

ISSN 1024-7084

Номер 2

Март–Апрель 2024



ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Номер 2, 2024

Оценка начала ламинарно-турбулентного перехода на пластине при полете в атмосфере Марса <i>Ю. Н. Григорьев, И. В. Еришов</i>	3
Нелинейные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости в невесомости при низких частотах электрического поля <i>В. А. Ильин</i>	17
Аналитическое решение задачи о нагнетании или снижении пластового давления в коллекторе с трещиной <i>А. М. Ильясов, В. Н. Киреев</i>	23
Начальный этап слияния составной капли в импактном режиме <i>Ю. Д. Чашечкин, А. Ю. Ильиных, Ш. Х. Хайирбеков</i>	35
Автомодельное решение первой задачи Стокса для неньютоновских жидкостей со степенным законом вязкости <i>В. Н. Колодежнов</i>	52
Развитие волнового движения, вызванного придонными периодическими возмущениями в двухслойном сдвиговом потоке <i>И. В. Стурова</i>	58
Аномальная интенсификация теплообмена при отрывном обтекании зигзагообразного плотного пакета наклонных канавок на стенке канала при различных температурных граничных условиях <i>С. А. Исаев, О. О. Мильман, А. А. Ключ, Д. В. Никущенко, Д. С. Хмара, Л. П. Юнаков</i>	71
Линейные волны на мелкой воде над неровным дном, замедляющиеся у берега <i>И. Е. Мельников, Е. Н. Пелиновский</i>	94
Влияние отсоса газа на неустойчивость поперечного течения при обтекании стреловидного крыла <i>А. В. Новиков, А. О. Образ, Д. А. Тимохин</i>	105
Численное моделирование взаимодействия слабых ударных волн и сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине с затупленной передней кромкой <i>И. В. Егоров, Н. К. Нгуен, П. В. Чувахов</i>	113
Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом системой радиальных трещин <i>Р. А. Башмаков, Д. А. Насырова, З. Р. Хакимова</i>	126
Определение формы и размеров молекул полимеров в растворах с использованием диффузионной ЯМР-релаксации <i>В. А. Иванова, А. В. Максимычев, П. Л. Меньшиков, А. Р. Пашутин А. М. Перепухов, А. Н. Рожков, М. В. Царьков</i>	135
Разрушение детонационной волны в плоском канале с множественными барьерами <i>Т. А. Журавская, В. А. Левин</i>	139
Асимптотическое исследование течений, индуцированных колебаниями цилиндрических тел <i>А. Н. Нуриев, О. Н. Зайцева, А. М. Камалутдинов, Е. Е. Богданович, А. Р. Баймуратова</i>	150

CONTENTS

No. 2, 2024

Estimate of the Onset of Laminar-Turbulent Transition on a Plate in Flight in the Mars Atmosphere <i>Yu. N. Grigor'ev, I. V. Ershov</i>	3
Nonlinear Regimes of Electric Convection of Poorly Conducting Fluids in Weightlessness at Low Frequencies of an Electric Field <i>V. A. Il'in</i>	17
Analytical Solution to the Problem of Injection or Reduction of the Formation Pressure in the Reservoir with a Fracture <i>A. M. Il'yasov, V. N. Kireev</i>	23
The Initial Stage of the Coalescence of a Compound Drop in an Impact Regime <i>Yu. D. Chashechkin, A. Yu. Il'inykh, Sh. Kh. Khairbekov</i>	35
Self-Similar Solution of the First Stokes Problem for Non-Newtonian Fluids with Power-Law Viscosity <i>V. N. Kolodezhnov</i>	52
Development of the Wave Motion Induced by Near-Bottom Periodic Disturbances in a Two-Layer Shear Current <i>I. V. Sturova</i>	58
Anomalous Heat Transfer Enhancement in Separated Flow over a Zigzag-Shaped Dense Package of Inclined Grooves in a Channel Wall at Different Temperature Boundary Conditions <i>S. A. Isaev, O. O. Mil'man, A. A. Klyus, D. V. Nikushchenko, D. S. Khmara, L. P. Yunakov</i>	71
Linear waves in shallow water over an uneven bottom, slowing down near the shore <i>I. E. Melnikov, E. N. Pelinovsky</i>	94
Gas Suction Effect on the Crossflow Instability in Flow Past a Swept Wing <i>A. V. Novikov, A. O. Obraz, D. A. Timokhin</i>	105
Numerical Simulation of the Interaction between Weak Shock Waves and Supersonic Boundary Layer on a Flat Plate with the Blunt Leading Edge <i>I. V. Egorov, N. K. Nguen, P. V. Chuvakhov</i>	113
Natural Vibrations of Fluid in a Well Connected with the Reservoir by a System of Radial Fractures <i>R. A. Bashmakov, D. A. Nasyrova, Z. R. Khakimova</i>	126
Determination of the Shape and Dimensions of the Polymer Molecules in Solutions Using Diffusional NMR Relaxation <i>V. A. Ivanova, A. V. Maksimych, P. L. Men'shikov, A. R. Pashutin, A. M. Perepukhov, A. N. Rozhkov, M. V. Tsar'kov</i>	135
Failure of a Detonation Wave in a Plane Channel with Multiple Obstacles <i>T. A. Zhuravskaya, V. A. Levin</i>	139
Asymptotic Study of Flows Induced by Oscillations of Cylindrical Bodies <i>A. N. Nuriev, O. N. Zaitseva, A. M. Kamalutdinov, E. E. Bogdanovich, A. R. Baimuratova</i>	150

УДК 532.5

ОЦЕНКА НАЧАЛА ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА НА ПЛАСТИНЕ ПРИ ПОЛЕТЕ В АТМОСФЕРЕ МАРСА

© 2024 г. Ю. Н. Григорьев^{a,*}, И. В. Ершов^{a,b,**}

^a Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск, Россия

^b Новосибирский государственный аграрный университет, Новосибирск, Россия

* E-mail: grigor@ict.nsc.ru

** E-mail: ivershov1969@gmail.com

Поступила в редакцию 07.10.2023 г.

После доработки 03.12.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

На основе e^N -метода выполнены сравнительные расчеты положения начала зоны ламинарно-турбулентного перехода для двух точек на траектории посадки космического аппарата Pathfinder на поверхность Марса. В расчетах использовалась трехкомпонентная модель термодинамически неравновесной смеси $\text{CO}_2\text{--CO--O}$. Набор частот пространственных возмущений находился по нейтральным кривым для первых неустойчивых мод временных возмущений. Число Рейнольдса перехода $\text{Re}_{\delta T}$ определялось по огибающим семейств кривых N -факторов при $N_T = 8$. В гиперзвуковом режиме при $M = 12.6$ учет развитой термодинамической неравновесности приводит к значительному снижению статической температуры газа в нижней части пограничного слоя. В результате начало зоны ламинарно-турбулентного перехода сдвигается вниз по потоку примерно на 9% по сравнению со случаем совершенного газа.

Ключевые слова: атмосфера Марса, линейная устойчивость, ламинарно-турбулентный переход, e^N -метод, интегральная кривая N -фактора

DOI: 10.31857/S1024708424020015 EDN: RJTCMO

Полеты космических аппаратов к Марсу, достаточно полный обзор которых представлен в [1], инициировали обширную литературу, посвященную проблемам аэротермодинамики гиперзвукового полета и посадки в марсианской атмосфере [2, 3]. Но до последнего времени рассчитывались относительно малые беспилотные аппараты, движущиеся с большими перегрузками по баллистическим траекториям [4, 5].

Вместе с тем по прогнозам [1] первые пилотируемые полеты на Марс начнутся уже в следующем десятилетии. Эскизные проекты обитаемых космических аппаратов (КА), предназначенных для доставки экспедиций на планету с безопасными перегрузками, представляются конструкциями с характерными размерами в десятки метров. В частности, рассматривается проект марсианского КА, близкого по конфигурации и размерам к аппаратам типа “Буран” (Space Shuttle).

Другой вариант представляет надуваемый на траектории спуска гиперконус с диаметром основания около пятидесяти метров. Подобные космические аппараты на многовитковых траекториях в атмосфере Марса будут использовать аэродинамическое торможение. При этом на характерных для них протяженных поверхностях малой кривизны за головной ударной волной должны развиваться гипер- и сверхзвуковые пограничные слои (ПС).

При проектировании систем управления и теплозащиты КА необходимы расчеты устойчивости пограничного слоя для оценки положения зоны перехода к турбулентности, где возникает пик теплового потока. Для расчетов положения зоны перехода широко используется e^N -метод, основанный на представлении об экспоненциальном нарастании пространственных возмущений до определенного уровня амплитуды A_T к началу ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП). Амплитуды для частотного спектра нарастающих возмущений рассчитываются на основе линейной теории [6, 7] в соответствии с соотношением

$$A_T = A_0 \exp(N_T),$$

где A_T – амплитуда в точке перехода; A_0 – амплитуда начального возмущения; N_T – так называемый N -фактор перехода, значение которого принимается в зависимости от конкретной задачи.

В расчетах необходимо использовать реальные характеристики марсианской атмосферы, около 96% которой составляет углекислый газ CO_2 , физико-химическая кинетика которого существенно сложнее кинетики двухатомных компонент воздуха. Несмотря на разреженность и низкую температуру атмосферы Марса высокие скорости на траектории посадки в пределах 2–6 км/с определяют высокие температуры в ПС за ударной волной, которые в верхней части траектории существенно превышают температуру полной диссоциации CO_2 . При этом в пограничном слое возникает многокомпонентная термодинамически неравновесная смесь атомов и колебательно возбужденных молекул, для учета свойств которой необходима адекватная физико-математическая модель.

В статье выполнены сравнительные расчеты положения начала зоны ЛТП для двух характерных режимов течения гиперзвукового пограничного слоя, соответствующих 66-й и 87-й секундам полета аппарата Pathfinder при посадке на Марс [5]. В данном случае они рассматриваются как последовательные положения на многовитковой траектории в процессе аэродинамического торможения.

В качестве наиболее опасного взято двумерное возмущение моды II, совпадающее с направлением несущего потока. Значение показателя степени нарастания возмущений выбрано $N = 8$. Для расчета стационарных течений использовались локально автомодельные уравнения плоского пограничного слоя на пластине с изотермической некаталитической поверхностью.

1. МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В качестве исходной математической модели рассматривается система двухтемпературных уравнений сверхзвукового течения углекислого газа, учитывающая колебательную релаксацию и реакции диссоциации–рекомбинации с образованием молекул угарного газа CO и атомарного кислорода O:



Здесь частица – партнер по столкновению A – представляет собой одну из компонент смеси CO_2 –CO–O. Рассматриваемая модель в сравнительных расчетах [3] аэродинамических характеристик при спуске конического КА в атмосфере Марса показала малое отличие от моделей с более сложной химической кинетикой.

Относительно молекул угарного газа CO принято предположение [8], что при диссоциации CO_2 молекула CO мгновенно приходит в термодинамическое равновесие со средой, а ее дальнейшую диссоциацию можно не рассматривать. При этом колебательная энергия молекул CO находится в состоянии равновесия и характеризуется статической (поступательной) температурой потока. Это связано с тем, что характерное время диссоциации CO значительно больше, чем для молекулы углекислого газа CO_2 .

Система гидродинамических переменных включает в себя скорость потока \mathbf{u} , плотность смеси ρ , массовые доли молекул CO_2 – Y_1 , CO – Y_2 и атомов O – Y_3 , статическое давление p , удельную внутреннюю энергию смеси, связанную с квазиравновесными внутренними степенями свободы e_i , удельную колебательную энергию молекул CO_2 – e_{v1} , поступательную (статическую) температуру T , колебательную температуру T_v .

Поскольку сумма массовых долей компонент смеси равна единице, то массовая доля любой компоненты может быть выражена через массовые доли двух других компонент, в частности $Y_3 = 1 - Y_1 - Y_2$. Замкнутая система в терминах этих переменных включает следующие уравнения.

Уравнение неразрывности смеси в целом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.2)$$

Уравнения неразрывности компонентов смеси

$$\frac{\partial \rho Y_i}{\partial t} + \nabla(\rho Y_i \mathbf{u}) = -\nabla J_i + W_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.3)$$

Уравнения импульсов для смеси

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \sigma. \quad (1.4)$$

Уравнение для плотности внутренней поступательно-вращательной энергии смеси

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} e_t + p \nabla \mathbf{u} = \nabla \left[\lambda \nabla T + (\sigma \mathbf{u}) - \sum_i c_{pi} T \mathbf{J}_i \right] - \sum_i h_{0i} W_i - R_{v1}. \quad (1.5)$$

Уравнение для плотности колебательной энергии CO_2

$$\frac{\partial \rho Y_1 e_{v1}}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u} Y_1 e_{v1}) = \nabla (\lambda_{v1} \nabla T_v - e_{v1} \mathbf{J}_1) + R_{v1}. \quad (1.6)$$

Уравнение состояния газовой смеси

$$p = \rho R T \sum_i (Y_i / M_i). \quad (1.7)$$

Здесь \mathbf{J}_i – плотность диффузионного потока i -й компонента смеси; W_i – скорость производства i -й компоненты смеси в химических реакциях. Тензор вязких напряжений [9]

$$\sigma = \eta \left[(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^{\text{Tr}} \right] + \left(\eta_b - \frac{2}{3} \eta \right) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I},$$

где η , η_b – динамическая и объемная вязкости смеси; R_{v1} – источниковый член, описывающий колебательно-диссоциативное взаимодействие; $c_{pi} = c_{vi} + R/M_i$ – удельная теплоемкость при постоянном давлении, связанная с квази-равновесными внутренними степенями свободы; h_{0i} – удельная энтальпия образования i -го компонента; λ – теплопроводность смеси; λ_{v1} – теплопроводность, обусловленная колебательными модами молекул CO_2 ; M_i – молярная масса i -й компоненты; R – универсальная газовая постоянная.

Плотность внутренней поступательно-вращательной энергии молекул смеси определяется следующим образом:

$$e_t = \sum_{s=1}^3 Y_s e_{t,s} = \sum_{s=1}^3 Y_s c_{v,s} T,$$

где $c_{vi} = c_{vi}^r + c_{vi}^{\text{rot}}$; $c_{vi}^r, c_{vi}^{\text{rot}}$ – теплоемкости квазиравновесных степеней свободы i -й компоненты при постоянном объеме. Теплоемкости c_{vi} равны $c_{v1} = 5R/(2M_1)$, $c_{v2} = 7R/(2M_2)$, $c_{v3} = 3R/(2M_3)$.

Здесь в равновесную теплоемкость угарного газа в связи со сделанным предположением добавлена равновесная теплоемкость ее колебательной моды $c_{v2} = R/M_2$. Соответственно, теплоемкости при постоянном давлении есть $c_{p1} = 7R/(2M_1)$, $c_{p2} = 9R/(2M_2)$, $c_{p3} = 5R/(2M_3)$. Числовые значения энтальпий образования h_{0i} для компонент смеси CO_2 – CO – O приведены в табл. 1 [10].

Таблица 1. Стандартные энтальпии образования

Компонент смеси	CO_2	CO	O
h_{0i} , кДж/моль	–393.51	–110.52	249.18

1.1. Коэффициенты переноса

Коэффициенты вязкости η и теплопроводности λ смеси вычисляются по формулам Вилке [11]

$$f = \sum_j \frac{X_j f_j}{\Phi_{jf}}, \quad \Phi_{jf} = \sum_i \frac{X_i \left[1 + \sqrt{f_j/f_i} (M_i/M_j)^{1/4} \right]^2}{\sqrt{8(1 + M_j/M_i)}}, \quad X_j = \frac{Y_j}{M_j} \left(\sum_i \frac{Y_i}{M_i} \right)^{-1},$$

где f_i – вязкость или теплопроводность i -й компоненты смеси. Вязкость i -й компоненты рассчитывается по формуле Блотнера [12]:

$$\eta_i(T) = 0.1 \exp[(A_i \ln T + B_i) \ln T + C_i],$$

которая применима при высоких температурах вплоть до 10^4 К. A_i , B_i и C_i здесь являются постоянными величинами [4], числовые значения которых для компонент смеси CO_2 – CO – O приведены в табл. 2.

Таблица 2. Коэффициенты A_i , B_i и C_i вязкой модели Блотнера

Компонент смеси	A_i	B_i	C_i
CO ₂	-0.01952739	1.047818	-14.32212
CO	-0.01952739	1.013295	-13.97873
O	0.02031440	0.429440	-11.60314

Для вычисления теплопроводности i -й компоненты λ_i используются модифицированные соотношения Эйкена [13]:

$$\lambda_i = \lambda_i^{tr} + \lambda_i^{rot} = \left(\frac{5}{2} c_{Vi}^{tr} + \frac{6}{5} c_{Vi}^{rot} \right) \eta_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Теплопроводности λ_{vi} , обусловленные колебательными модами молекул CO₂ и CO, вычисляются следующим образом:

$$\lambda_i^{vib} = \frac{6}{5} c_{Vi}^{vib} \eta_i, \quad c_{V1}^{vib} = \frac{de_{v1}}{dT_v}, \quad c_{V2}^{vib} = \frac{R}{M_2}, \quad i = 1, 2.$$

Подстановка значений теплоемкостей дает

$$\lambda_1 = \left(\frac{99 R}{20 M_1} \right) \eta_1, \quad \lambda_2 = \left(\frac{123 R}{20 M_2} \right) \eta_2, \quad \lambda_3 = \left(\frac{15 R}{4 M_3} \right) \eta_3.$$

Плотность диффузионного потока определяется законом Фика:

$$\mathbf{J}_i = -\rho D_i \nabla Y_i,$$

где D_i – эффективный коэффициент диффузии i -й компоненты. Аналогично [3, 14, 15] предполагается, что диффузия компонент смеси характеризуется с помощью постоянного числа Шмидта $Sc = 0.5$. При этом

$$\rho D_i = \frac{\eta_i}{Sc}. \quad (1.8)$$

1.2. Модель колебательно-диссоциативного взаимодействия

Колебательно-диссоциативное взаимодействие описывается источником членом R_{v1} , который входит с противоположными знаками в правые части уравнений (1.5) и (1.6) и записывается следующим образом:

$$R_{v1} = R_{v1}^{vib} + R_{v1}^{chem}, \quad (1.9)$$

где первое слагаемое определяет вклад колебательной релаксации возбужденных колебательных мод молекул CO₂, а второе слагаемое – связь между химическими реакциями и колебательной релаксацией. При этом первое слагаемое в правой части (1.9) выражается формулой Ландау–Теллера

$$R_{v1}^{vib} = \rho Y_1 \left(\frac{e_{v1}(T) - e_{v1}(T_v)}{\tau_1} \right),$$

где τ_1 – характерное время колебательной релаксации.

Молекула CO₂ имеет три колебательные моды – продольные симметричную и антисимметричную, а также дважды вырожденную изгибную, характеризующиеся различными временами релаксации. В много-температурном приближении им соответствуют три колебательные температуры. Однако близость характерных частот симметричной и изгибной мод [3] и рассматриваемый высокотемпературный диапазон позволяет характеризовать [16, 17], колебательную энергию молекулы CO₂ одной колебательной температурой T_v . В приближении гармонического осциллятора колебательная энергия молекулы CO₂ записывается следующим образом [4, 16]:

$$e_{v1} = \frac{R}{M_1} \left(\frac{\theta_1}{\exp\left(\frac{\theta_1}{T_v}\right) - 1} + \frac{2\theta_2}{\exp\left(\frac{\theta_2}{T_v}\right) - 1} + \frac{\theta_3}{\exp\left(\frac{\theta_3}{T_v}\right) - 1} \right),$$

где $\theta_1 = 1903$ К, $\theta_2 = 945$ К, $\theta_3 = 3329$ К – характеристические колебательные температуры первой, второй и третьей мод.

Для времени релаксации τ_1 в [17] предложена универсальная зависимость

$$p\tau_1 = \exp(36.5T^{-1/3} - 17.71),$$

где τ_1 измеряется в секундах, давление p – в атмосферах.

Второе слагаемое в правой части (1.9), определяющее связь между химическими реакциями и колебательной релаксацией, представляется в виде

$$R_{v1}^{chem} = e_{v1} W_1.$$

1.3. Химические реакции

В статье рассматриваются три реакции диссоциации–рекомбинации, различающиеся частицей-партнером по столкновению, которые записывается в виде (1.1). Скорости производства компонент смеси в системе (1.2)–(1.7) определяется следующим образом:

$$W_1 = -\rho^2 M_1 \left(k_f \frac{Y_1}{M_1} - k_b \rho \frac{Y_2 Y_3}{M_2 M_3} \right) \left(\frac{Y_1}{M_1} + \frac{Y_2}{M_2} + \frac{Y_3}{M_3} \right), \quad W_2 = -\left(\frac{M_2}{M_1} \right) W_1, \quad W_3 = -\left(\frac{M_3}{M_1} \right) W_1.$$

Используется чисто аррениусовская кинетика, определяемая формулами [4, 16]

$$k_f = C_f T^f \exp\left[-\frac{\theta_f}{T}\right], \quad k_b = C_b T^b \exp\left[-\frac{\theta_b}{T}\right].$$

Более сложные модели, как известная двухтемпературная модель Парка [2], в которых учитывается возбуждение колебательных степеней молекул, обычно используются в более, чем пограничный слой, экстремальных течениях, таких как ударные волны и слои.

Принимается, что для рассматриваемых здесь реакций константы скоростей прямой k_f и обратной k_b реакций не зависят от вида частицы – партнера по столкновению. Такой выбор связан с тем, что нас в первую очередь интересует реакция диссоциации CO_2 , для которой это имеет место [18].

В расчетах использовались следующие числовые данные: $C_f = 3.7 \times 10^{11} \text{ м}^3/(\text{кмоль} \times \text{с})$, $C_b = 6.1 \times 10^3 \text{ м}^6/(\text{кмоль}^2 \times \text{с})$, $f = 0$, $b = 0.75$, $\theta_f = 52\,500$ К и $\theta_b = -10\,240$ К [4, 16, 18].

2. ОБЕЗРАЗМЕРИВАНИЕ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

В качестве характерных величин для обезразмеривания уравнений (1.2)–(1.7) выбраны текущее расстояние вдоль пластины $x = L$, параметры невозмущенного потока вне пограничного слоя, отмеченные индексом ∞ : скорость U_∞ , плотность ρ_∞ и температура T_∞ . Коэффициенты переноса смеси η , λ и ее компонент η_i , λ_i обезразмериваются на значения коэффициентов переноса для CO_2 в невозмущенном потоке $\eta_{1\infty}$ и $\lambda_{1\infty}$, скорости прямой k_f и обратной k_b химических реакций – на $k_{f\infty}$ и $k_{b\infty}$, время колебательной релаксации τ_1 – на $\tau_{1\infty}$. Скорости производства компонент смеси W_i нормировались на комплекс $\rho_\infty^2 k_{f\infty} / M_1$, а энергии e , e_p , e_{v1} и энтальпии образования компонент смеси h_{0i} – на комплекс $T_\infty R / M_1$. Для обезразмеривания давления и времени используются комбинированные величины $\rho_\infty U_\infty^2$ и L / U_∞ соответственно.

В обезразмеренную систему уравнений кроме числа Шмидта (1.8) входят следующие безразмерные критерии – числа Рейнольдса $\text{Re} = \eta_{1\infty} L U_\infty / \rho_\infty$ и Прандтля $\text{Pr} = \eta_{1\infty} c_{p1} / \lambda_{1\infty}$; число Маха $\text{M} = U_\infty / \sqrt{\gamma R T_\infty / M_1}$; числа Дамкелера химических реакций $\text{Da}_d = t_\infty / \tau_{d\infty}$ и VT -энергообменов $\text{Da}_{VT} = t_\infty / \tau_{1\infty}$. Здесь $\gamma = c_{p1} / c_{v1}$ – показатель адиабаты; $\tau_{d\infty} = M_1 / (\rho_\infty k_{f\infty})$ – характерное время реакции диссоциации; $\tau_{1\infty}$ – характерное время релаксации колебательных мод CO_2 .

Для рассматриваемой задачи лиейной устойчивости обезразмеренная система (1.2)–(1.7) линеаризовалась на стационарном решении уравнений пограничного слоя в локально параллельном приближении. Мгновенные значения газодинамических переменных представлялись в виде суммы стационарного решения и возмущений:

$$u_x = U_s(y) + u', \quad u_y = v', \quad \rho = \rho_s(y) + \rho', \quad Y_i = Y_{is}(y) + Y'_i, \quad T = T_s(y) + T', \quad T_v = T_{vs}(y) + T'_v,$$

где индексом s отмечено стационарное решение, а штрихом – возмущения газодинамических переменных. Для обоих режимов рассчитывался альтернативный случай совершенного газа при $Da_d = Da_{vT} = 0$. Мгновенные значения коэффициентов переноса, скоростей производства компонент смеси и времени колебательной релаксации определялись следующим образом:

$$\eta = \eta(T_s) + \eta' = \eta_s + \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \Big|_{f=f_s} \right) T' + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y_i} \Big|_{f=f_s} \right) Y'_i = \eta_s + \eta_{T_s} T' + \sum_{i=1}^3 \eta_{Y_{is}} Y'_i,$$

$$\lambda = \lambda(T_s) + \lambda' = \lambda_s + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} \Big|_{f=f_s} \right) T' + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial Y_i} \Big|_{f=f_s} \right) Y'_i = \lambda_s + \lambda_{T_s} T' + \sum_{i=1}^3 \lambda_{Y_{is}} Y'_i,$$

$$W_j = W_j(T_s, \rho_s, Y'_{1s}, Y'_{2s}, Y'_{3s}) + W'_j = W_{js} + \left(\frac{\partial W_j}{\partial T} \Big|_{f=f_s} \right) T' + \left(\frac{\partial W_j}{\partial \rho} \Big|_{f=f_s} \right) \rho' + \\ + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial W_j}{\partial Y_i} \Big|_{f=f_s} \right) Y'_i = W_{js} + W_{j,T_s} T' + W_{j,\rho_s} \rho' + \sum_{i=1}^3 W_{j,Y_{is}} Y'_i, \quad j = 1, 2, 3, \quad f = (\rho, T, Y_1, Y_2, Y_3),$$

$$\eta_i = \eta_i(T_s) + \eta'_i = \eta_{is} + \left(\frac{d\eta_i}{dT} \Big|_{T=T_s} \right) T' = \eta_{is} + \eta_{i,T_s} T', \quad \lambda_i = \lambda_i(T_s) + \lambda'_i = \lambda_{is} + \left(\frac{d\lambda_i}{dT} \Big|_{T=T_s} \right) T' = \lambda_{is} + \lambda_{i,T_s} T',$$

$$\tau_1 = \tau_1(T_s) + \tau' = \tau_{1s} + \left(\frac{d\tau_1}{dT} \Big|_{T=T_s} \right) T' = \tau_{1s} + \tau_{1,T_s} T'.$$

Исследовались двумерные возмущения типа бегущих плоских волн вида

$$\mathbf{q}'(x, y, t) = \mathbf{q}(y) \exp[i(\alpha x - \omega t)], \quad \mathbf{q}(y) = (u, \alpha v, \rho, y_1, y_2, y_3, \theta, \theta_v), \quad (2.1)$$

где $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ – комплексное волновое число вдоль координаты x , $\omega = \omega_r + i\omega_i$ – комплексная частота, i – мнимая единица. Подстановка (2.1) в безразмерную линеаризованную систему дает систему уравнений для амплитуд двумерных возмущений, которая имеет вид

$$D\rho + \alpha\rho_s\sigma + \alpha v \frac{d\rho_s}{dy} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\eta_s}{\text{ScRe}} \Delta_y y_1 - \rho_s D y_1 - \alpha v \rho_s \frac{dY_{1s}}{dy} + \frac{1}{\text{ScRe}} \frac{d\eta_s}{dy} \frac{d y_1}{dy} + \frac{1}{\text{ScRe}} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{dY_{1s}}{dy} \right) + Da_d W_1 = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\eta_s}{\text{ScRe}} \Delta_y y_2 - \rho_s D y_2 - \alpha v \rho_s \frac{dY_{2s}}{dy} + \frac{1}{\text{ScRe}} \frac{d\eta_s}{dy} \frac{d y_2}{dy} + \frac{1}{\text{ScRe}} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{dY_{2s}}{dy} \right) + Da_d W_2 = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\eta_s}{\text{Re}} \Delta_y u - \rho_s D u - \alpha v \rho_s \frac{dU_s}{dy} - i\alpha\varepsilon + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\eta_s}{dy} \left(\frac{du}{dy} + i\alpha^2 v \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d}{dy} \left(\eta \frac{dU_s}{dy} \right) = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\alpha\eta_s}{\text{Re}} \Delta_y v - \alpha\rho_s D v - \frac{d\varepsilon}{dy} + \frac{\alpha}{\text{Re}} \left(\frac{dv}{dy} - iu \right) \frac{d\eta_s}{dy} + \frac{i\alpha\eta}{\text{Re}} \frac{dU_s}{dy} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{7\lambda_s}{2\text{PrRe}} \Delta_y \theta - \rho_s D \theta - \alpha v \rho_s \frac{d\theta_s}{dy} - \alpha\gamma M^2 p_s \sigma + \frac{\gamma M^2}{\text{Re}} \left[2\eta_s \left(\frac{du}{dy} + i\alpha^2 v \right) + \eta \frac{dU_s}{dy} \right] \frac{dU_s}{dy} + \\ + \frac{7}{2\text{PrRe}} \left[\frac{d\lambda_s}{dy} \frac{d\theta}{dy} + \frac{d}{dy} \left(\lambda \frac{dT_s}{dy} \right) \right] + \frac{1}{\text{ScRe}} \sum_{j=1}^3 c_{pj} \left\{ \eta_s T_s \Delta_y y_j + \frac{d y_j}{dy} \left(\frac{d\eta_s T_s}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left[(\eta T_s + \eta_s \theta) \frac{dY_{js}}{dy} \right] \right\} - \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
& -\text{Da}_d \sum_{j=1}^3 h_{0j} W_j - \text{Da}_d (e_{v1} W_{1s} + e_{v1s} W_1) - \text{Da}_{VT} \rho_s Y_{1s} \left(\frac{e_{v1}(\theta) - e_{v1}(\theta_v)}{\tau_{1s}} \right) - \\
& - \text{Da}_{VT} \left[\rho Y_{1s} + \rho_s y_1 - \frac{\rho_s Y_{1s}}{\tau_{1s}} \tau_1 \right] \left(\frac{e_{v1s}(T_s) - e_{v1s}(T_{vs})}{\tau_{1s}} \right) = 0, \\
& \frac{6\eta_{1s}}{5\text{Re}} \Delta_y e_{v1} - \rho_s Y_{1s} D e_{v1} - \rho_s e_{v1s} D y_1 - \alpha \nu \rho_s \frac{dY_{1s} e_{v1s}}{dy} + \frac{6}{5\text{Re}} \frac{d\eta_{1s}}{dy} \frac{de_{v1}}{dy} + \frac{6}{5\text{Re}} \frac{d}{dy} \left(\eta_1 \frac{de_{v1s}}{dy} \right) + \frac{1}{\text{ScRe}} \times \\
& \times \left[\eta_s e_{v1s} \Delta_y y_1 + \eta e_{v1s} \frac{d^2 Y_{1s}}{dy^2} + e_{v1} \frac{d}{dy} \left(\eta_s \frac{dY_{1s}}{dy} \right) + \left(\frac{d\eta_s e_{v1s}}{dy} \right) \frac{dy_1}{dy} + \eta \left(\frac{de_{v1s}}{dy} \frac{dY_{1s}}{dy} \right) \right] + \text{Da}_d (e_{v1} W_{1s} + e_{v1s} W_1) + \\
& + \text{Da}_{VT} \rho_s Y_{1s} \left[\frac{e_{v1}(\theta) - e_{v1}(\theta_v)}{\tau_{1s}} \right] + \text{Da}_{VT} \left(\rho Y_{1s} + \rho_s y_1 - \frac{\rho_s Y_{1s}}{\tau_{1s}} \tau_1 \right) \left[\frac{e_{v1s}(T_s) - e_{v1s}(T_{vs})}{\tau_{1s}} \right] = 0. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Delta_y &= \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2, \quad D = i\alpha \left(U_s - \frac{\omega}{\alpha} \right), \quad \sigma = \frac{dv}{dy} + iu, \quad \varepsilon = p - \frac{\alpha \eta_s}{\text{Re}} \left(\mu_b + \frac{1}{3} \right) \sigma, \\
p &= p_s \left[\frac{\rho}{\rho_s} + \frac{\theta}{T_s} + \frac{y_1 + y_2 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) + y_3 \left(\frac{M_1}{M_3} \right)}{Y_{1s} + Y_{2s} \left(\frac{M_1}{M_2} \right) + Y_{3s} \left(\frac{M_1}{M_3} \right)} \right], \quad p_s = \frac{\rho_s T_s}{\gamma M^2} \left(Y_{1s} + Y_{2s} \left(\frac{M_1}{M_2} \right) + Y_{3s} \left(\frac{M_1}{M_3} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$y_3 = -y_1 - y_2, \quad Y_{3s} = 1 - Y_{1s} - Y_{2s}, \quad \eta = \eta_{Ts} \theta + \sum_{j=1}^3 \eta_{Yjs} y_j,$$

$$\lambda = \lambda_{Ts} \theta + \sum_{j=1}^3 \lambda_{Yjs} y_j, \quad \eta_j = \eta_{j,Ts} \theta, \quad \tau_1 = \tau_{1,Ts} \theta,$$

$$W_j = W_{j,Ts} \theta + W_{j,\rho_s} \rho + \sum_{k=1}^3 W_{j,Yks} y_k, \quad e = e_{Ts} \theta + \sum_{j=1}^3 e_{Yjs} y_j, \quad e_{v1} = e_{v1,Ts} \theta_v.$$

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В качестве профилей стационарного течения использовались решения системы локально автомодельных уравнений пограничного слоя, которая представляется в виде

$$(\rho_s \eta_s \varphi'')' + \varphi \varphi'' = 0, \quad (3.1)$$

$$(\rho_s \eta_s Y'_{1s})' + \text{Sc} \varphi Y'_{1s} + \text{Sc} \text{Da}_d \left(\frac{4\xi W_{1s}}{\rho_s} \right) = 0, \quad (3.2)$$

$$(\rho_s \eta_s Y'_{2s})' + \text{Sc} \varphi Y'_{2s} + \text{Sc} \text{Da}_d \left(\frac{4\xi W_{2s}}{\rho_s} \right) = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
& (\rho_s \lambda_s T'_s)' + \left(\frac{2\text{Pr}}{7} \right) \varphi h'_s + \left(\frac{\gamma \text{Pr} M^2}{14} \right) \rho_s \eta_s \varphi'^2 + \left(\frac{2\text{Pr}}{7\text{Sc}} \right) \sum_{i=1}^3 (\rho_s \eta_s h_{is} Y'_{is})' - \left(\frac{8\xi \text{Pr} \text{Da}_d}{7} \right) \sum_{i=1}^3 \frac{h_{0ico} W_{is}}{\rho_s} - \\
& - \left(\frac{8\xi \text{Pr} \text{Da}_{VT}}{7} \right) \left(\frac{Y_1 e_{v1s}(T_s) - Y_1 e_{v1s}(T_{vs})}{\tau_{1s}} \right) - \left(\frac{8\xi \text{Pr} \text{Da}_d}{7} \right) \frac{e_{v1s} W_{1s}}{\rho_s} = 0, \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho_s \eta_{1s} e'_{v1s})' + \frac{5}{6} \varphi (Y_{1s} e_{v1s})' + \frac{5}{6\text{Sc}} (\rho_s \eta_s e_{v1s} Y'_{1s})' + \\
& + \left(\frac{10\xi \text{Da}_{VT}}{3} \right) \left(\frac{Y_{1s} e_{v1s}(T_s) - Y_{1s} e_{v1s}(T_{vs})}{\tau_{1s}} \right) + \left(\frac{10\xi \text{Da}_d}{3} \right) \frac{e_{v1s} W_{1s}}{\rho_s} = 0, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\rho_s T_s \left(Y_{1s} + Y_{2s} \left(\frac{M_1}{M_2} \right) + Y_{3s} \left(\frac{M_1}{M_3} \right) \right) = \left(Y_{1\infty} + Y_{2\infty} \left(\frac{M_1}{M_2} \right) + Y_{3\infty} \left(\frac{M_1}{M_3} \right) \right), \quad (3.6)$$

где

$$h_s = \sum_{i=1}^3 Y_{is} h_{is} = \left(\frac{7}{2} Y_{1s} + \frac{9M_1}{2M_2} Y_{2s} + \frac{5M_1}{2M_3} Y_{3s} \right) T_s, \quad h_{0i\infty} = \frac{h_{0i}}{RT_\infty / M_1},$$

$$Y_{3s} = 1 - Y_{1s} - Y_{2s}, \quad Y_{3\infty} = 1 - Y_{1\infty} - Y_{2\infty},$$

$$W_{1s} = -\rho_s^2 \left(Y_{1s} f(T_s) - \rho_s b(T_s) \left[\frac{\rho_\infty k_{b\infty}}{k_{f\infty} M_1} \right] \frac{Y_{2s} M_1}{M_2} \frac{Y_{3s} M_1}{M_3} \right) \left(Y_{1s} + \frac{Y_{2s} M_1}{M_2} + \frac{Y_{3s} M_1}{M_3} \right),$$

$$W_{2s} = -\left(\frac{M_2}{M_1} \right) W_{1s}, \quad W_{3s} = -\left(\frac{M_3}{M_1} \right) W_{1s}, \quad f(T_s) = \exp \left[\theta_{f\infty} \left(1 - \frac{1}{T_s} \right) \right], \quad b(T_s) = T_s^{3/4} \exp \left[\theta_{b\infty} \left(1 - \frac{1}{T_s} \right) \right],$$

$$k_{f\infty} = C_f \exp(-\theta_{f\infty}), \quad k_{b\infty} = C_b T_\infty^{3/4} \exp(-\theta_{b\infty}), \quad \theta_{f\infty} = \frac{\theta_f}{T_\infty}, \quad \theta_{b\infty} = \frac{\theta_b}{T_\infty}.$$

В уравнениях (3.1)–(3.6) штрихи обозначают дифференцирование по автомодельной переменной [9]

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \int_0^y \rho_s(z) dz, \quad \xi = x,$$

вспомогательная функция $\varphi(\zeta)$ определена как

$$\varphi(\zeta) = 2 \int_0^\zeta U_s(z) dz.$$

При подстановке в уравнения (2.2)–(2.8) профилей газодинамических переменных, полученных при решении системы (3.1)–(3.6), соответствующие естественные поперечные координаты определялись по формуле

$$y = 2\sqrt{\xi} \int_0^\zeta \frac{dz}{\rho_s(z)}.$$

Для потока вне пограничного слоя рассматривался набор условий, соответствующий двум точкам в средней и нижней частях траектории посадки космического аппарата на Марс. Для температур на обтекаемой поверхности ставились условия изотермичности, для массовых концентраций – условия абсолютно некаталитической поверхности.

Во всех случаях было показано, что локально автомодельные профили с возрастанием координаты $\xi = x$ сходятся к некоторым предельным, которые приближают соответствующие профили развитого пограничного слоя, рассчитанные конечно-разностным методом в полной постановке. При этом относительное локальное расхождение вдоль координаты y между полученными двумя способами профилями не превышало пяти процентов.

