВ, движущейся к ЦС при показателях автомодельности $1 < k \neq k_* = 1/n_*$. Их изучал В. Куропатенко с коллегами [9–13], используя наряду с r массовую лагранжеву переменную m , при которой показателем автомодельности служит не n , а $l = \nu n$. Далее принималось, что изучаемые течения с движущейся по холодному неподвижному газу сильной УВ порождает поршень, движущийся из точки I с $r = r_1$, $m = m_1$, и $t = t_1 < 0$ к ЦС. При этом плотность и скорость газа ρ и u и координата r искались разделением переменных с привлечением условий (1.1), справедливых для сильных УВ, в форме

$$\xi = \frac{m}{m_1} \left(\frac{t_1}{t} \right)^l, \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0 \delta(\xi), \quad r^{v-1} u = r_1^{v-1} u_1 \left(\frac{t}{t_1} \right)^{l-1} Z(\xi) \quad (2.1)$$

$$r^v = r_1^v \left(\frac{t}{t_1} \right)^l X(\xi), \quad \frac{1}{t_1} = v \frac{\gamma+1}{2l r_1} u_1$$

$$\delta(1) = Z(1) = X(1) = 1 \quad (2.2)$$

Здесь u_1 — скорость газа за УВ IS в точке l .

Подстановка выражений (2.1) в уравнения Эйлера, описывающие изучаемые течения в переменных t и m , приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям (“штрих” — дифференцирование по $\xi \geq 1$)

$$G\delta' = H, \quad GZ' = \frac{\gamma-1}{2\delta^2} \xi H, \quad \xi X' = X - \frac{2Z}{\gamma+1}, \quad G = \frac{\gamma \delta^{\gamma-1} X^{2-2/\gamma}}{\xi^{2/l-2/\gamma}} - \frac{\gamma-1}{2\delta^2} \xi^2$$

$$H = 2 \frac{(v-l)\delta^\gamma X^{2-2/\gamma}}{v l \xi^{1+2/l-2/\gamma}} - \frac{l-1}{l} Z + \frac{2(v-1)Z^2}{v(\gamma+1)X} \quad (2.3)$$

В [9–13] решение задачи Коши для уравнений (2.3) с начальными условиями (2.2) приводило к разным результатам для n (или $l = vn$), больших и меньших n_* (или $l_* = vn_*$). Для $n > n_*$ при некотором $\xi_{0*} > 1$ всегда обращалась в нуль функция G_{0*} при в общем случае отличной от нуля функции H_{0*} . Утверждение авторов [8–12], что в таком случае приходящая в ЦС кривая: $m/m_1 = \xi_{0*}(t/t_1)^l - C^-$ -характеристика, ошибочно. Равенство $G_{0*} = 0$ означает, что на указанной кривой $dr/dt = u - a$, т.е. ее C^- -характеристики всего лишь касаются. C^- -характеристикой она будет только, если на ней наряду с $G_{0*} = 0$ выполнится равенство $H_{0*} = 0$, эквивалентное условию совместности для C^- -характеристик. При $H_{0*} \neq 0$ она — их огибающая, делающая невозможным построение автомодельной траектории поршня на $\xi > \xi_{0*}$ и $t > t_{0*}$ и свидетельствующая о возникновении в точке 0_* неавтомодельной УВ — третьего отрезка границы не доходящей до ЦС треугольной в плоскости rt области автомодельного течения.

Найденные в [9–13] показатели $n_*(v, \gamma)$, при которых одновременно равны нулю функции G_{0*} и H_{0*} , для всех рассмотренных v и γ не отличаются от найденных в [1, 2, 5–8]. С учетом этого, правда, не отмеченного в [9–13] обстоятельства и большей простоты привычного автомодельного подхода, анализ решений для $n \neq n_*$ продолжим в рамках уравнений и условий (1.2)–(1.4), приняв вслед за В. Куропатенко, что изучаемые течения реализует поршень, начинающий движение к ЦС из точки l плоскости rt на УВ IS. На траектории поршня: $dr/dt = u$ в силу формул (1.2) и уравнений (1.3) выполняются равенства

$$\frac{dt}{t} = \frac{1}{1-U} \frac{d\tau}{\tau}, \quad \frac{dr}{r} = \frac{U/k}{1-U} \frac{d\tau}{\tau} \quad (2.4)$$

Согласно им при $0 < U < 1$ изменения времени и координаты траектории поршня аналогичны изменению переменной τ . Так, если $|\tau_0| > 0$ в конце интегральной кривой, то $|t_0| > 0$ и $r_0 > 0$, т.е. поршень до ЦС не доходит. Если же $\tau_0 = 0$, то $t_0 = r_0 = 0$, и такие решения описывают сжатие газа в точку.

Течения с $|\tau_0| > 0$ реализуются, если, начавшись в точке IS, интегральная кривая первого уравнения (1.3) приходит в точку 0_* прямой: $A = U - 1$ плоскости UA с $f_1(U_{0*}, A_{0*}) \neq 0$. Величина $\tau_{0*} < 0$ достигает в этой точке локального максимума, из-за чего продолжение автомодельного решения на значения τ , превышающие τ_{0*} , оказывается невозможным. Как и в [9–13], такая ситуация всегда имеет место при $1 > n > n_*(v, \gamma)$. Типичное поле интегральных кривых и особых точек первого уравнения (1.3) в 4-м квадранте плоскости UA и неполная rt -диаграмма для этого случая приведены на рис. 4.

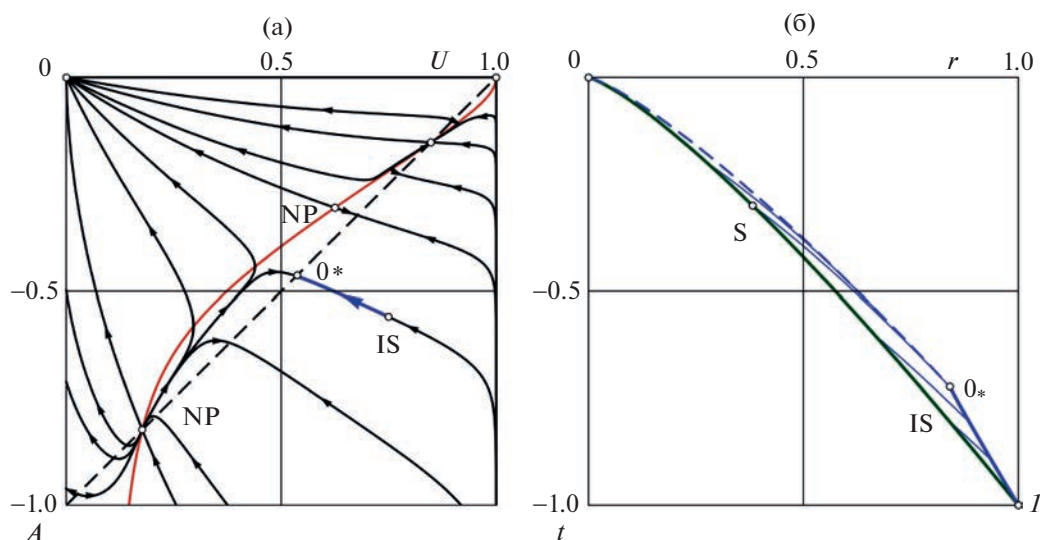


Рис. 4. Плоскость UA (а) и неполная rt -диаграмма (б) течения с УВ, движущейся к ЦС, для $v = 3$, $\gamma = 5/3$ и $n = 0.8 > n_* = 0.68838$.

Как уже отмечалось, при $f_1 \neq 0$ точке 0_* интегральной кривой, пришедшей на звуковую прямую плоскости UA , на рис. 4б rt -диаграммы отвечает данная штрихами огибающая C^- -характеристик: $Ct = r^k \tau_{0*}$. Последняя, как и вышедшая из точки I одновременно с поршнем автомодельная УВ IS с уравнением траектории: $Ct = -r^k$, на первый взгляд, в ЦС прийти может. Этого, однако, не случится, ибо появление огибающей – свидетельство возникновения неавтомодельной УВ в точке 0_* траектории поршня. Обгоняя и ликвидируя при этом C^- -характеристику 0_*-S , возникшая УВ при $t < t_s$ догонит автомодельную УВ IS до ее прихода в ЦС. Следовательно, при $n > n_*$ автомодельное решение удастся реализовать лишь в удаленном от ЦС криволинейном треугольнике плоскости rt , ограниченном траекторией поршня $I-0_*$ и отрезками автомодельной УВ IS и догнавшей ее неавтомодельной УВ, возникшей в точке 0_* траектории поршня. В много меньшей окрестности ЦС движущаяся по холодному газу неавтомодельная УВ станет автомодельной УВ решения К. Гудерлея с $n = n_*(v, \gamma)$.

При показателях $n < n_*(v, \gamma)$ получаются более интересные автомодельные решения с УВ IS , приходящей в ЦС, и с поршнем, сжимающим газ в точку. Для $n_* > n > n_0$ с $n_0 = n_0(v, \gamma)$, определенным ниже (ряд значений n_0 приведен в таблице), решение дает отрезок интегральной кривой первого уравнения (1.3) с началом в точке IS с U и A из (1.4) и концом в узле под звуковой прямой 4-го квадранта плоскости UA . Значения U и A в узле определяют уравнения $f_1(U, A) = 0$ и $f_2(U, A) = 0$. Согласно им для таких n справедливы равенства и неравенства

$$n_*(v, \gamma) > n > n_0 = \frac{2}{2 + v(\gamma - 1)}, \quad U = \frac{n_0}{n} < 1$$

$$A^2 = B \equiv \frac{\gamma(1 - U)(1 - nU)U}{(2 + v\gamma U)n - 2} > 0, \quad A = -\sqrt{B}$$

Величина τ в узле оказывается нулевой, приводя в силу равенств (2.4) к $t = 0$ и $r = 0$, т.е. к автомодельному течению с поршнем и сильной УВ, сжимающими газ в точку. Сказанное выше иллюстрирует рис. 5. Смысл приведенных на нем линий и точек такой же, как на рис. 1–4. Так, на рис. 5б тонкие отрезки – C^- -характеристики, идущие с траектории поршня на УВ IS .

При еще меньших показателях степени $0 < n < n_0 < n_*$ особой точкой, в которую приходит интегральная кривая первого уравнения (1.3) с началом в точке IS с U и A из (1.4), становится вырожденная особая точка $U = 1$ и $A = 0$. В согласии с [14] и выполненными расчетами дающая ре-

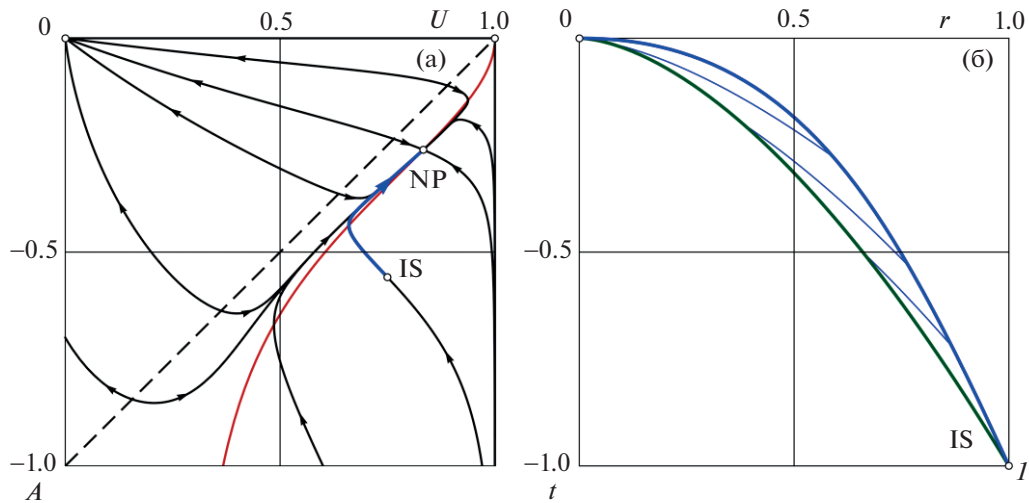


Рис. 5. Плоскость UA (а) и rt -диаграмма (б) течения с поршнем и УВ, сжимающими газ в точку, для $\nu = 3$, $\gamma = 5/3$ и $n_0 = 0.5 < n = 0.6 < n_* = 0.68838$.

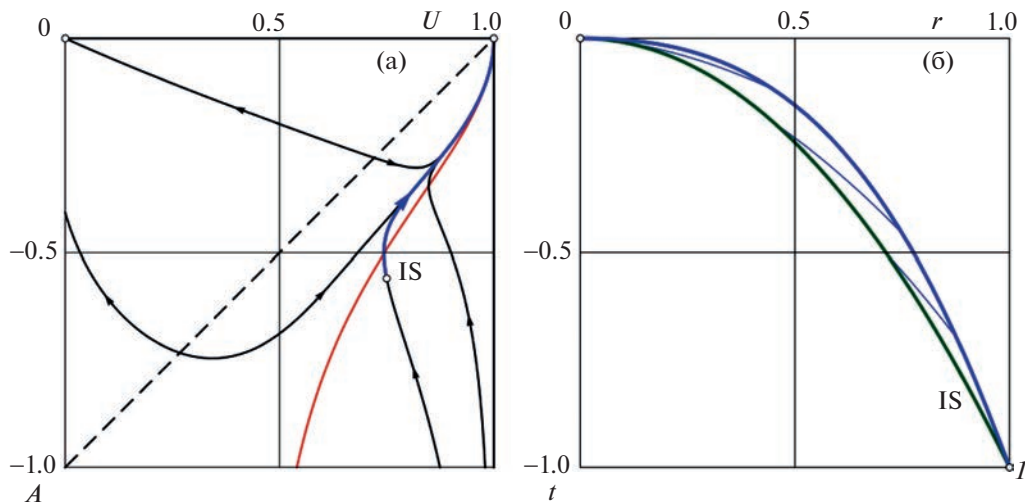


Рис. 6. Плоскость UA (а) и rt -диаграмма (б) течения с поршнем и УВ, сжимающими газ в точку, для $\nu = 3$, $\gamma = 5/3$ и $n = 0.49 < n_0 = 0.5 < n_* = 0.68838$.

шение интегральная кривая входит в эту особую точку, касаясь вертикальной интегральной прямой $U = 1$ и реализуя, как и в случае рис. 5, автомодельное решение ударного сжатия газа в точку ($r = t = 0$). В окрестности этой особой точки

$$U \approx 1 - KA^2 < 1, \quad \tau \approx \tau_0 \left[1 + \frac{\gamma K / (1 - n)}{2 - \gamma(\gamma - 1)K} A^2 \right], \quad 0 < K < \frac{2}{\gamma(\gamma - 1)}$$

с постоянной интегрирования K .

Результаты расчетов, выполненных для двух таких значений n , приведены на рис. 6 и 7, близких к рис. 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автомодельные решения с $n = n_*$ и поршнем, начинающим расширение из ЦС при приходе в него УВ IS, и получающиеся при $1 > n > n_*$ автомодельные решения в криволинейном треуголь-

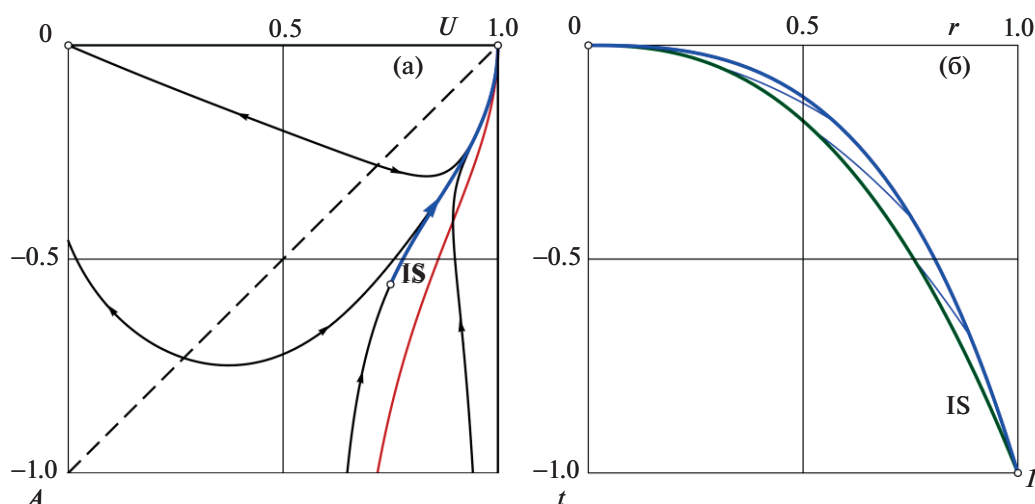


Рис. 7. Плоскость UA (а) и rt -диаграмма (б) течения с поршнем и УВ, сжимающими газ в точку, для $\nu = 3$, $\gamma = 5/3$ и $n = 0.4 < n_0 = 0.5 < n_* = 0.68838$.

нике плоскости rt с $r > 0$ интересны исключительно для теории. В основном для теории интересны и получающиеся при $n_* > n > 0$ автомодельные решения ударного сжатия газа в точку, поскольку для них большая часть работы поршня, а при $n_0 > n$ вся его работа идет на увеличение кинетической энергии сжатого газа.

В связи с решениями для $n \neq n_*$ выполненное исследование, уточнив некоторые моменты [9–13], продемонстрировало применимость и большую простоту привычного автомодельного подхода с одним уравнением из (1.3) и качественным анализом интегральных кривых в плоскости UA в сравнении с разделением переменных и решением системы трех уравнений (2.3). При этом главная заслуга В. Куропатенко с коллегами в том, что они нашли новые автомодельные решения, описывающие сжатие неподвижного холодного газа в точку.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (20-01-00100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse // *Luftfahrtforschung*. 1942. Bd. 19. Lfg. 9. S. 302–312.
2. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // *УМН*. 1963. Т. 18. Вып. 2. С. 3–23.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
4. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
5. Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус Пресс, 2010.
6. Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Автомодельное сжатие идеального газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем // *ТВТ*. 1998. Т. 36. № 1. С. 120–128.
7. Валиев Х.Ф. Отражение ударной волны от центра или оси симметрии при показателях адиабаты от 1.2 до 3 // *ПММ*. 2009. Т. 73. Вып. 3. С. 397–407.
8. Валиев Х.Ф., Крайко А.Н. Цилиндрически и сферически симметричное быстрое сильное сжатие идеального совершенного газа с показателями адиабаты от 1.001 до 3 // *ПММ*. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 314–326.
9. Куропатенко В.Ф., Шестаковская Е.С., Якимова М.Н. Динамическое сжатие холодного газового шара // *Доклады РАН*. 2015. Т. 461. № 5. С. 530–532.
10. Куропатенко В.Ф., Шестаковская Е.С., Якимова М.Н. Ударная волна в газовом шаре // *Вестник ЮУрГУ. Математическое моделирование и программирование*. 2016. Т. 9. № 1. С. 5–19.

11. Куропатенко В.Ф., Магазов Ф.Г., Шестаковская Е.С. Аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне в газе в одномерном случае // Вестник ЮУрГУ. Математика. Механика. Физика. 2017. Т. 9. № 4. С. 52–58.
12. Куропатенко В.Ф., Магазов Ф.Г. О фокусировке цилиндрически симметричной ударной волны в газе // Сб. материалов Международной конференции “XIII Забабахинские научные чтения”. Снежинск: Издательство РФЯЦ-ВНИИТФ, 2017. 424 с. С. 39–40.
13. Куропатенко В.Ф., Шестаковская Е.С. О сходящейся ударной волне в газе для больших значений показателя адиабатности // Сб. материалов Международной конференции “XIII Забабахинские научные чтения”. Снежинск: Издательство РФЯЦ-ВНИИТФ, 2017. 424 с. С. 55–56.
14. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.

УДК 532.51

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ВОЛНИСТЫМИ ПОПЕРЕК ПОТОКА СТЕНКАМИ

© 2023 г. Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию 07.03.2023 г.

После доработки 16.04.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Используя полные уравнения Навье—Стокса, рассмотрена линейная устойчивость плоского течения Пуазейля в канале с гофрированной нижней стенкой. Стенка гофрирована поперек потока, и основное течение имеет одну компоненту скорости. Возмущения полей скорости и давления являются трехмерными с двумя волновыми числами. Численно решается обобщенная задача на собственные значения. Найдено, что критическое число Рейнольдса, выше которого появляются нарастающие во времени возмущения, сложным образом зависит от безразмерной амплитуды и периода гофрирования. Величина отношения амплитуды и периода гофрирования разделяет область безразмерной амплитуды гофрирования на две, где зависимости критического числа Рейнольдса от параметров гофрирования качественно различны.

Ключевые слова: вязкое течение, гофрированные и волнистые стенки, устойчивость, ламинарно-турбулентный переход

DOI: 10.31857/S102470842360015X, **EDN:** GEZSYN

Течение в каналах с гофрированными стенками встречается во многих приложениях [1, 2] — компактные теплообменники и биореакторы, устройства охлаждения компонентов микроэлектроники, химические реакторы, топливные элементы, оксигенаторы крови и т.д. [3–5]. Диапазон возможных приложений затрагивает многие области современной техники и простирается от аэрокосмической отрасли до биологии [6]. Изменение волнистости стенок является одним из методов управления различными аспектами одно- и двухфазного течения в каналах. Например, рибблеты (основной поток не пересекает гребни и впадины волнистой стенки) используются в целях снижения сопротивления и затягивания перехода к турбулентности при обтекании крыльев [7, 8]. Волновая поверхность раздела фаз, формируемая мелкой текстурой структурированных насадок при растекании по ней жидкой пленки, образует структуры для течения паровой фазы [9–11]. За их счет может происходить интенсивное перемешивание пара, что, в конечном итоге, определяет эффективность разделения нефти на фракции или воздуха на компоненты в дистилляционных колоннах, заполненных такими насадками [12]. Отметим, что в этом случае основной поток пересекает гребни и впадины волнистой стенки. Хорошее перемешивание и переход к турбулентности при малых числах Рейнольдса актуальны, также, для задач охлаждения в микроустройствах [3–5].

Проблема перехода к турбулентности является одной из фундаментальных задач современной механики [13]. Стационарное ламинарное течение в каналах с синусоидальными стенками (основной поток пересекает гребни и впадины стенки) численно исследовано в работе [3]. При большой амплитуде гофрирования появляются застойные зоны. Предсказанные отрывные структуры экспериментально наблюдались в работе [4]. Для аналогичной конфигурации стенок канала, в работах [14–16] продемонстрировано существование нестационарных колебаний отрывных зон. В дальнейшем в работах [17–19] продемонстрирован переход к турбулентности через появление аperiодических колебаний отрывных зон. При течении в канале, когда основной поток не пересекает гребни и впадины волнистой стенки, задача устойчивости рассматривалась в работах [7, 8, 20, 21]. Для второго случая (основной поток пересекает гребни волн) устойчивость рассчитывалась в работах [22–24]. Анализ проводился в рамках нестационарного расчета,

что предполагает “перебор” начальных данных и, как следствие, ограничивался вариацией параметров задачи в небольших диапазонах. В настоящей работе, решая уравнения Навье—Стокса, находится основное решение и производится линеаризация исходных нелинейных уравнений около этого решения. Затем, решая обобщенную задачу на собственные значения, анализируется весь возможный спектр возмущений. Это обеспечивает новизну и дает возможность для исследования устойчивости в широком диапазоне параметров задачи.

Математический и численный аппарат исследования был развит при рассмотрении двухфазного течения по гладким и волнистым поверхностям [25, 26], и адаптирован к задачам данной работы. Меняются граничные условия на верхней стенке, и отсутствует поверхность раздела.

Целью настоящей работы является анализ линейной устойчивости плоского течения Пуазейля в канале с гофрированной нижней стенкой. Стенка гофрирована поперек потока и основное течение в таком канале имеет одну компоненту скорости. Возмущения полей скорости и давления являются трехмерными с двумя волновыми числами. Проанализированы нейтральные кривые и наиболее опасные линейные возмущения при широких диапазонах изменений параметров гофрирования и числа Рейнольдса. В зависимости от параметров гофрирования, рассчитано критическое число Рейнольдса, выше которого основное течение неустойчиво и существуют нарастающие во времени возмущения.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Течение жидкости между двумя горизонтальными гофрированными (рис. 1) поверхностями, неограниченными в x - и z -направлениях, описывается системой уравнений Навье—Стокса с соответствующими граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ y = y_-(z); u = v = w &= 0 \\ y = y_+(z); u = v = w &= 0 \\ \left\langle \int_{y_-(z)}^{y_+(z)} u dy \right\rangle &= 1 \end{aligned}$$

Здесь $x = x^*/L$, $y = 2y^*/D$, $z = z^*/L$, $t = u_0 t^*/L$ — безразмерные координаты и время, $u = u^*/u_0$, $v = v^*/(\varepsilon u_0)$, $w = w^*/u_0$, $P = (P^* + \rho g y^*)/(\rho u_0^2)$ — безразмерные компоненты скорости в x -, y - и z -направлениях и давление соответственно. Звездочка означает размерную величину, $\text{Re} = u_0 D/(2\nu)$ — число Рейнольдса, $\varepsilon = D/(2L)$, L — период гофрирования, D — размер канала, $u_0 = 2U_{VS}$, где U_{VS} — средняя по всему сечению скорость потока. Форма гофрирования нижней и верхней стенки обозначена как $y_-(z)$ и $y_+(z)$, соответственно, ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, $\langle \dots \rangle$ — означает среднее по периоду гофрирования в z -направлении.

Для дальнейших расчетов делается преобразование координат $x = x$, $z = z$, $\eta = (y - f_+)/f_-$, где $f_+ = (y_+ + y_-)/2$, $f_- \equiv y_+ - f_+ = (y_+ - y_-)/2$. Область течения в новых переменных становится известной: $\eta \in [-1, 1]$. Ниже будем рассматривать два типа каналов: (1) верхняя стенка гладкая $y_- = -1 + \varepsilon_1 f(z)$, $y_+ = 1$ и (2) обе стенки гофрированные $y_- = -1 + \varepsilon_1 f(z)$, $y_+ = 1 - \varepsilon_1 f(z)$. Для обоих случаев $f(z) = (1 + \cos(2\pi z))/2$ и $\varepsilon_1 = 2A/D$.

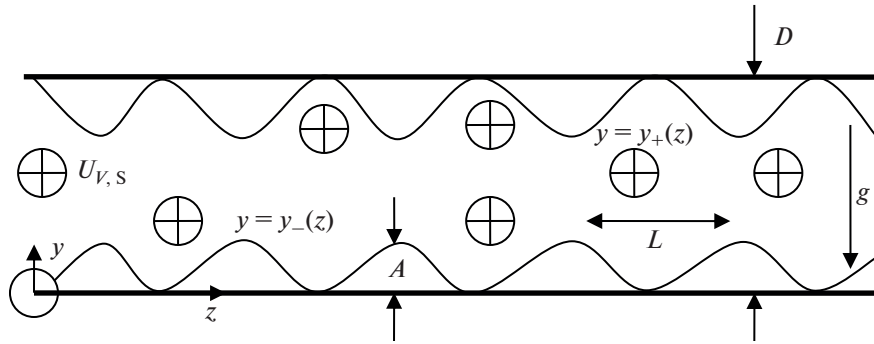


Рис. 1. Схема течения Пуазейля между двумя гофрированными поверхностями. Основной поток жидкости направлен вдоль оси x (перпендикулярно плоскости рисунка), верхняя и нижняя стенки являются периодически в z -направлении.

В новых переменных уравнения записываются следующим образом

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + (w\eta_z + v\eta_y) \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - Z + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \times \\
 & \times \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta_z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \eta} + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \\
 & \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} + (w\eta_z + v\eta_y) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = -\eta_y \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \eta_z^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \eta} + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \\
 & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + (w\eta_z + v\eta_y) \frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} - \eta_z \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \times \\
 & \times \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \eta_z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \eta} + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
 & v(t, x, z, \eta) = [\eta(f_-)_z + (f_+)_z] w(t, x, z, \eta) - \frac{\partial}{\partial x} \left(f_- \int_{-1}^{\eta} u(t, x, z, \eta') d\eta' \right) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial z} \left(f_- \int_{-1}^{\eta} w(t, x, z, \eta') d\eta' \right) \\
 & \eta = -1: u(t, x, z, \eta) = w(t, x, z, \eta) = 0 \\
 & \eta = 1: u(t, x, z, \eta) = w(t, x, z, \eta) = 0 \\
 & \left\langle f_-(z) \int_{-1}^1 u d\eta' \right\rangle = 1
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $P = Zx + \bar{P}$, $\eta_y = 1/f_-$, $\eta_z = -[\eta(f_-)_z + (f_+)_z]/f_-$, $\eta_{z\eta} = -(f_-)_z/f_-$, $\eta_{z\xi} = -(\eta_z(f_-)_z + \eta(f_-)_{zz} + (f_+)_{zz})/f_-$.

В задаче имеются три параметра — ε , ε_1 , Re , и безразмерная функция $f(z)$ для описания формы гофрирования. Далее, используя полиномы Чебышева и ряд Фурье, мы рассчитываем стационарные решения уравнений (1.1). Для нашего случая $[u(x, z, \eta), v(x, z, \eta), w(x, z, \eta), \bar{P}(x, z, \eta), Z] = [u_b(z, \eta), 0, 0, 0, 0]$

$$u_b(z, \eta) = \frac{1}{2} U_1(z) + \sum_{m=2}^M U_m(z) T_{m-1}(\eta),$$

$$U_m(z) = U_m^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2-1} U_m^k \exp(2\pi i k z), \quad (U_m^{-k})^* = U_m^k, \quad m = 1, \dots, M.$$

Здесь $T_m(\eta)$ — полиномы Чебышева и “знак звездочки” означает комплексное сопряжение. Общее число неизвестных в уравнениях (1.1) для нашего случая составляет $M(N-1)$ гармоник поля скорости $u_b(z, \eta)$ и градиент давления Z . Численный алгоритм стартует с задания начального приближения U_m^k, Z . Далее, для уточнения начального приближения, используется итерационный метод Ньютона.

Подставляя

$$u = u_b(z, \eta) + \hat{u}(x, z, \eta) \exp(-\gamma t) + C.C., \quad v = \hat{v}(x, z, \eta) \exp(-\gamma t) + C.C.,$$

$$w = \hat{w}(x, z, \eta) \exp(-\gamma t) + C.C., \quad P = \hat{P}(x, z, \eta) \exp(-\gamma t) + C.C.$$

($C.C.$ — комплексно-сопряженная величина) в уравнения (1.1) и линеаризуя их около основного решения $[u_b(z, \eta), 0, 0, 0, Z]$, получаем систему уравнений для нахождения спектра собственных значений и решения задачи линейной устойчивости стационарного решения

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, z, \eta) &= [\eta(f_-)_z + (f_+)] \hat{w}(x, z, \eta) - \frac{\partial}{\partial x} \left(f_- \int_{-1}^{\eta} \hat{u}(x, z, \eta') d\eta' \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(f_- \int_{-1}^{\eta} \hat{w}(x, z, \eta') d\eta' \right) \\ \eta_y (\hat{P} - \hat{P}_0) &= \int_{-1}^{\eta} \left\{ \gamma \varepsilon^2 \hat{v} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta'^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \left(\eta_z^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta'^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z \partial \eta'} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta'} \right) \right] - \varepsilon^2 u_b \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right\} d\eta' - \\ &\quad - \gamma \hat{u} = - \frac{\partial(\hat{P} - \hat{P}_0)}{\partial x} - \frac{\partial \hat{P}_0}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta'^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \left(\eta_z^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta'^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z \partial \eta'} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta'} \right) \right] - \left(u_b \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial u_b}{\partial z} + (\hat{w} \eta_z + \hat{v} \eta_y) \frac{\partial u_b}{\partial \eta} \right) - \\ &\quad - \gamma \hat{w} = - \frac{\partial(\hat{P} - \hat{P}_0)}{\partial z} - \frac{\partial \hat{P}_0}{\partial z} - \eta_z \frac{\partial(\hat{P} - \hat{P}_0)}{\partial \eta} + \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \eta'^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \left(\eta_z^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \eta'^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z \partial \eta'} + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta'} \right) \right] - u_b \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \\ \eta = -1: \hat{u}(x, z, \eta) &= \hat{w}(x, z, \eta) = 0 \\ \eta = 1: \hat{u}(x, z, \eta) &= \hat{w}(x, z, \eta) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(f_- \int_{-1}^1 \hat{u} d\eta' \right) &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(f_- \int_{-1}^1 \hat{w} d\eta' \right) = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

В соответствии с теоремой Флоке, решения линейной системы уравнений с периодическими коэффициентами могут быть представлены в следующем виде

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{p}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{U}_1^k \exp(2\pi i k z) + \sum_{m=2}^M T_{m-1}(\eta) \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{U}_m^k \exp(2\pi i k z) \\ \frac{1}{2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{W}_1^k \exp(2\pi i k z) + \sum_{m=2}^M T_{m-1}(\eta) \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{W}_m^k \exp(2\pi i k z) \\ \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{P}_0^k \exp(2\pi i k z) \end{bmatrix} \exp(2\pi i (Qx + Q_z z)) \quad (1.3)$$

Здесь Q и Q_z являются вещественными параметрами, $Q_z \in [0, 0.5]$. В результате задача сводится к обобщенной задаче на собственные значения для комплексных матриц общего вида

$$A\hat{x} = \gamma B\hat{x}, \quad \hat{x} = (\hat{U}_m^k, \hat{W}_m^k, \hat{P}_0^k)^T \quad (1.4)$$

Матрицы A и B имеют размерность $(2M+1)(N-1)$ в случае $|Q| + |Q_z| \neq 0$ и $(2M+1)(N-1)-1$ в противном случае. Элементы этих матриц определяются численно, путем перебора единичных векторов возмущений и их подстановки в уравнения (1.2). В общем случае возмущения (1.3) имеют две несоизмеримых длины волны в поперечном к потоку z -направлении — $\lambda_1^* = L$, $\lambda_2^* = L/Q_z$ и одну длину волны L/Q в x -направлении. Для получения ответа на вопрос об устойчивости стационарного решения $[u_b(z, \eta), 0, 0, 0, Z]$ необходимо проанализировать $(2M+1)(N-1)$ собственных чисел задачи (1.4), варьируя волновые числа возмущений $\alpha = 2\pi Q\epsilon$ и $\alpha_z = 2\pi Q_z\epsilon$. Решение устойчиво, если вещественные части всех собственных значений больше или равны нулю при всех положительных значениях волновых чисел. Возмущение является нейтральным, если вещественная часть соответствующего ему собственного значения равна нулю — $\text{Re al}(\gamma) = 0$.

Отметим, что возмущения с $|Q| + |Q_z| = 0$ являются выделенными. Такие возмущения являются периодическими в z -направлении, и их длина волны совпадает с длиной волны основного решения и периодом гофрирования стенки. Неустойчивость решения к таким возмущениям означает невозможность его реализации на практике. Решения неустойчивые к возмущениям с конечными значениями параметров Q и Q_z могут быть реализованы на конечных расстояниях от входа.

Рассматриваемые возмущения являются трехмерными и даже в случае $|Q| + |Q_z| = 0$ имеют три компоненты скорости. В случае гладких стенок, согласно теореме Сквайера [13], двумерные возмущения наиболее опасны на линейной стадии и начинают нарастать при меньших значениях чисел Рейнольдса по сравнению с трехмерными возмущениями. Для случая гофрированных стенок данная теорема не применима.

Для тестирования алгоритма решения задачи (1.4), нами были воспроизведены результаты работы [21], в которой рассматривалась устойчивость течения Пуазейля в канале с двумя гофрированными стенками (рис. 2а). В этой работе использовалась другая система безразмерных величин и в подписи рис. 3 они приведены с нижним индексом “Y”. Число Рейнольдса в [21] построено по “перепаду давления” (заранее неизвестная величина Z в уравнениях (1.1)). Для точного сравнения результатов потребовались несколько итераций по определению Re (см. подпись к рис. 3). Для трех значений числа Рейнольдса рассчитаны инкременты роста трехмерных возмущений с различными значениями Q (при этом $Q_z = 0$). Параметры гофрирования приведены в подписи к рис. 3. Сопоставление с результатами работы [21] демонстрирует полное согласие. Далее в расчетах мы ограничиваемся анализом течения в канале с одной гофрированной стенкой (см. рис. 2б) в широком диапазоне изменений числа Рейнольдса и параметров гофрирования.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На первом этапе была исследована устойчивость стационарного решения по отношению к возмущениям с $Q = Q_z = 0$. В задаче имеются три параметра — $2A/D$, $D/2L$ и число Рейнольдса. Диапазон исследований по параметру $2A/D$ составлял от 0.001 до 0.5 с шагом 0.05. Для каждого значения амплитуды гофрирования шаг расчетов устойчивости по параметру $D/2L$ составлял от 0.05 до 1.5 с шагом 0.05. Диапазон исследования по числу Рейнольдса был от 100 до 10000 с шагом 200. На втором этапе рассчитывалась устойчивость по отношению к возмущениям с конечными значениями параметра Флоке $Q_z \in [0, 0.5]$ ($Q = 0$), и шаг по этому параметру составлял 0.01.

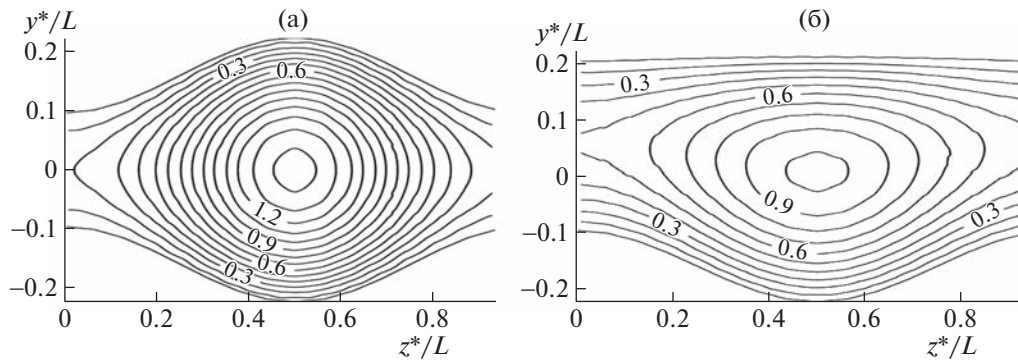


Рис. 2. Линии равного уровня для скорости основного течения $u(z^*, y^*)$ в канале с двумя гофрированными стенками (а) и с одной гофрированной стенкой (б). Здесь $\epsilon_1 = 2A/D = 0.571$, $\epsilon = D/(2L) = 0.223$ (см. подпись к рис. 3). Поле скорости представлено на одном периоде гофрирования в z -направлении и не зависит от x -координаты.

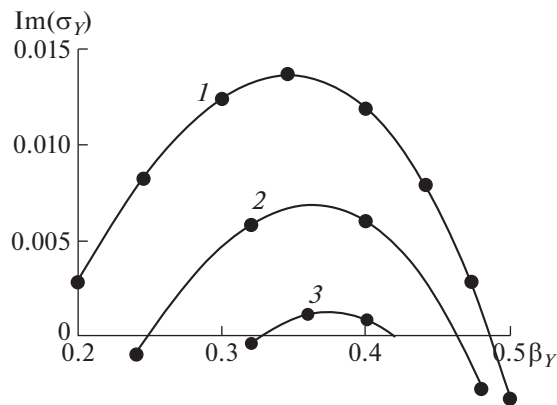


Рис. 3. Устойчивость течения в канале с двумя гофрированными стенками (см. рис. 2, $Q_z = 0$). Зависимость фактора роста $i\sigma_\gamma \text{Re}_\gamma = \gamma\epsilon(1 - \epsilon_1/2)^2 \text{Re}$ от значений волнового числа $\beta_\gamma = 2\pi Q\epsilon(1 - \epsilon_1/2)$. Символы (сплошные кружки) соответствуют расчетам работы [21] $S_\gamma = A/(D - A) = 0.4$, $\alpha_\gamma = 2\pi(D - A)/(2L) = 1$: 1–3 – $\text{Re}_\gamma = 90, 70, 60$. Сплошные линии соответствуют настоящим расчетам с параметрами $\epsilon_1 = 2S_\gamma/(1 + S_\gamma) = 0.571$, $\epsilon = 0.5\alpha_\gamma(1 + S_\gamma)/\pi = 0.223$, $Z \text{Re}^2 = -2 \text{Re}_\gamma / (\epsilon(1 - \epsilon_1/2)^3)$.

Найдено, что в исследованном диапазоне параметров стационарное течение Пуазейля в канале с гофрированной нижней стенкой (рис. 2б) устойчиво по отношению к возмущениям как с $Q_z = 0$ ($Q = 0$), так и с конечными значениями Q_z ($Q \neq 0$).

Дальнейшие исследования были посвящены устойчивости относительно продольных возмущений (1.3) с различными значениями параметра Q ($Q_z = 0$). Результаты представлены на рис. 4–6. Найдено, что в исследованном диапазоне параметров ($\epsilon_1, \epsilon, \text{Re}, Q$), в спектре собственных значений задачи (1.4) присутствует только одна мода с отрицательным значением $\text{Re al}(\gamma)$, либо ни одной. Примеры рассчитанных нейтральных кривых представлены на рис. 4. На линиях $2_1-2_5, 5_1-5_5$ рис. 4 величина $\text{Re al}(\gamma) = 0$ и они ограничивают области волновых чисел $\epsilon Q = D/(2\lambda^*)$, λ^* – размерная длина волны возмущения, для которых существуют нарастающие во времени возмущения. Найдено, что в области неустойчивости зависимость инкремента $\text{Re al}(\gamma)$ от волнового числа имеет экстремум. Существуют наиболее быстро растущие возмущения, и они являются наиболее “опасными”. Рисунок 5, для тех же значений параметров гофрирования, что и на рис. 4, демонстрирует рассчитанные волновые числа наиболее “опасных” возмущений. Здесь решалось уравнение $\partial \text{Re al}(\gamma)/\partial Q = 0$ при различных числах Рейнольдса.

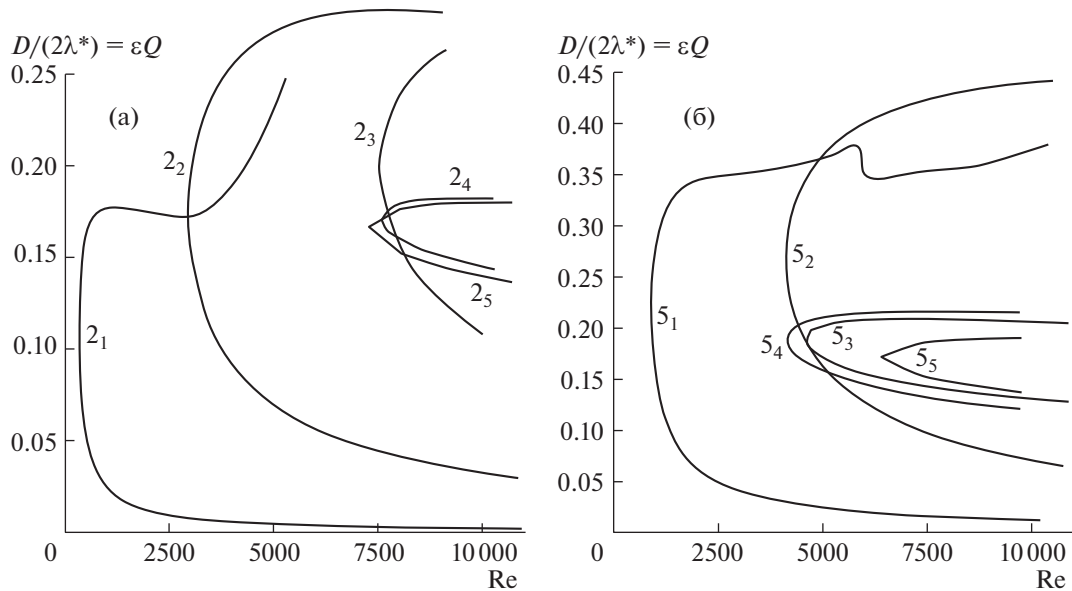


Рис. 4. Устойчивость течения в канале с одной гофрированной стенкой ($Q_z=0$). Зависимости волнового числа нейтральных возмущений от числа Рейнольдса: (а) расчет при $A/L = 0.1$ ($2_1 - 2A/D = 0.4$, $2_2 - 0.25$, $2_3 - 0.21$, $2_4 - 0.15$, $2_5 - 0.05$); (б) расчет при $A/L = 0.3$ ($5_1 - 2A/D = 0.6$, $5_2 - 0.5$, $5_3 - 0.4$, $5_4 - 0.2$, $5_5 - 0.1$). На линиях 2_1-2_5 , 5_1-5_5 $\text{Real}(\gamma) = 0$ и они ограничивают области волновых чисел, с которыми существуют нарастающие во времени возмущения. Минимальное значение числа Рейнольдса Re_{crit} , при котором существуют нарастающие возмущения, соответствует “носику” линий 2_1-2_5 , 5_1-5_5 (см. линии 2 и 5 рис. 6).

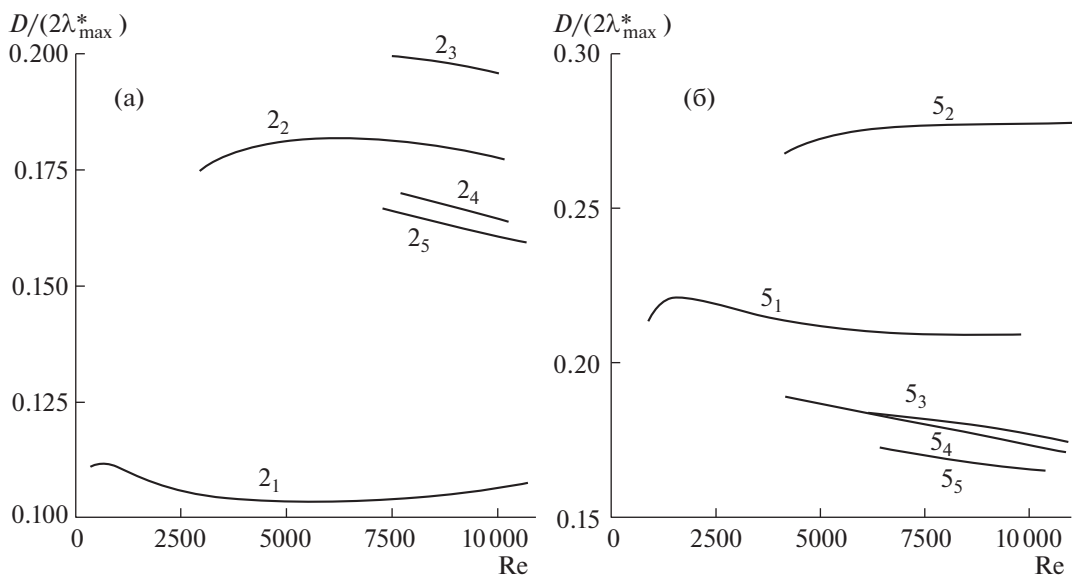


Рис. 5. Устойчивость течения в канале с одной гофрированной стенкой ($Q_z = 0$). Зависимость волнового числа линейных возмущений максимального роста от числа Рейнольдса: (а) расчет при $A/L = 0.1$ ($2_1 - 2A/D = 0.4$, $2_2 - 0.25$, $2_3 - 0.21$, $2_4 - 0.15$, $2_5 - 0.05$); (б) расчет при $A/L = 0.3$ ($5_1 - 2A/D = 0.6$, $5_2 - 0.5$, $5_3 - 0.4$, $5_4 - 0.2$, $5_5 - 0.1$). На линиях 2_1-2_5 , 5_1-5_5 выполняется равенство $\partial \text{Real}(\gamma)/\partial Q = 0$.

Минимальное значение числа Рейнольдса Re_{crit} , при котором существуют нарастающие возмущения, соответствует “носику” линий 2_1-2_5 , 5_1-5_5 рис. 4. На “носику” этих линий как $\text{Real}(\gamma) = 0$, так и $\partial \text{Real}(\gamma)/\partial Q = 0$. Используя эти уравнения для расчета заранее неизвестных Re_{crit}

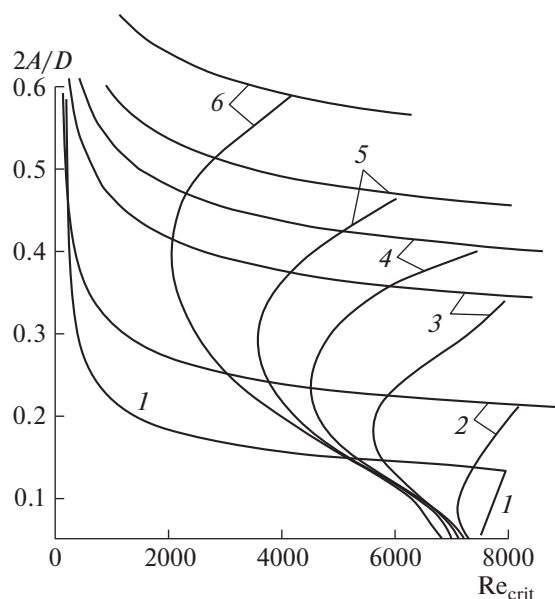


Рис. 6. Устойчивость течения в канале с одной гофрированной стенкой ($Q_z = 0$). Для различных значений параметра гофрирования $2A/D$, линии 1–6 определяют минимальное значение числа Рейнольдса Re_{crit} , при котором появляются нарастающие возмущения (см. рис. 4): 1–6 – $A/L = 0.05, 0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4$.

и Q_{crit} (значение волнового числа на “носике”), были рассчитаны линии 1–6 на рис. 6. Поясним, что значения Re_{crit} для параметров гофрирования ϵ_1 , $A/L = 0.05, 0.1, 0.2, 0.25, 0.3$ и 0.4 определяются пересечением прямой $2A/D = \text{const} = \epsilon_1$ с линиями 1–6 рис. 6 соответственно. Отметим, что $\epsilon\epsilon_1 = A/L$. Для указанных значений параметра A/L соответствующие линии на рис. 6 ограничивают область параметров $(2A/D, Re)$, где основное течение устойчиво относительно всех рассмотренных возмущений с конечными значениями Q .

Найдено, что для каждого значения A/L (см. рис. 6) существует величина параметра $(\epsilon_1)^*$, когда зависимость $Re_{crit}(\epsilon_1)$ качественно меняется и происходит “стыковка” двух различных ветвей. На рис. 4(а) и 4(б) эта “стыковка” происходит при переходе от линии 2₃ к линии 2₄ и от 5₂ к 5₃ соответственно (Re_{crit} на рис. 6 соответствует носиком линии на рис. 4). При значениях $\epsilon_1 < (\epsilon_1)^*$, на рис. 4 появляется вторая область неустойчивых возмущений, которая на этом рисунке не показана. “Носик” этой второй области неустойчивости лежит на продолжении линий рис. 6 $Re_{crit}(\epsilon_1)$, $\epsilon_1 < (\epsilon_1)^*$ после “стыковки”. В данной работе, при одинаковых величинах ϵ и ϵ_1 , нас интересует ветвь с меньшими значениями числа Рейнольдса на носике кривой нейтральной устойчивости. Для аналогичной нашей работе конфигурации стенок канала, ограничиваясь малыми значениями амплитуды гофрирования $2A/D < 0.1$, две области неустойчивых возмущений были впервые найдены в работе [27]. Для таких малых значений ϵ_1 в работе [28] показано, что гофрирование дестабилизирует стационарное течение для $2\pi\epsilon < 4.22$ и стабилизирует для $2\pi\epsilon > 4.22$. На рис. 6, при значении $2A/D = 0.05$, величина $2\pi\epsilon$ меняется примерно от шести до пятидесяти при изменении A/L от 0.05 до 0.4. Критическое число Рейнольдса увеличивается с уменьшением A/L , и гофрирование дестабилизирует течение при $2A/D = 0.05$ (см. рис. 6). Критическое число Рейнольдса при $A/L = 0.05$ близко к значению $Re_{crit}^P \approx 7500$ для гладкой стенки (см. рис. 6) и соответствующее значение $2\pi\epsilon$ близко к вычисленному в [28]. В данной работе показано, что увеличение параметра ϵ_1 качественно меняет характер зависимости критического числа Рейнольдса от параметров гофрирования.