Числа Рейнольдса $Re_{\delta T} = \sqrt{Re_{xT}}$, определяющие начало зоны ЛТП, рассчитывались по схеме, которая ранее была использована авторами в [19]. Для определения зоны ЛТП рассматривались два вида спектральных задач. Вначале при вещественных волновых числах $\alpha = \alpha_r$ и комплексных частотах $\omega = \omega_r + i\omega_i$ рассчитывались собственные значения для возмущений, развивающихся во времени. Затем при комплексных $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ и вещественных $\omega = \omega_s$ вычислялись спектры пространственных возмущений. Принималось, что при $y = 0$ и на условной верхней границе пограничного слоя $y = \delta$ амплитуды всех возмущений обращаются в нуль. В основе этой схемы лежит связь, обоснованная в [20], где было показано, что для двумерных пространственных и временных возмущений при условии малости затухания последних $\omega_i^2 \ll 1$ с точностью до $O(\omega_i^2)$ имеют место соотношения $\omega_s = \omega_r$, $\alpha_r = \alpha_s$, т.е. диапазоны частот пространственных и временных возмущений совпадают для одинаковых длин волн.

На первом этапе для заданного режима течения определяется диапазон частот эволюционирующих в пространстве возмущений. Для этого строится кривая нейтральной устойчивости для наиболее неустойчивых первых мод временных возмущений в координатах $(\text{Re}_\delta, \omega_r)$. Верхний предел частотного интервала определяется горизонтальной касательной к верхней ветви кривой, ниже которой лежит область растущих возмущений. В качестве нижнего предела частот используется условный асимптотический предел при $\text{Re}_\delta \rightarrow \infty$. В найденном таким образом интервале с равномерным шагом $\Delta\omega_r$ выбирается некоторое множество точек $\omega_{rk}, k = 1, 2, \dots, m$.

На втором этапе для каждой из выбранных частот рассчитывается кривая N -фактора $N_\omega(\text{Re}_{\delta(x)})$. С этой целью на прямой $\omega_{rk} = \text{const}$ внутри области неустойчивости, ограниченной нейтральной кривой, берется множество точек с абсциссами $\text{Re}_{\delta_j}, j = 1, 2, \dots, n$. В каждой точке решается спектральная задача для наиболее неустойчивой пространственной моды возмущений. В результате получаем набор локальных инкрементов (декрементов) нарастания $\alpha_{i,j}$. На их основе с использованием квадратурной формулы вычисляется интеграл

$$N_\omega(\text{Re}_{\delta(x)}) = -2 \int_{\text{Re}_{\delta(x_0)}}^{\text{Re}_{\delta(x)}} \alpha_i^* d\text{Re}_\delta, \quad \alpha_i^* = \alpha_i \sqrt{\frac{x\eta}{\rho U}}, \quad (3.7)$$

рассматриваемый как функция верхнего предела. Нижний предел $\text{Re}_{\delta(x_0)}$ соответствует абсциссе точки на нейтральной кривой. Верхний предел увеличивается до тех пор, пока монотонное возрастание функции $N_\omega(\text{Re}_{\delta(x)})$ не сменяется на убывание.

Рассчитанные таким образом кривые N -факторов для частот $\omega_{r,1} < \omega_{r,2} < \dots < \omega_{r,k}$ строятся на плоскости $(\text{Re}_{\delta(x)}, N_\omega)$ и находится огибающая семейства. Искомое число Рейнольдса $\text{Re}_{\delta T}$, определяющее начало зоны ламинарно-турбулентного перехода, находится как абсцисса огибающей при заданной величине фактора перехода N_T . В расчетах принималось $N_T = 8$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Положение зоны перехода рассчитывалось для двух характерных режимов течения в сверхзвуковом пограничном слое. Для сравнения были выбраны две точки в средней (режим 1) и нижней (режим 2) частях баллистической траектории посадки аппарата Pathfinder, соответствующих 66-й и 87-й секундам полета. В режиме 1, исходя из расчетов авторов [5], имеют место высокие температуры потока и развитый процесс диссоциации, влияние которого на ЛТП является предметом исследования. В то же время режим 2 характеризуется почти полным отсутствием диссоциации, и устойчивость определяется только условиями гиперзвукового полета в атмосфере углекислого газа, что также представляет определенный интерес. Для обоих режимов было выполнено сравнение со случаем совершенного газа при тех же внешних условиях.

Параметры набегающего потока в расчетных точках траектории взяты из работы [4]. В качестве граничных условий на условной верхней границе пограничного слоя использовались параметры потока за косой ударной волной на головной части аппарата в форме клина с углом $\beta = 40^\circ$. Параметры потока за ударной волной рассчитывались на основе асимптотических формул теории косоугольного скачка [9] при больших числах Маха.

Для режима 1 параметры потока за косым скачком уплотнения имеют следующие значения – скорость потока $U_\infty = 2445.5$ м/с, число Маха $M = 12.6$, давление $p_\infty = 1549.5$ Па, температура потока $T_\infty = 2583$ К, колебательная температура $T_{v\infty} = 169$ К. Температура поверхности спускаемого аппарата принималась равной $T_{\text{wall}} = 2000$ К.

Соответственно для режима 2 – скорость потока $U_\infty = 1378$ м/с, число Маха $M = 6.9$, давление $p_\infty = 1062.85$ Па, температура потока $T_\infty = 946$ К, колебательная температура $T_{v\infty} = 179$ К, температура поверхности спускаемого аппарата $T_{\text{wall}} = 1100$ К. В этом случае статическая температура потока существенно ниже температуры начала диссоциации углекислого газа. Вместе с тем она равна температуре возбуждения изгибной моды CO_2 [4], и газ остается термически неравновесным. Массовые концентрации компонент смеси в обоих режимах были выбраны близкими к составу равновесной атмосферы $Y_{1\infty} = 0.9$, $Y_{2\infty} = 0.05$ и $Y_{3\infty} = 0.05$. С учетом конечного времени колебательной релаксации колебательные температуры принимались равными температуре атмосферы в точках входа.

На условной границе ПС при $y = \delta$ для обоих режимов течения ставились следующие условия:

$$U(\delta) = 1, \quad Y_1(\delta) = Y_{1\infty}, \quad Y_2(\delta) = Y_{2\infty}, \quad Y_3(\delta) = Y_{3\infty}, \quad T(\delta) = 1, \quad T_v(\delta) = T_{v\infty}/T_{\infty},$$

а на поверхности спускаемого аппарата – условия прилипания и изотермической некаталитической стенки:

$$U(0) = 0, \quad Y_1'(0) = Y_2'(0) = Y_3'(0) = 0, \quad T(0) = T_v(0) = T_{wall}/T_{\infty}.$$

Для нахождения локально автомодельных решений для рассматриваемых режимов течения система уравнений (2.2)–(2.7) приводилась к нормальной форме, для которой методом “стрельбы” с помощью процедуры Рунге–Кутты четвертого порядка на интервале $[0, \delta]$ решалась двухточечная краевая задача. Точкой “прицеливания” служила середина интервала $\xi_c = \delta/2$, где требовалось совпадение значений вычисляемых величин с точностью до 10^{-8} . Расчеты проводились при следующих значениях параметров: для режима 1 – $M = 12.6$, $Da_d = 0.669 \times 10^{-4}$, $Da_{VT} = 5.32 \times 10^{-3}$; для режима 2 – $M = 6.9$, $Da_d \approx 0$, $Da_{VT} = 1.27 \times 10^{-3}$. Для обоих режимов использовались значения параметров $Sc = 0.5$, $Pr = 0.75$, $\gamma = 1.4$, $\delta = 8$ и рассчитывался альтернативный случай совершенного газа при $Da_d = Da_{VT} = 0$.

На рисунке 1 для режима 1 представлены локально автомодельные профили газодинамических переменных невозмущенного пограничного слоя для термически неравновесного ($Da_d = 0$, $Da_{VT} = 5.32 \times 10^{-3}$) и термохимически неравновесного газа ($Da_d = 6.69 \times 10^{-4}$, $Da_{VT} = 5.32 \times 10^{-3}$), которые сравниваются со случаем совершенного газа при прочих равных условиях.

По графикам температур на рис. 1в можно заключить, что последовательный учет энергоемких процессов колебательного возбуждения (кривая B) и диссоциации (кривая C) приводит к существенному охлаждению потока, хотя колебательная температура меняется слабо. Следует отметить, что полученные уровни абсолютных значений статической и колебательной температур по порядку величины близки к соответствующим значениям, полученным в работе [3] для того же режима на основе трехкомпонентной модели, но для баллистического спуска и с более сложной колебательной кинетикой.

Спектральные задачи (1.11)–(1.17) для рассматриваемых режимов решались численно в среде пакета Matlab на основе метода коллокаций [21], который ранее был апробирован авторами в [19, 23].

Для определения диапазона частот эволюционирующих в пространстве возмущений рассчитывались кривые нейтральной устойчивости наиболее неустойчивых первых мод временных возмущений в координатах (Re_{δ}, ω_r) . Полученные кривые для режимов 1 и 2 в полулогарифмических координатах представлены на рис. 2.

Проведенное здесь сравнение совершенного и термохимически неравновесных газов, а также сопоставление с нейтральными кривыми [22] для совершенного газа при близких гиперзвуковых числах Маха $M \approx 6$ и $M \approx 12$ показывает, что вид нейтральных кривых временных возмущений целиком определяется числом Маха ПС. В ближнем гиперзвуке [22, 23] происходит слияние областей неустойчивостей мод I и II. Уже при $M \approx 6$ сохраняет индивидуальность только нижняя часть области неустойчивости первой моды. При $M \approx 12$ мода I целиком поглощается модой II, что делает их неразличимыми. При этом происходит смещение частотной координаты критического числа Рейнольдса в нижнюю часть нейтральной кривой с образованием характерного заостренного носика [22].

Таким образом, для гиперзвуковых ПС получается единая кривая нейтральной устойчивости для первых наиболее неустойчивых мод. Можно заметить, что в режиме 2, где фактически имеет место только термическая неравновесность, рост критического числа Рейнольдса по сравнению с совершенным газом значительно меньше, чем было получено в [23] для близкого числа Маха. Это связано с тем, что в данном случае значение релаксационного числа Дамкелера Da_{VT} в определенной мере соответствовало реальным условиям полета в атмосфере Марса, в то время как в модельной задаче [23] было принято $Da_{VT} \sim O(1)$.

Для оценки начала зоны перехода $Re_{\delta T}$ было выбрано значение N -фактора $N_T = 8$, которое используется для течений с низким уровнем привходящих возмущений [6]. Нижние пределы $Re_{\delta(x)}$ в интегралах (2.8) брались на нейтральных кривых, начиная с верхнего предела интервала частот растущих возмущений с шагом $\Delta\omega = 1.25 \times 10^{-5}$.

Значения инкрементов (декрементов) пространственных возмущений α_i вычислялись на прямых $\omega = \text{const}$ с шагом $\Delta Re_{\delta} = 10$. Такой выбор шага позволил для многократных вычислений интегралов (2.8)

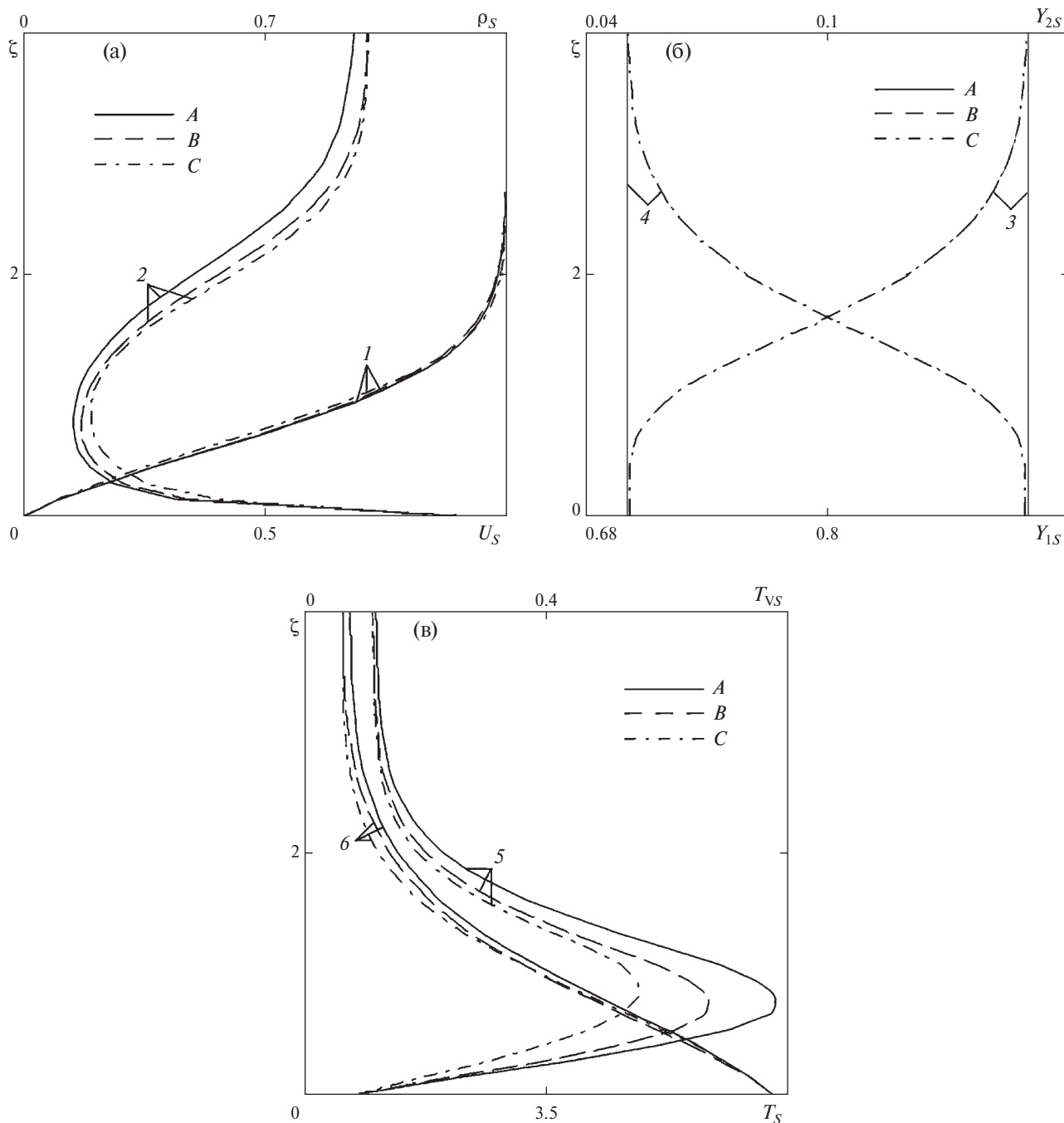


Рис. 1. Автомоделные профили скорости $U_s(\xi)$ (а) и плотности $\rho_s(\xi)$ (а) смеси, массовых концентраций CO_2 $Y_{1s}(\xi)$ (б) и CO $Y_{2s}(\xi)$ (б), статической $T_s(\xi)$ (в) и колебательной $T_{vs}(\xi)$ (в) температур для режима 1: 1 – зависимости $U_s(\xi)$; 2 – зависимости $\rho_s(\xi)$; 3 – зависимости $Y_{1s}(\xi)$; 4 – зависимости $Y_{2s}(\xi)$; 5 – зависимости $T_s(\xi)$; 6 – зависимости $T_{vs}(\xi)$; A – совершенный газ ($Da_d = Da_{VT} = 0$); B – термически неравновесный газ ($Da_d = 0, Da_{VT} = 5.32 \times 10^{-3}$); C – термохимически неравновесный газ ($Da_d = 6.69 \times 10^{-4}, Da_{VT} = 5.32 \times 10^{-3}$).

использовать простую квадратурную формулу трапеций и получить достаточно гладкие кривые N -факторов как функций от Re_δ . Далее, используя связь $Re_\delta = \sqrt{Re_x}$, проводился пересчет N -факторов как функций от Re_x .

На рис. 3 для двух режимов течения представлены по несколько кривых из семейств N -факторов для наиболее неустойчивых первых мод и огибающие семейств. Кривые $N(Re_x)$, соответствуют частотам ω от 4.25×10^{-4} (кривые 1) до 5×10^{-4} (кривые 7) для режима 1 и от 9.25×10^{-4} (кривая 8) до 10^{-3} (кривая 14)

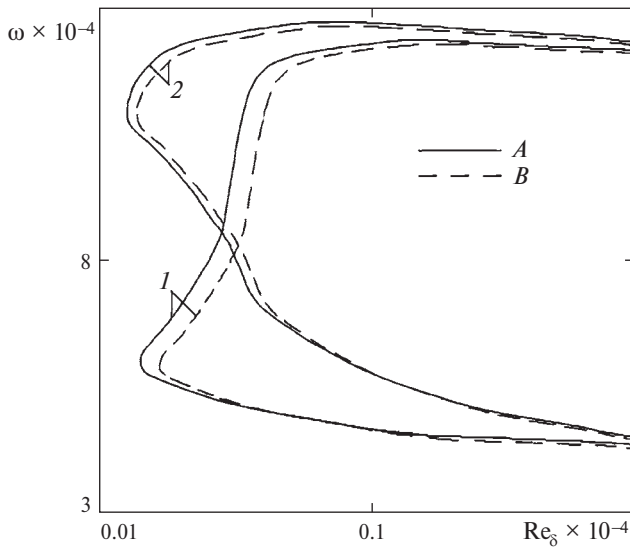


Рис. 2. Кривые нейтральной устойчивости наиболее неустойчивых первых мод временных возмущений: 1 – режим 1; 2 – режим 2; A – совершенный газ; B – термодимически неравновесный газ.

для режима 2. Частоты для обоих режимов возрастают с шагом $\Delta\omega = 1.25 \times 10^{-5}$.

Штрихпунктирная линия обозначает прямую $N(\text{Re}_x) = 8$, D_1 и D'_1 – точки начала ЛТП для режима 1, D_2 и D'_2 – точки начала ЛТП для режима 2 соответственно для термодимически неравновесного и совершенного газов. Числовые значения полученных критериев Re_{xT} даны в табл. 3.

Можно констатировать, что учет термодимической неравновесности в режиме 1 приводит к смещению начала ЛТП примерно на 9% по сравнению с совершенным газом. В режиме 2 соответствующее смещение еще меньше, особенно относительно результата, полученного в работе [23] для близкого по числу Маха режима.

Последнее связано с отмеченной выше малостью числа релаксационного числа Дамкелера Da_{VT} . Надо отметить, что химическое число Дамкелера Da_d с учетом реальных размеров перспективных марсианских КА может быть увеличено почти на порядок, что усилит эффект стабилизации потока.

Гиперзвуковым режимам в ПС соответствует монотонное возрастание числа Рейнольдса перехода Re_{xT} в зависимости от числа Маха [24]. Поэтому Re_{xT} в режиме 1 при $M = 12.6$ примерно в четыре раза больше, чем для режима 2 при $M = 6.9$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе e^N -метода выполнены сравнительные расчеты положения начала зоны ЛТП для точек в средней и нижней частях траектории посадки аппарата Pathfinder в атмосфере Марса. В расчетах использовалась трехкомпонентная модель термодимически неравновесной смеси $\text{CO}_2\text{--CO--O}$.

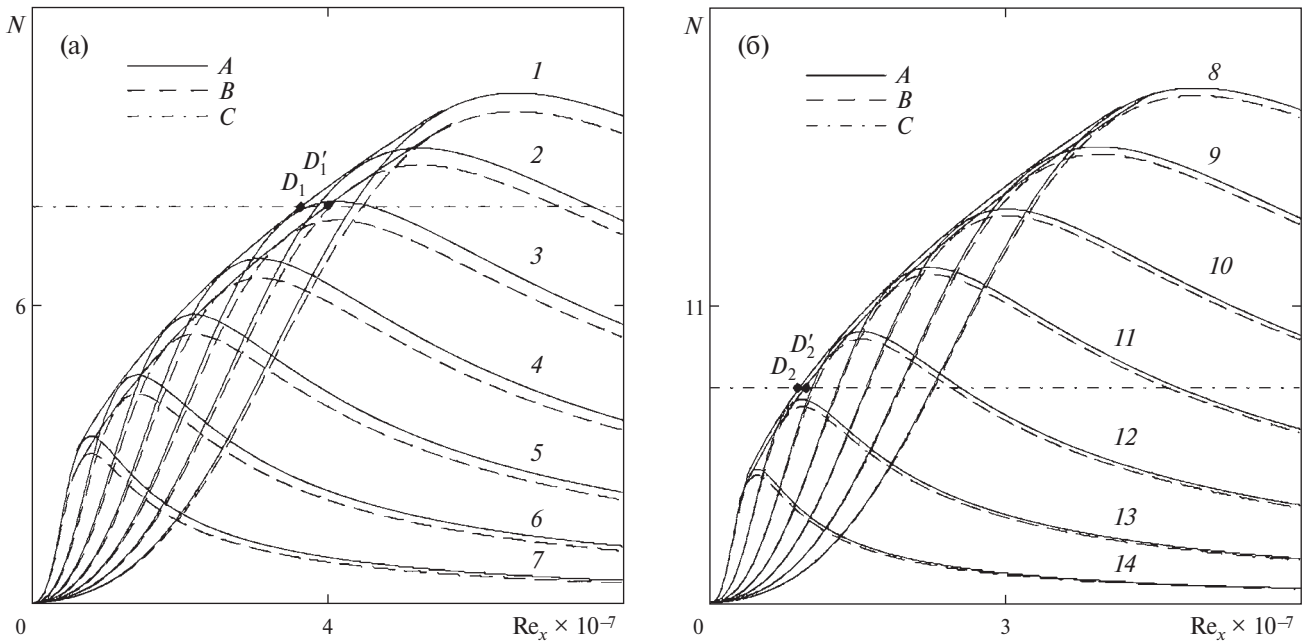


Рис. 3. Кривые N -факторов и положение ламинарно-турбулентного перехода: (а) – режим 1, $\omega = 4.25 \times 10^{-4}$ (1), 4.375×10^{-4} (2), 4.5×10^{-4} (3), 4.625×10^{-4} (4), 4.75×10^{-4} (5), 4.875×10^{-4} (6), 5×10^{-4} (7); (б) – режим 2, $\omega = 9.25 \times 10^{-4}$ (8), 9.375×10^{-4} (9), 9.5×10^{-4} (10), 9.625×10^{-4} (11), 9.75×10^{-4} (12), 9.875×10^{-4} (13), 10^{-3} (14); A – кривые $N(\text{Re}_x)$ для совершенного газа; B – кривые $N(\text{Re}_x)$ для термодимически неравновесного газа; C – прямая $N = 8$; D_1 и D'_1 – точки перехода для режима 1; D_2 и D'_2 – точки перехода для режима 2.

Таблица 3. Параметры точек перехода при $N = 8$

Точка перехода	D_1	D_1'	D_2	D_2'
$Re_{xT} \times 10^{-7}$	3.6378	3.9797	1.0141	1.0672
$\omega_{xT} \times 10^4$	4.6455	4.4841	9.9823	9.8125

Было выбрано рекомендуемое для случая потоков с малым уровнем внешних возмущений значение N -фактора ($N_T = 8$), определяющего ЛТП. Частотный спектр пространственных возмущений находился по нейтральным кривым временных возмущений при одинаковых длинах волн.

Характерная для гиперзвуковой области форма нейтральных кривых со слиянием областей неустойчивости первой и второй мод полностью определяется числом Маха режима. На рассчитанных семействах кривых N -факторов строились огибающие, по которым при заданном $N_T = 8$ находились числа Рейнольдса перехода Re_{xT} .

В гиперзвуковом режиме 1 при $M = 12.6$ учет развитой термохимической неравновесности приводит к значительному снижению статической температуры газа в нижней части ПС. В результате начало зоны ЛТП сдвигается вниз по потоку примерно на 9% по сравнению со случаем совершенного газа. Для рассматриваемых гиперзвуковых режимов характерна монотонно возрастающая зависимость числа Рейнольдса перехода Re_{xT} от числа Маха. Поэтому Re_{xT} для режима 2 при $M = 6.9$ примерно в четыре раза меньше, чем для режима 1.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00027, <https://rscf.ru/project/23-11-00027/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reynier Ph. Survey of aerodynamics and aerothermodynamics efforts carried out in the frame of Mars exploration projects // Prog. Aerosp. Sci. 2014. V. 70. P. 1–27.
2. Park Ch., Howe J.T., Jaffe R.L., Candler G.V. Review of chemical-kinetic problems of future NASA missions. II: Mars entries // J. Thermophys. Heat Transf. 1994. V. 8. № 1. P. 9–23.
3. Armenise I., Reynie Ph., Kustova E. Advanced models for vibrational and chemical kinetics applied to Mars entry aerothermodynamics // J. Thermophys. Heat Transf. 2016. V. 30. № 4. P. 705–720.
4. Candler G.V. Computation of thermo-chemical nonequilibrium Martian atmospheric entry flows // AIAA Paper 90-1695. June 1990. P. 1–10.
5. Milos F.S., Chen Y.-K., Congdon W.M., Thomas J.M. Mars Pathfinder entry temperature data, aerothermal, and heatshield material response // AIAA Paper 98-2681. June 1998. P. 1–16.
6. Mack L.M. A numerical method for the prediction of high-speed boundary-layer transition using linear theory // Aerodynamic analyses requiring advanced computers. Part I. Washington: NASA, 1975. P. 101–123.
7. Бойко А.В., Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М. О расчете положения ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях с учетом сжимаемости. Препринт № 81. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2015. 21 с.
8. Kustova E.V., Nagnibeda E.A. On correct description of a multi-temperature dissociating CO_2 flow // Chem. Phys. 2006. V. 321. P. 293–310.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 676 с.
10. Краткий справочник физико-химических величин. Справочник / Под ред. К.П. Мищенко, А.А. Равделя. Л.: Химия, 1974. 200 с.
11. Wilke C.R. A viscosity equation for gas mixtures // J. Chem. Phys. 1950. V. 18. P. 517–519.
12. Blottner F.G., Johnson M., Ellis M. Chemically reacting viscous flow program for multicomponent gas mixtures. Research Report SC-RR-70-754. Albuquerque: Sandia Laboratories. 1971. 320 p.
13. Grigoryev Yu.N., Ershov I.V. Stability and suppression of turbulence in relaxing molecular gas flows. Cham: Springer Intern. Publishing, 2017. 233 p.
14. Franko K.J., MacCormack R.W., Lele S.K. Effects of chemistry modeling on hypersonic boundary layer linear stability prediction // AIAA Paper 2010-4601. June–July 2010. P. 1–13.
15. Armenise I., Kustova E. On different contributions to the heat flux and diffusion in non-equilibrium flows // Chem. Phys. 2014. V. 428. P. 90–104.
16. Rock S.G., Candler G.V., Hornung H.G. Analysis of thermochemical nonequilibrium models for carbon dioxide flows // AIAA Journal. 1993. V. 31. P. 2255–2262.

17. *Camac M.* CO₂ relaxation processes in shock waves // *Fundamental phenomena in hypersonic flow*. Ithaca, New York: Cornell Univ. Press, 1966. P. 195–215.
18. *Park Ch., Howe J.T., Jaffe R.L., Candler G.V.* Chemical-kinetic problems of future NASA missions // *AIAA Paper* 91-0464, January 1991. P. 1–31.
19. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Влияние колебательного возбуждения газа на положение зоны ламинарно-турбулентного перехода на пластине // *ПМТФ*. 2021. Т. 62. № 1. С. 14–21.
20. *Gaster M.* A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 14. P. 222–224.
21. *Trefethen L.N.* *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. 160 p.
22. *Mack L.M.* *Boundary layer stability theory*. Preprint of JPL Technical Report, Document 900–277. Rev. A. Pasadena: California Institute of Technology, 1969. 272 p.
23. *Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.* Линейная устойчивость сверхзвукового пограничного слоя релаксирующего газа на пластине // *Изв. РАН. МЖГ*. 2019. № 3. С. 3–15.
24. *Mack L.M.* Linear stability theory and problem of supersonic boundary-layer transition // *AIAA Journal*. 1974. V. 13. P. 278–289.

ESTIMATE OF THE ONSET OF LAMINAR-TURBULENT TRANSITION ON A PLATE IN FLIGHT IN THE MARS ATMOSPHERE

Yu. N. Grigor'ev^{a,*} and I. V. Ershov^{a, b, **}

^a*Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, Russia*

^b*Novosibirsk State Agrarian University, Novosibirsk, Russia*

*E-mail: grigor@ict.nsc.ru

**E-mail: ivershov1969@gmail.com

Comparative calculations of the location of the onset of the laminar-turbulent transition zone are performed using the eN -method for two points on the Mars "Pathfinder" entry trajectory. A three-component model of thermochemically nonequilibrium CO₂–CO–O mixture is used in the calculations. The set of spatial disturbance frequencies is found using neutral curves for the first unstable modes of temporary disturbances. The transition Reynolds number $Re_{\delta T}$ is determined from the envelopes of families of N -factor curves at $N_T = 8$. In the hypersonic regime at $M = 12.6$, taking into account the developed thermochemical nonequilibrium leads to a significant decrease in the static temperature of gas in the lower part of the boundary layer. As a result, the onset of the laminarturbulent transition zone is displaced downstream by approximately 9% as compared to the case of a perfect gas.

Keywords: Mars atmosphere, linear stability, laminar-turbulent transition, eN -method, integral curves of N -factors

УДК 532.5

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В НЕВЕСОМОСТИ ПРИ НИЗКИХ ЧАСТОТАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

© 2024 г. В. А. Ильин

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

E-mail: ilin1@psu.ru

Поступила в редакцию 06.08.2023 г.

После доработки 17. 10.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

Изучена электротермическая конвекция слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле горизонтального конденсатора. В рамках электрокондуктивного механизма зарядообразования на основе пятимодовой модели исследованы нелинейные режимы электроконвекции в невесомости при низких частотах электрического поля. Обнаружены гистерезисные переходы между двумя разными синхронными и субгармоническим режимами. Переходы к хаосу происходят либо через перемежаемость, либо через субгармонический каскад.

Ключевые слова: электроконвекция, слабопроводящая жидкость, хаос

DOI: 10.31857/S1024708424020025 **EDN:** RJREIW

Электрическое поле может сильно влиять на конвективные движения слабопроводящих жидкостей [1]. В электрическом поле в жидкости могут происходить различные процессы и движения [2]. С практической точки зрения знание законов действия электрического поля на конвективные течения актуально в связи с проблемой эффективного управления конвекцией, тепло- и массопереносом в различных технологических ситуациях, в том числе, в электрогидродинамических насосах и немеханических переключателях [3, 4].

Существует несколько механизмов электроконвекции в диэлектрических жидкостях [2, 5]. Влияние на электроконвекцию диэлектрофоретического механизма неустойчивости, вызванного зависимостью диэлектрической проницаемости от температуры в идеальных диэлектриках, исследовано в [6]. Действие инжекционного механизма неустойчивости на электроконвекцию слабопроводящих жидкостей рассмотрено в [7]. В переменных электрических полях горизонтального конденсатора при участии электрокондуктивного механизма зарядообразования в слабопроводящих жидкостях исследована электроконвективная неустойчивость [8], а электроконвекция и различные нелинейные режимы движения изучены в работах [9, 10].

В работе [9] рассмотрено влияние на электроконвекцию переменного электрического поля средних частот. В работах [9, 10] наблюдались различные синхронные, квазипериодические и хаотические нелинейные режимы движения. Исследование хаоса в различных системах является актуальной задачей [11, 12]. Синхронное движение, ламинарное поведение и перемежаемость, которые встретились в настоящей работе, были объектами исследования в других работах, например в [13, 14].

В настоящей работе в продолжение работы [9] проведено исследование влияния переменного электрического поля низкой частоты на электроконвекцию слабопроводящей жидкости, находящейся в подогреваемом горизонтальном конденсаторе в невесомости. Главное отличие результатов в настоящей работе от результатов работы [9] заключается в том, что при низких частотах обнаружена конкуренция трех режимов (двух разных синхронных и одного субгармонического режимов), чего в работе [9] ранее не наблюдалось.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости, находящейся в постоянном вертикальном электрическом поле E и поле тяжести g . Ось x направлена вдоль нижней границы слоя, ось z — перпендикулярно границам слоя. Идеально тепло- и электропроводные пластины

конденсатора расположены при $z = 0, h$ (h – толщина слоя) и нагреты до разной температуры: $T(0) = Q$, $T(h) = 0$.

Здесь T – температура, отчитываемая от некоторого среднего значения. Потенциал поля верхней границы равен нулю: $\varphi(h) = 0$, потенциал нижней границы меняется гармонически со временем t с частотой ω : $\varphi(0) = U \cos \omega t$. При рассмотрении электрокондуктивного механизма зарядообразования в слабопроводящей жидкости считается, что электропроводность жидкости линейно зависит от температуры.

Электроконвекцию слабопроводящей жидкости описывают уравнение Навье–Стокса, уравнение переноса тепла и закон сохранения электрического заряда в соответствующих приближениях. В статье [9] приведен вывод из этих уравнений системы уравнений электроконвекции слабопроводящей жидкости в безразмерном виде в безындукционном приближении в случае мгновенной релаксации заряда. Эта система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi \right) &= \text{Ra}_\sigma \frac{\partial \rho_e}{\partial x} \cos \omega t + \text{Ra} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \Delta^2 \psi, \\ \text{Pr} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \Delta \vartheta + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \rho_e + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cos \omega t &= 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ψ , ϑ , ρ_e – поля функции тока, температуры и плотности заряда; Δ – двумерный оператор Лапласа. Система уравнений (1.1) содержит безразмерные параметры: тепловое число Рэлея Ra , электрическое число Рэлея Ra_σ , число Прандтля Pr :

$$\text{Ra} = \frac{\rho g \beta \Theta h^3}{\eta \chi}, \quad \text{Ra}_\sigma = \frac{\varepsilon U^2 \beta_\sigma \Theta}{\eta \chi}, \quad \text{Pr} = \frac{\eta}{\chi \rho}.$$

Здесь ρ , ε , η , c , β , β_σ – соответственно плотность, диэлектрическая проницаемость, динамическая вязкость, коэффициенты температуропроводности, теплового расширения жидкости и зависимости проводимости от температуры.

В задаче рассматриваются свободные граничные условия. В целом они имеют следующий вид:

$$z = 0, 1: \psi = \psi'' = \vartheta = 0.$$

Здесь штрихом обозначена производная по z .

Ранее в работе [9] в аналогичной постановке задачи переменное поле в случае низких частот рассмотрено не было.

МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ

Для решения системы уравнений (1.1) будем использовать метод Галеркина, применяя следующие аппроксимации полей функции тока ψ и температуры ϑ , удовлетворяющие граничным условиям и плотности заряда ρ_e [9]:

$$\begin{aligned} \psi &= (A_1(t) \sin \pi z + A_2(t) \sin 2\pi z) \sin \pi k x, \\ \vartheta &= (B_1(t) \sin \pi z + B_2(t) \sin 2\pi z) \cos \pi k x + C(t) \sin 2\pi z, \\ \rho_e &= [D_1(t) \cos \pi z + D_2(t) \cos 2\pi z] \cos \pi k x + E(t) \cos 2\pi z, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где k – волновое число, характеризующее периодичность возмущений в плоскости слоя; $A_1, A_2, B_1, B_2, D_1, D_2, E, C$ – амплитуды, характеризующие различные пространственные моды. В разложениях (2.1) присутствуют слагаемые с разной четностью по z . Это связано с тем, что в уравнении для эволюции возмущений заряда присутствует слагаемое, содержащее первую производную по z , которое обуславливает перераспределение энергии между модами различной четности. Проведена процедура ортогонализации и перемасштабирования переменных задачи:

$$t \rightarrow \frac{\text{Pr}}{\pi^2(1+k^2)}t, \quad A_1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k}X, \quad A_2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k}V, \quad B_1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi}Y, \quad B_2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi}W, \quad C \rightarrow \frac{Z}{\pi}.$$

В результате получена пятимодовая модель электроконвекции слабопроводящей жидкости [9], где точка над переменными обозначает производную по времени, а $\omega = 2\pi\nu$:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \text{Pr}(-X + rY + eW \cos^2 2\pi\nu t), \quad \dot{Y} = -Y + X + XZ, \quad \dot{Z} = -bZ - XY, \\ \dot{V} &= \text{Pr}[-dV + (rW - eY \cos^2 2\pi\nu t)/d], \quad \dot{W} = -dW + V, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$r = \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_0}, \quad e = \frac{\text{Ra}_\sigma}{\text{Ra}_{\sigma 0}}, \quad \text{Ra}_0 = \frac{\pi^4(1+k^2)^3}{k^2}, \quad \text{Ra}_{\sigma 0} = \frac{3\pi^4(1+k^2)^3}{8k^2}, \quad b = \frac{4}{1+k^2}, \quad d = \frac{4+k^2}{1+k^2}.$$

Здесь X, Y, Z, V, W – масштабированные заново амплитуды, характеризующие различные пространственные моды функции тока и температуры, а для амплитуд плотности заряда получаются алгебраические соотношения, выражающиеся через амплитуды температуры; r, e – нормированные тепловое и электрическое числа Рэлея; b, d – геометрические параметры, зависящие от волнового числа. Динамическая система (2.2) является обобщением маломодовой модели Лоренца [11, 15].

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ

Параметры жидкости при исследовании случая невесомости ($r = 0$) выбраны следующие [9]: $\text{Pr} = 100$; $k = 0.962$, $b = 2.077$, $d = 2.56$. Система уравнений решалась методом Рунге–Кутты–Мерсона с одинаковыми начальными условиями или методом продолжения по параметру для различных значений e и ν . Исследование проведено для низких частот электрического поля.

Полученные в результате интегрирования зависимости амплитуд от времени анализировались с помощью быстрого преобразования Фурье, и определялся спектральный состав отклика системы на электрическое поле. Интенсивность теплопереноса через слой характеризуется числом Нуссельта Nu – средним по времени значением безразмерного теплового потока, приходящегося на единицу горизонтальной границы слоя.

Рассмотрим вычисления с одинаковыми начальными условиями при частоте электрического поля $\nu = 0.05$. Ниже критического значения электрического числа жидкость находится в равновесии, при $e = 67.81$ возникает конвекция и устанавливается периодический режим движения жидкости (рис. 1). Все частоты Фурье-спектра этих колебаний являются комбинацией внешней частоты и обобщаются формулой $(2n+1)\nu$, где n – целое число. То есть в спектре содержится частота внешнего поля и ее нечетные гармоники. Это синхронные колебания 1-го типа.

С ростом электрического числа амплитуда синхронного режима растет, затем он исчезает и устанавливается равновесие. При $e = 69.38$ возникает синхронный режим 2-го типа, в его спектре содержатся четные гармоники внешней частоты: $2n\nu$. Затем в некотором интервале параметров существует периодический режим, в спектре которого присутствует частота, равная половине внешней частоты, и ее нечетные гармоники – это субгармонический режим. Вычисления с одинаковыми начальными условиями показали, что этот режим переходит в синхронный режим 2.

При дальнейшем увеличении параметра e для синхронного режима 2 происходит бифуркация удвоения периода – в спектре рождается частота в два раза меньше основной, затем последовательно происходят удвоения периода до тех пор, пока не возникнет хаотический режим колебаний жидкости со сплошным спектром Фурье.

Первые четыре значения электрического параметра e , при которых происходит удвоение периода, равны соответственно: $e_1 = 69.7729$, $e_2 = 69.8422$, $e_3 = 69.8567$ и $e_4 = 69.8599$. Постоянная Фейгенбаума [11, 15], вычисленная по первым трем этим значениям, получилась равной: $\delta = 4.7793$; вычисления по следующим трем значениям дали результат: $\delta = 4.5123$. В этом случае реализуется сценарий перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода – сценарий Фейгенбаума [11, 15]. Переход к хаосу происходит при $e = 69.87$.