Таким образом, мы исследовали устойчивость стационарного решения относительно трехмерных возмущений трех типов: (1) $Q = Q_z = 0$, (2) $Q = 0, Q_z > 0$, и (3) $Q > 0, Q_z = 0$. В этой статье, ввиду ограничений по объему, не исследуется устойчивость к возмущениям с $Q > 0$ и $Q_z > 0$. Опираясь на результаты по устойчивости к возмущениям типа (2), предполагается, что возмущения

с $Q > 0$ и $Q_z > 0$ являются менее опасными в сравнении с рассмотренными возмущениями 3-го типа и их анализ не изменит существенным образом результатов и выводов данной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя полные уравнения Навье—Стокса, рассмотрена линейная устойчивость плоского течения Пуазейля в канале с гофрированной нижней стенкой. Стенка гофрирована поперек потока, и основное течение имеет одну компоненту скорости. Возмущения полей скорости и давления являются трехмерными с двумя волновыми числами. Проанализированы нейтральные кривые и наиболее опасные линейные возмущения в широком диапазоне изменений параметров гофрирования и числа Рейнольдса. В зависимости от параметров гофрирования рассчитано критическое число Рейнольдса, выше которого основное течение неустойчиво, и существуют нарастающие во времени возмущения.

В канале с гладкими стенками течение Пуазейля неустойчиво, начиная с числа Рейнольдса $Re_{crit}^P \approx 7500$. Для течения в канале со стенкой, гофрированной поперек потока, найдено, что критическое число Рейнольдса сложным образом зависит от амплитуды и периода гофрирования. Для каждого из рассмотренных в статье значений $A/L \in [0.05–0.4]$ существует величина $(2A/D)^*$, зависящая только от A/L и разделяющая весь рассмотренный в статье диапазон значений $2A/D \in [0.05–0.7]$ на две области – (1) $2A/D < (2A/D)^*$ и (2) $2A/D > (2A/D)^*$. В первой области зависимость $Re_{crit}(A/L, 2A/D)$ является немонотонной. Во второй области величина $Re_{crit}(A/L, 2A/D)$ монотонно уменьшается с ростом амплитуды гофрирования вплоть до малых значений $Re_{crit} \approx 100–200$. Значения $(2A/D)^*$ рассчитаны для семи значений параметра $A/L = 0.05, 0.1, 0.2, 0.25, 0.3$ и 0.4 и возрастают с ростом A/L .

Автор выражает признательность А.З. Квон и И.В. Бондаренко за обсуждение и выполнение части работы по оформлению рукописи и проведению расчетов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00507, <https://rscf.ru/project/23-29-00507/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V. Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer, 2011. 271 p.
2. Goldstein D.B., Tuan T.-C. Secondary flow induced by riblets // J. Fluid Mech. 1998. V. 363. P. 115–151.
3. Sobey I.J. On flow through furrowed channels. Part I. Calculated flow patterns // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. P. 1–26.
4. Stepanoff K.D., Sobey I.J., Bellhouse B.J. On flow through furrowed channels. Part II. Observed flow patterns // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. № 01. P. 27–32.
5. Sparrow E.M., Hossfeld L.M. Effect of rounding of protruding edges on heat transfer and pressure drop in a duct // Int. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27. P. 1715–1723.
6. Beebe David J., Mensing Glennys A., Walker Glenn M. Physics and applications of microfluidics in biology // Annu. Rev. Biomed. Eng. 2002. V. 4. № 1. P. 261–286.
7. Бойко А.В., Ключнев Н.В., Нечепуренко Ю.М. Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 123 с.
8. Григорьев О.А., Ключнев Н.В. Устойчивость течения Пуазейля в канале с гребенчатым оребрением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 4. С. 595–606.
9. Kistler S.F., Schweizer P.M. Liquid Film Coating (Chapman and Hall, New York, 1997).
10. Weinstein S.J., Ruschak K.J. Coating flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2004. V.36. P. 29–53.
11. DeSantos J.M., Melli T.R., Scriven L.E. Mechanics of gas-liquid flow in packed-bed contactors // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 233–260.
12. Trifonov Y.Y. Modeling of mixture separation in column with structured packing // Multiph. Sci. Technol. 2022. V. 34. № 1. P. 23–51.
13. Kachanov Y.S. Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition // Annu. Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 411–482.
14. Nishimura T., Otori Y., Kawamura Y. Flow characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow // J. Chem. Eng. Jpn. 1984. V. 17. № 5. P. 466–471.
15. Nishimura T., Otori Y., Kajimoto Y., Kawamura Y. Mass transfer characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow // J. Chem. Eng. Jpn. 1985. V. 18. № 6. P. 550–555.

16. *Nishimura T., Kajimoto and Kawamura Y.* Mass transfer enhancement in channels with a wavy wall // J. Chem. Eng. Japan. 1986. V. 19. P. 142–144.
17. *Guzman A.M., Amon C.H.* Transition to chaos in converging-diverging channel flows: Ruelle-Takens-Newhouse scenario // Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 6. P. 1994–2002.
18. *Guzman A.M., Amon C.H.* Dynamical flow characterization of transitional and chaotic regimes in converging-diverging channels // J. Fluid Mech. 1996. V. 321. P. 25–57.
19. *Amon C.H., Guzman A.M., Morel B.* Lagrangian chaos, Eulerian chaos, and mixing enhancement in converging diverging channel flows // Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 5. P. 1192–1206.
20. *Szumbariski J.* Instability of viscous incompressible flow in a channel with transversely corrugated walls // J. Theor. App. Mech-Pol. 2007. V.45. № 3. P. 659–683.
21. *Yadav Nikesh, Gepner S.W., Szumbariski J.* Instability in a channel with grooves parallel to the flow // Phys. Fluids. 2017. V. 29. № 10. 084104.
22. *Cho K.J., Kim M.-U., Shin H.D.* Linear stability of two-dimensional steady flow in wavy-walled channels // Fluid Dyn. Res. 1998. V. 23. № 6. P. 349–370.
23. *Cabal A., Szumbariski J., Floryan J.M.* Stability of flow in a wavy channel // J. Fluid Mech. 2002. V. 457. P. 191–212.
24. *Floryan J.M., Floryan C.* Traveling wave instability in a diverging converging channel // Fluid Dyn. Res. 2010. V. 42. № 2. 025509.
25. *Trifonov Y.Y.* Stability of a film flowing down an inclined corrugated plate: The direct Navier-Stokes computations and Floquet theory // Phys. Fluids. 2014. V. 26. 114101.
26. *Schörner M., Reck D., Aksel N., Trifonov Y.* Switching between different types of stability isles in films over topographies // Acta Mech. 2018. V. 229. P. 423–436.
27. *Mohammadi A., Moradi H.V., Floryan J.M.* New instability mode in a grooved channel // J. Fluid Mech. 2015. V. 778. P. 691–720.
28. *Moradi H.V., Floryan J.M.* Stability of flow in a channel with longitudinal grooves // J. Fluid Mech. 2014. V. 757. P. 613–648.

УДК 532.517.4

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ И ДВИЖЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ВИХРЕВЫХ ОБЛАКОВ

© 2023 г. М. А. Засимова^{а,*}, В. В. Рис^а, Н. Г. Иванов^а

^аСанкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: zasimova_ma@spbstu.ru

Поступила в редакцию 01.02.2023 г.

После доработки 25.05.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Представлены результаты численного моделирования формирования и движения турбулентных вихревых облаков, возникающих в результате выдува импульсных струй с различными начальными скоростями и длительностью. Принята модель осесимметричного турбулентного течения, описываемого нестационарными уравнениями Рейнольдса. Показано, что независимо от начальных условий через один и тот же промежуток безразмерного времени от момента начала истечения струи возникает вихревое облако, которое имеет форму, близкую к сферической. Наведенное вихрем течение в остальном пространстве близко к потенциальному. Установлено, что профили скорости в вихрях в осевом и поперечном направлениях близки к автомодельным и схожи для различных условий истечения импульсных струй. Приведены и проанализированы зависимости от времени геометрических и кинематических характеристик вихревых облаков: положения центра облака (точки с максимальной скоростью) и радиуса сферы, эквивалентной по объему вихревому облаку, а также максимальной и средней скоростей. Для исследованных условий истечения струй характеристики вихревых облаков оказываются сходными.

Ключевые слова: импульсная струя, турбулентное вихревое облако, автомодельность, численное моделирование

DOI: 10.31857/S1024708423600100, **EDN:** YUIZZD

Задачи динамики турбулентных, свободно конвективных или движущихся вынужденно под воздействием начального импульса компактных вихревых облаков (англ. — puff) на протяжении длительного времени служили предметом исследования при изучении процессов горения и атмосферных явлений. В последнее время пандемийный характер распространения вирусных заболеваний сделал остроактуальными задачи аэродинамики переноса инфекции при обычных (дыхание, разговор, пение) и острых (кашель, чихание) респираторных явлениях [1, 2]. Последние относятся к наиболее опасным, так как сопровождаются образованием вихревых облаков и повышенным выбросом вирусосодержащей капельной среды.

В результате экспериментальных исследований были определены время выдыхания воздуха при однократном кашле (типичная величина — 0.7 с) и временная зависимость расхода выдыхаемого воздуха, которая имеет несимметричную колоколообразную форму с максимумом при скорости истечения около 20 м/с и передним фронтом, более крутым по сравнению с задним [3]. При однократном кашле формируется импульсная турбулентная струя (число Рейнольдса, определенное по максимальной скорости, имеет порядок 10^4), трансформирующаяся в турбулентное вихревое облако, которое может распространяться в покоящейся среде на значительное, до семи метров, расстояние [4]. Это свойство вихревых облаков, сопровождающих острые респираторные явления, противоречит рекомендациям ВОЗ о социальной дистанции 1.5–2 м и служит побудительным мотивом к продолжению исследований, в том числе с использованием современных технологий прямого численного моделирования (DNS, Direct Numerical Simulation) [5–7]. Отметим, что расчетами на основе подхода DNS получены поля случайных характеристик только для однократного воспроизведения острого респираторного явления при пониженных числах Рейнольдса (порядка 10^3) и, что весьма существенно, для коротких промежутков времени, превосходящих время истечения струи не более, чем в 5 раз.

Течение, формирующееся в результате импульсного выдува из отверстия диаметром d , характеризуют величиной параметра $P = (L_0/d)^{1/3}$ (англ. — piston ratio), в котором $L_0 = V_0 T_0$ — протяженность “воздушного поршня” при выдуве, T_0 и V_0 — время выдува и средняя за это время скорость среды в отверстии [8]. Если величину L_0/d представить как отношение объемов “воздушного поршня” $Vol = L_0 \cdot (\pi/4) \cdot d^2$ и цилиндра $(\pi/4) \cdot d^3$, высота которого равна диаметру, то параметр P приобретает смысл отнесенного к диаметру отверстия линейного масштаба объема, добавленного импульсной струей во внешнюю среду. Принято считать [8], что вихревые облака образуются, если значения параметра P находятся в диапазоне $1.6 < P < 8$, который соответствует условиям выдоха при острых респираторных явлениях. При меньших значениях P образуются вихревые кольца, а при больших — нестационарные струи. Вихревые кольца сплюснены в продольном направлении, а нестационарные струи заметно вытянуты в продольном направлении. Таким образом, турбулентные вихревые облака занимают промежуточное положение между вихревыми кольцами [9, 10] и нестационарными струями [11]. Главное отличие вихревых облаков от других типов течения состоит в том, что их продольные и поперечные (относительно направления движения импульсной струи) размеры сопоставимы, а форма близка к сферической.

Следуя [12–15], покажем, что для вихревого облака из условия сохранения количества движения вытекают свойства автомодельности. Пусть в момент времени T_0 импульсное струйное истечение со скоростью V_0 закончилось, и образовавшееся облако с количеством движения $I_0/\rho = Vol V_0$ распространяется в направлении, заданном струей. Текущий объем облака выразим через его характерный размер $Vol \sim R(t)^3$. Экспериментально установлено, что существует линейная связь между пройденным облаком расстоянием $L(t)$ и его размером $R(t)$ [13–15]. В частности, в [14] получено $R(t) = 0.18L(t)$, откуда следует $Vol \sim L(t)^3$. Если порядок скорости движения облака определить как $V(t) \sim L(t)/t$, то из условия $I_0/\rho = \text{const}$ следует, что пройденное облаком расстояние отвечает степенной зависимости $L(t) \sim t^{1/4}$, а размер и скорость облака — зависимостям $R(t) \sim t^{1/4}$ и $V(t) \sim t^{-3/4} \sim L(t)^{-3}$ [14].

Результаты DNS-моделирования [5] показали, что течение, образовавшееся после выдува импульсной струи, вполне удовлетворяет масштабным соотношениям для $R(t)$ и $V(t)$. В [6, 7] адекватность DNS-моделирования, проведенного для начального периода формирования вихревого облака вплоть до 180 характерных времен d/V_0 , демонстрируется путем сравнения с экспериментом зависимости $L(t)$ и линейной связи между $R(t)$ и $L(t)$, близкой к приведенной в [14]. В работах [16–19] нами представлены результаты численного моделирования импульсной струи и вихревого облака в тех же условиях, что и в [6, 7], полученные методом моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) и на основе решения нестационарных уравнений Рейнольдса (Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes, URANS). Мотивацию этих работ определила возможность моделирования вихревых облаков на протяжении значительно большего времени по сравнению с временем, которое достигнуто моделированием на основе DNS-подхода. Мгновенные картины течения, полученные методом LES, в общих чертах совпадают с картинами, представленными в [6]. Картины течения, полученные методом URANS, на этапе формирования и движения вихревого облака при $t > T_0$ оказались похожими на полученные методом LES.

Задача настоящего исследования заключалась в получении методом URANS количественных характеристик вихревых облаков на безразмерных временных интервалах $tV_0/d > 10^3$, значительно превосходящих время истечения струи $tV_0/d \approx 10^2$. Также изучалась чувствительность характеристик вихревых облаков к условиям подачи импульсной струи: ее скорости и времени истечения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривается течение несжимаемой среды в полупространстве, ограниченном непроницаемой твердой стенкой. На стенке расположено круглое отверстие диаметром d , из которого по нормали к поверхности вытекает импульсная струя. Принимается модель в среднем нестационарного, осредненного по Рейнольдсу, осесимметричного турбулентного течения. Начало цилиндрической системы координат расположим в центре отверстия, а ось z направим в пространство по нормали к ограничивающей стенке. Для определения напряжений Рейнольдса воспользуемся гипотезой Буссинеска; систему уравнений задачи представим в виде

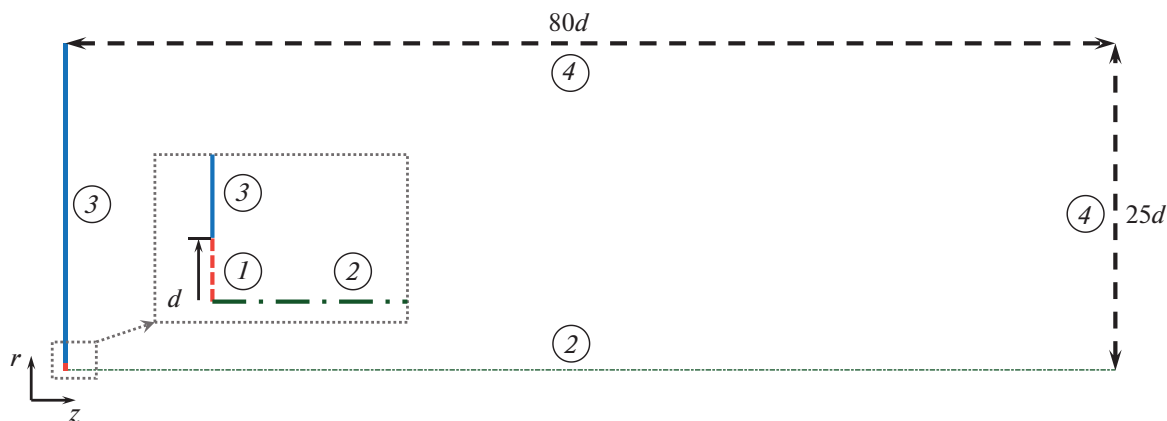


Рис. 1. Схема расчетной области. 1 – входное отверстие, 2 – ось симметрии, 3 – непроницаемая стенка, 4 – проницаемая граница.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad r \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r V_r^2) + \frac{\partial}{\partial z} (r V_z V_r) = - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[r (v + v_t) \frac{\partial V_r}{\partial r} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[r (v + v_t) \frac{\partial V_r}{\partial z} \right] - \frac{V_r}{r} (v + v_t) + r \frac{\partial v_t}{\partial r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + r \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial V_r}{\partial z}, \\ r \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r V_z V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r V_z^2) = - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left[r (v + v_t) \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[r (v + v_t) \frac{\partial V_z}{\partial z} \right] + r \frac{\partial v_t}{\partial r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + r \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial V_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Здесь $V_r(r, z, t)$ и $V_z(r, z, t)$ – радиальная и осевая компоненты вектора осредненной скорости, $p^* = p + 2/3 \rho k$ – модифицированное осредненное давление, k – кинетическая энергия турбулентности, $\rho, v = \text{const}$ и v_t – плотность, кинематические коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкости соответственно.

В начальный момент времени ($t = 0$) среда в полупространстве покоится: $V_r(r, z, 0) = V_z(r, z, 0) = 0$. В промежуток времени $0 \leq t \leq T_0$ из отверстия вытекает среда со скоростью $V_0(t) = V_z(r \leq d/2, 0, t)$.

Течение, отвечающее поставленной задаче, характеризуется двумя безразмерными параметрами [8]: числом Рейнольдса $Re = V_0 d / \nu$ и параметром $P = (V_0 T_0 / d)^{1/3}$.

Задача решалась численным методом с использованием гидродинамического пакета ANSYS Fluent (версия 2019r1). Осесимметричное течение, вызванное выдувом импульсной струи из центрального отверстия диаметром d , рассчитывалось в области радиусом $r = 25d$ и протяженностью $z = 80d$, область показана на рис. 1. Граничные и начальные условия приведены в табл. 1, здесь V_n и V_τ – нормальная и касательная компоненты скорости. Согласно методике, реализованной в использованном вычислительном пакете, на проницаемых границах расчетной области на участках, где жидкость выходит из области, давление полагается заданным и постоянным, а на участках, где поток массы направлен внутрь области, задается постоянное полное давление, и для расчета давления используется аналог соотношения Бернулли. Значение скорости на проницаемых границах находилось путем экстраполяции изнутри расчетной области, при этом на участках входа задается нормальное к поверхности направление скорости втекания. Область численного интегрирования и сформулированные для нее граничные условия выбраны нами такими же, как и в работах [6, 7, 16–19].

Турбулентная вязкость, $\bar{v}_t$, находится с помощью k - ϵ RNG-модели турбулентности [20]. Согласно k - ϵ RNG-модели, поле турбулентной вязкости определяется из дифференциального уравнения:

$$d \left(\frac{k}{\sqrt{\epsilon} \nu} \right) = 1.72 \frac{(v + v_t)/\nu}{\sqrt{[(v + v_t)/\nu]^3 - 1 + C_v}} d[(v + v_t)/\nu],$$

где $C_v = 100$. Кинетическая энергия турбулентности k и скорость диссипации ε определяются решением уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + V_r \frac{\partial k}{\partial r} + V_z \frac{\partial k}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha_k (v + v_t) \frac{\partial k}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\alpha_k (v + v_t) r \frac{\partial k}{\partial r} \right] + P_k - \varepsilon, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + V_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha_\varepsilon (v + v_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\alpha_\varepsilon (v + v_t) r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} - R_\varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь $P_k = v_r S$ — генерационное слагаемое, $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ — модуль тензора скоростей деформаций, $C_{1\varepsilon} = 1.42$, $C_{2\varepsilon} = 1.68$. Обратные турбулентные числа Прандтля принимаются равными $\alpha_k = \alpha_\varepsilon = \alpha$, и согласно теории ренормализационной группы (RNG-теории) рассчитываются из уравнения:

$$\left| \frac{\alpha - 1.3929}{\alpha_0 - 1.3929} \right|^{0.6321} \left| \frac{\alpha - 2.3929}{\alpha_0 - 2.3929} \right|^{0.3679} = \frac{v}{v + v_t}.$$

Последнее слагаемое в уравнении для ε определяется по следующей формуле:

$$R_\varepsilon = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3 k},$$

где $\eta = Sk/\varepsilon$, $\eta_0 = 4.38$, $\beta = 0.012$, $C_\mu = 0.0845$.

Настройка k – ε RNG модели турбулентности проводилась, в том числе, при расчете модельных сдвиговых течений [21]. Основное отличие k – ε RNG-модели от стандартной k – ε модели, отработанной в том числе и для моделирования осесимметричных струйных течений, состоит в способе определения турбулентной вязкости и в дополнении уравнения переноса скорости диссипации источниковым членом R_ε , полученным в результате приложения метода ренормализационной группы к описанию однородной изотропной турбулентности и турбулентности в слое с однородным сдвигом. В работе [21] показано, что для струйных течений k – ε RNG модель турбулентности дает несколько лучшие результаты моделирования по сравнению со стандартной моделью и ее модификациями.

На входе в расчетную область задавались постоянные значения турбулентной вязкости ($v_{t0}/v = 10$) и интенсивности турбулентности ($I_0 = 5\%$), которые в коде пересчитываются во входные значения k и ε . Эти условия соответствуют умеренному уровню турбулентности вблизи входного отверстия, существенно меньшему уровню $I \approx 60\%$, полученного в наших расчетах в слое смешения импульсной струи. Ниже, в разделе, описывающем формирование и движение вихревого облака, показано, что изменение входных значений v_{t0}/v и I_0 в очень широком диапазоне влияет только на начальную стадию течения, близкую по продолжительности к времени истечения импульсной струи.

При проведении настоящих расчетов в пакете ANSYS Fluent активировались схемы дискретизации второго порядка точности по пространству и времени. В расчетах использовались сетки с прямоугольными элементами, размерность базовой расчетной сетки составила $N_r \times N_z = 85 \times 102$ ячеек. Проведено исследование сеточной чувствительности решения, для этого базовая сетка была измельчена по обоим координатным направлениям в два и четыре раза. Решения, полученные на разных сетках, оказались практически тождественными, что позволило сделать заключение о слабой сеточной зависимости.

ФОРМИРОВАНИЕ И ДВИЖЕНИЕ ВИХРЕВОГО ОБЛАКА

Особенности формирования и движения вихревого облака рассматриваются на примере базового варианта расчета со значениями определяющих параметров $P = 3.63$ и $Re = 3000$. На рис. 2 и 3 представлены картины течения в начальной фазе формирования вихревого облака. Показаны цветные карты полей безразмерной продольной компоненты скорости V_z/V_c и безразмерного модуля завихренности $\Omega/\Omega_{\max}$ для разных моментов безразмерного времени $t' = tV_0/d$ от начала истечения струи: $t' = 24, 72$ и 120 (в рассматриваемом варианте выпуск струи оканчивается при $t' = 48$). Локальные масштабы осевой скорости и завихренности определены следующим образом. Скорость V_c — максимальная продольная скорость для данного момента времени; ей соответствует точка $C(0, z_c)$, которую будем считать центром вихревого облака. Величина

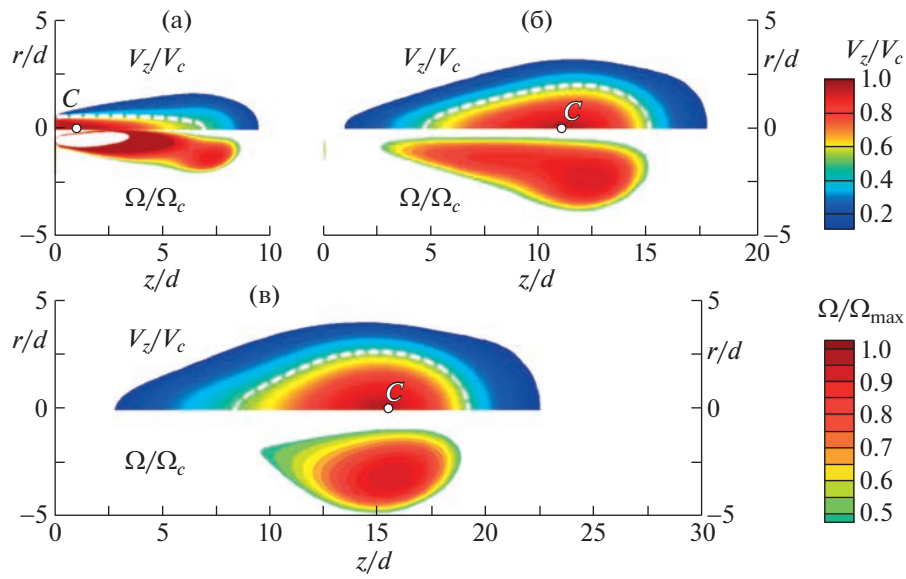


Рис. 2. Поля продольной скорости и завихренности в различные моменты времени: (а) $t' = 24$, (б) $t' = 72$ и (в) $t' = 120$.

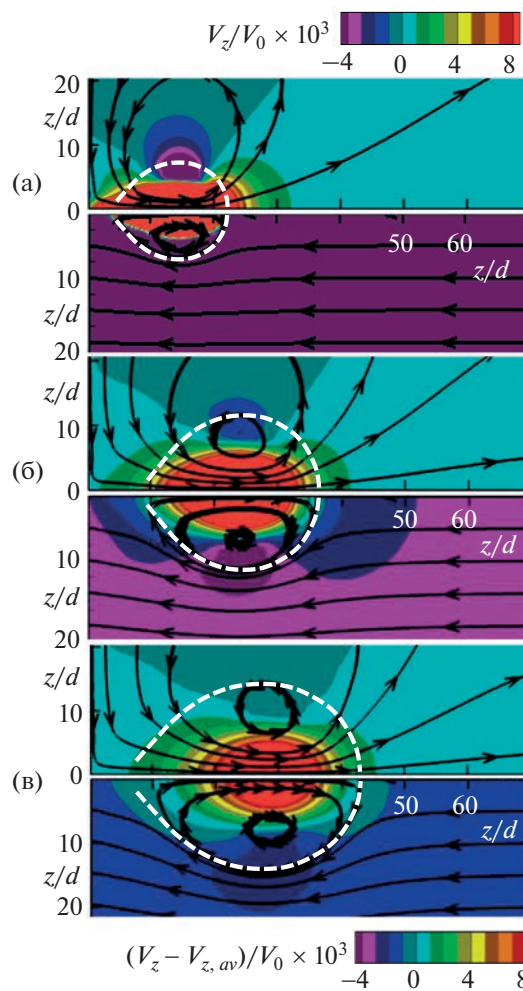


Рис. 3. Картины течения в абсолютной (сверху) и относительной (снизу) системах координат в различные моменты времени: (а) $t' = 120$, (б) $t' = 600$ и (в) $t' = 1200$.

Таблица 1. Начальные и граничные условия

Переменные		p^*	V_r	V_z	k	ε
Начальные условия		$p^* = 0$	$V_r = 0$	$V_z = 0$	$k = 0$	$\varepsilon = 0$
Граничные условия	1	—	$V_r = 0$	$V_z = V_0(t)$	$k = 3/2(V_0 I_0)^2$	$\varepsilon = C_\mu k^2 / (v_i / v)$
	2	—	$V_r = 0$	$\partial V_z / \partial r = 0$	$\partial k / \partial r = 0$	$\partial \varepsilon / \partial r = 0$
	3	—	$\partial V_r / \partial z = 0$	$V_z = 0$	$\partial k / \partial z = 0$	$\partial \varepsilon / \partial z = 0$
	4	Вход	$p^* = -\rho V_n^2 / 2$	$\partial V_n / \partial n = 0, V_\tau = 0$	$k = 3/2(V I_0)^2$	$\varepsilon = C_\mu k^2 / (v_i / v)$
	Выход	$p^* = 0$	$\partial V_n / \partial n = 0, \partial V_\tau / \partial n = 0$		$\partial k / \partial n = 0$	$\partial \varepsilon / \partial n = 0$

Таблица 2. Входные значения характеристик турбулентности

№	$I_0, \%$	v_{i0}/v	k_0/V_0^2	$\varepsilon_0 d/V_0^3$
1	0.5	0.1	3.8×10^{-5}	3.8×10^{-6}
2	5	10	3.8×10^{-3}	3.8×10^{-4}
3	10	50	1.5×10^{-2}	1.2×10^{-3}

$\Omega_{\max} = (\partial V_z / \partial r - \partial V_r / \partial z)_{\max}$ — максимальная по модулю завихренность для этого же времени. Пунктирной линией на рисунках отмечена изотаха $V_z = V_c/2$.

В осредненном турбулентном течении, индуцированном импульсной струей, вихревое облако локализуется в области, где достаточно велика окружная компонента завихренности. Картина поля скорости во время истечения импульсной струи ($t' = 24$) соответствует картине истечения нестационарных струй и содержит области ядра и зону смешения. В зоне смешения видны две области повышенной завихренности: вытянутая область (слой смешения) и пятно в зоне торможения струи, которое можно трактовать как зародыш вихревого облака, имеющего форму вихревого кольца (рис. 2а). По завершении истечения струи ($t' = 72$) (рис. 2б) область завихренности, произведенной зоной смешения, смыкается с вихревым кольцом, срединная аксиальная плоскость которого приближается к точке C с максимальной продольной скоростью V_c . К моменту времени $t' = 120$ вихревое облако приобретает форму вихревого кольца (рис. 2в), сечение которого имеет сопоставимые размеры, приблизительно 10×10 безразмерных единиц.

Представляет интерес проанализировать, насколько начальный период формирования вихревого облака подвержен влиянию входных значений турбулентных характеристик импульсной струи, произвольно заданных при постановке задачи. В табл. 2 приведены три набора значений турбулентных характеристик, из которых второй соответствует поставленной выше задаче, а первый и третий — низкому и высокому уровням турбулентности во входном сечении. В таблице приведены параметры I_0 и v_{i0}/v , которые задаются при постановке задачи, и соответствующие безразмерные значения кинетической энергии турбулентности k_0 и скорости диссипации ε_0 , с которыми оперирует вычислительный код.

На рис. 4 показаны распределения интенсивности турбулентности, турбулентной вязкости и продольной скорости в начальный период течения — в период формирования вихревого облака, полученные для разных входных значений характеристик турбулентности. Видно, что многократное, почти на три порядка, изменение начальных характеристик турбулентности оказывает заметное локальное влияние только во время истечения струи ($t' = 24$). Влияние на характеристики турбулентности (рис. 4 а,б) ограничено в пространстве областью $z/d < 10$, а влияния на поле скорости даже в этой, близкой к источнику области, практически отсутствует (рис. 4в). После истечения струи ($t' = 72$) влияние входных значений характеристик турбулентности не прослеживается.

Рисунок 3 представляет картины течения в основной фазе движения сформированного вихревого облака. Представлены три момента времени: $t' = 120, 600$ и 1200 . Цветные карты даны для скоростей, отнесенных к скорости истечения струи, что позволяет наглядно оценить затухание продольной скорости во времени и в пространстве. Карты скорости и линии тока представлены в двух системах координат: в неподвижной системе (верхние половины каждого рисунка) и в си-

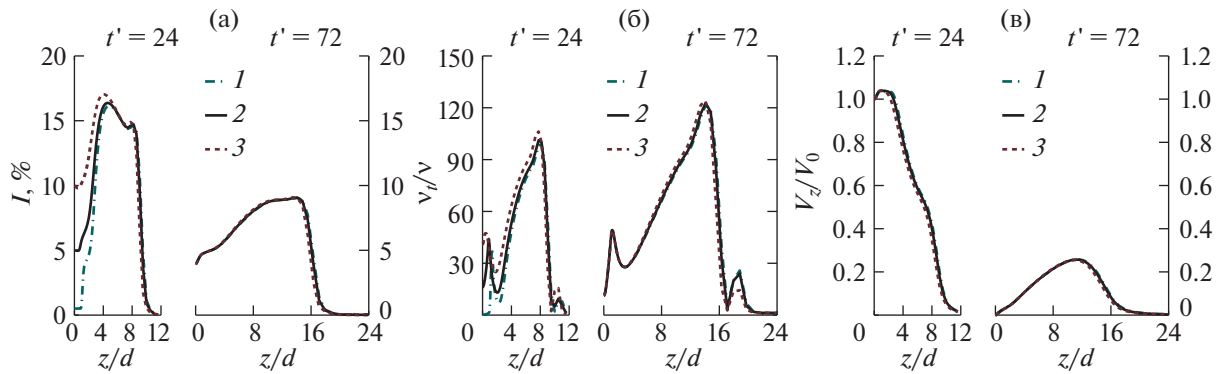


Рис. 4. Распределения параметров потока вдоль оси течения в различные моменты времени ($t' = 24$ и 72): (а) — интенсивность турбулентности, (б) — турбулентная вязкость, (в) — продольная скорость; 1–3 — варианты в табл. 2.

стеме координат, движущейся со средней для каждого момента времени продольной скоростью $V_{z,av}$ (нижние половины). Скорость $V_{z,av}$ определяется в каждый момент времени как средняя по объему, внутри которого выполняется условие $|V_z| > 0.01 V_c$.

Линии тока (напомним, из-за нестационарности течения они не совпадают с траекториями) в относительном движении демонстрируют картину обтекания тороидального вихря набегающим однородным потоком. Нулевая линия тока в относительном движении (штриховая линия, продублированная и на верхние половины каждого рисунка) указывает на то, что форма завихренной области течения близка к сферической [22]. Внешнее течение, наведенное вихрем, в относительной системе выглядит как потенциальное, завихренность в этой части потока в относительных единицах не превосходит 10^{-3} . Это позволяет назвать наведенное вихрем течение квази-потенциальным.

Для фазы движения сформированного вихревого облака профили безразмерной продольной скорости V_z/V_c для трех моментов времени показаны на рис. 5. Профили скорости построены вдоль линий А–А и В–В. Линия А–А, перпендикулярная продольной оси z , начинается в точке $C(0, z_c)$, линия В–В расположена на оси вихря. Масштабом для получения безразмерных значений координат в каждый момент времени служит величина $r_s = r_{0.5}(t)$, для которой $V_z(r_s, t) = V_c(t)/2$.

Отметим для всех моментов времени высокую степень совпадения профилей безразмерной скорости вдоль линии А–А и вдоль линии В–В на отрезке от $0 \leq (z - z_c)/r_{0.5} < 4$. На отрезке $-6 < (z - z_c)/r_{0.5} \leq 0$ профиль скорости в момент $t' = 120$ сильно отличается от профилей в моменты $t' = 600$ и $t' = 1200$. Профили в моменты $t' = 600$ и $t' = 1200$ отличаются слабо, что свидетельствует о практическом завершении формирования поля скорости в вихревом облаке к моменту $t' = 600$. Это наблюдение согласуется с показанными на рис. 3 формами вихревого облака. В относительном движении наветренная сторона вихря очень близка по форме к сфере, а подветренная сторона вытянута в продольном направлении. Эта вытянутость является следствием формирования вихревого облака в начальной фазе (рис. 2).

На профилях продольной скорости вдоль линии А–А (рис. 5а) можно отметить область возвратного течения, в которой значения скорости V_z отрицательные. По данным рис. 5а центры вихрей, в которых $V_z/V_c = 0$, находятся на одинаковом расстоянии $r/r_{0.5} \cong 1.63$ от продольной оси.

Установленное для основной фазы движения турбулентного вихревого облака подобие полей продольной скорости в переменных $r/r_{0.5}(t)$, $(z - z_c)/r_{0.5}(t)$ и $V_z/V_c(t)$ позволяет говорить об автомодельности вихревого облака во времени и назвать основную фазу его движения фазой автомодельности.

Как было показано во введении, из условия сохранения внесенного в среду струей количества движения следует, что пройденное вихревым облаком расстояние должно отвечать зависимости $L(t) \sim t^{1/4}$. Так как точка с максимальной скоростью $z_c(t)$ находится в центре вихря (рис. 2), ее движение должно отвечать той же зависимости.

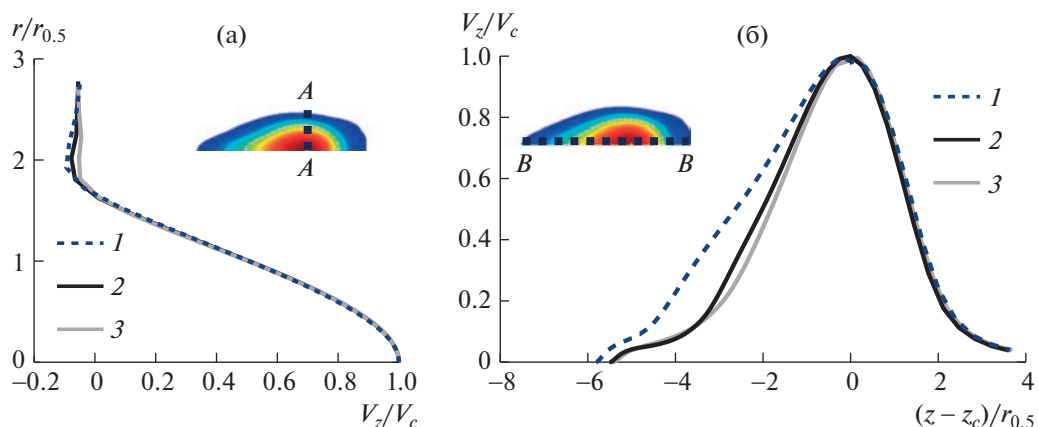


Рис. 5. Профили продольной скорости вдоль линий А–А и В–В в моменты времени: (1) $t' = 120$, (2) $t' = 600$ и (3) $t' = 1200$.

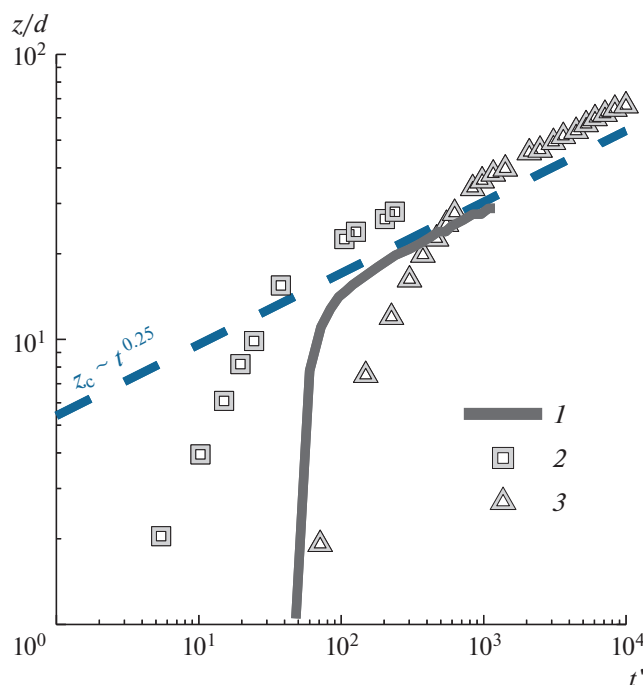


Рис. 6. Изменение во времени положения максимума продольной скорости z_c/d (1 – расчетные данные) и экспериментально отмеченные положения переднего фронта вихревого облака z_f/d [14] (2 – $Re = 3000$ и $P = 4$, 3 – $Re = 12000$ и $P = 5.8$).

На рис. 6 сплошная линия, полученная в расчете, – зависимость положения точки $C(0, z_c)$ от времени. Линия начинается при $t' \cong 50$, когда только что закончилось струйное истечение, и максимум скорости находится вблизи отверстия ($z_c/d = 1$). При $t' \cong 120$ быстрое удаление точки z_c от источника прекращается, и зависимость $z_c(t)$ становится степенной с показателем 0.25. Поведение зависимости $z_c(t)$ позволяет вполне определенно выделить начальную фазу формирования турбулентного облака и фазу автомодельности. Временная граница между фазами для принятых в расчете условий составляет $t' \cong 120$ с момента начала струйного выдува. Действительно, в этот момент на рис. 3 а виден сформировавшийся вихрь, а на рис. 5 профили скорости для $t' = 120$ подобны профилям для $t' = 600$ и $t' = 1200$.

Символы на рис. 6 – экспериментальные данные работы [14], где представлены результаты фоторегистрации распространения фронта (z_f) окрашенного вихревого облака в покоящейся

среде. Данные приведены для условий одного из экспериментов, близких к принятым в настоящей работе: $Re = 3000$ и $P = 4$ (квадратные символы), и для условий $Re = 12000$ и $P = 5.76$ (треугольные символы). Эти значения охватывают весь диапазон, представленный в [14]. Видно, что в фазе автомодельности экспериментальная точка $(0, z_f)$ и расчетная $(0, z_c)$ движутся синхронно по закону $t^{1/4}$, при этом всегда выполняется очевидное неравенство $z_f > z_c$. Увеличение со временем расстояния между этими характерными точками можно связать с увеличением размера вихревого облака ($R(t) \sim t^{1/4}$), что получено в эксперименте и в наших расчетах (рис. 3).

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК ВИХРЕВОГО ОБЛАКА К ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ ПАРАМЕТРАМ ИМПУЛЬСНОЙ СТРУИ

Значения безразмерных параметров P и Re определяют основные черты течений, формирующихся при импульсном выдуве струй. В зависимости от значения параметра P может сформироваться вихревое кольцо, вихревое облако (*puff*) или нестационарная струя. В зависимости от значения числа Рейнольдса эти течения могут быть ламинарными или турбулентными. Для базового варианта были выбраны такие значения параметров ($P = 3.63$ и $Re = 3000$), которые позволили проанализировать течение, классифицированное как турбулентное вихревое облако. Анализ течения проводился в безразмерной постановке. Представляется вместе с тем целесообразным дополнить результаты анализа данными, которые будут описывать свойства турбулентного вихревого облака в зависимости от изменения как безразмерных, так и размерных параметров импульсных струй: времени истечения T_0 и скорости истечения V_0 , что позволит непосредственно осуществить перенос полученных результатов на конкретную задачу о выдыхании человеком воздуха при однократном кашле. Варьирование условий истечения выполнено таким образом, чтобы значения P и Re не выходили за пределы, которыми ограничена область существования турбулентных вихревых облаков. Такой же подход реализовывался и в экспериментальных исследованиях [14], но в силу понятных причин численное моделирование предоставляет более широкие возможности для многопараметрического исследования по сравнению с экспериментом.

Ниже представлены результаты параметрических расчетов для пяти вариантов с различными начальными условиями формирования вихревого облака (табл. 3). Вариант 1 – базовый, на примере которого выше были рассмотрены особенности формирования и движения вихревого облака. Варианты 2–5 иллюстрируют влияние числа Рейнольдса и условий выдува струи на исследуемое течение. В них параметр P принимает близкие к варианту 1 значения ($3 \leq P \leq 3.8$), значения Re находятся в диапазоне $(3 \dots 12) \times 10^3$, см. табл. 3. Для формулировки конкретной размерной постановки приведенные в табл. 3 размерные величины (T_0 и V_0), характеризующие импульсные струи, следует дополнить величинами вязкости среды ($\nu = 1.6 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$) и диаметра отверстия ($d = 0.02 \text{ м}$). Приведенный в таблице импульс струи определен как $I_0/\rho = 0.25\pi d^2 L_0 V_0$ [23]. Для варианта 2 скорость истечения зависит от времени $V_0 = f(t)$ так, как было принято в серии работ [6, 7, 16–19], выполненных по теме моделирования острых респираторных явлений. Функция $f(t)$ приближенно описывает зависимость скорости воздуха, вытекающего из рта человека при однократном кашле. В период от 0 до 0.15 с $f(t) = 32t$, т.е. скорость увеличивается от 0 до 4.8 м/с, далее в период от 0.15 с до $T_0 = 0.4$ с скорость уменьшается $f(t) = 4.8 \cdot (1 - 4 \cdot (t - 0.15))$ и при $t \geq T_0$ $f(t) = 0$. В этом варианте среднее значение скорости за время T_0 равно 2.4 м/с, т.е. такое же, как и для варианта 1, в котором скорость постоянна. Время истечения ($T_0 = 0.4$ с) в вариантах 1 и 2 одинаковое. Скорость истечения принята постоянной и для вариантов 3–5. Обратим внимание, что для вариантов 1, 2 и 3 величина $L_0 = V_0 T_0$ одинакова (0.96 м, объем вытекающего воздуха 0.3 л), при этом время истечения T_0 для вариантов 1 и 3 отличается в четыре раза. Для варианта 4 скорость истечения V_0 несколько увеличена по сравнению с вариантом 1. Для варианта 5 величина I_0/ρ такая же, как для варианта 4, при увеличенной скорости истечения и уменьшенном времени. В целом каждый из размерных параметров импульсной струи изменяется в четыре раза по сравнению с базовым вариантом 1.

На рис. 7 показаны безразмерные профили продольной скорости для момента времени $t' = 600$ и всех рассчитанных вариантов. Видно, что для всех вариантов к этому моменту времени наступила фаза автомодельности. В автомодельных переменных профили $V_z/V_c(r/r_{0.5})$ практически идентичны, а профили $V_z/V_c((z - z_c)/r_{0.5})$ несколько различаются на подветренной в относительном движении стороне вихревого облака, и это различие вызвано влиянием фактической продолжительности и скорости истечения импульсных струй. Почти полное подобие профилей

Таблица 3. Безразмерные и размерные параметры импульсных струй

Вариант	P	$Re_d \times 10^{-3}$	V_0 , м/с	T_0 , с	L_0 , м	$(I_0/\rho) \times 10^4$, м ⁴ /с
1	3.63	3	2.4	0.4	0.96	7.235
2	3.63	3	$f(t)$	0.4	0.96	7.235
3	3.63	12	9.6	0.1	0.96	29
4	3.8	3.46	2.77	0.4	1.108	9.64
5	3	6.93	5.54	0.1	0.554	9.64

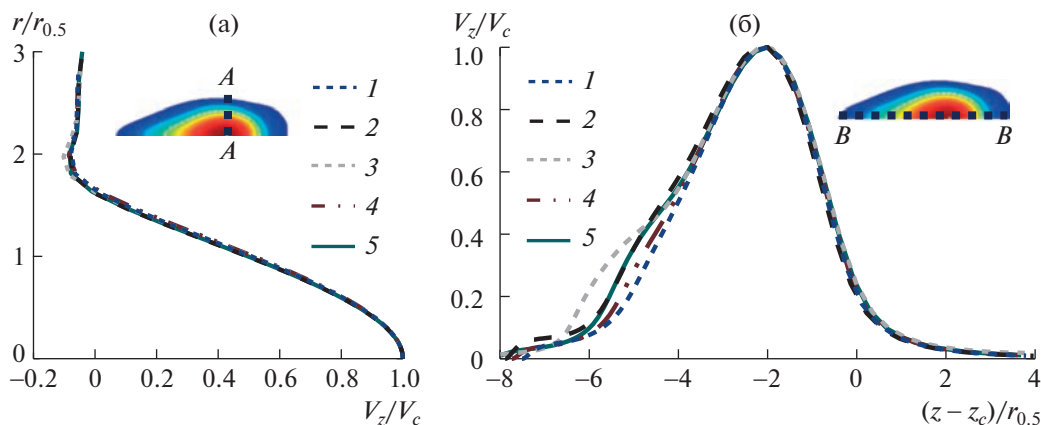
продольной скорости для всех рассчитанных вариантов позволяет считать, что основу структуры турбулентных вихревых облаков составляют тороидальные вихри, форма которых в относительном движении приближена к сферической.

На рис. 8 показаны полученные в расчетах зависимости от времени геометрических характеристик вихревых облаков: положения точки с максимальной скоростью ($0, z_c$) (рис. 8а) и радиуса сферы R (рис. 8б), эквивалентной по объему области, внутри которой модуль продольной скорости больше $0.01 V_c$. Масштабом радиуса R служит величина $R_0 = (3d^2 L_0/16)^{1/3} = d \cdot P$, которая определена из объема среды, выпущенной импульсной струей.

На рис. 9 приведены расчетные данные зависимости от времени максимальной и средней скорости распространения вихревого облака. На каждом рисунке штриховыми прямыми линиями изображены степенные зависимости с показателями 0.25 для линейных величин и -0.75 для скоростей, которые аппроксимируют расчетные зависимости на преобладающем отрезке рассчитанного интервала физического времени, для всех вариантов равного 10 с. Для начального времени $t' = O(10^2)$ поведение расчетных зависимостей отлично от степенного закона, так как при малых временах течение носит переходный характер от импульсной струи к вихревому облаку.

Аппроксимирующим линиям на рис. 8 отвечают уравнения $R/R_0 = t'^{0.25}$ и $z_c/d = 5.4t'^{0.25}$, из которых следует, что $R/R_0 = 0.185(z_c/d)$. Обработка данных для всех вариантов позволила получить соотношение $R/z_c = 0.75$, которое справедливо в диапазоне $10 < z_c/d < 50$.

Данным для скоростей на рис. 9 удовлетворяют степенные зависимости $V_{z,av}/V_0 = 0.4t'^{-0.75}$ и $V_c/V_0 = 3.2t'^{-0.75}$, из которых следует, что на основном временном интервале $V_c/V_{z,av} = 8$. Постоянство соотношения между максимальными и средними скоростями в каждый момент времени согласуется с подобием профилей скорости, продемонстрированным на рис. 5 и 7. На основном участке, при $t' > 100$ положение точки, где скорость максимальна, и значение этой скорости связаны приближенной формулой $(z_c/d)^3 (V_c/V_0) \approx 500$.

Рис. 7. Варианты 1–5: профили продольной скорости вдоль линий А–А (а) и В–В (б) для $t' = 600$.

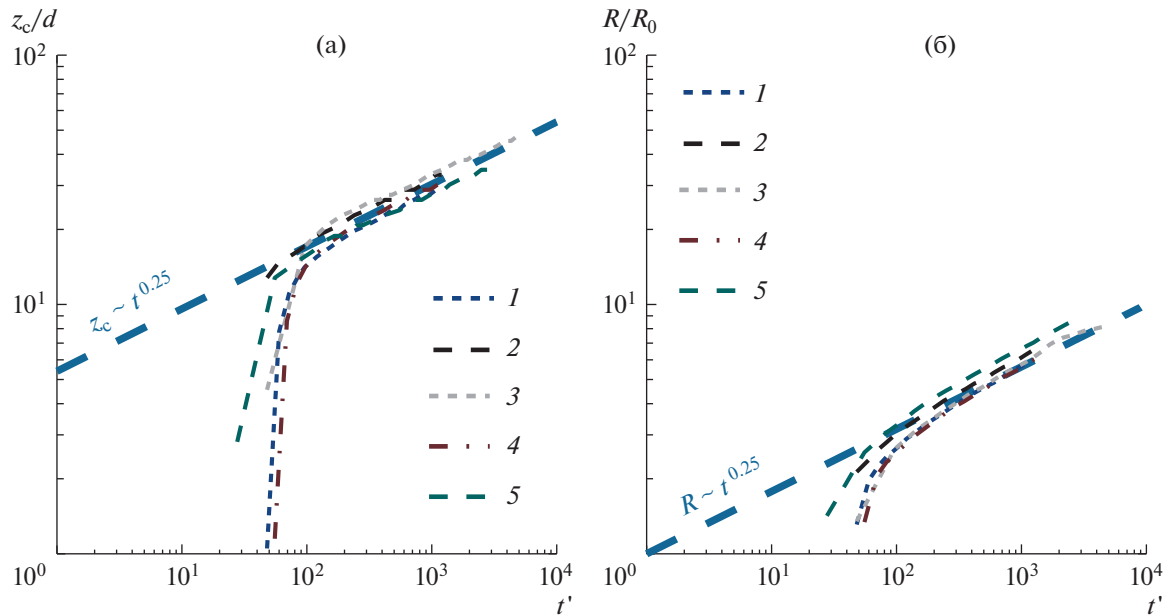


Рис. 8. Изменение во времени положения максимума продольной скорости и эквивалентного радиуса вихревого облака, 1...5 – расчетные варианты.