После расчетов методом продолжения по параметру было обнаружено более сложное поведение. Между тремя разными режимами поведения жидкости были обнаружены гистерезисные переходы. Эти гистерезисы

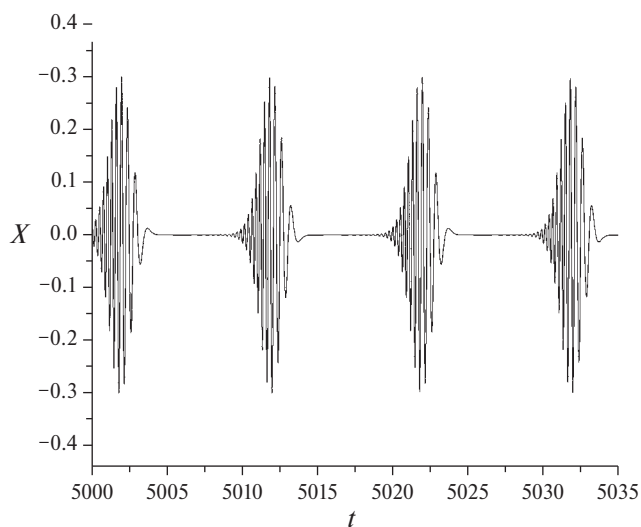


Рис. 1. Зависимость X от времени при $e = 67.81$.

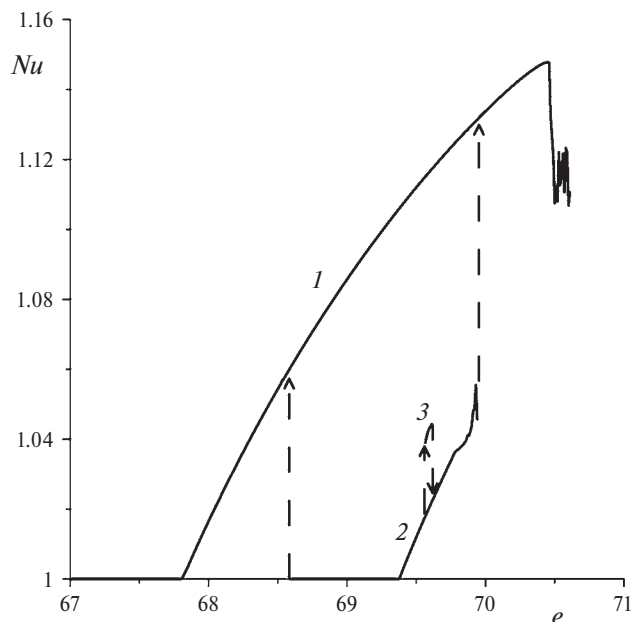


Рис. 2. Зависимость числа Нуссельта от электрического числа Рэлея: 1 – синхронный режим первого типа, 2 – синхронный режим второго типа, 3 – субгармонический режим; толстые кривые – режимы, штриховые – переход между режимами.

видны на графике зависимости безразмерного теплопотока (числа Нуссельта) от нормированного электрического числа Рэлея (рис. 2). Оказалось, что синхронный режим 1 продолжает существовать при больших значениях параметра e . При $e = 70.47$ он переходит к хаосу через перемежаемость [11, 15].

В интервале значений электрического числа от 67.81 до 68.58 существует только режим 1, от 68.59 до 69.37 конкурируют режим 1 и равновесие, от 69.38 до 69.56 сосуществуют режимы 1 и 2. В интервале от 69.57 до 69.61 конкурируют три режима: два синхронных (режимы 1 и 2) и один субгармонический (режим 3). Переход к хаосу в режиме 3 (субгармоническом) происходит при $e = 69.607$ по сценарию Фейгенбаума (постоянная Фейгенбаума получилась равной: $\delta = 5$). В интервале параметров от 69.62 до 69.94 конкурируют синхронные режимы 1 и 2. При 69.95 режим 2 переходит в режим 1.

Полученные течения и обнаруженные переходы между тремя режимами (двумя синхронными и одним субгармоническим) являются новыми. В данной работе переходы к хаосу происходят либо через перемежаемость, либо через субгармонический каскад, а в работе [9] при среднечастотных колебаниях эти переходы происходили через квазипериодичность или перемежаемость.

Как известно, модельные свободные границы в задаче Релея–Бенара [15] позволяют в упрощенной постановке изучить устойчивость течений жидкости в горизонтальном слое. При этом качественное поведение жидкости по сравнению с твердыми границами сохраняется, понижаются лишь пороги переходов между режимами. Аналогично и в настоящей работе полученные в упрощенной постановке течения качественно должны соответствовать решениям задачи в полной постановке, могут быть лишь количественные отличия в результатах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен случай, когда в жидком диэлектрике работает только электрокондуктивный механизм неустойчивости. Это справедливо для неоднородно нагретых диэлектриков в электрическом поле, в которых электропроводимость жидкости зависит линейно от температуры.

С помощью пятимодовой модели электроконвекции слабопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе проведено исследование нелинейных режимов электротермической конвекции при низких частотах переменного электрического поля в невесомости.

Исследование этого случая является новым и ранее не было рассмотрено. При низких частотах новым результатом является обнаружение конкуренции и гистерезисных переходов между тремя режимами: двумя

разными синхронными и одним субгармоническим режимами. Переходы к хаосу происходят либо через перемежаемость, либо через субгармонический каскад, а в предыдущих исследованиях при средних частотах эти переходы происходили через квазипериодичность или перемежаемость.

Полученные результаты для модельных свободных границ должны качественно сохранять свойства течений жидкости в слое с твердыми границами, могут быть лишь количественные отличия в результатах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей: Физические основы электрогидродинамики. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. *Болога М.К., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А.* Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 320 с.
3. *Жакин А.И.* Электрогидродинамика // УФН. 2012. Т. 182. № 5. С. 495–520. DOI: 10.3367/UFNr.0182.201205b.0495.
4. *Стишков Ю.К.* Электрофизические процессы в жидкостях при воздействии сильных электрических полей. М.: Юстицинформ, 2019. 262 с.
5. *Панкратьева И.Л., Полянский В.А.* Основные механизмы электризации слабопроводящих многокомпонентных сред // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 5. С. 15–22. DOI: 10.7868/S0568528117050024.
6. *Ильин В.А.* Модель электротермической конвекции идеального диэлектрика в горизонтальном конденсаторе // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 5. С. 10–16. DOI: 10.7868/S0568528116050108.
7. *Ильин В.А., Чигорина Т.И.* Стационарные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции заряда в постоянном электрическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 5. С. 3–13. DOI: 10.31857/S0568528121050042.
8. *Веларде М.Г., Смородин Б.Л.* Конвективная неустойчивость плоского горизонтального слоя слабопроводящей жидкости в переменных и модулированных электрических полях // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 3. С. 31–38.
9. *Картавых Н.Н., Смородин Б.Л., Ильин В.А.* Параметрическая электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном плоском конденсаторе // ЖЭТФ. 2015. Т. 148. № 1. С. 178–189. DOI: 10.1134/S1063776115080087.
10. *Smorodin B.L., Kartavykh N.N.* Periodic and Chaotic Oscillations in a Low Conducting Liquid in an Alternating Electric Field // Microgravity Science and Technology. 2020. V. 32. № 3. P. 423–434. DOI: 10.1007/s12217-020-09779-y.
11. *Фрик П.Г.* Турбулентность: подходы и модели. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 292 с.
12. *Кузьмин Л.В.* Обнаружение хаотического сигнала на фоне шума путем квантования по нескольким уровням амплитуды в модели радиотехнического генератора хаоса // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48. Вып. 11. С. 32–36. DOI: 10.21883/PJTF.2022.11.52611.19112.
13. *Москаленко О.И., Короновский А.А., Сельский А.О., Евстифеев Е.В.* Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48. Вып. 2. С. 3–6. DOI: 10.21883/PJTF.2022.02.51910.18985.
14. *Леманов В.В., Лукашов В.В., Шаров К.А.* Переход к турбулентности через перемежаемость в инертных и реагирующих струях // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 6. С. 50–59. DOI: 10.31857/S0568528120060080.
15. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.

NONLINEAR REGIMES OF ELECTRIC CONVECTION OF POORLY CONDUCTING FLUIDS IN WEIGHTLESSNESS AT LOW FREQUENCIES OF AN ELECTRIC FIELD

V. A. Il'in

Perm State University, Perm, 614990 Russia
e-mail: ilin1@psu.ru

Electrothermal convection in a poorly conducting fluid in an alternating electric field of a horizontal capacitor is studied. The nonlinear regimes of electric convection in weightlessness are studied at low frequencies of the electric field on the basis of the pentamodal model within the framework of the electroconductive charge formation

mechanism. Hysteresis transitions between two different synchronous and subharmonic regimes are found to exist. Transitions to chaos occur by means of either intermittance or a subharmonic cascade.

Keywords: electric convection, poorly conducting fluids, chaos

УДК 532.5

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАГНЕТАНИИ ИЛИ СНИЖЕНИИ ПЛАСТОВОГО ДАВЛЕНИЯ В КОЛЛЕКТОРЕ С ТРЕЩИНОЙ

© 2024 г. А. М. Ильясов^{a,*}, В. Н. Киреев^{b,**}

^a ООО “РН-БашНИПИнефть”, Уфа, Россия

^b Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

*E-mail: amilyasov67@gmail.com

**E-mail: kireev@anrb.ru

Поступила в редакцию 14.09.2023 г.

После доработки 20.11.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

Рассматривается задача о нагнетании ньютоновской жидкости с постоянным расходом через нагнетательную скважину в изначально невозмущенный бесконечный пласт с эрозионной вертикальной магистральной трещиной постоянной ширины. Методом преобразования Лапласа получены аналитические решения для полей давления в трещине и пласте, скорости течения в трещине, а также уравнения траекторий жидкости в пласте и в магистральной трещине. Представленные решения применимы также к задаче отбора жидкости в добывающую скважину, пересеченную вертикальной магистральной трещиной. Построены нестационарные двумерные поля давления в пласте, а также давления и скорости в трещине.

Ключевые слова: нестационарное течение, билинейный поток, магистральная трещина, преобразование Лапласа, аналитическое решение

DOI: 10.31857/S1024708424020034 EDN: RJPULK

Часто из-за высоких давлений на нагнетательных скважинах образуются разрывы породы – трещины авто-ГРП. Эти трещины могут распространяться вплоть до добывающих скважин. С течением времени эти трещины промываются нагнетаемыми фильтрационными потоками и из-за эрозии стенок преобразуются в незакрепленные проппантом трещины с некоторым характерным раскрытием. В результате образуется система скважина–трещина–пласт, в которой на начальных, но довольно продолжительных временах возникает так называемый билинейный поток [1], представляющий одномерное течение в трещине и перпендикулярное трещине фильтрационное течение в пласте с прямолинейными траекториями частиц.

Вероятно, впервые билинейный поток в окрестности закрепленной проппантом вертикальной трещины ГРП конечной проводимости был изучен в работе [1], в которой операционным методом получена зависимость забойного давления добывающей скважины от времени на больших временах при постоянном дебите скважины. Получена асимптотика падения забойного давления как корень четвертой степени от времени. Решение для давления в пласте в этой работе не было получено.

Моделированию билинейного потока в последнее время посвящен ряд отечественных публикаций. В работе [2] рассмотрено течение в бесконечной трещине, закрепленной проппантом. Описание фильтрационного течения в трещине сведено к интегральному уравнению типа свертки. Методом преобразования Лапласа получены решения для полей давления в трещине при постоянном давлении и постоянном расходе на забое добывающей скважины.

В случае работы скважины с постоянным дебитом, как и в работе [1], получена зависимость забойного давления от времени в степени одна четвертая, однако эволюция давления в пласте также не рассматривается.

В работе [3] пласт и трещина также предполагаются бесконечными. Для билинейного течения методом преобразования Лапласа получено решение как для давления в закрепленной трещине, так и для давления в пласте при постоянном давлении на забое скважины. В труде [4] решена аналогичная задача, где задан постоянный дебит на скважине. На больших временах получена асимптотика давления на скважине как функция времени в степени одна четвертая.

Полученные в [3, 4] решения применимы как для добывающих, так и для нагнетательных скважин с точностью до замены знака депрессии (репрессии) или расхода. В работе [5] с использованием результатов [4] построены решения для давления (расхода) при ступенчатых изменениях расхода (давления). Такие ступенчатые тесты применяются в полевых испытаниях для определения параметров трещины ГРП. В работе [6] операционным методом найдены аналитические решения для закрепленной трещины конечной длины при заданном забойном давлении или заданном расходе на скважине. В случае конечной трещины решения представляются в виде интегралов от рядов.

Во всех перечисленных работах предполагается, что трещина закреплена проппантом, течение в ней подчиняется закону Дарси и описывается уравнением пьезопроводности. В данной работе рассматривается задача о билинейном течении в системе трещина–пласт, в которой трещина с постоянным раскрытием не закреплена проппантом и ее эффективная проницаемость может на порядки превосходить проницаемость закрепленных трещин ГРП. Поэтому течения в таких трещинах в общем случае не являются ползущими и не описываются уравнением пьезопроводности. В данной работе предлагается подход, использующий осредненные по сечению трещины авто-ГРП уравнения сохранения массы и импульса в гидравлическом приближении

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И БЕЗРАЗМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается задача о билинейном потоке в сопряженной системе трещина/пласт в бесконечном пласте. Одна четвертая часть этой системы для нагнетательной скважины показана на рис. 1. Скважина может быть как нагнетательной, так и добывающей. Трещина имеет постоянную ширину. Для простоты предполагается, что трещина заполнена той же ньютоновской жидкостью, что и пласт.

Уравнения сохранения массы и движения несжимаемой жидкости в гидравлическом приближении с осредненными по сечению параметрами течения для трещины постоянной ширины с нулевой проекцией силы тяжести на направление потока, но с учетом проницаемости стенок канала с пористостью (просветностью) m , имеют вид [7]

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2 \frac{u_L}{w}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (1 + \beta) \frac{\partial v^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{12(1 - m)\mu v}{\rho w^2},$$

где β – параметр Кориолиса порядка единицы, отвечающий за неравномерность распределения истинной скорости по сечению.

Члены уравнения импульсов слева по отношению к силе гидравлического трения F_{fr} имеют следующие порядки:

$$(1 + \beta) \frac{\partial v^2}{\partial x} / F_{fr} \sim \text{Re} \left(\frac{w}{L} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} / F_{fr} \sim \frac{\rho w^2}{\mu T},$$

где L , T – соответственно характерные длина и время процесса, в течение которых заметно изменяются искомые переменные задачи.

Для ширин трещин $w \leq 0.001$ м и длин трещин порядка $L = 100$ м следует, что конвективным слагаемым можно пренебречь по сравнению с силой трения вплоть до турбулентных течений, когда сила пристенного трения становится уже квадратичной. Для воды $\rho = 1000$ кг/м³, $\mu = 0,001$ Па·с для местной производной имеем оценку

$$\frac{\partial v}{\partial t} / F_{fr} \sim \frac{\rho w^2}{\mu T} \sim T^{-1}.$$

Таким образом нестационарное слагаемое можно учитывать только для быстрых процессов с характерными временами изменения параметров $T \leq 1$ с. Для задачи нагнетания давления в пласт характерные время изменения параметров значительно больше и, следовательно, можно полностью пренебречь инерционным слагаемым в уравнении импульсов.

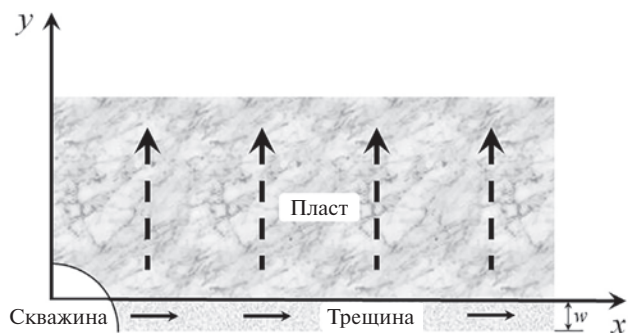


Рис. 1. Схема к постановке задачи.

Линеаризованная система уравнений с несжимаемой жидкостью в трещине примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2 \frac{u_L}{w}, \quad u_L = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_r}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (1.1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{12(1-m)\mu v}{\rho w^2}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 p_r}{\partial y^2}, \quad \chi = \frac{k}{\mu(m\beta_l + \beta_s)}, \quad (1.3)$$

где v – скорость течения жидкости ГРП в трещине; w – раскрытие трещины; u_L – скорость фильтрационной утечки по нормали к стенкам трещины; k – проницаемость пласта; μ – динамическая вязкость жидкости; p_r – давление в пласте; ρ – постоянная плотность жидкости в трещине; p – давление в трещине; m – коэффициент пористости породы; β_l и β_s – коэффициенты сжимаемости жидкости в пласте и скелета породы соответственно.

В системе уравнений (1.1)–(1.3) течение в трещине описывается уравнениями в гидравлическом приближении, а давление в пласте, в отличие от давления в трещине, является функцией обеих пространственных координат.

На стенке трещины выполняется динамическое условие непрерывности давления:

$$p_r(x, y = 0, t) = p(x, t). \quad (1.4)$$

В начальный момент жидкость в трещине и пласте покоится, а давление в трещине равно пластовому давлению:

$$v(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = p_k, \quad p_r(x, y, 0) = p_k, \quad (1.5)$$

где p_k – пластовое давление.

Поскольку проницаемость пород на несколько порядков меньше проницаемости трещины, то предполагается, что вся жидкость из скважины попадает в трещину при закачке жидкости или из трещины в скважину при отборе жидкости (то есть жидкость не фильтруется через стенки скважины). Кроме того, согласно постановке задачи, трещина симметрична относительно скважины. Таким образом, граничное условие на скважине есть

$$v(0, t) = v_0 = \frac{Q_0}{2hw}, \quad (1.6)$$

где Q_0 – постоянный расход закачки (отбора) жидкости; h – высота трещины.

На бесконечности потребуем равенства давлений в трещине и пласте пластовому давлению:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x, t) = p_k, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} p_r(x, y, t) = p_k. \quad (1.7)$$

Уравнения (1.1)–(1.7) образуют замкнутую систему.

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{p}_r = \frac{p_r - p_k}{p_*}, \quad \bar{p}(x, t) = \frac{p - p_k}{p_*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_*}, \quad \bar{v}(0, t) = \frac{v_0}{v_*} = \bar{v}_0 = \frac{Q_0}{2v_*hw}, \quad (1.8)$$

где характерные и безразмерные параметры, а также размерный параметр C равны

$$t_* = \frac{L^2}{\chi}, \quad v_* = \frac{t_* p_*}{\rho L}, \quad p_* = \frac{Q_0 \mu}{2kh}, \quad A = \frac{2k p_*}{\mu v v_*} = \frac{Q_0}{2whv_*} = \bar{v}_0 > 0, \quad B = \frac{12\mu(1-m)t_*}{\rho w^2} > 0, \quad C = \frac{k p_*}{\mu L} = \frac{Q_0}{2hL}, \quad (1.9)$$

где L – расстояние, пройденное частицей в пласте вдоль траектории, которое можно принять равным размерам реального конечного пласта. В случае закачки жидкости в пласт берется положительный расход Q_0 , а при отборе жидкости из пласта – отрицательный. В обоих случаях параметры A и B являются положительными величинами, а параметр C имеет размерность скорости и зависит от знака расхода Q_0 .

С учетом (1.8), (1.9) безразмерные уравнения (1.1) – (1.7) примут вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = A \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0}, \quad (1.10)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} - B\bar{v}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{p}_r}{\partial \bar{y}^2}, \quad (1.12)$$

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}), \quad (1.13)$$

$$\bar{v}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{p}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, 0) = 0, \quad (1.14)$$

$$\bar{v}(0, \bar{x}) = \bar{v}_0 = \frac{Q_0}{2h\nu\nu_*}, \quad (1.15)$$

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) = 0, \quad \lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0. \quad (1.16)$$

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Применим преобразование Лапласа [8] по безразмерному времени

$$F(\bar{x}, \omega) = \int_0^{\infty} \bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) e^{-\omega \bar{t}} d\bar{t} = L\{\bar{f}(\bar{x}, \bar{t})\}, \quad F(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \int_0^{\infty} \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) e^{-\omega \bar{t}} d\bar{t} = L\{\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\} \quad (2.1)$$

к системе уравнений (1.10)–(1.16). Обозначим изображения искомых функций следующим образом:

$$V(\bar{x}, \omega) = L\{\bar{v}(\bar{x}, \bar{t})\}, \quad P(\bar{x}, \omega) = L\{\bar{p}(\bar{x}, \bar{t})\}, \quad P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = L\{\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\}. \quad (2.2)$$

С учетом начальных условий (1.14) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для изображений:

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{x}} = A \frac{\partial P_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0}, \quad (2.3)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial \bar{x}} - BV, \quad (2.4)$$

$$\omega P_r = \frac{d^2 P_r}{d\bar{y}^2}. \quad (2.5)$$

Безразмерное условие непрерывности давления в изображениях преобразуется к виду

$$P_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \omega) = P(\bar{x}, \omega). \quad (2.6)$$

Граничное условие (1.15) для изображения запишется в форме

$$V(0, \omega) = \frac{\bar{v}_0}{\omega}. \quad (2.7)$$

Условия на бесконечности (1.16) примут вид

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} P(\bar{x}, \omega) = 0, \quad \lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = 0. \quad (2.8)$$

Получим следующее решение системы ОДУ (2.3)–(2.5) с дополнительными условиями (2.6) – (2.8):

$$V(\bar{x}, \omega) = \frac{\bar{v}_0}{\omega} e^{-\bar{x}\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}}}, \quad P(\bar{x}, \omega) = \bar{v}_0 \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{1}{\omega^{5/4}} e^{-\bar{x}\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}}}, \quad P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \bar{v}_0 \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{1}{\omega^{5/4}} e^{-\bar{x}\sqrt{AB}\sqrt{\omega^{1/2}} - \sqrt{\omega}\bar{y}}. \quad (2.9)$$

Для нахождения оригиналов изображений (2.9) применяется теорема обращения Меллина [8]:

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{t}) = L^{-1} \{F(\bar{x}, \omega)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega, \quad (2.10)$$

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = L^{-1} \{F(\bar{x}, \bar{y}, \omega)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(\bar{x}, \bar{y}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega.$$

Для всех изображений (2.9) начало координат $\omega = 0$ является одновременно и полюсом, и точкой ветвления.

Для интегрирования изображений рассмотрим замкнутый контур на комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси, показанный на рис. 2. Внутри выбранного контура и на контуре функции (2.9) являются однозначными аналитическими функциями.

Обход от точки A_1 до C происходит по часовой стрелке. Далее обходится контур $CDEFB_1A_1$. Обозначим дуги A_1C и FB_1 соответственно через C_R^1 и C_R^2 . Окружность DE обозначается через C_r , а координаты точек $F(C)$ и $E(D)$ – соответственно через $(-R, 0)$ и $(-r, 0)$. Координаты точек A_1 и B_1 равны $a, \mp\sqrt{R^2 - a^2}$ соответственно.

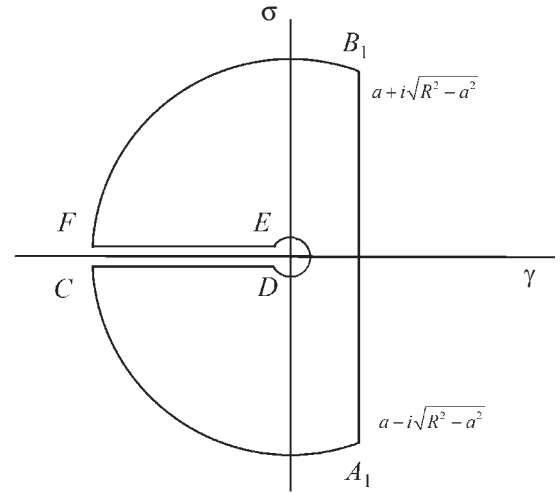


Рис. 2. Контур интегрирования.

Сначала с использованием (2.10) находится оригинал изображения скорости жидкости в трещине (2.9):

$$v(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} V(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \left[\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} V(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega \right]. \quad (2.11)$$

Поскольку внутри рассматриваемого контура и на контуре нет ни полюсов, ни точек ветвления, то по теореме Коши [8] имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{a-i\sqrt{R^2-a^2}}^{a+i\sqrt{R^2-a^2}} V(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{C_R^1} V(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{C_R^2} V(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{C_r} V(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{-R}^{-r} V(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega + \int_{-R}^{-r} V(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega \right]. \quad (2.12)$$

Заметим, что изображения (2.9) стремятся к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. По лемме Жордана [8] интегралы по C_R^1 и C_R^2 в (2.12) стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$.

На контуре C_r имеем $\omega = re^{i\varphi}$, $\omega^{1/2} = r^{1/2}e^{i\varphi/2}$, $\omega^{1/4} = r^{1/4}e^{i\varphi/4}$. Подстановка этих выражений в интеграл по этому контуру дает:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} V(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \lim_{r \rightarrow 0} i\bar{v}_0 \int_{C_r} e^{-\sqrt{AB}r^{1/2}e^{i\varphi/2}\bar{x} + re^{i\varphi}\bar{t}} d\varphi = 2\pi i\bar{v}_0. \quad (2.13)$$

Остается рассмотреть интегралы на нижнем и верхнем берегах разреза вдоль действительной оси. Заметим, что вдоль нижнего разреза $\omega = \rho e^{-i\pi}$, $\sqrt{\omega} = -i\sqrt{\rho}$, $\omega^{1/4} = \rho^{1/4}e^{-i\pi/4}$, а вдоль верхнего разреза $\omega = \rho e^{i\pi}$, $\sqrt{\omega} = i\sqrt{\rho}$, $\omega^{1/4} = \rho^{1/4}e^{i\pi/4}$. Вычислим соответствующие интегралы:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-R}^{-r} V(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = - \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^R \frac{\bar{v}_0}{\rho} e^{-\rho \bar{t} - \sqrt[4]{\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{AB\bar{x}}} d\rho = - \int_0^\infty \frac{\bar{v}_0}{\rho} e^{-\left(\frac{\sqrt[4]{\rho}}{\sqrt{2}} \sqrt{AB\bar{x} + \rho \bar{t}} \right)} e^{-i \left(\frac{\sqrt[4]{\rho}}{\sqrt{2}} \sqrt{AB\bar{x}} \right)} d\rho, \quad (2.14)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-R}^{-r} V(\bar{x}, \omega) e^{\omega \bar{t}} d\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^R \frac{\bar{v}_0}{\rho} e^{-\rho \bar{t} - \sqrt[4]{\rho} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{AB\bar{x}}} d\rho = \int_0^\infty \frac{\bar{v}_0}{\rho} e^{-\left(\frac{\sqrt[4]{\rho}}{\sqrt{2}} \sqrt{AB\bar{x} + \rho \bar{t}} \right)} e^{-i \left(\frac{\sqrt[4]{\rho}}{\sqrt{2}} \sqrt{AB\bar{x}} \right)} d\rho. \quad (2.15)$$

Из выражений (2.11)–(2.15) следует

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} e^{-\left(\frac{\sqrt[4]{\rho}}{\sqrt{2}} \sqrt{AB\bar{x} + \rho\bar{t}}\right)} \sin\left(\frac{\sqrt[4]{\rho}}{\sqrt{2}} \sqrt{AB\bar{x}}\right) d\rho. \quad (2.16)$$

В (2.16) сделаем замену координат $\rho^{1/4}/\sqrt{2} = u$. Тогда получим

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{v}_0 \left[1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-(u\sqrt{AB\bar{x} + 4u^4\bar{t}})} \sin(u\sqrt{AB\bar{x}}) du \right], \quad (2.17)$$

Применение данной техники к изображениям (2.9) пластового давления и давления в трещине дает расходящиеся интегралы при стягивании в точку контура C_r вокруг начала координат. Вычислим функции-оригиналы другим способом. Согласно (2.9), изображение пластового давления

$$P_r(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \bar{v}_0 \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{1}{\omega^{1/4}} \frac{1}{\omega} e^{-\bar{x}\sqrt{AB\omega^{1/2}} - \sqrt{\omega}\bar{y}}. \quad (2.18)$$

Тогда с учетом того, что функция-оригинал изображения $\omega^{1/4}$

$$L^{-1}(\omega^{-1/4}) = \frac{\bar{t}^{-3/4}}{\Gamma(1/4)} \quad (2.19)$$

и из теоремы об умножении изображений, а также (2.18) и (2.19) следует

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{\bar{v}_0}{\Gamma(1/4)} \sqrt{\frac{B}{A}} \int_0^{\bar{t}} \tau^{-3/4} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t} - \tau) d\tau, \quad (2.20)$$

где

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\omega} e^{-\bar{x}\sqrt{\omega^{1/2}AB} - \bar{y}\sqrt{\omega}} e^{\omega\bar{t}} d\omega \right]. \quad (2.21)$$

Вычисляя интеграл (2.21) по контуру на рис. 2, получим

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-(u\sqrt{AB\bar{x} + 4u^4\bar{t}})} \sin(u\sqrt{AB\bar{x}} + 2\bar{y}u^2) du. \quad (2.22)$$

Далее, из (2.20) и (2.22) для пластового давления следует решение

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \frac{\bar{v}_0}{\Gamma(1/4)} \sqrt{\frac{B}{A}} \int_0^{\bar{t}} \tau^{-3/4} \left[1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-(u\sqrt{AB\bar{x} + 4u^4(\bar{t} - \tau)})} \sin(u\sqrt{AB\bar{x}} + 2\bar{y}u^2) du \right] d\tau. \quad (2.23)$$

Из (1.13) и (2.23) следует решение для давления в трещине

$$\bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\bar{v}_0}{\Gamma(1/4)} \sqrt{\frac{B}{A}} \int_0^{\bar{t}} \tau^{-3/4} \left[1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-(u\sqrt{AB\bar{x} + 4u^4(\bar{t} - \tau)})} \sin(u\sqrt{AB\bar{x}}) du \right] d\tau. \quad (2.24)$$

Непосредственная проверка показывает, что выражения (2.17), (2.23) и (2.24) являются точными решениями системы уравнений (1.10)–(1.12). Для полученных решений проверка граничного условия (1.15) выполняется элементарно. Первое и второе граничные условия (1.16) следуют из построения ограниченных решений для изображений пластового давления при $u \rightarrow \infty$ и давления в трещине при $x \rightarrow \infty$, а также из представлений (2.20) и (2.21). Выполнение начальных условий для (2.17), (2.23) и (2.24) следует из теоремы обращения Меллина при $t < 0$ [9].

Знаки размерных давлений (2.23), (2.24) и выражения для скорости (2.17) автоматически определяются знаком расхода Q_0 . Таким образом, полученные решения применимы как к закачке жидкости в пласт, так и к отбору жидкости из пласта в соответствии с условиями (1.8) и (1.9).

Из (2.23) получим выражения для составляющих размерной скорости фильтрации в пласте:

$$W_y(x, y, t) = C \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}} = \frac{8C\bar{v}_0}{\Gamma(1/4)\pi} \sqrt{\frac{B}{A}} \int_0^{\bar{t}} \tau^{-3/4} \left[\int_0^{\infty} u e^{-(u\sqrt{AB\bar{x}} + 4u^4(\bar{t}-\tau))} \cos(u\sqrt{AB\bar{x}} + 2u^2\bar{y}) du \right] d\tau, \quad (2.25_1)$$

$$W_x(x, y, t) = C \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{x}} = \frac{4\sqrt{2}BC\bar{v}_0}{\Gamma(1/4)\pi} \int_0^{\bar{t}} \tau^{-3/4} \left[\int_0^{\infty} e^{-(u\sqrt{AB\bar{x}} + 4u^4(\bar{t}-\tau))} \cos\left(u\sqrt{AB\bar{x}} + 2u^2\bar{y} + \frac{\pi}{4}\right) du \right] d\tau. \quad (2.25_2)$$

В свою очередь из (2.25₁) следует выражение для размерной утечки в пласт (приток из пласта):

$$u_L(x, y, t) = C \left. \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=0} = \frac{8Cv_0}{\Gamma(1/4)\pi} \left[\sqrt{\frac{B}{A}} \int_0^{\infty} u e^{-(u\sqrt{A(B-4u^4)\bar{x}} + 4u^4(\bar{t}-\tau))} \cos(u\sqrt{AB\bar{x}}) du \right] d\tau. \quad (2.26)$$

Знаки всех полученных выражений определяются знаком расхода Q_0 .

Выражение (2.26) для утечки можно, например, использовать при численном моделировании водоизоляции магистральных трещин ширины w неньютоновскими гелями [9]. В этом случае задается расход закачки Q_0 на скважине, а закачиваемый гель вытесняет воду в трещине поршневым образом. Выражение (2.26) можно применить для моделирования утечки жидкости из трещины в пласт в области течения, занятой пластовой водой. Корректная утечка воды из трещины в пласт существенно влияет на определение правильной глубины проникновения геля в трещину, а значит, и на эффективность данного технологического процесса.

Уравнения траекторий жидкости в пласте имеют вид

$$\frac{dy_r(x, t)}{dt} = W_y(x, y, t), \quad y_r(x, 0) = 0, \quad (2.27)$$

где правая часть (1.28) определяется решением (2.25₁).

Решение (2.17) определяет закон движения жидкости в трещине:

$$\frac{dx_f}{dt} = Av_* \left[1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-(u\sqrt{AB\bar{x}} + 4u^4\bar{t})} \sin(u\sqrt{AB\bar{x}}) du \right], \quad x_f(0) = 0. \quad (2.28)$$

Полученные решения применимы к реальному пласту и трещине конечной протяженности до тех пор, пока волна давления не достигнет границы пласта или конца трещины. Это равносильно тому, что частица жидкости достигла соответствующих границ. Поэтому уравнения траекторий (2.27) и (2.28) должны быть использованы для определения момента времени, до которого полученные решения справедливы для трещины и пласта конечных размеров и в дальнейшем будут применены при построении графиков решений.

Из решения (2.24) следует закон изменения забойного давления со временем:

$$\bar{p}(0, \bar{t}) = \frac{\sqrt{AB}}{\Gamma(1/4)} \int_0^{\bar{t}} \tau^{-3/4} d\tau = \frac{4}{\Gamma(1/4)} \sqrt{AB\bar{t}}^{1/4}. \quad (2.29)$$

Отсюда выражение для забойного давления в размерных переменных имеет вид

$$p(0, t) = p_k + \frac{Q_0\mu}{2kh} \bar{p}(0, \bar{t}) = p_k + 0.5516 \frac{(1-m)^{1/2} Q_0\mu^{3/4}}{hw^{1/2} k^{1/4} k_f^{1/2} \beta_*^{1/4}} t^{1/4}, \quad (2.30)$$

где введена эффективная проницаемость не закрепленной трещины $k_f = w^2/12$. Это решение пропорционально корню четвертой степени от времени также как и асимптотическое решение для забойного давления в закрепленной проппантом трещине на больших временах [1, 2, 4]. Сравнение с формулой

$$p(0, t) = p_k + 0.5515 \frac{Q_0\mu^{3/4}}{hw^{1/2} k^{1/4} k_f^{1/2} \beta_*^{1/4}} t^{1/4} \quad (2.31)$$

из работы [4] показывает, что решение (2.30) имеет тот же характер зависимости от параметров за исключением множителя $(1-m)^{1/2}$ в числителе. Постоянные коэффициенты в решениях (2.30) и (2.31) отлича-

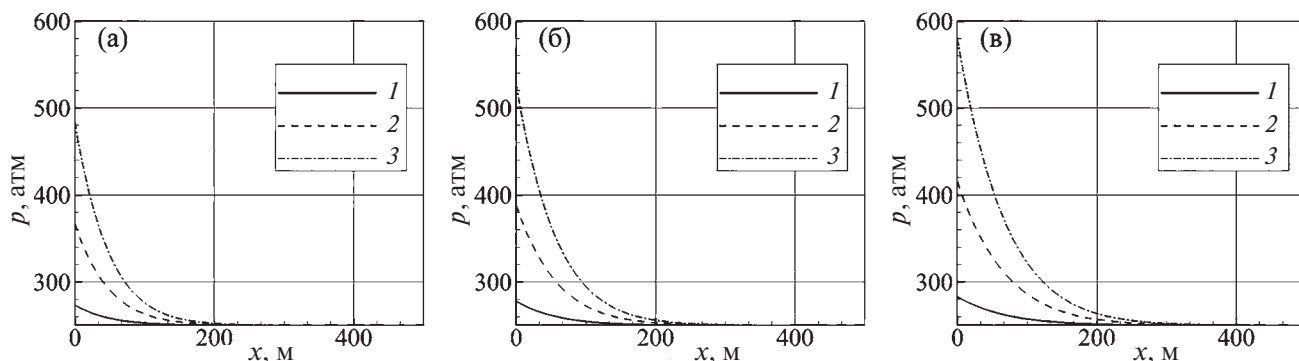


Рис. 3. Изменение давления в трещине в моменты времени (а–в) – $t = 3, 6$ и 12 ч для различных расходов закачки Q_0 . Ширина трещины $w = 10^{-4}$ м. Проницаемость пласта $k = 1$ мД; $I-3 - Q_0 = 10, 50, 100$ м³/сут.

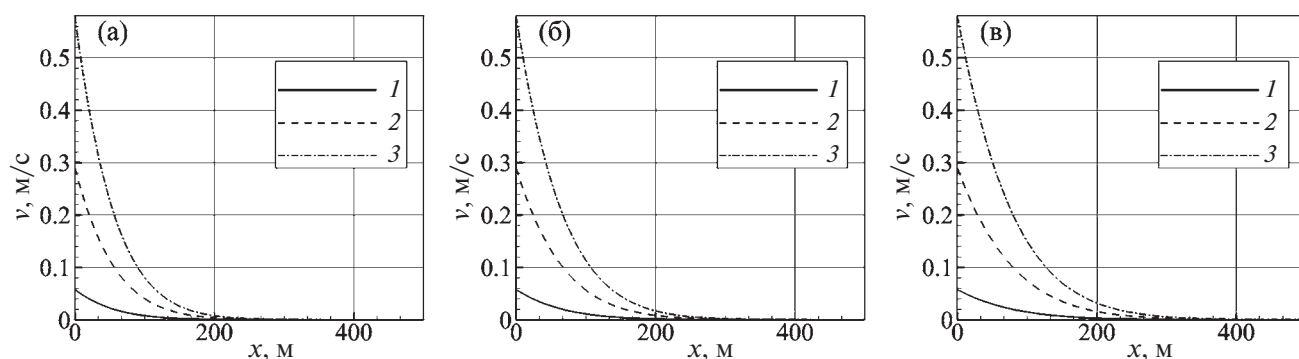


Рис. 4. Изменение скорости течения по длине трещины в моменты времени (а–в) – $t = 3, 6$ и 12 ч для различных расходов закачки Q_0 . Ширина трещины $w = 10^{-4}$ м. Проницаемость пласта $k = 1$ мД; $I-3 - Q_0 = 10, 50, 100$ м³/сут.

ются незначительно. Таким образом, при заданном расходе на скважине зависимость забойного давления от времени для трещины отличается от аналогичной зависимости для трещины, закрепленной пропантом присутствием множителя $(1 - m)^{1/2}$.

Поскольку в рассматриваемой постановке задачи нет характерной длины, то она, как и следовало ожидать, не входит в уравнения (2.30) и (2.31).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

По полученным аналитическим решениям построим графики для двумерного давления в пласте, давления и скорости в трещине, а также утечек в пласт в некоторые моменты времени. Результаты расчетов показаны на рис. 3–6.

При построении графиков использовались следующие параметры. В качестве жидкости бралась вода с плотностью $\rho = 1000$ кг/м³ и вязкостью $\mu = 0.001$ Па·с. Коэффициент упругости воды $\beta_l = 10^{-10}$ Па⁻¹. Коэффициент упругости скелета породы $\beta_s = 10^{-11}$ Па⁻¹. Пористость пласта равна $m = 0.1$. Проницаемости пород варьировали от 1 до 100 мД. Длина трещины равна $L_x = 500$ м. Протяженность пласта в направлении y равна $L_y = 125$ м. Ширина трещины w варьировала от 5×10^{-5} до 1.5×10^{-4} м. Пластовое давление равно $p_k = 250$ атм (2.5×10^7 Па). Расход закачки жидкости варьировал от $Q_0 = 10$ м³/сут до $Q_0 = 100$ м³/сут.

Поскольку полученное решение справедливо для бесконечных протяженностей трещины и пласта, то при применении полученного решения к пласту и трещине конечной протяженности необходимо контролировать координаты фронта жидкости в трещине и пласте при закачке жидкости через добывающую скважину.

Полученные решения для давления и скорости течения в трещине, а также для давления в пласте справедливы для времен, когда как координата фронта жидкости в пласте, так и координата фронта жидкости

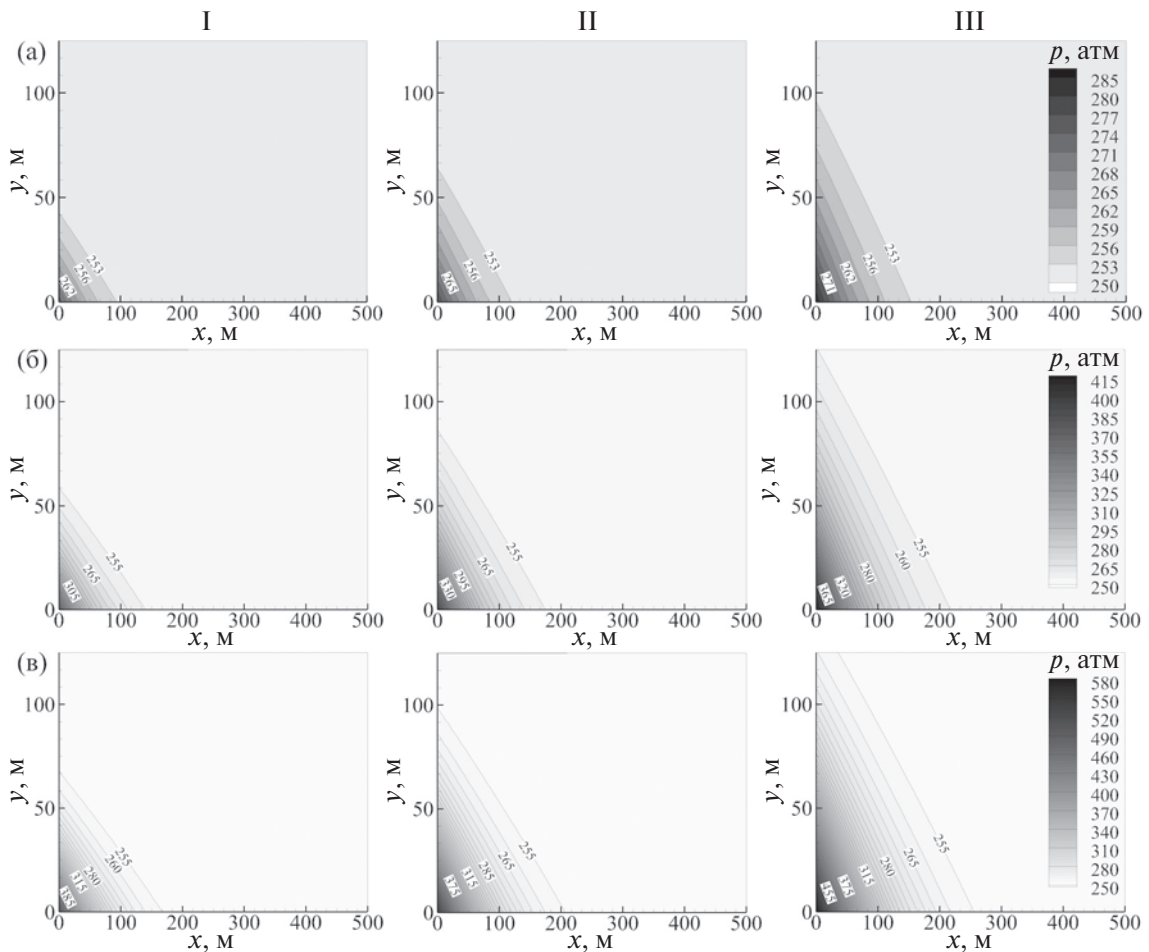


Рис. 5. Распространение давления в пласте в моменты (I–III) – $t = 3, 6$ и 12 ч. Ширина трещины $w = 10^{-4}$ м. Проницаемость пласта $k = 1$ мД: (а–в) – $Q_0 = 10, 50, 100$ м³/сут.

в трещине, рассчитанные по уравнениям траекторий (2.27) и (2.28), еще не достигли соответствующих границ. То есть одновременно должны выполняться неравенства $x_f < L_x, y_r < L_y$. Эти условия соблюдаются при построении графиков решений.

На рис. 3 показано изменение давления по длине трещины для трех моментов времени $t = 3, 6$ и 12 ч при различных расходах закачки $Q_0 = 10, 50$ и 100 м³/сут при проницаемости пласта $k = 1$ мД и ширине трещины $w = 0.0001$ м. Видно, что чем выше расход, тем выше давление и тем с большей скоростью падает давление по длине трещины. Со временем давление в трещине повышается.

Аналогичные кривые давления получаются при фиксированном расходе Q_0 и ширине трещины w . В этом случае давление в трещине увеличивается с уменьшением проницаемости пласта вследствие меньших утечек жидкости из трещины в пласт, а темпы падения давления увеличиваются с увеличением проницаемости пласта (с увеличением фильтрационных утечек).

Также было исследовано влияние ширины трещины на изменение давления по длине трещины при фиксированном расходе закачки Q_0 и фиксированной проницаемости пласта k . В этом случае давление и темпы падения давления по длине трещины увеличиваются с уменьшением ширины трещины.

На рис. 4 представлено изменение скорости течения по длине трещины для тех же моментов времени, что и на рис. 3 при тех же параметрах расчета. Видно, что чем выше расход закачки, тем выше скорость течения в трещине и тем выше темпы падения скорости по длине трещины.

Аналогичные кривые получаются при фиксированном расходе Q_0 и фиксированной ширине трещины w . С увеличением проницаемости породы уменьшается скорость течения и увеличиваются темпы падения скорости по длине трещины вследствие большей утечки.

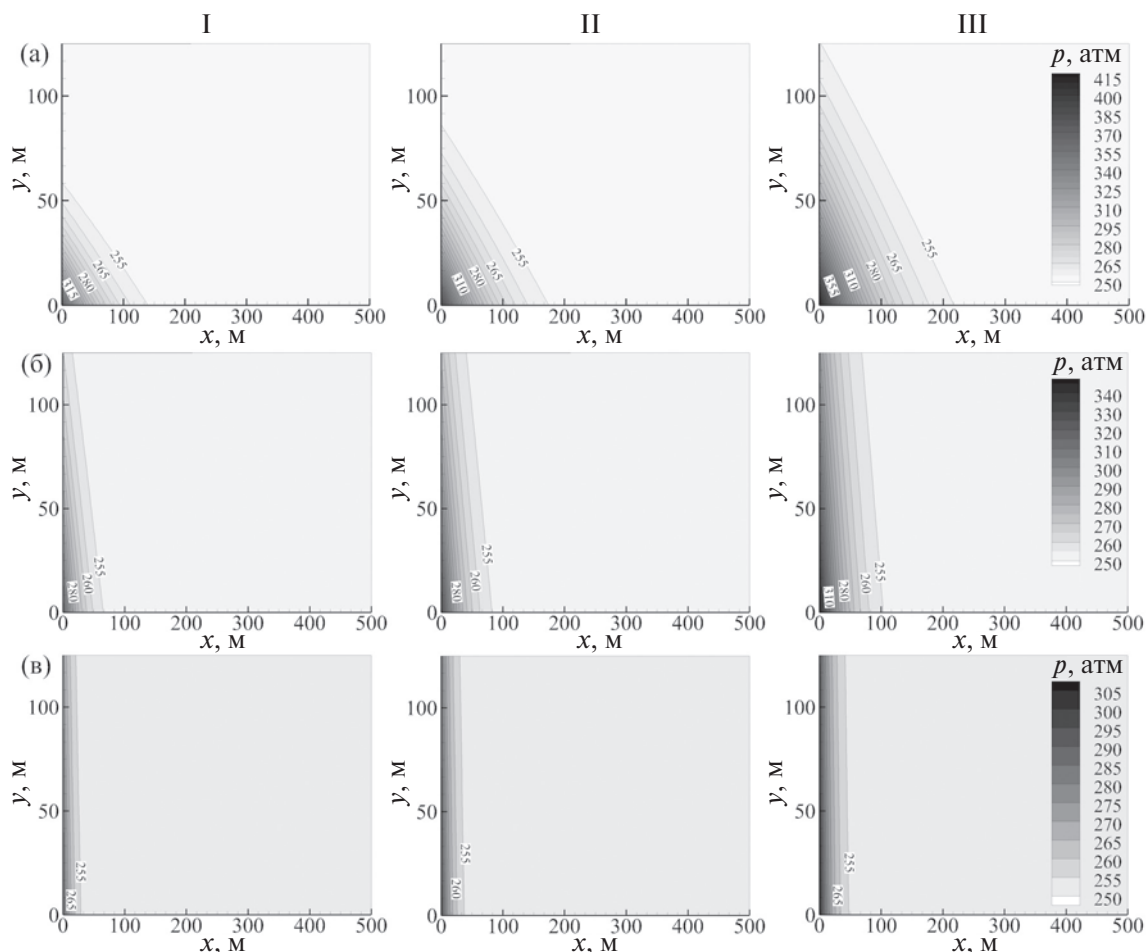


Рис. 6. Распространение давления в пласте в моменты (I–III) – $t = 3, 6$ и 12 ч. Ширина трещины $w = 10^{-4}$ м. Расход закачки $Q_0 = 50$ м³/сут: (а–в) – $k = 1, 10, 100$ мД.

Также было изучено влияние ширины трещины на изменение скорости течения в трещине при фиксированном расходе Q_0 и фиксированной проницаемости пласта k . Выяснено, что с уменьшением ширины трещины увеличивается скорость течения и увеличиваются темпы падения скорости по длине трещины из-за более высокого гидравлического сопротивления.

На рис. 5 при расходах $Q_0 = 10, 50$ и 100 м³/сут показаны изолинии нестационарного двухмерного поля давления в пласте для тех же моментов времени, что и на предыдущих рисунках для проницаемости пласта $k = 1$ мД и ширине трещины равной $w = 0.0001$ м. Видно как со временем происходит нагнетание давления в пласт при билинейном течении в системе эрозионная трещина/водонасыщенный пласт. Изолинии наклонены под некоторым углом к оси x . С течением времени фронт давления продвигается вглубь двухмерной области, а наклон изолиний к оси абсцисс остается постоянным для каждого фиксированного расхода закачки. Естественно, что с ростом расхода закачки Q_0 давление в пласте увеличивается, а фронт давления быстрее проникает в пласт, что видно по приведенным графикам и шкалам давления.

На рис. 6 показаны изолинии нестационарного двухмерного поля давления в пласте для тех же моментов времени, что и на предыдущих рисунках для расхода закачки $Q_0 = 50$ м³/сут и ширине трещины $w = 0.0001$ м. Видно, что с увеличением проницаемости пласта k наклон изолиний к оси абсцисс увеличивается. При $k \rightarrow \infty$ решение двухмерного уравнения пьезопроводности стремится к решению одномерного уравнения теплопроводности по координате x . Это означает, что нагнетание давления в пласте в основном происходит через скважину, а нагнетание давления через трещину пренебрежимо мало.

На рис. 7 показаны изолинии нестационарного двухмерного поля давления в пласте для тех же моментов времени $t = 3, 6$ и 12 ч для расхода закачки $Q_0 = 50$ м³/сут и проницаемости пласта $k = 1$ мД. Видно, что с увеличением ширины трещины w наклон изолиний к оси абсцисс уменьшается. При $w \rightarrow \infty$ решение

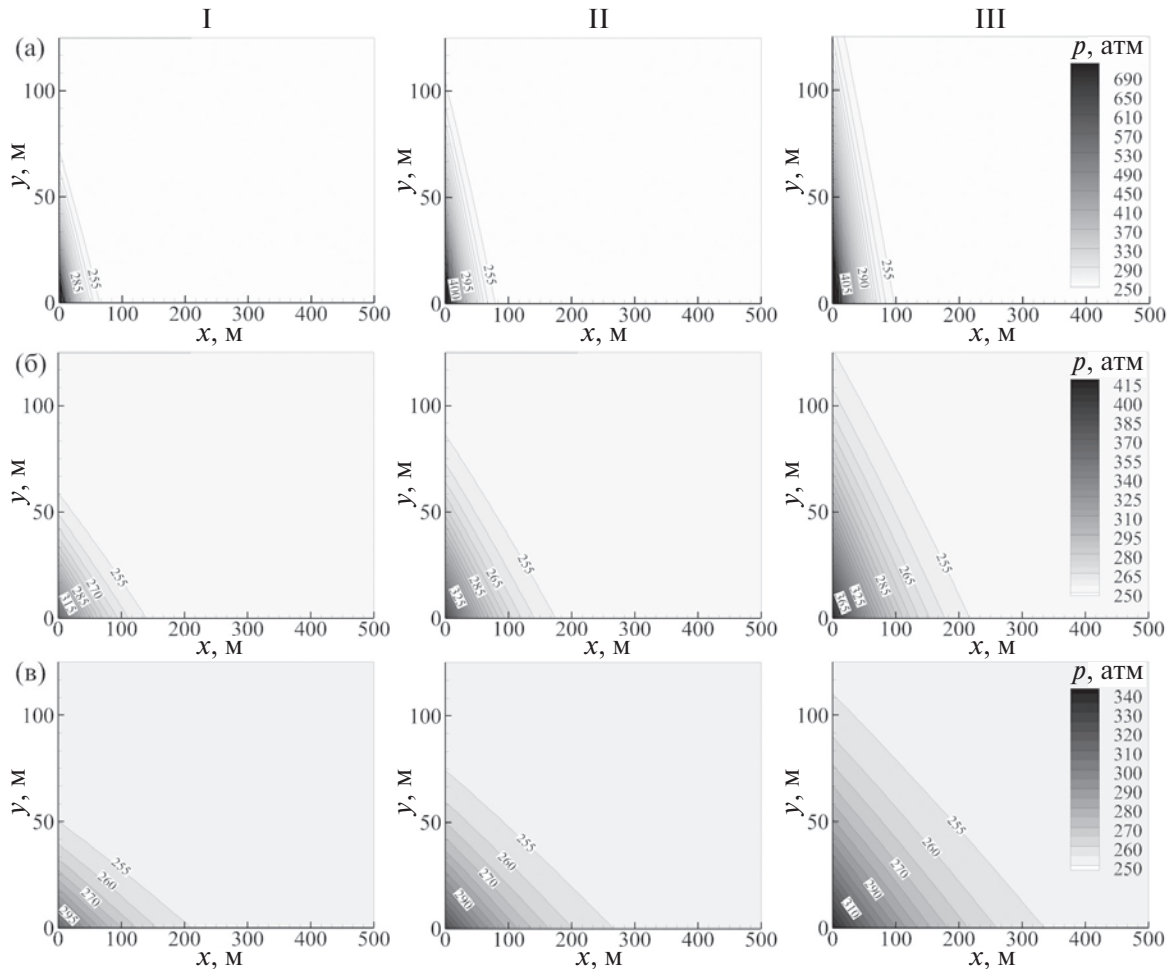


Рис. 7. Распространение давления в пласте в моменты (I–III) – $t = 3, 6$ и 12 ч. Проницаемость пласта $k = 1$ мД. Расход закачки $Q_0 = 50$ м³/сут: (а–в) – $w = 5 \times 10^{-5}, 10^{-4}, 1.5 \times 10^{-4}$ м.

двухмерного уравнения пьезопроводности стремится к решению одномерного уравнения теплопроводности по координате y . Это означает, что нагнетание давления в пласте в основном происходит через трещину, а нагнетанием давления через скважину можно пренебречь.

Полученные аналитические решения могут быть использованы при тестировании численных схем симуляторов, моделирующих процессы фильтрации в линейно-упругих пластах с эрозийными вертикальными трещинами авто-ГРП.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена модель билинейного нестационарного течения в системе эрозийная трещина/водонасыщенный линейно-упругий пласт бесконечной протяженности. Получены аналитические решение для нестационарных полей давления в пласте и трещине, а также скорости течения в трещине при мгновенном включении насоса с постоянным расходом на нагнетательной скважине в изначально невозмущенной системе “трещина–пласт”.

Получено аналитическое выражение для фильтрационных утечек из трещины в пласт, а также уравнения траекторий течения жидкости в трещине и пласте, которые позволяют определить времена, при которых полученные решения справедливы для трещин и пластов конечных размеров.

Построены графики полей давления в трещине и пласте, а также скорости течения в трещине для пласта и трещины конечной протяженности. Полученные решения также описывают течение флюида в трещине и пласте при отборе жидкости в добывающую скважину при постоянном дебите.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cinco-Ley H., Samaniego V.F.* Transient Pressure Analysis for fractured wells // *J. Petrol. Technol.* 1981. V. 33. № 9. P. 1749–1766.
2. *Нагаева З.М., Шаганов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // *ПММ.* 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
3. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* К теории билинейного режима фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва // *Вестн. Башкирского ун-та.* 2018. Т. 23. № 4. С. 958–963.
4. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // *Изв. РАН. МЖГ.* 2019. № 5. С. 6–14.
5. *Башмаков Р.А., Шаганов В.Ш., Фокеева Н.О.* Особенности фильтрации флюидов в коллекторах, подверженных гидроразрыву пласта, при переходных режимах работы скважины // *ПМТФ.* 2022. Т. 63. № 3. С. 117–127.
6. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* Моделирование неустановившейся фильтрации жидкости в пласте с трещиной гидроразрыва // *ПМТФ.* 2022. Т. 63. № 4. С. 116–125.
7. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975. 296 с.
8. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2002. 749 с.
9. *Ильясов А.М., Булгакова Г.Т.* Моделирование установки и устойчивости гелевых экранов в магистральных трещинах // *ПМТФ.* 2018. Т. 59. № 2. С. 198–208.

ANALYTICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF INJECTION OR REDUCTION OF THE FORMATION PRESSURE IN THE RESERVOIR WITH A FRACTURE

A. M. Il'yasov^{a, *} and V. N. Kireev^{b, **}

^a *ООО "RKh-BashNIPIneft", Ufa, Russia*

^b *Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia*

**E-mail: amilyasov67@gmail.com*

***E-mail: kireev@anrb.ru*

The problem of injection of Newtonian fluid at a constant flow rate through an injection well into an initially undisturbed infinite reservoir with an erosive vertical main fracture of constant width is considered. Using the Laplace transform method, analytical solutions are obtained for the pressure fields in the fracture and reservoir, the flow velocity in the fracture, as well as the equations for fluid trajectories in the reservoir and in the main fracture are derived. The solutions obtained are also applicable to the problem of fluid withdrawal into a production well intersected by a vertical main fracture. Nonstationary two-dimensional pressure fields in the reservoir, as well as the pressure and velocity fields in the fracture, are constructed.

Keywords: unsteady flow, bilinear flow, main fracture, Laplace transform, analytical solution

УДК 532.5

НАЧАЛЬНЫЙ ЭТАП СЛИЯНИЯ СОСТАВНОЙ КАПЛИ В ИМПАКТНОМ РЕЖИМЕ

© 2024 г. Ю. Д. Чашечкин*, А. Ю. Ильиных**, Ш. Х. Хайирбеков***

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

* E-mail: chakin@ipmnet.ru

** E-mail: ilynykh@ipmnet.ru

*** E-mail: msturistt09@gmail.com

Поступила в редакцию 27.10.2023 г.

После доработки 28.12.2023 г.

Принята к публикации 28.12.2023 г.

Эволюция регулярной тонкой структуры картины распределения окрашенного вещества при растекании свободно падающей многожидкостной капли в глубокой воде впервые прослежена методами технической фото- и видеорегистрации. Изучалась картина течения на начальном этапе формирования каверны и венца при слиянии составной капли, ядро которой – капля раствора ализариновых чернил, было покрыто масляной оболочкой. В картине распределения окрашенной жидкости на дне каверны и стенках венца наблюдались полосчатые структуры, формирование которых связывается с влиянием процессов конверсии доступной потенциальной поверхностной энергии (ДППЭ) при уничтожении контактных поверхностей сливающихся жидкостей. В проведенных опытах изменялась высота падения капли. Положение ядра в составной капле не контролировалось и определялось условиями отрыва. Распад чернильного ядра на волокна наблюдался во всех опытах. Площадь покрытия поверхности каверны и венца окрашенной жидкостью достигала максимума при центральном положении ядра.

Ключевые слова: составная капля, эксперимент, каверна, венец, волокнистая структура

DOI: 10.31857/S1024708424020045 **EDN:** RJGHI

Интенсивность изучения динамики и структуры течений, создаваемых свободно падающей каплей в покоящейся принимающей жидкости, в основе которых лежали зарисовки визуальных наблюдений [1] и первые фотографии [2], в последние десятилетия устойчиво растет. Число публикаций по запросу Drop impact в 2019 г. превышает тысячу только в сети Scopus [3].

Интерес обусловлен глубоким научным содержанием явления, в котором отчетливо проявляется влияние естественных термодинамических процессов на перенос вещества, импульса и энергии на макроскопических масштабах, а также совершенствованием вычислительной и экспериментальной техники. В опытах расширяется диапазон частот зондирующего излучения, включающий и радио-, и световые и рентгеновские волны [4], улучшается временное и пространственное разрешение регистрирующей аппаратуры [5], совершенствуются программы обработки информации [6]. Новые экспериментальные результаты способствуют развитию численных и аналитических методов исследований капельных течений, основанных как на системах фундаментальных уравнений механики жидкостей [7–9] и термодинамики [10, 11], аналогах дифференциальных форм законов сохранения вещества, энергии и импульса – следствий аксиом однородности пространства и времени [12], так и на конститутивных подходах, включающих моделирование действия поверхностных эффектов массовыми силами [13–15].

Традиционно, начиная с работ [1, 2], проводят сравнительное изучение слияния с водой падающих капель чистых смешивающихся жидкостей, как одинаковых (вода–вода [16]), так и однородных по составу капель водных растворов минеральных солей, пигментов, ацетона и других веществ, смешивающихся с водой в любых пропорциях [17, 18]. В минувшие годы активно изучали растекание в глубокой жидкости составных капель, включающих несмешивающиеся жидкости или плохо растворимые газы с дополнительными контактными поверхностями [3, 19].

В зависимости от пространственной структуры многожидкостные капли традиционно именуется составными (compound), в которых капля одной жидкости заключена в другой жидкости (капсулированные, инкапсулированные, оболочечные, ядерные, двух- и многослойные) и составленные (composed) – парные, дуальные, многоядерные, многочастичные или янус-капли в зарубежной литературе.

В составных каплях все контактные поверхности непрерывные и замкнутые. В составленных каплях на контактных поверхностях существуют замкнутые линии и отдельные точки контакта трех сред. Усложнение геометрии капли затрудняет проведение экспериментов и расчетов течений. Тем не менее число таких работ быстро увеличивается и становится сравнимым с числом опытов с однородными каплями [3].

Полученные в опытах с составными каплями научные результаты активно используются при разработке новых технологий в химической, нефтехимической, металлургической и пищевой промышленности [20]; при совершенствовании методик гидродинамических [21], химических, биологических [22] и биомедицинских исследований [23]; при разработке мер по сохранению окружающей среды [24].

Динамика формирования компонентов течения – брызг, капиллярных волн, каверны, венца, всплеска и распределения вещества капли зависит от параметров задачи – состава и плотности ρ сред, диаметра D , площади поверхности S_d , объема V_d и массы $M = \rho V_d$, контактной скорости U и энергии капли – кинетической $En_k = MU^2/2$ и доступной потенциальной поверхностной энергии $En_\sigma = S_d \sigma_d^a$ капли (σ_d^a – коэффициент поверхностного натяжения на границе капли с воздухом). Поверхностная энергия сосредоточена в тонком слое толщиной порядка размера молекулярного кластера $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$ см [25, 26].

В интрузивном режиме слияния, когда кинетическая энергия капли меньше поверхностной потенциальной энергии $R_E = En_k / En_\sigma < 1$, капля плавно втекает в толщу жидкости, а каверна образуется с задержкой в несколько миллисекунд [27, 28].

В импактном режиме, при $R_E \gg 1$, капля растекается по поверхности каверны и венца тонкими струйками (триклами, ручейками, лигаментами), следы которых образуют линейчатые и сетчатые структуры, состоящие из треугольных и многоугольных ячеек [29, 30]. Струйки ускоряются в контактной области слияния капли на непрерывно деформирующейся подвижной поверхности жидкости [31]. Волокнистое распределение вещества наблюдается при слиянии капли и с толстым [29, 30], и с тонким слоем жидкости [32].

В импактном режиме на начальном этапе слияния тонкие струйки, содержащие вещество капли, пронизывают дно каверны и поступают в толщу принимающей жидкости в виде отдельных волокон, образующих моховидный слой под дном каверны [33]. Со временем под каверной формируется расслоенная область жидкости промежуточной плотности с собственным значением показателя преломления, позволяющим измерять высоту слоя оптическими инструментами [34]. После схлопывания каверны в течении появляется восходящая центральная струйка – всплеск [2, 17, 35]. Процессы формирования и растекания всплеска перестраивают картину распределения волокон, содержащих вещество капли [36].

Заметное внимание также уделяется экспериментальному изучению капельных течений при контакте несмешивающихся жидкостей. Черно-белые видеogramмы растекания капель воды в силиконовом масле проанализированы в [37], цветные видеogramмы картины растекания капли разбавленных чернил в растительном масле приведены в [38]. Водная пленка, покрывающая тонким слоем каверну, в обоих опытах довольно быстро разбивалась на отдельные пятна, связанные тонкими волокнами. Пятна постепенно стягивались в окрашенные капли, а волокна – в последовательности (“четки”) мелких капелек, распределенных в толще и на поверхности жидкости. Размеры структурных компонентов для различных условий опытов с несмешивающимися жидкостями приведены в [39].

В последние годы особенно активно исследуются процессы слияния многокомпонентных капель, состоящих из соразмерных объемов несмешивающихся жидкостей или газов. Такие статьи составляют почти половину всех публикаций по капельной тематике [3]. В зависимости от состава сред, различают двухкомпонентные и многокомпонентные капли (одним из включений может быть и газ [19, 40]).

В двухкомпонентных составных каплях (компаунд, ядерных или оболочечных) с внешней средой контактирует только одно вещество [21], в составленных (дуальных, парных или янус-каплях) – оба [40]. На практике используются и двух-, и многослойные компаунд капли, составленные из нескольких веществ, а также покрытые тонкой жидкой или мягкой (полутвердой) оболочкой [3]. Список технологий, использующих составные капли в химической, фармацевтической, пищевой, металлургической и других массовых отраслях промышленности быстро расширяется.

Составные капли, образующиеся при попадании капель воды в расплавленный металл, нагретый выше температуры Лейденфроста, служат дополнительным источником возникновения пожаров при промышленных авариях [41]. Одним из перспективных направлений считается создание новых видов топлив,

в которых составные капли содержат воду, добавки, воздух или горючие газы [42]. Осцилляции составных капель активно изучаются аналитическими методами [43].

При моделировании процессов слияния капель численными методами используются большие вычислительные мощности [44–46]. В расчетах применяются системы конститутивных уравнений в приближении несжимаемой жидкости, не включающие уравнения переноса составляющих веществ [44, 45].

В экспериментах составные капли получают многими физико-химическими методами: согласованным выдавливанием жидкостей из соосных капилляров, инъекцией жидкости ядра из микропипетки в растущую каплю, соприкосновением независимо выдавливаемых капель из двух капилляров [3], испарением дополнительной несущей жидкости, термически индуцированным фазовым разделением [47], покрытием поверхности капель масла наночастицами [48] и др.

В основном в опытах регистрируется морфология картины течений – геометрия каверны, венца и пузырей в толще жидкости. Распределение вещества капли в принимающей жидкости ранее практически не изучалось. В данной работе впервые прослежена эволюция тонкой структуры картины распределения вещества составной оболочечной капли в принимающей жидкости на начальном этапе процесса слияния в процессе формирования первичной каверны и венца.

1. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ

Несколько лет системы конститутивных уравнений, широко применяющиеся для теоретического описания слияния свободно падающей капли с принимающей жидкостью [13–15], дополняются анализом полных решений системы фундаментальных уравнений [7, 8] с уравнениями состояния для плотности и потенциала Гиббса (свободной энтальпии [9]) с физически обоснованными начальными и граничными условиями. Схема распределения потенциала Гиббса в принимающей жидкости и в бинарных составных каплях приведена на рис. 1.

В равновесном состоянии дифференциал потенциала Гиббса в толще жидкости I определяется величиной энтропии s и плотности ρ или удельного объема $V=1/\rho$:

$$dG_\sigma = -sdT + VdP.$$

В приповерхностном слое II толщиной порядка размера молекулярного кластера $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$ см структура жидкости более сложная. Энергия также зависит от площади свободной поверхности S_σ [8, 21, 45]:

$$dG_\sigma = -sdT + VdP - S_\sigma d\sigma,$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения.

В тонком поверхностном слое жидкости III толщиной порядка нескольких молекулярных размеров $\delta_s \sim 10^{-8}$ см наиболее отчетливо выражены различные структурные компоненты физико-химической природы – комплексы, клатраты, кластеры, ассоциаты, войды [25, 49]. Также наблюдается самоионизация некоторых сред, в частности воды [50]. Дифференциал потенциала Гиббса в слое включает члены, зависящие от концентрации компонентов S_i и химического потенциала μ_i (эффекты электризации здесь и далее не учитываются):

$$dG_\sigma = -sdT + VdP - S_\sigma d\sigma + \mu_i S_i.$$

В силу малости толщины слоя II плотность поверхностной энергии $W_\sigma = En_\sigma/V_\sigma$ достигает большого значения и существенно превосходит плотность кинетической энергии $W_k = En_k/V_d$, отношение этих величин большое $W_\sigma/W_k \sim V_d/V_\sigma \sim D/\delta_\sigma \sim 10^6$. Падающая со скоростью $U \sim 1$ м/с капля диаметром порядка $D \sim 1$ см сливается за время порядка $\Delta\tau_d \sim 10^{-2}$ с, а преобразование доступной потенциальной поверхностной энергии проходит за время порядка $\Delta\tau_\sigma \sim 10^{-8}$ с. Освобожденная энергия формирует тонкие струйки – лигаменты (ручейки, триклы), которые наблюдаются при слиянии смешивающихся жидкостей [28–31, 33].

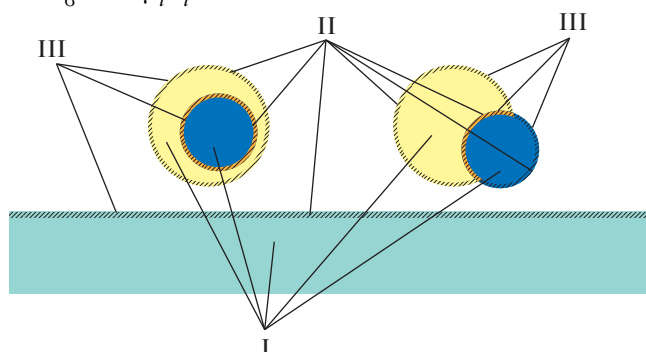


Рис. 1. Структура капельной жидкости (слева – оболочечная, справа – дуальная капля): I – III – толща, приповерхностный и поверхностный слой.

В данных опытах исследовалась картина растекания оболочечной капли, включающей окрашенное ядро – капельку разбавленных ализариновых чернил в масляной оболочке (см. рис. 1).

В отличие от классической постановки задачи слияния однородной капли, размерные параметры, участвующие в описании слияния составной капли, включают физические параметры уже не трех, а четырех контактирующих сред – принимающей жидкости, воздуха, внутреннего ядра и внешней оболочки капли. Принадлежность параметра обозначается индексами для принимающей жидкости t , воздуха a , ядра n_d и оболочки s_d капли соответственно.

Из анализа полной системы уравнений механики жидкостей, физически обоснованных уравнений состояния и граничных условий [7–9] применительно к задачам отрыва и слияния капли следует, что в число основных размерных параметров, характеризующих изучаемое течение, входят потенциалы Гиббса ядра и оболочки капли G_d^n и G_d^s , воздушной среды G_a и принимающей жидкости G_t , плотности $\rho_d^n, \rho_d^s, \rho_a, \rho_t$, четыре кинематические $\nu_d^n, \nu_d^s, \nu_a, \nu_t$ и динамические вязкости $\mu_d^n, \mu_d^s, \mu_a, \mu_t$; шесть полных $\sigma_{d,n}^{s,a}, \sigma_{d,n}^a, \sigma_{d,s}^a, \sigma_t^a, \sigma_t^{d,n}, \sigma_t^{d,s}$ и шесть нормированных на плотность $\gamma_{d,n}^s, \gamma_{d,n}^a, \gamma_{d,s}^a, \gamma_t^a, \gamma_t^{d,n}, \gamma_t^{d,s}$ коэффициентов поверхностного натяжения для поверхностей раздела сред; эквивалентные диаметры D_n и D_s , площади поверхности S_d^n и S_d^s , объемы V_d^n и V_d^s ; массы M_d^n и M_d^s ядра и оболочки; ДППЭ $En_{\sigma,d}^{n,s} = \sigma_{d,n}^{n,s} S_d^n$ и $En_{\sigma,d}^{s,a} = \sigma_{d,n}^{s,a} S_d^s$; коэффициенты диффузии вещества ядра и оболочки капли в принимающей жидкости $\kappa_t^{d,n}$ и $\kappa_t^{d,s}$, а также контактная скорость капли U , которая движется как целое; ее полная масса $M_d = M_d^n + M_d^s$, кинетическая энергия капли $En_{k,d} = M_d U^2 / 2$ и ее компонентов – ядра $En_k^n = M_d^n U^2 / 2$ и оболочки $En_k^s = M_d^s U^2 / 2$.

Большое число параметров позволяет сформировать развернутые группы собственных масштабов длины и времени, характеризующих слияние составной капли с принимающей жидкостью.

Базовая группа линейных масштабов, которые определяются физическими свойствами сред, включает группу капиллярно-гравитационных отношений $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma/g}$ входящих в дисперсионное уравнение коротких поверхностных волн [4], и диссипативно-капиллярных масштабов $\delta_v^\gamma = \nu^2/\gamma$. Группы линейных масштабов, зависящих от скорости капли U , включают масштабы Прандтля $\delta_U^\nu = \nu/U$ и капиллярные масштабы $\delta_U^\gamma = \gamma/U^2$ для каждой из сред.

Соответственно, одна часть временных масштабов задачи включает только параметры среды – $\tau_\gamma^\nu = \nu^3/\gamma^2$, $\tau_g^\gamma = 4\sqrt{\gamma/g^3}$, другая – размер капли – $\tau_\gamma^D = \sqrt{D^3/\gamma}$, $\tau_\nu^v = \nu D/\gamma$, третья – ее скорость – $\tau_U^D = D/U$, $\tau_g^U = U/g$.

Отношения базовых масштабов длины и времени определяют набор характерных капиллярных и капиллярно-диссипативных скоростей задачи [51]. Собственные масштабы задачи определяют требования к методике эксперимента – выбору размера поля наблюдения, пространственного и временного разрешения инструментов.

Большое число масштабов однородной размерности отражает многообразие и сложность процессов, протекающих в широком диапазоне масштабов – от надмолекулярных порядка $\delta_c \sim 10^{-6}$ см в процессах освобождения и накопления доступной потенциальной поверхностной энергии, до полного размера области течения.

Базовые динамические параметры капли в целом – импульс $\mathbf{p}_d = M\mathbf{U}$, кинетическая $En_{k,d} = M U^2 / 2$ и полная доступная потенциальная поверхностная энергия (ДППЭ) $En_{\sigma,d} = \sigma_{d,n}^{n,s} S_d^n + \sigma_{d,n}^{s,a} S_d^s$.

Отношения характерных масштабов одинаковой размерности задают набор традиционных безразмерных параметров процесса, включающий числа Рейнольдса $Re = UD/\nu$, Фруда: $Fr = U^2/gD$, Бонда $Bo = gD^2/\gamma_{d,s}^a$, Онезорге $Oh = \nu/\sqrt{\gamma D}$ и Вебера $We = DU^2/\gamma_{d,s}^a$, которые применяются для сравнения условий проведения опытов. Дополнительными безразмерными параметрами течения выбраны отношения компонентов энергии $R_E = En_k/En_\sigma$, $R_{E\sigma} = E_{\sigma,d}^{n,s}/E_{\sigma,d}^{s,a}$ и их плотностей $R_W = En_k\delta/En_\sigma D$. Для сокращения описания процессов слияния составной капли значения параметров приведены только для воды. Плотность, поверхностное натяжение и другие параметры раствора чернил близки к значениям соответствующих параметров для воды.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Опыты выполнены на доработанном стенде для изучения тонкой структуры быстропротекающих процессов (ТСТ), входящем в состав Уникальной исследовательской установки УИУ “ГФК ИПМех РАН” [52]. Фотографии и подробные описания стендов приведены в работах [28, 30]. Картины слияния составных

капель регистрировали высокоскоростной видеокамерой Optonics CR 300 × 2 или фотоаппаратом Canon EOS 350D.

Оболочечные составные капли формировались методом инъекции ядра из соосного тонкого капилляра в подготовленную масляную каплю, висящую на срезе капилляра. Схема дозатора приведена на рис. 2. Первоначально на срезе внешнего капилляра формировалась масляная капля с помощью питателя 2.

Когда капля масла достигала нужного размера, с помощью тонкой соосной иглы 1 производилась медленная инъекция раствора ализариновых чернил, пока составная капля не отрывалась от среза капилляра под действием собственного веса. Скорость капли в момент контакта с принимающей жидкостью определялась по кадрам видеоряда.

Как и в случае растекания однородной капли, картины течения существенно различаются при слиянии медленно и быстро движущейся капли в момент контакта. Критерий перехода от медленного интрузивного втекания капли в толщу принимающей жидкости к быстрому импактному режиму растекания по ее поверхности определяется отношением кинетической энергии капли к доступной потенциальной поверхностной энергии [29].

В интрузивном режиме, когда кинетическая энергия капли En_k меньше доступной потенциальной поверхностной энергии En_{σ} , определенной по внешнему диаметру, $R_E < 1$, вещество ядра вначале равномерно растекается по поверхности каверны, затем собирается не ее дне и проваливается в толщу принимающей жидкости, образуя вытянутую по вертикали интрузию сложной формы.

При больших скоростях падения капли, при $R_E > 1$ слой равномерно распределенной по поверхности каверны жидкости ядра постепенно трансформируется в регулярную систему волокон. Именно этот режим структурированного течения, ранее не отмеченный, по мнению авторов, в литературе, был выбран для дальнейшего изучения.

Всего были проведены четыре серии опытов с оболочечными каплями с наружным диаметром в диапазоне $3.3 < D_s < 5$ мм, свободно падающими с высоты $H = 30, 44$ и 50 см. Ядро капли составляла капля ализариновых чернил, разбавленных в пропорции 1:20. Оболочка – рафинированное пищевое подсолнечное масло плотностью $\rho_d^s = 0.91$ г/см³. Коэффициент поверхностного натяжения на границе масла с воздухом $\sigma_0^a = 33$ г/с², а на границе с водой $\sigma_w^o = 23.5$ г/с². Значение коэффициента поверхностного натяжения определялось методом подвешенной капли (suspended drop) [53]. Значения коэффициента динамической вязкости для чернильного ядра $\mu_d^n = 0.01$ г × см⁻¹ × с⁻¹, для масляной оболочки $\mu_d^s = 0.55$ г × см⁻¹ × с⁻¹; значение коэффициента кинематической вязкости – $\nu_d^n = 0.01$ см² × с⁻¹ и $\nu_d^s = 0.6$ см² × с⁻¹ соответственно.