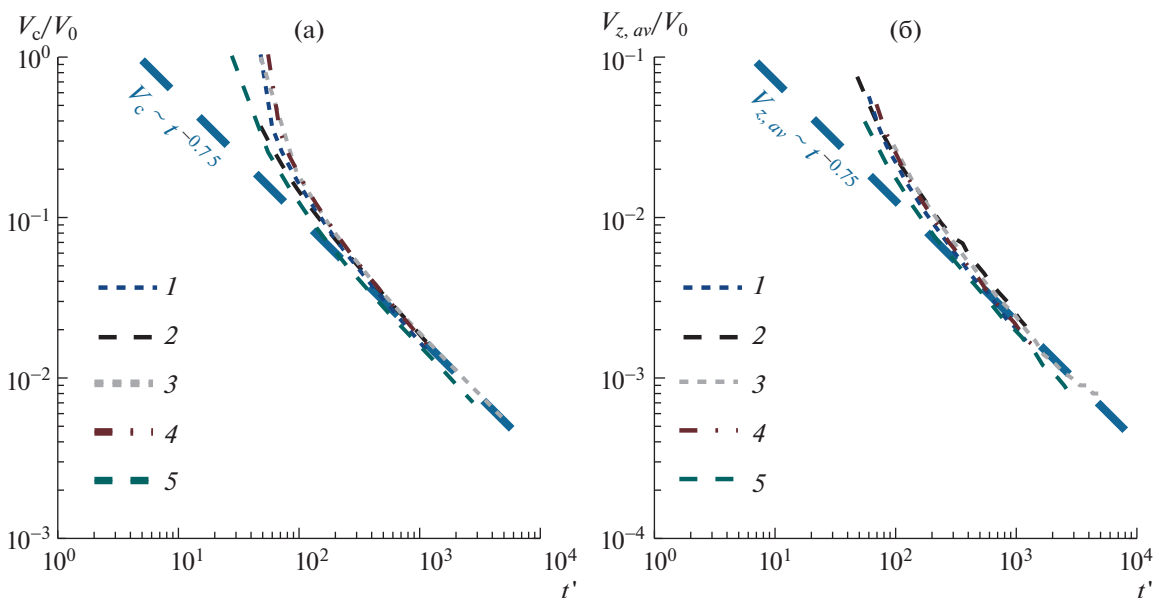


Рис. 9. Изменения во времени максимальной и средней продольной скорости, 1...5 – расчетные варианты.

Вариация условий истечения импульсных струй (табл. 3) не оказала существенного с практической точки зрения влияния на характеристики течения при значениях безразмерного времени в диапазоне $t' \sim O(10^2 \dots 10^3)$. В рассчитанных вариантах для характеристик (z_c/d , R/R_0 , V_c/V_0 и $V_{z,av}/V_0$), показанных на рис. 8 и 9, различие в величинах от варианта к варианту не превосходит 25%.

В табл. 4 для всех вариантов сведены параметры, которые характеризуют течение по прошествии десяти секунд после начала выдува струй.

Сопоставляя данные табл. 3 и 4, можно заключить, что размерные характеристики вихревых облаков в табл. 4 коррелируют с динамическими параметрами импульсных струй: скоростью ис-

Таблица 4. Характеристики течения при $t = 10$ с

Вариант	z_c , м	R , м	V_c , см/с	$V_{z, av}$, см/с
1	0.58	0.47	3.4	0.4
2	0.66	0.51	3.9	0.5
3	0.95	0.64	5.5	0.7
4	0.63	0.51	3.8	0.4
5	0.69	0.53	3.9	0.4

течения и импульсом. Скорость истечения может играть даже превалирующую роль, что следует из сопоставления вариантов 1 и 2. Для обоих вариантов средние за время истечения скорости равны, но для варианта 2, в котором максимальная скорость составляет 4.8 м/с, все характеристики течения (табл. 4) выше, чем для варианта 1. В целом можно отметить, что существенное изменение начальных условий от варианта к варианту приводит к различиям размерных характеристик вихревого облака через десять секунд после начала истечения импульсной струи ($t' \geq 10^3$), не превышающим 40%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты численного моделирования турбулентного вихревого облака, возникшего в результате выдува импульсной струи с различной скоростью и продолжительностью выдува. В рамках принятой модели в среднем нестационарного осесимметричного течения с изотропной турбулентной вязкостью определены две фазы течения: начальная фаза и фаза автомодельности. Продолжительность начальной фазы составили время истечения струи и время образования вихревого турбулентного облака. В относительном движении со скоростью, равной мгновенной осредненной по объему скорости вихревого облака, структуру облака можно представить состоящей из тороидального вихря с формой, близкой к сферической, и наведенного вихрем почти потенциального потока. Для принятых условий нормированная длительность начальной фазы составила величину $O(10^2)$, длительность фазы автомодельности — $O(10^3)$. Для фазы автомодельности определены переменные подобия $r/r_{0.5}(t)$, $(z - z_c)/r_{0.5}(t)$ и $V_z/V_c(t)$. На протяжении этой фазы поля продольной скорости $V_z/V_c(t)$ в вихревом облаке практически идентичны при всех рассмотренных наборах параметров импульсной струи. В фазе автомодельности расчетные данные, определяющие характерный размер вихревого облака $R(t)$, положение точки с максимумом скорости в облаке $z_c(t)$, изменение во времени максимальной $V_c(t)$ и средней $V_{z, av}(t)$ скорости облака, согласуются со степенными законами, вытекающими из условия сохранения количества движения, внесенного импульсной струей.

Авторы благодарят профессора Е.М. Смирнова за ценные советы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nazaroff W.W.* Indoor aerosol science aspects of SARS-CoV-2 transmission // *Indoor Air*. 2022. V. 32. № 1. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1111/ina.12970>
2. *Bu Y., Ooka R., Kikumoto H., Oh W.* Recent research on expiratory particles in respiratory viral infection and control strategies: A review // *Sustainable Cities and Society*, 2021. V. 73. P. 1–16.
<https://doi.org/10.1016/j.scs.2021.103106>
3. *Gupta J.K., Lin C.-H., Chen Q.* Flow dynamics and characterization of a cough // *Indoor Air*. 2009. V. 19. № 6. P. 517–525.
<https://doi.org/10.1111/j.1600-0668.2009.00619.x>
4. *Bourouiba L.* The fluid dynamics of disease transmission // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2021. V. 53. P. 473–508.
<https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-060220-113712>
5. *Mazzino A., Rosti M.E.* Unraveling the secrets of turbulence in a fluid puff // *Phys. Rev. Lett.* 2021. V. 127. № 9. P. 1–6.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.094501>

6. *Fabregat A., Gisbert F., Vernet A., Dutta S., Mittal K., Pallarès J.* Direct numerical simulation of the turbulent flow generated during a violent expiratory event // *Physics of Fluids*. 2021. V. 33. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1063/5.0042086>
7. *Fabregat A., Gisbert F., Vernet A., Ferré J.A., Mittal K., Dutta S., Pallarès J.* Direct numerical simulation of turbulent dispersion of evaporative aerosol clouds produced by an intense expiratory event // *Physics of Fluids*. 2021. V. 33. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1063/5.0045416>
8. *Ghaem-Maghami E., Johari H.* Concentration field measurements within isolated turbulent puffs // *ASME. J. Fluids Eng.* 2007. V. 129. P. 194–199.
<https://doi.org/10.1115/1.2409348>
9. *Ахметов Д.Г.* Вихревые кольца. Ин-т гидродинамики СО РАН. Новосибирск. Академ. изд-во “Гео”. 2007. 151 с.
10. *Никулин В.В.* Массообмен между атмосферой турбулентного вихревого кольца и окружающей средой // *Изв. РАН. МЖГ*. 2021. № 4. С. 33–40.
<https://doi.org/10.31857/S0568528121040101>
11. *Andriani R., Coghe A., Cossali G.E.* Near-field entrainment in unsteady gas jets and diesel sprays: A comparative study // *Symposium (International) on Combustion*. 1996. V. 26. № 2. P. 2549–2556.
[https://doi.org/10.1016/s0082-0784\(96\)80087-7](https://doi.org/10.1016/s0082-0784(96)80087-7)
12. *Kovaszny L.S.G., Fujita H., Lee R.L.* Unsteady Turbulent Puffs // *Adv. Geophys.* 1975. V. 18. Part B. P. 253–263.
[https://doi.org/10.1016/S0065-2687\(08\)60584-1](https://doi.org/10.1016/S0065-2687(08)60584-1)
13. *Richards J.M.* Puff motions in unstratified surroundings // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 21. № 1. P. 97–106.
<https://doi.org/10.1017/S002211206500006X>
14. *Sangras R., Kwon O.C., Faeth G.M.* Self-preserving properties of unsteady round nonbuoyant turbulent starting jets and puffs in still fluids // *ASME. J. Heat Transfer*. 2002. V. 124. № 3. P. 460–469.
<https://doi.org/10.1115/1.1421047>
15. *Ghaem-Maghami E., Johari H.* Velocity field of isolated turbulent puffs // *Physics of Fluids*. 2010. V. 22. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1063/1.3504378>
16. *Засимова М.А., Иванов Н.Г., Рус В.В.* Нестационарная диффузия вирусных частиц в импульсной струе, формируемой в процессе кашля // XVI Минский международный форум по тепло- и массообмену. Тез. докл. и сообщений. Минск: ИТМО им. А.В. Лыкова. 2022. С. 251–255.
17. *Zasimova M., Ris V., Ivanov N.* CFD modelling of a pulsed jet formed during an idealized isolated cough // *E3S Web of Conferences* 2022. V. 356. P. 1–4.
<https://doi.org/10.1051/e3sconf/202235605024>
18. *Засимова М.А., Иванов Н.Г., Рус В.В.* URANS и LES моделирование начальной стадии распространения каплесодержащей воздушной струи, характерной для острых респираторных явлений // М.: Изд. МЭИ. Материалы 8-ой РНКТ. 2022. Т. 1. С. 435–438.
19. *Pallarès J., Fabregat A., Lavrinenko A., et al.* Numerical simulations of the flow and aerosol dispersion in a violent expiratory event: Outcomes of the “2022 International Computational Fluid Dynamics Challenge on violent expiratory events” // *Physics of Fluids*. 2023. V. 35. P. 1–22.
<https://doi.org/10.1063/5.0143795>
20. *Yakhot V., Orszag S.A.* Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory // *Journal of Scientific Computing*. 1986. V. 1. P. 3–51.
<https://doi.org/10.1007/BF01061452>
21. *Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G.* Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // *Physics of Fluids*. 1992. V. 4. P. 1510–1520.
<https://doi.org/10.1063/1.858424>
22. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. Пер. с англ. М.: изд-во “Мир”. 1973. 760 с.
23. *Glezer A., Coles D.* An experimental study of a turbulent vortex ring // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 211. P. 243–283.
<https://doi.org/10.1017/S0022112090001562>

УДК 532.517:4

ТЕСТЫ ДЛЯ ВАЛИДАЦИОННЫХ ЗАДАЧ АНОМАЛЬНОЙ ИНТЕНСИФИКАЦИИ ОТРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА НА СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ЭКСТРАОРДИНАРНЫМИ ПЕРЕПАДАМИ ДАВЛЕНИЯ

© 2023 г. С. А. Исаев^{a,b,*}, А. Г. Судаков^b, Д. В. Никущенко^a, А. Е. Усачов^c,
М. А. Зубин^d, А. А. Синявин^d, А. Ю. Чулюнин^d, Е. Б. Дубко^b

^aСанкт-Петербургский государственный морской технический университет,
Санкт-Петербург, Россия

^bСанкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации им. Главного маршала авиации
А.А. Новикова, Санкт-Петербург, Россия

^cМосковский комплекс ЦАГИ, Москва, Россия

^dМГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики,
Москва, Россия

*E-mail: isaev3612@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.05.2023 г.

После доработки 06.06.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Представляются новые тесты для пакетов прикладных программ и моделей турбулентности для валидационных задач высокоинтенсивных вихревых течений около структурированных энергоэффективных поверхностей. Идея тестирования основывается на открытии аномальной интенсификации отрывных течений и теплообмена в наклонных канавках на пластинах и стенках каналов. В канавках за счет экстраординарных перепадов давления, подтвержденных экспериментами, генерируются закрученные потоки с высокими скоростями возвратного и вторичного течения, сопоставимыми со скоростью внешнего потока. Также внутри канавок формируются высокоградиентные зоны с трением и теплоотдачей, многократно (от 1.5–2 до 7–9 раз) превосходящих трение и теплоотдачу на плоской стенке. В качестве примера проходит тестирование пакет VP2/3, разработанный на основе оригинальных многоблочных вычислительных технологий и использующий разномасштабные пересекающиеся сетки. Сравнение численных прогнозов с экспериментами М.А. Зубина подтвердило высокие перепады статического давления между зоной торможения на наветренном склоне наклонной канавки и областью отрицательного давления в месте генерации торнадоподобного потока на входном сферическом сегменте, а также продемонстрировало приемлемость RANS-подхода для прогнозирования характеристик высокоинтенсивных закрученных потоков.

Ключевые слова: аномальная интенсификация, вихревая динамика, теплообмен, наклонные канавки, пластина, узкий канал, многоблочные вычислительные технологии, пакет VP2/3

DOI: 10.31857/S1024708423600379, **EDN:** GAKZLQ

Тестирование современных, в особенности, отечественных пакетов прикладных программ при численном моделировании аэрогидродинамических и теплообменных процессов на цифровых аналогах экспериментальных стендов представляется актуальным для оценки их точности, эффективности, адекватности прогнозов, а также для валидации инкорпорированных в них математических моделей (см., например, [1]). В качестве решаемых тестовых задач гидромеханики и теплотехники оказывается целесообразным выбрать самоорганизующиеся высокоинтенсивные отрывные и смерчевые пристеночные потоки, развивающиеся вблизи энергоэффективных структурированных поверхностей [2].

В однорядных наклонных канавках на нагретой стенке узкого канала в случае редких [3] и плотных [4] пакетов канавок численно открыто явление аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена и сопутствующее явление ускорения потока в ядре канала с одно- и двухрядными наклонными канавками. Рассматриваемые канавки образуются из двух половинок

сферических лунок, соединенных траншейной цилиндрической вставкой. Явление аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена подверглось систематическому анализу на стабилизированном гидродинамическом участке структурированного канала [5–10]. Затем были проведены исследования теплообмена при обтекании плоских пластин с многорядными канавками [11–13]. Установленные ультравысокие скорости возвратного и вторичного течения в канавках, доходящие, а подчас и превосходящие максимальную скорость в плоскопараллельном канале, обуславливаются экстраординарными перепадами давления между зонами торможения струйного входящего в канавку потока на наветренном склоне и разрежения в месте генерации смерчеобразного вихря на входном сферическом сегменте. Внутри канавок образуются области аномально высоких поверхностных градиентов течения и теплообмена, в которых многократно (до 6–9 раз) увеличиваются абсолютные величины относительного трения и тепловых потоков по сравнению с параметрами на плоской стенке. Следует отметить, что над входом в наклонную канавку образуется зона высоких скоростей пристенного потока, которые в случае узкого канала с однорядными канавками превышают максимальную скорость для плоскопараллельного канала в 1.5 и более раз.

Установлено, что угол наклона канавки θ по отношению к набегающему потоку играет кардинально важную роль в явлении аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена, а также ускорения пристенного потока над структурированной стенкой. Диапазон углов наклона канавки θ на стенке узкого канала, при которых реализуются значительные экстремальные скорости возвратного и вторичного течений, составляет от 30 до 75° . Установленные явления характерны также для начального участка течения около пластины и стенки канала с одно- и многорядными наклонными канавками, причем наблюдается мультипликативный эффект усиления интенсивности пристенного и отрывного течений, а также теплообмена в канавке по мере ее удаления от начала структурированного участка.

Экспериментальное подтверждение установленных численно явлений получено в Институте механики МГУ и в КазНЦ РАН, где на стендах измерялись перепады статического давления в единичных канавках на пластине при варьировании угла наклона канавок θ от 0 до 90° для чисел Рейнольдса набегающего потока 6.7×10^4 и 1.65×10^5 , а также поля скорости ламинарного и турбулентного течений воздуха в узких каналах с двухрядными канавками под углами наклона $\pm 45^\circ$ и $\pm 135^\circ$ [14–18]. Развитые экспериментальные базы данных позволяют развернуть систематические численные исследования по сравнительному анализу прогнозов, полученных на различных типах расчетных сеток, с использованием разноуровневых моделей турбулентности, разнообразных универсальных и университетских кодов, в частности, VP2/3 (скорость-давление, 2D/3D). Особое значение имеет обоснование адекватности RANS-подхода для решения рассматриваемых задач с интенсивными отрывными течениями и теплообменом.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Серия экспериментов, представленная в [12, 14–17], проведена на аэродинамической трубе А4 НИИ механики МГУ, в рабочей части которой размещается пластина с канавкой длиной 6, шириной 1 и глубиной 0.25 (рис. 1а). Ширина канавки D выбрана в качестве характерного масштаба, к которому отнесены все линейные размеры. Число Рейнольдса внешнего потока 6.7×10^4 , а толщина пограничного слоя в районе канавки – 0.17. Угол наклона варьируется от 0 до 90° . В расчетной модели радиус скругления кромки канавки принят равным 0.02.

Также рассматривается обтекание единичной наклонной канавки на стенке плоскопараллельного канала. На экспериментальном стенде Института механики МГУ [18] шириной 0.2 м, высотой 0.05 м и длиной 0.6 м проведены измерения распределений статического давления на поверхности лунки шириной 0.03 м и относительными длиной 5, глубиной 0.25 (в долях ширины) под различными углами наклона θ в диапазоне изменения от 0° до 90° . Лунки с острой кромкой располагаются в середине канала на расстоянии 0.3 м от входного сечения. Число Рейнольдса, определенное по скорости потока и высоте канала, составляет 1.65×10^5 . Толщина пограничного слоя на входе в рабочий участок канала имеет величину порядка 0.1 в долях высоты канала.

В качестве цифрового аналога пластины рассматривается прямоугольный участок плоской стенки длиной 22 и шириной 12.3 (рис. 1б). Центр канавки располагается на расстоянии 9.5 от входного сечения, в котором формируется равномерный поток, переходящий вблизи стенки в развивающийся пограничный слой с заданной толщиной 0.17 в районе канавки. Декартовы составляющие скорости u , v , w и давление p определяются по характерной скорости, в качестве которой выбирается скорость равномерного потока на входе в область. Характеристики турбулент-

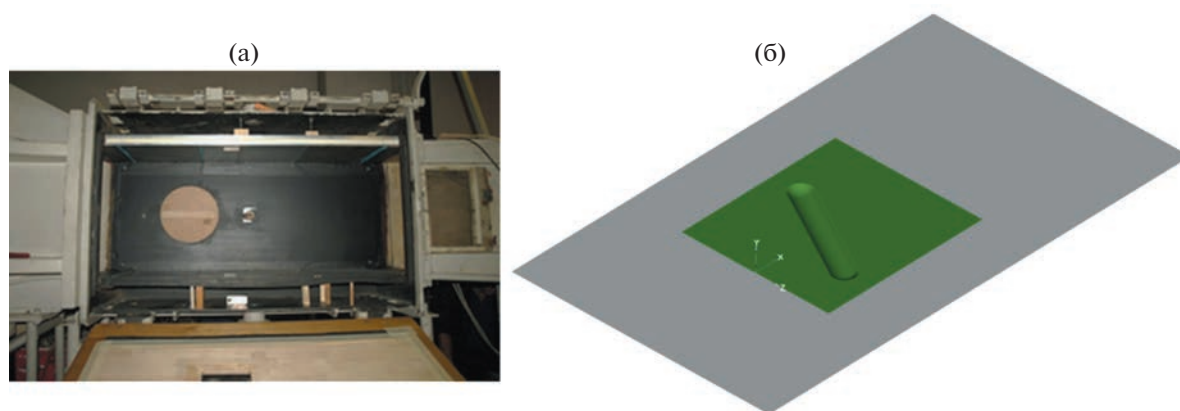


Рис. 1. Пластина с наклонной канавкой в рабочей части аэродинамической трубы А4 (а) и ее цифровой аналог с декартовой системой координат x, y, z и многоблочные сетки (б).

ности во входном сечении определяются как в [14, 19]. На боковых границах ставятся условия симметрии. На выходной границе задаются условия продолжения решения.

На входе в область воздушный поток изотермический с температурой $T_{ref} = 293$ К. Нижняя омываемая стенка канала с канавкой нагревается, причем подводимый постоянный тепловой поток q пересчитывается в безразмерный вид по формуле:

$$q_{norm} = qD/(\lambda Pr Re T_{ref}),$$

а его величина принимается $\sim 3.4 \times 10^{-5}$. Здесь λ — теплопроводность воздуха. На боковых границах расчетной области для температуры T ставятся условия симметрии, верхняя граница изотермическая с температурой T_{ref} , принятой в качестве масштаба обезразмеривания. На выходе из расчетной области температура T подчиняется мягким граничным условиям.

Низкоскоростное стационарное турбулентное течение воздуха около пластины с наклонной канавкой описывается стационарными осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье—Стокса (RANS) для вязкой несжимаемой жидкости [19], которые замыкаются уравнениями модифицированной модели переноса сдвиговых напряжений (MSST). В отличие от предложенных Ф. Менгером стандартных моделей MSST 1993 [20] и MSST 2003 г. [21] в последнюю модель вводится поправка на кривизну линий тока. Корректируется поле вихревой вязкости: $\mu_t = \mu_{t0}/(1 + C_c Ri_t)$. Здесь μ_{t0} — рассчитанная по стандартной модели вихревая вязкость [21], C_c — дополнительная полуэмпирическая константа, равная 0.02, определенная из условия наилучшего согласования численных прогнозов с имеющимися и специально полученными данными для ряда калибровочных экспериментов [19], Ri_t — турбулентное число Ричардсона. Как подтверждено многочисленными тестами (см., например, [22]), применение стандартной SST-модели 2003 г. [21] приводит к ложной накачке вихревой вязкости в ядра крупномасштабных вихрей и к чрезмерному уровню вихревой вязкости в целом. Описанный обобщенный подход Роди—Лещинера—Исаева (RLI) [22] позволяет избежать нефизической накачки вихревой вязкости. Поправка на кривизну линий тока в рамках подхода RLI введена в пакеты VP2/3 (Velocity-Pressure, 2D/3D) и sigma-flow [23].

Методология решения стационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса базируется на концепции расщепления по физическим процессам и реализуется в процедуре коррекции давления SIMPLEC [19, 24, 25], приспособленной для моделирования конвективного теплообмена на многоблочных структурированных сетках с их частичным перекрытием. Развиваемая методология распараллеливается применительно к кластерным (многоядерным и многопроцессорным) системам и обобщается на случай неструктурированных сеток. В отличие от [24], в [19] обобщенное дифференциальное уравнение переноса линеаризуется и записывается в приращениях зависимых переменных. В правой (явной) части этого уравнения конвективные члены дискретизируются по схеме второго порядка аппроксимации (противопоточная схема с квадратичной интерполяцией Леонарда [26] для уравнения количества движения и энергии, а также схема TVD [27] для уравнений характеристик турбулентности), а диффузионные члены — по центрально-разностной схеме [19]. Конвективные члены относительно приращений зависимых пе-

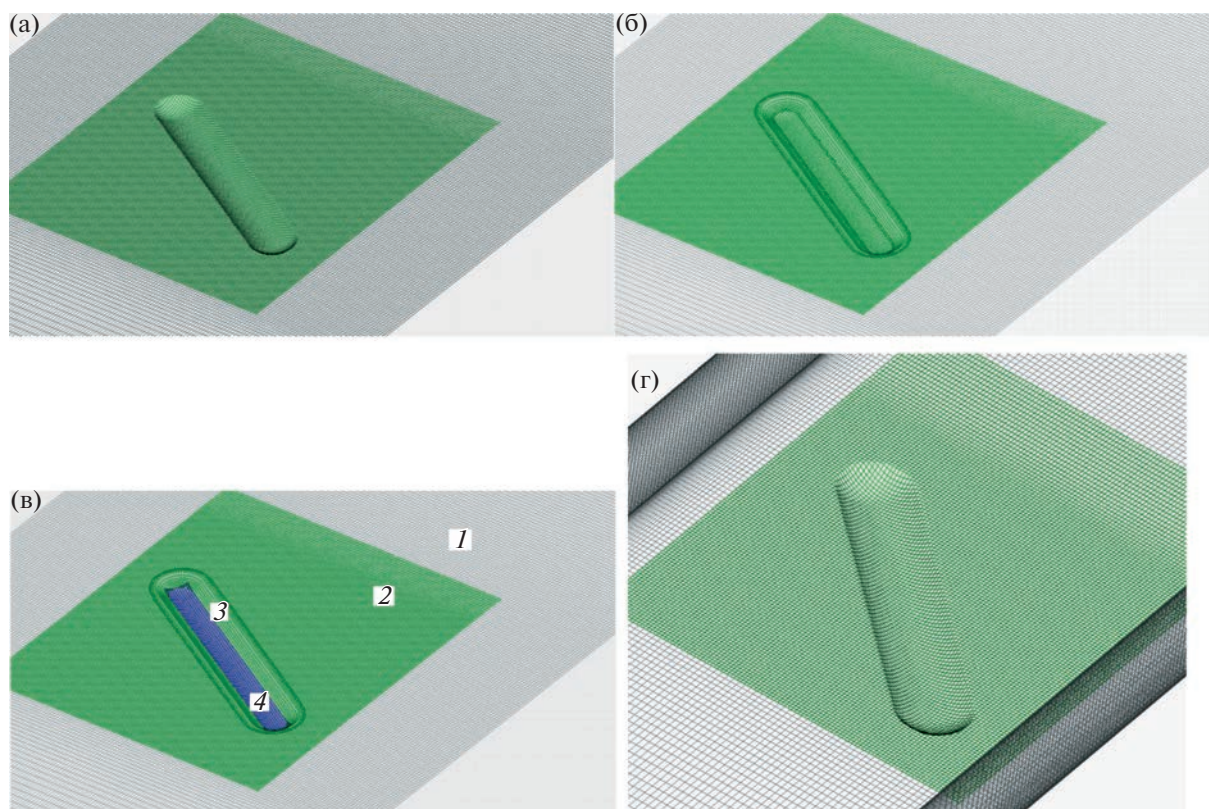


Рис. 2. Многоблочные расчетные сетки В (а), ВК (б) и ВЕ (в) с двумя, тремя и четырьмя фрагментарными сетками на пластине: 1 – MG; 2 – MR; 3 – Ring; 4 – Rec, а также многоблочная сетка на стенках канала В (г) со снятой верхней стенкой.

ременных в левой (неявной) части обобщенного уравнения представляются с помощью противоточной схемы с односторонними разностями [19]. Использование центрированных сеток с размещением зависимых переменных в центрах расчетных ячеек приводит к необходимости монотонизации поля давления за счет введения коррекции Рхи-Чоу [28, 29]. Алгебраические уравнения решаются предобусловленным методом BiCGSTAB [30] с алгебраическим многосеточным ускорителем из библиотеки Демидова (AMGCL) [31] для поправки давления и ILU0 для остальных переменных. В разработанном пакете VP2/3 (Velocity-Pressure, 2D/3D) применены многоблочные вычислительные технологии (MBT), описанные в [19]. Они базируются на совокупности разномасштабных, ярусных и пересекающихся структурированных сеток, согласованных со структурными элементами физической задачи соответствующих масштабов. В двух рядах приграничных ячеек каждой из пересекающихся или накладываемых сеток параметры определяют с помощью линейной интерполяции [19].

Расчетная область строится на прямоугольном участке пластины и имеет вертикальный размер 7.3. Область пристенного потока отображается на внешней декартовой сетке MG, сгущающейся к стенке. Внутри области выделяется прилегающая к стенке прямоугольная зона в окрестности канавки протяженностью 8, шириной 7 и высотой 0.5. В ней строится косоугольная сетка MR, согласованная с криволинейной поверхностью канавки. В ее окрестности для базового варианта ячейки сеток MG и MR задаются с шагом 0.07 и 0.05 в продольном и поперечном направлениях (рис. 2). В направлении входной, выходной и боковых границ размеры ячеек сетки MG увеличиваются. Размер пристеночного шага сеток равен 10^{-5} . В многоблочной сетке В, состоящей из двух фрагментарных пересекающихся сеток MG и MR, содержится примерно 5.6 млн. ячеек.

Для более точного воспроизводства высокоградиентного течения в окрестности кромок канавки строится многоблочная сетка ВК, включающая в сеточный ансамбль разномасштабных пересекающихся сеток, помимо сеток MG и MR, кромочную косоугольную сетку Ring. В сетке

Ring расчетные ячейки сгущаются на скругленных кромках. Общее количество ячеек сетки ВК порядка 6 млн.

Также рассматривается многоблочная сетка ВЕ, состоящая из четырех фрагментарных сеток. В их число входят внешняя и внутренняя прямоугольные сетки МG и MR, отображающие внешний пристеночный поток и течение в окрестности канавки. В отличие от многоблочных сеток В и ВК, расчетная сетка MR декартова и служит для детализации течения над канавкой и в следе за ней. Криволинейные эллиптические сетки Ring и Res вводятся для отображения пространственного течения внутри канавки. Ring является сеткой О-типа, а Res выступает в качестве заплатки в центральной зоне (рис. 2в).

Общее количество ячеек в ВЕ порядка 5.85 млн. Следует отметить, что рассмотренные сетки близки по суммарному количеству расчетных ячеек. Для обоснования сеточной сходимости проводятся расчеты на многоблочной сетке ВЕ1 с уменьшенным числом ячеек. Сетка ВЕ1 содержит порядка 4.5 млн. ячеек (увеличены шаги в сетках МG и MR — до 0.08 и 0.06).

Цифровой аналог экспериментального канала [18] имеет размеры $15.2 \times 1 \times 6$ (высота канала в этой задаче выбрана в качестве характерного размера — масштаба обезразмеривания). На входе в канал задается равномерный поток с пограничным слоем толщиной, равной экспериментальному значению 0.07. Тестирование численного метода и выбранной модели турбулентности проведено на овально-траншейной лунке шириной $b = 0.6$, удлинением $5b$, глубиной $0.25b$ при скруглении острых кромок по радиусу $0.025b$. Центр лунки располагается на расстоянии 4.6 от входного сечения. Рассматривается блочная расчетная сетка, состоящая из двух фрагментарных сеток (рис. 2г). Первая декартова сетка строится в плоскопараллельном канале. Она содержит порядка 3.5 млн. ячеек, сгущающихся при приближении к стенкам. В центральной части канала шаги сетки равномерные в продольном и поперечном направлениях и равны 0.05. Внутри канальной сетки располагается криволинейная, согласованная с поверхностью лунки на нагретой нижней стенке канала фрагментарная сетка, охватывающая область лунки. Указанная область имеет размеры $3.2 \times 0.2 \times 3.2$, в центре которой располагается центр лунки. В продольном и поперечном направлениях сетка равномерная с шагом 0.03. Количество ячеек в прилегающей к лунке криволинейной сетке составляет порядка 0.64 млн. Пристеночные шаги рассматриваемых сеток у стенок равны 10^{-5} .

Расчетный конечно-объемный метод имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным. Уравнение для поправки давления и поля декартовых составляющих скорости, давления, а также характеристик турбулентности рассчитывается на каждом итерационном шаге. Завершение итерационного процесса происходит при достижении максимальных погрешностей зависимых переменных уровня 10^{-5} и стабилизации экстремальных локальных и интегральных параметров, включая суммарную теплоотдачу на контрольном участке с наклонной канавкой.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В экспериментах [14] угол наклона канавки по отношению к набегающему потоку варьировался в диапазоне $0-360^\circ$ (круговой обдув) с шагом 5° , что позволяло проверять наличие или отсутствие гистерезисных явлений, а также использовать свойства симметрии дренажа для повышения густоты покрытия криволинейной поверхности канавки. В процессе испытаний в аэродинамической трубе измерялись характерный скоростной напор q набегающего равномерного потока и значения избыточного давления Δp_i в контрольных дренажных точках i на поверхности канавки (рис. 3а). При каждом значении наклона регистрировались большие выборки (до 15 тыс. отсчетов) нестационарных показаний датчиков давления Δp_i .

Специальная обработка данных дренажных испытаний с использованием безразмерной системы координат (x, y, z) , связанной с центром канавки шириной D , позволила получить представление для полей распределения коэффициента давления по ее поверхности. Оно получено в виде зависимости $C_p = f(\theta, x, y, z)$ от угла наклона вектора скорости набегающего потока для дискретного множества дренажных точек на поверхности модели (рис. 3б). Такая форма представления данных не зависит от особенностей структуры дренажа и, в этом смысле, является универсальной, а также удобной для сравнения с данными других экспериментов и аэрогидродинамических расчетов. Она также позволяет представить результаты эксперимента в наглядной графической форме, обычно характерной для представления данных численного моделирования (рис. 3б). Рассчитанное поле коэффициента давления с картиной линий тока по поверхности пластин и канавки показано на рис. 3в.

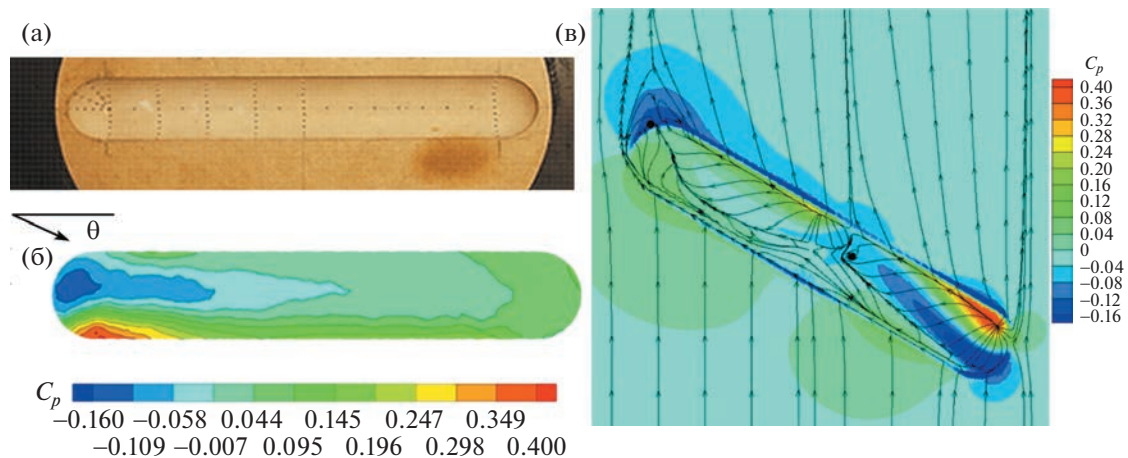


Рис. 3. Фотография дренированной канавки на пластине (а), измеренное (б) и рассчитанное (в) поле коэффициента давления C_p в канавке под углом наклона $\theta = 60^\circ$.

На рис. 4а,б и в табл. 1 и 2 представлены интегральные и локальные экстремальные характеристики течения и теплообмена, рассчитанные на сетках различной топологии и количества ячеек: базовой многоблочной сетке В из двух фрагментов, трехчастной сетке ВК с дополнительной кромочной косоугольной сеткой, многоблочной сетке ВЕ из четырех фрагментов с эллиптической криволинейной сеткой в канавке, а также сетке ВЕ1 с уменьшенным количеством ячеек. В качестве интегральных характеристик рассматриваются теплоотдача Nu_m и лобовое сопротивление C_x контрольного участка пластины с наклонной канавкой. В первом случае участок пластины ограничивается ориентированным по потоку квадратом с длиной стороны 7 с центром, совпадающим с центром канавки. Во втором случае с индексом d рассматриваются Nu_{md} и C_{xd} на поверхности пластины, ограниченной прямоугольным контуром наклонной канавки.

Получены численные прогнозы интегральных характеристик Nu_m , C_x , Nu_{md} , C_{xd} (табл. 1) экстремальных величин давления (p_{max} , p_{min}), продольной и поперечной декартовых составляющих скорости (u_{max} , u_{min} , w_{max} , w_{min}), энергии турбулентности k_{max} , вихревой вязкости μ_{tmax} и температуры T_{max} (табл. 2), а также распределений статического давления p в характерных сечениях канавки. Они сравниваются для указанных многоблочных сеток.

Численные прогнозы (рис. 4а,б) на различных многоблочных сетках и данные измерений для распределений давления, обезразмеренного по удвоенному скоростному напору, сравниваются в характерных продольном и поперечном сечениях наклонной канавки. Для сравнения выбраны срединное продольное сечение, начиная от входной кромки и заканчивая выходом из канавки, а также сечение стыковки входного сферического сегмента и цилиндрической траншеи.

Как следует из представленных графиков и табл. 1, 2, топология многоблочных сеток оказывает заметное влияние на точность прогнозов интегральных и локальных характеристик при выборе сеток с примерно одинаковым количеством расчетных ячеек (сетки В, ВК, ВЕ). Особенно значительные различия отмечаются для прогнозов интегральных параметров, полученных для прямоугольного контура канавки. В то же время прогнозы на сетках с аккуратным расчетом течения и теплообмена в окрестности кромок (на сетках ВК и ВЕ) оказались весьма близкими. Уменьшение количества ячеек за счет увеличения шагов в продольном и поперечном направлении на многоблочной сетке ВЕ1 с четырьмя фрагментами оказывает менее значимое влияние на

Таблица 1

Grid	Nu_m	$10^2 C_x$	Nu_{md}	$10^2 C_{xd}$
В	125.7	0.5543	126.6	1.978
ВК	126.8	0.6262	133.7	2.343
ВЕ	126.1	0.6197	133	2.293
ВЕ1	125.9	0.5811	130.3	2.044

Таблица 2

Grid	$p_{\max}$	$p_{\min}$	$u_{\max}$	$u_{\min}$	$w_{\max}$	$w_{\min}$	$10^2 k_{\max}$	$10^3 \mu_{t\max}$	$T_{\max}$
B	0.2006	-0.2931	1.034	-0.3485	0.2746	-0.6610	3.121	2.870	1.039
BK	0.2099	-0.3413	1.038	-0.4223	0.3138	-0.6929	3.102	3.250	1.041
BE	0.2103	-0.3408	1.037	-0.4196	0.3075	-0.6881	3.187	3.251	1.039
BE1	0.2082	-0.3799	1.036	-0.4255	0.3195	-0.6790	3.451	3.016	1.040

Таблица 3

SST	Nu_m	$10^2 C_x$	Nu_{md}	$10^2 C_{xd}$
1993	126.1	0.6197	133	2.293
2003	123.8	0.5939	126.2	2.147
2003RLI	124.5	0.6038	130.6	2.235

Таблица 4

SST	$p_{\max}$	$p_{\min}$	$u_{\max}$	$u_{\min}$	$w_{\max}$	$w_{\min}$	$10^2 k_{\max}$	$10^3 \mu_{t\max}$	$T_{\max}$
1993	0.2103	-0.3408	1.037	-0.4196	0.3075	-0.6881	3.187	3.251	1.039
2003	0.2009	-0.2683	1.035	-0.3999	0.2940	-0.6724	2.982	4.023	1.041
2003RLI	0.2081	-0.2963	1.038	-0.4193	0.3574	-0.7258	2.789	3.200	1.037

точность прогнозов в сравнении с расчетами на двухчастной сетке В. В целом расчеты на сетках с корректным отображением градиентного течения в кромочных окрестностях канавки свидетельствуют об их предпочтительности.

На рис. 4в,г и в табл. 3 и 4 представлены интегральные и локальные экстремальные характеристики течения и теплообмена, рассчитанные на многоблочной сетке BE с использованием версий стандартной SST-модели турбулентности MSST 1993 [20] и MSST 2003 [21], а также последней стандартной модели с коррекцией по Роди–Лещинеру–Исаеву MSST 2003 RLI. Отмечается близость численных прогнозов по первоначальной стандартной SST-модели 1993 г. и скорректированной SST 2003 г. с учетом влияния кривизны линий тока в рамках подхода Роди–Лещинера–Исаева.

Сравнение численных предсказаний, полученных на основе RANS подхода с использованием SST-моделей турбулентности, с измеренными полями и распределениями осредненных величин давления показывает их вполне удовлетворительное согласие, как по характеру изменения, так и по экстремальным величинам. Важно подчеркнуть, что обнаруженный ранее при численном моделировании течения в узких каналах (см., например, [2–10]) экстраординарный перепад давления между зонами торможения входящего в наклонную канавку внешнего потока на наветренном склоне и разрежения на входном сферическом сегменте канавки, формирующий интенсивный закрученный поток, подтвержден экспериментально для единичной канавки на пластине [18].

Возникновение зоны значительного избыточного отрицательного давления на входе в наклонную канавку является довольно неожиданным. Экстраординарный перепад давления предопределяет формирование вихревой структуры с интенсивными вторичным (закрученным) и возвратным высокоградиентным течением, которое характеризуется высокими скоростями. В данном случае максимальные абсолютные величины вторичного и возвратного токов доходят до 70 и 40% скорости внешнего потока.

На рис. 5 представлены сравнения измерений статического давления, отнесенного к удвоенному скоростному напору, в экспериментальном исследовании [18] с численными прогнозами отрывного течения в единичных канавках на стенке канала при числе Рейнольдса $Re = 1.65 \times 10^5$ и углах наклона $\theta = 35^\circ, 45^\circ, 55^\circ$. Рассматриваются характерные сечения канавки в связанной системе координат s, t , где s отсчитывается от переднего края сферического сегмента вдоль ее срединного сечения, а координата t изменяется от $-0.5b$ до $0.5b$ в характерном поперечном сечении

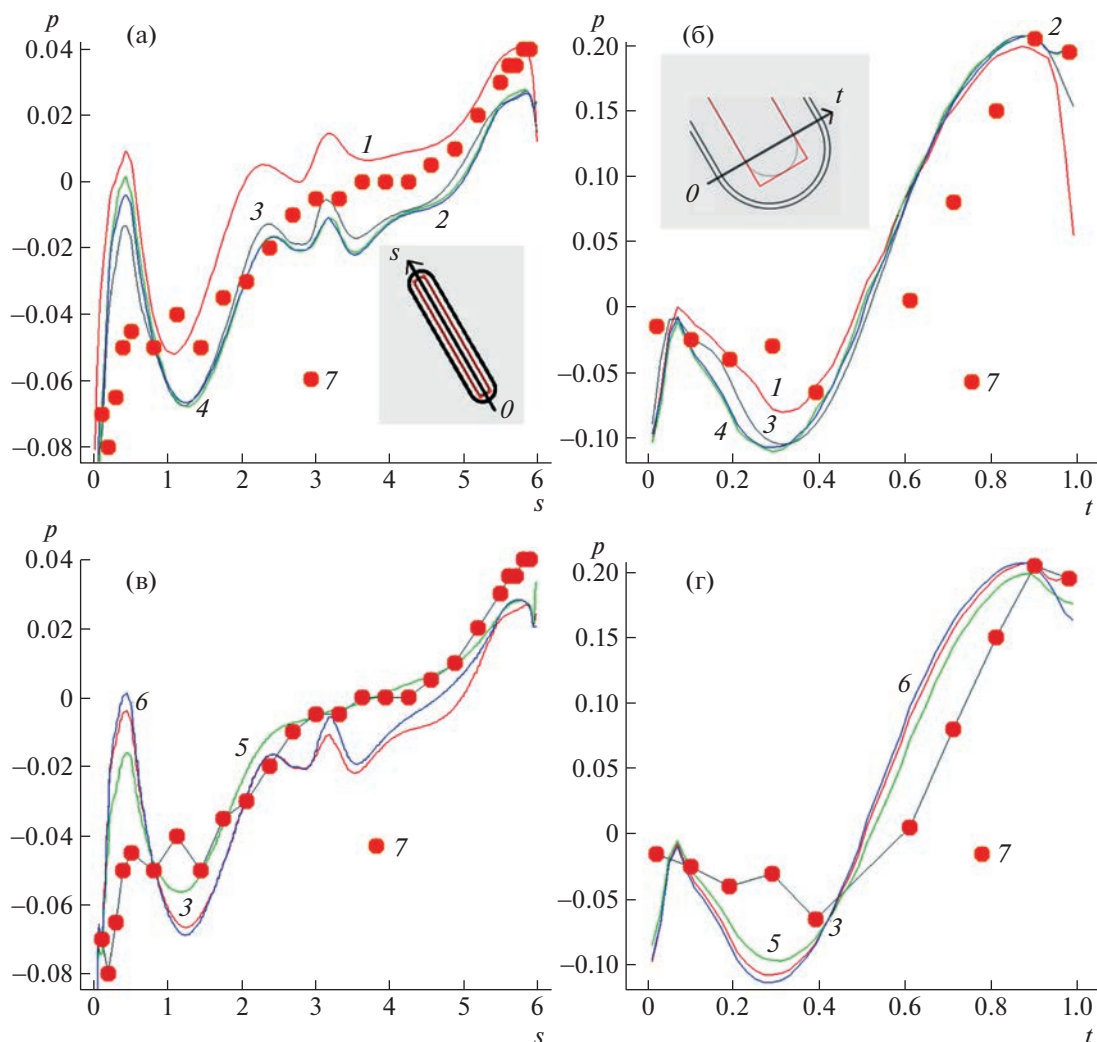


Рис. 4. Сравнение рассчитанных на различных сетках с MSST1993 1–4 и на сетке BE с разными моделях турбулентности 5, 6, а также измеренных (7) распределений давления в срединном продольном (а, в) и поперечном (б, г) сечениях канавки [14]. MSST93: 1 – сетка B, 2 – BK, 3 – BE, 4 – BE1; сетка BE: 5 – MSST2003, 6 – MSST2003RLI.

соединения сегмента с цилиндрической траншеей шириной b (в долях высоты канала). На рис. 6 сопоставляются экспериментальная картина линий тока на стенке канала с канавкой, полученная методом сажеасляного покрытия, и расчетная картина траекторий жидких частиц в прилегающем к стенке слое при $\theta = 45^\circ$. Установлено вполне удовлетворительное согласие данных расчетов и экспериментов, в том числе согласование наблюдаемых и прогнозируемых вихревых структур в канавке и в следе за ней.

Как и на плоской пластине, в наклонной канавке на стенке канала статическое давление в срединном продольном сечении возрастает от передней кромки сферического сегмента к задней кромке канавки, причем во входной части возникает зона низкого отрицательного давления, а на противоположной стороне имеется пик положительного давления. Такое распределение давления можно рассматривать аномальное, т.к. движение среды в отрывной зоне внутри канавки происходит с противодавлением.

Поперек канавки в сечении стыковки сферического сегмента и цилиндрической траншеи, как и на рис. 3, возникает S-образное распределение давления с пиковым положительным значением в зоне торможения на наветренном склоне и минимальным отрицательным давлением на дне канавки в области разрежения.

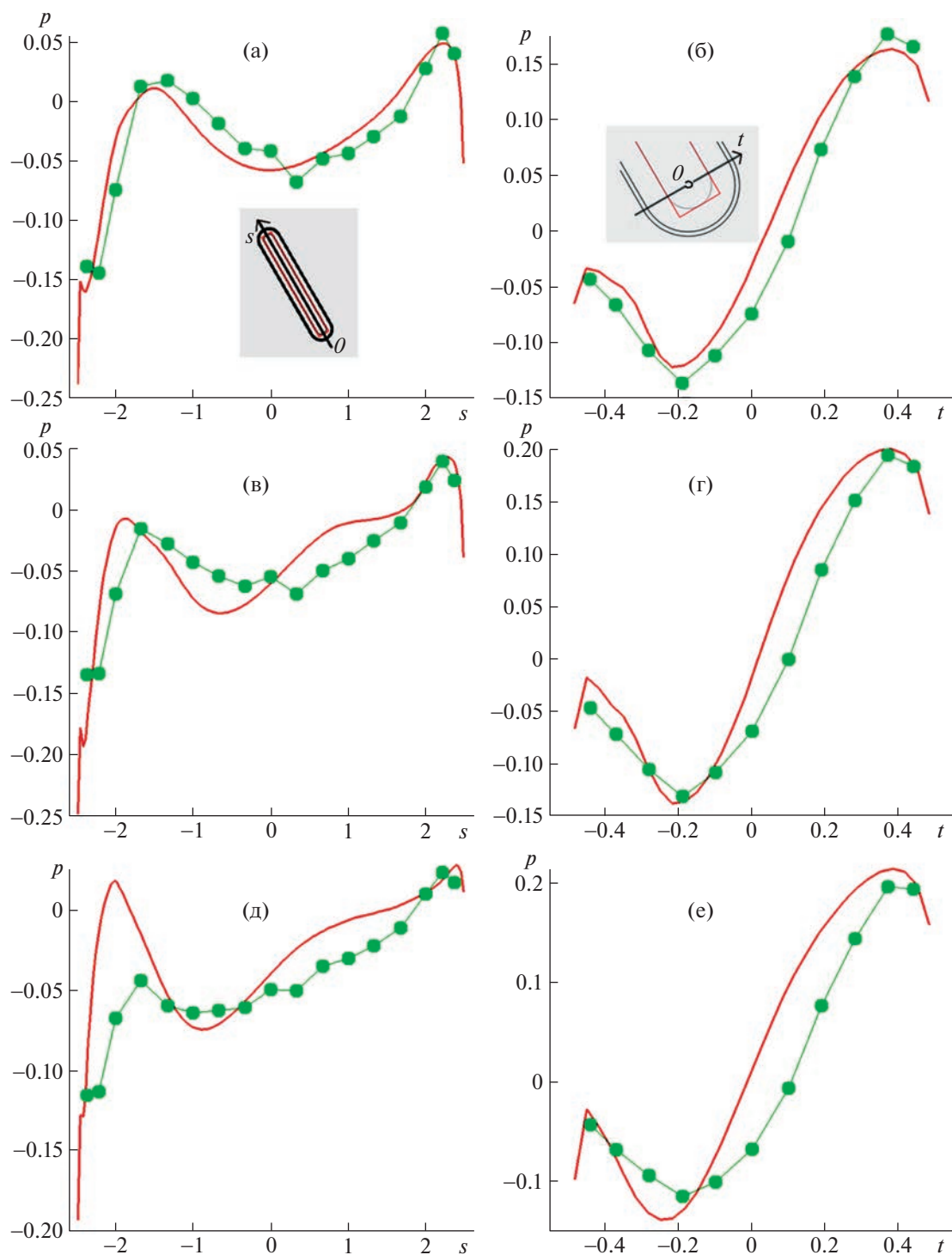


Рис. 5. Сравнение рассчитанных (линии) и измеренных (точки) распределений давления в срединном продольном а, в, д и характерном поперечном б, г, е сечениях канавки при различных углах наклона θ . а, б — $\theta = 35^\circ$; в, г — 45° ; д, е — 55° .

Как видно из визуализации отрывного течения в канавке на рис. 6, зона отрицательного давления соответствует месту генерации торнадоподобного потока на входном сферическом сегменте [3, 4, 11, 13], а зона торможения возникает в результате взаимодействия входящего в канавку потока с ее наветренным склоном. Локальный максимум статического давления в срединном сечении входной части канавки объясняется этим торможением.

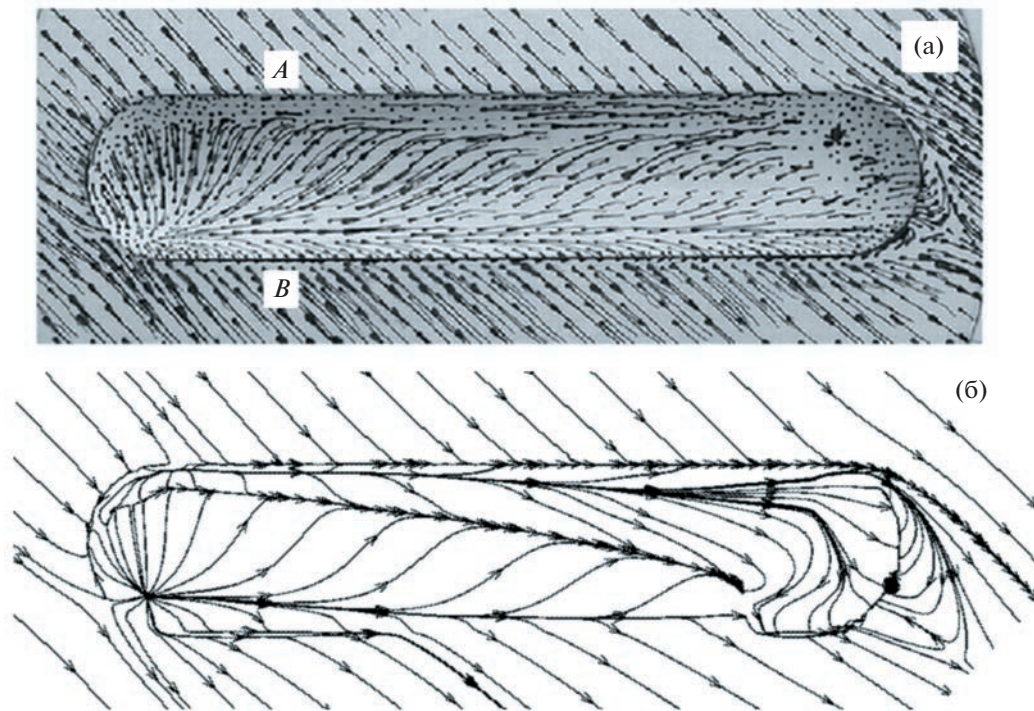


Рис. 6. Сопоставление саже-масляной картины растекания по поверхности канавки (а), наклоненной под углом 45° к набегающему потоку, на стенке канала с рассчитанной картиной визуализации отрывного течения вблизи канавки (б) для цифрового аналога экспериментального стенда.

С увеличением угла наклона канавки свыше 35° пиковая величина статического давления на наветренном склоне слегка увеличивается, достигая максимума при $\theta = 45^\circ$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены новые перспективные тесты для пакетных технологий и моделей турбулентности, базирующиеся на расчетах высокоинтенсивных вихревых течений и теплообмена около структурированных энергоэффективных поверхностей. В их основе лежит открытие аномальной интенсификации отрывных течений и теплообмена в наклонных канавках на пластинах и стенках каналов, а также явления ускорения потока в ядре узкого канала со структурированной канавками стенкой. В методическом исследовании продемонстрирована приемлемость RANS-подхода для прогнозирования характеристик высокоинтенсивных закрученных потоков.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда по грантам 22-19-00056 (эксперименты) 23-19-00083 (расчеты).

Обозначения

Nu – число Нуссельта, $Nu = \alpha D / \lambda$

Pr – число Прандтля, $Pr = \mu c_p / \lambda$

Re – число Рейнольдса, $Re = \rho U D / \mu$

T – температура, в К

U – скорость набегающего потока [м/с]

u, w – продольная и поперечная декартовы составляющие скорости, в отношении к U

c_p – теплоемкость

D – ширина канавки на пластине [м]

b – ширина канавки на стенке канала, в отношении к высоте канала

s – продольная координата в срединном сечении канавки, в отношении к D

t – поперечная координата в сечении стыковки сферического сегмента и траншеи, в отношении к D

k — турбулентная кинетическая энергия в отношении к U^2

p — давление, отнесенное к ρU^2

q — тепловой поток [$\text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}$]

x, y, z — продольная, вертикальная и трансверсальная координаты, в отношении к D

Greek symbols

λ — теплопроводность [$\text{Вт}\cdot\text{м}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}$]

μ — коэффициент динамической вязкости [$\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$]

ρ — плотность [$\text{кг}/\text{м}^3$]

Subscripts

min, max — минимальные и максимальные величины

pl — плоская стенка

m — параметры, осредненные по площади контрольного участка

Abbreviations

SST — модель переноса сдвиговых напряжений

VP2/3 — скорость-давление, 2D/3D коды

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гувернюк С.В., Синявин А.А., Меснянкин С.Ю., Панин Д.Н., Чулюнин А.Ю. Специализированный тест для валидации вычислительных технологий моделирования аэродинамики большегрузных автомобилей с элементами управления отрывом // Отчет Института механики МГУ. 2015. № 5298. 54 с.
2. Исаев С.А., Судаков А.Г., Никущенко Д.В., Усачов А.Е., Чулюнин А.Ю., Дубко Е.Б. RANS расчеты интенсивных отрывных и смерчевых течений на структурированных пластинах и стенках каналов в цифровых двойниках экспериментальных стендов Института механики МГУ и КазНЦ РАН // Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике: Девятая российская конференция. М.: ИПМ им. Келдыша РАН, 2022. С. 152–156.
3. Isaev S., Gritckevich M., Leontiev A., Popov I. Abnormal enhancement of separated turbulent air flow and heat transfer in inclined single-row oval-trench dimples at the narrow channel wall // Acta Astronautica. 2019. V. 163 (Part.A). P. 202–207.
4. Isaev S.A., Gritckevich M.S., Leontiev A.I., Milman O.O., Nikushchenko D.V. NT Vortex enhancement of heat transfer and flow in the narrow channel with a dense packing of inclined one-row oval-trench dimples // Int. J. Heat Mass Transf. 2019. V. 145. № 18737. P. 1–13.
5. Исаев С.А., Грицкевич М.С., Леонтьев А.И., Попов И.А., Судаков А.Г. Аномальная интенсификация турбулентного отрывного течения в наклоненных однорядных овально-траншейных лунках на стенке узкого канала // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57. № 5. С. 797–800.
6. Исаев С.А., Грицкевич М.С., Леонтьев А.И., Мильман О.О., Никущенко Д.В. Ускорение турбулентного потока в узком облуненном канале и интенсификация отрывного течения при уплотнении однорядных наклоненных овально-траншейных лунок на стенке // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26. № 5. 697–702.
7. Исаев С.А., Мазо А.Б., Никущенко Д.В., Попов И.А., Судаков А.Г. Влияние на аномальную интенсификацию отрывного турбулентного течения угла наклона однорядных овально-траншейных лунок на стабилизированном гидродинамическом участке узкого канала // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46. Вып. 21. С. 18–21.
8. Mironov A., Isaev S., Skrypnik A. and Popov I. Numerical and physical simulation of heat transfer enhancement using oval dimple vortex generators — review and recommendations // Energies. 2020. V. 13. № 5243.
9. Исаев С.А., Чулюнин А.Ю., Никущенко Д.В., Судаков А.Г., Усачов А.Е. Анализ аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена на стабилизированном участке узкого канала с однорядными наклоненными овально-траншейными лунками при использовании различных сеток и моделей турбулентности // Теплофизика высоких температур. 2021. Т. 59. № 1. С. 116–125.
10. Исаев С.А., Леонтьев А.И., Никущенко Д.В., Судаков А.Г., Усачов А.Е. Интенсификация отрывного течения в наклонных однорядных овально-траншейных лунках на стенке узкого канала // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94. № 1. С. 160–168.
11. Исаев С.А. Генезис аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в наклонных канавках на структурированных поверхностях // Механика жидкости и газа. 2022. № 5. С. 13–24.
12. Isaev S., Leontiev A., Gritskovich M., Nikushchenko D., Guvernyuk S., Sudakov A., Chung K.-M., Tryaskin N., Zubin M., Sinyavin A. Development of energy efficient structured plates with zigzag arrangement of multirow inclined oval trench dimples // Int. J. Thermal Sciences. 2023. V. 184. № 107988.

13. *Исаев С.А.* Аэрогидродинамические механизмы интенсификации физико-энергетических процессов на структурированных энергоэффективных поверхностях с вихревыми генераторами // Теплофизика и аэромеханика. 2023. Т. 30. № 1. С. 83–88.
14. *Isaev S.A., Mikheev N.I., Dushin N.S., Goltzman A.E., Nikushchenko D.V. and Sudakov A.G.* Vortex heat transfer enhancement on energy-efficient surfaces structured by inclined trench dimples // Journal of Physics: Conference Series. 2011. V. 2119. № 012016.
15. *Isaev S.A., Guvernuyuk S.V., Mikheev N.I., Popov I.A., Nikushchenko D.V.* Numerical and experimental study of abnormal enhancement of separated turbulent flow and heat transfer in inclined oval-trench dimples on the plate and on the narrow channel wall // Journal of Physics: Conf. Ser. 2021. V. 2039. № 012009.
16. *Isaev S.A., Popov I.A., Mikheev N.I., Guvernuyuk S.V., Zubin M.A., Nikushchenko D.V., Sudakov A.G.* Vortex heat transfer enhancement in the separated flow near structured dimpled surfaces // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 2057. № 012002.
17. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Son E.E., Guvernuyuk S.V., Zubin M.A., Mikheev N.I., Popov I.A., Nikushchenko D.V., Sudakov A.G.* Anomalous intensification of separated flow and heat transfer in one and multiple row deep inclined oval trench dimples on the wall of a narrow channel and on the plate // Journal of Physics: Conf. Ser. 2021. V. 2088. № 012018.
18. *Зубин М.А., Зубков А.Ф.* Структура отрывного обтекания цилиндрической каверны на стенке плоского канала // Механика жидкости и газа. 2022. № 1. С. 81–89.
19. *Исаев С.А., Баранов П.А., Усачов А.Е.* Многоблочные вычислительные технологии в пакете VP2/3 по аэротермодинамике. Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2013. 316 с.
20. *Menter F.R.* Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper. 1993. № 93–2906.
21. *Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.* Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // K. Hanjalic, Y. Nogano, and M. Tummers (Eds.) Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, Begell House Inc., 2003.
22. *Исаев С.А., Баранов П.А., Жукова Ю.В., Усачов А.Е., Харченко В.Б.* Коррекция модели переноса сдвиговых напряжений с учетом кривизны линий тока при расчете отрывных течений несжимаемой вязкой жидкости // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 4. С. 966–979.
23. *Isaev S.A.* Experience of application of SST-model-2003 with correction on streamline curvature according to Rodi-Leschziner-Isaev approach for (U)RANS calculations of separated and vortex sub- and supersonic flows // AIP Conference Proceedings. 2018. 2027, P. 020015.1–7.
24. *Ferziger J.H., Peri'c M.* Computational Methods for Fluid Dynamics/ 2nd ed.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1999.
25. *Van Doormaal J.P., Raithby G.D.* Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow // Numerical Heat Transfer. 1984. V. 7. № 2. P. 147–163.
26. *Leonard B.P.* A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1979. V. 19. № 1. P. 59–98.
27. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys. 1979. V. 32. P. 101–136.
28. *Rhie C.M., Chow W.L.* A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation // AIAA J. 1983. V. 21. P. 1525–1532.
29. *Pascau A., Garcia N.* Consistency of SIMPLEC scheme in collocated grids, V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010. Lisbon, Portugal, 2010, 12 p.
30. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems, 2nd ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003.
31. *Demidov D.* AMGCL: C++ library for solving large sparse linear systems with algebraic multigrid method. <http://amgcl.readthedocs.org/>

УДК 532.526:544.015.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТАЯНИЯ-НАМЕРЗАНИЯ ЛЬДА В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ЖИДКОСТЬЮ МАЛОЙ НЕРОВНОСТИ

© 2023 г. Р. К. Гайдуков^{a,*}, В. Г. Данилов^{a,**}, А. В. Фонарева^{a,***}

^aНациональный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

*E-mail: roma1990@gmail.com

**E-mail: vgdanilov@mail.ru

***E-mail: afonareva@hse.ru

Поступила в редакцию 25.10.2022 г.

После доработки 25.04.2023 г.

Принята к публикации 10.05.2023 г.

Исследуется фазовый переход при обтекании жидкостью ледяной поверхности с малой локализованной неровностью при больших числах Рейнольдса. В рамках двухпалубной структуры пограничного слоя на основе системы фазового поля построена математическая модель, описывающая динамику фазового перехода, и приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: двухпалубная структура пограничного слоя, теплоперенос, фазовый переход, локализованные возмущения, асимптотика, численное моделирование

DOI: 10.31857/S1024708422600841, **EDN:** OFZPCX

В работе рассматривается течение вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости вдоль неровной ледяной поверхности при достаточно больших значениях числа Рейнольдса Re в отсутствие силы тяжести, см. рис. 1. А именно, предполагается, что на плоской ледяной поверхности в точке x_0 локализована малая неровность (типа горбика или ямки), амплитуда которой порядка $O(\epsilon^{4/3})$ и ширина порядка $O(\epsilon)$, где $\epsilon = Re^{-1/2}$ – малый параметр. Также предполагается, что набегающий поток есть плоскопараллельный поток, сонаправленный с осью Ox , имеющий скорость $U_\infty = (u_\infty, 0)$, плотность ρ_l и температуру $\hat{T}_\infty$, а точка x_0 удалена на от края поверхности на столько, что перед неровностью сформировался пограничный слой Прандтля (т.е. скорость в пограничном слое описывается функцией Блазиуса).

Основной целью данной работы является исследование фазового перехода (лед–вода): таяние льда при обтекании поверхности теплой водой, и, наоборот, намерзание льда при обтекании поверхности переохлажденной водой.

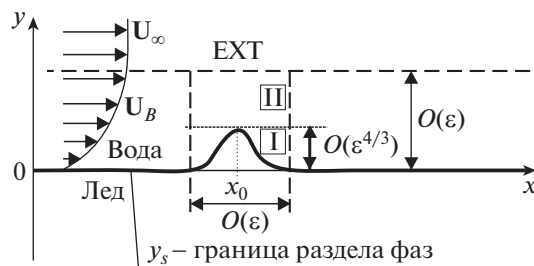


Рис. 1. Обтекаемая ледяная поверхность с малой неровностью и двухпалубная структура пограничного слоя: I – нижняя палуба (тонкий пограничный слой), II – средняя палуба (классический пограничный слой Прандтля), EXT – область внешнего (потенциального) течения, U_B – течение с профилем скорости Блазиуса.

Таблица 1. Физические постоянные [23, 33–36] и характерные масштабы

Физическая величина	Вода	Лед
Удельная теплоемкость	$c_l = 4.2 \times 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	$c_s = 2.05 \times 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
Удельная теплопроводность	$\lambda_l = 0.56 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	$\lambda_s = 2.25 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
Плотность	$\rho_l = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$	$\rho_s = 0.9 \times 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$
Поверхностное натяжение	$\sigma = 3.3 \text{ Н}/\text{м}$	
Кинематическая вязкость	$\nu = 1.79 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$	
Кинетический коэффициент роста		$m = 7.3 \times 10^{-3} \text{ м}/(\text{с} \cdot \text{К})$
Температура плавления		$T_m = 273 \text{ К}$
Скрытая теплота плавления		$l = 3.3 \times 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$
Характерный масштаб		$x_0 = 1 \text{ м}$
Характерная скорость		$u_\infty = 1 \text{ м}/\text{с}$

Перейдем к математической постановке задачи. Введем характерный пространственный масштаб x_0 , характерную скорость u_∞ , характерное давление $p_\infty = \rho_l u_\infty^2$, характерное время $t_0 = x_0/u_\infty$, характерную температуру $T_0 = l/c_l \approx 78.6 \text{ К}$, где l – скрытая теплота плавления, c_l – удельная теплоемкость жидкости, а значения всех физических постоянных см. в табл. 1. Теперь введем безразмерные пространственные переменные $(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})/x_0$, безразмерное время $t = \hat{t}/t_0$, безразмерную скорость $U = \hat{U}/u_\infty$, безразмерное давление $p = \hat{p}/p_\infty$, безразмерную температуру

$$T = \frac{\hat{T} - T_m}{T_0} = (\hat{T} - T_m) \frac{c_l}{l}, \quad (1)$$

где T_m – температура плавления твердой фазы (льда), в случае, когда разделяющая лед и воду поверхность плоская, а все переменные с “крышками” размерные (над физическими постоянными “крышки” не ставились, их значения приведены в табл. 1). Следовательно, число Рейнольдса $Re = u_\infty x_0/\nu$, где ν – кинематическая вязкость рассматриваемой жидкости, а безразмерная температура набегающего потока равна $T_{\text{water}} = (\hat{T}_\infty - T_m)/T_0$.

Тогда неровность на обтекаемой поверхности будет локализована в точке $x = 1$, и будем считать, что обтекаемая поверхность y_s (поверхность льда) задается следующим образом:

$$y_s = \varepsilon^{4/3} h(t, (x-1)/\varepsilon), \quad (2)$$

где $h(t, \xi)$ – некоторая быстроубывающая по ξ функция ($h|_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$), описывающая форму неровности, которая меняется во времени в силу фазового перехода (процессов плавления-кристаллизации), см. рис. 1.

Отметим, что выбранные геометрические масштабы в (2) (амплитуда $O(\varepsilon^{4/3})$ и ширина неровности $O(\varepsilon)$) порождают двухпалубную структуру пограничного слоя, см. [1–4] и рис. 1. Многопалубные (трех- и двухпалубные) структуры пограничного слоя в задачах обтекания малых неровностей известны довольно давно, начиная с работ В.Я. Нейланда [5], К. Стюартсона [6], Ф.Т. Смита [7], и исследованы во множестве работ известных ученых. В рамках трехпалубной модели в цикле работ И.И. Липатова и М.В. Коротеева [8–10] исследовался теплоперенос в задаче обтекания газом пластины с плоскими локальными нагреваемыми зонами. Также в рамках трехпалубной модели в работах А.Ф. Алджохани и Дж.С.Б. Гаджара [11, 12] изучалась задача обтекания газом нагреваемых неровностей в форме горбиков на поверхности пластины для дозвукового и трансзвукового течений. Однако задача о фазовом переходе в рамках многопалубных структур ранее не исследовалась.

С точки зрения гидродинамики, исследуемая задача представляет собой нестационарную задачу обтекания неровности с изменяемой во времени формой. Такая задача описывается (безразмерной) системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \langle \mathbf{U}, \nabla \rangle \mathbf{U} = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{U}, \quad \langle \nabla, \mathbf{U} \rangle = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями прилипания к обтекаемой поверхности и условиями согласования с набегающим потоком:

$$\mathbf{U}|_{y=y_s} = 0, \quad \mathbf{U}|_{y \rightarrow \infty} = \mathbf{U}|_{x \leq 0} = (1, 0), \quad (4)$$

и некоторым гладким начальным условием, где $\mathbf{U} = (u(t, x, y), v(t, x, y))$ – двумерный вектор скорости, $p = p(t, x, y)$ – давление.

ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ НЕРОВНОСТИ

В работе [4] был проведен асимптотический анализ рассматриваемой гидродинамической задачи (3), (4) с помощью комбинации метода погранслойных разложений, основанного на идеях из работы М.И. Вишика и Л.А. Люстерника [13], и метода построения локализованных асимптотических решений (малое возмущение границы – наличие неровности на обтекаемой поверхности не влияет на поток далеко до и после нее), и в результате было получено асимптотическое решение с двухпалубной структурой пограничного слоя. В рамках данной работы представляет интерес течение лишь около обтекаемой неровности – в области тонкого пограничного слоя (см. область I на рис. 1), которое описывается системой уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением (см. подробнее в [4]):

$$\varepsilon^{2/3} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} \right) + v^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} = - \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{\theta}^2} + \varepsilon^{2/3} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} = 0, \quad (6)$$

$$u^*|_{\bar{\theta}=0} = v^*|_{\bar{\theta}=0} = 0, \quad u^*|_{\xi \rightarrow \pm \infty} = f''(0)\bar{\theta}, \quad v^*|_{\xi \rightarrow \pm \infty} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} \Big|_{\bar{\theta} \rightarrow \infty} = f''(0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} = f''(0)v^*|_{\bar{\theta} \rightarrow \infty}, \quad (8)$$

$$u^*|_{t=0} = U_0(\xi, \bar{\theta}), \quad (9)$$

где $u^* = u^*(t, \xi, \bar{\theta})$ и $v^* = v^*(t, \xi, \bar{\theta})$ – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости, $f = f((y - y_s)/(\varepsilon\sqrt{x}))$ – функция Блазиуса; U_0 – некоторая гладкая функция; $\bar{\theta} = (y - y_s)/\varepsilon^{4/3}$ – вертикальная погранслойная переменная (она вводится так, что обтекаемая поверхность $y = y_s$ становится плоской, т.е. граница раздела фаз есть $\bar{\theta} = 0$); $\xi = (x - 1)/\varepsilon$ – горизонтальная быстрая переменная. Отметим, что данная система уравнений эффективно решается численно [4].

Наличие коэффициента $\varepsilon^{2/3}$ в уравнении (5) обусловлено выбором временного масштаба. Дело в том, что в нестационарных многопалубных структурах, помимо пространственной разномасштабности, возникает также иерархия времен в слоях структуры, см. [14–17], и рассмотрение течения на конечных временах во всей задаче (в уравнениях Навье–Стокса (3)) приводит к тому, что течение около обтекаемой поверхности (на нижней палубе, см. область I на рис. 1) нужно рассматривать на больших временах $t \sim \varepsilon^{-2/3}$ (т.е. выбор временного масштаба в исходной задаче приводит к появлению данного коэффициента в (5)).

Масштабы двухпалубной структуры пограничного слоя порождают следующие характеристические масштабы скоростей в пристеночной области:

$$u_0^* = \varepsilon^{1/3} u_\infty, \quad v_0^* = \varepsilon^{2/3} u_\infty, \quad (10)$$

где u_0^*, v_0^* – характерные значения скоростей в пристеночной области (см. [1, 18]). Обезразмеривание уравнения теплопроводности в пристеночной области проводится в соответствии с характерными масштабами, приведенными в (10) и на рис. 1.

Уравнение теплопроводности в движущейся несжимаемой жидкости имеет следующий вид [19]:

$$c_l \rho_l \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\lambda_l \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left(\lambda_l \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right) + \nu \rho_l \left[2 \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right], \quad (11)$$

где переменные с “крышками” – размерные, λ_l – удельная теплопроводность жидкости, ее значение и значения остальных физических величин приведены в табл. 1.

Проведем обезразмеривание уравнения (11) обычным способом. Положим $\hat{x} = \varepsilon \xi x_0$, $\hat{y} = \varepsilon^{4/3} \theta x_0$, где (ξ, θ) – безразмерные координаты в тонком пограничном слое (I на рис. 1); $(\hat{u}, \hat{v}) = (u_0^* u^*, v_0^* v^*)$, где (u^*, v^*) – безразмерный вектор скорости в тонком пограничном слое (см. (5)–(9)), u_0^*, v_0^* определены выше (10), а значения характерных величин приведены в табл. 1. Тогда, например,

$$c_l \rho_l \hat{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} = c_l \rho_l \frac{u_0^* T_0}{\varepsilon x_0} u^* \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad c_l \rho_l \hat{v} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} = c_l \rho_l \frac{v_0^* T_0}{\varepsilon^{4/3} x_0} v^* \frac{\partial T}{\partial \theta},$$

и т.д., где $T = \hat{T}/T_0$ – безразмерная температура (см. (1)). В результате уравнение (11) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{u_0^* T_0}{\varepsilon x_0} \left[\frac{\varepsilon x_0}{u_0^* t_0} \frac{\partial T}{\partial t} + u^* \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{v_0^*}{\varepsilon^{1/3} u_0^*} v^* \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] &= \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \frac{T_0}{\varepsilon^2 x_0^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \frac{T_0}{\varepsilon^{8/3} x_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \frac{\nu}{c_l} \left[2 \frac{(u_0^*)^2}{\varepsilon^2 x_0^2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{(v_0^*)^2}{\varepsilon^{8/3} x_0^2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{(u_0^*)^2}{\varepsilon^{8/3} x_0^2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \frac{u_0^* v_0^*}{\varepsilon^{7/3} x_0^2} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \frac{(v_0^*)^2}{\varepsilon^2 x_0^2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \xi} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Разделим его на коэффициент перед скобкой в левой части и подставим выражения для масштабов, $u_0^* \varepsilon^{-1}/x_0 = \varepsilon^{-2/3} u_\infty/x_0$, учитывая что $t_0 = x_0/u_\infty = 1$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial t} + u^* \frac{\partial T}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left[\varepsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] + \\ &+ \frac{\nu}{c_l T_0} \varepsilon^{-4/3} \left[2 \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \varepsilon^{2/3} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \varepsilon^{4/3} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \xi} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где λ – безразмерный коэффициент теплопроводности (обезразмерен на λ_l , т.е. в воде $\lambda = 1$).

Подставляя значения постоянных из табл. 1, получим $\varepsilon \approx 1.3 \times 10^{-3}$, $\varepsilon^{2/3} \approx 1.2 \times 10^{-2}$ и следующие значения для коэффициентов в уравнении (12):

$$\frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \approx 7.5 \times 10^{-2}, \quad \frac{\nu}{c_l T_0} \varepsilon^{-4/3} \approx 3.7 \times 10^{-8}.$$

Очевидно, что диссипативная часть уравнения (12) мала, и ею можно пренебречь. В итоге уравнение теплопроводности в безразмерной форме примет следующий вид:

$$\varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial t} + u^* \frac{\partial T}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left[\varepsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (13)$$

Аналогично, в области льда имеем уравнение

$$\varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_l}{c_s \rho_s} \varepsilon^{-2} \left[\varepsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right], \quad (14)$$

где $\lambda = \lambda_s/\lambda_l$; c_s , ρ_s , λ_s – удельная теплоемкость, плотность и удельная теплопроводность льда, их значения приведены в табл. 1.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Перейдем теперь к рассмотрению задачи о фазовом переходе типа плавления-кристаллизации. Классической моделью для описания таких процессов является задача Стефана–Гиббса–

Томсона — это дальнейшее развитие классической задачи Стефана [20], учитывающая поверхностное натяжение на (искривленной) границе раздела фаз.

Напомним, что (ξ, θ) — декартова система координат с учетом введенных масштабов. Тогда граница раздела фаз $h(t, \xi)$ в каждый момент времени

$$\Gamma_t = \{\theta = h(t, \xi)\} = \{S = 0\}, \quad (15)$$

где $S = S(t, \theta, \xi) = \theta - h(t, \xi)$.

Температура жидкой фазы определяется из уравнения (13), температура твердой фазы определяется из уравнения (14). Заметим, что если продолжить поле скоростей (u^*, v^*) (которые определяются из задачи (5)–(9), где $\bar{\theta} = \theta - h(t, \xi)$) нулями в область льда, получим уравнение, описывающее теплоперенос во всей задаче:

$$\varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial t} + u^* \frac{\partial T}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left[\varepsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right], \quad (16)$$

где λ — разрывный коэффициент теплопроводности, $\lambda = 1$ в жидкой фазе и $\lambda = \lambda_s / \lambda_l$ в твердой. Заметим, что $u^* = v^* = 0$ на поверхности лед–вода (см. (7)), поэтому слагаемые со скоростями в (16) непрерывны на границе раздела фаз.

Уравнение (16) дополняется граничными условиями

$$T|_{\xi \rightarrow \pm\infty} = T_g, \quad T|_{\theta \rightarrow -\infty} = T_{\text{ice}} = \text{const}, \quad T|_{\theta \rightarrow \infty} = T_{\text{water}} = \text{const}, \quad (17)$$

где $T_g = T_{\text{ice}}$ в твердой фазе и $T_g = T_{\text{water}}$ в жидкой фазе, и некоторым начальным условием

$$T|_{t=0} = T_{\text{init}}(\xi, \theta), \quad (18)$$

и условиями Стефана и Гиббса–Томсона на границе раздела фаз $\{\theta = h(t, \xi)\}$ (см. (22) и (23) ниже).

Хорошо известно [21–23], что при учете поверхностного натяжения нагревание поверхности фазового перехода жидкость — твердое тело (будем для определенности писать “вода–лед”) приводит к отклонению температуры на границе лед–вода от равновесной температуры T_m на плоской границе раздела фаз. Отсюда следует, что условие Стефана в задаче о плавлении–кристаллизации, в котором температура на границе фазового перехода считается равной T_m , следует видоизменить. Принято вместо условия Стефана ставить на искривленной границе фазового перехода условие Гиббса–Томсона, связывающее отклонение $\hat{T}_m - T_m$ ($\hat{T}_m$ — неизвестная теперь температура на искривленной границе раздела фаз) с кривизной и поверхностным натяжением. Например, [24–26], для сферы радиуса $\hat{R}$ это условие имеет вид

$$\hat{T}_m - T_m = -2\sigma \frac{T_m}{\hat{R}l\rho_l}, \quad (19)$$

где σ — поверхностное натяжение воды на границе лед–вода. Равенство (19) в общем случае можно записать в виде [24] так:

$$\hat{T}_m - T_m = -\frac{\sigma T_m \hat{K}}{\rho_l l}, \quad (20)$$

где $\hat{K}$ — средняя кривизна поверхности фазового перехода. Можно сказать, что условие Гиббса–Томсона является общепринятым, несмотря на продолжающееся до настоящего времени его обсуждение [24, 27].

Модифицированное условие Гиббса–Томсона записывается так [28]:

$$\hat{T}_m - T_m = -\frac{\sigma T_m \hat{K}}{\rho_l l} - \frac{1}{m} \hat{v}_n, \quad (21)$$

где m — кинетический коэффициент роста льда [29], $\hat{v}_n$ — скорость точек границы фазового перехода в направлении нормали из твердой фазы в жидкую.

На самом деле (21) является комбинацией термодинамического и кинетического подходов к выводу условия на свободной границе (в последнем вместо правой части (20) появляется $-\hat{v}_n/m$). Равенство (21) является употребительным, но грубым описанием процесса фазового перехода с учетом кривизны границы раздела фаз. Коэффициент m определен только для небольшого

числа материалов (в основном, металлов) и в последнее время может быть определен методами молекулярной динамики (см. [28]).

Итак, уравнение (16) следует дополнить следующими условиями Стефана и Гиббса–Томсона на границе раздела фаз Γ_t :

$$\rho_l l \hat{v}_n = \left[\lambda_i \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{n}} \right]_{\Gamma_t}, \quad (22)$$

$$(\hat{T}|_{\Gamma_t} - T_m) + d \hat{K} + m^{-1} \hat{v}_n = 0. \quad (23)$$

Здесь $[f]$ – скачок функции f по нормали из твердой фазы в жидкую.

В безразмерном виде с учетом введенных выше масштабов (10), условие Гиббса–Томсона (23) имеет вид:

$$T|_{\Gamma_t} + \frac{\sigma T_m}{l \rho_l T_0 \varepsilon^{4/3} x_0} K + \frac{v_0^*}{m T_0} v_n = 0. \quad (24)$$

Здесь $\varepsilon^{4/3} x_0$ – характерное вертикальное расстояние (см. подробнее выше), v_n и K – безразмерные нормальная скорость точки на границе раздела фаз и средняя кривизна этой границы, а все значения физических и характерных величин приведены в табл. 1. Отметим, что ноль безразмерной температуры T совпадает с температурой плавления, см. (1). Подставляя характерные величины в (24), получим условие Гиббса–Томсона в безразмерной форме

$$T|_{\Gamma_t} = -\alpha v_n - \beta K, \quad (25)$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon^{2/3}}{m T_0} \approx 2.1 \times 10^{-2}, \quad \beta = \varepsilon^{-4/3} \frac{\sigma \hat{T}_m}{l \rho_l T_0} \approx 2.3 \times 10^{-4}. \quad (26)$$

Аналогично, следует перейти к безразмерной форме в (22):

$$\rho_l l v_0^* v_n = \frac{\lambda_l T_0}{\varepsilon^{4/3} x_0} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{\Gamma_t}.$$

Здесь n – вектор нормали к границе $\theta = h(t, \xi)$, $n = (-h'_\xi, 1)$, а вектор ∇T в соответствии с масштабами в пристеночной области имеет вид

$$\nabla T = \left(\varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial \xi}, \frac{\partial T}{\partial \theta} \right).$$

Подставляя характерные величины, получим

$$v_n = \frac{\lambda_l T_0}{\rho_l l} \varepsilon^{-2} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{\Gamma_t}, \quad (27)$$

где n вычисляется в координатах (ξ, θ) , а разрывный коэффициент λ точно такой же, как и в уравнении (16).

Однако задача Стефана–Гиббса–Томсона (5)–(9), (16)–(18), (25)–(27) сложна в вычислительном плане – требуется применение различных ресурсоемких численных методов для точного определения положения свободной границы. Существует другой подход, основанный на введении функции порядка $\phi = \phi_\zeta(t, \xi, \theta)$, где ζ – параметр регуляризации (сглаживания), такой, что

$$\phi_\zeta(t, \xi, \bar{\theta}) = \begin{cases} +1, & \theta > h(t, \xi) \\ -1, & \theta < h(t, \xi), \end{cases} \quad (28)$$

т.е. внутри твердой фазы принимает значение -1 , внутри жидкой $+1$, а ζ – параметр регуляризации. В ζ -окрестности границы фазового перехода функция ϕ быстро меняется от -1 до 1 . Обозначим через Ω_s область, занятую твердой фазой, а через Ω_l – жидкой, и $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_l$.

Система уравнений фазового поля [21, 22, 30], из которой в данном подходе определяются температура среды T и функция порядка φ_ζ , имеет вид

$$\varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial t} + A \left[u^* \frac{\partial T}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] - \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left(\varepsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_\zeta}{\partial t}, \quad (29)$$

$$\zeta^2 \alpha \frac{\partial \varphi_\zeta}{\partial t} = \zeta^2 \beta \Delta_{\xi, \theta} \varphi_\zeta + \varphi_\zeta (1 - \varphi_\zeta^2) + \zeta (1 - \varphi_\zeta^2) \gamma T / \sqrt{2\beta}, \quad (30)$$

где α и β определены в (26), $\gamma = 1$ – коэффициенты перед v_n , K и $T|_{\Gamma_l}$ в (25) и, в силу изложенного выше, $A = 1$ в жидкой фазе и $A = 0$ в твердой (слагаемые с коэффициентом A непрерывны на границе раздела фаз в силу того, что скорости можно гладко продолжить нулем в область твердой фазы, см. (7)).

Последнее слагаемое в правой части (29) получается так. Проинтегрируем уравнение (29) по области, включающую в себя границу раздел фаз Γ_l . В левой части, как обычно, возникнет интеграл по Γ_l от функции

$$-\frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left[\left\langle \lambda \varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta}, n \right\rangle \right]_{\Gamma_l},$$

где $n = (-h'_\xi, 1)$, а через [...] обозначен скачок величины в квадратных скобках по нормали из твердой фазы в жидкую. Правая часть, как видно из (28), аппроксимирует $2 \cdot \delta(\Gamma_l)$, где δ – дельта-функция Дирака, см. ниже вывод условия Гиббса–Томсона. Поэтому, предполагая, что коэффициент при $\partial \varphi_\zeta / \partial t$ пока не определен (пусть это ω), получим равенство

$$\frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{\Gamma_l} = 2v_n \cdot \omega.$$

Сравнивая последнее равенство с (27) и учитывая, что $T_0 = l/c_l$, получим $\omega = 1/2$.

Граница раздела фаз Γ_l определяется равенством

$$\Gamma_l = \{\varphi_\zeta(t, \xi, \theta) = 0\}. \quad (31)$$

Более сложное рассуждение требуется для вывода условия Гиббса–Томсона из второго уравнения в системе фазового поля – уравнении Алена–Кана (30). Приведем “наивный” вывод, принадлежащий автору этого подхода – Г. Кагинальп [21, 22]. Более точный вывод можно найти в [3–32].

Пусть Γ_l – граница раздела фаз, $\tau = \tau(t, \xi, \theta)$ – координата (расстояние) по нормали, определенная так, что в области твердой фазы координата положительная (нормаль направлена из твердой фазы в жидкую). Тогда

$$|\nabla_{\xi, \theta} \tau| = 1, \quad \text{div}(\nabla \tau) = K,$$

где K – средняя кривизна на Γ_l . Будем строить φ в виде

$$\varphi_\zeta = \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{\beta}}\right), \quad z = \frac{\tau - v_n t}{\zeta}.$$

Подставив эту функцию в уравнение (30), получим

$$-\frac{\alpha \zeta v_n}{\sqrt{\beta}} \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \varphi(1 - \varphi^2) + \zeta \sqrt{\beta} K \frac{d\varphi}{dz} + (1 - \varphi^2) \zeta T / \sqrt{2}.$$

Здесь z – аргумент функции φ , и слагаемые порядка ζ^2 опущены. Из последнего равенства следует

$$\varphi''_{zz} + \varphi(1 - \varphi^2) = 0.$$

С учетом наложенных на φ_ζ условий

$$\varphi = \text{th}(z/\sqrt{2\beta}).$$

Полагая $\varphi_\zeta = \varphi + \zeta\varphi_1$, получим для φ_1 неоднородное линейаризованное уравнение

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + (1 - 3\varphi^2)\varphi_1 = -\frac{\alpha_{V_n}}{\sqrt{\beta}} \frac{d\varphi}{dz} - K\sqrt{\beta} \frac{d\varphi}{dz} - (1 - \varphi^2)T/\sqrt{2\beta} \stackrel{\text{def}}{=} F.$$

Условие его разрешимости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\varphi'_z dz = 0$$

дает в точности условие Гиббса—Томсона (25).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Перейдем к численному моделированию — будем численно решать задачу (5)–(9), (17), (29), (30), граничные условия для функции порядка φ_ζ — условия Неймана на границе области. Для численного решения этой системы не требуется каких-либо нетривиальных численных методов — она эффективно решается численно с помощью разностных схем (не приводятся в деталях в виду тривиальности).

Параметры, используемые для численного моделирования, следующие: пространственная область $\Omega = \{-50 \leq \xi \leq 50; -50 \leq \theta \leq 50\}$, время моделирования $0 \leq t \leq 200$, шаги разностной схемы $h_\xi = h_\theta = 5 \times 10^{-2}$, $h_t = 5 \times 10^{-4}$. Отметим, что ошибка, обусловленная таким обрезанием исходной неограниченной области $\bar{\Omega} = \{\xi \in \mathbb{R}, R\}$, будет довольно малой, фактически того же порядка, что и ошибка аппроксимации разностной схемы, см. [2–4, 37, 38]. Все используемые физические постоянные, а также характерные величины, приведены в табл. 1. Параметр регуляризации $\zeta = 5h_\theta$.

В качестве начальной формы границы фаз $h(t, \xi)$ выберем

$$h|_{t=0} = B(e^{-\xi^2/4} + e^{-(\xi-8)^2/4}),$$

где $B = \text{const}$, положительным значениям которой соответствует задача обтекания нароста на поверхности льда, а отрицательным — обтекание ямки на ледяной поверхности. Отметим, что в работах [2–4] ранее было получено (для случая одного горбика $h(\xi) = Be^{-\xi^2/4}$), что при превышении $|B|$ некоторого критического значения B^* в ламинарном потоке формируется зона отрывного течения (более точно, на этот процесс, помимо амплитуды, влияет величина угла наклона боковых стенок неровности — чем они круче, тем меньше B^*), см. рис. 2.

В качестве начальных данных для поля скоростей выберем ламинарное обтекание неровности

$$u^*|_{t=0} = \begin{cases} f''(0)\bar{\theta}(1 + 0.2h(0, \xi)), & \bar{\theta} \leq 5, \\ f''(0)(\bar{\theta} + h(0, \xi)), & \bar{\theta} > 5, \end{cases} \quad \bar{\theta} = \theta - h(0, \xi). \quad (32)$$

Для функции порядка φ примем

$$\varphi_\zeta|_{t=0} = \text{th}\left(\frac{\theta - h(0, \xi)}{\zeta\sqrt{2\beta}}\right).$$

Начальное условие для температуры

$$T|_{t=0} = \frac{1}{2} \left[(T_l - T_s) \text{th}\left(\frac{\theta - h(0, \xi)}{4}\right) + (T_l + T_s) \right],$$

где T_l и T_s — постоянные температуры воды и льда на границе области.

Перейдем к результатам численного моделирования. Далее для удобства восприятия будем приводить температуру в градусах Цельсия.

Рассмотрим сначала случай обтекания ледяного нароста малой амплитуды (напомним, что в этом случае в течении не образуются зоны отрыва, см. рис. 2 (а)) течением с небольшим отличием его температуры от температуры льда. А именно, пусть в начальный момент времени амплитуда неровности $B = 1 < B^*$, а температуры воды и льда $T_l = 2^\circ\text{C}$ и $T_s = -2^\circ\text{C}$. Динамика границы раздела фаз во времени для этого случая приведена на рис. 3. Видно, что на плоской поверхности наблюдается намерзание льда, а вершинки горбиков, наоборот, плавятся. Отметим также, что

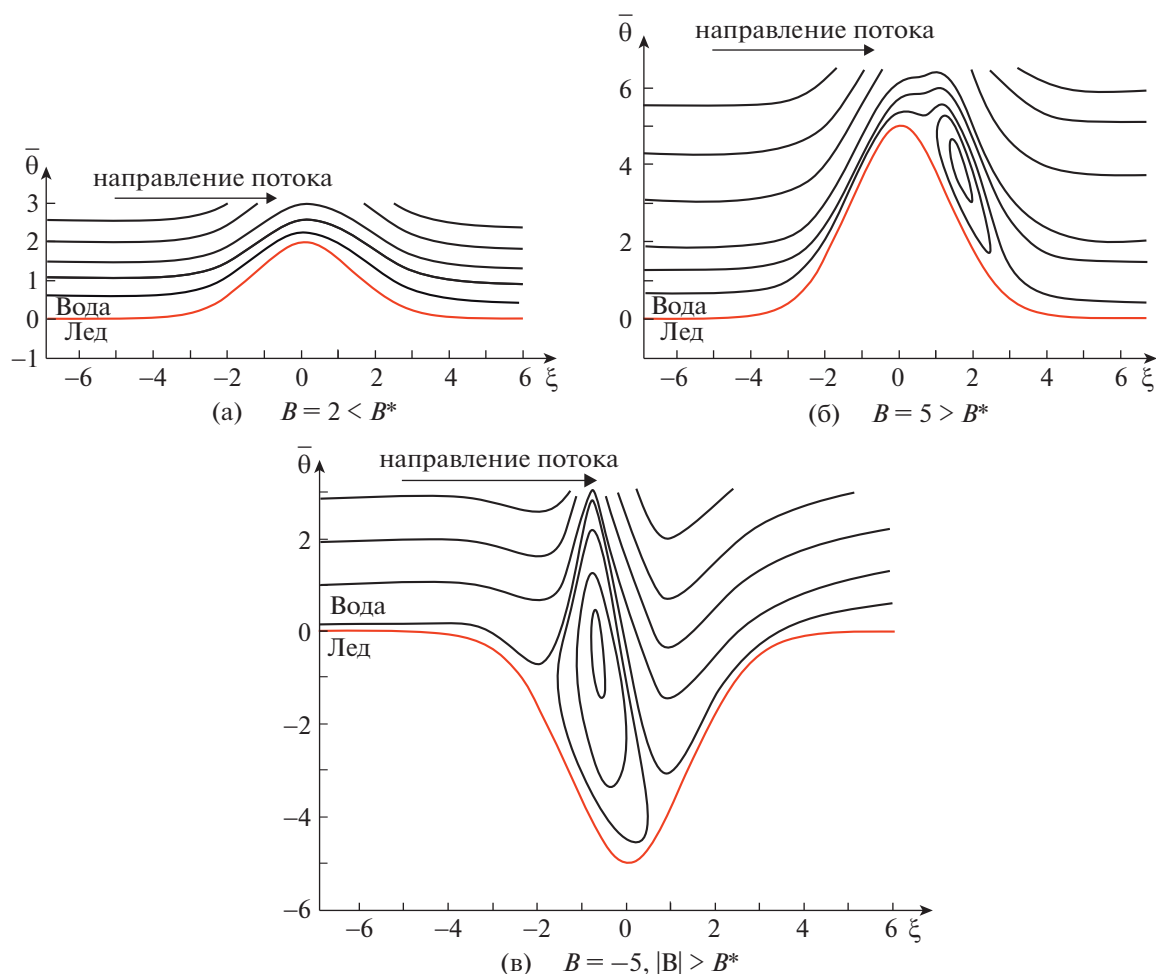


Рис. 2. Характерные линии тока при обтекании малой неровности в зависимости от амплитуды B неровности; здесь B^* — критическая амплитуда, красная линия — граница раздела фаз (лед—вода).

видна небольшая асимметрия границы раздела фаз (см. пунктирные линии), которая, очевидно, обусловлена наличием потока, см. также рис. 4. Из данных численных экспериментов получено, что безразмерные средняя скорость намерзания и средняя скорость плавления вершинок неровностей одинаковые, и по величине равны $|v_n| \approx 3 \times 10^{-4}$. Напомним, что размерная скорость движения границы раздела фаз есть $\hat{v}_n = \epsilon^{2/3} u_\infty v_n$, где $\epsilon^{2/3} u_\infty \approx 1.2 \times 10^{-2}$ м/с, см. табл. 1. В моделируемом на рис. 3 случае, $|\hat{v}_n| \approx 3.12 \times 10^{-6}$ м/с, что в целом (по порядку) согласуется со скоростью роста кристаллов льда из эксперимента [36].

На рис. 4 представлены результаты моделирования аналогичной рис. 3 задачи, но в случае отсутствия течения в воде ($u^* = v^* \equiv 0$). Можно видеть, что характер намерзания такой же, как и в случае наличия течения, но скорости движения границы раздела фаз и ее форма отличаются. А именно, в случае отсутствия потока граница движется только вдоль вертикальной оси θ (см. максимумы и минимумы, отмеченные пунктирными линиями на рис. 4), а движение в направлении горизонтальной оси ξ отсутствует. Также отличаются скорости движения границы раздела фаз в области горбиков — в случае отсутствия потока вершинки горбиков плавятся медленнее (примерно в 6.5 раза), и намерзание в ямке происходит также медленнее (примерно в 1.5 раза). Но скорости намерзания на плоской границе совпадают.

Теперь рассмотрим случай большей разницы температур воды и льда. А именно, пусть также в начальный момент $B = 1$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, но температура воды $T_l = 20^\circ\text{C}$. Динамика границы раздела фаз для этого случая приведена на рис. 5. Видно, что плавление льда происходит вдоль всей границы раздела фаз, при этом граница раздела фаз остается симметричной, но вершинки неровно-

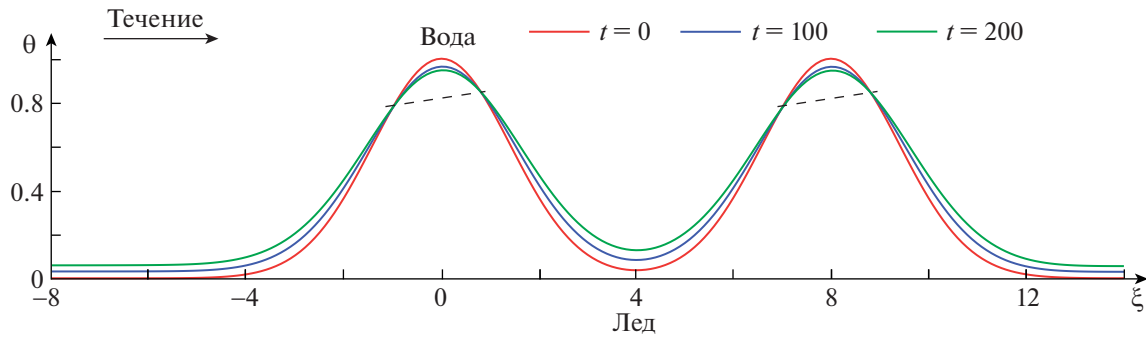


Рис. 3. Граница раздела фаз $h(t, \xi)$ в разные моменты времени: $B = 1$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, $T_l = 2^\circ\text{C}$.

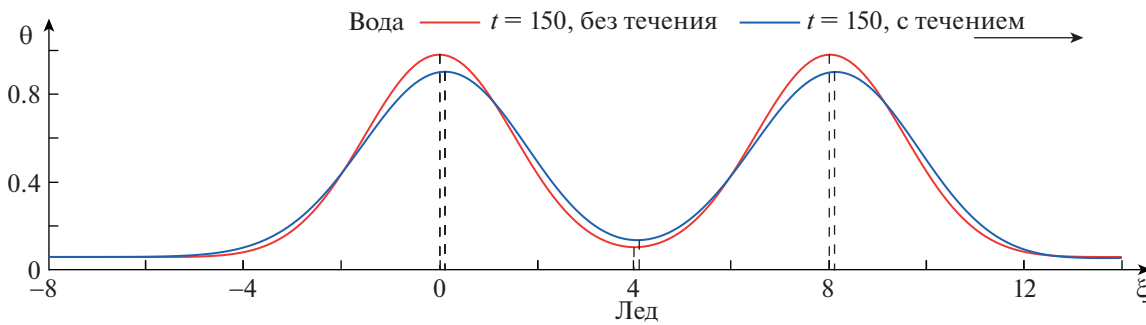


Рис. 4. Сравнение границы раздела фаз $h(t, \xi)$ при $t = 150$ для случая задач с течением и без него: $B = 5$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, $T_l = 2^\circ\text{C}$.

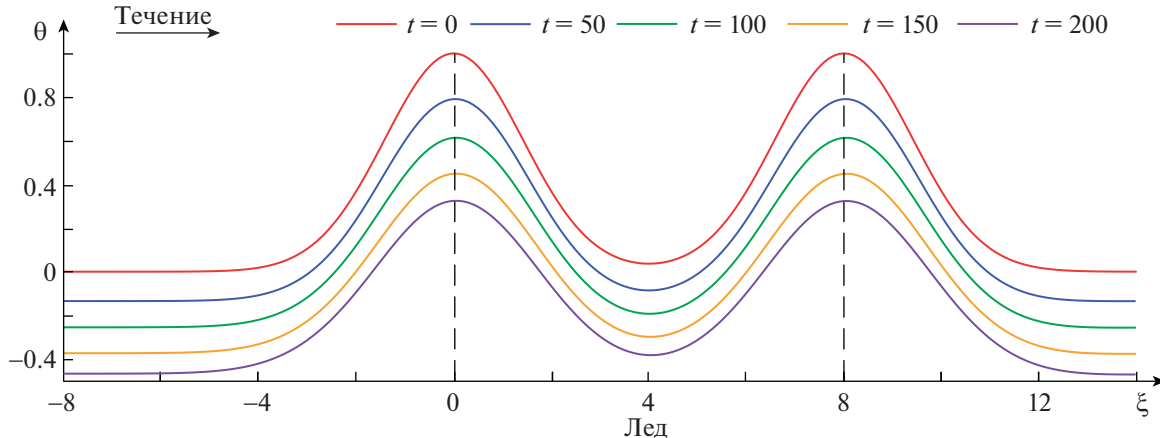


Рис. 5. Граница раздела фаз $h(t, \xi)$ в разные моменты времени: $B = 1$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, $T_l = 20^\circ\text{C}$.

стей плавятся немного быстрее, чем остальная поверхность. Это объясняется большим вкладом теплопереноса (из-за возросшей разности температур) относительно адвекции (скорости около обтекаемой поверхности довольно малы). Численная величина средних (безразмерных) скоростей $|v_n| \approx 3 \times 10^{-3}$ на плоской поверхности и $|v_n| \approx 5 \times 10^{-3}$ на вершинке горбиков.

При рассмотрении неровностей с амплитудой $B = 5$, что больше критической, характер процесса плавления–намерзания качественно не меняется. Например, при малой разности температур воды и льда, $T_l = 2^\circ\text{C}$ и $T_s = -2^\circ\text{C}$, наблюдается аналогичная случаю $B = 1$ динамика границы фаз (см. рис. 3), но с немного более выраженной асимметрией – на правые стенки неровностей лед намерзает интенсивнее, чем на левые, см. рис. 6. Если посмотреть картину линий тока, то, например, при $t = 100$, над вершинками горбиков появляются зоны отрыва погранич-

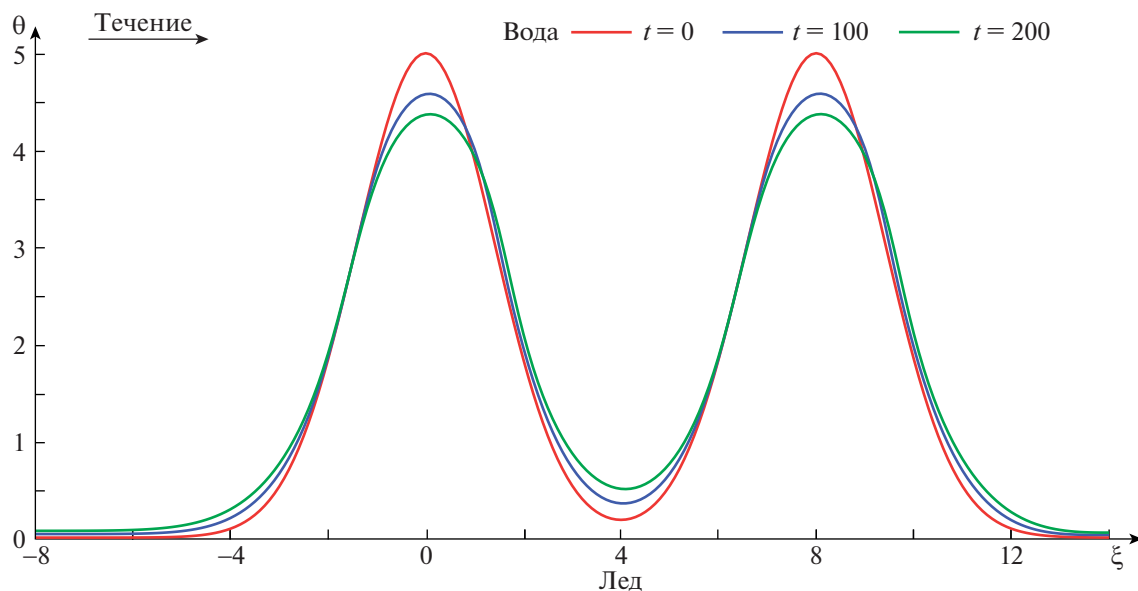


Рис. 6. Граница раздела фаз $h(t, \xi)$ в разные моменты времени: $B = 5$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, $T_l = 2^\circ\text{C}$.