Полученные составные капли имели толщину масляного слоя в диапазоне $0.2 < \Delta l_s < 1.1$ мм. Предварительные опыты показали, что смещение центра ядра относительно центра оболочки лежало в диапазоне масштабов $0.1 < \Delta r_s < 0.3$ мм. В данных опытах форма капли и смещение ядра не регистрировалось по техническим причинам. Контактная скорость капель лежала в интервале $2.4 < U < 3.1$ м/с. Принимающая жидкость – частично дегазированная водопроводная вода, находилась в кювете $10 \cdot 10 \cdot 8$ см³. Характерные энергетические оценки компонентов течений указаны в табл. 1.

Таблица 1. Энергетические оценки компонентов течений водно-масляной капли (при средней толщине масляного слоя $\Delta l_s = 0.65$ мм, наружном диаметре $D_s = 5$ мм и скорости падения $U = 3$ м/с)

$En_{\sigma,d}^{n,s}$, мкДж	$En_{\sigma,d}^{s,a}$, мкДж	En_k^n , мкДж	En_k^s , мкДж	$En_{\sigma,d}$, мкДж	$En_{k,d}$, мкДж	R_E	$R_{E\sigma}$
1.01	2.59	119.34	159.39	3.60	278.73	77.43	0.39

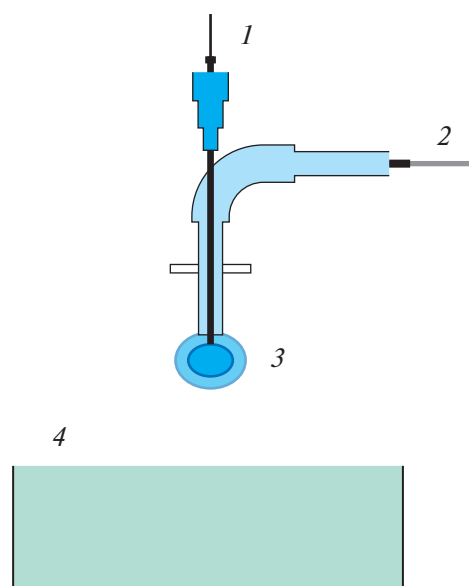


Рис. 2. Схема дозатора составных капель: 1, 2 – капилляры подачи жидкостей ядра и оболочки; 3 – растущая составная капля; 4 – кювета с принимающей жидкостью.

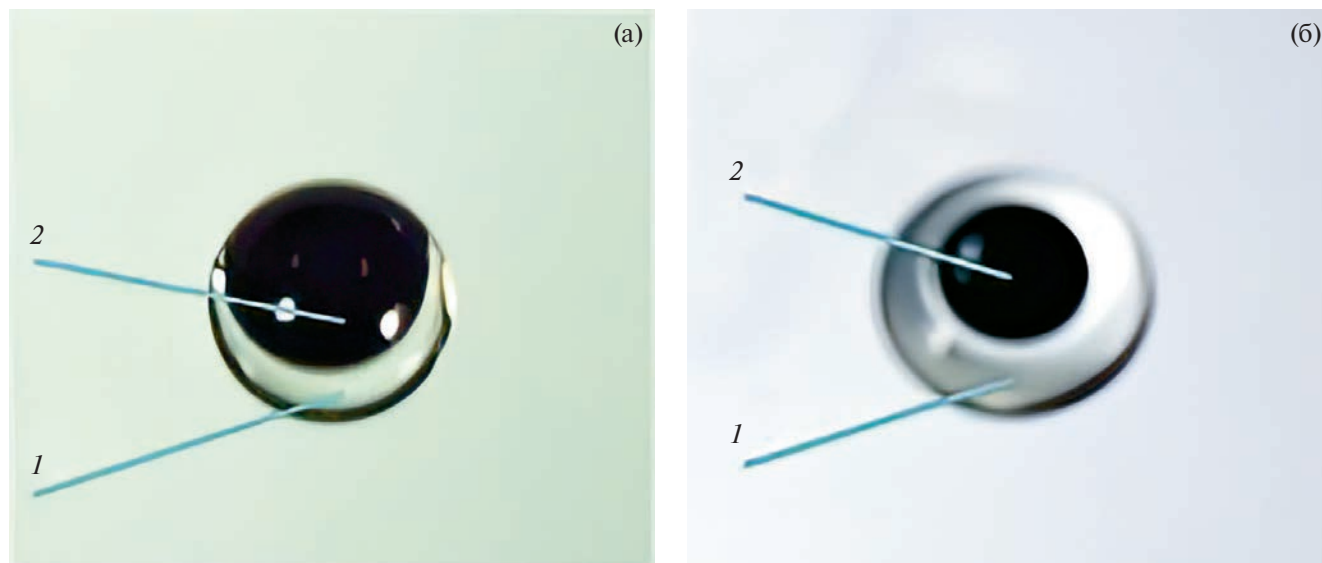


Рис. 3. Фотографии составных капель: а, б – с сильно и слабо смещенным ядром; 1 – масляная оболочка; 2 – ядро.

Применялись два варианта регистрации. При наблюдениях картины течения в толще жидкости в вертикальной плоскости угол наклона линии визирования составлял $\vartheta = 0^\circ$ к горизонту. При наблюдениях свободной поверхности $\vartheta = 0^\circ$. Длительность экспозиции составляла 200 мкс, скорость съемки – 4000 к/с.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При слиянии быстро падающих капель, кинетическая энергия которых значительно превышает ДППЭ $R_E \gg 1$, каверна начинает формироваться с момента первичного контакта жидкостей. В случае контакта смешивающихся жидкостей вещество капли распределяется по поверхности жидкости в виде отдельных волокон, образующих линейчатые и сетчатые картины на поверхности каверны и венца [27, 29].

Степень выраженности отдельных структурных компонентов течений зависит от многих размерных (или приведенных безразмерных) параметров задачи, в частности, контактной скорости капли при постоянных значениях остальных физических величин. При слиянии несмешивающихся жидкостей капля быстро растекается по поверхности каверны и венца, далее в масляной пленке появляются пустоты, оконтуренные тонкими границами [38]. Постепенно границы разрываются, и вещество капли стягивается в системы капелек различного размера в толще и на поверхности жидкости.

Приведенные ниже выборки из видеофильмов показывают, что тонкая структура наблюдаемых картин распределения вещества составных капель в принимающей жидкости значительно отличаются от распределения веществ однокомпонентной капли.

3.1. Начальный этап слияния составной капли

Фотография составной капли с чернильным ядром, покрытым масляной оболочкой непосредственно перед началом слияния, приведена на (рис. 4а), отсчет времени ведется от момента первичного контакта оболочки капли с поверхностью принимающей жидкости. При начале слияния, за время меньше $\Delta t = 0.25$ мс, которое определяется скоростью съемки, по поверхности принимающей жидкости успевают растечься масляная пленка, и сформироваться четыре кольца вокруг центральной капли (рис. 4б).

Ближайшее к капле светлое кольцо визуализирует плоское дно каверны [27], следующее, более темное – наклонную стенку, следующее светлое – формирующийся венец, и внешнее темное – масляную пленку. Окрашенная жидкость ядра капли начинает растекаться в виде ориентированного на 11 часов пигментированного языка, снизу и сверху покрытого масляной пленкой. Распределение пигмента в пленке неравномерное, прослеживается полосчатая периодическая структура.

Капля в момент первичного контакта все еще сохраняет округлую форму, ее диаметр $D = 5$ мм; при этом диаметр первичной каверны составляет $d_c = 6.81$ мм. Ширина языка (хорда) составляет $d_\perp = 3.86$ мм. Длина языка в начале процесса слияния при $t < 2$ мс остается примерно постоянной и составляет $l_\perp = 1.72$ мм.

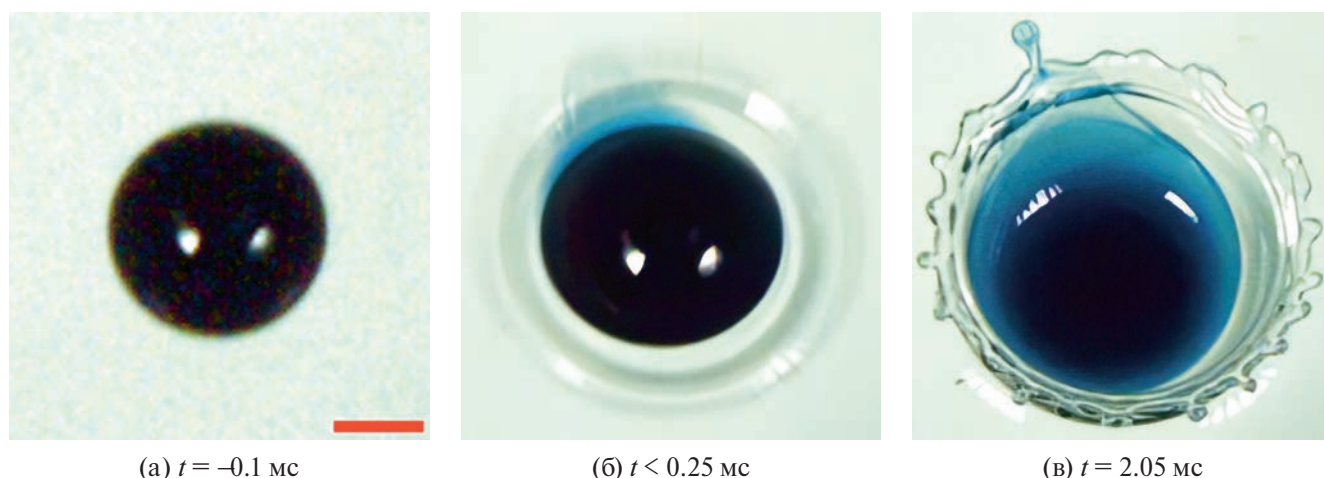


Рис. 4. Эволюция распределения вещества составной чернильно-масляной капли на начальном этапе импакта. Длина маркера – 2 мм ($H = 44$ см, $U = 290$ см/с, $D_n = 2.8$ мм, $D_s = 5$ мм, $M_n = 11.49 \times 10^{-6}$ кг, $M_s = 49.1 \times 10^{-6}$ кг, $M = M_n + M_s = 60.59 \times 10^{-6}$ кг, $Re = 242$, $Fr = 172$, $We = 1168$, $Bo = 6.8$, $Oh = 0.14$, $En_{k,d} = 254.79$ мкДж, $En_{\sigma,d}^{n,s} = 0.58$ мкДж, $En_{\sigma,d}^{s,a} = 2.59$ мкДж, $R_E = 80.38$, $R_{E\sigma} = 0.22$).

В картине слияния составной капли при $\Delta t > 2$ мс идентифицируются все компоненты импактного течения однородной капли [29] – каверна, на стенках которой можно выделить капиллярные волны, венец, на кромке которого формируются короткие шипы (рис. 4в). На вершинах шипов собираются капельки. Наиболее полно сформированная капелька, в которой тонкие волокна, окрашенные пигментом ядра, погружены в масло оболочки составной капли, образуется на вершине шипа, расположенного в центре языка.

В отличие от растекания смешивающихся жидкостей в импактном режиме [30] здесь в первые $\Delta t = 2$ мс после контакта не наблюдается интенсивного образования лигаментов. По поверхности жидкости растекается масляный слой, освобождающаяся при уничтожении контактных поверхностей ДППЭ быстро рассеивается и не успевает перейти в кинетическую энергию течения, внутренняя энергия конвертируется в осцилляции давления и температуры.

3.2. Фаза формирования тонкой структуры картины слияния составной капли

В ходе дальнейшей эволюции картина течения заметно меняется. Капелька масла с волокнами окрашенной жидкости ядра средним диаметром $d_s = 0.8$ мм отделяется от шипа на кромке венца при $t = 3.6$ мс (рис. 5а) и удаляется со скоростью $u_s = 128$ см/с. На выборке видеок кадров видно, что в процессе полета капля совершает свободные колебания, наложенные на вращательное движение, при этом меняет свою форму и размеры.

После отрыва капельки происходит капиллярное сжатие остатка шипа, и начинается стягивание масляной пленки, покрывающей поверхность тонкого слоя окрашенной жидкости ядра на дне каверны. При этом слой окрашенной жидкости преобразуется в последовательность тонких поперечных волокон (рис. 5а, б).

Граница области трансформации структуры языка продвигается равнозамедленно. Ее максимальная скорость достигается в интервале $3 < t < 4$ мс и составляет $U_f = 1.33$ мм/мс. Минимальная скорость $U_f = 1.12$ мм/мс наблюдается при окончании процесса стягивания при $t \sim 10$ мс. Средняя скорость продвижения границы стягивающейся пленки $U_f = 1.3$ мм/мс. При $t = 4.8$ мс она проходит по середине каверны.

Под действием сил поверхностного натяжения происходит заметное сглаживание кромки венца: граница последнего приобретает все более плавную форму (рис. 5в). Образующиеся поперечные волокна “разрезаны” на части длиной $\delta_l = 0.26\text{--}0.33$ мм, длина которых постепенно увеличивается по мере роста размеров каверны (рис. 5г, д) и при $t = 10$ мс (рис. 5е) система волокон покрывает практически всю поверхность каверны.

По мере изменения геометрии каверны происходит быстрая трансформация картины распределения жидкости капли. Вначале становятся все более выраженными продольные полосы, в их окрестности появляются кольцевые структуры (рис. 5ж). Наиболее быстро трансформация идет на периферии течения около вертикальных стенок каверны, где появляются двойные петли.

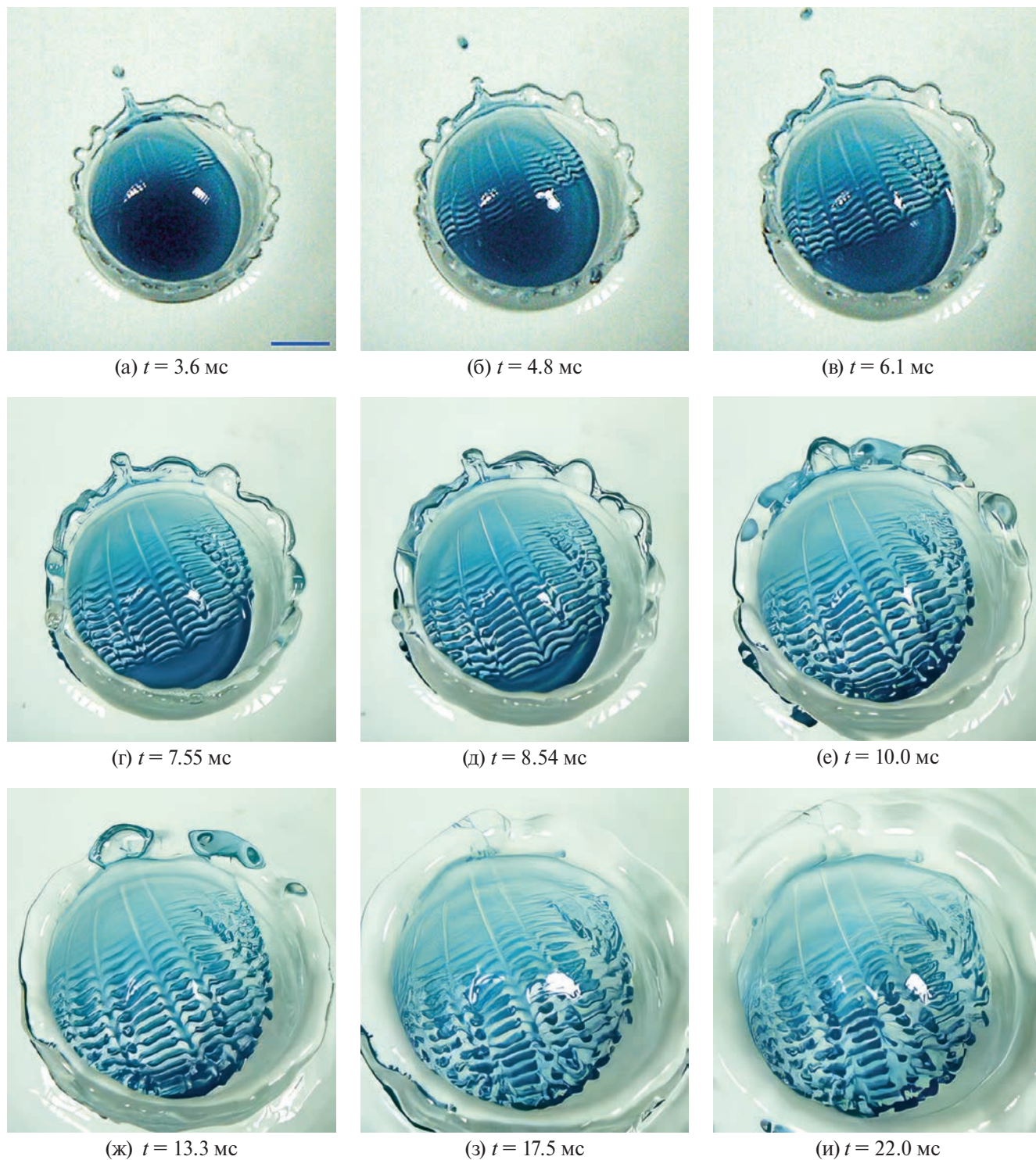


Рис. 5. Эволюция распределения вещества составной чернильно-масляной капли на этапе образования лигаментов. Длина маркера – 4 мм ($H = 44$ см, $U = 290$ см/с, $D_n = 2.8$ мм, $D_s = 5$ мм, $M_n = 11.49 \times 10^{-6}$ кг, $M_s = 49.1 \times 10^{-6}$ кг, $M = M_n + M_s = 60.59 \times 10^{-6}$ кг, $Re = 242$, $Fr = 172$, $We = 1168$, $Bo = 6.8$, $Oh = 0.14$, $En_{k,d} = 254.79$ мкДж, $En_{\sigma,d}^{n,s} = 0.58$ мкДж, $En_{\sigma,d}^{s,a} = 2.59$ мкДж, $R_E = 80.38$, $R_{E\sigma} = 0.22$).

Далее начинают распадаться две центральные полосы, причем правая эволюционирует быстрее, чем левая. Системы колечек появляются и на продольных линиях (рис. 5з). Картина течения теряет однородность – в верхней части полосчатые структуры просветляются с сохранением своей формы, в нижней – распадаются на кольцевые элементы, связанные тонкими волокнами. Со временем увеличивается контраст

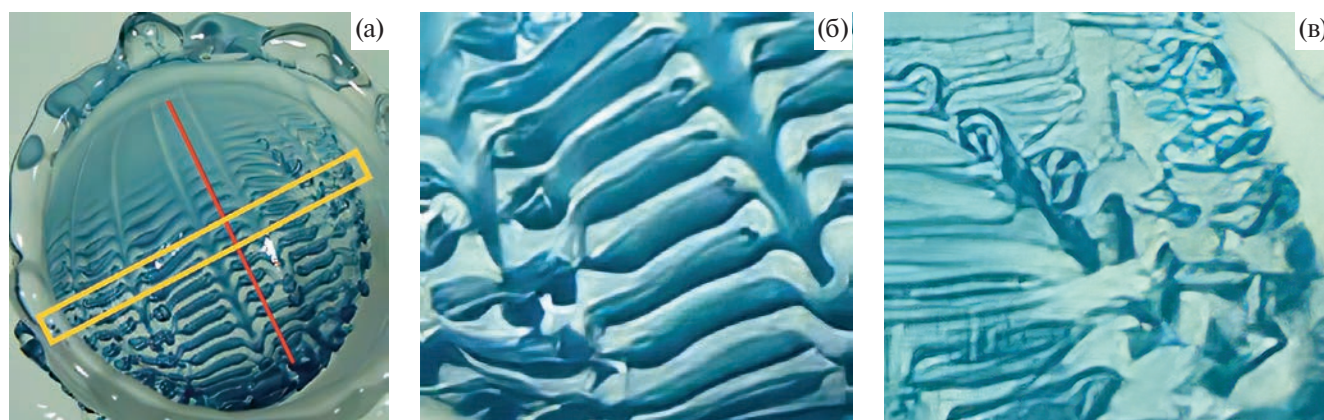


Рис. 6. Увеличенный вид решетки (а) с чернильными валиками (б) и диффузными петельками (в).

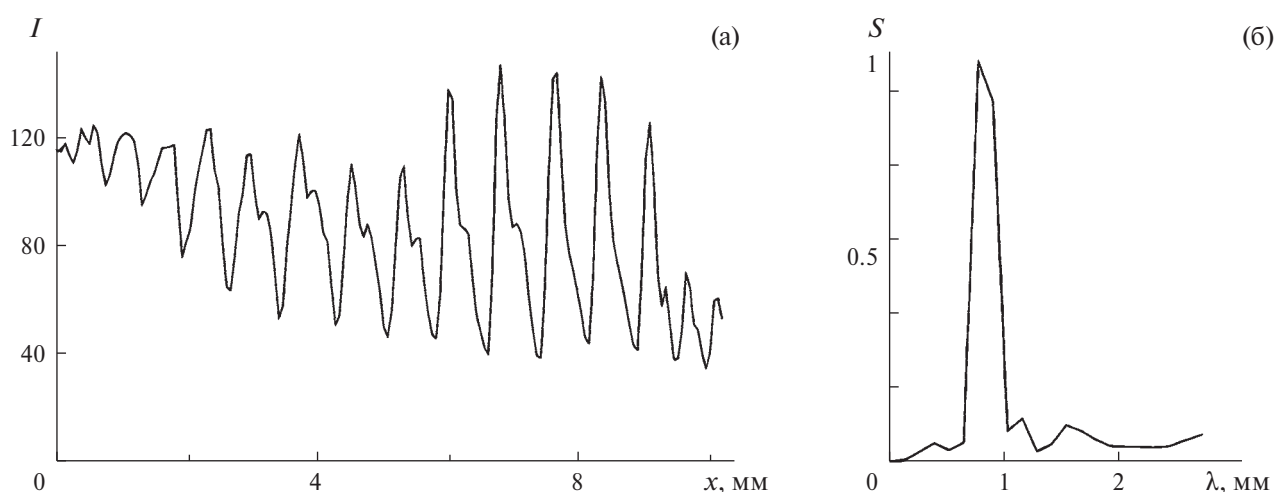


Рис. 7. Структура полосчатого течения по данным рис. 5: (а), (б) – распределение относительной освещенности I , нормированной на максимальное значение, вдоль продольной центральной линии и его пространственный спектр S .

в окраске волокон и степень анизотропии структуры, усложняется картина вихревых волокон в нижней части течения. Вокруг расплывающегося венца шириной $\Delta l_r = 3.6$ мм появляются две кольцевые капиллярные волны длиной $\lambda_c = 1.2$ мм.

Отдельные элементы картины течения на рис. 5е приведены на рис. 6б в увеличенном формате. Продольный размер последовательности валиков на главном диаметре (оранжевая выделенная область длиной 13.50 мм на рис. 6а) составляет 0.58 мм; 2.03 мм; 2.81 мм; 1.66 мм; 1.59 мм; 0.61 мм; 0.42 мм (отсчет от левой кромки).

Относительный размер чернильных валиков (по отношению к главному диаметру) составляет 0.043; 0.150; 0.208; 0.132; 0.123; 0.045; 0.031. Абсолютный размер продольных (диффузных) структур слева направо: 6.34 мм; 9.21 мм; 10.7 мм; 8.45 мм; 6.69 мм; 5.42 мм. Относительный размер продольных структур (по отношению к главному диаметру): 0.47; 0.68; 0.79; 0.62; 0.49; 0.40.

Измерение максимальной толщины чернильных валиков в центре течения было произведено двумя способами: прямым и спектральным, по оценке распределения освещенности вдоль продольной оси картины (рис. 7а). Видно, что график на рис. 7а имеет некоторый спадающий тренд, что можно объяснить тем, что светодиодные осветители находились преимущественно с одной стороны кюветы.

Толщина валиков вдоль продольной оси при измерении сверху вниз (первый находится на пересечении оранжевого прямоугольника и красной линии) составляет 0.508 мм, 0.515 мм, 0.473 мм, 0.495 мм, 0.529 мм, 0.481 мм, 0.474 мм. Среднее значение – 0.496 мм. Указанные размеры по отношению к главному диаметру составляют 0.0376, 0.0381, 0.035, 0.0367, 0.0392, 0.0356, 0.0351.

Наличие вторичных пиков говорит о присутствии волокон и связанных с ними неравномерно окрашенных областей внутри валика, что согласуется с прямыми наблюдениями на увеличенном изображении рис. 6б.

Ширина впадин на рис. 7а составляет 0.49 мм, 0.52 мм, 0.45 мм, 0.48 мм, 0.55 мм, 0.48 мм, 0.46 мм (среднее значение – 0.49 мм). Указанные величины хорошо согласуются с ширинами валиков, полученных прямым измерением вдоль красной линии на рис. 6а.

Близкое к равномерному расположение пиков и впадин на рис. 7а, а также присутствие одного ярко выраженного пика на рис. 7б говорит о почти периодическом распределении пигмента.

Далее, при $t > 25$ мс, венец окончательно спадает, каверна схлопывается и, как в случае падения однородной капли [35], начинает формироваться всплеск. Изменение глобальной динамики и геометрии течения сопровождается трансформацией изучаемой линейчатой структуры в другие формы, как и случае растекания однокомпонентной капли [36]. Сложный процесс дальнейшей эволюции течения при слиянии составной капли требует дополнительного изучения.

3.3. Наблюдение картины течения в толще жидкости

Выборки из видеогаммы, иллюстрирующей эволюцию картины течения, возникающего в толще жидкости при слиянии свободно падающей капли с окрашенным ядром диаметром $D_n = 2.7$ мм и внешним диаметром $D_s = 3.3$ мм в вертикальной плоскости приведены на рис. 8а–е.

В течение первых миллисекунд формируются традиционные элементы структуры течения – каверна с выпуклым дном, восходящий стягивающийся венец с расширенной кромкой, вершина которой покрыта растущими шипами. Верхняя левая часть венца окрашена пигментом ядра, правая, заполненная маслом – прозрачная. В этом течении вещества капли частично разделились.

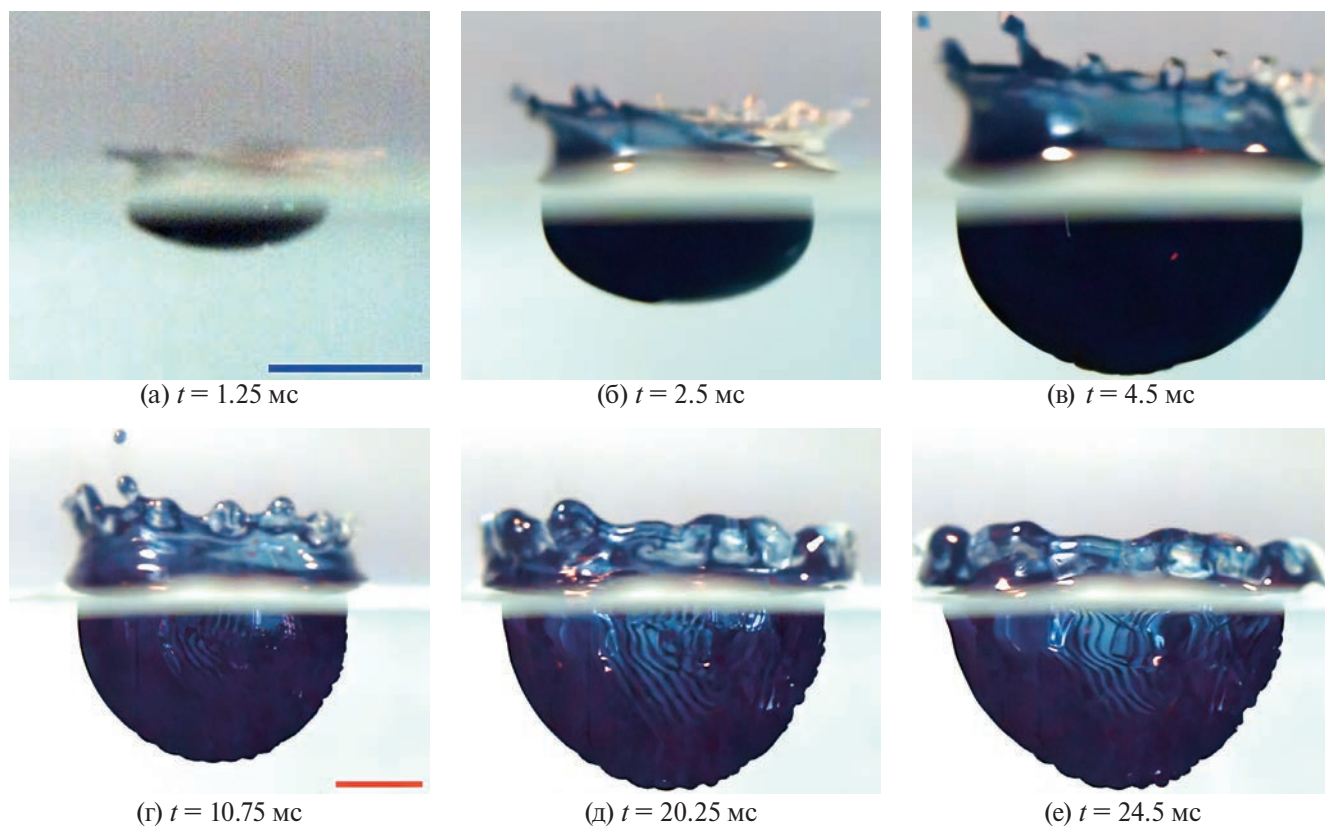


Рис. 8. Эволюция картины распределения вещества составной чернильно-масляной капли в боковой проекции. Длины маркеров – 5 мм ($H = 50$ см, $U = 300$ см/с, $D_n = 2.7$ мм, $D_s = 3.3$ мм, $M_n = 10.31 \times 10^{-6}$ кг, $M_s = 7.74 \times 10^{-6}$ кг, $M = M_n + M_s = 18.05 \times 10^{-6}$ кг, $Re = 165$, $Fr = 278$, $We = 825$, $Bo = 2.97$, $Oh = 0.174$, $En_{k,d} = 81.23$ мкДж, $En_{\sigma,d}^{n,s} = 0.54$ мкДж, $En_{\sigma,d}^{s,a} = 1.13$ мкДж, $R_E = 48.64$, $R_{E\sigma} = 0.48$).

С вершин вытянутых шипов отрываются капельки – слева окрашенные, справа прозрачные (рис. 8б–г). Скорости брызг составляют $u_s^l = 138$ см/с и $u_s^r = 119$ см/с соответственно. Первая капелька слева меньше второй, справа, у капелек масла, – наоборот (рис. 8в, г).

Постепенно нижняя кромка окрашенной жидкости теряет гладкость, на ней появляются широкие выступы, разделенные узкими впадинами (см. рис. 8в).

Со временем каверна углубляется, высота неровностей нижней кромки подрастает (рис. 8г). В сглаженных выступах зубцов оседающего и расплывающегося венца просматриваются отдельные волокна и капельки, окрашенные пигментом жидкости ядра первичной капли.

Внимательное рассмотрение плотно окрашенной стенки каверны позволяет рассмотреть системы окрашенных полос, образующих линейчатые и кольцевые структуры (рис. 8г–е). Отмеченные особенности картины течения сохраняются вплоть до $t \sim 30$ мс. Затем регулярная структура начинает активно размываться как под влиянием молекулярной вязкости и диффузии, так и под действием капиллярных и инерционных сил, активно деформирующих каверну с последующим формированием всплеска.

Сравнение картин и течений показывает, что линейчатый рисунок на рис. 5 создается объемными волокнами. Нижние кромки волокон заметно нарушает гладкость контактной поверхности раствор пигмента ядра капли – масляная пленка оболочки, которая в этих опытах – прозрачная (см. рис. 8).

3.4. Эволюция картины течения при меньшей контактной скорости капли

Общая структура картины течения сохраняется при уменьшении контактной скорости составной капли, сливающейся в импактном режиме, когда каверна образуется с момента первичного контакта [29, 30]. Иллюстрирующие выборки из видеofilма приведены на рис. 9.

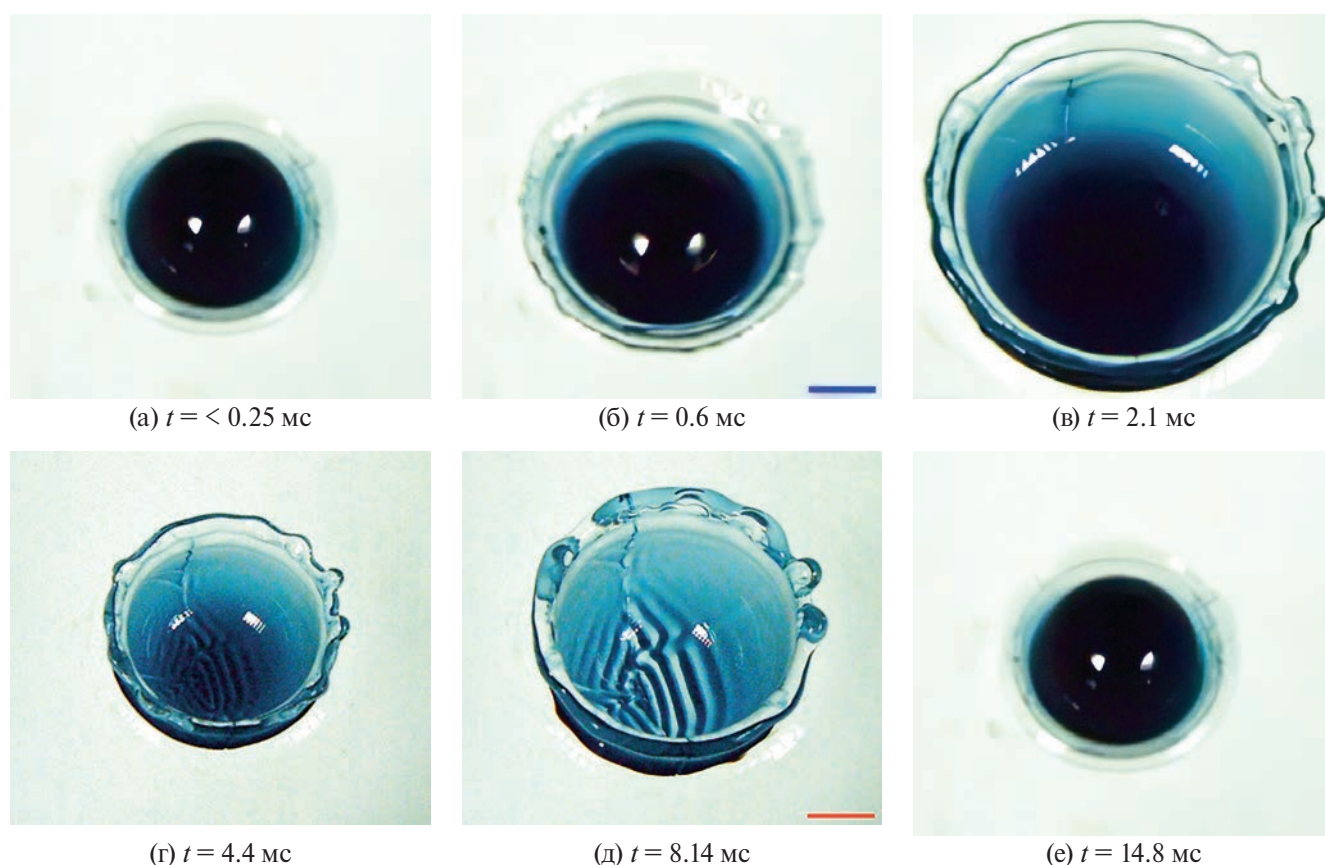


Рис. 9. Распределение пигмента ядра капли в начальной стадии формирования каверны. Длина синего маркера – 2 мм; длина красного маркера – 4 мм ($H = 44$ см, $U = 240$ см/с, $D_n = 3.9$ мм, $D_s = 5$ мм, $M_n = 31.06 \times 10^{-6}$ кг, $M_s = 31.30 \times 10^{-6}$ кг, $M = M_n + M_s = 62.36 \times 10^{-6}$ кг, $Re = 200$, $Fr = 117$, $We = 800$, $Bo = 6.8$, $Oh = 0.14$, $En_{k,d} = 254.79$ мкДж, $En_{\sigma,d}^{n,s} = 1.12$ мкДж, $En_{\sigma,d}^{s,a} = 2.59$ мкДж, $R_E = 48.41$, $R_{E\sigma} = 0.43$).

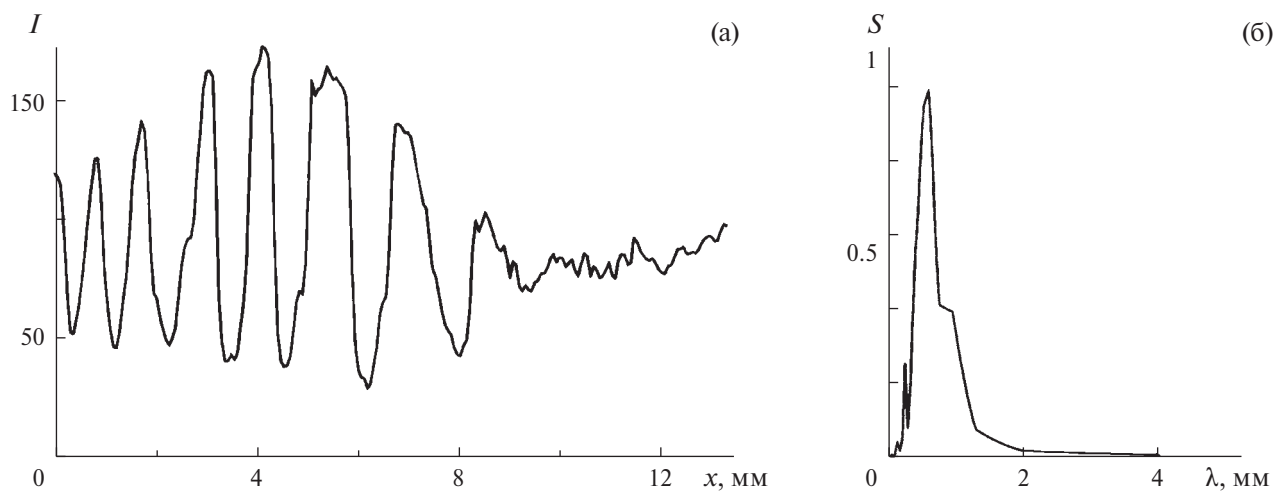


Рис 10. Структура полосчатого течения по данным рис. 9е: фигуры а, б – распределение относительной освещенности I , нормированной на максимальное значение, вдоль центральной нормали к полосам в правом нижнем квадранте и его пространственный спектр S .

В данном опыте капля падала с высоты $H=30$ см и достигала контактной скорости $U=240$ см/с. Пигментированное ядро $D_n=3.9$ мм располагалось практически в центре масляной оболочки диаметром $D_s=5$ мм, что подтверждается симметрией начальной картины слияния $t < 0.25$ мс, в которой можно выделить только небольшой “язык” в нижней части течения.

Кольцевая пелена с гладкой кромкой продолжает венец, верхняя кромка которого представлена синим кольцом на рис. 9б. Светло синему кольцу внутри него соответствует вертикальная стенка венца, которая переходит в более ярко окрашенную стенку каверны. Дно каверны закрывает остаток ядра капли диаметром $d=5.69$ мм. Симметрию несколько нарушает небольшая плоская струйка – “язык” шириной $d_{\perp}=3.42$ мм в направлении на 5 ч (рис. 9б). По условиям съемки этот дефект виньетируется стенкой каверны и далее не наблюдается.