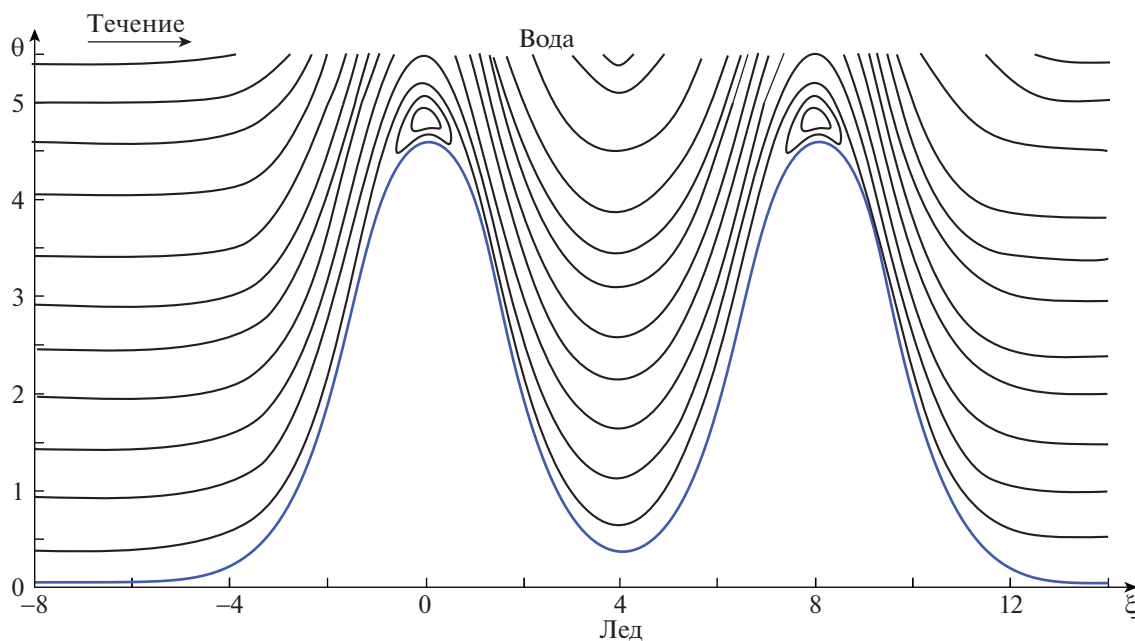


Рис. 7. Линии тока: $t = 100$, $B = 5$, $T_s = -2^\circ\text{C}$, $T_l = 2^\circ\text{C}$.

ного слоя с вихрями, см. рис. 7. Скорость движения границы раздела фаз также отличается от случая $B = 1$ (см. рис. 3) — на рис. 6 отчетливо видно, что на плоском участке границы раздела фаз скорость замерзания примерно совпадает со случаем на рис. 3, но скорость таяния вершинки больше. Средние значения безразмерной скорости из численного эксперимента: $|v_n| \approx 3.8 \times 10^{-4}$ на плоском участке и $|v_n| \approx 2.8 \times 10^{-3}$ на вершинке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена математическая модель фазового перехода с учетом наличия течения в жидкой фазе. С помощью построенной модели исследована динамика границы раздела фаз

при обтекании малых неровностей на ледяной поверхности с масштабами, характерными для двухпалубной структуры пограничного слоя. В частности, исследовано влияние характера течения (наличие зоны с отрывом пограничного слоя) и температуры жидкости на форму ледяной поверхности при обтекании ее водой.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00186, <https://rscf.ru/project/22-21-00186/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Danilov V.G., Makarova M.V.* Asymptotic and numerical analysis of the flow around a plate with small periodic irregularities // *Russ. J. Math. Phys.* 1994. V. 2. P. 49–56.
2. *Danilov V.G., Gaydukov R.K.* Double-deck structure of the boundary layer in problems of flow around localized perturbations on a plate // *Math. Notes*. 2015. V. 98. № 4. P. 561–571.
3. *Gaydukov R.K.* Double-deck structure in the problem of a compressible flow along a plate with small localized irregularities on the surface // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2018. V. 71. P. 59–65.
4. *Gaydukov R.K.* Double-deck structure in the fluid flow problem over plate with small irregularities of time-dependent shape // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2021. V. 89. P. 401–410.
5. *Neiland V.Ya.* Theory of laminar boundary layer separation in supersonic flow // *Fluid Dyn.* 1969. V. 4. № 4. P. 33–35.
6. *Stewartson K., Williams P.G.* Self-induced separation // *Proc. Royal Soc. A*. 1969. V. 312. P. 181–206.
7. *Smith F.T.* Laminar flow over a small hump on a flat plate // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 57. P. 803–824.
8. *Lipatov I.I.* Disturbed Boundary Layer Flow with Local Time-Dependent Surface Heating // *Fluid Dyn.* 2006. V. 41. № 5. P. 725–735.
9. *Lipatov I.I., Koroteev M.V.* Local temperature perturbations of the boundary layer in the regime of free viscous-inviscid interaction // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 707. P. 595–605.
10. *Lipatov I.I., Koroteev M.V.* Supersonic Boundary Layer in Regions with Small Temperature Perturbations on the Wall // *SIAM J. Appl. Math.* 2009. V. 70. № 4. P. 1139–1156.
11. *Aljohani A.F., Gajjar J.S.B.* Subsonic flow past localised heating elements in boundary layers // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 821. P. R2.
12. *Aljohani A.F., Gajjar J.S.B.* Transonic flow over localised heating elements in boundary layers // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 844. P. 746–765.
13. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *УМН*. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
14. *Danilov V.G., Gaydukov R.K.* Vortices in the Prandtl boundary layer induced by irregularities on a plate // *Russ. J. Math. Phys.* 2015. V. 22. № 2. P. 161–173.
15. *Danilov V.G., Gaydukov R.K.* Equations for velocity oscillations in problems of a fluid flow along a plate with small periodic irregularities on the surface for large Reynolds numbers // *Proc. Int. Conf. DAYS on DIFFRACTION 2018. IEEE*, 2018. P. 118–123.
16. *Danilov V.G., Gaydukov R.K.* Multideck structures of boundary layers in compressible flows // *Proc. Int. Conf. DAYS on DIFFRACTION 2019. IEEE*, 2019. P. 51–56.
17. *Гайдуков Р.К., Данилов В.Г.* Многопалубные структуры в задачах обтекания поверхностей с малыми периодическими возмущениями // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 2: Механика жидкости и газа. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 92–94.
18. *Mauss J.* Asymptotic Modelling for separating boundary layers // *Asymptotic Modelling in Fluid Mechanics. Lecture Notes in Physics*, vol 442. Springer, 1995. P. 239–254.
19. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.
20. *Meirmanov A.M.* The Stefan Problem. De Gruyter, 1992. 255 p.
21. *Caginalp G.* An analysis of a phase field model of a free boundary // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1986. V. 92. № 3. P. 205–245.
22. *Caginalp G.* Stefan and Hele-shaw type models as asymptotic limits of the phase field equations // *Phys. Rev. A*. 1989. V. 39. P. 5887–5896.
23. *Медведев Д.А., Ершов А.П.* Моделирование намерзания льда на подводной трубе газопровода // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.* 2013. Т. 13. № 4. С. 96–101.
24. *Makkonen L.* On the Methods To Determine Surface Energies // *Langmuir*. 2000. V. 16. № 20. P. 7669–7672.

25. *Ward C.A., Neumann A.W.* On the surface thermodynamics of a two-component liquid-vapor-ideal solid system // *J. Colloid and Interface Sci.* 1974. V. 49. № 2. P. 286–290.
26. *Spelt J.K., Absolom D.R., Neumann A.W.* Solid surface tension: The interpretation of contact angles by the equation of state approach and the theory of surface tension components // *Langmuir*. 1986. V. 2. № 5. P. 620–625.
27. *Della Volpe C., Siboni S., Morra M.* Comments on Some Recent Papers on Interfacial Tension and Contact Angles // *Langmuir*. 2002. V. 18. № 4. P. 1441–1444.
28. *Mazhukin V.I.* Kinetics and Dynamics of Phase Transformations in Metals Under Action of Ultra-Short High-Power Laser Pulses // *Laser Pulses: Theory, Technology, and Applications*. IntechOpen, 2012. P. 219–276.
29. *Rodway G.H., Hunt J.D.* Thermoelectric investigation of solidification of lead I. Pure lead // *J. Crystal Growth*. 1991. V. 112. № 2–3. P. 554–562.
30. *Plotnikov P.I., Starovoitov V.N.* The Stefan problem with surface tension as a limit of the phase field model // *Differ. Equat.* 1993. V. 29. № 3. P. 395–404.
31. *Danilov V.G., Omeľyanov G.A., Radkevich E.V.* Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase-field system // *Eur. J. Appl. Math.* 1999. V. 10. P. 55–77.
32. *Danilov V.G., Omeľyanov G.A., Shelkovich V.M.* Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves // *Asymptotic Methods of Wave and Quantum Problems*. AMS Transl. Ser. 2, Vol. 208. AMS, 2003. P. 33–165.
33. *Кикоин И.К.* Таблицы физических величин. Справочник. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
34. *Григорьев И.С., Мейлихов Е.З.* Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
35. *Кузнецов В.В., Усть-Качкинцев В.Ф.* Физическая и коллоидная химия: Учебное пособие. М.: Высшая школа, 1976. 390 с.
36. *Fernandez R., Barduhn A.J.* The growth rate of ice crystals // *Desalination*. 1967. V. 3. № 3. P. 330–342.
37. *Roache P.J.* Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. Hermosa Publishers, 1976. 648 p.
38. *Yapalparvi R.* Double-deck structure revisited // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2012. V. 31. P. 53–70.

УДК 532.546:536.421

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ КИПЕНИЯ ВОДЫ В ГЕОТЕРМАЛЬНОМ РЕЗЕРВУАРЕ

© 2023 г. Г. Г. Цыпкин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail: tsypkin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 05.06.2023 г.

После доработки 06.06.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Исследуется устойчивость покоящейся поверхности кипения воды в высокотемпературных породах, когда область воды расположена над областью пара. Показано, что решение неединственно и существуют два положения поверхности раздела. При изменении параметров решения сближаются и происходит слияние решений, а в некотором диапазоне параметров стационарное решение не существует. Методом нормальных мод исследована устойчивость положений поверхности раздела. Получено дисперсионное уравнение, которое исследовалось численно и аналитически. Показано, что переход к неустойчивости происходит при уменьшении давления в области пара или увеличении давления в области воды. Представлены бифуркационные диаграммы, иллюстрирующие слияние и несуществование решений, а также выделены части ветвей, соответствующие устойчивым и неустойчивым режимам течения.

Ключевые слова: геотермальный резервуар, поверхность кипения, капиллярное давление, неединственность, устойчивость

DOI: 10.31857/S1024708423600355, **EDN:** FZUXAM

Исследование геотермальных резервуаров обусловлено перспективами извлечением тепла Земли, добычей глубоко залегающих полезных ископаемых, а также изучением активности вулканических систем [1]. Как показывают натурные наблюдения, существует большое количество геотермальных систем, в которых область воды находится над областью пара [1, 2]. Такая конфигурация геотермальной системы объясняется как возможным существенным нагревом нижерасположенных пород, так и значительным падением давления в нижних пластах вследствие интенсивного отбора пара при эксплуатации геотермального резервуара. С точки зрения классической теории гидродинамической устойчивости расположение тяжелой жидкости над легкой является неустойчивым. Для объяснения устойчивого существования такой конфигурации в геотермальных системах были выдвинуты различные гипотезы [3].

В работе [4] было проведено теоретическое исследование устойчивости слоя воды над слоем пара в геотермальном резервуаре. Предполагалось, что нижняя граница пласта является контактной поверхностью с непроницаемыми породами, поверхность раздела между областями воды и пара является неподвижной и поток фаз через нее в невозмущенном состоянии отсутствует. Методом нормальных мод было получено дисперсионное соотношение, которое исследовалось численно. Показано, что рассматриваемая конфигурация устойчива, если проницаемость пород удовлетворяет соотношению $k < 4 \times 10^{-17} \text{ м}^2$. При больших значениях проницаемости система теряет устойчивость. В [5] задача была обобщена на случай, допускающий переток фаз через поверхность раздела в невозмущенном состоянии. В результате геотермальная система, в которой слой воды располагается над слоем пара, становится более устойчивой, а критическое значение проницаемости, соответствующее потере устойчивости, увеличивается более чем на порядок. Анализ устойчивости такой системы представлен также в [6].

Роль капиллярных сил на процессы в геотермальных резервуарах изучались в [7–9]. В [8, 9] представлены результаты экспериментов, в которых, используя полуэмпирические формулы, содержащие остаточную водонасыщенность, определялась величина капиллярного давления как функция проницаемости пород. Экспериментально установлено, что капиллярное давление существенно зависит от температуры. Математическое моделирование течений в геотермальных

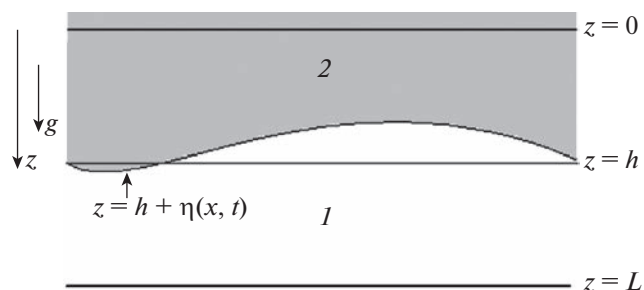


Рис. 1. Схема течения.

резервуарах и изменения параметров течений в зависимости от капиллярного давления проведены в [7]. Показано, что скорость фронта кипения выше в случае несмачиваемых пород. Действие капиллярных сил может приводить к нарушению связности однофазных областей, что определяет показатель остаточной насыщенности [10].

Поскольку добыча пара более выгодна с энергетической точки зрения, то возникает вопрос о реализации стабильного процесса кипения воды в пористой среде, выбирая нужный режим отбора пара. В настоящей работе рассмотрены изотермические режимы кипения воды в низкопроницаемом горизонтальном слое, заключенном между высокопроницаемыми слоями или трещинами. Из условий баланса массы и импульса в стационарном режиме кипения следует существование двузначного решения задачи определения положения фронта кипения. Исследуются условия существования фронта и его устойчивости. Показано, что в несмачиваемых породах поверхность фазового перехода может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим высокотемпературный геотермальный резервуар, состоящий из двух горизонтальных высокопроницаемых слоев (трещин), разделенных относительно низкопроницаемым слоем. Предположим, что термодинамика жидкости в верхнем слое $z \leq 0$ соответствует условиям существования воды, а в нижнем слое $z \geq L$ — условиям существования пара. Область пара может располагаться под областью воды вследствие более высокой температуры или более низкого давления, которое обусловлено интенсивным отбором пара при эксплуатации геотермального резервуара. Тогда в среднем низкопроницаемом слое должна существовать поверхность $z = h$, разделяющая область 1, насыщенную паром, и область 2, насыщенную водой (рис. 1).

Предположим, что вертикальный температурный градиент невелик и исследуем задачу об устойчивости поверхности раздела в изотермическом приближении. Такое приближение является асимптотикой при стремлении пористости к нулю, когда поглощение энергии при кипении воды компенсируется теплом горных пород, и, как показывают оценки, изменение температуры на поверхности фазового перехода мало и не влияет на гидродинамику течения. Если температура T в некоторой области высокотемпературных пород постоянна, то, используя уравнение Клаузиуса—Клапейрона (1.5), по заданной температуре находим значение давления $P_*(T)$, при котором происходит фазовый переход. Поскольку предполагается, что область воды расположена над областью пара, то давление в верхнем водонасыщенном слое должно быть выше давления фазового перехода, а давление в области пара ниже давления фазового перехода. Отсюда следует, что вода всегда движется вниз, и происходит кипение, а режим конденсации пара не реализуется.

Следуя [4], предположим несжимаемость воды и пара: $\rho_w = \text{const}$, $\rho_v = \text{const}$. Тогда течения в обеих областях описываются законами сохранения масс воды и пара и законом Дарси с учетом действия силы тяжести. Система основных уравнений для обеих областей имеет вид

$$\text{div } v_j = 0, \quad v_j = -\frac{k}{\mu_j}(\text{grad } P_j - \rho_j g), \quad j = v, w \quad (1.1)$$

Здесь v — вектор скорости фильтрации, ϕ — пористость, k — проницаемость, μ — вязкость, P — давление, Индексы w , v — вода и пар соответственно.

Уравнения, описывающие распределения давления в обеих областях, следуют из системы (1.1) и сводятся к уравнениям Лапласа

$$\Delta P_{v,w} = 0 \quad (1.2)$$

На поверхности фазового перехода выполняются условия баланса массы, импульса и уравнение Клаузиуса–Клапейрона термодинамического равновесия воды и пара

$$\phi \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) V_n = \frac{k}{\mu_v \rho_w} (\text{grad } P)_{n+} - \frac{k}{\mu_w} (\text{grad } P)_{n-} + \frac{k}{\mu_w} \rho_w g \left(1 - \frac{\mu_w \rho_v^2}{\mu_v \rho_w^2} \right) \quad (1.3)$$

$$P_v + P_c = P_w, \quad P_v = P_* \quad (1.4)$$

$$\frac{P_*}{P_a} = \exp \left(A + \frac{B}{T_*} \right) \equiv f(T_*), \quad A = 12.512, \quad B = -4611.73 \quad (1.5)$$

Здесь V – скорость фронта, $P_a = 10^5$ Па – атмосферное давление, P_c – капиллярное давление. Индексы соответствуют: n – нормали, $*$ – величинам на фронте.

2. БАЗОВОЕ РЕШЕНИЕ

Пусть P_0 – давление в верхнем высокопроницаемом слое $z = 0$, а P^0 – давление в нижнем высокопроницаемом слое $z = L$. Если P_0 и P^0 являются постоянными величинами, то можно предположить, что поверхность кипения воды займет некоторое стационарное равновесное положение $z = h$, $0 < h < L$. Тогда, с учетом (1.4), стационарное решение уравнений (1.2) имеет вид

$$P_{wst} = P_0 + \frac{P_* + P_c - P_0}{h} z, \quad P_{vst} = \frac{P^0 - P_*}{L - h} z + \frac{LP_* - hP^0}{L - h} \quad (2.1)$$

Соответственно, условие баланса массы (1.3) принимает вид

$$\frac{\mu_w \rho_v}{\mu_v \rho_w} \left(\frac{dP}{dz} \right)_+ - \left(\frac{dP}{dz} \right)_- + \rho_w g \left(1 - \frac{\mu_w \rho_v^2}{\mu_v \rho_w^2} \right) = 0$$

или, после подстановки решений (2.1)

$$\frac{\mu_w \rho_v}{\mu_v \rho_w} \frac{P_* + P_c - P_0}{h} - \frac{P^0 - P_*}{L - h} + \rho_w g \left(1 - \frac{\mu_w \rho_v^2}{\mu_v \rho_w^2} \right) = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) сводится к квадратному уравнению для определения положения поверхности кипения, которое в безразмерной форме имеет вид

$$H^2 - \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_3}{R_2} \right) H + \frac{R_3}{R_2} = 0 \quad (2.3)$$

$$R_1 = \frac{\mu_w \rho_v}{\mu_v \rho_w} \left(\frac{P^0}{P_*} - 1 \right), \quad R_2 = \frac{\rho_w g L}{P_*} \left(1 - \frac{\mu_w \rho_v^2}{\mu_v \rho_w^2} \right), \quad R_3 = 1 + \frac{P_c}{P_*} - \frac{P_0}{P_*}$$

Заметим, что в стационарном случае в уравнение (2.2) пористость ϕ и проницаемость k не входят. Поэтому положение поверхности кипения, которое определяется из квадратного уравнения (2.3), не зависит от этих параметров.

Квадратное уравнение имеет два решения. Для нейтральной или смачиваемой водой пористой среды один больший корень H_1 положительный, а меньший H_2 – отрицательный. Для несмачиваемых пород оба корня могут быть положительными. Положения границы раздела, соответственно корни уравнения (2.3), зависят от толщины слоя L , значений давления на верхней и нижней границах, капиллярного давления P_c и температуры горных пород T , которая определяет давление кипения P_* . Если рассмотреть конкретный пласт, то управлять процессом кипения можно только, меняя значения давления P_0 и P^0 на границах. Вычисления показывают, что положение поверхности раздела более чувствительно к изменениям давления P^0 на нижней границе.

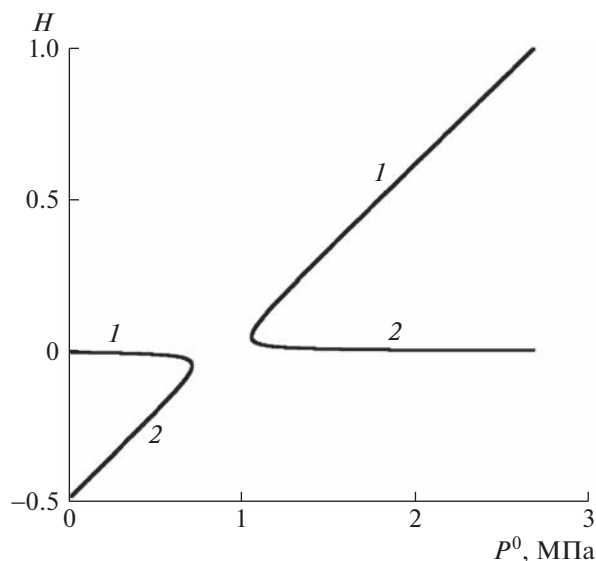


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая неединственность положения поверхности фазового перехода. 1, 2 — ветви решения H_1 и H_2 . Решение перестает существовать при достижении критических значений параметров: $L = 20$ м, $T_0 = 500$ К, $P_c = 0.02$ МПа, $P_0 = 2.7$ МПа, $P^0 = 1.058$ МПа.

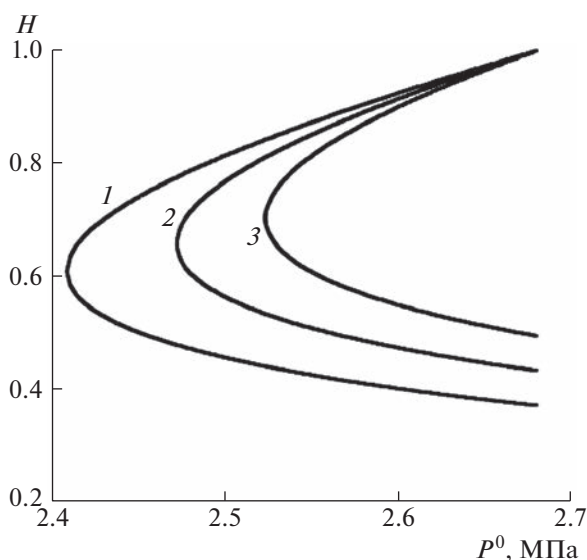


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма при больших значениях капиллярного давления. 1–3 — $P_c = 0.08, 0.09, 0.1$ МПа. Остальные параметры как на рис. 2.

На бифуркационной диаграмме (рис. 2) представлены значения корней уравнения (2.3) как функции давления P^0 при следующих значениях параметров: $T = 500$ К, $P_* = 2.68$ МПа, $P_0 = 2.7$ МПа, $P_c = 0.02$ МПа. Корни уравнения H_1 и H_2 имеют две ветви. Численные эксперименты показывают, что при больших значениях давления P^0 оба корня положительны, при умеренных — решение отсутствует, а при малых значениях оба корня отрицательны. Физический смысл имеют только положительные значения корней. Два других случая соответствуют либо наличию нестационарного режима кипения, либо невозможности существования фронта кипения и области пара внутри низкопроницаемого слоя пористой среды.

Расчеты показывают, что при увеличении капиллярного давления значения H_1 и H_2 уменьшаются, а область существования стационарного решения сжимается (рис. 3). При больших значениях капиллярного давления в несмачиваемых породах происходит слияние двух решений, ко-

гда дискриминант квадратного уравнения становится равным нулю, и решение перестает существовать. Расчеты показывают, что уменьшение давления P^0 в нижнем слое $z > L$ приводит к снижению уровня поверхности кипения, соответствующей первому корню H_1 и повышению уровня поверхности, соответствующей второму корню H_2 , так что решения сближаются. Падение давления P^0 ниже критического значения при фиксированных остальных параметрах приводит к слиянию корней и стационарный режим кипения становится нереализуемым. В нейтральных и смачиваемых породах решение единственно, т.к. меньший корень всегда меньше нуля. При уменьшении давления в нижнем слое или увеличении давления в верхнем слое единственное стационарное решение задачи также перестает существовать. Это объясняется тем, что хотя низкое давление P^0 вызывает кипение, но оно также инициирует интенсивный поток воды из верхнего слоя, который подавляет кипение в низкопроницаемом слое.

3. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Исследуем устойчивость стационарного решения методом нормальных мод. Пусть $P_j \equiv P_j(\xi, z, t) = P_{jst} + \delta P_j$, $j = v, w$, $\eta = \eta(z, t)$ – возмущение плоского фронта $z = h$. Возмущения стационарного решения представим в виде:

$$\delta P_{v,w} = P'_{v,w}(z) \exp(ikz + \sigma t), \quad \eta = \eta' \exp(ikz + \sigma t), \quad \eta' = \text{const}$$

Из уравнений (1.2) следуют уравнения для амплитуд $P'_{v,w}$

$$\frac{d^2 P'_{v,w}}{dz^2} - \kappa^2 P'_{v,w} = 0 \quad (3.1)$$

Учитывая граничные условия для возмущений

$$z = h: \quad \delta P_v = 0, \quad z = 0: \quad \delta P_w = 0$$

решения уравнений (3.1) имеют вид

$$\begin{aligned} P'_v &= P'_+ \frac{\exp[\kappa(L-z)] - \exp[-\kappa(L-z)]}{\exp[\kappa(L-h)] - \exp[-\kappa(L-h)]} \\ P'_w &= P'_- \frac{\exp(\kappa z) - \exp(-\kappa z)}{\exp(\kappa h) - \exp(-\kappa h)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где P'_+ и P'_- – постоянные.

Уравнение баланса массы на поверхности кипения (1.3) для возмущений имеет вид

$$\phi \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) \eta = \frac{k}{\mu_v} \frac{\rho_v}{\rho_w} \text{grad}(\delta P_v) - \frac{k}{\mu_w} \text{grad}(\delta P_w) \quad (3.3)$$

Из условий баланса импульса для возмущенной поверхности раздела имеем

$$P'_v + \frac{dP_{vst}}{dz} \eta' = 0, \quad P'_w + \frac{dP_{wst}}{dz} \eta' = 0$$

или

$$P'_w = -\frac{P_* + P_c - P_0}{h} \eta', \quad P'_v = -\frac{P^0 - P_*}{L - h} \eta' \quad (3.4)$$

Подставляя соотношения (3.4) в граничное условие (3.3), на поверхности фазового перехода получаем дисперсионное уравнение, которое в безразмерной форме приводится к виду $\Sigma = \sigma L^2 / \omega_v$, $K = \kappa L$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) \Sigma &= \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P_1 - 1}{1 - H} K \text{cth}(K(1 - H)) + \frac{\omega_w}{\omega_v} \frac{1 + P_{cc} - P_2}{H} K \text{cth}(KH) \\ P_1 &= \frac{P^0}{P_*}, \quad P_2 = \frac{P_0}{P_*}, \quad P_{cc} = \frac{P_c}{P_*}, \quad \omega_v = \frac{k P_*}{\phi \mu_v}, \quad \omega_w = \frac{k P_*}{\phi \mu_w} \end{aligned} \quad (3.5)$$

В изотермическом приближении из термодинамического условия существования воды и пара, когда водонасыщенная область располагается над областью пара, следует $P^0 < P_*$ и $P_0 > P_*$. Поэтому из уравнения (3.5) получаем, что правая часть может принимать положительные значения только в несмачиваемых породах, когда $P_c > 0$. Соответственно, Σ становится больше нуля и поверхность кипения является неустойчивой.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим асимптотические условия перехода к неустойчивости, когда волновое число K стремится к нулю или бесконечности. Используя асимптотическую формулу для гиперболического котангенса, получаем в пределе при $K \rightarrow 0$

$$\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w}\right) \Sigma = \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P_1 - 1}{(1 - H)^2} + \frac{\mu_v}{\mu_w} \frac{1 + P_{cc} - P_2}{H^2} \quad (4.1)$$

При $K \rightarrow \infty$ имеем

$$\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w}\right) \Sigma = \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P_1 - 1}{1 - H} K + \frac{\mu_v}{\mu_w} \frac{1 + P_{cc} - P_2}{H} K \quad (4.2)$$

Асимптотические дисперсионные уравнения (4.1) и (4.2) показывают, что при стремлении волнового числа к нулю скорость роста возмущений Σ стремится к константе, а при $K \rightarrow \infty$ скорость роста Σ растет линейно с K .

Критерии перехода к неустойчивости соответствуют условию нейтральной устойчивости $\Sigma = 0$ и принимают вид, записанный для наглядности в размерной форме

$$K \rightarrow 0 \quad \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P^0 - P_*}{(1 - H)^2} + \frac{\mu_v}{\mu_w} \frac{P_* + P_c - P_0}{H^2} = 0 \quad (4.3)$$

$$K \rightarrow \infty \quad \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P^0 - P_*}{1 - H} + \frac{\mu_v}{\mu_w} \frac{P_* + P_c - P_0}{H} = 0 \quad (4.4)$$

Условия потери устойчивости (4.3) и (4.4) не совпадают. Отсюда следует, что спонтанный переход к неустойчивости, когда одновременно начинается рост всех мод [11], в сформулированной задаче не реализуется.

Проведенные расчеты дисперсионного уравнения (3.5) показывают, что нижняя ветвь решения, соответствующая корню H_2 , всегда неустойчива. Верхняя ветвь может быть как устойчивой, так и неустойчивой, что зависит, главным образом, от значения капиллярного давления. При добыче пара из геотермального месторождения интенсивность отбора пара определяется давлением P^0 в нижнем высокопроницаемом пласте или трещине. Исследуем влияние P^0 на устойчивость фронта кипения.

На рис. 4 приведена характерная деформация дисперсионной кривой при большом значении капиллярного давления $P_c = 0.8 \times 10^5$ Па, когда поверхность кипения теряет устойчивость при уменьшении давления P^0 . Кривая 1 соответствует устойчивому режиму, когда $P^0 = 2.461 \times 10^6$ Па. При достижении критического значения давления $P^0 = 2.451 \times 10^6$ Па кривая 2 на рис. 2 практически совпадает с осью абсцисс, но переход к неустойчивому режиму происходит при бесконечном волновом числе, когда удовлетворяется соотношение (4.2). При дальнейшем снижении давления дисперсионная кривая переходит в область положительных значений скорости роста возмущений Σ и поверхность раздела становится неустойчивой.

На бифуркационной диаграмме (рис. 2) ветвь кривой 1, соответствующая большему корню и лежащая в верхней полуплоскости, всегда устойчива, поскольку капиллярное давление мало и, как показывают вычисления, Σ всегда отрицательна. Нижняя ветвь (кривая 2) всегда неустойчива. При больших значениях капиллярного давления поверхность раздела может быть как устойчивой, так и неустойчивой. На рис. 5 сплошной линией обозначены части кривой, соответствующие устойчивым решениям, а пунктирная часть линий — неустойчивым. Видно, неустойчивость фронта подавляется увеличением давления пара, одновременно со снижением уровня

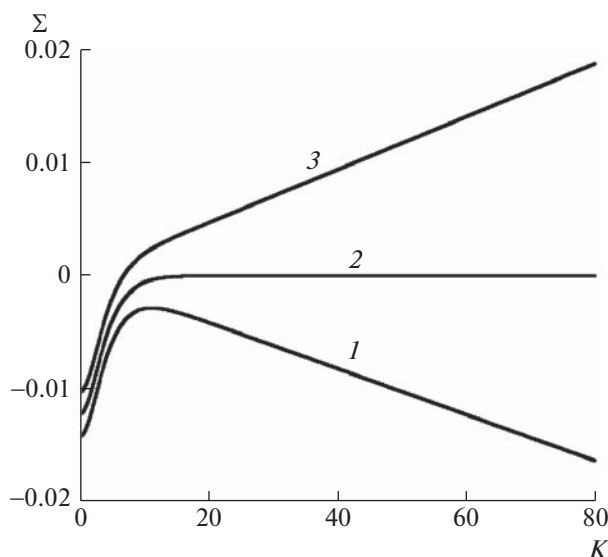


Рис. 4. Дисперсионные кривые, соответствующие состоянию устойчивости (1), нейтральному положению (2) и неустойчивому состоянию (3). $P^0 = 2.441, 2.451, 2.461$ МПа, $P_c = 0.08$ МПа. Остальные параметры как на рис. 2.

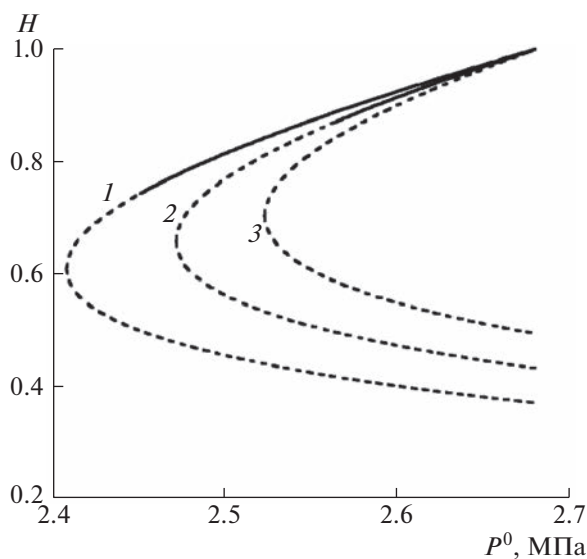


Рис. 5. Пунктирные части кривых бифуркационной диаграммы соответствуют параметрам, при которых возникает неустойчивость. Остальные параметры как на рис. 2.

поверхности раздела. С ростом капиллярного давления часть кривых, соответствующая неустойчивым режимам, увеличивается. При капиллярном давлении $P_c = 10^5$ Па вся кривая 3 соответствует неустойчивым режимам. Дальнейшее повышение давления пара невозможно в силу термодинамического условия его существования $P^0 < P_*$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована задача об устойчивости фронта кипения в геотермальном резервуаре в изотермическом приближении, когда область воды находится над областью пара. Показано, что в

несмачиваемых породах решение стационарной задачи двузначно. Методом нормальных мод проведено исследование устойчивости покоящегося фронта кипения. Полученное дисперсионное соотношение исследовано численно и асимптотически. Найдено, что одно решение всегда неустойчиво, а другое может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Численные эксперименты показали, что переход к неустойчивости реализуется при бесконечно больших значениях волнового числа. Представлена бифуркационная диаграмма, на которой выделены части кри-вых, соответствующие устойчивому и неустойчивому состояниям поверхности кипения.

Большие значения волнового числа соответствуют малым линейным размерам возмущений, которые лежат за рамками применимости теории фильтрации. Поэтому полученный критерий потери устойчивости указывает границы существования устойчивого решения, но не дает характерный размер наиболее неустойчивого возмущения. Аналогичный вывод также справедлив для спонтанного перехода к неустойчивости Саффмана–Тейлора [11], когда все моды становятся одновременно неустойчивыми. Было показано [12], что развитие возмущений на нелинейной стадии существенно зависит от начальных условий для возмущений, которые определяются наиболее неустойчивой модой возмущения. Поэтому для расчетов развития нелинейных возмущений требуется усовершенствование математических моделей, в которых происходит спонтанный переход к неустойчивости или переход при бесконечно больших волновых числах.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 21-11-00126.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grant M., Bixley P.F. Geothermal reservoir engineering. London: Acad. Press, 2011. 378 p.
2. White D.E., Muffler L.J.P., Truesdell A.H. Vapor-dominated hydrothermal systems compared with hot water systems // Econ. Geol. 1971. V. 66. P. 75–97.
3. Grant M.A. Geothermal reservoir modeling // Geothermics. 1983. V. 12. P. 251–263.
4. Schubert G., Straus J.M. Gravitational stability of water over steam in vapor-dominated geothermal system // J. Geophys. Res. 1980. V. 85. № B11. P. 6505–6512.
5. Tsyppkin G.G., Il'ichev A.T. Gravitational stability of the water-vapor phase transition interface in geothermal systems // TiPM. 2004. V. 55. P. 183–199.
6. Khan Z.H., Pritchard D. Liquid–vapour fronts in porous media: Multiplicity and stability of front positions // Int. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 61. P. 1–17.
7. Tsyppkin G.G., Calore C. Role of capillary forces in vapour extraction from low permeability, water saturated geothermal reservoir // Geothermics. 2003. V. 32. P. 219–237.
8. Li K., Horne R.N. Systematic study of steam–water capillary pressure // Geothermics. 2007. V. 36. P. 558–574.
9. Li K., Horne R.N. Estimation of wettability in gas-liquid-rock systems // Geothermics. 2008. V. 37. P. 429–443.
10. Tsyppkin G.G., Shargatov V.A. Influence of capillary pressure gradient on connectivity of flow through a porous medium // Int. J. Heat Mass Transfer. 2018. V. 127. P. 1053–1063.
11. Saffman P.G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. R. Soc. Lond. A 1958. V. 245. P. 312–329.
12. Soboleva E.B. Instability Problems and Density-Driven Convection in Saturated Porous Media Linking to Hydrogeology: A Review // Fluids. 2023. V. 36. № 8. 28 p.

УДК 532.59

ЧАСТОТЫ И ПРОФИЛИ СТОЯЧИХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

© 2023 г. В. А. Калиниченко^а

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

e-mail: kalin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 17.05.2023 г.

После доработки 06.06.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Представлены новые результаты экспериментов по исследованию влияния плавающей тонкой пластины на регуляризацию стоячей гравитационной волны Фарадея на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде. Показано, что увеличение толщины плавающей пластины существенно сказывается как на собственной частоте колебаний гидроупругой системы, так и на форме профилей наблюдаемых стоячих изгибно-гравитационных волн. При толщине пластины ниже критического значения форма волны описывается теорией нелинейных гравитационных волн; при больших толщинах следует использовать в качестве аппроксимирующих зависимостей приближение “сухой балки”.

Ключевые слова: разрушающиеся поверхностные гравитационные волны Фарадея, плавающая пластина, изгибно-гравитационные волны, гидроупругость, дисперсионное уравнение

DOI: 10.31857/S1024708423600306, **EDN:** FZYONJ

Эксперименты [1] по изучению эффекта плавающей пластины на разрушение и регуляризацию гравитационной волны Фарадея на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде показали, что стоячие изгибно-гравитационные волны в исследуемой гидроупругой системе (плавающая пластина – вода) определяются толщиной пластины: при малой толщине превалирует гравитационная волна, при большой – волна изгибная.

Возбуждаемые при параметрическом резонансе колебания жидкости (гравитационные волны) обуславливают изгибные колебания пластины за счет работы обобщенных гидродинамических сил со стороны гравитационной волны. Интерпретация данных эксперимента [1] в рамках линейной теории упругости [2–4] позволила оценить энергозатраты гравитационной волны на изгиб пластины и ее критическую толщину, при которой колебания гидроупругой системы отсутствуют. Плавающую пластину можно рассматривать как своеобразный диссипативный элемент для волн гравитационных; именно энергозатратами на поддержание изгибных колебаний пластины определяется регуляризация разрушающихся волн Фарадея.

Цель настоящей работы – исследование в условиях лабораторного эксперимента частотных характеристик гидроупругой системы, определяемых толщиной и свойствами материала плавающей пластины, а также сравнение профилей гравитационных и изгибно-гравитационных волн. Полученные результаты могут способствовать решению прикладной проблемы определения толщины ледового покрова по частоте изгибно-гравитационных волн в маргинальной зоне океана [5–7].

1. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Аналогично [1] влияние плавающей пластины на колебания жидкости исследовалось для второй моды ($n = 2$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде длиной $L = 50$ см и шириной $W = 4$ см. В экспериментах использовались пластины из пенополиэтилена и пенополистирола, характеристики которых приведены в табл. 1. Пластины имели длину 49.5 см и ширину 3.5 см.

Таблица 1. Параметры используемых пластин

Материал	Плотность, ρ_p (г/см ³)	Модуль упругости E , дин/см ² (МПа)	Толщина h_p (см)	Цилиндрическая жесткость, $D = \frac{Eh_p^3}{12(1-\nu^2)}$ (дин см)
Пенополиэтилен	$2.5-3 \times 10^{-2}$	2.6×10^6 (0.26)	0.09–1.8	$300-2 \times 10^6$
Пенополистирол	3.5×10^{-2}	$0.5-1.5 \times 10^8$ (5–15)	0.3	4×10^5

Отметим, что вследствие малой плотности ρ_p пенополиэтилена и пенополистирола по сравнению с плотностью воды ($\rho_w = 1$ г/см³) пластины из указанных материалов имели большую избыточную плавучесть в исследуемой гидроупругой системе, и при статическом равновесии глубина погружения пластины ($\sim h_p \rho_p / \rho_w$) мала. Для пластины максимальной толщины 2 см эта глубина порядка 0.03 см, и в статическом равновесии системы ею можно пренебречь.

Аналогично [1, 8, 9] исследовались двумерные волновые движения в режиме основного резонанса Фарадея, когда частота вертикальных колебаний сосуда Ω в два раза превышала частоту возбуждаемых изгибно-гравитационных волн. Параметрическое возбуждение волн осуществлялось при изменении частоты Ω в диапазоне 18–26 с⁻¹, для которого крутизна $\Gamma = H/\lambda$ стоячей поверхностной волны оценивалась интервалом 0.02–0.4. Здесь $\lambda = L = 50$ см – длина волны; H – высота волны, определяемая как расстояние между ложбиной волны и ее гребнем. В условиях эксперимента при амплитуде вертикальных колебаний сосуда $s = 0.75$ см перегрузка $\varepsilon = s\Omega^2/g$ изменялась от 0.24 до 0.52.

Проведены две серии экспериментов, для которых глубина воды составляла $h = 5$ и 15 см; при длине второй моды гравитационной волны $\lambda = 50$ см отношение вертикального масштаба задачи к горизонтальному составляло $h/\lambda = 0.1$ и 0.3.

Регистрация волновых движений системы пластина – жидкость производилась посредством фотокамеры Canon PowerShot SX50HS со скоростью видеосъемки 30 и 120 кадров/с. Для обработки видеоматериалов использовалась программа ImageJ. Эксперименты проводились при температуре 20–22°C.

В опытах собственная частота гравитационных и изгибно-гравитационных волн определялась следующим образом. На одной из резонансных частот Ω колебаний сосуда возбуждалась вторая волновая мода. Затем вибростенд выключался, и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводилась видеосъемка процесса затухания волновых движений воды / гидроупругой системы. Поскольку частота волн существенно превосходит коэффициент затухания, то предполагалось, что процесс затухания волн происходит с собственной частотой. Это позволило по материалам видеосъемки затухающих волн оценить собственную частоту с точностью 5–10%; кроме того, измерялась частота волн, высоты которых не превосходили 3–4 см.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Эксперименты показали, что наличие плавающей пластины на свободной поверхности воды приводит к регуляризации разрушающихся стоячих гравитационных волн – рис. 1. Результаты измерений собственных частот наблюдаемых волн приведены на рис. 2.

Для двух значений глубины воды $h = 5$ и 15 см на рис. 2 представлены экспериментальные зависимости собственной частоты стоячей изгибно-гравитационной волны от толщины плавающей пластины из пенополиэтилена (1, 2) и пенополистирола (3). Видно, что с ростом h_p частота ω увеличивается, причем нижняя граница диапазона изменения толщины определяется значением $h_p = 0$ (гравитационные волны), а верхняя граница – критической толщиной $h_p = 1.8$ см, при превышении которой колебания гидроупругой системы отсутствуют.

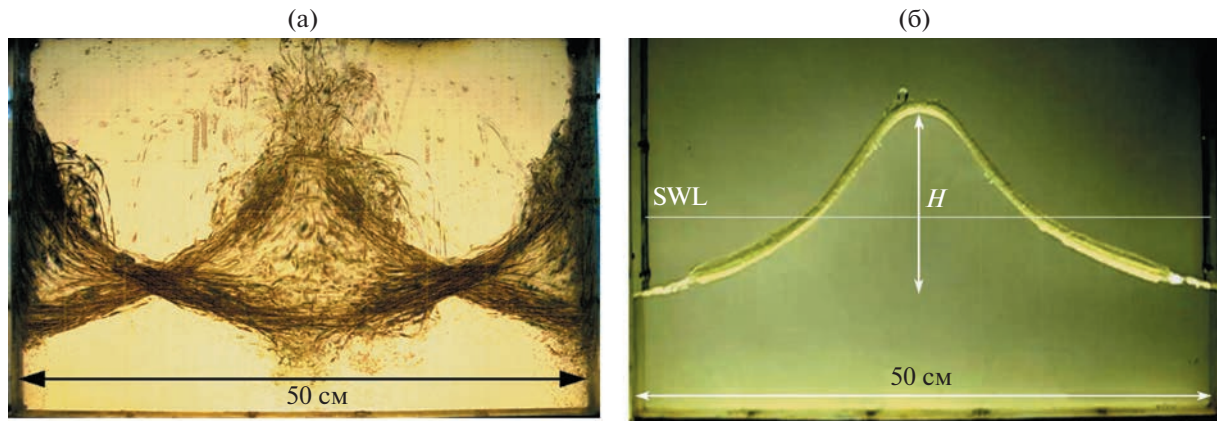


Рис. 1. (а) Разрушающаяся волна на свободной поверхности воды глубины $h = 15$ см и (б) регулярная изгибно-гравитационная волна высоты $H = 13$ см, толщина пластины $h_p = 0.5$ см: частоты волн $\omega = 10.10$ с⁻¹; скорость съемки 30 к/с; огибающие получены при наложении 60 кадров (три периода волны).

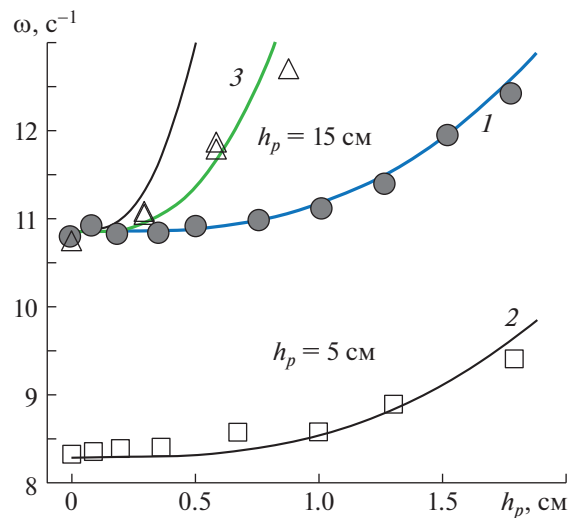


Рис. 2. Зависимость собственной частоты изгибно-гравитационных волн от толщины пластины при глубине воды $h = 5$ и 15 см: 1, 2 – пенополиэтилен; 3 – пенополистирол; кривые – расчет по соотношению (2.1).

При $h = 5$ и 15 см для чисто гравитационных волн ($h_p = 0$) измеренные собственные частоты равны $\omega_0 = 8.34$ и 10.78 с⁻¹ соответственно. Оценки частот по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{gkthkh}$$

дают значения $\omega_0 = 8.29$ и 10.85 с⁻¹. Отметим, что для случая $h = 5$ см (т.е. $h/\lambda = 0.1$) приближение мелкой воды [10, 11] не применимо, поскольку рассчитанная частота $\omega_0 = k\sqrt{gh} = 8.80$ с⁻¹ значительно выше экспериментального значения 8.34 с⁻¹.

При увеличении толщины пластины из пенополиэтилена (данные 1, 2) до значения $h_p \leq 0.51$ см собственная частота изгибно-гравитационных практически совпадает с ω_0 и не превосходит значений 10.91 и 8.45 с⁻¹. Таким образом, в случае пластины из пенополиэтилена при $h_p \leq 0.51$ см собственная частота изгибно-гравитационной волны совпадает с частотой волны гравитационной. При дальнейшем увеличении h_p наблюдается быстрый рост частоты ω , которая при $h_p = 1.79$ см составляет $\omega = 9.42$ и 12.42 с⁻¹.

В экспериментах также использовались пластины из пенополистирола, модуль упругости которого почти на два порядка превосходит соответствующую величину для пенополиэтилена (табл. 1). Данные 3 показывают, что уже при $h_p = 0.3$ см частота изгибно-гравитационных волн составляла величину $\omega = 11.09 \text{ с}^{-1}$, а при $h_p = 0.9$ см — $\omega = 12.73 \text{ с}^{-1}$; какие-либо волновые движения отсутствовали при $h_p > 1.0$ см.

Для интерпретации полученных экспериментальных результатов используем линейную теорию гидроупругости [2, 3, 12]. В одномодовом приближении частота ω изгибно-гравитационных волн связана с толщиной пластины h_p следующим образом

$$\omega^2 = \frac{Ek^5 h_p^3 + 12gk(1 - \nu^2)\rho_w}{12(1 - \nu^2)(kh_p\rho_p + \rho_w \text{cth}kh)}, \quad (2.1)$$

где для настоящего эксперимента $n = 2$; $L = 50$ см; $k = n\pi/L = 0.126 \text{ см}^{-1}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; ускорение силы тяжести $g = 981.7 \text{ см/с}^2$; плотность воды $\rho_w = 1 \text{ г/см}^3$; ρ_p, E — плотность и модуль упругости материала пластины (табл. 1). Отметим, что при $h_p = 0$ формула (2.1) определяет частоту ω_0 гравитационных волн.

Кривые на рис. 2 соответствуют рассчитанным по (2.1) зависимостям частоты $\omega(h_p)$ волн от толщины h_p пластины. Если в случае пластины из пенополиэтилена для частоты изгибно-гравитационных волн получено неплохое соответствие между расчетными и экспериментальными оценками (1, 2), то для пенополистирола (3) наилучшее соответствие между теорией и экспериментом достигается при наименьшем значении модуля упругости материала $0.5 \times 10^8 \text{ дин/см}^2$ (см. табл. 1, по данным производителя).

На рис. 3 а, б для двух глубин жидкости приведены профили волн максимального развития при $h_p = 1$ см. Из сравнения их с чисто гравитационными волнами (в, г) следует, что для изгибно-гравитационных волн отсутствуют асимметрия профиля и заострение гребня.

Для описания профиля стоячих гравитационных волн используем переменные Лагранжа (a, b, t) ; во втором приближении [13, 14] координаты (x, y) частиц жидкости на свободной поверхности ($b = 0$) имеют вид

$$\begin{cases} x = a - H \frac{\text{ch}kh}{2\text{sh}kh} \sin ka \cos \omega_0 t + H^2 k \frac{\sin 2ka}{32\text{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\omega_0 t) - \\ - \frac{3}{64} H^2 k \frac{\text{ch}2kh}{\text{sh}^4 kh} \sin 2ka \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{16} H^2 k \frac{\text{ch}2kh}{\text{sh}^2 kh} \sin 2ka, \\ y = \frac{H}{2} \cos ka \cos \omega_0 t + H^2 k \frac{\text{sh}2kh}{32\text{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\omega_0 t) + \\ + \frac{3}{64} H^2 k \frac{\text{sh}2kh}{\text{sh}^4 kh} \cos 2ka \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{16} H^2 k \frac{1}{\text{sh}2kh} \cos 2ka. \end{cases} \quad (2.2)$$

На рис. 3 з, ж для сравнения приведены рассчитанные по (2.2) (кривые) и экспериментальные (точки) профили волн максимального развития, которые практически совпадают.

Применение формул (2.2) для изгибно-гравитационных волн дает отрицательный результат при сопоставлении с данными эксперимента — пунктирные кривые на рис. 3 д, е, причем наиболее сильно профили отличаются в случае малой глубины жидкости (е).

С математической точки зрения процедура построения выражений, описывающих профили изгибно-гравитационных волн, включает решение дисперсионного уравнения (2.1) относительно волнового числа k , задания определяющей профиль функции и нахождения входящих в нее констант. В случае конечной глубины жидкости решение находится численно. Задача несколько упрощается в длинноволновом приближении [10, 11] — корни дисперсионного уравнения находятся аналитически. Для определения профиля двумерных изгибно-гравитационных волн используется функция

$$y(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx + A_3 \text{sh}kx + A_4 \text{ch}kx \quad (2.3)$$

Применим для описания наблюдаемых в эксперименте волн в качестве аппроксимирующей функцию (2.3). Отметим, что в теории упругости выражение (2.3) описывает изгибные колебания балки со свободными концами в вакууме — “сухая балка”.

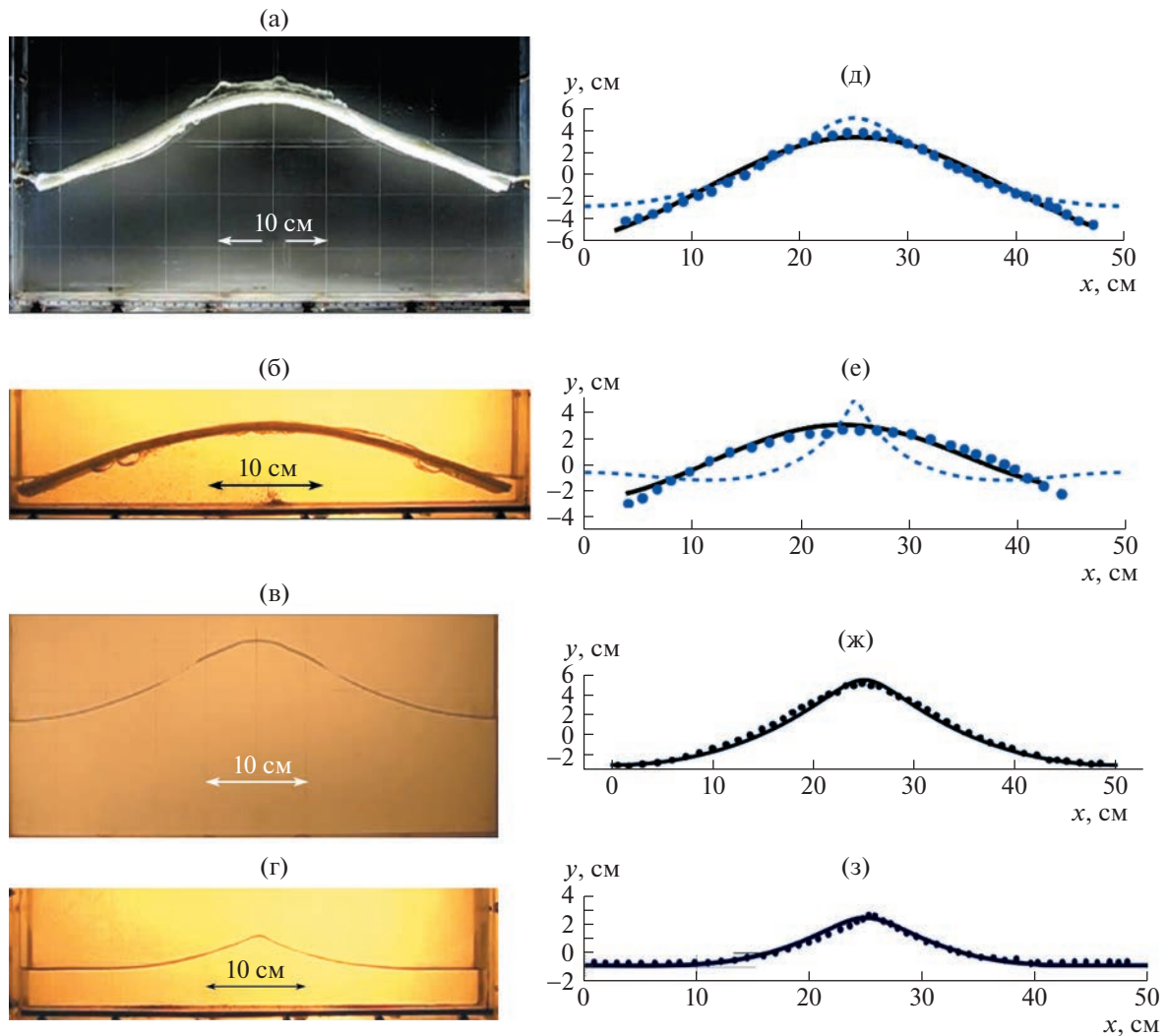


Рис. 3. Профили максимального развития изгибно-гравитационных волн (а, б) при толщине пластины $h_p = 1$ см ($h = 5$ и 15 см, $H = 8$ и 5.6 см) и гравитационных волн $h_p = 0$ (в, г) ($h = 5$ и 15 см, $H = 8.6$ и 4 см); (д–з) – экспериментальные (точки) и рассчитанные (сплошные и пунктирные кривые) профили.

Значения констант $A_1 - A_4$, найденные при аппроксимации данных эксперимента, приведены в табл. 2.

Из рис. 3 д, е следует, что наблюдаемые в эксперименте волны можно отнести к волнам изгибным, поскольку описываются (2.3) – сплошные кривые. Аналогичный вывод можно сделать и для изгибно-гравитационных волн при толщине пластины $h_p = 1.8$ см – рис. 4.

Анализ волновых профилей показал, что при толщине пластины не более 0.6 см колебания системы пластина – вода определяются волнами гравитационными. На рис. 5 показана изгибно-

Таблица 2. Значения $A_1 - A_4$ (см) при $k = 0.126 \text{ см}^{-1}$

h_p (см)	h (см)	A_1	A_2	A_3	A_4
1.0	15	–0.09	–3.56	2.48	–2.48
Рис. 3, д					
1.0	5	0.46	–2.93	–0.26	0.27
Рис. 3, е					
1.8	15	0.5	–3.87	1.74	–1.75
Рис. 4					

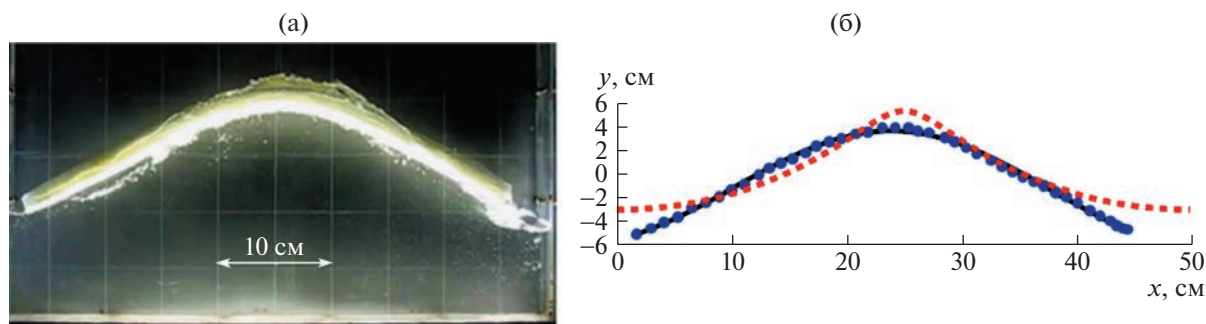


Рис. 4. Наблюдаемый в эксперименте (а) и рассчитанный (б) профиль изгибно-гравитационной волны при толщине пластины $h_p = 1.8$ см ($h = 15$ см, $H = 8.4$ см): пунктирная и сплошная кривые — расчет по (2.2) и (2.3).

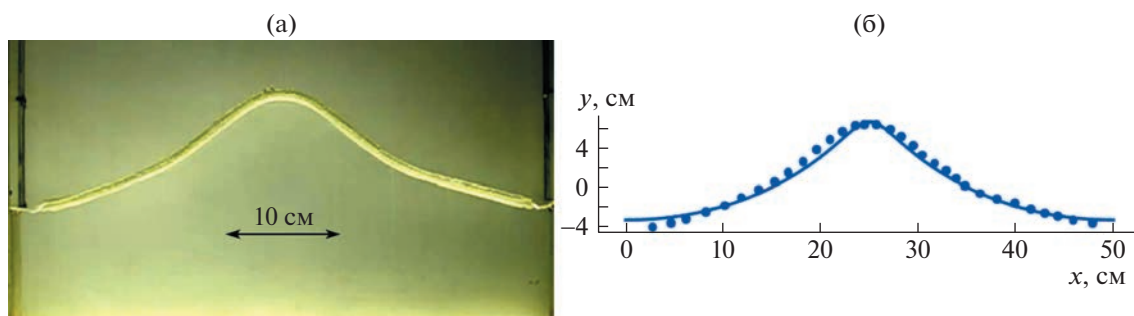


Рис. 5. Наблюдаемый в эксперименте (а) и рассчитанный (б) профиль гравитационной волны при толщине пластины $h_p = 0.51$ см ($h = 15$ см, $H = 9.9$ см).

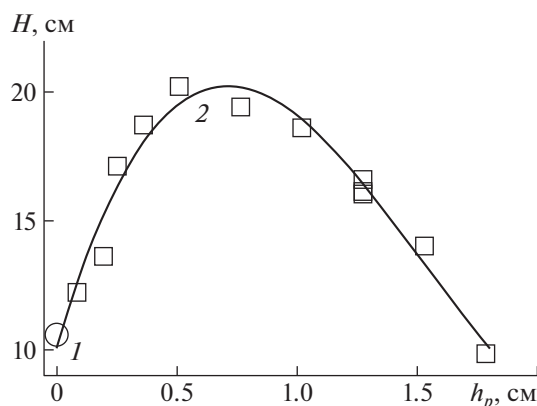


Рис. 6. Зависимость измеренной предельной высоты регулярной изгибно-гравитационной волны от толщины пластины при глубине воды $h = 15$ см: 1 — гравитационная волна ($h_p = 0$); 2 — гидроупругая система (вода — плавающая пластина из пенополиэтилена).

гравитационная волна при $h_p = 0.51$ см, которая может рассматриваться как волна гравитационная, поскольку ее профиль описывается соотношениями (2.2). Аналогичный результат получен для колебаний рассматриваемой гидроупругой системы при уменьшении толщины плавающей пластины до минимального значения $h_p = 0.09$ см.

Таким образом, при $h_p \leq 0.5$ см колебания гидроупругой системы пластина—вода определяются стоячей гравитационной волной (не замечающей наличия пластины), а при увеличении h_p начинают сказываться свойства изгибных колебаний пластины.

Зависимость предельной высоты H регулярной изгибно-гравитационной волны от толщины h_p пластины приведена на рис. 6.

Данные на рис. 6 показывают, что размещение пластины на свободной поверхности воды значительно изменяет предельную высоту волны. Отметим, что предельная высота гравитационной волны (H) оценивается как $H \sim 12$ см. При увеличении толщины h_p сначала наблюдается рост H , причем максимальное значение $H \sim 20$ см достигается при $h_p \sim 0.5\text{--}0.6$ см. Дальнейшее увеличение h_p приводит к уменьшению высоты H волны, которая при $h_p = 1.8$ см составляет всего 9.7 см, т.е. ниже предельной высоты гравитационной волны. Данные (2) аппроксимируются полиномом третьей степени $H = 6.4h_p^3 - 29.2h_p^2 + 31.7h_p + 10.16$. Отметим, что отвечающее максимальной высоте волн значение толщины пластины определяет переход от гравитационных волн к волнам изгибным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально установлено, что увеличение толщины плавающей пластины существенно сказывается как на собственной частоте колебаний гидроупругой системы, так и форме профилей наблюдаемых стоячих изгибно-гравитационных волн.

Анализ волновых профилей изгибно-гравитационных волн показал, что при толщине пластины ниже критического значения форма волны описывается теорией нелинейных гравитационных волн; при больших толщинах следует использовать в качестве аппроксимирующих зависимости приближения “сухой балки” или решение соответствующей задачи гидроупругости.

Выявленное значение критической толщины пластины соответствует максимальной высоте регулярной изгибно-гравитационной волны.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-19-00451.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калиниченко В.А. Эксперименты по подавлению интенсивных колебаний жидкости плавающей пластиной // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 6. С. 74–83.
2. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
3. Robin G.D.Q. Wave propagation through fields of pack ice // Philos. Trans. R. Soc. A:1963. V. 255. № 1057. P. 313–339.
4. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. Элементарная теория и задачи. М.: Наука, 1966, 365 с.
5. Wadhams P. The Seasonal ice zone // The Geophysics of Sea Ice. Springer, Boston, 1986. P. 825–991.
https://doi.org/10.1007/978-1-4899-5352-0_15
6. Sergienko O.V. Behavior of flexural gravity waves on ice shelves: application to the Ross Ice Shelf // J. Geophys. Res. Oceans. 2017. V. 122. № 8. P. 6147–6164.
<https://doi.org/10.1002/2017JC012947>
7. Dethloff K., Maslowski W., Hendricks S., Lee Y.J., Goessling H.F., Krumpen T., Haas C., Handorf D., Ricker R., Bessonov V., Cassano J.J., Kinney J.C., Osinski R., Rex M., Rinke A., Sokolova J., Sommerfeld A. Arctic sea ice anomalies during the MOSAiC winter 2019/20 // Cryosphere. 2022. V. 16. P. 981–1005.
<https://doi.org/10.5194/tc-16-981-2022>
8. Калиниченко В.А. Регуляризация гравитационных баротропных волн в двухслойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 6. С. 25–37.
<https://doi.org/10.1134/S0568528119060069>
9. Калиниченко В.А. Подавление интенсивных колебаний жидкости слоем плавающих частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 6. С. 85–97.
<https://doi.org/10.1134/S0568528120060067>
10. Стурова И.В. Влияние ледяного покрова на колебания жидкости в замкнутом бассейне // Изв. РАН. ФАО. 2007. Т. 43. № 1. С. 128–135.
11. Зырянов В.Н. Сейши подо льдом // Водные ресурсы. 2011. Т. 38. № 3. С. 259–271.
12. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
13. Секерж-Зенькович Я.И. К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости // Докл. АН СССР. 1947. Т. 8. № 4. С. 551–553.
14. Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофиз. исследования. 1969. № 3 (45). С. 87–97.

УДК 532.65

УДАР МИКРОСТРУИ ВОДЫ ПО МИКРОВОЛОКНУ

© 2023 г. А. В. Базилевский^{a,*}, А. Н. Рожков^{a,**}

^a Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: baz@ipmnet.ru

**E-mail: rozhkov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 02.06.2023 г.

После доработки 06.06.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Исследуется поперечный удар импульсной микроструи воды по одиночным цилиндрическим волокнам. Методами высокоскоростной фотографии зафиксированы стадии выброса, распада и столкновения микроструи. Обнаружены значительное замедление микроструи волокном и ее расщепление на две части. Обсуждаются механизмы наблюдаемых явлений и влияние различных факторов.

Ключевые слова: струя, капля, волокно, удар, распад

DOI: 10.31857/S1024708423600331, **EDN:** NNUINU

Удар жидкой капли или струи о твердое препятствие – фундаментальный гидродинамический процесс, часто встречающийся в природе и технике. Данный процесс представляет практический и научный интерес, так как имеет отношение к широкому кругу технологических приложений. Среди них – струйная печать, аддитивные технологии 3D печати, нанесение покрытий, капельная эрозия лопаток турбин, системы фильтрации выбросов и др. Известны многочисленные исследования удара капли о поверхность различной геометрии [1]. В основном изучались большие капли (диаметр 2–4 мм) и малые скорости удара (до 3 м/с), что объясняется относительной простотой проведения таких экспериментов. Задача усложняется для капель и струй диаметром 40–50 мкм, движущихся со скоростью более 3 м/с. Здесь уже требуются специальные методы генерации и визуализации струй. В последнее время актуальность исследований удара капель и струй связана с распространением COVID19, заражение которым зачастую происходит в результате чихания и кашля носителем вируса. Инфекция передается каплями (микроструями) ротовой жидкостью. Типичные параметры процесса: диаметр капли ~ 50–100 мкм, скорость ее движения ~10 м/с [2, 3]. С другой стороны, важной характеристикой защитной медицинской маски, рабочий элемент которой – сетка из цилиндрических волокон, является ее способность задерживать/тормозить падающие на нее капли.

Целью данной работы являлись создание методики и экспериментальное моделирование столкновения микроструй с микропрепятствиями при параметрах столкновения, близких к реальным ситуациям.

1. ЭКСПЕРИМЕНТ

Для формирования микроструй использовалась демонстрационная печатающая головка Hewlett Packard ThinkJet, работающая на термоструйном принципе [4, 5]. Импульсное вытеснение жидкости осуществлялось быстрорастущим паровым пузырьком, который образовывался в результате локального разогрева жидкости микрорезистором (рис. 1). На микрорезистор подавался прямоугольный импульс напряжением 23.3 В и длительностью 4.5 мкс (энергия импульса $E = 35 \times 10^{-6}$ Дж). Диаметр выходного сопла 60 мкм. Рабочая жидкость (дистиллированная вода) через силиконовую трубку поступала в головку из небольшого (~10 мл) резервуара, установленного на возвышении 10–20 мм относительно уровня выходного сопла. Режим работы печатающей головки детерминирован ее конструкцией и не позволял существенно изменять скорость выброса струи, которая составляет $v = 9.5–13.3$ м/с. Печатающая головка и импульсная лампа подсветки управлялись микропроцессорным генератором. Для визуализации процесса выброса

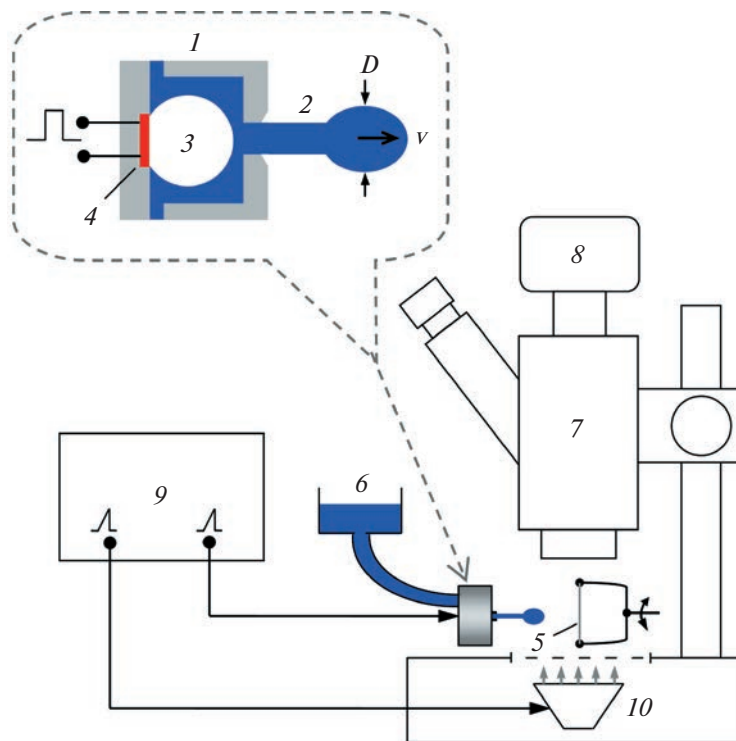


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – печатающая головка, 2 – микроструя, 3 – паровой пузырь, 4 – микронагреватель, 5 – волокно, 6 – резервуар с водой, 7 – микроскоп, 8 – фотокамера, 9 – генератор управляющих импульсов с блоком задержки, 10 – импульсная лампа подсветки.

и удара микроструи головка расположена на столике микроскопа Motic SMZ143, оснащенного фотокамерой Canon 7D.

Препятствием для микроструи служило цилиндрическое стекловолокно диаметром $d = 9$ и 25 мкм. Отрезок волокна длиной около 25 мм закреплялся с помощью клея на концах проволоочного держателя, установленного на 3-х осевом столике для точной регулировки положения волокна относительно микроструи. Расстояние от выходного сопла до точки удара на волокне составляет $0.3\text{--}0.5$ мм.

Выброс микроструи и ее удар по волокну фотографировались при импульсном освещении. Повторяемость процесса и точно задаваемая задержка светового импульса относительно начала выброса позволили проследить стадии движения струи с хорошим временным и пространственным разрешением: шаг установки времени задержки – 1 мкс, длительность светового импульса подсветки – 1 мкс, разрешение изображения струи – 3 пиксел/мкм.

Эксперименты проводились при окружающей температуре $20\text{--}22^\circ\text{C}$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Выброс и распад микроструи

На рис. 2 представлены фотографии последовательных стадий выброса микроструи. Сначала струя имеет форму гриба, диаметр цилиндрической части которого близок диаметру сопла (на фотографиях видна только его фаска диаметром 100 мкм, в то время как само сопло имеет диаметр 60 мкм). Затем струя становится тоньше. Такая форма струи говорит о непостоянстве скорости истечения жидкости. Об этом свидетельствуют вычисления [6] и прямые измерения диаметра вытесняющего парового пузырька [7], а также полученная в данной работе зависимость объема струи $V(t)$ от времени (рис. 3б). Объем струи измерялся с помощью программы обработки изображений, разработанной на базе пакета MATLAB. Пример обработки фотографии струи представлен на рис. 3а. Средний объем струи составляет 2×10^{-4} мм³, а диаметр сферической капли эквивалентного объема – 73 мкм. Максимальный диаметр струи в момент удара по волокну – $D = 40\text{--}50$ мкм.

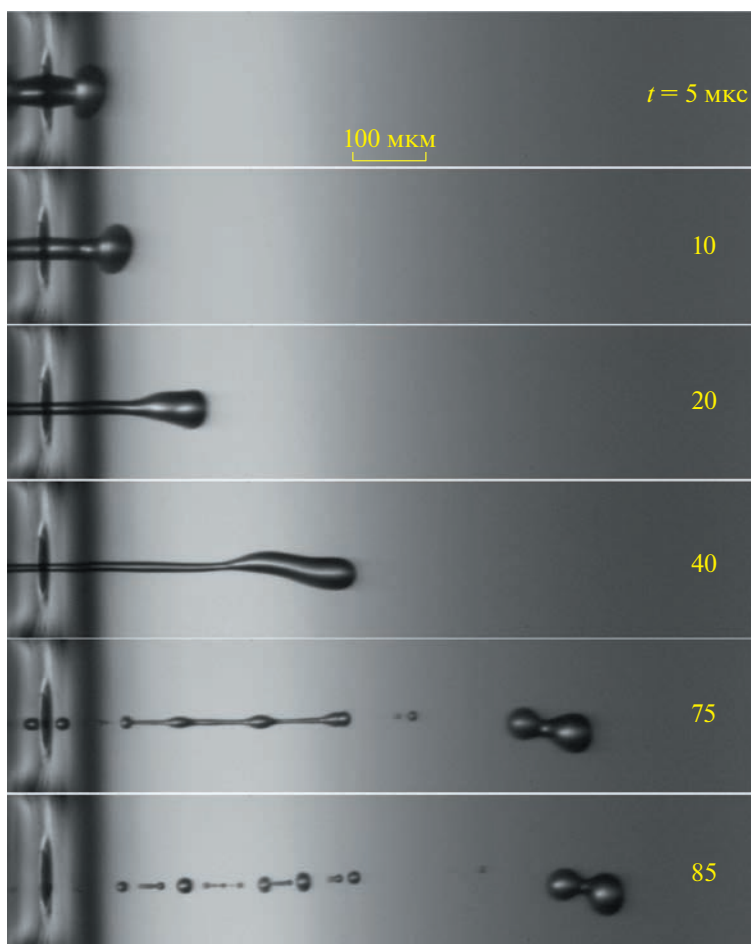


Рис. 2. Выброс и распад микроструи воды. Скорость струи 10 м/с. Здесь и далее t — время, прошедшее после начала выброса струи.

Из рис. 3б следует, что скорость истечения жидкости из сопла (она пропорциональна расходу dV/dt) нарастает на начальной стадии выброса ($t < 2$ мкс), а потом уменьшается ($d^2V/dt^2 < 0$) вплоть до его завершения при $t \approx 10\text{--}15$ мкс (о завершении выброса свидетельствует постоянство объема струи, $dV/dt = 0$). На стадии нарастания скорости истечения аррьергардные слои жидкости догоняют передние слои, что приводит к аккумулярованию жидкости в головной части струи аналогично тому, как это имеет место в пульсирующих струях [8] или радиальных всплесках [9]. На следующей затем стадии замедления и остановки истечения головная часть струи движется быстрее хвостовой, что вызывает удлинение и утончение струи. В конце концов, образуется струя каплевидной формы, где основная часть жидкости сосредоточена в ее головной части (рис. 2). Заметим, что закон изменения скорости истечения определяется динамикой роста газового пузыря, вытесняющего жидкость из печатающей головки.

Интересно отметить, что сравнение кинетической энергии микроструи $E_k = (\rho V)v^2/2 = 10^{-10}$ Дж с электрической энергией управляющего импульса $E = 35 \times 10^{-6}$ Дж показывает, что на движение жидкости расходуется очень малая часть (0.028%) подаваемой на микронагреватель энергии.

На рис. 4 показана траектория движения передней кромки струи. Видно, что скорость струи остается приблизительно постоянной. Заметим, что небольшой разброс скорости истечения жидкости неизбежно приводит к разбросу положения головы струи, который увеличивается с расстоянием от сопла. Чтобы улучшить повторяемость картины удара, волокно-мишень следует устанавливать по возможности ближе к выходному соплу.

Струя неустойчива и распадается на капли по инерционно-капиллярному механизму Рэлея [10]. Характерное время распада составляет $t_b \sim (\rho D^3/\gamma)^{1/2}$, что в случае воды и $D = 50$ мкм дает

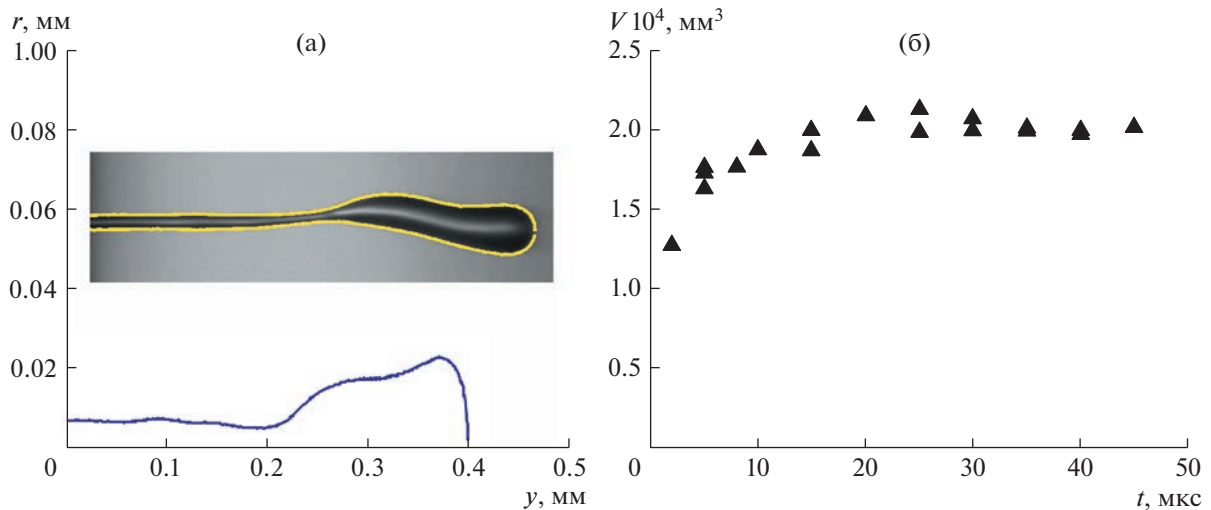


Рис. 3. Профиль (а) и объем (б) струи, полученные путем обработки изображений; r – радиус, x – расстояние от сопла.

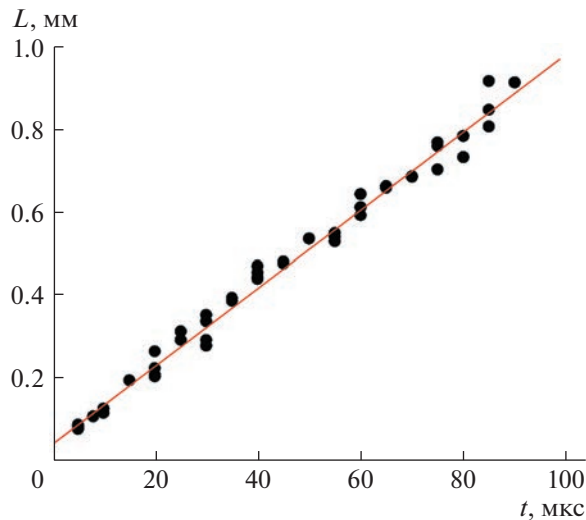


Рис. 4. Зависимость расстояния между передней кромкой струи и выходным соплом от времени. Линия – аппроксимирующая функция $L = 0.0395 + 0.00945t$. Скорость струи 9.45 м/с.

$t_b \sim 40$ мкс. Наблюдаемые в эксперименте времена распада струи согласуются по порядку величины с данной оценкой. Она также позволяет оценить расстояние от сопла $L_0 \sim v t_b = v(\rho D^3/\gamma)^{1/2} = 0.4$ мм, на котором следует устанавливать препятствие (мишень), чтобы на него натекала еще сплошная струя.

2.2. Удар микроструи по волокну

На рис. 5 и 6 показаны стадии столкновения микроструи с волокнами разных диаметров. При лобовом поперечном ударе струи по волокну, во всех случаях наблюдается разделение струи на две приблизительно симметричные части. При этом не происходит обтекания волокна струей с сохранением ее сплошности, как это часто имеет место при ударе свободно падающих капель диаметром 2–3 мм по цилиндрическим мишеням [11–13]. Часть жидкости остается на волокне (тем больше, чем толще волокно). При нецентральной (касательном) ударе струя проходит волокно почти без изменения своей формы (рис. 6б).

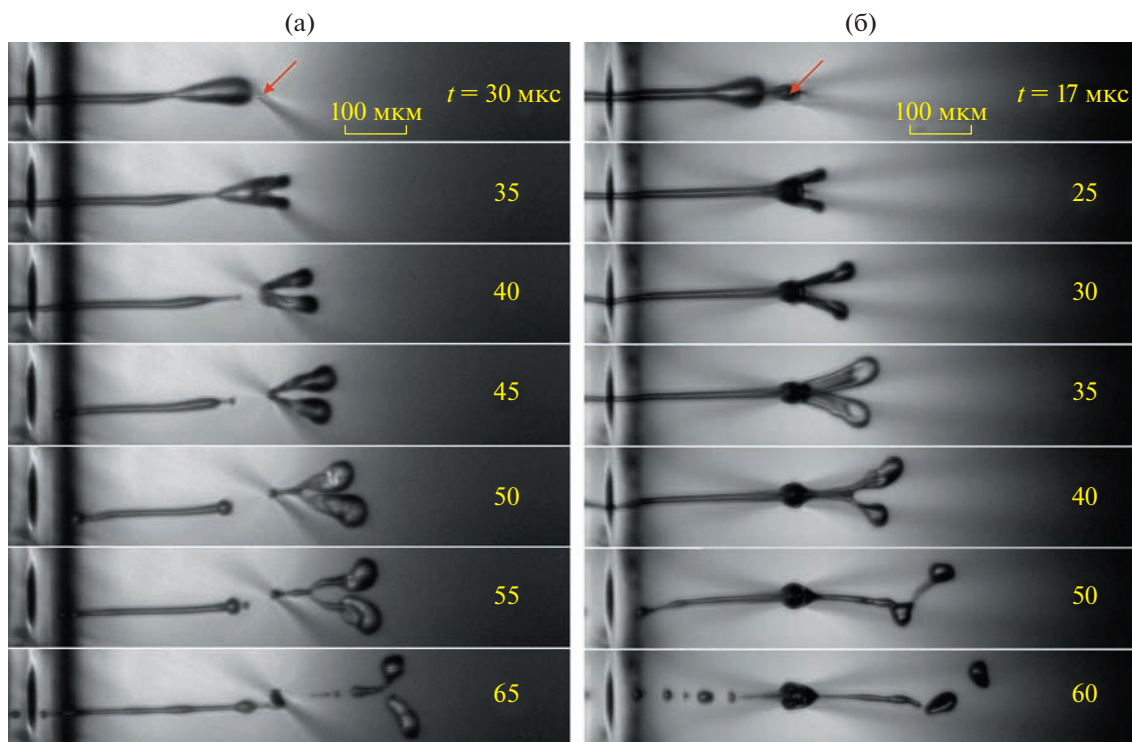


Рис. 5. Столкновение микроструи воды со стекловолокном диаметром 9 мкм (а) и 25 мкм (б); вид сверху вдоль оси волокна. Скорость струи (а) – 11.8 м/с, (б) – 13.2 м/с. Стрелка показывает положение волокна.

Предлагается следующая качественная модель удара. Волокно тормозит натекающую на него первичную струю и расщепляет ее на две части (вторичные струи). Волокно расталкивает эти части друг от друга, инициируя их поперечный разлет. После того как вторичные струи оказываются за волокном, они продолжают двигаться в поперечном направлении с некоторой скоростью v_x . Одновременно с этим под действием поверхностного натяжения части (половинки) струи принимают каплеобразную форму.

Дадим оценку факторов, влияющих на процесс удара, который представляет собой конкурирующее взаимодействие инерционных, капиллярных и вязких сил. Прежде всего отметим, что малая величина числа Вебера $We_a = \rho v^2 D / \gamma \sim 0.08$, основанного на плотности воздуха $\rho_a = 1.2 \text{ кг/м}^3$, указывает на незначительность аэродинамических эффектов. Низкое значение числа Онезорге $Oh = \mu / (\rho D \gamma)^{1/2} \sim 0.017$ показывает преобладание капиллярных сил над вязкими. Значения чисел Вебера и Рейнольдса для исследованных экспериментальных параметров равны: $We = \rho v^2 D / \gamma = 60\text{--}126$ и $Re = \rho v D / \mu = 420\text{--}680$, где $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\gamma = 0.072 \text{ Н/м}$ – соответственно плотность, вязкость и поверхностное натяжение воды. Высокие значения числа Вебера показывают, что в момент столкновения струи с волокном инерционные эффекты преобладают над капиллярными.

На рис. 7 представлены примеры временных зависимостей расстояния первичной (L) и двух вторичных струй (L_1 , L_2) от сопла, а также зависимость поперечного расстояния между вторичными струями (l). Аппроксимации экспериментальных зависимостей позволяют определить продольные скорости первичной и вторичных струй, а также поперечную скорость разлета вторичных струй. Разная скорость вторичных струй является следствием неидеальной центровки удара струи по волокну (которая, очевидно, не достижима в принципе). Полученные данные указывают на сильное замедление струи волокном. Для волокна диаметром $d = 9 \text{ мкм}$ уменьшение продольной скорости составляет $v_y/v = 0.54 \pm 0.03$ (среднее значение и стандартное отклонение), а для волокна диаметром $d = 25 \text{ мкм}$ – $v_y/v = 0.53 \pm 0.1$. Таким образом, ожидаемый рост торможения струи при увеличении диаметра волокна не обнаружен. Это можно объяснить тем,

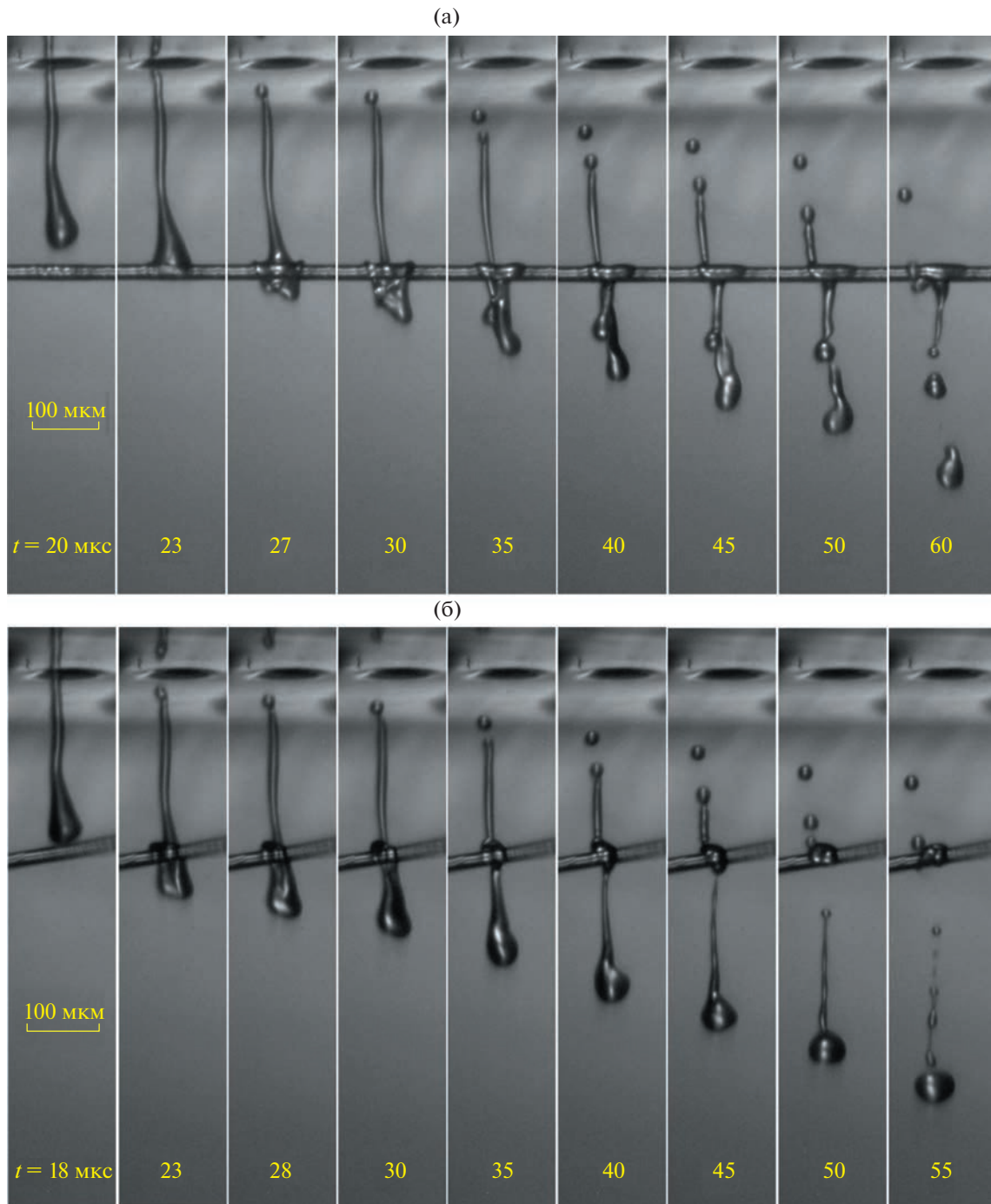


Рис. 6. Наблюдения за столкновением микроструи с различных ракурсов: (а) — вид перпендикулярно оси волокна, (б) — нецентральный (касательный) удар. Диаметр волокна 25 мкм. Скорость струи 10 м/с.

что тормозится главным образом лишь центральная часть струи, в то время как ее периферийные участки проходят волокно с незначительным замедлением.

Относительная поперечная скорость разлета вторичных струй для волокна диаметром $d = 9$ мкм составляет $v_x/v = 0.07 \pm 0.01$, а для волокна диаметром $d = 25$ мкм — $v_x/v = 0.15 \pm 0.01$. При этом разлет вторичных струй может замедлиться и даже смениться их сближением (рис. 7б). Это указывает на наличие достаточно сильного (относительно сил инерции) взаимодействия между вторичными струями. На некоторых кадрах удара наблюдалось формирование короткоживущей

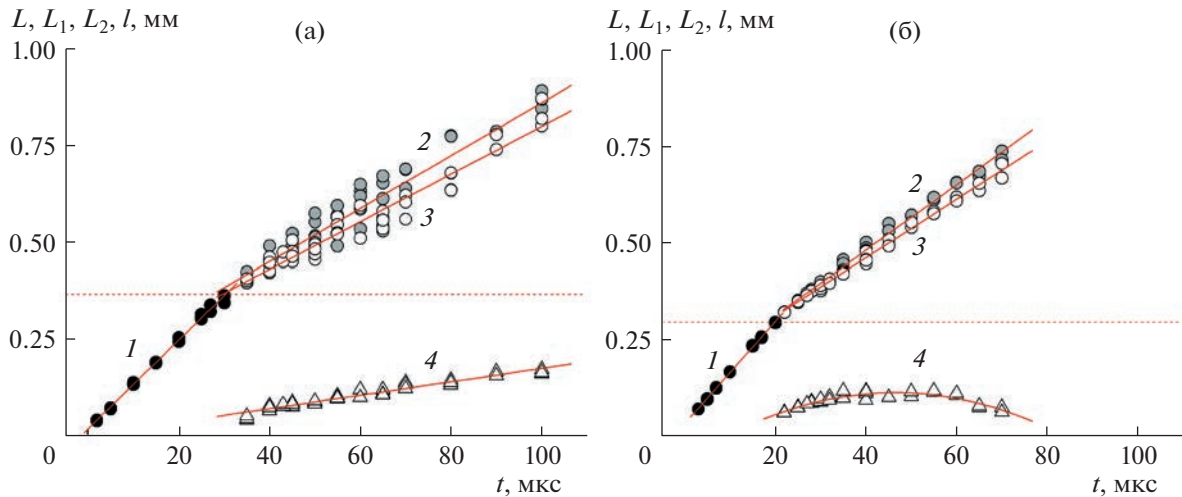


Рис. 7. Временные зависимости расстояния передних кромок первичной струи L (1) и двух вторичных струй L_1 (2) и L_2 (3) от сопла, а также поперечного расстояния между вторичными струями l (4) для волокна диаметром 9 мкм (а) и 25 мкм (б). Линии – аппроксимирующие функции $L = 0.0192 + 0.01148t$, $L_1 = 0.178 + 0.00683t$, $L_2 = 0.184 + 0.00616t$, $l = 0.00218 + 0.00174t$ (а); $L = 0.328 + 0.01326t$, $L_1 = 0.144 + 0.00845t$, $L_2 = 0.161 + 0.00755t$, $l = -0.062 + 0.00758t - 8,159 \times 10^{-5}t^2$ (б). Горизонтальная пунктирная линия показывает положение волокна.

пленки, соединяющей вторичные струи и являющейся, по-видимому, причиной замедления их разлета. Механизм образования этой пленки требует отдельного рассмотрения и является предметом дальнейших исследований.

Оценим величину уменьшения продольной скорости струи, используя уравнение изменения импульса

$$M(v - v_y) = F\Delta t \quad (2.1)$$

где M и v – соответственно масса и скорость первичной струи, v_y – скорость вторичной струи после удара, F – сила, действующая на струю со стороны волокна в течение времени Δt . Пренебрегая эффектами вязкого трения, имеем

$$F \sim (D \times d)\rho v^2/2 + 2D\gamma \quad (2.2)$$

Здесь первое слагаемое – сила гидродинамического сопротивления F_h , а второе – удвоенная сила поверхностного натяжения F_c (рис. 8а). Полагая $M \sim \rho\pi D^3/6$ и $\Delta t \sim D/v$, с учетом (2.2) из (2.1) следует

$$\frac{v_y}{v} \sim 1 - \frac{3d}{\pi D} - \frac{12}{\pi We} \approx 1 - \frac{d}{D} - \frac{4}{We} \quad (2.3)$$

Используя (2.3), можно получить критерий захвата струи волокном ($v_y = 0$)

$$We < \frac{4}{1 - \frac{d}{D}} \quad \text{или} \quad \frac{d}{D} > 1 - \frac{4}{We} \quad (2.4)$$

Критерий (2.4) позволяет оценить диаметр волокна d_* , которое будет полностью останавливать струю с заданными характеристиками (диаметр, скорость, плотность, поверхностное натяжение). Так, для исследуемого случая ($v \sim 10$ м/с, $D \sim 50$ мкм) оценка (2.4) дает $d_* \sim 47$ мкм. Граница (2.4) между режимами замедления и захвата струи показана на рис. 8б пунктирной линией.

Оценка (2.3) согласуется по порядку величины с результатами измерений (рис. 8б). В то же время предсказанная зависимость степени замедления струи v_y/v от диаметра волокна подтверждается экспериментом не в полной мере. Возможное объяснение состоит в том, что сила гидродинамического сопротивления F_h действует только на слой жидкости толщиной порядка d , в

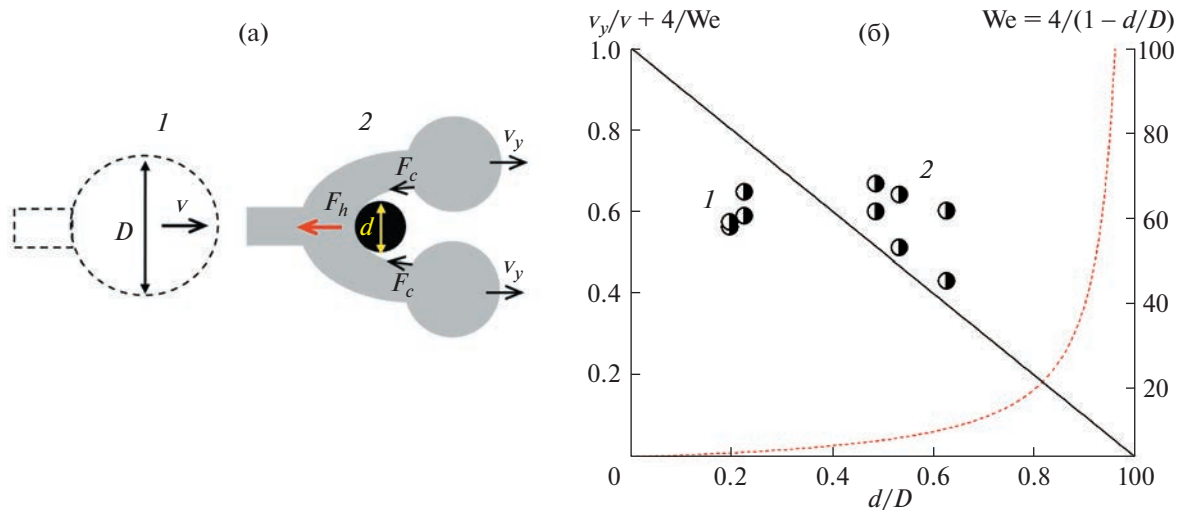


Рис. 8. К оценке скорости вторичных струй. (а) Схема удара: 1 – струя, 2 – вторичная струя. (б) Сравнение с экспериментом: прямая линия – зависимость (2.3), точки 1 – экспериментальные данные для $d = 9$ мкм, точки 2 – экспериментальные данные для $d = 25$ мкм, пунктирная кривая – теоретическая граница (2.4) между режимами замедления струи и захвата ее волокном.

то время как остальная часть струи проходит волокно без заметного сопротивления. Следует отметить и большой разброс измеренных значений степени замедления, который вызван влиянием трудно контролируемых факторов. Возможно, что усовершенствование методики эксперимента и процедуры обработки данных (например, применение компьютерного анализа изображений для определения формы вторичных струй) улучшит повторяемость результатов и позволит обнаружить новые закономерности процесса удара микроструи по волокну.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обнаружено, что при исследованных параметрах эксперимента, лобовой удар микроструи воды по микроволокну приводит к ее расщеплению на две части (при касательном ударе струя проходит волокно почти без изменения формы). Продольная скорость этих частей (вторичных струй) приблизительно в два раза, а поперечная скорость их разлета в 7–15 раз меньше начальной скорости удара, что говорит о значительном торможении струи волокном. Оценки вклада различных сил в динамику удара указывают на его преимущественно инерционный характер. Разработанная экспериментальная методика позволяет исследовать процессы столкновения микроструй с волокнами и открывает новые возможности для исследования высокоскоростного взаимодействия жидких микрообъектов с различными препятствиями.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-19-00451.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yarin A.L. Drop impact dynamics: splashing, spreading, receding, bouncing // Annu. Rev. Fluid Mech. 2006. V. 38. P.159–192.
2. Dbouk T., Drikakis D. On coughing and airborne droplet transmission to humans // Phys. Fluids. 2020. V. 32. P. 053310.
3. Bourouiba L. Fluid Dynamics of Respiratory Infectious Diseases // Annu. Rev. Biomed. Eng. 2021. V. 23. P. 547–577.
4. Nielsen N.J. History of ThinkJet printhead development // Hewlett-Packard Journal. 1985. May. P. 4–10.
5. Базилевский А.В., Мейер Д.Д., Рожков А.Н. Динамика и разрушение импульсных микроструй полимерных жидкостей // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 3. С. 45–63.
6. Asai A., Hara T., Endo I. One-dimensional model of bubble growth and liquid flow in bubble jet printers // Jpn. J. Appl. Phys. 1987. V. 26. № 10. P. 1794–1801.

7. *Базилевский А.В., Мейер Д.Д., Рожков А.Н.* Динамика сферической микрокаверны в полимерной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 3. С. 3–16.
8. *Meier G.E.A., Klopper A., Grabitz G.* The influence of kinematic waves on jet break down // Exp. Fluids. 1992. V. 12. P. 173–180.
9. *Bazilevsky A.V., Rozhkov A.N.* Impact of a small disk on a sessile water drop // Phys. Fluids. 2020. V. 32. P. 087101.
10. *Rayleigh L.* On the instability of jets // Proc. London Math. Soc. 1879. V. 10. P. 4–13.
11. *Lorenceanu E., Clanet C., Quere D.* Capturing drops with a thin fiber // J. Colloid Interface Sci. 2004. V. 279. P. 192–197.
12. *Kim S., Kim W.* Drop impact on a fiber // Phys. Fluids. 2016. V. 28. P. 042001.
13. *Fedyushkin A.I., Rozhkov A.N., Rudenko A.O.* Collision of water drops with a thin cylinder // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 2057. P. 012034.

УДК 533.6.011

РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНЫЙ НАГРЕВ ПОВЕРХНОСТИ МАРСИАНСКОГО СПУСКАЕМОГО АППАРАТА MSL ПРИ УЧЕТЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ХАРАКТЕРА ОБТЕКАНИЯ

© 2023 г. С. Т. Суржиков

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва, Россия*

E-mail: surg@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 02.06.2023 г.

После доработки 06.06.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Пространственная компьютерная модель, основанная на усредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье–Стокса совместно с алгебраическими моделями турбулентного смешения Болдуина–Ломакса и Прандтля, использована для расчета радиационно-конвективного теплообмена на поверхности спускаемого марсианского аппарата MSL. Показаны интенсификация конвективного теплообмена на подветренной стороне лобового аэродинамического щита и превосходство плотности радиационного теплового потока над конвективным на задней поверхности. Расчеты выполнены с использованием модели физически и химически неравновесного газа. Выполнено сравнение с результатами расчетов по другим вычислительным моделям и с летными данными по тепловой нагрузке на спускаемый аппарат, полученными при спуске MSL в плотных слоях атмосферы Марса.

Ключевые слова: радиационная газовая динамика, конвективный нагрев поверхности, турбулентный пограничный слой, усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, алгебраические модели турбулентности

DOI: 10.31857/S102470842360032X, **EDN:** TRMSCE

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] обсуждаются расчетные и летные экспериментальные данные, свидетельствующие о наличии ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) на лобовом аэродинамическом щите спускаемого марсианского аппарата (СА) Mars Science Laboratory (MSL). Значительный интерес специалистов к этой проблеме возник в связи с тем, что аэродинамический щит СА MSL имел диаметр $D = 4.5$ м, что значительно превосходило размеры аэродинамических щитов ранее реализованных космических миссий: Viking – $D = 3.5$ м, Pathfinder, Mars Exploration Rover, Mars Phoenix – $D = 2.5$ м [2].

Анализ аэротермодинамики указанных спускаемых аппаратов с учетом не только характерных размеров, но и конкретных полетных условий, показал, что для СА MSL может наблюдаться ламинарно-турбулентный переход на подветренной стороне лобового аэродинамического щита до момента достижения пиковой тепловой нагрузки [3]. Для спускаемых аппаратов меньших размеров ламинарно-турбулентный переход не предполагался до момента наступления максимальной тепловой нагрузки. К сожалению, не было экспериментального подтверждения этого для предшествующих марсианских спускаемых аппаратов.