В ходе дальнейшей эволюции течения растет глубина каверны и высота окрашенной стенки, при этом теряется контраст границы с жидкостью на дне каверны. На боковой поверхности в направлении на 11 ч появляется новый дефект – “смятие” кромки окрашенной стенки, в центре которого располагается более темная “двойная складка”, доходящая до окрашенного остатка капли на дне каверны (рис. 9в).

Постепенно контрастность “складки” увеличивается, длина растет и при $t=4.4$ мс (рис. 9г) она принимает вид тонкой струйки, переносящей дополнительный пигмент на кромку венца и в пелену. Одновременно струйка служит направляющей положения полос формирующейся структуры, в которой начинают проявляться линейные и тонкие кольцевые элементы (рис. 9г). Распределение окрашенных нитей в зубцах на правой части венца указывает, что их формирование также обусловлено подтеканием струек из области слияния капли с принимающей жидкостью, где происходило уничтожение свободной поверхности и освобождалась ДППЭ, переходящая в другие формы.

Вертикальная струйка распадается на отдельные элементы на растущей каверне к моменту $t=8.14$ мс, к вершинам которых подходят новые аксиальные складки. Одновременно в структуре течения появляются две новые струйки – выраженная в направлении на 8 ч и малоконтрастная – на 3 ч. Полосы отчетливо выражены на дне каверны и более слабо – на ее стенках (рис. 9д).

Отдельные тонкие окрашенные волокна появляются на сглаженной кромке венца при $t=14.9$ мс. Контрастность полос в центре каверны увеличивается, прозрачные просветы становятся шире, а пигментированные волокна – тоньше. На правой стенке проявляется последовательность аксиальных полос (рис. 9е). Максимальный диаметр каверны при $t=14.86$ мс составляет $D_c=16.5$ мм. Ширина четырех наиболее контрастных окрашенных полос в правом нижнем квадранте составляет слева направо, мм: $\Delta l_{\perp}=0.59, 0.62, 0.73, 0.63$.

Сравнение картин течений, приведенных на рис. 5, 8, 9, показывает, что полосчатые структуры в следе сливающейся составной кадры в импактном режиме образуются в обоих опытах. Сохраняется и характерное время развития структуры $8 < \Delta t < 15$ мс.

Из сравнения выборок, представленных на рис. 5 и 9, следует: решетка наблюдается во всем диапазоне параметров, соответствующих импактному режиму растекания капли. С уменьшением контактной скорости и кинетической энергии капли, соответственно, геометрия структуры в начале формирования каверны становится более осесимметричной. Однако площадь покрытия дна каверны высококонтрастными полосами при этом уменьшается.

Фотометрирование позволяет идентифицировать и контрастные полосы в центральной части структуры, в которой наблюдается практически полное отсутствие пигмента между окрашенными полосками, и в правой части на стенке каверны, где полосы могут быть “угаданы” на изображении (рис. 10).

Максимум величины S на спектре (рис. 10б) достигается при $\lambda_s = 0.7$ мм. Слева от максимума на графике виден локальный пик, соответствующий $\lambda_s = 0.24$ мм. Так как просветление изображения с его последующим масштабированием (аналогично рис. 6б) не позволяет надежно идентифицировать наличие волокон в пределах одной полосы, то данный пик может свидетельствовать о наличии тонкой структуры с характерным шагом 0.24 мм.

3.5. Растекание капли со смещенным ядром

В некоторых опытах ядро достаточно правильной формы оказывается смещенным относительно геометрического центра оболочки, что можно видеть на схеме и фотографии на рис. 1, 2. Выборки из видеопленки, иллюстрирующие распределение вещества ядра диаметром $D_n = 2.7$ мм разбавленного раствора чернил в капле внешним диаметром $D_s = 3.3$ мм, соприкасающейся с поверхностью воды в кювете со скоростью $U = 300$ см/с, приведены на рис. 11.

В формирующейся каверне вещества ядра и оболочки разделяются. В левой части каверны образуется толстый масляный слой с вкраплениями чернил на внешней и внутренней оболочках, в правой — толстый слой чернил, отделенный от принимающей жидкости масляной пленкой, на что указывает шероховатость нижней кромки на рис. 11б.

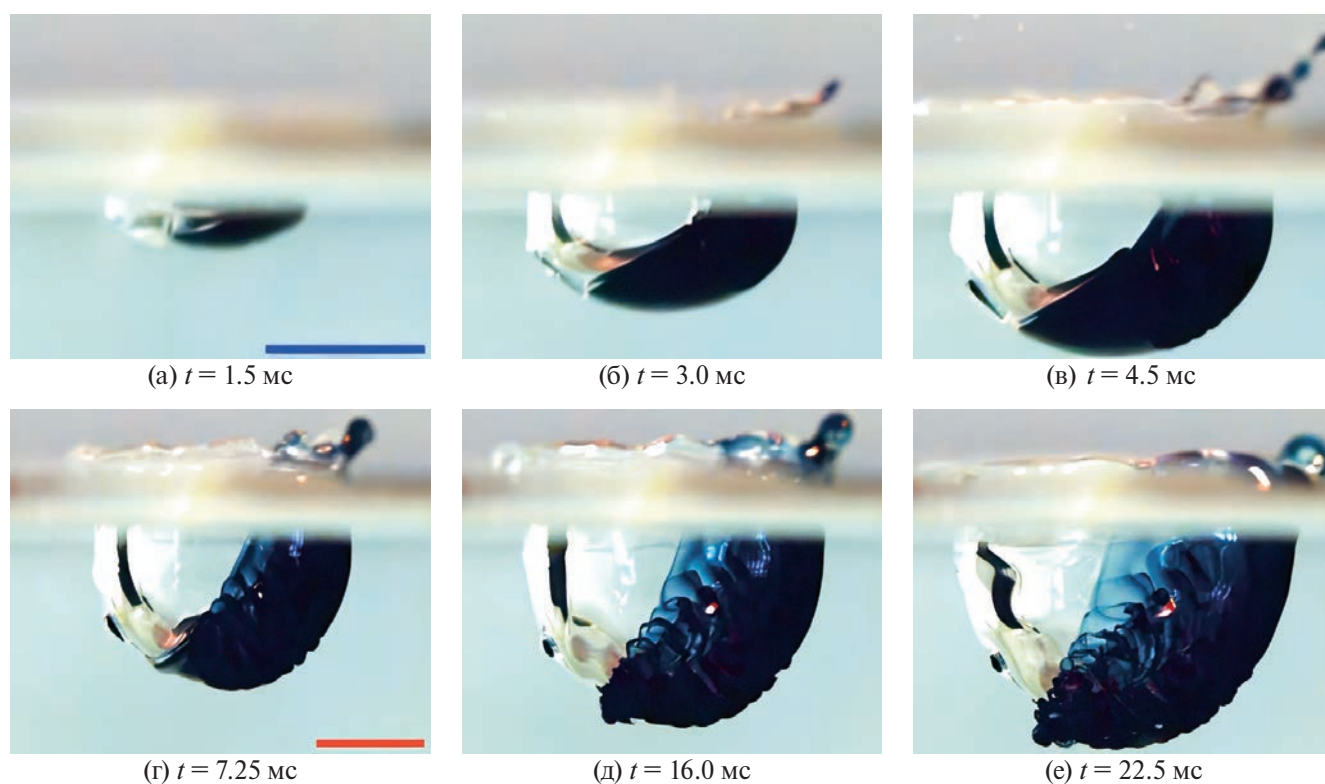


Рис. 11. Эволюция картины распределения вещества составной чернильно-масляной капли в боковой проекции. Длины маркеров – 5 мм ($H = 50$ см, $U = 300$ см/с, $D_n = 2.7$ мм, $D_s = 3.3$ мм, $M_n = 10.31 \times 10^{-6}$ кг, $M_s = 7.74 \times 10^{-6}$ кг, $M = M_n + M_s = 18.05 \times 10^{-6}$ кг, $Re = 165$, $Fr = 278$, $We = 825$, $Bo = 2.97$, $Oh = 0.174$, $En_{k,d} = 81.23$ мкДж, $En_{\sigma,d}^{a,s} = 0.54$ мкДж, $En_{\sigma,d}^{s,a} = 1.13$ мкДж, $R_E = 48.64$, $R_{E\sigma} = 0.48$).

По мере роста каверны картина распределения пигмента становится более сложной. Приповерхностные пигментированные глобулы истончаются, в центре каверны на границе с окрашенным слоем просматривается капля пигментированной жидкости в слое масла (рис. 11г). С вершин шипов на кромке венца выбрасываются отдельные довольно крупные капельки, справа включающие жидкость ядра в масляной оболочке, в центре – масляные.

Внешняя граница окрашенного слоя справа теряет гладкость, на ней появляются отдельные гладкие выступы (рис. 11д). Расщепляется и внутренняя граница. Окрашенная жидкость в масляном слое начинает стягиваться в компактный объем. На кромке венца появляются новые шипы, с вершин которых вылетают новые водно-масляные брызги.

Постепенно размеры окрашенных частей полосчатых структур уменьшаются, плотность окраски возрастает – пигментированная жидкость стягивается в более компактные объемы. Размеры выступов на внешней границе окрашенного слоя справа увеличиваются, появляются выступы и на внутренней границе (рис. 11е). Просветление изображения выделяет сложную и регулярную внутреннюю структуру распределения пигментированной жидкости, в которой выражены яркие петли, оконтуривающие области более слабо окрашенной жидкости (рис. 11д–е).

На заключительном кадре при $t = 22.5$ мс тонкие волокна просматриваются внутри светлых пятен во всей окрашенной области течения. Ступенька в распределении пигмента у дна каверны, возможно, является свидетельством того, что пигментированная жидкость продавилась через дно и сформировала промежуточный слой. Эффект перколяции при формировании первичной каверны ранее был замечен при слиянии однородной капли смешивающейся жидкости [33].

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Схема эволюции картины течения при слиянии составной оболочечной водно-масляной капли с водой приведена на рис. 12. В иллюстративных целях капля с каверной показаны в разрезе в идеализированном виде – с центральной симметрией, круглыми ядром и оболочкой. Центры ядра и оболочки считаются совпадающими (рис. 12а). Вещество ядра считается смешивающимся с принимающей жидкостью, а оболочки – несмешивающимся.

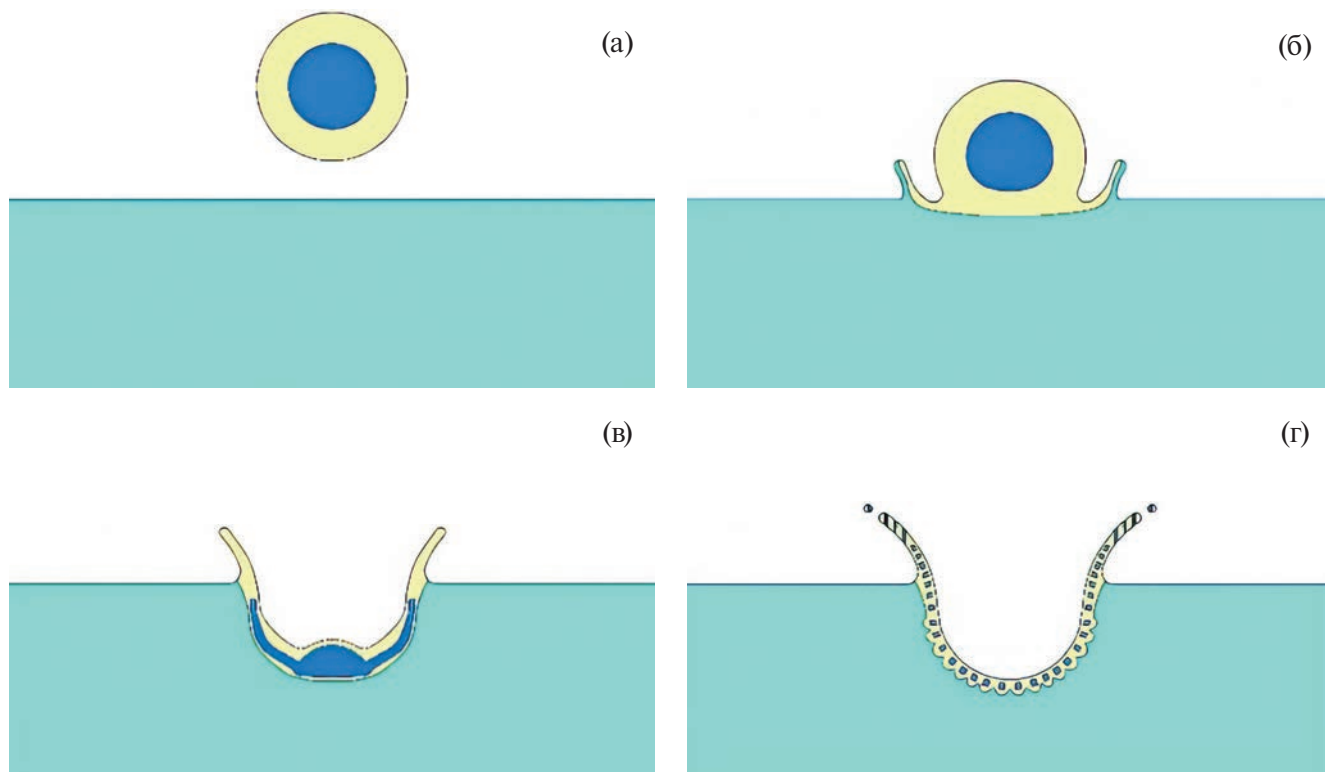


Рис. 12. Схема слияния составной капли.

В импактном режиме деформация поверхности начинается с момента первичного контакта. Дно образующейся каверны, по которому быстро растекается формирующая венец жидкость, оказывается сравнительно плоским [33]. Вначале растекается жидкость оболочки, образующая масляное покрытие каверны и венца (рис. 12б). Затем образуется “сэндвич” – начинает растекаться ядро из смешивающейся жидкости, покрытое снизу и сверху масляной пленкой (рис. 12в).

Постепенно на стенке каверны возникают тонкие неоднородности. Последние преобразуются в тонкие струйки, которые достигают кромки венца и формируют зубцы. С выступающих на вершинах некоторых зубцов окончаний струек (шипов) вылетают капли, содержащие масло, воду и пигментированный раствор ядра капли. Сложная картина течений, индуцированных в масляной пленке градиентами коэффициента поверхностного натяжения и толщины, разбивает окрашенный слой на отдельные волокна (рис. 12г). Дно каверны приобретает “бугристый” вид с выступами под окрашенными волокнами и заостренными впадинами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развита методика и доработана установка ТСТ УИУ “ГФК ИПМех РАН” для изучения картины слияния составных капель, состоящих из сферических слоев несмешивающихся жидкостей, с водой в принимающей кювете. Проведена регистрация картины слияния составной капли, центральное ядро которой – разбавленный в пропорции 1:20 водный раствор синих ализариновых чернил, оболочка – рафинированное подсолнечное масло, в импактном режиме, когда кинетическая энергия капли превышает доступную потенциальную поверхностную энергию. Рассмотрен начальный этап формирования каверны и венца.

Впервые прослежена эволюция картины течения и визуализирован распад прослойки пигментированной жидкости ядра капли на отдельные волокна, образующие выраженные линейчатые структуры. Отмечено влияние лигаментов – тонких струек, текущих от области слияния жидкостей к кромке венца, на геометрию течения.

Симметрия течения существенно зависит от положения ядра относительно внешнего контура падающей капли.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Эксперименты проведены на стенде ТБП УИУ “ГФК ИПМех РАН”. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Thomson J.J., Newall H.F. On the formation of vortex rings by drops falling into liquids, and some allied phenomena // Proc. R. Soc. London. 1885. V. 29. P. 417–436.
2. Worthington A. The splash of the drop. Series "The romance of science". E. & J.B. Young & Co: New York, USA. 1895. 92 p.
3. Blanken N., Saleem M.S., Thoraval M.-J., Antonini C. Impact of compound drops: a perspective // Curr. Opin. Colloid Interface. 2020. V. 51. P. 101389. <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2020.09.002>
4. Agbaglah G., Thoraval M.-J., Thoroddsen S., Zhang L., Fezzaa K., Deegan R. Drop impact into a deep pool: vortex shedding and jet formation // J. Fluid Mech. 2015. V. 764. P. R1–12. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.723>
5. Thoroddsen S.T., Etoh T.G., Takehara K. High-Speed Imaging of Drops and Bubbles // Ann. Rev. Fluid Mech. 2008. V. 40. № 1. P. 257–285. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.40.111406.102215>
6. Lohse D. Fundamental fluid dynamics challenges in inkjet printing // Ann. Rev. Fluid Mech. 2022. V. 54. P. 349–382. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-022321-114001>
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
8. Müller P. The equations of oceanic motions. CUP: Cambridge, UK. 2006. 302 p.
9. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. № 4. P. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>.
10. Gibbs J.W. Elementary principles in statistical mechanics. Scribner's and sons: New York, USA. 1902. 207 p.
11. Feistel R. Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // Ocean. Sci. 2018. V. 14. P. 471–502. <https://doi.org/10.5194/os-14-471-2018>
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: ГИФМЛ. 1958. 206 с.

13. *Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.* A continuum method for modelling surface tension // *J. Comput. Phys.* 1992. V. 100. № 2. P. 335–354. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(92\)90240-y](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90240-y)
14. *Bisighini A., Cossali G. E., Tropea C., Roisman I.V.* Crater evolution after the impact of a drop onto a semi-infinite liquid target // *Phys. Rev.* 2010. E 82(3, Pt.2). P. 036319. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036319>
15. *Popinet S.* Numerical models of surface tension // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2018. V. 50. P. 49–75. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122316-045034>
16. *Castrejón-Pita A.A., Castrejón-Pita J.R., Hutchings I.M.* Experimental observation of von Kármán vortices during drop impact // *Phys. Rev.* 2012. V. 86. № 4. P. 045301. <https://doi.org/10.1103/physreve.86.045301>
17. *Das S.K., Dalal A., Breuer M., Biswas G.* Evolution of jets during drop impact on a deep liquid pool // *Phys. Fluids.* 2022. V. 34. P. 022110. <https://doi.org/10.1063/5.0081064>
18. *Rein M.* Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces // *Fluid Dyn. Res.* 1993. V. 12. № 2. P. 61–93. [https://doi.org/10.1016/0169-5983\(93\)90106-k](https://doi.org/10.1016/0169-5983(93)90106-k)
19. *Wang L., Thoraval M.-J.* Air-in-liquid compound drop impact onto a pool // *Phys. Fluids.* 2022. V. 34. P. 102101. <https://doi.org/10.1063/5.0086745>
20. *Sapei L., Naqvi M.A., Rousseau D.* Stability and release properties of double emulsions for food applications // *Food Hydrocolloids.* 2012. V. 27. № 2. P. 316–323. <https://doi.org/10.1016/j.foodhyd.2011.10.008>
21. *Johnson R.E., Sadhal S.S.* Fluid mechanics of compound multiphase drops and bubbles // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1985. V. 17. № 1. P. 289–320. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.17.010185.001445>
22. *Kolesky D.B., Truby R.L., Gladman A.S., Busbee T.A., Homan K.A., Lewis J.A.* 3D bioprinting of vascularized, heterogeneous cell-laden tissue constructs // *Adv. Mater.* 2014. V. 26. P. 3124–3130. <https://doi.org/10.1002/adma.201305506>
23. *Kan H.C., Udaykumar H.S., Shyy W., Tran-Son-Tay R.* Hydrodynamics of a compound drop with application to leukocyte modeling // *Phys. Fluids.* 1998. V. 10. № 4. P. 760–774. <https://doi.org/10.1063/1.869601>
24. *Kim D., Lee J., Bose A., Kim I., Lee J.* The impact of an oil droplet on an oil layer on water // *J. Fluid Mech.* 2020. V. 906. A5. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.791>
25. *Эйзенберг Д., Кауцман В.* Структура и свойства воды. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 280 с.
26. *Чашечкин Ю.Д.* Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2021. Т. 1. № 94. С. 73–92. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-73-92>
27. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Задержка формирования каверны в интрузивном режиме слияния свободно падающей капли с принимающей жидкостью // *Доклады РАН.* 2021. Т. 496. С. 34–39. <https://doi.org/10.31857/S268674002101003X>
28. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Распределение вещества капли в принимающей жидкости в интрузивном режиме слияния // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике.* 2022. Т. 23. № 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1023>
29. *Chashechkin Yu.D., Pliynkh A.Y.* Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest // *Axioms.* 2023. V. 12. № 4. P. 374. <https://doi.org/10.3390/axioms12040374>
30. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Тонкая структура картины распределения вещества свободно падающей капли на поверхности и в толще принимающей жидкости в импактном режиме слияния // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике.* 2023. Т. 24. № 2. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.24.2.1043>
31. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Распад капли на отдельные волокна на границе области контакта с принимающей жидкостью // *Доклады РАН.* 2021. Т. 497. С. 31–35. <https://doi.org/10.31857/S2686740021020139>
32. *Ersoy N.E., Eslamian M.* Capillary surface wave formation and mixing of miscible liquids during droplet impact onto a liquid film // *Phys. Fluids.* 2019. V. 31. P. 012107. <https://doi.org/10.1063/1.5064640>
33. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Перенос вещества капли в толщу принимающей жидкости в начальной стадии процесса слияния // *Изв. РАН. МЖГ.* 2023. № 1. С. 54–68. <https://doi.org/10.31857/S056852812260031X>
34. *Kuhlman J.M., Hillen N.L.* Droplet impact cavity film thickness measurements versus time after drop impact and cavity radius for thin static residual liquid layer thicknesses // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2016. V. 77. P. 246–256. <https://doi.org/10.1016/j.exptthermfluidsci.2016.04.020>
35. *Чашечкин Ю.Д.* Визуализация тонкой структуры возмущений поверхности жидкости течениями, вызванными упавшей каплей // *ПММ.* 2019. Т. 83. № 3. С. 403–412. <https://doi.org/10.1134/S0032823519030032>
36. *Чашечкин Ю.Д.* Эволюция тонкоструктурного распределение вещества свободно падающей капли в смешивающихся жидкостях // *Известия РАН. ФАО.* 2019. Т. 55. № 3. С. 67–77. <https://doi.org/10.1134/S0001433819020026>
37. *Fujimatsu T., Fujita H., Hirota M., Okada O.* Interfacial deformation between an impacting water drop and a silicone-oil surface // *Colloid and Interface Sci.* 2003. V. 264. № 1. P. 212–220. [https://doi.org/10.1016/s0021-9797\(03\)00402-8](https://doi.org/10.1016/s0021-9797(03)00402-8)
38. *Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д.* Гидродинамика погружающейся капли: несмешивающиеся жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2020. Т. 55. № 2. С. 19–27. <https://doi.org/10.31857/S056852812002005X>

39. *Minami F., Hasegawa K.* Cavity and jet formation after immiscible droplet impact into deep water pool // *Phys. Fluids*. 2022. V. 34. P. 033315. <https://doi.org/10.1063/5.0084456>
40. *Zhang Q., Xu M., Liu X., Zhao W., Zong C., Yu Y., Wang Q., Gai H.* Fabrication of Janus droplets by evaporation driven liquid-liquid phase separation // *Chem. Commun.* 2016. V. 52. № 28. P. 5015–5018. <https://doi.org/10.1039/C6CC00249H>
41. *Чашечкин Ю.Д., Якуш С.Е., Ильиных А.Ю.* Группы брызг импакта капли воды, свободно падающей в расплавленный металл // Доклады РАН. 2021. Т. 498. С. 22–26. <https://doi.org/10.31857/S268674002103007X>
42. *Hsieh W.-D., Lin S.-Y., Chen R.-H., Lin T.-H.* Burning behavior of gas-in-oil compound drops // *Combust. Sci. Technol.* 2010. V. 183. P. 51. <https://doi.org/10.1080/00102202.2010.497517>
43. *Ширяев А.А.* О собственных частотах осцилляций поверхности свободнопадающей составной капли идеальной жидкости. // Известия РАН. МЖГ. 2020. Т. 3. С. 3–11. <https://doi.org/10.31857/S0568528120020127>
44. *Boruah M.P., Randive P.R., Pati S., Suman Chakraborty S.* Morphodynamic evolution due to inertia-mediated impact of a compound drop on a deep liquid pool // *Phys. Fluids*. 2022. V. 34. P. 032106. <https://doi.org/10.1063/5.0085814>
45. *Sarker A., Boruah P.M., Randive P.R., Pati S.* The role of compound droplet size on transition from jetting to bubble entrapment during its impact on liquid // *Phys. Fluids*. 2021. V. 33. P. 102103. <https://doi.org/10.1063/5.0064564>
46. *Tryggvason G., Scardovelli R., Zaleski S.* Direct numerical simulations of gas-liquid multiphase flows. CUP: Cambridge, UK. 2011. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511975264>
47. *Zhang H., Wang F., Nestler B.* Janus droplet formation via thermally induced phase separation: a numerical model with diffusion and convection // *Langmuir*. 2022. V. 38. P. 6882–6895. <https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.2c00308>
48. *Mengqi L., Dongqing L.* Janus droplets and droplets with multiple heterogeneous surface strips generated with nanoparticles under applied electric field // *J. Phys. Chem. C*. 2018. V. 122. P. 8461–8472. <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.8b01920>
49. *Malenkov G., Naberukhin Y., Voloshin V.* Collective effects in diffusional motion of water molecules: computer simulation // *Struct. Chem.* 2011. V. 22. P. 459–463. <https://doi.org/10.1007/s11224-011-9766-3>
50. *Karakashev S.I., Grozev N.A.* The law of parsimony and the negative charge of the bubbles // *Coatings*. 2020. V. 10. P. 1003. <https://doi.org/10.3390/coatings10101003>
51. *Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е., Андросенко В.Н.* Моделирование влияния электрического поля на капельные течения // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. Т. 24. № 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-4/articles/1057>
52. УИУ “ГФК ИПМех РАН”: Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере. <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>
53. *Fisher L.R., Mitchell E.E., Parker N.S.* Interfacial tensions of commercial vegetable oils with water // *Food Sci.* 1985. V. 50. № 4. P. 1201–1202. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2621.1985.tb13052.x>

THE INITIAL STAGE OF THE COALESCENCE OF A COMPOUND DROP IN AN IMPACT REGIME

Yu. D. Chashechkin^{a,*}, A. Yu. Il'nykh^{a,**}, and Sh. Kh. Khairbekov^{a,***}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Moscow, 119526 Russia*

* *E-mail: chakin@ipmnet.ru*

** *E-mail: ilnykh@ipmnet.ru*

*** *E-mail: msturistt09@gmail.com*

The evolution of the regular fine structure of the colored matter distribution produced, when a freely falling multifluid drop spreads in deep water, is for the first time traced using the techniques of engineering photo and video recording. The flow pattern is studied in the initial stage of the formation of a cavity and a crown during the coalescence of a compound drop, whose core is a drop of alizarin ink solution coated with an oil shell. The distributions of the colored fluid at the cavity bottom and the crown walls include streaky structures, whose formation can be due to the processes of the available potential surface energy (APSE) conversion occurring when the contact surfaces of the merging fluids are eliminated. In the experiments the height of the falling drop was varied. The core position in the compound drop was not checked but was determined by separation conditions. The ink core disintegration into fibers was observable in all the experiments. The areas of the cavity and crown surfaces covered by the colored fluid reached maximum at the central position of the core.

Keywords: compound drops, experiments, cavity, crown, fiber structures

УДК 532.5.013.2:532.135

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА ДЛЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ВЯЗКОСТИ

© 2024 г. В. Н. Колодежнов

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил “Военно-воздушная академия
им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина”, Воронеж, Россия*

E-mail: kvn117@mail.ru

Поступила в редакцию 09.11.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

Рассмотрена первая задача Стокса для течения неньютоновских жидкостей, эффективная вязкость которых изменяется в соответствии со степенным законом. Для жидкостей, механическое поведение которых описывается реологическими моделями Оствальда – де Ваэля и Гершеля–Балкли, с соответствующими ограничениями на показатель n степени нелинейности построены автомодельные решения. Показано, что для жидкости Оствальда – де Ваэля автомодельное решение существует лишь при $0 < n < 1$, что соответствует псевдопластическому поведению. В то же время для вязкопластической жидкости Гершеля–Балкли автомодельное решение может быть получено только при $n > 1$, когда эта жидкость демонстрирует проявление дилатантности.

Ключевые слова: первая задача Стокса, модель Оствальда – де Ваэля, модель Гершеля–Балкли

DOI: 10.31857/S1024708424020054 EDN: RJEZXC

Среди нестационарных задач динамики вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости с постоянным значением вязкости хорошо известна так называемая первая задача Стокса [1]. В этой задаче рассматривается неустановившееся ламинарное течение жидкости в полупространстве, которое ограничено пластиной, внезапно приведенной в своей плоскости в поступательное прямолинейное движение с постоянной скоростью. Такая задача допускает достаточно простое автомодельное решение [2]. Кроме самостоятельного интереса при проведении моделирования соответствующих гидродинамических процессов, это решение может быть использовано для тестирования различных численных методов [3, 4].

Вместе с тем, широкий круг реальных жидкостей демонстрирует более сложное механическое поведение по сравнению с ньютоновскими жидкостями [5–7]. Вязкость таких сплошных сред изменяется в зависимости от скорости деформирования. В первом приближении эта зависимость, зачастую, может быть аппроксимирована в рамках степенного закона. Именно такой вид был принят в одних из первых и хорошо известных в настоящее время нелинейных реологических моделях Оствальда – де Ваэля [8, 9] и Гершеля–Балкли [10]. Такие модели постоянно используются при рассмотрении самых различных задач гидродинамики [11, 12].

В данной работе получены автомодельные решения первой задачи Стокса для случая неньютоновских жидкостей с реологическими моделями Оствальда – де Ваэля и Гершеля–Балкли, а также проведен анализ влияния значений показателя степени нелинейного изменения эффективной вязкости в зависимости от скорости сдвига на возможность построения таких решений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномерное, ламинарное течение вязкой несжимаемой неньютоновской жидкости, возникающее в полупространстве, ограниченном пластиной, которая мгновенно приводится в своей плоскости в поступательное прямолинейное движение с постоянной скоростью U_0 . Введем декартову систему координат традиционным образом, сориентировав ось Ox вдоль пластины в направлении движения, а ось Oy – по нормали к ней. В безразмерной форме уравнение, описывающее динамику жидкости в рамках таких допущений, записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y'}; \quad u' = \frac{u}{U_0}; \quad t' = \frac{tU_0}{L}; \quad \tau'_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\rho U_0^2}; \quad y' = \frac{y}{L}, \quad (1.1)$$

где t – время; $u = u(y, t)$ – скорость жидкости в направлении продольной оси Ox ; τ_{xy} – соответствующая компонента тензора напряжений; ρ – плотность жидкости; L – некоторый характерный, принимаемый в качестве масштабного, линейный размер области течения.

Здесь и далее безразмерные величины отмечены верхними штрихами.

Начальное условие, а также одно из граничных условий (на поверхности движущейся пластины) имеют вид

$$t' = 0; \quad u' = 0; \quad y' > 0; \quad (1.2)$$

$$y' = 0; \quad u' = 1; \quad t' \geq 0. \quad (1.3)$$

Естественно, что (1.1) должно быть дополнено соответствующим уравнением, определяющим с учетом реологических особенностей жидкости зависимость касательного напряжения от скорости сдвига. В свою очередь это предполагает постановку наряду с (1.3) и дополнительных граничных условий.

СЛУЧАЙ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ОСТВАДА – ДЕ ВАЭЛЯ

Пусть механическое поведение жидкости удовлетворяет реологической модели Оствальда – де Ваэля, в соответствии с которой в рамках рассматриваемой постановки задачи (1.1)–(1.3) имеем

$$\tau_{xy} = \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \mu_{eff} = k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1}, \quad (2.1)$$

где μ_{eff} – эффективная вязкость; k – коэффициент консистенции; n – индекс течения.

Полагая априори, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} < 0,$$

приходим к следующей безразмерной форме записи выражения (2.1) для касательного напряжения

$$\tau'_{xy} = -k' \left(-\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^n, \quad k' = \frac{k}{\rho L^n U_0^{2-n}}. \quad (2.2)$$

Заметим следующее. Рассматриваемая схема течения не предполагает каких-то конкретных характерных размеров. В этой связи, в качестве L предлагается выбирать величину, получаемую некоторой комбинацией прочих физических (но не геометрических) параметров задачи. Например, принимая во внимание основные положения теории размерностей, в качестве характерного размера может быть принято значение

$$L = \left(\frac{k}{\rho U_0^{2-n}} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.3)$$

Тогда с учетом (2.3) из (2.2) получаем, что

$$k' = 1. \quad (2.4)$$

Подставляя теперь (2.2) с учетом (2.4) в (1.1), приходим к уравнению

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial y'} \left(-\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^n. \quad (2.5)$$

Здесь в дополнение к (1.2), (1.3) должно быть поставлено еще одно граничное условие:

$$y' \rightarrow \infty; \quad u' = 0. \quad (2.6)$$

Введем в рассмотрение следующую безразмерную автомодельную переменную:

$$\eta = \eta(y', t') = y' (2n(n+1)t')^{-\frac{1}{n+1}}. \quad (2.7)$$

Тогда с учетом (2.7) уравнение (2.5) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $u'(\eta)$ следующего вида:

$$\frac{d^2 u'}{d\eta^2} - 2\eta \left(-\frac{du'}{d\eta} \right)^{2-n} = 0. \quad (2.8)$$

При этом исходные начальное (1.2) и граничные условия (1.3), (2.6) преобразуются и записываются в форме

$$\eta = 0; \quad u' = 1; \quad (2.9)$$

$$\eta \rightarrow \infty; \quad u' = 0. \quad (2.10)$$

Отметим, что при $n = 1$ соотношения (2.8)–(2.10) приводят к постановке классической первой задачи Стокса для случая течения ньютоновской жидкости с постоянным значением вязкости.

Решение (2.8) с учетом условия (2.9) может быть представлено следующим образом:

$$u'(\eta) = 1 - \int_0^\eta \left[(1-n)(\xi^2 + C) \right]^{\frac{1}{n-1}} d\xi. \quad (2.11)$$

Здесь C – неопределенная пока константа интегрирования, которая, принимая во внимание условие (2.10), должна определяться из решения уравнения

$$\int_0^\infty \left[(1-n)(\xi^2 + C) \right]^{\frac{1}{n-1}} d\xi = 1. \quad (2.12)$$

Анализ (2.12) приводит к следующему заключению. В случае дилатантного поведения рассматриваемой жидкости ($n > 1$) это уравнение не имеет решения (теряет смысл), поскольку не существует конечного отрицательного значения константы C , при котором на всем полуинтервале $[0, \infty)$ интегрирования основание степени в квадратных скобках оставалось бы положительным. Иначе говоря, полученное автомодельное решение (2.11) может быть отнесено только к случаю жидкости с псевдопластическим поведением, когда $0 < n < 1$.

В общем случае определить из (2.12) константу интегрирования аналитически представляется затруднительным за исключением некоторых частных значений параметра n . Так, при $n = 0.5$ имеем $C = \pi^{2/3}$. В этой связи решение уравнения (2.12) проводили численно.

В качестве иллюстрации на рис. 1 представлена полученная зависимость значений константы интегрирования C от показателя степени n в реологической модели Оствальда – де Ваэля. Из рассмотрения этого графика следует, что функция $C(n)$ на диапазоне $0.1 < n < 1$ наиболее часто встречающихся на практике значений параметра n не является монотонной, достигая в некоторой точке $n \approx 0.271$ экстремума типа минимум. При этом значению $n = 1$ соответствует вертикальная асимптота.

СЛУЧАЙ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ГЕРШЕЛЯ – БАЛКЛИ

Пусть механическое поведение среды удовлетворяет реологической модели вязкопластической жидкости Гершеля–Балкли.

Особенность механического поведения такой вязкопластической жидкости применительно к рассматриваемой задаче предполагает, вообще говоря, разбиение исходной области на две зоны. В окрестности движущейся пластины будет располагаться зона сдвигового течения,

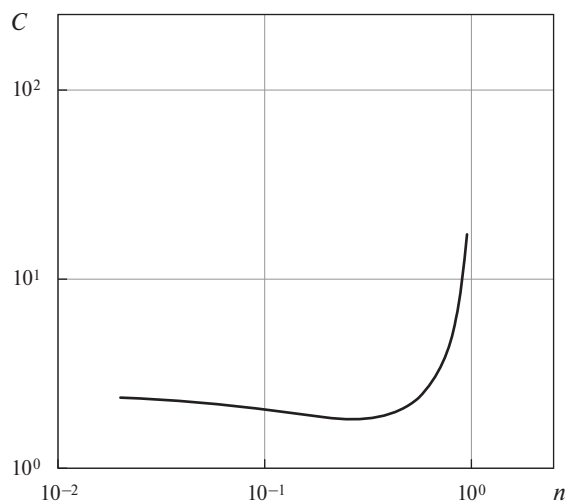


Рис. 1. Зависимость константы интегрирования C в автомодельном решении (2.11) от показателя степени n в реологической модели для жидкости Оствальда – де Ваэля, которая демонстрирует псевдопластическое поведение.

в которой касательное напряжение по модулю превышает предел текучести τ_p . Вторая зона характеризуется тем, что жидкость в ней остается неподвижной.

Априори можно полагать, что граница раздела этих зон представляет собой параллельную пластине плоскость, которая перемещается в пространстве, удаляясь от пластины, в направлении оси Oy . При этом координата этой границы раздела представляет собой неизвестную заранее функцию времени $y_p = y_p(t)$.

В безразмерной форме записи с учетом допущений и обозначений предыдущего раздела в зоне сдвигового течения выражение для касательного напряжения согласно модели Гершеля–Балкли может быть представлено следующим образом:

$$\tau'_{xy} = -\tau'_p - k' \left(-\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^n; \quad \tau'_p = \frac{\tau_p}{\rho U_0^2}. \tag{3.1}$$

Тогда с учетом (2.4), (3.1) вновь приходим из (1.1) к уравнению вида (2.5).

Учитывая наличие границы раздела между застойной зоной и зоной сдвигового течения, в дополнение к (1.3) здесь должны быть поставлены следующие условия:

$$y' = y'_p; \quad u' = 0; \quad \frac{\partial u'}{\partial y'} = 0. \tag{3.2}$$

Последнее граничное условие в (3.2) означает, что касательное напряжение на границе раздела зон по модулю принимает значение предела текучести.

Вводя теперь в рассмотрение автомодельную переменную (2.7), вновь приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению вида (2.8).

При этом исходные начальное (1.2) и граничные условия (1.3), (3.2) преобразуются и записываются в форме

$$\eta = 0; \quad u' = 1; \tag{3.3}$$

$$\eta = \eta_p; \quad u' = 0; \quad \frac{du'}{d\eta} = 0. \tag{3.4}$$

Здесь принято обозначение

$$\eta_p = \frac{y'_p(t')}{n+1 \sqrt{2n(n+1)t'}}. \tag{3.5}$$

Отметим, что начальное условие (1.2), которое сводится к виду (2.10), выполняется в точности, поскольку в застойной зоне при $\eta_p < \eta < \infty$ заведомо имеем $u' = 0$.

Решение уравнения (2.8) для распределения скорости в зоне сдвигового течения описывается соотношением вида

$$u'(\eta) = 1 - \int_0^\eta \left[(n-1)(\eta_p^2 - \xi^2) \right]^{\frac{1}{n-1}} d\xi. \tag{3.6}$$

Анализируя выражение (3.6), можно видеть, что в случае $0 < n < 1$ не представляется возможным удовлетворить краевым условиям (3.3), (3.4). В этой связи построение автомодельного решения для рассматриваемой задачи возможно лишь в случае $n > 1$, когда жидкость Гершеля–Балкли демонстрирует дилатантное поведение.