Послеполетный анализ результатов измерения температуры в подповерхностных слоях тепловой защиты [1] подтвердил существование ожидаемого ламинарно-турбулентного перехода на подветренной поверхности лобового аэродинамического щита. Детальный анализ полученных опытных летных данных также поставил ряд дополнительных вопросов о роли шероховатости поверхности термически разлагаемого теплозащитного материала (класса PICO – Phenolic Impregnated Carbon Ablator) и даже о вкладе теплового излучения сжатого слоя. Не приуменьшая несомненную важность указанных факторов, в данной работе сосредоточим свое внимание на принципиально важном факте наличия ламинарно-турбулентного перехода на лобовом аэродинамическом щите и его важные последствия, связанные с интенсификацией теплообмена в зоне,

где при других условиях этого не ожидается. Отметим важный аспект его весьма хорошего предсказания в расчетах для реальной крупномасштабной модели спускаемого аппарата с использованием компьютерных кодов LAURA [4] и DPLR [5], в которых реализованы усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье—Стокса (RANS-модели) совместно с алгебраическими моделями турбулентности. К сожалению, численные подробности этих расчетов в [1] не приводятся.

В [1] отмечалось также хорошее качество предсказания экспериментальных данных по конвективному нагреву в лабораторных испытаниях масштабной модели MSL с использованием кода LAURA. В работе [6] также показано хорошее совпадение с указанными лабораторными экспериментальными данными результатов расчетов по компьютерному коду NERAT-3D, в котором реализована RANS модель совместно с алгебраическими моделями турбулентности Болдуина—Ломакса [7, 8] и моделью смещения Прандтля [9]. В данной работе демонстрируются результаты развития данной модели применительно к интерпретации летных экспериментальных данных [1] для крупномасштабной модели в реальных условиях гиперзвукового торможения в плотных слоях атмосферы Марса. Затронуты также аспекты учета неравновесных физико-химических процессов и переноса селективного теплового излучения.

Особо отметим, что хотя в задачах аэрофизики спускаемых космических аппаратов в плотных слоях атмосферы часто сложно бывает выделить определяющие процессы, которые, к тому же, могут сменять друг друга на разных фазах траектории торможения, явление ламинарно-турбулентного перехода и турбулентного нагрева поверхности аппарата является одним из ключевых. Гиперзвуковые скорости движения СА и их большие размеры приводят к интенсивному конвективному нагреву обширных поверхностей, что является большой проблемой для сохранения безопасного теплового баланса. Явление ЛТП приводит к необходимости изменять структуру тепловой защиты СА.

Особенность изучения турбулентного нагрева протяженных поверхностей при гиперзвуковых скоростях движения состоит в том, что после ЛТП в области турбулентного течения градиенты газодинамических функций резко возрастают. Подробное теоретическое обоснование этого факта дано в монографии [10]. Компьютерное моделирование и без того трудоемкой трехмерной (пространственной) задачи еще более усложняется из-за необходимости учета пристеночной структуры турбулентного пограничного слоя. От точности описания этой структуры в значительной степени зависит достоверность получаемых расчетных данных по интенсивности конвективного нагрева.

Турбулентный нагрев протяженной поверхности лобового аэродинамического щита спускаемого аппарата имеет еще ряд особенностей, связанных с разрушением тепловой защиты и неравновесными физико-химическими процессами в сжатом слое и в приповерхностных слоях разрушаемого материала. Значительная неопределенность получаемых расчетных данных связана с модельным описанием катализа на поверхности (тем более — термически разрушаемой). Еще один источник снижения достоверности связан с тем, что в химически реагирующем сжатом слое диффузионная составляющая конвективного теплового потока может превосходить теплопроводностную. Однако модельное турбулентное описание массообмена вблизи обтекаемой поверхности традиционно является более сложной и менее формализуемой задачей. В качестве иллюстрации данного утверждения отметим, что данные по суммарному конвективному нагреву лобового аэродинамического щита MSL в [1], полученные по двум (не сильно различающимся) моделям каталитичности поверхности различаются весьма заметно. Еще один важный аспект численного моделирования турбулентного нагрева связан с неопределенностью влияния шероховатости обтекаемой поверхности, учет или неучет которого можно рассматривать как одну из объективных причин отклонения расчетных данных от экспериментальных.

В настоящей работе модель радиационной газовой динамики спускаемых космических аппаратов, реализованная в авторском компьютерном коде NERAT-3D, который в режиме расчета ламинарного течения использовался для исследования аэрофизики марсианских [11–15] и возвращаемых на Землю спускаемых космических аппаратов [16], развита в части учета турбулентного конвективного нагрева лобового аэродинамического щита для условий реального торможения спускаемого аппарата MSL в атмосфере Марса. Рассматривается трехмерный характер течения физически и химически неравновесного углекислого газа с образованием турбулентного пограничного слоя. Обтекаемая поверхность считается гладкой и каталитической, на которой концентрации компонент частично диссоциированной двуокиси углерода определяются из локально равновесных условий.

Определение газодинамических характеристик пространственного течения позволяет выполнить расчет нагрева поверхности спускаемого аппарата селективным тепловым излучением.

Расчеты показывают, что для СА MSL нагрев отдельных участков поверхности тепловым излучением оказывается более значительным, чем конвективным теплообменом.

Учитывая большой дефицит узлов используемой конечно-разностной сетки следует иметь в виду низкую достоверность определения плотности конвективного теплового потока на задней поверхности СА. Радиационный теплообмен в рассматриваемых задачах носит объемный характер, поэтому подробность сетки у задней поверхности не является принципиально важной. При необходимости следует использовать специально построенную сетку со сгущениями узлов в требуемых областях течения.

1. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ

В целях последующего анализа, удобно систему интегрируемых уравнений условно разбить на четыре группы:

- система уравнений газовой динамики,
- система уравнений физико-химической кинетики,
- система многогрупповых уравнений переноса селективного теплового излучения,
- уравнения модели турбулентного смешения.

С целью практической реализации численного интегрирования весьма сложной системы сопряженных нелинейных уравнений в частных производных, к тому же — в трех пространственных переменных и, что принципиально важно — при наличии областей пограничных слоев с большими градиентами искомых функций, для решения задачи интегрирования каждого из отмеченных блоков уравнений необходимо применять специальные численные процедуры. Поясним специфику уравнений каждой из выделенных групп.

Систему газодинамических уравнений составляют уравнения неразрывности смеси газов и усредненные по Рейнольдсу с использованием гипотезы Буссинеска уравнения Навье—Стокса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Pi_{x,eff}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \Pi_{y,eff}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho w \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \Pi_{z,eff}, \quad (1.4)$$

где компоненты тензора вязких напряжений выражаются следующим образом:

$$\Pi_{x,eff} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu_{eff} \operatorname{div} \mathbf{V}) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

$$\Pi_{y,eff} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu_{eff} \operatorname{div} \mathbf{V}) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right],$$

$$\Pi_{z,eff} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_{eff} \operatorname{div} \mathbf{V}) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{eff} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right],$$

u, v, w — проекции вектора скорости потока $\mathbf{V}$ на оси прямоугольной декартовой системы координат x, y, z ; p, ρ, T — давление, плотность и температура газа; $\mu, \lambda, \mu_t, \lambda_t, \mu_{eff} = \mu + \mu_t, \lambda_{eff} = \lambda + \lambda_t$ — молекулярная, турбулентная и эффективная вязкость и теплопроводность.

Вторую группу составляют уравнения сохранения энергии поступательных степеней свободы частиц газа и колебательных степеней свободы молекул O_2, CO и CO_2 , а также уравнений неразрывности для каждой компоненты смеси газов

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} \left(\lambda_{eff} \operatorname{grad} T - \sum_{i=1}^{N_s} h_i \mathbf{J}_i - \mathbf{q}_R \right) + \frac{dp}{dt} + \Phi_\mu + Q_{vib} - \sum_{i=1}^{N_s} h_i \dot{w}_i, \quad (1.5)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \operatorname{div} \mathbf{V} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_i + \dot{w}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_s, \quad (1.6)$$

$$\frac{d\rho e_{v,m}}{dt} + \rho e_{v,m} \operatorname{div} (\mathbf{V}) = \operatorname{div} (-\mathbf{J}_m e_{v,m}) + \dot{e}_{v,m}, \quad m = 1, 2, \dots, N_V, \quad (1.7)$$

где T – температура поступательных степеней свободы; μ, λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; $c_p = \sum_i^{N_s} Y_i c_{p,i}$; $Y_i = \rho_i / \rho$ – массовая доля i -й компоненты течения; $c_p = \sum_i^{N_s} Y_i c_{p,i}$, $c_{p,i}$, h_i – удельная теплоемкость поступательных и вращательных степеней свободы при постоянном давлении и удельная энтальпия i -й компоненты течения; D_i – эффективный коэффициент диффузии i -й компоненты течения; $\rho_i, \mathbf{J}_i$ – плотность и массовый диффузионный поток i -й компоненты течения; $\mathbf{J}_i = -\rho D_i \operatorname{grad} Y_i$; N_s – число компонент смеси газов (C, O, C₂, O₂, CO, CO₂); $e_{v,m}$ – удельная колебательная энергия m -й колебательной моды i -й компоненты течения (учитываются колебательные моды молекул O₂ и CO, а также три колебательных моды молекулы CO₂ – деформационная, симметричная и анти-симметричная); $\dot{e}_{v,m}$ – скорость изменения удельной колебательной энергии в m -й колебательной моде; Q_{vib} – суммарный тепловой эффект процессов колебательной релаксации, определяемый при решении системы уравнений (1.7); $\rho_{i(m)}$ – плотность i -й компоненты течения, имеющей m -ю колебательную моду; $e_{v,m}^0 = e_{v,m}(T_V = T)$ – равновесная удельная энергия колебаний m -й моде i -й компоненты течения; $T_{V,m}$ – температура в m -й колебательной моде i -й компоненты течения, диссипативная функция

$$\Phi_\mu = \mu_{eff} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1.8)$$

Непосредственную связь первой и второй группы уравнений осуществляют термическое и калорическое уравнения состояния идеального газа

$$p = \rho \frac{R_0}{M_\Sigma} T = \rho R_0 T \sum_i^{N_s} \frac{Y_i}{M_i}. \quad (1.9)$$

$$e = \int_{T_0}^T c_v dT + e_0 \quad (1.10)$$

где $R_0 = 8.314 \times 10^7$ эрг/(К · моль) – универсальная газовая постоянная, e_0 – внутренняя энергия при некоторой температуре T_0 (определяемой в термодинамических базах данных по-разному, например, $T_0 = 273$ К), M_i – молекулярный вес i -й компоненты газовой смеси. Заметим, что в задачах физической газовой динамики уравнения типа (1.6) относят к классу уравнений химической кинетики, а уравнения (1.7) – к классу уравнений физической кинетики.

С учетом того, что колебательное возбуждение молекул может отличаться от равновесного, удельная внутренняя энергия может быть записана в виде (с учетом линейности трехатомной молекулы CO₂)

$$e_i = \frac{3}{2} R_i T + R_i T + R_i \sum_m \frac{\theta_{m(i)}}{\exp \left(-\frac{\theta_{m(i)}}{T_{V,m(i)}} \right) - 1} \quad (1.11)$$

где, предполагается, что используется межъядерный потенциал вида гармонического осциллятора. Здесь $\theta_{m(i)}$ — характеристические колебательные температуры, определяющие специфическую колебательную энергию для каждой моды, R_i — молекулярная газовая постоянная.

В уравнениях (1.5)–(1.7) использовались следующие соотношения

$$\dot{e}_{v,m} = \rho_{i(m)} \frac{e_{v,m}^0 - e_{v,m}}{\tau_m} - Q_{CV}^m, \quad (1.12)$$

$$e_{v,m} = \frac{R_0 \theta_m}{M_{i(m)} [\exp(\theta_m/T_{v,m}) - 1]}, \quad (1.13)$$

где уравнение (1.12) выражает скорость изменения удельной колебательной энергии в m -й колебательной моде за счет колебательно-поступательной (VT) релаксации и за счет химических реакций (CV), τ_m — время колебательной релаксации молекулы в заданной колебательной моде.

В соответствии с адиабатической теорией характерное время столкновений частиц τ_c должно заметно превышать характерный период колебаний молекул τ_v . Однако в работе [17] показано, что при высоких температурах ($T > 10\,000$ К) это условие не выполняется, поскольку время между столкновениями становится настолько малым, что $\tau_c/\tau_v \sim 1$. Отклонение от условий адиабатической теории приводит к неверному занижению времени колебательной релаксации. Это явилось причиной введения Парком [18] ограничения снизу на время VT-релаксации. Поэтому время VT-релаксации $\tau_{VT,i}$ рассчитывалось по рекомендациям Милликена и Вайта [19] с поправкой Парка, ограничивающей величину $\tau_{VT,i}$ снизу

$$\tau = \tau_{VT} + \frac{1}{N_i \sigma_v \sqrt{8kT/(\pi M_m)}}, \quad \sigma_v = \sigma'_v (50000/T)^2 \quad (1.14)$$

$$p\tau_{VT} = \exp[A_{VT}(T^{-1/3} - B_{VT}) - 18.42] \quad (1.15)$$

$$A_{VT} = 0.00116\mu^{0.5}\theta_v^{1.333}, \quad B_{VT} = 0.015\mu^{0.25}. \quad (1.16)$$

$$\sigma'_v = 3 \times 10^{-17} \text{ см}^2.$$

Определение парциальных времен релаксации позволяет задать время колебательной релаксации для данной колебательной моды в смеси газов:

$$\tau_m = \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\tau_{m,i}} \right)^{-1} \quad (1.17)$$

Изменение колебательной энергии за счет протекания химических реакций учитывалось по простой модели:

$$Q_{CV}^m = e_{v,m} \frac{1}{2} (\dot{w}_{i(m)} - |\dot{w}_{i(m)}|), \quad (1.18)$$

где предполагалось, что уменьшение колебательной энергии в m -й моде в 1 см^3 за 1 с пропорционально объёмной скорости исчезновения молекул, имеющих эту колебательную моду.

Диффузионный перенос энергии колебательного возбуждения молекул учитывался за счет их диффузии, т.е. плотность потока колебательной энергии за счет диффузии определялась по формуле

$$e_{i,m} \mathbf{J}_{D_{v,i}} = -e_{i,m} \rho D_{v,i} \text{grad } Y_i \quad (1.19)$$

где $D_{v,i}$ — эффективный коэффициент диффузии энергии колебательного возбуждения, который принимался равным эффективному коэффициенту диффузии, равному сумме коэффициентов молекулярной диффузии и турбулентной диффузии $D_{v,i} = D_i + D_t$.

Использованные модели химической кинетики многокомпонентной смеси газов формулировались в каноническом виде для каждой химической реакции (полный набор учитываемых химических реакций приведен в [16])

$$\sum_{j=1}^{N_s} a_{j,n} [X_j] = \sum_{j=1}^{N_s} b_{j,n} [X_j], \quad n = 1, 2, \dots, N_r, \quad (1.20)$$

тогда скорость образования i -й компоненты в n -й химической реакции записывается в виде

$$\left(\frac{dX_i}{dt} \right)_n = k_{f,n} (b_{i,n} - a_{i,n}) \prod_j^{N_s} X_j^{a_{j,n}} - k_{r,n} (b_{i,n} - a_{i,n}) \prod_j^{N_s} X_j^{b_{j,n}} = (b_{i,n} - a_{i,n}) (S_{f,n} - S_{r,n}) \quad (1.21)$$

где $a_{i,n}$, $b_{i,n}$ — стехиометрические коэффициенты n -й химической реакции; X_i — объемно-мольная концентрация i -й компоненты; $[X_j]$ — химические символы реагентов и продуктов химических реакций; N_r — число химических реакций; $S_{f,n}$, $S_{r,n}$ — скорости прямой и обратной реакции; $k_{f,n}$, $k_{r,n}$ — константы скоростей прямых и обратных реакций.

Массовая скорость образования i -й компоненты в единице объема определяется следующим образом:

$$\dot{w}_i = M_i \sum_{n=1}^{N_r} (b_{i,n} - a_{i,n}) (S_{f,n} - S_{r,n}), \quad \frac{\Gamma}{\text{см}^3 \cdot \text{с}} \quad (1.22)$$

Из (1.21) следует, что для вычисления массовой скорости образования i -й компоненты необходимо определить константы скоростей прямой и обратной реакций для каждой из N_r реакций. Указанные константы аппроксимировались обобщенной аррениусовской зависимостью

$$k_{f(r),n} = A_{f(r),n} T^{n_{f(r),n}} \exp \left(-\frac{E_{f(r),n}}{kT} \right), \quad (1.23)$$

где $A_{f(r),n}$, $n_{f(r),n}$, $E_{f(r),n}$ — аппроксимирующие коэффициенты для констант скоростей прямой (f) и обратной (r) химических реакций; T — температура поступательных степеней свободы. В рамках используемой модели температура вращательного движения считается равной температуре поступательного движения, k — постоянная Больцмана, n — номер химической реакции в кинетической модели. Условие квазинейтральности использовалось для нахождения мольных концентраций электронов.

Использовалась модель каталитической поверхности, в соответствии с которой массовые доли компонент смеси $(Y_i)_w$ находились из условия термодинамического равновесия. Температура поверхности либо задавалась постоянной, либо вычислялась с использованием условия

$$\varepsilon \sigma T_w^4 = Q_w, \quad (1.24)$$

где ε — степень черноты поверхности ($\varepsilon = 0.8$); $\sigma = 5.67 \times 10^{-12}$ Вт/(см² · К⁴) — постоянная Стефана–Больцмана; q_w — плотность теплового потока, падающего на обтекаемую поверхность.

Решение уравнений физической (1.7) и химической (1.6), (1.21) кинетики позволяет модифицировать константы скоростей диссоциации молекулярных компонент с использованием модели Тринора–Мэрроуна [20]. Используемые в расчетах константы скоростей диссоциации $k_f = k_D$ подвергались модификации с целью учесть термическую неравновесность молекул

$$k_D(T, T_V) = k_D(T) Z(Q_T, Q_V, Q_m), \quad (1.25)$$

$$Z(Q_T, Q_V, Q_m) = \frac{Q(T) Q(T_m)}{Q(T_V) N}, \quad (1.26)$$

где N — число колебательных уровней, рассчитываемое как

$$N = \left[\frac{D_0}{\Delta E_V} \right],$$

где ΔE_V — разница энергии между двумя последовательными уровнями (остается постоянной в рамках модели гармонического осциллятора).

Статистические суммы рассчитываются по соотношениям

$$Q_{T_*} = \frac{1 - e^{-D_0/T_*}}{1 - e^{-\theta_V/T_*}} e^{-\theta_V/2T_*}, \quad T_* = T, T_V, \quad (1.27)$$

$$Q_m = \frac{\theta_V}{D_0} \frac{1 - e^{-D_0/T_m}}{1 - e^{-\theta_V/T_m}} e^{-\theta_V/2T_m}, \quad T_m = \frac{T \cdot T_V}{T - T_V}. \quad (1.28)$$

Переносные, термодинамические и теплофизические характеристики задавались следующим образом. Расчет переносных свойств многокомпонентного газа (вязкости, теплопроводности и коэффициентов диффузии) выполняется в первом приближении теории Чепмена—Энскога [21, 22]

$$\mu_i = 2.67 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{M_i T}}{\sigma_i^2 \Omega_i^{(2,2)*}}, \quad \text{г/см} \cdot \text{с}, \quad \lambda_i = 8330 \sqrt{\frac{T}{M_i}} \frac{1}{\sigma_i^2 \Omega_i^{(2,2)*}}, \quad \text{эрг/см} \cdot \text{К}, \quad (1.29)$$

где σ_i — эффективный диаметр столкновений, Å; $\Omega_i^{(2,2)*} = f(T_i)$ — интеграл столкновений; $T_i = kT/\epsilon_i$; ϵ_i/k — параметр, характеризующий глубину потенциальной энергии взаимодействия частиц i -го типа, а также с использованием приближенных комбинаторных соотношений Манна—Брокау и Уилки [23, 24], позволяющих рассчитывать необходимые для вычислительной модели свойства

$$\mu = 1 / \left[\sum_{i=1}^{N_s} \left(\frac{Y_i}{\mu_i} \right) \right], \quad \lambda = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{N_s} x_i \lambda_i + 1 / \left[\sum_{i=1}^{N_s} \left(\frac{x_i}{\lambda_i} \right) \right] \right],$$

$$D_i = \frac{1 - x_i}{\sum_{j \neq i}^{N_s} (x_j / D_{i,j})}, \quad D_{i,j} = 1.858 \times 10^{-3} \sqrt{T^3 \frac{M_i + M_j}{M_i M_j}} \frac{1}{p \sigma_{i,j}^2 \Omega_{i,j}^{(1,1)*}}, \quad \text{см}^2/\text{с}. \quad (1.30)$$

Интегралы столкновений вычисляются по аппроксимациям, предложенным Н.А. Анфимовым [25]

$$\Omega_i^{(2,2)*} = 1.157 T_i^{-0.1472}, \quad \Omega_{i,j}^{(1,1)*} = 1.074 T_{i,j}^{-0.1604}, \quad (1.31)$$

где функции, определяющие столкновения двух частиц, определяются по так называемым комбинаторным формулам

$$T_{i,j} = \frac{kT}{\epsilon_{i,j}}, \quad \epsilon_{i,j} = \sqrt{\epsilon_i \epsilon_j}, \quad \sigma_{i,j} = \frac{1}{2} (\sigma_i + \sigma_j). \quad (1.32)$$

На начальной стадии интегрирования полной системы уравнений использовалась модель совершенного газа, в соответствии с которой:

$$\gamma = c_p / c_v = 1.15, \quad c_v = \frac{R_0}{(\gamma - 1)M}, \quad \mu = \frac{1.384 \times 10^{-4}}{274 + T} \left(\frac{T}{273} \right)^{1.5} \text{ г/(см} \times \text{с)}, \quad (1.33)$$

$$\lambda = \mu c_p / \text{Pr}, \quad \lambda_t = \mu c_p / \text{Pr}_t, \quad \text{Pr} = 0.7, \quad \text{Pr}_t = 1.0.$$

Для определения плотности радиационного теплового потока на поверхности спускаемого аппарата выполнялось интегрирование многогруппового уравнения переноса селективного теплового излучения. Уравнение переноса излучения формулировалось в общем виде для нерассеивающей среды относительно спектральной интенсивности излучения

$$\Omega \frac{\partial J_\omega(\mathbf{r}, \Omega)}{\partial \mathbf{r}} + \kappa_\omega(\mathbf{r}) J_\omega(\mathbf{r}, \Omega) = j_\omega(\mathbf{r}) \quad (1.34)$$

После нахождения спектральной интенсивности излучения рассчитывались вектор плотности интегрального радиационного теплового потока и его дивергенция (которая характеризует объемный энергетический баланс теплового излучения)

$$\mathbf{q}_r = \int_{4\pi} d\Omega \int_{\Delta\omega_{\text{tot}}} J_\omega(\mathbf{r}, \Omega) \Omega d\omega = \int_{\Delta\omega_{\text{tot}}} \mathbf{q}_{r,\omega}(\mathbf{r}) d\omega, \quad \mathbf{q}_{r,\omega}(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} J_\omega(\mathbf{r}, \Omega) \Omega d\Omega, \quad (1.35)$$

где $\kappa_\omega(\mathbf{r})$, $j_\omega(\mathbf{r})$ — спектральный коэффициент поглощения и испускания, который вычисляется при локальном термодинамическом равновесии с использованием закона Кирхгофа

$$j_\omega(\mathbf{r}) = \kappa_\omega(\mathbf{r}) J_{b,\omega}(\mathbf{r}), \quad (1.36)$$

$J_{b,\omega}(\mathbf{r})$ — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки пространства; $\mathbf{\Omega}$ — единичный вектор; $\Delta\omega_{tot}$ — спектральный диапазон теплового излучения (в данной работе 1000–200000 см⁻¹).

Важной характеристикой радиационного нагрева спускаемого аппарата является кумулятивная функция, определяемая для каждой элементарной площадки на его поверхности по следующей формуле:

$$Q_{r,\Delta\omega} = \int_{\omega_{\min}}^{\omega} q_{r,\omega} d\omega, \quad (1.37)$$

где $q_{r,\omega} = (\mathbf{q}_{r,\omega} \cdot \mathbf{n})$ — плотность спектрального потока теплового излучения на элементарной площадке с нормалью $\mathbf{n}$. Величина Q_{rad} дает представление о доле полного радиационного теплового потока, падающего на поверхность в спектральном диапазоне $[\omega_{\min}, \omega]$. При $\omega = \omega_{\max} = 200000$ см⁻¹ Q_{rad} отвечает полному (интегральному) тепловому потоку.

Практическая реализация изложенной вычислительной процедуры сводится к использованию так называемой групповой модели спектрального переноса, когда полный спектральный диапазон $[\omega_{\min} - \omega_{\max}]$ разбивается на N_g неоднородных спектральных участков меньшей размерности (в рассматриваемом случае $N_g = 99$), в пределах каждого из которых все спектральные функции полагаются независимыми от длины волны. Особо обратим внимание на то, что дифференциальное уравнение (1.34) численно интегрируется вдоль достаточно большого числа лучей, испущенных с поверхности. Для повышения вычислительной эффективности этой процедуры вместо решения задач определения координат пересечения испущенного луча с границами элементарных вычислительных объемов в трехмерном случае используется алгоритм квази-случайной выборки, предложенный в [26].

Как уже отмечалось, четвертую группу уравнений составляют уравнения алгебраических моделей турбулентного смешения, многократно тестированных при решении задач практической важности [27]. Использовались две алгебраические модели турбулентности, неоднократно апробированные в работах по анализу турбулентных пограничных слоев. В первой из них, в модели смешения Прандтля [9], турбулентная вязкость определяется по феноменологическому соотношению

$$\mu_t = \rho L_m^2 |\Omega|, \quad (1.38)$$

где L_m — длина смешения Прандтля; $|\Omega|$ — функция завихренности скорости,

$$|\Omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2},$$

где, в общем случае пограничного слоя у криволинейной поверхности, под u, v, w следует понимать локальные скорости вдоль и по нормали к поверхности. При этом используется двухслойная модель, в соответствии с которой длина пути смешения Прандтля определяется по формуле

$$L_m^{in} = \chi y \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right], \quad \text{при} \quad \frac{y}{\delta} < 0.2, \quad (1.39)$$

$$L_m^{out} = 0.085\delta, \quad \text{при} \quad \frac{y}{\delta} > 0.2,$$

где

$$y^+ = \frac{y}{v_w} u_\tau = \frac{y}{\mu_w} \rho_w u_\tau = \frac{y}{\mu_w} \sqrt{\rho_w \tau_w} = y \sqrt{\frac{\rho_w}{\mu_w} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}, \quad \tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w;$$

δ — толщина динамического пограничного слоя; $\chi = 0.4$ — эмпирическая константа Кармана [10]; $A^+ = 26$; v_w — кинематическая вязкость вблизи поверхности.

В модели Болдуина–Ломакса [7, 8], также рассматривается двухслойная структура турбулентного пограничного слоя. Во внутреннем, прилегающем к поверхности слое

$$\mu_{t,in} = \rho (\chi y D)^2 |\Omega| = \rho \left\{ \chi y \left[1 - \exp \left(-\frac{y^+}{A^+} \right) \right] \right\}^2 |\Omega| \quad (1.40)$$

где D — демпфирующая функция Ван-Дрифта.

Во внешнем слое

$$\begin{aligned} \mu_{t,out} &= K C_{cp} \rho F_{wake} F_{kleb}(y) \\ F_{kleb}(y) &= \left[1 + 5.5 \left(y \frac{C_{kleb}}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1}, \quad C_{kleb} = 0.3, \\ F_{wake} &= y_{max} F_{max}, \quad F(y) = y |\Omega| D, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где $K = 0.018$, $C_{cp} = 1.6$; y_{max} — определяется локальной координатой нормальной к поверхности y , где $|\Omega|$ достигает своего максимума, а $F_{max} = F(y_{max})$.

Турбулентная вязкость находится из соотношения

$$\begin{aligned} \mu_{t,in}, \quad y &\leq y_{cross} \\ \mu_{t,out}, \quad y &> y_{cross}, \end{aligned}$$

где y_{cross} — координата y , при которой $\mu_{t,in} = \mu_{t,out}$ (первый раз по мере увеличения y).

Уже неоднократно отмечалось в [6, 9, 28, 29], что использование алгебраических моделей турбулентности совместно с полной моделью Навье–Стокса сталкивается с рядом проблем, которые отсутствуют при решении задачи в классической погранслоевой постановке. В случае пространственного обтекания поверхности спускаемого аппарата не во всех точках вблизи поверхности удастся формально выделить область пограничного слоя (например, в окрестности критической линии тока). Поэтому при практической реализации алгебраических моделей турбулентности анализировались распределения турбулентной вязкости по локальной нормали к поверхности и не допускалось наличия осцилляций этой функции после достижения локального максимума. Подробно этот алгоритм рассмотрен в работе [28].

Отметим еще один аспект алгебраических моделей турбулентности, основанных на использовании $|\Omega|$ как определяющей функции структуры векторного поля скоростей. Сравнение этой функции в окрестности критической линии тока и в области развитого течения у лобовой поверхности (в особенности над подветренной стороной лобового щита) показывает на их различие более, чем на два порядка. Использование алгебраических моделей в области критической линии тока практически не вносит никаких изменений в численное решение, поскольку предсказываемая турбулентная вязкость оказывается заметно меньше, чем молекулярная вязкость. В противоположность к этому, над подветренной стороной лобового щита величина $|\Omega|$ становится настолько значительной, что рассчитываемая турбулентная вязкость превосходит молекулярную вязкость более, чем на 2 порядка. Таким образом, несмотря на то, что в данной модели не анализируется и не задается критическое число Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода, в численном решении такая область получается автоматически в зависимости от величины $|\Omega|$. Конечно, такой эффект применения алгебраических моделей не стоит трактовать как автоматическое определение зоны ламинарно-турбулентного перехода. Тем не менее многочисленные примеры использования алгебраических моделей турбулентности без введения критического числа Рейнольдса показывают на достаточно хорошее описание экспериментальных данных. При этом ничто не мешает заданию критического числа Рейнольдса для более детального описания экспериментальных данных [28]. Кстати, оценка критического числа Рейнольдса для одной из характерных траекторных точек дает $Re_\tau \sim 10^6$.

В качестве граничных условий для системы уравнений (1.1)–(1.5) использовались условия в невозмущенном набегающем потоке (см. табл. 1), условия прилипания на поверхности и условия Дирихле в выходном сечении расчетной области, где течение всегда было сверхзвуковым.

Таблица 1. Траекторные параметры СА MSL

t , с	H , км	V_∞ , см/с	ρ , г/см ³	T_∞ , К	α , град	M
45.1	59.3	5.866×10^5	0.265×10^{-7}	85.7	16.0	30.0
61.5	38.8	5.660×10^5	0.270×10^{-6}	157.0	15.7	28.4
74.0	25.8	4.862×10^5	0.144×10^{-5}	169.8	16.1	23.5
80.5	20.8	4.133×10^5	0.186×10^{-5}	178.9	16.4	19.5
84.7	18.6	3.633×10^5	0.233×10^{-5}	182.7	16.6	16.9

2. АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

При решении системы уравнений Навье—Стокса использовался явный алгоритм интегрирования, а для решения задачи о распаде произвольного разрыва на гранях расчетных ячеек применялся алгоритм AUSM [30].

Система уравнений сохранения энергии поступательных и колебательных степеней свободы интегрировалась с использованием неявного конечно-разностного метода. На каждом итерационном шаге по времени, вплоть до получения установившегося решения, решалась система 7-ми точечных конечно-разностных уравнений с использованием алгоритмов нижней и верхней релаксации (выбор релаксационных коэффициентов производился в процессе счета) с прогонками по координатным линиям.

При переходе с одного итерационного слоя на другой рассчитывались термодинамические и теплофизические данные, включая расчет по формулам алгебраических моделей турбулентности.

В расчетах учитывались 6 компонент диссоциированной двуокиси углерода (C , O , C_2 , O_2 , CO , CO_2), 28 химических реакций и 5 колебательных мод молекул O_2 , CO , CO_2 . Все необходимые для расчета константы брались из работы [16].

Расчеты радиационного теплообмена проводились с использованием компьютерного кода ASTEROID [31], который позволяет определять спектральные оптические свойства нагретых газов и низкотемпературной плазмы в диапазоне температур 1000–20000 К в широком спектральном диапазоне от вакуумного ультрафиолета до дальней инфракрасной области. Групповые радиационные функции, в частности плотность радиационного потока на поверхности, определялись усреднением спектральных функций в пределах элементарных спектральных диапазонов (спектральных групп). Оптические свойства двуокиси углерода в инфракрасной области спектра рассчитывались с использованием данных [32].

Плотность суммарного теплового потока к обтекаемой поверхности определялась по формулам:

$$Q_w = Q_{w,tot} + Q_{rad},$$

$$Q_{w,tot} = Q_{w,hc} + Q_{dif} = -\lambda \text{grad} T - \rho \sum_i^{N_s} h_i D_i \text{grad} Y_i$$

$$Q_{rad} = \sum_{g=1}^{N_g} Q_{rad,g} = \sum_{g=1}^{N_g} \int_g q_{r,\omega} d\omega.$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты проводились для условий в набегающем потоке, представленных в табл. 1 [1]. На исследуемом, наиболее теплонапряженном участке траектории, число Маха полета падает от 30 до 17. Наиболее интенсивный нагрев наблюдается на 74 с активной фазы торможения, а наибольшее давление в сжатом слое достигается при $t = 80.5$ с. Конфигурации полей газодинамических функций подобны для разных траекторных точек. Общая закономерность их изменения заключается в том, что на наибольшей высоте в сжатом слое в большей степени проявляются эффекты

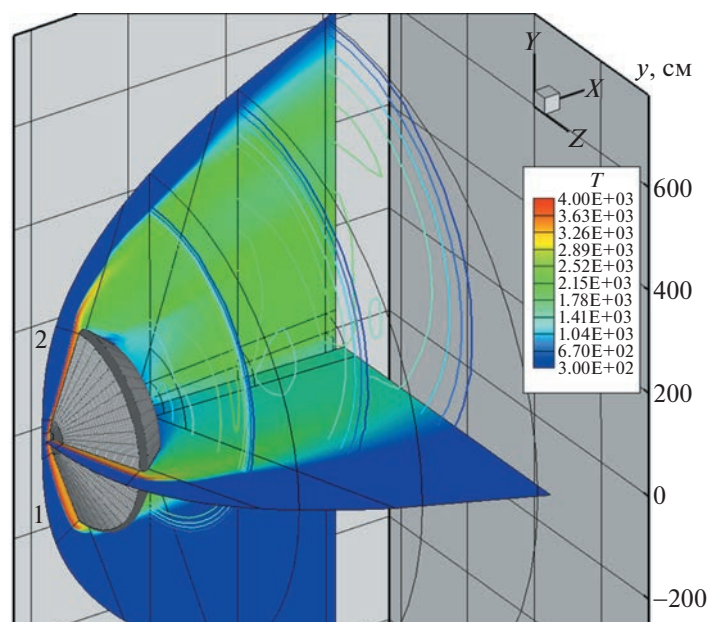


Рис. 1. Поле температуры в окрестности CA MSL при $t = 74$ с.

физико-химической неравновесности. По мере торможения и достижения более плотных слоев атмосферы термализация газа наступает заметно быстрее.

Для примера проанализируем поля газодинамических функций вблизи спускаемого аппарата для момента времени $t = 74$ с.

На рис. 1 и 2 показаны распределения температуры поступательных степеней свободы и продольной скорости потока. На этих же рисунках приведена поверхностная сетка, использованная в расчетах. Заметим, что несмотря на то, что узлы расчетной сетки весьма подробно располагаются на поверхности и, в особенности, на участках поверхности с наибольшей кривизной (где ожидается относительно большая интенсивность нагрева), задание подробной сетки по нормали к поверхности делает соотношение сторон элементарных вычислительных ячеек не совсем благоприятным для численного решения. Это вызывает необходимость тщательного контроля получаемого численного решения посредством дополнительных численных экспериментов.

На рис. 1 и 2 хорошо видны важные для решаемой задачи структурные особенности решения. Наветренная и подветренная области течения у лобового аэродинамического щита обозначены цифрами 1 и 2. Местоположение критической линии тока, от которой начинается растекание газа в сжатом слое по всем направлениям, показано на рис. 2 стрелкой. В окрестности критической линии тока течение газа в сжатом слое дозвуковое. По мере растекания газа вдоль лобовой поверхности скорость увеличивается и становится сверхзвуковой кроме непосредственной близости к поверхности, где оно остается дозвуковым. Видно, что толщина сжатого слоя у наветренной стороны лобового щита значительно превосходит толщину сжатого слоя над подветренной стороной, где поток уже разгоняется до больших сверхзвуковых скоростей. Сочетание указанных свойств сжатого слоя хорошо объясняет факт различия в этих областях по порядку величины функции вихря скорости $|\Omega|$, которая, как отмечалось выше, является основной газодинамической функцией, определяющей интенсивность турбулентного смешения в пристеночном пограничном слое. Заметим также, что над подветренной стороной наблюдаются большие температурные градиенты (см. рис. 1). Все сказанное во многом объясняет интенсификацию теплообмена над подветренной стороной обтекаемой поверхности.

Структура течения в следе (область 3 на рис. 2) и в зоне образующегося вихревого течения (область 4 на рис. 2), конечно, не оказывает явного влияния на поле течения у лобовой поверхности. Однако указанные две области являются важными для предсказания плотности радиационного теплового потока на задней поверхности спускаемого аппарата. Видно, что в следе температура газа остается весьма высокой, порядка 2000–2500 К. При этом горячая излучающая область имеет очень большие размеры. Это приводит к тому, что задняя поверхность греется излучением не

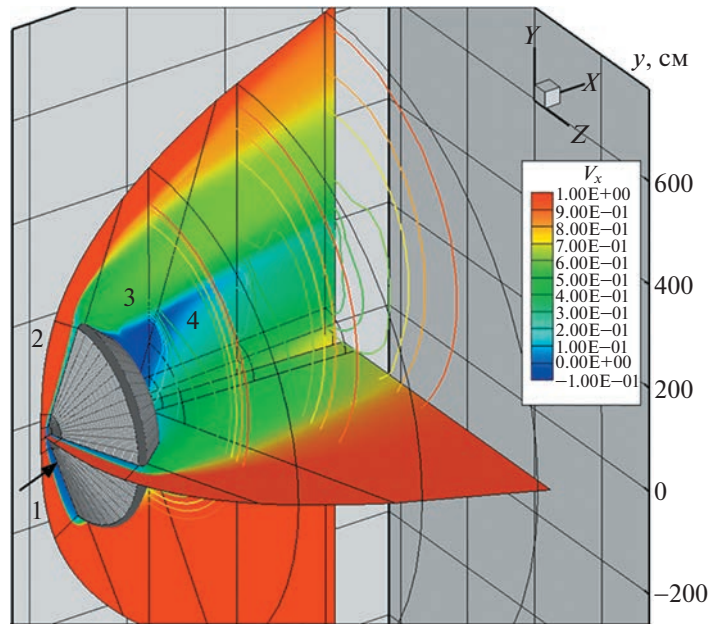


Рис. 2. Поле продольной скорости $V_x = u/V_\infty$ в окрестности CA MSL при $t = 74$ с.

только от близлежащих к поверхности слоев, но и от объемов нагретого газа на расстоянии десятков метров. Вопрос об ограничении размеров расчетной области нагретого газа в следе исследовался ранее [16]. Показано, что в типичных условиях марсианского входа необходимо производить расчет вплоть до $\sim 10\text{--}20$ м от поверхности. Добавим, что используемая модель расчета переноса селективного теплового излучения, основанная на интегрировании уравнения переноса излучения вдоль большого числа лучей, испускаемых с поверхности, позволяет учесть реабсорбцию, которая в большей степени проявляется в относительно низкотемпературных слоях газа (например, вблизи поверхности).

На рис. 3 и 4 показаны поля массовых концентраций CO_2 и CO . Именно эти две газовые компоненты играют наибольшую роль в лучистом нагреве лобовой и задней поверхностей. Распределение концентраций этих элементов вблизи обтекаемой поверхности также принципиально важно для определения диффузионных составляющих полных конвективных потоков, которые часто превосходят теплопроводностные.

На рис. 3 видно, что набегающий поток двуокиси углерода интенсивно диссоциирует в сжатом слое, особенно у наветренной стороны поверхности. Значительные градиенты массовых долей CO_2 также наблюдается над подветренной поверхностью. Отметим также значительные вариации массовых долей CO_2 в отрывной зоне и в следе, что оказывает заметное влияние на интенсивность лучистого теплообмена.

Основным продуктом диссоциации молекул CO_2 являются молекулы CO . На рис. 4 видно образование CO в сжатом слое над наветренной и подветренной поверхностями, а также заметные концентрации в следе.

На рис. 5а,б,в показаны главные результаты выполненного исследования — распределения конвективных и интегральных радиационных тепловых потоков вдоль поверхности для траекторных точек $t = 65, 74$, и 81 с. Область лобового щита простирается на этих рисунках от ~ -200 до $+200$ см, где s — координата, отсчитываемая вдоль поверхности. На всех трех рисунках хорошо видно, что плотность конвективного теплового потока над подветренной стороной лобового щита в несколько раз превышает плотность потока на наветренной стороне. Данные расчеты подтверждают выводы работы [1] о наличии значительного турбулентного нагрева подветренной поверхности. Более того, наблюдается хорошее количественное согласие с расчетными данными [1], которые показаны на этих рисунках красными кружками. Отметим, что нагрев поверхности за счет диффузионных тепловых потоков является преобладающим.

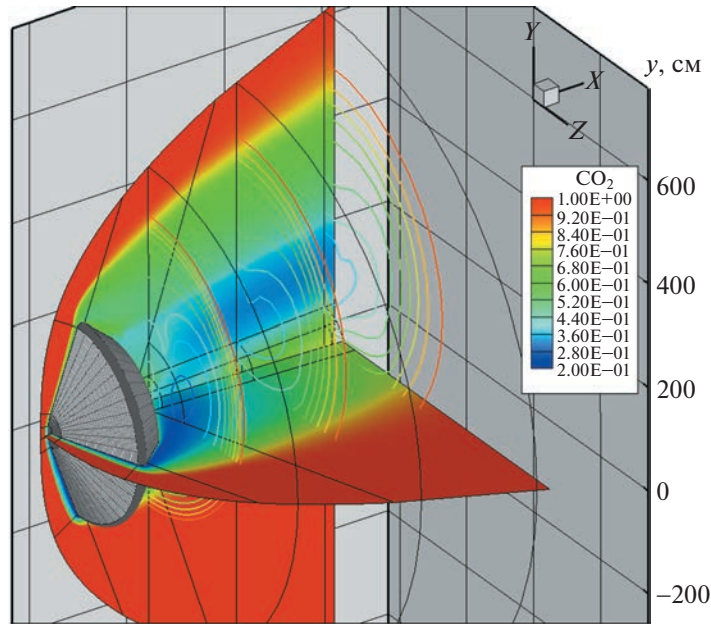


Рис. 3. Поле весовых долей CO_2 в окрестности CA MSL при $t = 74$ с.

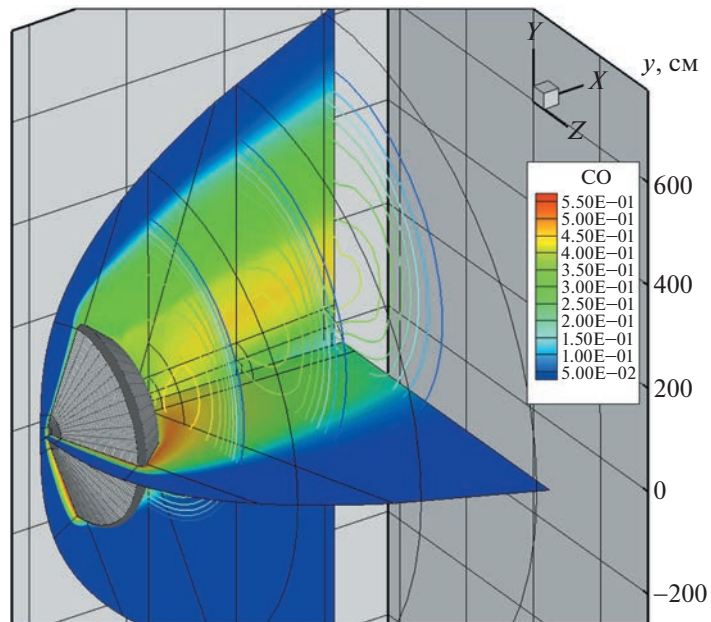


Рис. 4. Поле весовых долей CO в окрестности CA MSL при $t = 74$ с.

Результаты расчетов, представленных на рис. 5, выполнены при фиксированных температурах поверхности (они указаны в подписях к рисункам). На рис. 6 показаны результаты расчетов плотностей конвективных тепловых потоков при использовании модели равновесно-радиационной температуры поверхности. Изменение плотности конвективного теплового потока по сравнению со случаем задания постоянной температуры (рис. 5б) оказалось незначительным. При этом полученное распределение температуры вдоль поверхности показано на рис. 7.

Расчеты теплообмена с изменяемой температурой были выполнены также с использованием модели смешения Прандтля, см. рис. 8. Получены качественно и количественно подобные результаты, как и для модели Болдуина—Ломакса. Наблюдаются некоторые различия в плотностях

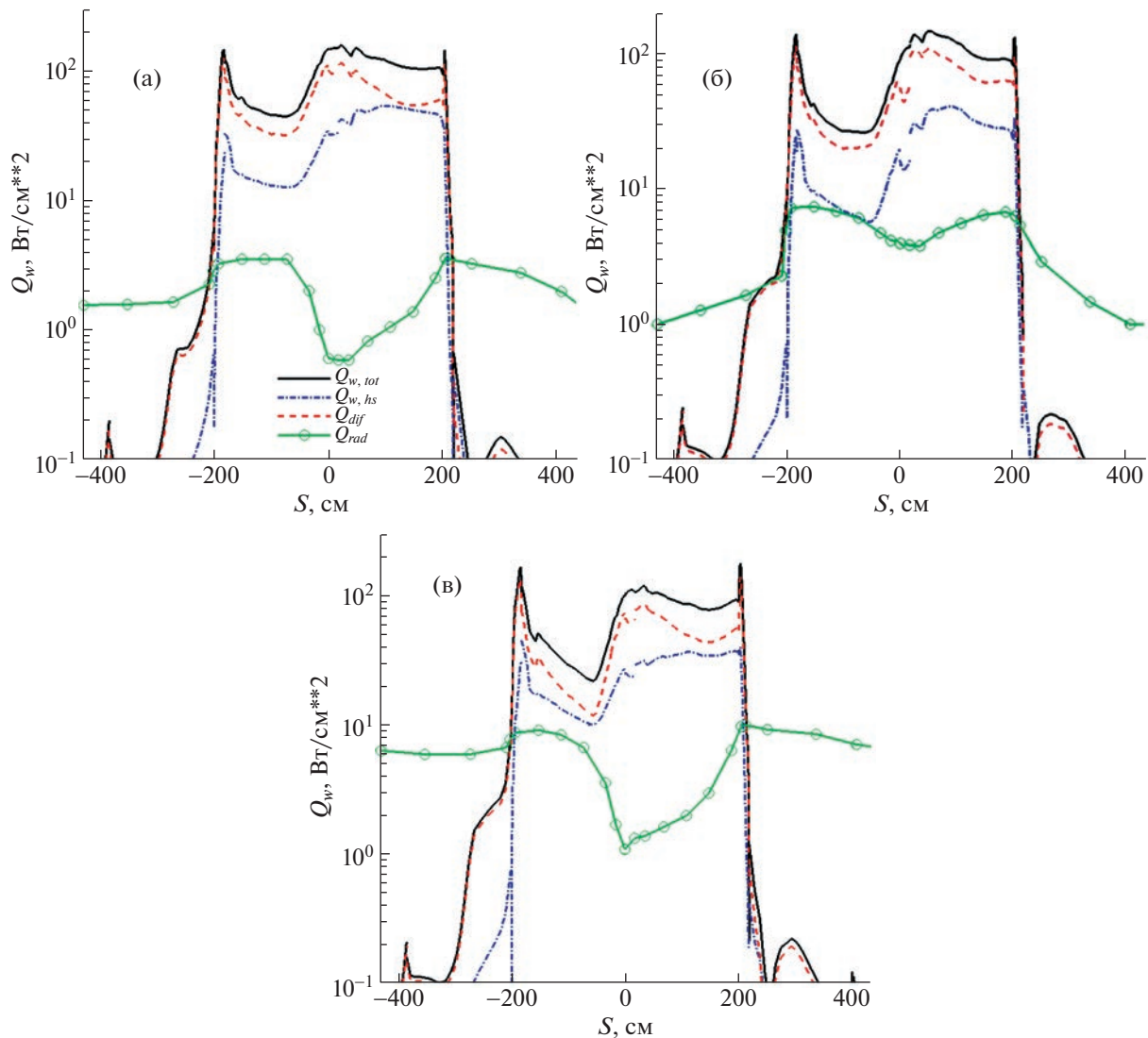


Рис. 5. Распределение плотностей конвективного $Q_{w,tot} = Q_{w,hs} + Q_{dif}$ и интегрального радиационного теплового потока Q_{rad} вдоль поверхности СА MSL в плоскости симметрии при $t = 65$ с (а), $t = 74$ с (б) и $t = 81$ с (в). Модель турбулентного смешения Болдуина–Ломакса. Постоянная температура лобовой поверхности $T_w = 1000$ (а), 1500 (б) и 1200 (в) К.

конвективных тепловых потоков для кромки аэродинамического щита. Однако здесь необходимо отметить, что указанная область течения должна быть исследована более тщательно, в том числе, с использованием специально построенных конечно-разностных сеток.

Распределения температур поступательных степеней и колебательных свободы вдоль критической линии тока (рис. 9) для трех последовательных траекторных точек свидетельствуют о быстрой термализации потока за фронтом ударной волны. Конечно, с увеличением высоты полета размеры релаксационной зоны возрастают. Однако для этих точек интенсивность теплового и силового воздействия на обтекаемую поверхность значительно ниже.

На рис. 10 показаны результаты расчетов групповых радиационных тепловых потоков и соответствующих кумулятивных функций в 6 точках на поверхности. На рис. 11 показано распределение точек конечно-разностной сетки вдоль поверхности (от 1-й до 254-й). Среди выделенных прямоугольниками 23 точек на поверхности, в которых проводился расчет интегральных радиационных тепловых потоков, значения которых показаны на рис. 5 и 6, для 6 точек, номера которых также даны на рис. 10, приведены распределения групповых спектральных потоков. Указан-

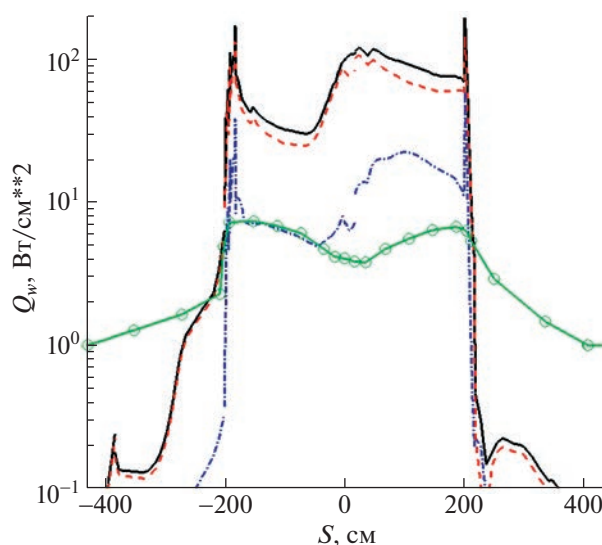


Рис. 6. Распределение плотностей конвективного $Q_{w,tot} = Q_{w,hc} + Q_{dif}$ и интегрального радиационного теплового потока Q_{rad} вдоль поверхности СА MSL в плоскости симметрии при $t = 74$ с. Модель турбулентного смешения Болдуина–Ломакса. Равновесно-радиационная температура поверхности.