В (3.6) значение η_p автомодельной переменной на границе раздела зоны сдвигового течения и застойной зоны, находится с учетом условия (3.3) в зависимости от значения параметра n из решения следующего уравнения:

$$\int_0^{\eta_p} \left[(n-1)(\eta_p^2 - \xi^2) \right]^{\frac{1}{n-1}} d\xi = 1. \tag{3.7}$$

Определить аналитически значение η_p из решения (3.7) получается лишь для некоторых частных значений индекса течения. Например, при $n = 1.5$ имеем точное значение $\eta_p = (7.5)^{0.2}$. Для произвольного же

значения индекса течения найти η_p аналитически представляется затруднительным.

В этой связи решение уравнения (3.7) проводили численно. Результаты такого решения представлены на рис. 2 в виде графика зависимости η_p от n . Заметим, что при $n \approx 7.199$ график функции $\eta_p(n)$ имеет экстремум типа минимума. При этом значению $n = 1$ соответствует вертикальная асимптота.

Определившись с решением $\eta_p(n)$ уравнения (3.7), из (3.5) приходим к выражению

$$y'_p(t') = \eta_p(n)^{n+1} \sqrt{2n(n+1)} t',$$

которое описывает кинематику границы раздела между зоной сдвигового течения жидкости и застойной (неподвижной) зоной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено построение автомодельного решения в рамках постановки первой задачи Стокса для случая ламинарного течения неньютоновской жидкости, эффективная вязкость которой в зависимости от скорости сдвига описывается степенным законом.

Рассмотрены две хорошо известные реологические модели такого типа. Применительно к модели Оствальда — де Ваэля показано, что полученное автомодельное решение для распределения скорости распространяется только на случай, когда жидкость демонстрирует псевдопластическое поведение ($0 < n < 1$).

Что же касается модели жидкости Гершеля—Балкли, то здесь, наоборот, автомодельное решение для распределения скорости может быть получено лишь для случая, когда жидкость проявляет свойство дилатантности ($n > 1$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stokes G.G.* On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // *Trans. Cambr. Phil. Soc.* 1851. V. IX. Part II. Cambridge: Printed at the Pitt Press / by John W. Parker. P. 1–99. <https://archive.org/details/b22464074/page/n1/mode/2up>
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
3. *Янилкин Ю.В., Топорова О.О., Стадник А.Л., Корзакова Л.Е.* Об аппроксимации вязкости разностных схем и расчеты течений вязкой жидкости // *ВАНТ. Сер. ММФП.* 2016. № 3. С. 3–17.
4. *Никонов В.В.* О тестировании конечно-разностной схемы моделирования процесса вязкой диффузии с учетом сжимаемости газа в двумерном случае // *Изв. Самар. науч. центра РАН.* 2020. Т. 22. № 5. С. 128–131.
5. *Виноградов Г.В., Малкин А.Я.* Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 440 с.
6. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 312 с.; *Astarita G., Marrucci G.* Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. London: McGraw-Hill, 1974. 289 p.
7. *Малкин А.Я., Исаев А.И.* Реология. Концепции, методы, приложения. М.: Профессия, 2007. 560 с.
8. *De Waele A.A.* Viscometry and plastometry // *J. Oil Colour Chem. Assoc.* 1923. V. 6. P. 33–88.
9. *Ostwald W.* Ueber die rechnerische Durstellung des Strukturgebietes der Viskositat // *Koll. Zeitschr.* 1929. V. 47. P. 176–187. <https://doi.org/10.1007/BF01496959>
10. *Herschel W.H., Bulkley R.* Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen // *Koll. Zeitschr.* 1926. V. 39. P. 291–300. <https://doi.org/10.1007/BF01432034>
11. *Борзенко Е.И., Дьякова О.А., Шрагер Г.Р.* Ламинарное течение степенной жидкости в Т-образном канале при заданных перепадах давления // *Изв. РАН. МЖГ.* 2019. № 4. С. 63–71.
12. *Рыльцев И.А., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р.* Кинематика течения степенной жидкости в трубе переменного сечения // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.* 2020. № 63. С. 125–138.

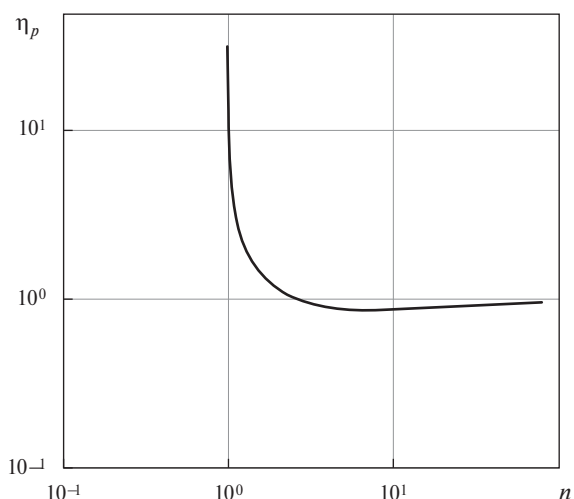


Рис. 2. Зависимость значения η_p автомодельной переменной, которая определяет положение границы раздела между зоной сдвигового течения и застойной зоной для жидкости Гершеля—Балкли, от показателя степени n .

SELF-SIMILAR SOLUTION OF THE FIRST STOKES PROBLEM FOR NON-NEWTONIAN FLUIDS WITH POWER-LAW VISCOSITY

V. N. Kolodezhnov*

*Military Education and Science Center of the Air Forces "Prof. Zhukovski and Gagarin Air Force Academy",
Voronezh, 394064 Russia*

**e-mail: kvn117@mail.ru*

The first Stokes problem is considered for flows of non-Newtonian fluids with effective viscosity varying in accordance with the power law. Self-similar solutions are constructed for the fluids, whose mechanical behavior is described by the Ostwald – de Waele and Herschel–Bulkley rheological models with the corresponding restrictions on the nonlinearity degree exponent n . It is shown that for the Ostwald – de Waele fluid self-similar solutions exist only for $0 < n < 1$, which corresponds to the pseudoplastic behavior. At the same time, self-similar solutions for the Herschel–Bulkley fluid can be obtained only at $n > 1$, when this fluid exhibits the properties of dilatancy.

Keywords: first Stokes problem, Ostwald – de Waele model, Herschel–Bulkley model

УДК 532.5.031:532.591

РАЗВИТИЕ ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО ПРИДОННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ В ДВУХСЛОЙНОМ СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

© 2024 г. И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: sturova@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

В линейном приближении для двумерной нестационарной задачи исследовано поведение волнового движения, возникающего в идеальной несжимаемой однородной жидкости при включении периодических донных возмущений. В невозмущенном состоянии скорости двухслойного потока жидкости в каждом слое являются линейными функциями вертикальной координаты с различными градиентами и совпадают на границе слоев. Верхняя граница жидкости может быть либо свободной, либо ограничена твердой крышкой. Определены дисперсионные зависимости и групповые скорости возникающих волновых мод. Вычислены вертикальные смещения свободной поверхности и границы раздела слоев. Выполнено сопоставление с решением для однослойной жидкости.

Ключевые слова: поверхностная волна, донное возмущение, фоновое сдвиговое течение, дисперсионная зависимость

DOI: 10.31857/S1024708424020069 EDN: RIZKFA

Генерация волнового движения в жидкости, вызванного включением периодических возмущений (поверхностных, погруженных или придонных) уже давно привлекает внимание исследователей. Наибольшее число результатов получено в рамках линейной модели для изначально покоящейся жидкости. Решение различных двумерных и трехмерных задач представлено в работах [1–3]. Влияние сдвиговых фоновых течений на генерацию вынужденных волновых движений интенсивно изучается в последние десятилетия в связи с большой практической важностью [4]. Известно, что в природе сдвиговые течения жидкости обладают большим разнообразием. Однако в настоящее время не существует аналитических методов решения задачи о генерации волновых движений для общего случая сдвигового потока. Одним из приближенных методов является замена реального профиля скорости фонового потока его кусочно-линейной аппроксимацией с условием непрерывности скорости на границе слоев. Сходимость такого приближения к точному решению при $N \rightarrow \infty$ (N – число слоев) доказана в исследовании [5]. Наличие в жидкости $N - 1$ тангенциальных разрывов скорости объясняет появление пропорционального количества волновых мод, дисперсионные свойства которых определяются как корни полинома соответствующей степени. Устойчивость волнового движения в такой многослойной жидкости имеет место только при отсутствии комплексных корней этого полинома [6].

В данной работе в линейном приближении и двумерной постановке исследовано развитие волнового движения, возникающего в двухслойной жидкости под действием малых периодических колебаний участка дна бассейна. В каждом слое горизонтальная скорость основного потока линейно меняется с глубиной и непрерывна на границе раздела слоев. Верхняя граница жидкости является либо свободной поверхностью, либо твердой крышкой. Выполнено сопоставление с решением для однослойного потока с линейным профилем скорости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоский безграничный в горизонтальном направлении поток однородной невязкой несжимаемой жидкости постоянной глубины H , состоящей из двух слоев (рис. 1а).

В невозмущенном состоянии свободная поверхность жидкости и граница раздела слоев горизонтальны, скорости жидкости в каждом из слоев являются линейными функциями вертикальной координаты и совпадают на границе раздела. Система декартовых координат x, y введена так, что горизонтальная ось x

совпадает с невозмущенной границей раздела между слоями, и ось y направлена вертикально вверх. Толщины верхнего и нижнего слоев равны соответственно H_1 и H_2 , и полная глубина жидкости составляет $H = H_1 + H_2$. Скорость потока в верхнем слое равна $U_1(y) = by + V_1$, а в нижнем слое – $U_2(y) = cy + V_1$ где b и c – постоянные вертикальные градиенты скорости в слоях; V_1 – скорость потока на границе раздела слоев. На верхней границе жидкости скорость потока равна $V_0 = V_1 + bH_1$, а на дне – $V_2 = V_1 - cH_2$. Предполагается, что значения V_0, V_1, V_2 неотрицательны.

Наряду с двухслойным потоком будет рассмотрен частный случай однослойного сдвигового потока, в котором горизонтальная скорость равна $U(y) = by + V_0$ (рис. 1б).

Исследуем процесс развития волновых движений в жидкости, возникающих при включении в начальный момент времени $t = 0$ периодического источника донных колебаний. Движение жидкости в каждом из слоев описывается линеаризованными уравнениями Эйлера

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_j \nabla \right) v_j + v_j \frac{dV_j}{dy} + \frac{\nabla p_j}{\rho} = 0, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} v_j = 0 \quad (j = 1, 2),$$

где $V_j = (U_j(y), 0)$ – вектор скорости основного потока в верхнем ($j = 1$) и нижнем ($j = 2$) слоях; $v_j = (u_j, v_j)$ – возникающие возмущения скорости жидкости, которые предполагаются малыми; p_j – динамические добавки давления; ρ – плотность жидкости.

На верхней границе жидкости рассмотрим два типа граничных условий: свободная поверхность и твердая крышка. Для свободной поверхности, вертикальное смещение которой описывается функцией $\eta(x, t)$, кинематическое и динамическое условия имеют вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_1, \quad g\eta = p_1 \quad (y = H_1), \quad (1.2)$$

где g – ускорение свободного падения. Динамическое условие представляет собой линеаризованное условие равенства нулю давления на свободной поверхности [2, 3, 6].

В случае твердой крышки граничное условие имеет вид

$$v_1 = 0 \quad (y = H_1). \quad (1.3)$$

На границе раздела слоев выполняются условия непрерывности вертикальной скорости и давления

$$v_1 = v_2, \quad p_1 = p_2 \quad (y = 0). \quad (1.4)$$

Вертикальное смещение границы раздела слоев описывается функцией $\zeta(x, t)$ и определяется из кинематического условия

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = v_1 \quad (y = 0). \quad (1.5)$$

Малые периодические колебания участка дна бассейна происходят с вертикальной скоростью

$$v_2 \alpha(x) \sin(\sigma t) \quad (y = -H_2), \quad (1.6)$$

где безразмерная функция $f(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, а постоянные величины a и σ характеризуют соответственно амплитуду и частоту колебаний вертикальной скорости.

Начальные условия означают отсутствие волновых движений вплоть до момента $t = 0$:

$$u_j(x, y, 0) = v_j(x, y, 0) = \eta(x, 0) = \zeta(x, 0) = 0. \quad (1.7)$$

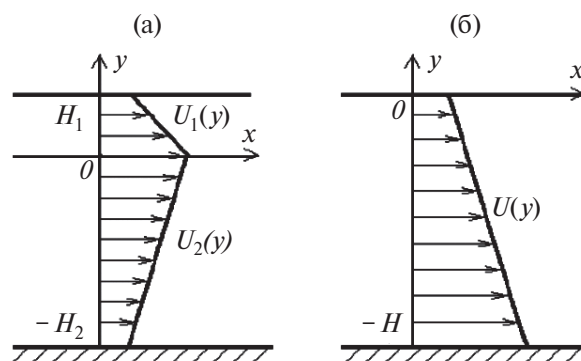


Рис. 1. Схема течения в невозмущенном состоянии: а – двухслойная жидкость; б – однослойная жидкость.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Известно, что в двумерном случае при наличии линейного сдвига продольной скорости основного течения компоненты волнового движения можно представить в виде [7]

$$u_j(x, y, t) = U_j(y) + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \quad v_j(x, y, t) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \quad (j = 1, 2),$$

где функции $\varphi_j(x, y, t)$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\partial^2 \varphi_j / \partial x^2 + \partial^2 \varphi_j / \partial y^2 = 0. \quad (2.1)$$

Для решения начально-краевых задач, сформулированных в п. 1, используем преобразования Фурье и Лапласа в виде

$$\bar{\varphi}_j(k, y, s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_{-\infty}^\infty \varphi_j(x, y, t) e^{-ikx} dx dt. \quad (2.2)$$

Аналогичные преобразования вводятся и для остальных искомых функций.

Функции $\bar{\varphi}_j(k, y, s)$ после преобразования Фурье уравнения Лапласа (2.1) удовлетворяют уравнению

$$\partial^2 \bar{\varphi}_j / \partial y^2 - k^2 \bar{\varphi}_j = 0.$$

Далее рассмотрим отдельно решения для двухслойной жидкости со свободной поверхностью (п. 2.1) и под твердой крышкой (п. 2.2). Решение для однослойной жидкости изложено в п. 2.3.

2.1. Двухслойная жидкость со свободной поверхностью

Решения для функций $\bar{\varphi}_1(k, y, s)$ и $\bar{\varphi}_2(k, y, s)$ ищем в виде

$$\bar{\varphi}_1 = C_1 \operatorname{sh}[|k|(H_1 - y)] + D_1 \operatorname{ch}[|k|(H_1 - y)] \quad (0 \leq y \leq H_1), \quad (2.3)$$

$$\bar{\varphi}_2 = C_2 \operatorname{sh}(|k|y) + D_2 \operatorname{ch}(|k|y) \quad (-H_2 \leq y \leq 0),$$

где функции $C_j(k, s)$, $D_j(k, s)$ ($j = 1, 2$) являются неизвестными.

Функции $\bar{\eta}(k, s)$, $C_j(k, s)$, $D_j(k, s)$ ($j = 1, 2$) определяются из системы пяти линейных алгебраических уравнений, вытекающих из граничных условий (1.2), (1.4) и (1.6):

$$(s + ikV_0)\bar{\eta} + |k|C_1 = 0, \quad g\bar{\eta} + i\gamma bC_1 + (s + ikV_0)D_1 = 0, \quad C_1 \operatorname{ch}(|k|H_1) + D_1 \operatorname{sh}(|k|H_1) + C_2 = 0,$$

$$C_1 [(s + ikV_1) \operatorname{sh}(|k|H_1) + i\gamma b \operatorname{ch}(|k|H_1)] + D_1 [(s + ikV_1) \operatorname{ch}(|k|H_1) + i\gamma b \operatorname{sh}(|k|H_1)] + i\gamma cC_2 - (s + ikV_1)D_2 = 0, \quad (2.4)$$

$$C_2 \operatorname{ch}(|k|H_2) - D_2 \operatorname{sh}(|k|H_2) = \Lambda(k, s),$$

где

$$\gamma = \operatorname{sgn}k, \quad \Lambda(k, s) = \frac{\alpha \tilde{f}(k)}{|k|(s^2 + \sigma^2)}, \quad \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.5)$$

Решение системы уравнений (2.4) для функции $\bar{\eta}(k, s)$ имеет вид

$$\bar{\eta} = \frac{\alpha \tilde{f}(k)(s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2)}{\operatorname{ch}(|k|H)(s^2 + \sigma^2)P(k, s)}, \quad \lambda_1(k) = ik(V_0 + V_1), \quad \lambda_2(k) = -k^2 V_0 V_1. \quad (2.6)$$

Здесь $P(k, s)$ – полином третьей степени относительно s :

$$P(k, s) = s^3 + ia_1 s^2 + a_2 s + ia_3, \quad (2.7)$$

где

$$a_1(k) = \gamma [k(2V_0 + V_1) - br_1 - cr_2], \quad (2.8)$$

$$a_2(k) = |k| \left\{ \operatorname{th}(|k|H) [g + b(V_1 - V_0)] + V_0 [2(br_1 + cr_2) - |k|(2V_1 + V_0)] \right\} - b(c - b)r_3, \quad (2.9)$$

$$a_3(k) = \gamma |k| \left\{ |k| \left[\operatorname{th}(|k|H) (gV_1 + bV_0(V_1 - V_0)) - V_0^2 (|k|V_1 - br_1 - cr_2) \right] - (c - b)(g + bV_0)r_3 \right\}, \quad (2.10)$$

$$r_1(k) = \frac{\operatorname{sh}(|k|H_1) \operatorname{ch}(|k|H_2)}{\operatorname{ch}(|k|H)},$$

$$r_2(k) = \frac{\operatorname{ch}(|k|H_1) \operatorname{sh}(|k|H_2)}{\operatorname{ch}(|k|H)},$$

$$r_3(k) = \frac{\operatorname{sh}(|k|H_1) \operatorname{sh}(|k|H_2)}{\operatorname{ch}(|k|H)}.$$

Используем в формуле (2.6) следующее представление для дроби:

$$\frac{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2}{(s^2 + \sigma^2)P(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\alpha_n(k)}{s - s_n(k)}, \quad (2.11)$$

где $s_n(k) (n = \overline{1, 3})$ – корни уравнения $P(k, s) = 0$, $s_{4,5} = \pm i\sigma$, а функции $\alpha_n(k)$ определяются из решения системы пяти линейных алгебраических уравнений, получающихся из равенства коэффициентов при степенях $s^j (j = \overline{0, 4})$ в числителях левой части уравнения (2.11) и его правой части после суммирования.

После выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье решение для вертикального смещения свободной поверхности имеет вид

$$\eta(x, t) = \frac{a\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(k)}{\operatorname{ch}(|k|H)} [A_1(k, t) \cos kx - B_1(k, t) \sin kx] dk, \quad (2.12)$$

где $A_1(k, t)$ и $B_1(k, t)$ – соответственно вещественная и мнимая части суммы $\sum_{n=1}^5 \alpha_n(k) e^{s_n(k)t}$. При выводе (2.12) использовано свойство функций $s_n(k) (n = 1, 3)$ и $\alpha_n(k) (n = 1, 5)$, заключающееся в том, что их значения при $k > 0$ и $k < 0$ являются комплексно-сопряженными.

Функция $\tilde{\zeta}(k, s)$ определяется с использованием соотношения (1.5) и решений для функций $C_1(k, s)$, $D_1(k, s)$ из системы уравнений (2.4):

$$\tilde{\zeta} = \frac{a\sigma \tilde{f}(k) \operatorname{ch}(|k|H_1) (s^2 + \mu_1 s + \mu_2)}{\operatorname{ch}(|k|H) (s^2 + \sigma^2) P(k, s)}, \quad (2.13)$$

$$\mu_1(k) = i[2kV_0 - \gamma b \operatorname{th}(|k|H_1)], \quad \mu_2(k) = |k|(g + bV_0) \operatorname{th}(|k|H_1) - k^2 V_0^2.$$

Аналогично (2.12) решение для вертикального смещения границы раздела слоев имеет вид

$$\zeta(x, t) = \frac{a\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(k) \operatorname{ch}(|k|H_1)}{\operatorname{ch}(|k|H)} [A_2(k, t) \cos kx - B_2(k, t) \sin kx] dk, \quad (2.14)$$

где $A_2(k, t)$ и $B_2(k, t)$ – соответственно вещественная и мнимая части суммы $\sum_{n=1}^5 \beta_n(k) e^{s_n(k)t}$. Функции $\beta_n(k)$ определяются согласно (2.13) из равенства

$$\frac{s^2 + \mu_1 s + \mu_2}{(s^2 + \sigma^2)P(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\beta_n(k)}{s - s_n(k)}.$$

2.2. Двухслойная жидкость под твердой крышкой

В этом случае система уравнений (1.1) решается с учетом граничных условий (1.3), (1.4), (1.6) и начальных условий (1.7). После введения преобразований Фурье и Лапласа (2.2) для определения неизвестных функций $C_j(k, s)$, $D_j(k, s) (j = 1, 2)$ в (2.3) получаем систему уравнений аналогичную (2.4), в которой первые два уравнения заменены тождеством $C_1 \equiv 0$. Из оставшихся трех уравнений определяется функция $D_1(k, s)$, и решение для функции $\tilde{\zeta}(k, s)$ получим в виде

$$\bar{\zeta} = \frac{a\sigma\tilde{f}(k)\operatorname{sh}(|k|H_1)}{\operatorname{sh}(|k|H)(s-s_1)(s^2+\sigma^2)}, \quad (2.15)$$

$$s_1(k) = i\gamma[(c-b)r_4 - |k|V_1], \quad r_4(k) = \frac{\operatorname{sh}(|k|H_1)\operatorname{sh}(|k|H_2)}{\operatorname{sh}(|k|H)}.$$

После выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье решение для вертикального смещения границы раздела в жидкости под твердой крышкой имеет вид

$$\zeta(x,t) = \frac{a\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(k)\operatorname{sh}(|k|H_1)}{\operatorname{sh}(|k|H)} [A_3(k,t)\cos kx - B_3(k,t)\sin kx] dk, \quad (2.16)$$

где $A_3(k,t)$ и $B_3(k,t)$ – соответственно вещественная и мнимая части суммы $\sum_{n=1}^3 v_n(k)e^{s_n(k)t}$. Функции $v_n(k)$ определяются согласно (2.15) из равенства

$$\frac{1}{(s-s_1)(s^2+\sigma^2)} = \sum_{n=1}^3 \frac{v_n(k)}{s-s_n(k)}, \quad s_{2,3} = \pm i\sigma. \quad (2.17)$$

Решение данной задачи для стратифицированной двухслойной жидкости, в которой к различным градиентам скорости основного потока в слоях добавлены и различные плотности, изложено в работе [8] и повторено в исследовании [3, гл. 9].

2.3. Однослойная жидкость

Аналогично (1.1) линеаризованные уравнения Эйлера в этом случае имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V\nabla\right)v + v\frac{dV}{dy} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

где $V = (U(y), 0)$, $U(y) = by + V_0$, $v = (u, v)$, p – динамический добавок давления. Система координат показана на рис. 1б.

Для свободной поверхности жидкости $\eta(x,t)$ граничные условия аналогично (1.2) имеют вид

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + V_0\frac{\partial\eta}{\partial x} = v, \quad g\rho\eta = p \quad (y=0). \quad (2.18)$$

На дне выполняется условие, аналогичное (1.6):

$$v\alpha(x)\sin(\sigma t) \quad (y=-H). \quad (2.19)$$

Вертикальные смещения жидкости на горизонте $y = -H_1$ ($H_1 < H$) определяются функцией $\zeta(x,t)$ из условия

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + U(y)\frac{\partial\zeta}{\partial x} = v \quad (y=-H_1). \quad (2.20)$$

Начальные условия аналогичны (1.7).

Компоненты волнового движения представим в виде

$$u(x,y,t) = U(y) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v(x,y,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

где функция $\varphi(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа аналогично (2.1).

После введения преобразований Фурье и Лапласа аналогично (2.2) решение для функции $\bar{\varphi}(k,y,s)$ ищем в виде

$$\bar{\varphi}(k,y,s) = C\operatorname{sh}(|k|y) + D\operatorname{ch}(|k|y),$$

где функции $C(k,s)$, $D(k,s)$ являются неизвестными. Для определения функций $\bar{\eta}(k,s)$, $C(k,s)$, $D(k,s)$ из граничных условий (2.18), (2.19) получим систему трех линейных алгебраических уравнений

$$(s + ikV_0)\bar{\eta} - |k|C = 0, \quad g\bar{\eta} - i\gamma bC + (s + ikV_0)D = 0, \quad (2.21)$$

$$C\text{ch}(|k|H) - D\text{sh}(|k|H) = \Lambda(k, s),$$

где использованы обозначения (2.5).

Решение этой системы для функции $\bar{\eta}(k, s)$ имеет вид

$$\bar{\eta} = \frac{a\sigma\tilde{f}(k)(s + ikV_0)}{\text{ch}(|k|H)(s^2 + \sigma^2)Q(k, s)}, \quad (2.22)$$

где $Q(k, s)$ – полином второй степени относительно s :

$$Q(k, s) = s^2 + i\gamma[2|k|V_0 - b\text{th}(|k|H)]s + |k|[(g + bV_0)\text{th}(|k|H) - |k|V_0^2].$$

Функция $\bar{\zeta}(k, s)$ определяется из условия (2.20) и решения для функций $C(k, s)$, $D(k, s)$ из системы уравнений (2.21):

$$\bar{\zeta} = \frac{a\sigma\tilde{f}(k)\text{ch}(|k|H_1)(s^2 + \tau_1s + \tau_2)}{\text{ch}(|k|H)(s + ikV_1)(s^2 + \sigma^2)Q(k, s)}, \quad (2.23)$$

где

$$\tau_1(k) = i\gamma[2|k|V_0 - b\text{th}(|k|H_1)], \quad \tau_2(k) = |k|[(g + bV_0)\text{th}(|k|H_1) - |k|V_0^2].$$

После выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье решение для вертикального смещения свободной поверхности получим в виде

$$\eta(x, t) = \frac{a\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(k)}{\text{ch}(|k|H)} [A_4(k, t)\cos kx - B_4(k, t)\sin kx] dk, \quad (2.24)$$

где $A_4(k, t)$ и $B_4(k, t)$ – соответственно вещественная и мнимая части суммы $\sum_{n=1}^4 \chi_n(k)e^{s_n(k)t}$, $s_{1,2}(k)$ – корни квадратного уравнения $Q(k, s) = 0$, $s_{3,4} = \pm i\sigma$. Функции χ_n ($n = 1, 4$) определяются согласно (2.22) из равенства

$$\frac{s + ikV_0}{(s^2 + \sigma^2)Q(k, s)} = \sum_{n=1}^4 \frac{\chi_n(k)}{s - s_n(k)}.$$

Вертикальные смещения жидкости на горизонте $y = -H_1$ имеют вид

$$\zeta(x, t) = \frac{a\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(k)\text{ch}(|k|H_1)}{\text{ch}(|k|H)} [A_5(k, t)\cos kx - B_5(k, t)\sin kx] dk, \quad (2.25)$$

где $A_5(k, t)$ и $B_5(k, t)$ соответственно вещественная и мнимая части суммы $\sum_{n=1}^5 \theta_n(k)e^{s_n(k)t}$, $s_5 = -ikV_1$. Функции θ_n ($n = 1, 5$) определяются согласно (2.23) из равенства

$$\frac{s^2 + \tau_1s + \tau_2}{(s + ikV_1)(s^2 + \sigma^2)Q(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\theta_n(k)}{s - s_n(k)}.$$

Решение для однослойной жидкости в случае твердой крышки на верхней границе можно получить из решения (2.16) при $c = b$. При $V_1 = 0$ волновое движение в такой жидкости отсутствует, так как в этом случае в (2.17) $s_1 = 0$, $v_1 = \sigma^{-2}$, $v_2 = v_3 = -v_1/2$ и функции A_3 и B_3 равны соответственно $A_3 = [1 - \cos(\sigma t)]/\sigma^2$, $B_3 = 0$.

3. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Исследуем дисперсионные свойства волн, возникающих в рассмотренных случаях. Дисперсионное соотношение устанавливает для каждой волны зависимость ее частоты ω от волнового числа k .

Для случая двухслойной жидкости со свободной поверхностью используем уравнение $P(k, s) = 0$, где функция $P(k, s)$ дана в формуле (2.7). Вводя замену $\omega = is$, получим полином для определения дисперсионных соотношений каждой из трех волновых мод:

$$\omega^3 - a_1(k)\omega^2 - a_2(k)\omega + a_3(k) = 0, \quad (3.1)$$

где значения $a_n(k)$ ($n = \overline{1,3}$) даны в (2.8)–(2.10). Легко видеть, что для каждой из трех волн выполняется равенство $\omega_n(k) = -\omega_n(-k)$.

Групповая скорость каждой волновой моды равна $c_g^{(n)} = d\omega_n/dk$. Используя выражение (3.1), получим

$$c_g^{(n)} = \frac{a_1'\omega_n^2 + a_2'\omega_n - a_3'}{3\omega_n^2 - 2a_1\omega_n - a_2}, \quad (3.2)$$

где штрих означает дифференцирование по k .

Известно, что для кубического уравнения с вещественными коэффициентами возможно существование двух сопряженных комплексных корней. Для уравнения (3.1) это возможно при условии, если значение Z положительное, где

$$Z = (r/3)^3 + (q/2)^2, \quad r(k) = -\left[a_2(k) + \frac{a_1^2(k)}{3} \right], \quad q(k) = a_3(k) - 2\left[\frac{a_1(k)}{3} \right]^3 - \frac{1}{3}a_1(k)a_2(k). \quad (3.3)$$

Устойчивость волнового движения для трехслойной жидкости исследована в работе [6]. Как указано в труде [9], альтернативным методом определения устойчивости волнового движения является решение начальной задачи. Для неустойчивого потока полученное решение будет корректно описывать волновое движение только в течение некоторого начального отрезка времени, когда амплитуда волн достаточно мала и нелинейные эффекты можно не учитывать. Дальнейшее развитие волнового движения следует рассматривать с использованием нелинейных уравнений и граничных условий.

В двухслойной жидкости под твердой крышкой существует только одна волновая мода, дисперсионная зависимость которой согласно (2.15) имеет вид

$$\omega = kV_1 - \gamma(c - b)r_4(k). \quad (3.4)$$

Групповая скорость этой волны при $k=0$ равна $c_g = V_1 - (c - b)H_1H_2/H$ и $c_g \rightarrow V_1$ при $k \rightarrow \infty$.

В частном случае однослойной жидкости с линейным сдвиговым потоком под свободной поверхностью дисперсионные зависимости для двух существующих волновых мод приведены, например, в работе [7], а с учетом поверхностного натяжения – в работе [10]:

$$\omega_{1,2} = kU_0 - \frac{\gamma b}{2}\text{th}(|k|H) \pm \sqrt{\left(g|k| + \frac{b^2}{4}\text{th}(|k|H) \right)\text{th}(|k|H)}. \quad (3.5)$$

Подкоренное выражение в (3.5) всегда неотрицательно, следовательно, в этом случае сдвиговое течение всегда устойчиво.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Значения исходных параметров частично заимствованы из работы [7]:

$$H_1 = 0.3 \text{ м}, \quad H_2 = 0.7 \text{ м}, \quad H = 1 \text{ м}, \quad \sigma = 2\pi c^{-1}, \quad g = 9.81 \text{ м/с}^2.$$

Для донных возмущений в выражении (1.6) использована функция $f(x) = \exp(-dx^2)$, где $dH_1^2 = 0.1$.

Выбраны два примера распределения скорости основного потока в двухслойной жидкости: $(\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2) = (0.5, 0.75, 0.2)$ (случай 1) и $(\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2) = (0.5, 0.2, 2)$ (случай 2), где $\bar{V}_j = V_j/\sqrt{gH_1}$ ($j = 0, 1, 2$). Проверка на устойчивость этих профилей скорости по критерию, изложенному в п. 3, показала, что они устойчивы.

Интересно отметить, что в обоих случаях при фиксированных значениях V_0 , V_1 и изменении V_2 не удалось обнаружить неустойчивых режимов. Однако при фиксированных значениях V_1 и V_2 имеются ограничения на скорость V_0 . Границы устойчивости на плоскости (\bar{V}_0, \bar{k}) , где $\bar{k} = kH_1$, можно определить, используя нулевую изолинию функции Z в (3.3). На рис. 2 показаны нулевые изолинии функции Z для случаев 1 и 2 соответственно кривыми 1, 2. Согласно рис. 2, неустойчивыми являются режимы при $\bar{V}_0 > 1.4$ и $\bar{V}_0 > 1.0$ соответственно в первом и втором случаях.

На рис. 3 представлены в безразмерном виде дисперсионные зависимости $\bar{\omega}_n = \omega_n \sqrt{H_1/g}$ (рис. 3а, в) и групповые скорости $\bar{c}_g^{(n)} = c_g^{(n)}/\sqrt{gH_1}$ (рис. 3б, г) соответственно для случаев 1 (рис. 3а, б) и 2 (рис. 3в, г).

Кривые 1–3 показывают значения для характеристик трех волн, возникающих в двухслойной жидкости, которые определяются как корни полинома (3.1). Нумерация корней полинома производится по убыванию их вещественной части. Групповая скорость каждой волны определяется соотношением (3.2).

Кривая 4 показывает дисперсионную зависимость и групповую скорость единственной волновой моды, которая имеет место в двухслойной жидкости под твердой крышкой согласно формуле (3.4). Как видно из рис. 3, эта волновая мода по своим характеристикам практически полностью совпадает со второй модой для случая двухслойной жидкости под свободной поверхностью. Причем с ростом волнового числа k групповые скорости в случае 1 первой и второй мод, а в случае 2 – второй и третьей мод становятся очень близки.

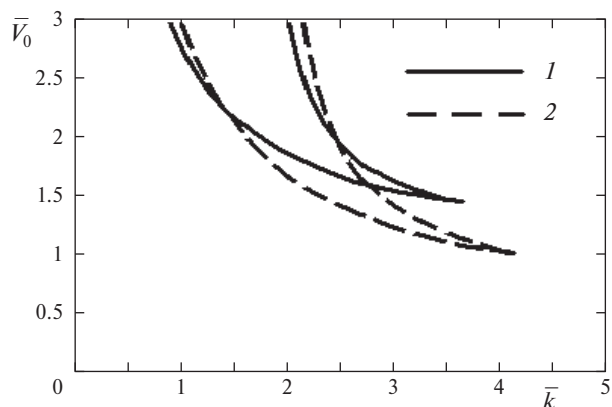


Рис. 2. Области неустойчивых значений волновых чисел в зависимости от скорости сдвигового потока V_0 : 1, 2 – случаи 1 и 2.

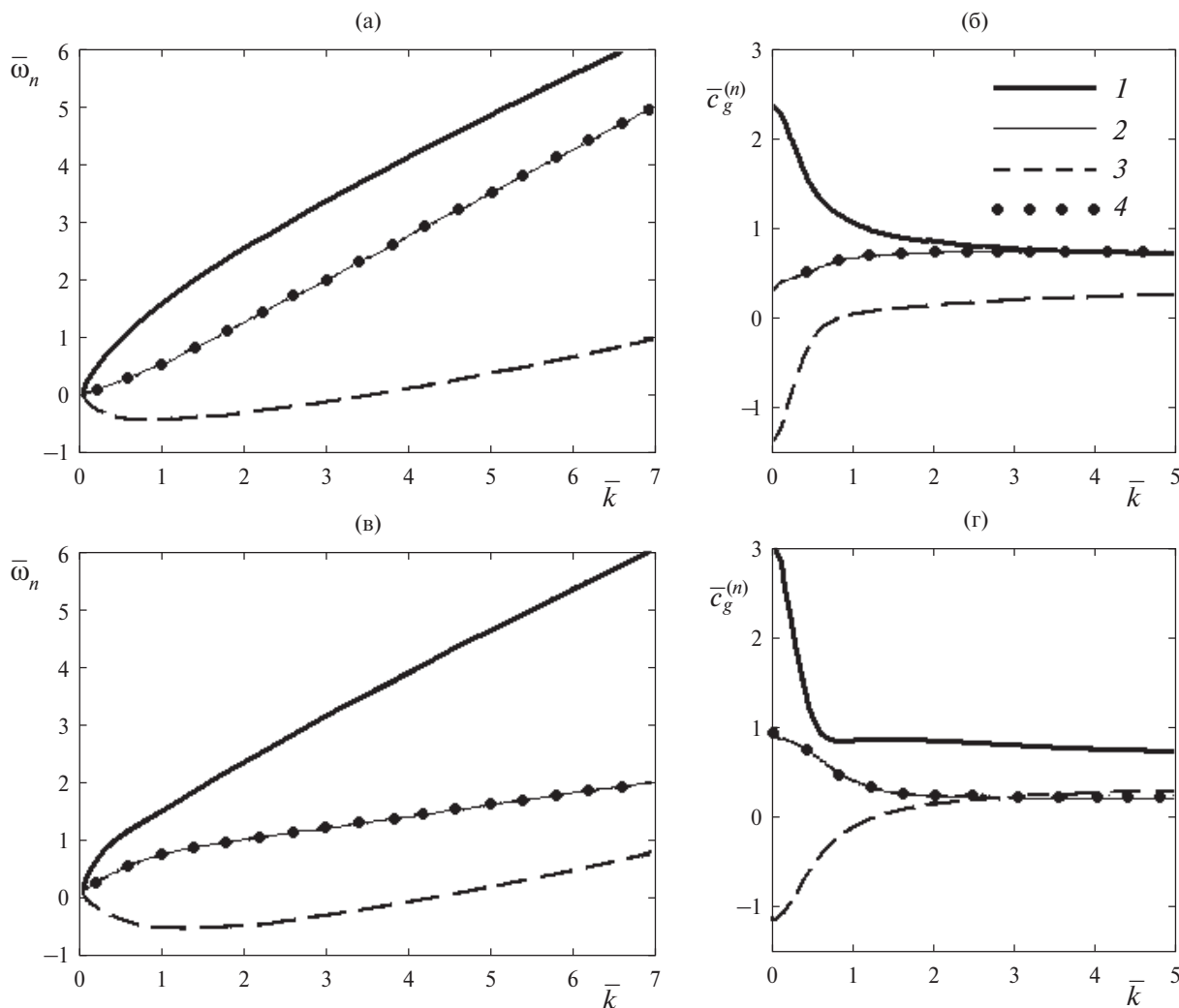


Рис. 3. Дисперсионные зависимости $\bar{\omega}_n(\bar{k})$ (а, в) и групповые скорости $\bar{c}_g^{(n)}(\bar{k})$ (б, г): кривые 1–3 соответствуют номеру моды для случая 1 (а, б) и случая 2 (в, г). Кривые 4 показывают дисперсионную зависимость и групповую скорость единственной волновой моды в рассмотренных случаях для двухслойной жидкости под твердой крышкой.