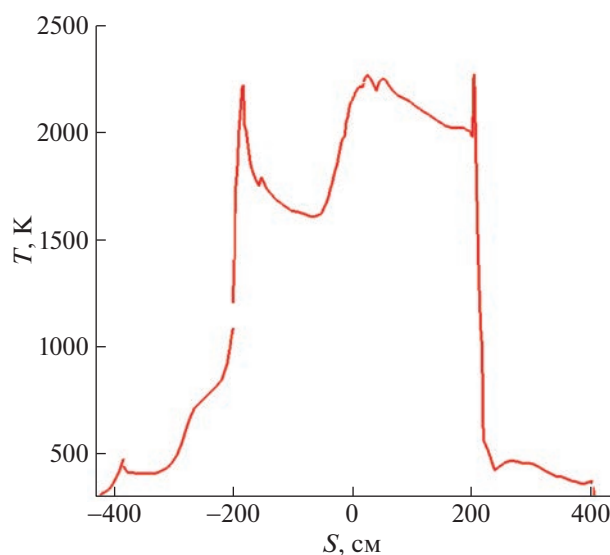


Рис. 7. Равновесно-радиационная температура поверхности при $t = 74$ с.

ные распределения, а также их кумулятивные функции показывают (рис. 10б), что основной радиационный нагрев обусловлен излучением в инфракрасной области спектра. Здесь интенсивно испускают колебательно-вращательные полосы молекул CO_2 и CO . В видимой области спектра наблюдаются заметно менее интенсивные электронно-колебательные полосы CO ($A^1\Pi - X^1\Sigma^+$), C_2 ($C^1\Pi_g - A^1\Pi_u$, $d^3\Pi_g - a^3\Pi_u$, $D^1\Sigma_u^+ - X^1\Sigma_g^+$) и O_2 ($B^3\Sigma_u^- - X^3\Sigma_g^-$). Необходимо отметить, что более детальный анализ состава газа вблизи термически разрушаемой поверхности, несомненно, внесет свои коррективы в спектральный состав радиационных тепловых потоков. Тем не менее явление преимущественного нагрева задней поверхности спускаемого аппарата в марсианской атмосфере, установленное в [33], будет наблюдаться с большой степенью достоверности.

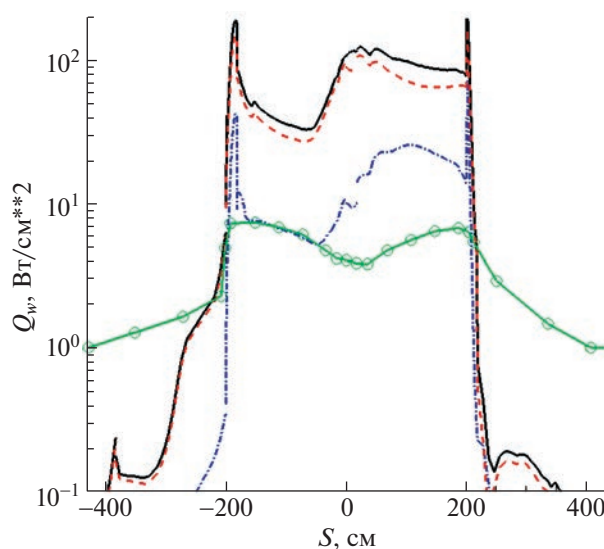


Рис. 8. Распределение плотностей конвективного $Q_{w,tot} = Q_{w,hc} + Q_{dif}$ и интегрального радиационного теплового потока Q_{rad} вдоль поверхности CA MSL в плоскости симметрии при $t = 74$ с. Модель Прандтля турбулентного смешения. Равновесно-радиационная температура поверхности.

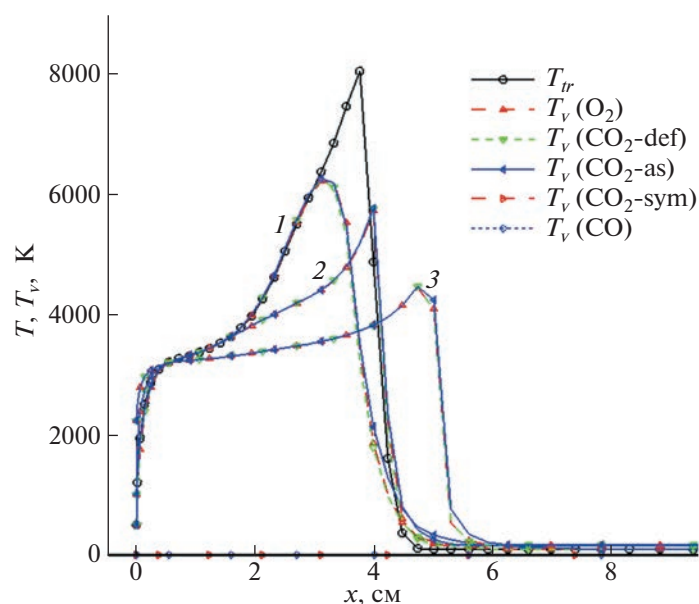


Рис. 9. Распределение поступательной и колебательных температур вдоль критической линии тока у поверхности CA MSL при $t = 45.1$ с (1), 61.5 с (2) и 74 с (3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование пространственной радиационно-газодинамической модели NERAT-3D для интерпретации летных данных [1] по тепловой нагрузке на спускаемый аппарат MSL в процессе гиперзвукового торможения в атмосфере Марса подтвердил предположение об интенсификации теплообмена на подветренной стороне аэродинамического щита, которое, вероятнее всего, связано с ламинарно-турбулентным переходом в пристеночном пограничном слое по мере ускорения движения газа вдоль поверхности. Увеличение плотности конвективного теплового потока на подветренной поверхности по сравнению с наветренной стороной достигает 3–4 раз.

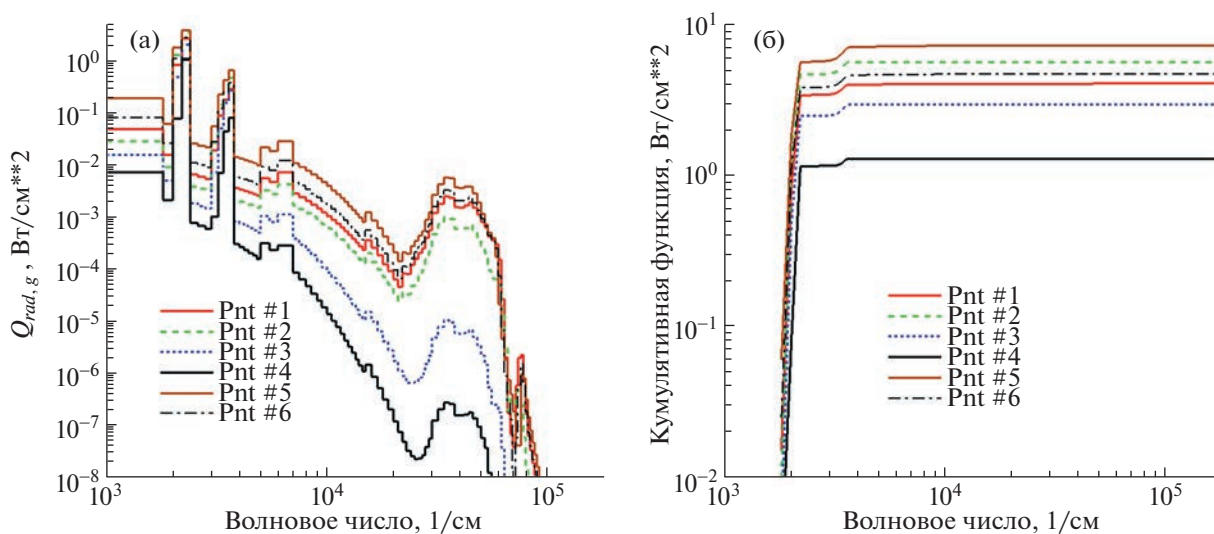


Рис. 10. Спектральное распределение групповых плотностей радиационных тепловых потоков (а) и соответствующих кумулятивных функций (б) в 6 точках на поверхности СА MSL при $t = 74$ с.

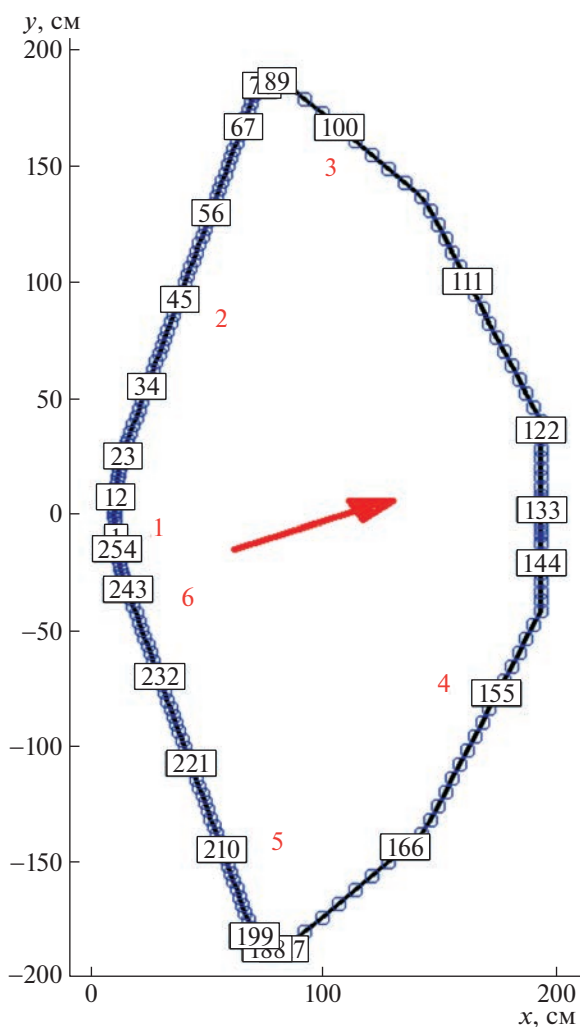


Рис. 11. Координаты точек на поверхности, в которых рассчитывались плотности интегральных радиационных тепловых потоков. Стрелкой показано направление вектора набегающего потока газа.

Расчеты выполнены с учетом неравновесных физико-химических процессов в высокотемпературном сжатом слое с использованием усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса совместно с алгебраическими моделями турбулентного смешения Болдуина—Ломакса и Прандтля. Показано хорошее совпадение с расчетными данными [1], полученными с использованием компьютерных кодов LAURA и DPLR, которые, в свою очередь, продемонстрировали удовлетворительное согласие с летными данными по тепловой нагрузке на поверхность лобового щита спускаемого аппарата MSL в процессе спуска в атмосфере Марса.

Расчеты выполнены в приближении постоянной и радиационно-равновесной температуры поверхности.

Для отдельных траекторных точек получены данные по нагреву поверхности спускаемого аппарата селективным тепловым излучением, испускаемым частично диссоциированной двуокисью углерода в окрестности аппарата. Для решения задачи о радиационном нагреве использовался метод интегрирования уравнения переноса излучения вдоль оптических лучей, испускаемых с поверхности. Оптическая модель высокотемпературного газа основана на многогрупповом подходе расчета усредненного по вращательной структуре молекулярного спектра. Показано, что задняя поверхность спускаемого аппарата нагревается тепловым излучением с плотностью потока $1\text{--}10\text{ Вт/см}^2$, что значительно превосходит конвективный нагрев.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-123021700057-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Edquist K.T., Hollis B.R., Johnston C.O., Bose D., White T.R., Mahzari M.* Mars Science Laboratory Heat Shield Aerothermodynamics: Design and Reconstruction // JSR. 2014. V. 51. № 4. P. 1106–1124.
2. Planetary Mission Entry Vehicles. NASA SP-20220010761 / By ed K. Parcelo, G. Allen. Version 4. Davies, ELORET Corporation.
3. *Edquist K.T., Dyakonov A.A., Wright M.J., Tang C.-Y.* Aerothermodynamic Design of the Mars Science Laboratory Backshell and Parachute Cone // AIAA. Paper 2009–4078. June 2009.
4. *Cheatwood F.M., Gnoffo P.A.* Users Manual for the Langley Aerothermodynamic Upwind Algorithm (LAURA) // NASA TM-4674, April 1996.
5. *Wright M.J., Candler G.V., Bose D.* Data-Parallel Line Relaxation Method for the Navier-Stokes Equations // AIAA Journal. 1998. V. 36. № 9. P. 1603–1609.
6. *Суржиков С.Т.* Анализ экспериментальных данных по конвективному нагреву модели марсианского спускаемого аппарата с использованием алгебраических моделей турбулентности // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 6. С. 129–140.
7. *Baldwin B.S., Lomax H.* Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. AIAA Paper 78–0257. 1978. 8 p.
8. *Visbal M., Knight D.* The Baldwin – Lomax Turbulence Model for Two-Dimensional Shock-Wave/ Boundary-Layer Interaction // AIAA J. 1984. V. 22. № 7. P. 921–928.
9. *Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H.* Computational Fluid Mechanics and Heat transfer. 1997. Taylor&Francis. 792 p.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Главная редакция физико-математической литературы. 1974. 711 с.
11. *Суржиков С.Т.* Радиационно-конвективный нагрев марсианского аппарата EDL MSL под углом атаки // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2015. Т. 16. Вып. 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/604/>
12. *Surzhikov S.T.* Three-Dimensional Computer Model of Nonequilibrium Aerophysics of the Spacecraft Entering in the Martian Atmosphere // Fluid Dynamics. 2011. V. 46. № 3. P. 490–503.
13. *Surzhikov S.T.* Comparative Analysis of Radiative Aerothermodynamics of Martian Entry Probes // AIAA paper AIAA 2012–2867. 2012. 38 p.
14. *Суржиков С.Т.* Радиационно-конвективный нагрев марсианских зондов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2013. Т. 14. Вып. 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-2/articles/408/>
15. *Суржиков С.Т.* Расчетный анализ ионизации сжатого слоя при входе космического аппарата Schiaparelli в плотные слои атмосферы Марса // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 3. С. 80–92.
16. *Суржиков С.Т.* Радиационная газовая динамика спускаемых космических аппаратов. Многотемпературные модели. М.: Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. 2013. 706 с.
17. *Ступоченко Е.В., Лосев С.А., Осипов А.И.* Релаксационные процессы в ударных волнах. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит.-ры. 1965. 484 с.
18. *Park C.* Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics. Wiley-Inter-science Publication. New York: J. Wiley & Son, 1990.

19. *Millikan R.C., White D.R.* Systematic of Vibrational Relaxation // J. of Chemical Physics. 1963. V. 39. № 12. P. 3209–3212.
20. *Treanor C.E., Marrone P.V.* Effect of Dissociation on the Rate of Vibrational Relaxation // Phys. Fluids. 1962. V. 5. № 9. P. 1022–1026.
21. *Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N.* Transport Phenomena. New York: John Wiley & Sons. Inc, 2007. 920 p.
22. *Гинзбург И.П.* Теория сопротивления и теплопередачи. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1979. 375 с.
23. *Svehla R.A.* Estimated Viscosities and Thermal Conductivities of Gases at High Temperatures // NASA TR-R-132. 1962. 26 p.
24. *Wilke C.R.* Diffusional properties of multicomponent gases // Chemical engineering progress. 1950. V. 46. № 2. P. 95–104.
25. *Анфимов Н.А.* Ламинарный пограничный слой в многокомпонентной смеси газов // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 25–31.
26. *Суржиков С.Т.* Тепловое излучение газов и плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 543 с.
27. *Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И.* и др. Конвективный теплообмен летательных аппаратов. М.: Физматлит, 2014. 330 с.
28. *Суржиков С.Т.* Результаты использования алгебраических моделей турбулентности в рамках RANS-модели нагрева поверхности острой пластины в сверхзвуковом потоке // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. Т. 20. Вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/890/>
29. *Shang J.S., Scherr S.J.* Navier–Stokes Solution for a Complete Re-Entry Configuration. J. Aircraft. 1986. V. 23. № 12. P. 881–888.
30. *Liou M.-S.* 1996 A Sequel to AUSM: AUSM+ // J. Comput. Phys. V. 129. P. 364–382.
31. *Суржиков С.Т.* Оптические свойства газов и плазмы. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004. 576 с.
32. *Ludwig C.B., Malcmus W., Reardon J.E. et al.* Handbook of infrared radiation from combustion gases // NASA SP-3080. Washington: Marshal Space Flight Center. 1973.
33. *Gromov V.G., Surzhikov S.T., Charbonnier J.-M.* Convective and Radiative Heating of a Martian Space Vehicle Base Surface // Proceeding of the 4th European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles. 15–18 Oct. 2001. Capua, Italy. ESA SP-487. 2002. P. 265–269.

УДК 533.9:533.6.071.8:541.124

ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УДАРНО НАГРЕТОГО ВОЗДУХА В ВИДИМОЙ И ИНФРАКРАСНОЙ ОБЛАСТЯХ СПЕКТРА

© 2023 г. П. В. Козлов^а, И. Е. Забелинский^а, Н. Г. Быкова^а,
Г. Я. Герасимов^а, В. Ю. Левашов^{а,*,**}

^аИнститут механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: vyl69@mail.ru

**e-mail: levashovvy@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 01.03.2023 г.

После доработки 06.06.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Измерены интегральные и временные спектральные характеристики ударно нагретого воздуха в интервале скоростей ударной волны от 7.35 до 10.4 км/с при давлении перед фронтом ударной волны $p_0 = 0.25$ Торр. Эксперименты проведены на ударной установке DDST-М Института механики МГУ. Исследован диапазон волн излучения $\lambda = 600\text{--}1100$ нм, соответствующий видимой и ближней инфракрасной областям спектра, в которых основной вклад в излучение дают атомарные линии азота и кислорода. Проведен анализ полученных интегральных по времени спектрограмм излучения. Выделены особенности временных осциллограмм для наиболее типичных атомарных линий спектра. Данные измерений сравниваются с экспериментальными данными других авторов.

Ключевые слова: ударные волны, излучение, воздух, ударная труба, видимая и инфракрасная области спектра, атомарные линии излучения

DOI: 10.31857/S1024708423600148, **EDN:** TMYOVI

Оценка воздействия тепловых потоков на поверхность спускаемого космического аппарата при маневре торможения в атмосферах различных планет представляет большой интерес в связи с проектами новых миссий на Луну, Марс и Венеру [1, 2]. Расчет теплового потока должен учитывать как конвективную, так и радиационную его составляющую [3]. Последняя растет с увеличением скорости и размеров спускаемого аппарата. При сверхорбитальных скоростях входа космического аппарата в атмосферу Земли и его размерах более 3 м радиационные процессы оказывают существенное влияние на газодинамическое течение [4]. Поэтому учет вклада радиационных процессов в общий тепловой поток к поверхности спускаемого аппарата является определяющим при разработке систем теплозащиты для вновь разрабатываемых космических аппаратов [5].

Тестирование расчетных моделей, описывающих радиационные потоки, требует достоверных экспериментальных данных, полученных на различных газодинамических установках в широком диапазоне параметров течения [6]. В первую очередь это относится к ударным трубам, которые являются одним из основных источников экспериментальных данных по радиационным характеристикам высокотемпературных газов [7–11]. В настоящей работе представлены новые экспериментальные данные по спектрам излучения ударно нагретого воздуха в видимом (VIS) и инфракрасном (IR) диапазонах, полученные при скоростях ударной волны, близких к суперорбитальной скорости. Работа является продолжением цикла исследований неравновесного излучения воздуха и его составляющих, выполненных на ударных установках Института механики МГУ в ультрафиолетовом (UV) диапазоне [12, 13].

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Измерение радиационных характеристик воздуха в VIS/IR диапазоне спектра излучения за сильной ударной волной проводилось на ударной установке DDST-М Института механики МГУ, описание и принцип работы которой приведены в [14]. Установка представляет собой ци-

линдрическую двух-диафрагменную ударную трубу с внутренним диаметром 5 см, которая состоит из трех секций: камеры высокого давления длиной 1.55 м, промежуточной камеры длиной 3.5 м и камеры низкого давления длиной 3 м. Камера промежуточного давления заполнена гелием, а камера низкого давления — исследуемой газовой смесью. Инициирование ударного процесса производится за счет воспламенения в камере высокого давления стехиометрической смеси кислорода и водорода, разбавленной гелием.

Ударная установка DDST-M оснащена соответствующей аппаратурой, позволяющей измерять интегральные и временные характеристики излучения ударно нагретого воздуха в изучаемом спектральном диапазоне. Интегральное распределение интенсивности излучения (панорамный спектр) фиксируется спектрографом Horiba 1603 и линейным CDD-детектором Hamamatsu S11156 в зависимости от скорости ударной волны и начального давления воздуха перед фронтом ударной волны в области длин волн $\lambda = 500\text{--}1100$ нм. Анализ подобных панорамных спектров позволяет выделить закономерности излучения ударно нагретого воздуха в различных спектральных диапазонах на различных участках траектории движения спускаемого космического аппарата в атмосфере Земли.

Для исследования временной эволюции излучения используются три канала регистрации на ФЭУ узких спектральных диапазонов, выделенных с помощью монохроматоров. Измерительный канал В&М собран на базе спектрографа В&М50, который фиксирует осциллограммы излучения на ФЭУ R4420 Hamamatsu. Измерительные каналы HI и HII состоят из спектрографов Horiba 1061 и Horiba 1603, соответственно, которые регистрируют излучение на ФЭУ R446 Hamamatsu. Пространственное разрешение оптической системы и полоса пропускания системы регистрации позволяют измерять временное распределение спектральной плотности с высоким временным разрешением (порядка 20 нс). Исследование временной эволюции отдельных спектральных линий дает дополнительную информацию о кинетических процессах в неравновесной зоне излучения. Такие данные не могут быть получены методом 2-D спектроскопии [15], который широко используется при обработке экспериментальных результатов, полученных на зарубежных ударных установках.

Экспериментальные результаты по излучению ударно нагретого воздуха представляются в абсолютных единицах в виде объемной плотности энергии излучения I_λ , измеряемой в Дж/(м³·мкм·ср). Для этого проводится предварительная калибровка измерительной системы, которая состоит в сравнении излучения ударно нагретого газа с излучением эталона (вольфрамовых и дейтериевых ламп). Процедура калибровки подробно описана в [16]. Для перехода в панорамном спектре от объемной плотности I_λ к объемной мощности излучения B_λ , измеряемой в единицах Вт/(см³·мкм·ср), необходимо разделить объемную плотность на эффективное время излучения Δt (мкс), которое определяется из временных осциллограмм для каждого узкого диапазона спектра.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Интегральные и временные характеристики излучения ударно нагретого воздуха измерены в интервале скоростей ударной волны V_{sw} от 7.5 до 11.4 км/с при начальном давлении p_0 в камере низкого давления 0.25 Торр в диапазоне волн излучения $\lambda = 600\text{--}1100$ нм, который соответствует видимой и ближней инфракрасной областям спектра. Полученная информация расширяет базу экспериментальных данных по радиационным характеристикам высокотемпературного воздуха, полученных ранее на ударной установке DDST-M в UV/VIS диапазоне при скоростях ударной волны, близких к суперорбитальной скорости [13].

На рис. 1а приведена спектрограмма интенсивности излучения I_λ воздуха (панорамный спектр) в VIS/IR диапазоне, полученная при $p_0 = 0.25$ Торр и $V_{sw} = 10.5$ км/с. Анализ спектрограммы показывает, что в рассматриваемом диапазоне длин волн основной вклад в излучение дают атомарные линии азота и кислорода в отличие от соответствующей спектрограммы для UV/VIS диапазона, приведенной на рис. 1б, где регистрируется в основном излучение молекулярных полос NO(β , γ , δ), N₂(2+), N₂⁺(1–) и CN [13]. На спектрограмме идентифицирована серия мультиплетов атома азота с максимумами интенсивности на длинах волн $\lambda = 648, 665, 747, 822, 868, 939, 986, 1011$ и 1054 нм, а также серия мультиплетов атома кислорода с максимумами интенсивности на длинах волн $\lambda = 616, 646, 700, 725, 777, 822, 845, 882$ и 926 нм [17, 18]. В спектре присутствуют также мультиплеты атома углерода с максимумами интенсивности на длинах волн $\lambda = 834, 910$ и 941 нм и линия H $_{\alpha}$ бальмеровской серии атома водорода с длиной волны $\lambda = 656$ нм.

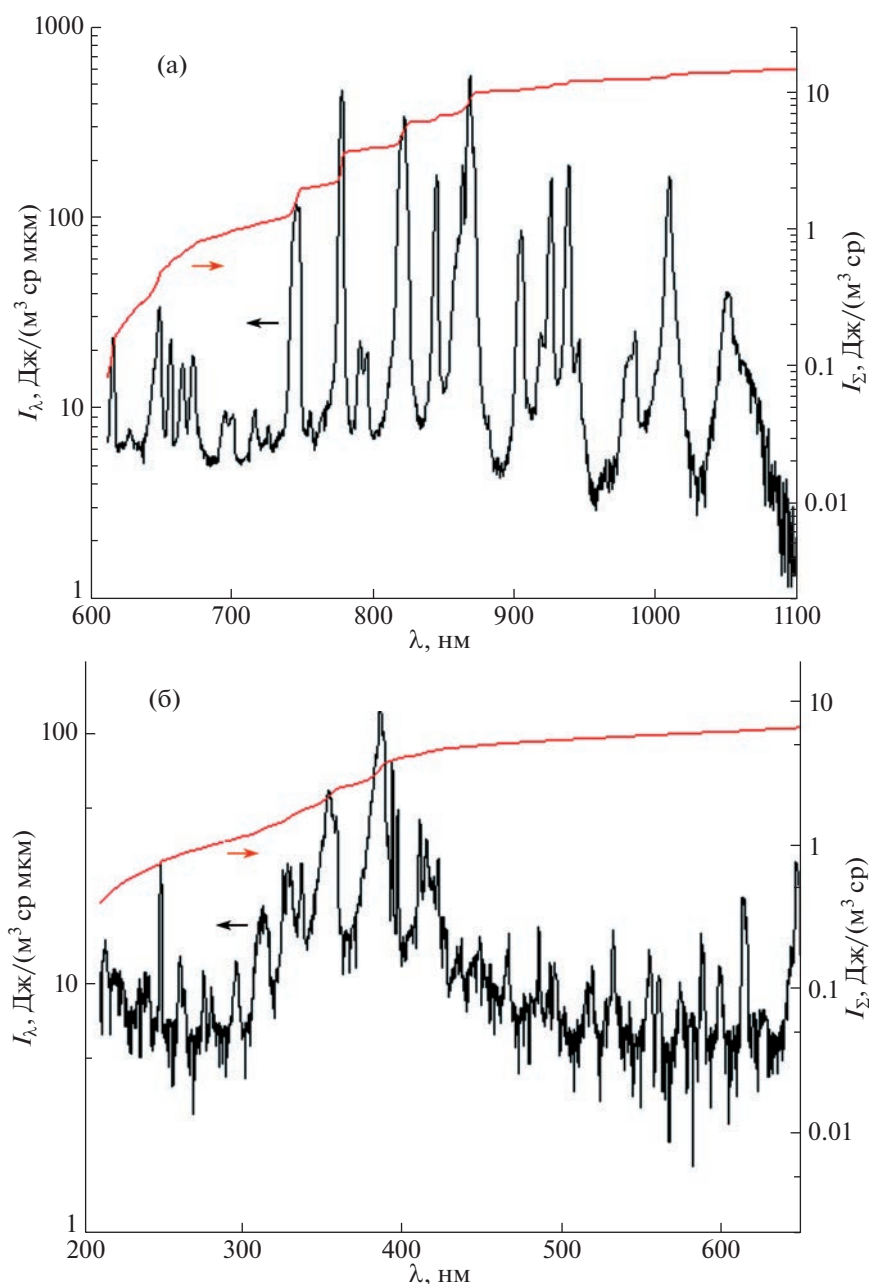


Рис. 1. Спектральная I_λ и суммарная I_Σ плотность излучения ударно нагретого воздуха в VIS/IR (а) и UV/VIS (б) спектральных диапазонах при начальном давлении $p_0 = 0.25$ Торр и скорости ударной волны $V_{\text{SW}} = 10.5$ км/с.

Причины появления атомарных линий углерода и водорода в спектре излучения ударно нагретого воздуха связаны с присутствием в окружающем воздухе CO_2 , паров воды и углеродсодержащих примесей, для удаления которых требуются дополнительные меры.

На рис. 1 приведена также суммарная плотность излучения I_Σ в VIS/IR и UV/VIS спектральных диапазонах, по которой можно оценить вклад этих диапазонов в общую интенсивность излучения. Видно, что суммарное излучение в интервале длин волн $\lambda = 600\text{--}1100$ нм примерно в два раза больше соответствующей величины для диапазона длин волн $\lambda = 200\text{--}600$ нм, что согласуется с результатами измерений интенсивности излучения, полученными на электроразрядной ударной установке EAST (Electric Arc Shock Tube), эксплуатируемой в Исследовательском центре NASA Ames [19]. Следует отметить, что UV/VIS спектральная область является одной из наиболее сложных областей для моделирования, так как, с одной стороны, в ней преобладает фоно-

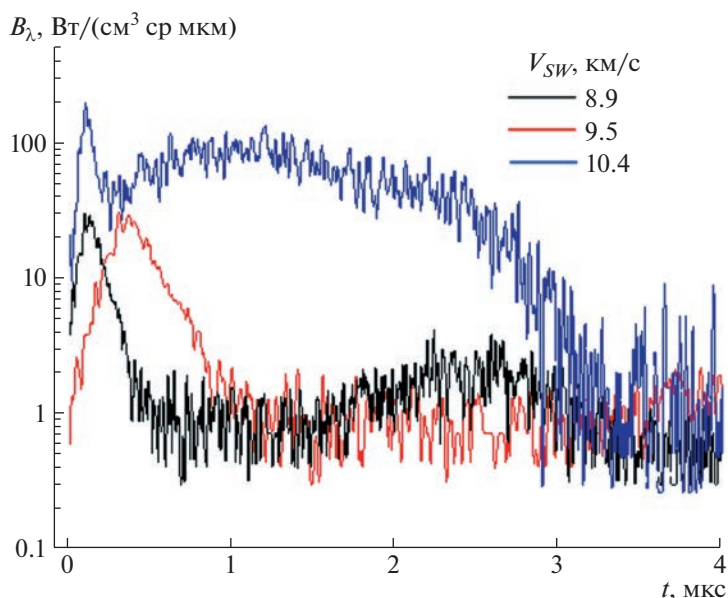


Рис. 2. Эволюция интенсивности излучения атома кислорода на длине волны $\lambda = 777$ нм при $p_0 = 0.25$ Торр и различных значениях V_{SW} .

вое излучение, которое включает в себя тормозное и фото-рекомбинационное излучение электронов низкотемпературной плазмы [20]. С другой стороны, из-за наложения как атомных, так и молекулярных эмиссионных линий к анализу UV/VIS области должен применяться иной подход, чем к VIS/IR области, в которой излучение испускается только атомарными частицами [21].

Большую роль в тестировании радиационно-столкновительных моделей, описывающих излучение ударно нагретого воздуха, играют временные характеристики излучения [22]. На рис. 2 показаны временные спектрограммы излучения линии атома кислорода на длине волны $\lambda = 777$ нм, полученные при $p_0 = 0.25$ Торр и разных скоростях ударной волны. Видно, что по мере протекания процесса резкий всплеск излучения на начальной стадии, связанный с неравновесностью процесса, сменяется равновесной зоной, которая по протяженности времени процесса значительно превышает неравновесную зону. Максимум интенсивности в неравновесной зоне растет с увеличением V_{SW} . Одновременно увеличивается интенсивность излучения в равновесной зоне, причем при скоростях ударной волны выше 10.4 км/с интенсивности излучения в неравновесной и равновесной зонах становятся примерно одинаковыми. Это говорит о том, что при больших скоростях ударной волны неравновесные процессы не дают большой вклад в общую интенсивность излучения. Аналогичное поведение временных спектрограмм излучения характерно также для молекулярных полос [13].

На рис. 3 показано изменение интенсивности излучения атома кислорода на длине волны $\lambda = 822$ нм при $V_{SW} = 9.8$ км/с. Как и в предыдущем случае, четко фиксируются неравновесная и равновесная зоны излучения. Неравновесная зона представляет собой узкий короткий пик, быстро переходящий в равновесную зону излучения по мере увеличения времени процесса. Равновесная зона характеризуется постепенным нарастанием интенсивности излучения до максимального значения, примерно совпадающего с пиковой интенсивностью неравновесного излучения, с последующим затуханием интенсивности к моменту $t = 5$ мкс. Данные измерений записаны с помощью измерительных каналов НІ и НІІ, использующих разные спектрографы. Этим объясняются незначительные различия в приведенных спектрограммах.

Временные характеристики излучения ударно нагретого воздуха, измеренные на определенных длинах волн, позволяют определить эффективное время излучения Δt , которое служит критерием для пересчета объемной плотности энергии излучения I_λ на объемную мощность излучения B_λ , обычно измеряемую в единицах Вт/(см³·мкм·ср). Процедура вычисления Δt состоит в замене временной осциллограммы излучения, изображенной на рис. 2, на равный ей по площади прямоугольник, высота которого равна максимальному значению мощности излучения на осциллограмме, а ширина принимается равной эффективному времени излучения Δt [16].

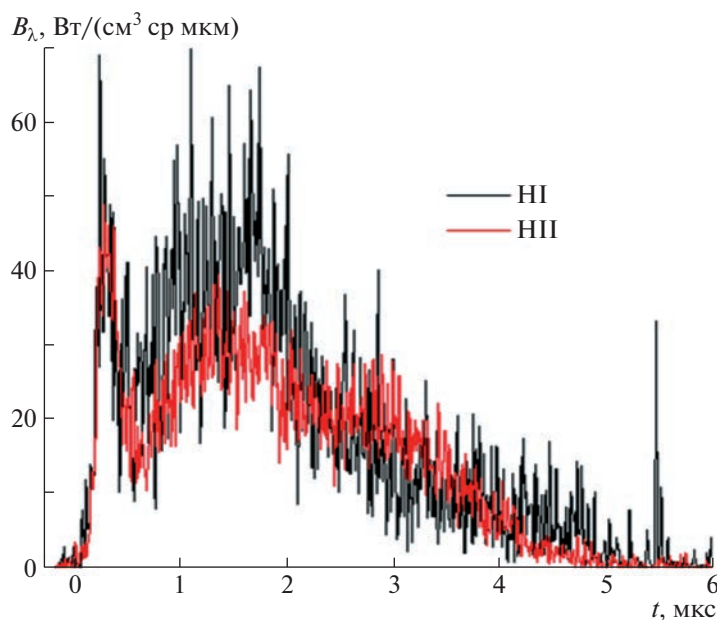


Рис. 3. Временные зависимости излучения атома кислорода на длине волны $\lambda = 822$ нм, полученные с помощью измерительных каналов NI и NII при $p_0 = 0.25$ Торр и $V_{SW} = 9.8$ км/с.

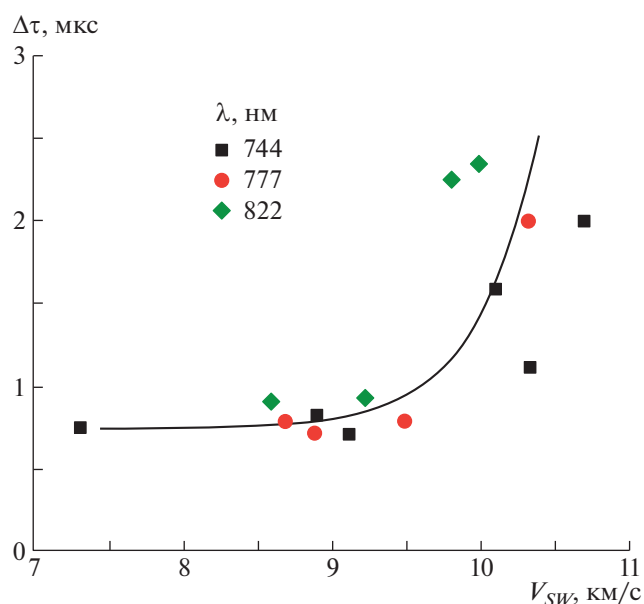


Рис. 4. Зависимость эффективного времени излучения $\Delta\tau$ атомарных спектральных линий от скорости ударной трубы: точки — экспериментальные данные, линия — аппроксимирующая кривая.

На рис. 4 показана зависимость величины $\Delta\tau$ от скорости ударной волны V_{SW} для некоторых атомарных линий азота и кислорода. Анализ рисунка показывает, что эффективное время излучения $\Delta\tau$ увеличивается с ростом V_{SW} независимо от длины волны излучения. Аналогичное поведение величины $\Delta\tau$ наблюдается и для излучения молекулярных полос, характерных для UV/VIS спектрального диапазона [13].

Спектрограмма для объемной мощности излучения B_λ получается из соответствующей спектрограммы для объемной плотности энергии излучения I_λ , если значения последней разделить на эффективное время излучения $\Delta\tau$. На рис. 5а показан пример панорамного спектра ударно на-

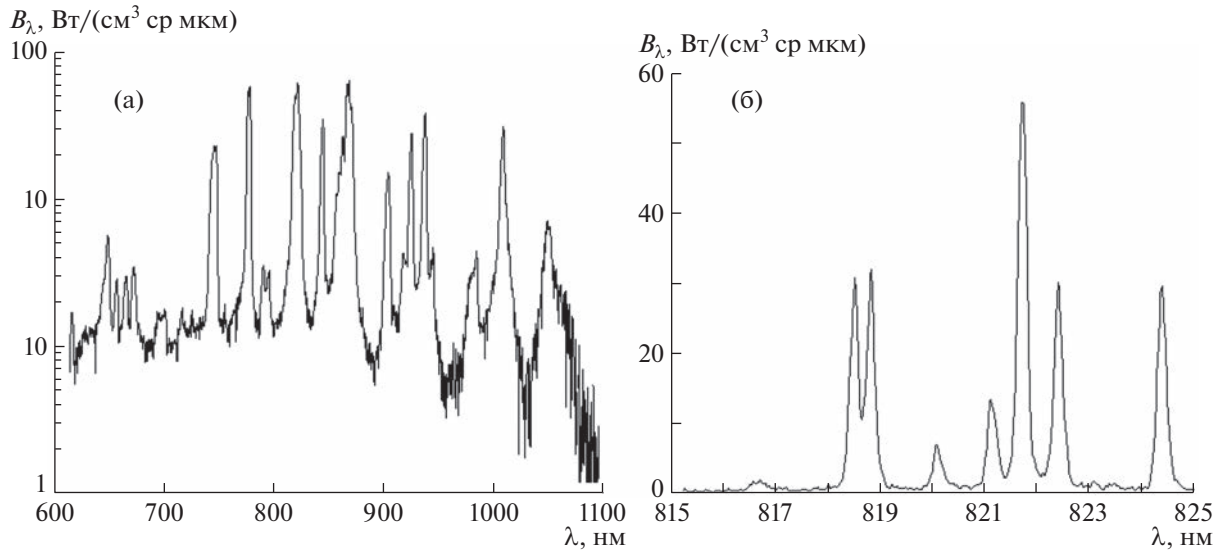


Рис. 5. Объемная мощность излучения ударно нагретого воздуха во всем VIS/IR спектральном диапазоне (а) и на участке $\lambda = 815\text{--}825$ нм (б) при начальном давлении $p_0 = 0.25$ Торр и скорости ударной волны $V_{SW} = 9.8$ км/с.

гретого воздуха, представленного в виде зависимости величины B_λ от длины волны излучения λ . Подобная процедура полезна при сопоставлении панорамных спектров, полученных в настоящей работе, с данными зарубежных исследований, в которых спектрограммы излучения, как правило, приведены в единицах B_λ . Следует отметить, что эффективные времена излучения Δt для разных спектральных линий при определенном значении скорости ударной волны могут отличаться друг от друга, как это показано на рис. 4. Поэтому использование одного значения величины Δt для всего исследуемого спектрального диапазона может привести к большой погрешности при вычислении мощности излучения B_λ .

На рис. 5б показан участок панорамного спектра, изображенного на рис. 5а, который соответствует мультиплету атома азота с максимумом интенсивности на длине волны $\lambda = 821.6$ нм. Видно, что в более высоком разрешении мультиплет, представленный на рис. 5а одним пиком, распадается на серию полос разной интенсивности. Мультиплет описывает переход с уровня $2s^2 2p^2(^3P)3p$ на уровень $2s^2 2p^2(^3P)3s$ и состоит из семи полос на длинах волн $\lambda = 818.5, 818.8, 820.0, 821.1, 821.6, 822.3$ и 824.2 нм [17]. Переход от измеренных значений объемной плотности энергии излучения I_λ к объемной мощности излучения B_λ проведен при значении $\Delta t = 2.3$ мкс для данной длины волны излучения, которое получено на основании обработки временной спектрограммы, приведенной на рис. 3.

Зависимость объемной мощности излучения B_λ ударно нагретого воздуха от скорости ударной волны в VIS/IR спектральном диапазоне при начальном давлении газа перед ударной волной $p_0 = 0.25$ Торр показана на рис. 6. Видно, что максимум интенсивности излучения практически всех наблюдаемых атомарных линий увеличивается примерно в четыре раза при изменении V_{SW} от 8.9 до 10.4 км/с. Это связано, в первую очередь, с увеличением интенсивности ударной волны при увеличении ее скорости и, соответственно, с ростом температуры газа за ударной волной. Более высокая температура газа в свою очередь увеличивает степень диссоциации молекул газа, а также повышает заселенность возбужденных уровней образующихся атомов. Для определения эффективных времен излучения Δt при пересчете измеренных значений объемной плотности энергии излучения I_λ на объемную мощность излучения B_λ использовалась аппроксимирующая кривая, приведенная на рис. 4.

Измеренные спектрограммы излучения ударно нагретого воздуха в VIS/IR спектральной области достаточно хорошо согласуются с результатами соответствующих измерений, полученных на зарубежных установках. К ним в первую очередь относится электроразрядная установка EAST, эксплуатируемая в Исследовательском центре NASA Ames (США), где проведено большое количество измерений радиационных характеристик высокотемпературного воздуха в различных спектральных диапазонах [23]. На рис. 7 проводится сравнение панорамных спектров излучения

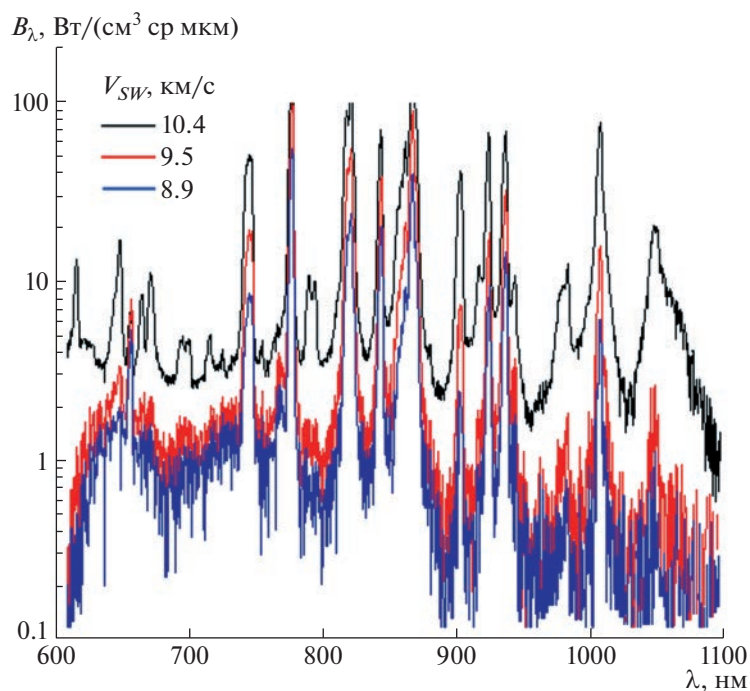


Рис. 6. Объемная мощность излучения ударно нагретого воздуха при начальном давлении $p_0 = 0.25$ Торр и различных скоростях ударной волны.

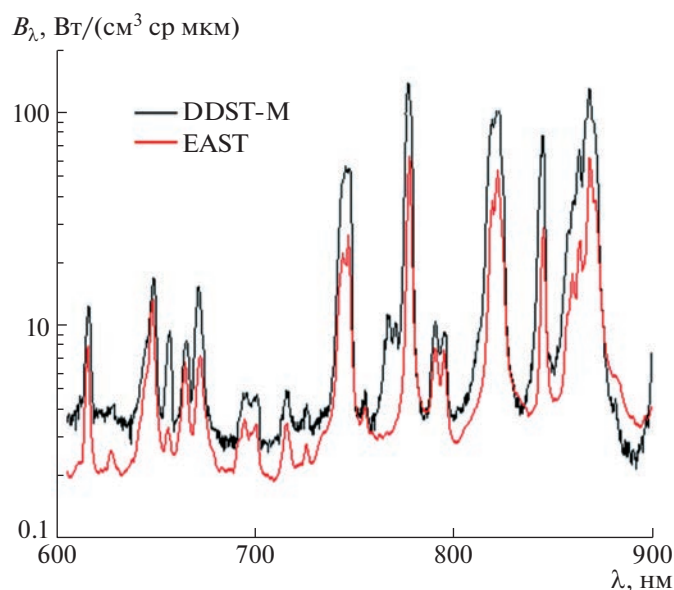


Рис. 7. Сравнение объемных мощностей излучения ударно нагретого воздуха в VIS/IR спектральной области, полученных на ударной трубе DDST-M при $p_0 = 0.25$ Торр и $V_{SW} = 10.1$ км/с и ударной установке EAST при $p_0 = 0.2$ Торр и $V_{SW} = 10.3$ км/с [23].

в VIS/IR спектральной области, полученных на ударных установках DDST-M и EAST примерно в одинаковых условиях. Видно, что обе спектральные кривые в общих чертах повторяют друг друга. Данные настоящей работы лежат несколько выше результатов измерений на EAST, что можно объяснить более высоким давлением в экспериментах на DDST-M. Следует также отметить, что в экспериментах на установке EAST, как правило, фиксируется излучение из равновес-

ной зоны ударной волны, где интенсивность излучения практически не меняется [24]. В экспериментах на DDST-M CCD приемник суммирует излучение на каждой длине волны из всей излучающей зоны (неравновесной и равновесной).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведенных измерений спектральных характеристик ударно нагретого воздуха в видимой и ближней инфракрасной областях спектра при скоростях ударной волны до 11.4 км/с показывают, в данном спектральном диапазоне регистрируется в основном излучение атомарных линий азота и кислорода. Интенсивность излучения растет с увеличением скорости ударной волны.

Временные характеристики излучения ударно нагретого воздуха, измеренные на определенных длинах волн, играют большую роль в тестировании радиационно-столкновительных моделей. Они позволяют также определить эффективное время излучения Δt , которое служит критерием для пересчета объемной плотности энергии излучения I_λ на объемную мощность излучения B_λ .

Измеренные панорамные спектры излучения ударно нагретого воздуха в VIS/IR спектральной области достаточно хорошо согласуются с результатами соответствующих измерений, полученных на зарубежных установках и, в частности, на электроразрядной установке EAST, эксплуатируемой в Исследовательском центре NASA Ames (США).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wessen R.R., Propster P., Cable M. et al. Developing compelling and science-focused mission concepts for NASA competed mission proposals // *Acta Astronaut.* 2022. V. 191. P. 502–509.
2. Leitner J., Hyde T. Modernizing NASA's risk classification system // *Acta Astronaut.* 2023. V. 202. P. 333–340.
3. Суржиков С.Т., Яцухно Д.С. // Анализ летных данных по конвективному и радиационному нагреву поверхности спускаемого марсианского космического аппарата SCHIAPARELLI // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 6. С. 73–84.
4. Суржиков С.Т. Пространственная задача радиационной газовой динамики командного модуля Апполон-4 при сверхорбитальном входе в атмосферу // *Изв. РАН. МЖГ.* 2018. № 2. С. 149–160.
5. Uyanna O., Najafi H. Thermal protection systems for space vehicles: A review on technology development, current challenges and future prospects // *Acta Astronaut.* 2020. V. 176. P. 341–356.
6. Колесников А.Ф., Васильевский С.А., Щелоков С.Л., Чаплыгин А.В., Галкин С.С. Анализ возможностей локального моделирования аэродинамического нагрева в мощном ВЧ-плазматроне ВГУ-3 // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 6. С. 116–124.
7. Reyner P. Survey of high-enthalpy shock facilities in the perspective of radiation and chemical kinetics investigations // *Prog. Aerospace Sci.* 2016. V. 85. P. 1–32.
8. Brandis A.M., Johnson C.O., Cruden B.A. Investigation of non-equilibrium radiation for Earth entry // *AIAA Paper* 2016-3690. 19 p.
9. Kozlov P.V., Surzhikov S.T. Nonequilibrium radiation NO in shocked air // *AIAA Paper* 2017-0157. 16 p.
10. Gu S., Olivier H. Capabilities and limitations of existing hypersonic facilities // *Prog. Aerospace Sci.* 2020. V. 113. № 100607. 27 p.
11. Герасимов Г.Я., Козлов П.В., Забелинский И.Е., Быкова Н.Г., Левашов В.Ю. Исследование радиационных характеристик высокотемпературных газов, проведенное в ударных трубах // *Химическая физика.* 2022. Т. 41. № 8. С. 17–30.
12. Быкова Н.Г., Забелинский И.Е., Ибрагимова Л.Б., Козлов П.В., Стовбун С.В., Тереза А.М., Шаталов О.П. Радиационные характеристики воздуха в ультрафиолетовой и вакуумно ультрафиолетовой областях спектра за фронтом сильных ударных волн // *Химическая физика.* 2018. Т. 37. № 2. С. 35–41.
13. Козлов П.В., Забелинский И.Е., Быкова Н.Г., Герасимов Г.Я., Левашов В.Ю. Экспериментальное исследование излучательных характеристик ударно-нагретого воздуха в ультрафиолетовой и видимой областях спектра // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 6. С. 85–93.
14. Kozlov P.V., Zabelinsky I.E., Bykova N.G., Gerasimov G.Ya., Levashov V.Yu., Tunik Yu.V. Experimental study of air radiation behind a strong shock wave // *Acta Astronaut.* 2022. V. 194. P. 461–467.
15. Cruden B., Martinez R., Grinstead J., Olejniczak J. Simultaneous Vacuum Ultraviolet through Near IR Absolute Radiation Measurement with Spatiotemporal Resolution in an Electric Arc Shock Tube // *AIAA Paper* 2009-4240. 13 p.

16. Козлов П.В., Забелинский И.Е., Быкова Н.Г., Акимов Ю.В., Левашов В.Ю., Герасимов Г.Я., Тереза А.М. Развитие методики регистрации интенсивности излучения газов за фронтом сильных ударных волн // Химическая физика. 2021. Т. 40. № 8. С. 26–33.
17. NIST Atomic Spectra Database, Version 5.10. Gaithersburg: NIST, 2022. <https://doi.org/10.18434/T4W30F>
18. Kazakov V.V., Kazakov V.G., Kovalev V.S., Meshkov O.I., Yatsenko A.S. Electronic structure of atoms: atomic spectroscopy information system // Phys. Scr. 2017. V. 92. № 105002. 6 p.
19. Brandis A.M., Johnston C.O., Cruden B.A., Prabhu D., Bose D. Uncertainty analysis and validation of radiation measurements for Earth reentry // J. Thermophys. Heat Trans. 2015. V. 29. P. 209–221.
20. Jung Y.-D., Kim C.-G. Classical bremsstrahlung radiation from electron–ion encounters in a nonideal plasma // J. Plasma Phys. 2022. V. 67. P. 191–197.
21. Lemal A., Jacobs C.M., Perrin M.-Y., Laux C.O., Tran P., Raynaud E. Prediction of nonequilibrium air plasma radiation behind a shock wave // J. Thermophys. Heat Trans. 2016. V. 30. P. 197–210.
22. Суржиков С.Т. Расчет неравновесного излучения ударных волн в воздухе с использованием двух моделей // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 1. С. 99–114.
23. Brandis A.M., Cruden B.A. Benchmark shock tube experiments of radiative heating relevant to earth re-entry // AIAA Paper. 2017. № 2017–1145.
24. Parker R., Dufrene A., Holden M., Wakeman T. Shock-front emission measurements at 10 km/s // AIAA Paper 2011–715. 11 p.