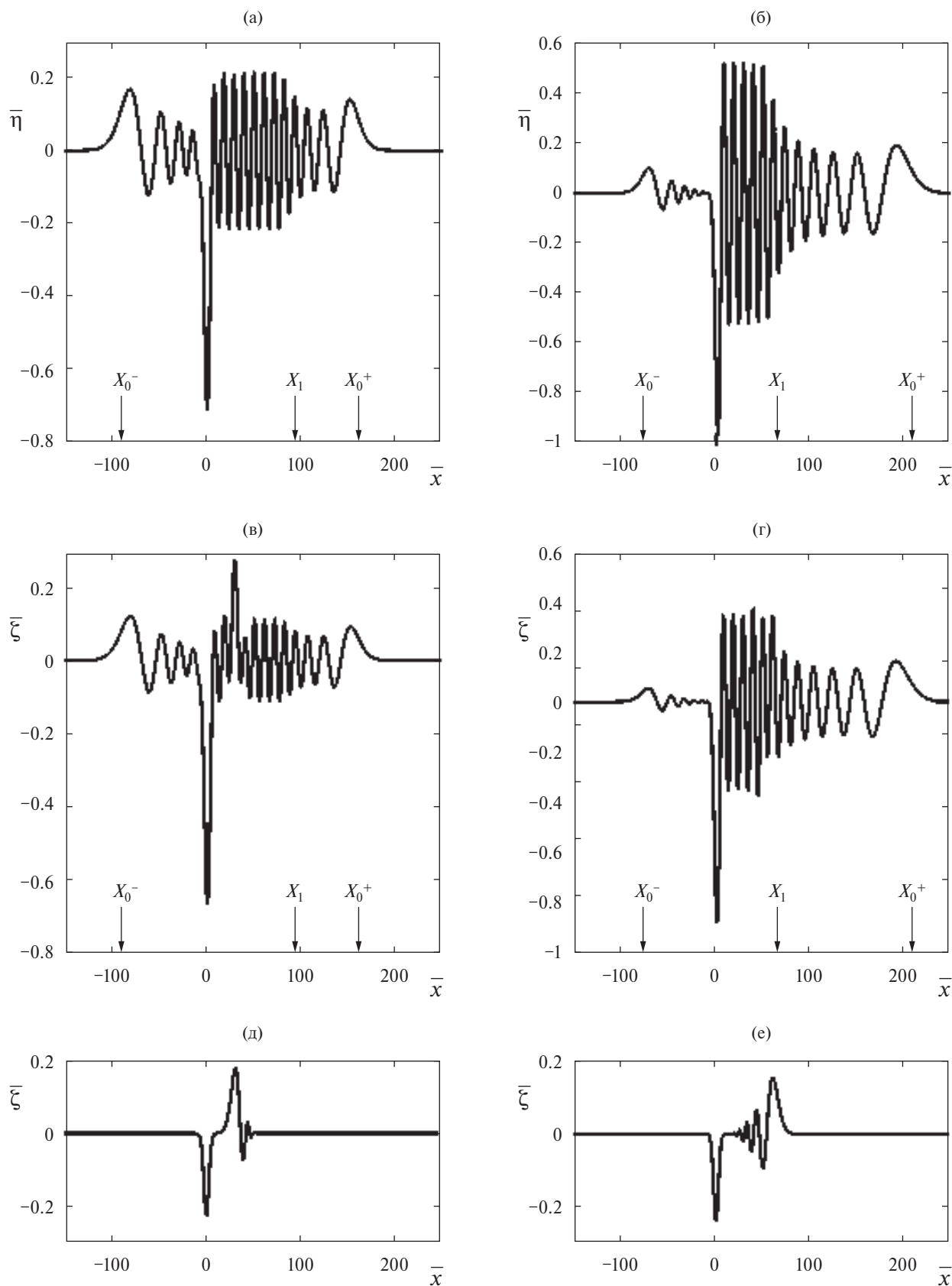


Рис. 4. Возвышения свободной поверхности (а, б) и границы раздела слоев (в–е) при $t = 12$ с для случая 1 (а, в, д) и случая 2 (б, г, е) при наличии свободной поверхности (а–г) и твердой крышки (д, е). Вертикальные стрелки указывают положения волновых фронтов для различных мод.

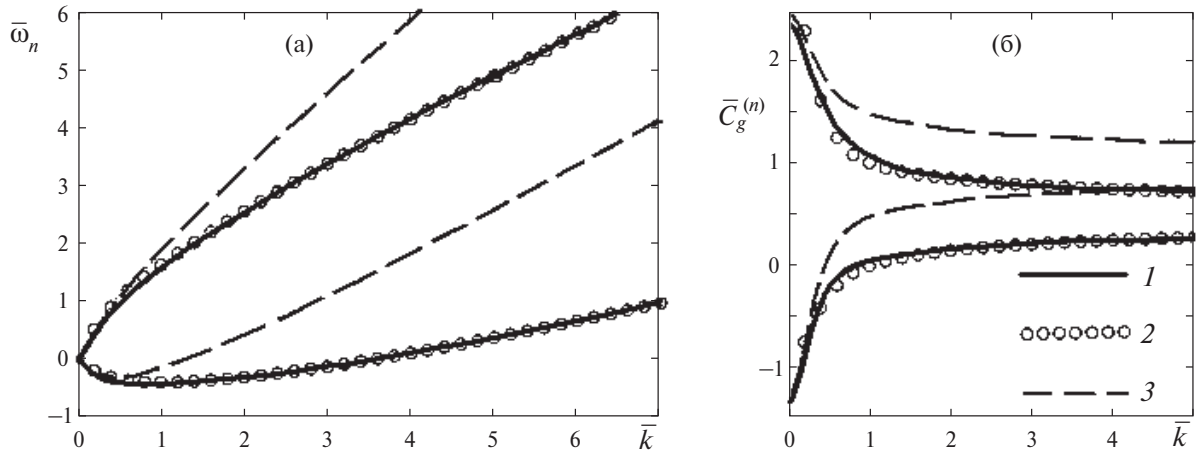


Рис. 5. Дисперсионные зависимости $\bar{\omega}_n(\bar{k})$ (а) и групповые скорости $\bar{c}_g^{(n)}(\bar{k})$ (б): 1 – $n=1$ и $n=3$ для двухслойной жидкости в случаях 1; 2 и 3 – моды $n=1$ и $n=2$ для однослойной жидкости в случаях 3 и 4 соответственно.

Возвышения свободной поверхности $\eta(x, t)$ и поверхности раздела слоев $\zeta(x, t)$ для момента $t=12$ с определены в результате численного интегрирования формул (2.12), (2.14) и представлены на рис. 4а, в и рис. 4б, г соответственно для случаев 1 и 2. Использованы следующие безразмерные переменные: $(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) = (\eta, \zeta)\sqrt{g/H_1}/a, \bar{x} = x/H_1$.

Зависимости групповой скорости волновых мод от волнового числа позволяют определить границы фронтов возбуждаемых волн (подробнее см. [7]). Скорость распространения длинноволновых возмущений определяется значением $\bar{c}_g^{(n)}(0)$. Эти возмущения являются затухающими. В рассматриваемой задаче периодические донные колебания происходят с частотой σ .

Для каждой волновой моды нужно определить значение k_n такое, что $\omega_n(k_n) = \sigma$, и тогда скорость волнового фронта незатухающих колебаний заданной частоты равна $\bar{c}_g^{(n)}(k_n)$. На рис. 4а–г вертикальными стрелками показаны координаты волновых фронтов. Для случая 1 на рис. 4а, в использованы значения $\bar{c}_g^{(1)}(0)=2.36$, $\bar{c}_g^{(3)}(0)=-1.33$, $\bar{k}_1=0.585$, $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1)=1.36$. Для заданного момента времени $t=12$ с (в безразмерных переменных $\bar{t} = t\sqrt{g/H_1} = 6862$) координаты волновых фронтов равны: $X_0^+ = \bar{t}\bar{c}_g^{(1)}(0) = 162.3$, $X_0^- = \bar{t}\bar{c}_g^{(3)}(0) = -91.01$, $X_1 = \bar{t}\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 9345$.

Для случая 2 (рис. 4б, г) $\bar{c}_g^{(1)}(0)=2.98$, $\bar{c}_g^{(3)}(0)=-1.15$, $\bar{k}_1=0.599$, $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1)=0.915$, $X_0^+=4.6$, $X_0^-=-78.78$, $X_1=6277$. В обоих случаях волны с частотой донных пульсаций распространяются только вниз по потоку, т.е. при $x > 0$. Максимальные возвышения как свободной поверхности, так и поверхности раздела возникают в случае 2.

На рис. 4д, е представлены возвышения границы раздела соответственно для случаев 1 и 2 при наличии твердой крышки, полученные в результате численного интегрирования (2.16). Скорость распространения длинноволновых возмущений единственно возможной моды значительно меньше, чем при наличии свободной поверхности (ср. рис. 3б, г), поэтому для рассматриваемого момента еще не сформировались заметные волновые возмущения, которые бы позволили оценить границы волнового фронта.

Сравнение дисперсионных зависимостей и групповых скоростей для двухслойной и однослойной жидкости представлено соответственно на рис. 5а, б. Кривые 1 показывают зависимости для первой и третьей мод в случае 1 для двухслойной жидкости (сравним рис. 3а, б).

Рассмотрено два варианта однослойной жидкости, которые назовем случаями 3 и 4. В случае 3 для всей толщины жидкости используется градиент скорости верхнего слоя случая 1 так, что значения скорости основного потока на различных горизонтах равны $(\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2) = (0.5, 0.75, 1.33)$. Кривые 2 соответствуют двум модам такой однослойной жидкости. В случае 4 сохраняется градиент скорости нижнего слоя из случая 1 и значения скорости на различных горизонтах равны $(\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2) = (0.986, 0.75, 0.2)$. Кривые 3 соответствуют двум модам этой однослойной жидкости. Практическое совпадение кривых 1 и 2 для дисперсионных зависимостей и групповых скоростей свидетельствует о том, что волновые свойства двухслойной жидкости определяются в основном поведением основного потока вблизи свободной поверхности.

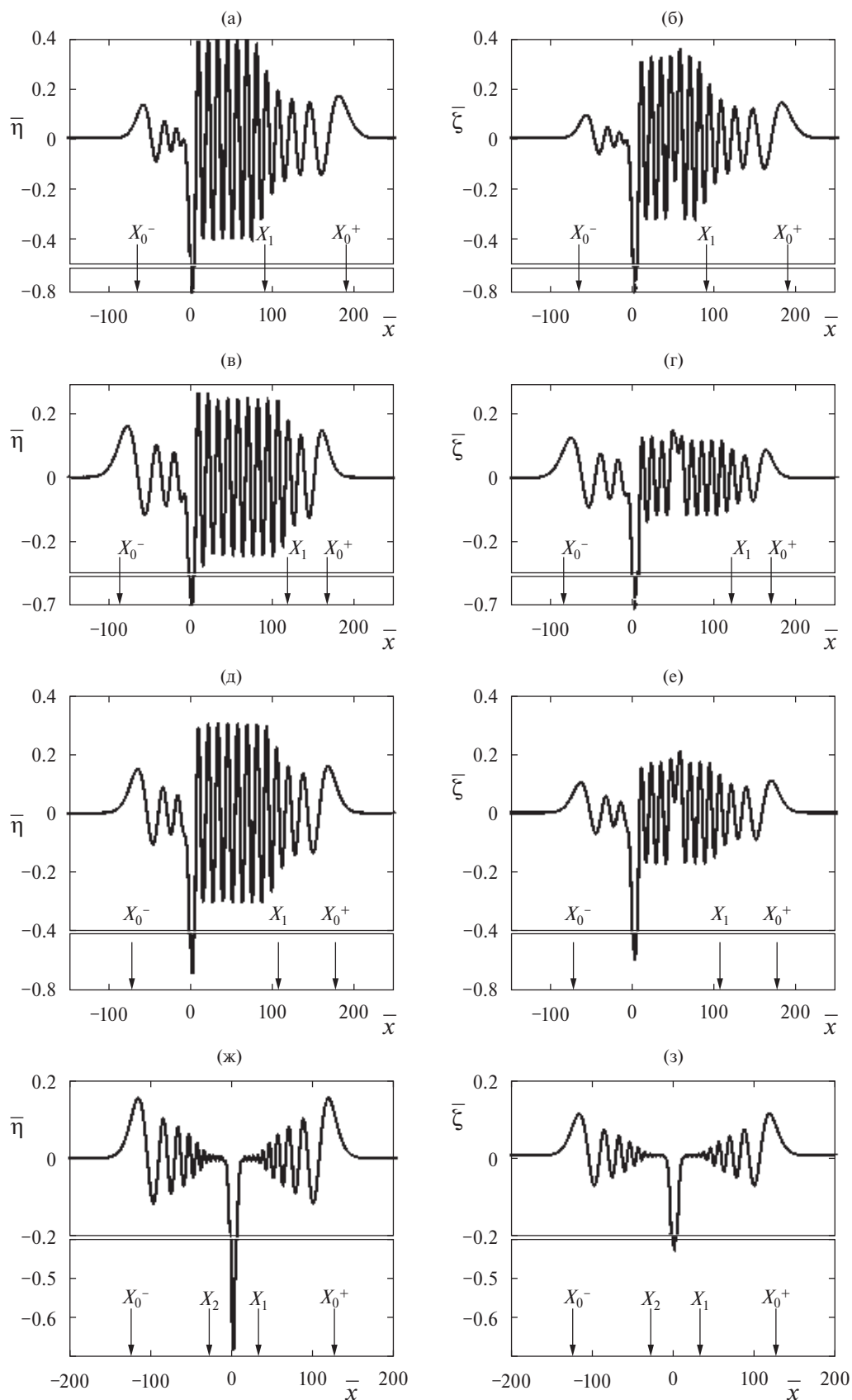


Рис. 6. Вертикальные смещения свободной поверхности (а, в, д, ж) и на горизонте $y = -H_1$ (б, г, е, з) при $t = 12$ с для однослойной жидкости соответственно случаи 3–6. Вертикальные стрелки указывают положения волновых фронтов для различных мод.

Рисунок 6 показывает вертикальные смещения жидкости на свободной поверхности (рис. ба, в, д, ж) и на горизонте $y = -H_1$ (рис. бб, г, е, з) для четырех вариантов однослойной жидкости в момент $t = 12$ с. Использовано численное интегрирование соотношений (2.24) и (2.25). К введенным выше случаям 3 и 4 добавлены случай 5, в котором по всей глубине жидкости безразмерная скорость основного потока равна $V_1 = 0.75$, и случай 6, в котором основной поток отсутствует ($V_1 = 0$).

В последнем случае волновые возмущения симметричны относительно линии $x = 0$. Случаи 3–5 объединяет то, что скорость V_1 на горизонте $y = -H_1$ для всех этих случаев совпадает. Вертикальными стрелками, аналогично рис. 4, показаны границы волновых фронтов для длинноволновых возмущений и возмущений с частотой донных пульсаций: для случая 3 $(X_0^+, X_0^-, X_1) = (191.4, -65.60, 92.53)$ (рис. ба, б); для случая 4 $(X_0^+, X_0^-, X_1) = (168.8, -87.47, 120.8)$ (рис. бв, г); для случая 5 $(X_0^+, X_0^-, X_1) = (176.7, -73.82, 107.0)$ (рис. бд, е); для случая 6 $(X_0^\pm, X_{1,2}) = (\pm 125.3, \pm 31.37)$ (рис. бж, з).

Отметим, что в рассматриваемых случаях для однослойной жидкости наибольшие волновые возмущения как на свободной поверхности, так и на горизонте $y = -H_1$ имеют место для случая 3, а наименьшие – для случая 6. В случае твердой крышки для случаев 3–5 вертикальные смещения на горизонте $y = -H_1$ совпадают. Исследование поведения волнового движения, вызванного периодическими донными колебаниями в установившемся режиме для равномерного потока, выполнено в [11].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследован процесс развития волнового движения в жидкости под действием включения в начальный момент времени периодических колебаний участка дна. Предполагается, что в начальный момент времени фоновый сдвиговой поток не возмущен. Рассмотрено два варианта сдвигового потока: двухслойный поток, в котором градиенты горизонтальной скорости различны в каждом слое, а на границе раздела слоев скорости совпадают, и поток с постоянным градиентом скорости по всей глубине жидкости.

Сопоставлены два типа граничных условий на верхней границе жидкости: свободная поверхность и твердая крышка. Анализ дисперсионных соотношений показал, что при наличии свободной поверхности в двухслойной жидкости существует три волновые моды, а в однослойной жидкости – две волновые моды, тогда как при наличии твердой крышки в обоих вариантах возможна только одна волновая мода.

С использованием интегральных преобразований Фурье и Лапласа получено интегральное представление решения для вертикальных смещений свободной поверхности и границы раздела слоев.

Для двухслойного сдвигового потока возможно существование неустойчивых режимов, в которых волновые возмущения возрастают со временем, что делает несправедливым применение линейной теории спустя некоторый промежуток времени после включения источника возмущения. Тогда в исходных уравнениях и граничных условиях необходимо учитывать нелинейные члены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черкесов Л.В. Неустановившиеся волны. Киев: Наук.думка, 1970. 196 с.
2. Черкесов Л.В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук.думка, 1976. 364 с.
3. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн. Киев: Наук.думка, 1980. 259 с.
4. Ellingsen S.Å., Li Y. Approximate dispersion relations for waves on arbitrary shear flows // J. Geophysical Research: Oceans. 2017. V. 122. P. 9889–9905.
5. Zhang X. Short surface waves on surface shear // J. Fluid Mech. 2005. V. 541. P. 345–370.
6. Longuet-Higgins M.S. Instabilities of a horizontal shear flow with a free surface // J. Fluid Mech. 1998. V. 364. P. 147–162.
7. Стурова И.В. Действие пульсирующего источника в жидкости при наличии сдвигового слоя // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 4. С. 14–26.
8. Суворов А.М. Генерация внутренних волн в потоке двухслойной жидкости со сдвигом скорости // Цунами и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР, 1976. С. 170–178.
9. Кейз К.М. Гидродинамическая устойчивость как задача с начальными данными // В сб.: Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964. С. 37–46.
10. Wahlén E. On rotational water waves with surface tension // Phil. Trans. R. Soc. A. 2007. V. 365. № 3. P. 2215–2225.
11. Tyvand P.A., Torheim T. Surface waves from bottom vibrations in uniform open-channel flow // Eur. J. Mech. B./ Fluids. 2012. V. 36. P. 39–47.

DEVELOPMENT OF THE WAVE MOTION INDUCED BY NEAR-BOTTOM PERIODIC DISTURBANCES IN A TWO-LAYER SHEAR CURRENT

I. V. Sturova*

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

** E-mail: sturova@hydro.nsc.ru*

The behavior of wave motion arising in an ideal incompressible homogeneous fluid under switching-on periodic bottom disturbances is studied in the linear approximation for the two-dimensional non-stationary problem. In the undisturbed state, the velocities of two-layer fluid flow are linear functions of the vertical coordinate in each of the layers with different gradients and coincide on the boundary of the layers. The upper boundary of fluid can be either free or bounded by the rigid cover. The dispersion dependences and the group velocities of the appearing wave modes are determined. The vertical displacements of the free surface and the interface between the layers are calculated. A comparison with the solution for a single-layer fluid is carried out.

Keywords: surface waves, near-bottom disturbances, background shear currents, dispersion dependences

УДК 532.517:2.4;621.1.016.4

АНОМАЛЬНАЯ ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ОТРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ ЗИГЗАГООБРАЗНОГО ПЛОТНОГО ПАКЕТА НАКЛОННЫХ КАНАВОК НА СТЕНКЕ КАНАЛА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

© 2024 г. С. А. Исаев^{a, b, *}, О. О. Мильман^c, А. А. Ключ^b, Д. В. Никущенко^a,
Д. С. Хмара^a, Л. П. Юнаков^d

^a Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия

^b Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации
им. Главного маршала авиации А.А. Новикова, Санкт-Петербург, Россия

^c Научно-производственное внедренческое предприятие “Турбокон”, Калуга, Россия

^d Балтийский государственный технический университет “ВОЕНМЕХ”
им. Д. Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: isaev3612@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.11.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

Детально анализируется быстрое развитие аномальной интенсификации отрывного турбулентного (при $Re = 6000$) течения воздуха и теплообмена в коридорном однорядном пакете из 31 наклонной канавки относительной глубиной 0.2 на выделенном продольном участке стенки узкого канала, вызванное интерференцией вихревых следов за канавками и ускорением в ядре канального потока с формированием зоны ультравысокой продольной скорости. Стабилизация волнообразных характеристик происходит примерно к 15-й канавке, в затем наблюдается умеренное снижение амплитуд колебаний. Возвратные токи в канавках по мере их удаления от входного сечения усиливаются, при этом минимальное отрицательное трение уменьшается от -2 до -4 . Суммарная относительная теплоотдача структурированного участка растет при $q = \text{const}$ примерно в 2.75 раза, а при $T = \text{const}$ – в 2 раза при увеличении относительных гидравлических потерь в 1.7 раза по сравнению с плоскопараллельным каналом. Относительная теплоотдача от поверхности, ограниченной контуром 20-й наклонной канавки, достигает 3.7 ($q = \text{const}$) при 2.2 росте гидравлических потерь. В канале наблюдается увеличение локального максимума продольной скорости в 1.5 раза в сравнении со среднемассовой скоростью.

Ключевые слова: аномальная интенсификация, интерференция, наклонная канавка, узкий канал, отрывное течение, вихревой теплообмен, воздух, условия первого и второго рода

DOI: 10.31857/S1024708424020072 EDN: RJDQNW

При движении теплоносителя в структурированных энергетических системах с упорядоченными элементами, например, в трубчатых теплообменниках [1], как правило, наблюдается начальный гидродинамический участок, на котором локальные и интегральные характеристики течения и теплообмена около удаленных элементов приближаются к стабилизированным величинам.

В работе [1] показано, что интенсификация теплообмена в трубных пучках по мере продвижения к удаленным трубам связана с турбулизацией вихревого потока. Однако и для ламинарного (при числе Рейнольдса $Re = 308$) течения трансформаторного масла в прямоугольном канале с 124 однорядными сферическими лунками на нагретой стенке [2] отмечается постепенное волнообразное нарастание относительной теплоотдачи с выходом на средний уровень с многократным (более чем в 5 раз) превосходством теплоотдачи по сравнению с плоским каналом.

Возрастание тепловых потоков в канале связывается с интерференцией вихревого обтекания упорядоченных лунок при их коридорном расположении, в особенности при воздействии развивающегося за лунками ближнего следа с расположенными ниже по потоку лунками. Так, в исследовании [3] нанесение на нагретую до 30°C стенку девятисекционного миниканала (шириной 2 и высотой 0.5) сферических лунок умеренной глубины (0.2) с шагом 1.5 при низкоскоростном ($Re = 308$) течении трансформаторного масла

способствует вихревой интенсификации теплообмена и увеличивает теплоотдачу от стенки примерно в 2.5 раза по сравнению с гладким каналом при парадоксальном 7%-ном снижении гидравлических потерь.

Предложенные альтернативные формы наклоненных под углом 45° овальных лунок равной со сферическими аналогами площадью пятна (шириной 0.55 и длиной 1.5 в долях диаметра пятна базовой лунки) и той же глубины позволяет увеличить теплоотдачу еще в 3.4 раза при уменьшении гидравлических потерь по сравнению с гладким каналом на 2%.

В работе [4] рассматривается интенсификация теплообмена при ламинарном и турбулентном движении воздуха в узком канале с однорядным пакетом из 22 овальных лунок глубиной 0.2 (в долях ширины овальной лунки), длиной цилиндрической части 0.8, значительным радиусом скругления кромки 0.25 и углом наклона 45° , расположенных с шагом 1.8. Высота узкого канала длиной порядка 40, шириной 2.5 варьирует в пределах 0.44–0.8. Максимальные величины осредненного по поперечной полосе относительного (в сравнении с плоскопараллельным каналом) числа Нуссельта Num/Num_{pl} растут от 1 до 2.4 (к 12-й лунке) при $Re = 2500$ и от 1 до 1.8 (к 8-й лунке) при $Re = 2 \times 10^4$.

При ламинарном и турбулентном режимах относительная суммарная теплоотдача от нагретой изотермической стенки канала с лунками примерно одинакова и составляет 1.45, а коэффициент относительных гидравлических потерь в структурированном канале при переходе от $Re = 2500$ к 2×10^4 возрастает от 1.25 к 1.66. Наклонные овальные лунки умеренного удлинения оказались хотя и предпочтительными по сравнению со сферическими аналогами, но не слишком эффективными для интенсификации отрывного течения и теплообмена около структурированных поверхностей.

Аномальная интенсификация отрывного течения и теплообмена открыта в единичных и пакетных одно- и многорядных наклонных канавках со сферическими концами на стенке канала на стабилизированном гидродинамическом участке [5, 6]. Для нее характерны ультравысокие скорости возвратного и вторичного закрученного течения во входной части канавки, соизмеримые и превосходящие среднемассовую скорость в канале. Такие скорости возникают за счет экстраординарных сосредоточенных перепадов давления между зонами торможения входящего в канавку потока и разрежения в ядре смерчевого вихря с отрицательным давлением на входном сферическом сегменте.

Обнаружилось, что во входной части на дне канавки отрицательное трение и теплоотдача многократно (в 4–8 раз) по абсолютной величине превосходят трение и теплоотдачу на плоской стенке. Открыто также, что кардинальные изменения поля давления около наклонной канавки оказывают влияние на скорость потока в ядре канала, приводя к его ускорению над входом в канавку и формированию в ядре струйного участка с полуторакратным превышением максимальной скорости по сравнению с максимальной скоростью ламинарного и турбулентного потока в плоскопараллельном канале. Установлено, что описанные явления наблюдаются при относительных длинах и глубинах канавки, начиная с 3.5 и 0.15 соответственно, углах наклона – от 25° до 80° , при числах Рейнольдса – от 250 до 2×10^5 .

В работах [7–9] численно исследуется аномальная интенсификация ламинарного и турбулентного теплообмена в межреберном пространстве воздушного конденсатора с пакетом канавок с углом наклона к набегающему потоку 45° при $Re = 1000$ и 6000. При реализации условия постоянства теплового потока на участке нагретой стенки узкого канала высотой 1, длиной 80 и шириной 4 на ней размещены коридорные пакеты из 20-й и 31-й канавки шириной 1 и длиной 4.5. Глубина канавок изменяется от 0.05 до 0.35. В случае редкого пакета шаг между центрами канавок равен 4, а для плотного пакета – 2.53. Равномерный поток развивается в пространстве между нагретой структурированной и изотермической плоской стенками при постановке на боковых границах условий симметрии.

При $Re = 1000$ уплотнение пакета приводит к значительному усилению аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в канавках. Так, при глубине канавок 0.25 минимальные отрицательные величины относительного трения $(f/f_{pl})_{\min}$ уменьшаются с -2.5 до -4 , причем последнее значение достигается в 14-й канавке от входа в пакет.

Увеличение глубины канавки вызывает усиление теплообмена в канале. Высокий темп роста теплопередачи наблюдается в диапазоне изменения глубин от умеренных (порядка 0.2) до больших (выше 0.3) значений. Максимальные теплогидравлические характеристики характерны для канала с плотным пакетом канавок глубиной 0.25. Для него достигнуто почти 2-кратное увеличение теплоотдачи при 46% росте гидравлических потерь в сравнении с плоскопараллельным каналом. Максимальная скорость ламинарного

потока в структурированном канале растет с глубиной канавок и превышает в 2 раза среднемассовую скорость, начиная с глубины 0.25 для плотного пакета.

В случае турбулентного течения воздуха для плотного пакета наклонных канавок $(f/f_{pl})_{\min} = -4$ и $(Nu/Nu_{pl})_{\max} = 7.2$. Относительная теплоотдача возрастает в 1.9 раза, а относительные гидравлические потери – в 1.6 раза.

Цикл расчетно-экспериментальных работ [10–12] проведен с измерениям векторных полей скорости ламинарного и турбулентного потока в оптически прозрачном канале Каз НЦ РАН (высота 0.01 м, ширина 0.1 м, длина 0.8 м) с двухрядными 26-ю канавками на стенке при числах Рейнольдса 1000 и 4300, определенном по скорости равномерного потока на входе и характерному размеру – ширине канавки, равной 0.01 м. Длина острокромочных канавок 4.5, глубина 0.25, шаг между центрами лунок 2.53 (плотное расположение канавок). Рассмотрены V-образная схема расположения канавок под углами $\pm 45^\circ$ к плоскости симметрии канала при развороте канавок к боковым стенкам (в этом случае входные части канавок находятся вблизи плоскости симметрии) и Λ -образная схема под углом $\pm 135^\circ$ к плоскости симметрии и развороте канавок от боковых стенок (в этом случае входные части канавок располагаются вблизи стенок). Подтверждено, что в формирующемся в конце структурированного канала ядре потока над входом в канавки возникают зоны высокой скорости, при этом максимум продольной скорости в районе 22-й канавки в ламинарном случае оказывается порядка 1.9 на высоте $y = 0.4$ и в турбулентном варианте достигает 1.59 на высоте $y = 0.25$.

Выполненное в [13] численное исследование анализирует аномальную интенсификацию турбулентного отрывного течения воздуха и теплообмена на начальном гидродинамическом участке около длинной полосы пластины с однорядным плотным пакетом из 16 наклонных канавок при задании в расчетной области боковых условий симметрии.

При числе Рейнольдса 6000 сравниваются плотные пакеты наклоненных под углом 60° канавок и сферических лунок при одинаковой площади пятна, умеренной глубине и довольно высокой плотности лунок. Расчеты теплообмена при обтекании пластины с пакетом канавок продемонстрировали прогрессирующее нарастание экстраординарного сосредоточенного перепада давления между зонами торможения внешнего потока и разрежения в месте генерации торнадоподобных вихрей на входных сферических сегментах, постепенную интенсификацию возвратного, вторичного, восходящего и нисходящего течения в канавках, достижение минимума относительного трения -4 и максимума относительного числа Нуссельта 4.4. Обнаружены ускорение и кардинальное утончение пристеночного слоя над входной частью канавок. Относительная тепловая эффективность пакета канавок составила 1.43 против 1.09 для пакета сферических лунок, а теплогидравлическая эффективность – 1.12 против 0.965.

В данной работе проводится уточнение численного исследования [9] и дается детальный анализ интерференции отрывного турбулентного течения воздуха в плотном пакете канавок и интенсификации теплообмена в узком канале со структурированным участком длиной 80, шириной 4 и высотой 1 при размещении на нем плотного пакета из 31 наклонной канавки при $Re = 6000$. Особое внимание уделяется сравнению прогнозов для двух типов граничных условий для расчета теплообмена $T = \text{const}$ и $q = \text{const}$. Здесь развивается выполненное в работе [14] численное исследование конвективного теплообмена в узком канале с единичной наклонной канавкой.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОДОЛОГИЯ РАСЧЕТА

Численно рассматривается ускорение турбулентного потока воздуха ($Pr = 0.71$) и усиление аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена при заданном числе Рейнольдса ($Re = 6000$) на длинном участке структурированного канала. В узком канале протяженностью 84, шириной 4 и высотой 1 на контрольной секции длиной 80 на нагретой стенке располагаются однорядные пакеты, набранные из 31 канавки с полусферическими концами под углом наклона 45° к продольной оси канала.

Каждая канавка состоит из двух половинок сферической лунки, соединенных траншейной вставкой. Иногда их называют овально-траншейными. Ширина канавки равна 1, длина – 4.5, глубина – 0.2, радиус скругления кромки – 0.2 (рис. 1а).

Длины входного и выходного плоскопараллельного участка канала перед и за структурированной секцией канала выбраны равными 2. Шаг между центрами канавок 2.53, как и в плотном пакете [5, 6].

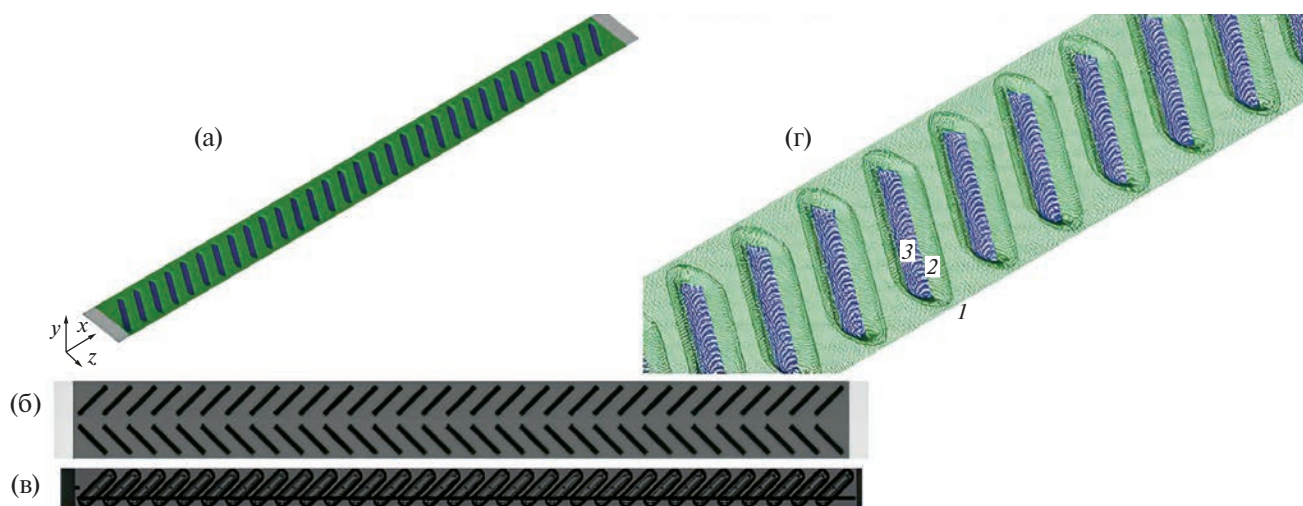


Рис. 1. Узкий канал с 31 наклонными канавками с системой декартовых координат x , y , z (а) и зигзагообразные коридорные пакеты канавок на стенке канала (б). Продольное сечение канавок в канале в серединах переходов от сферических сегментов к траншеям (в). Многоблочные расчетные сетки на структурированном участке стенки (г). 1 – подробная декартовая сетка, покрывающая канавки; 2 – криволинейная сетка О-типа в окрестности каждой канавки; 3 – косоугольная сетка-“заплата”, наложенная на центральную зону канавки. Верхняя стенка канала не показана.

На боковых границах канала задаются условия симметрии, т.е. моделируется канал с зигзагообразным расположением канавок (рис. 1б).

На входе в канал турбулентный воздушный поток равномерный, в выходном сечении канала выполняются мягкие граничные условия, а на стенках канала – условие прилипания. Система декартовых координат x , y , z вводится с центром на нижней стенке в начале структурированной секции канала. Ось x ориентирована вдоль канала, ось y направлена вверх, а ось z – поперек канала.

Все линейные размеры относятся к высоте канала H . Декартовые составляющие скорости U , V , W и число Re определяются по среднemasсовой скорости потока. В качестве характерной температуры выбрана комнатная $T_{ref} = 293$ К. Верхняя стенка канала изотермическая и поддерживается при комнатной температуре, т.е. $T = 1$.

Нижняя стенка с наклонными канавками нагревается и на ней задаются два типа температурных граничных условий. Как и в [14], при реализации граничных условий первого рода нижняя стенка канала с канавкой поддерживается при постоянной температуре 30°C (303 К), т.е. безразмерная температура $T = 1.034$.

Аналогично работе [13] при постановке граничных условий второго рода на стенке задается постоянный тепловой поток q . Подводимый поток q пересчитывается в безразмерный вид по формуле $q_{norm} = qH/(\lambda Pr Re T_{ref})$, а его величина принимается $\sim 3.4 \times 10^{-5}$. Здесь λ – теплопроводность воздуха.

Особое внимание в статье уделено анализу распределений поверхностных характеристик (трения, давления, чисел Нуссельта, температуры) в продольном сечении канала, проходящем через места стыковки входных полусферических сегментов канавок и их траншейных частей (рис. 1в).

Система стационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS), замкнутых с помощью дифференциальных уравнений модели сдвиговых напряжений Ментера [15] для описания движения низкоскоростной воздушной среды, и уравнение энергии решаются с помощью факторизованного метода конечного объема второго порядка аппроксимации [16].

Следует подчеркнуть, что решение тепловой задачи не влияет на решение динамической задачи, поскольку физические свойства теплоносителя не меняются. Примененная многоблочная вычислительная технология (МВТ) основывается на использовании разномасштабных структурированных сеток с перекрытием, согласованных с геометрией канала. В двух рядах приграничных ячеек каждой из перекрывающихся сеток параметры рассчитываются с линейной интерполяцией [16].

В работе [17] дано обоснование, что этот подход эквивалентен применению адаптивных неструктурированных сеток, но не требует чрезмерных вычислительных ресурсов. Его преимуществом является обеспечение надлежащей точности прогнозов без измельчения сеток, поскольку метод автоматически разрешает

все значимые гидродинамические и теплофизические особенности. Конечно, пересчеты с сетки на сетку с помощью линейной интерполяции являются источником ошибок. Тем не менее тестовые расчеты установившегося циркуляционного течения в каверне с подвижной крышкой [17] показали, что неопределенности прогнозов оказываются вполне приемлемыми.

Отличительной чертой использованного конечно-объемного алгоритма является основанная на концепции расщепления по физическим процессам [18] процедура коррекции давления SIMPLEC [19] с монотонизацией по Рхи—Чоу для выбранного центрированного расчетного шаблона [20, 21].

В линеаризованной системе уравнений конвективные члены в неявной части уравнений переноса представляются по схеме против потока с односторонними разностями, что позволяет существенно повысить устойчивость вычислительной процедуры. В целях снижения влияния искусственной диффузии при моделировании отрывных течений конвективные члены в явной части исходных уравнений количества движения аппроксимируются с помощью одномерной квадратичной противопоточной схемы Леонарда [22], а в уравнениях для характеристик турбулентности — по схеме TVD [23].

Решение алгебраических уравнений проводится методом сопряженных градиентов BiCGSTAB [24] с предуславливателем. Алгебраический многосеточный ускоритель AMG из библиотеки Демидова (amgcl) [25] применяется в блоке коррекции давления, и ILU0-метод используется для других переменных. Специализированный расчетный код VP2/3 (скорость—давление, 2D/3D), базирующийся на MBT, выбран в качестве базового кода в данном численном исследовании и реализуется на многоядерных вычислительных системах аналогично другим кодам, таким как OpenFOAM.

Многоблочная разномасштабная расчетная сетка конструируется с помощью наложения заданных структурированных алгебраических и дифференциальных сеток разной топологии. Канальная декартовая сетка сгущается к верхней плоской и нижней криволинейной стенкам. Продольные и поперечные шаги этой сетки задаются порядка 0.07. В эту сетку встраивается измельченная декартовая сетка высотой 0.175, покрывающая структурированный участок с канавками на нижней стенке канала (сетка 1 на рис. 1г). Эта сетка более подробная, чем базовая.

Продольные и поперечные шаги сетки имеют порядок 0.05. В пристеночную декартовую сетку встраиваются построенные для каждой наклонной канавки криволинейные эллиптические сетки типа O, согласованные с внутренними поверхностями канавок (сетка 2 на рис. 1г). Внутри каждой канавки вводятся косоугольные сетки-заплатки, согласованные с криволинейными поверхностями канавок и закрывающими осевые зоны (сетка 3 на рис. 1г). Пристенный шаг сеток равен 0.0005. Общее количество вычислительных ячеек составляет примерно 11 млн.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2–13 и в табл. 1 представлены некоторые из полученных результатов.

В табл. 1 сравниваются численные прогнозы тепловой эффективности $\text{Numm}/\text{Numm}_{pl}$, относительных коэффициентов гидравлических потерь ξ/ξ_{pl} и теплогидравлической эффективности $\text{THE} = (\text{Numm}/\text{Numm}_{pl}) / (\xi/\xi_{pl})^{1/3}$ для продольного участка канала, структурированного 31 наклонными канавками с полусферическими концами, при двух типах использованных граничных условий.

Таблица 1. Численные прогнозы для продольного участка канала

Тип граничных условий	$\text{Numm}/\text{Numm}_{pl}$	ξ/ξ_{pl}	THE
$q = \text{const}$	2.75	1.67	2.31
$T = \text{const}$	1.95		1.64

В работе [14] показано, что относительная величина суммарной теплоотдачи $\text{Numm}/\text{Numm}_{pl}$ участка с наклонной канавкой при задании условия постоянства подведенного теплового потока не значительно отличается от аналогичного численного прогноза для изотермической нагретой стенки, а именно 1.1 против 1.08 (различие в пределах 2–3%). Однако там отмечалось, что для пакетов наклонных канавок разница в предсказаниях суммарной теплоотдачи для различных типов граничных температурных условий может оказаться значительной.

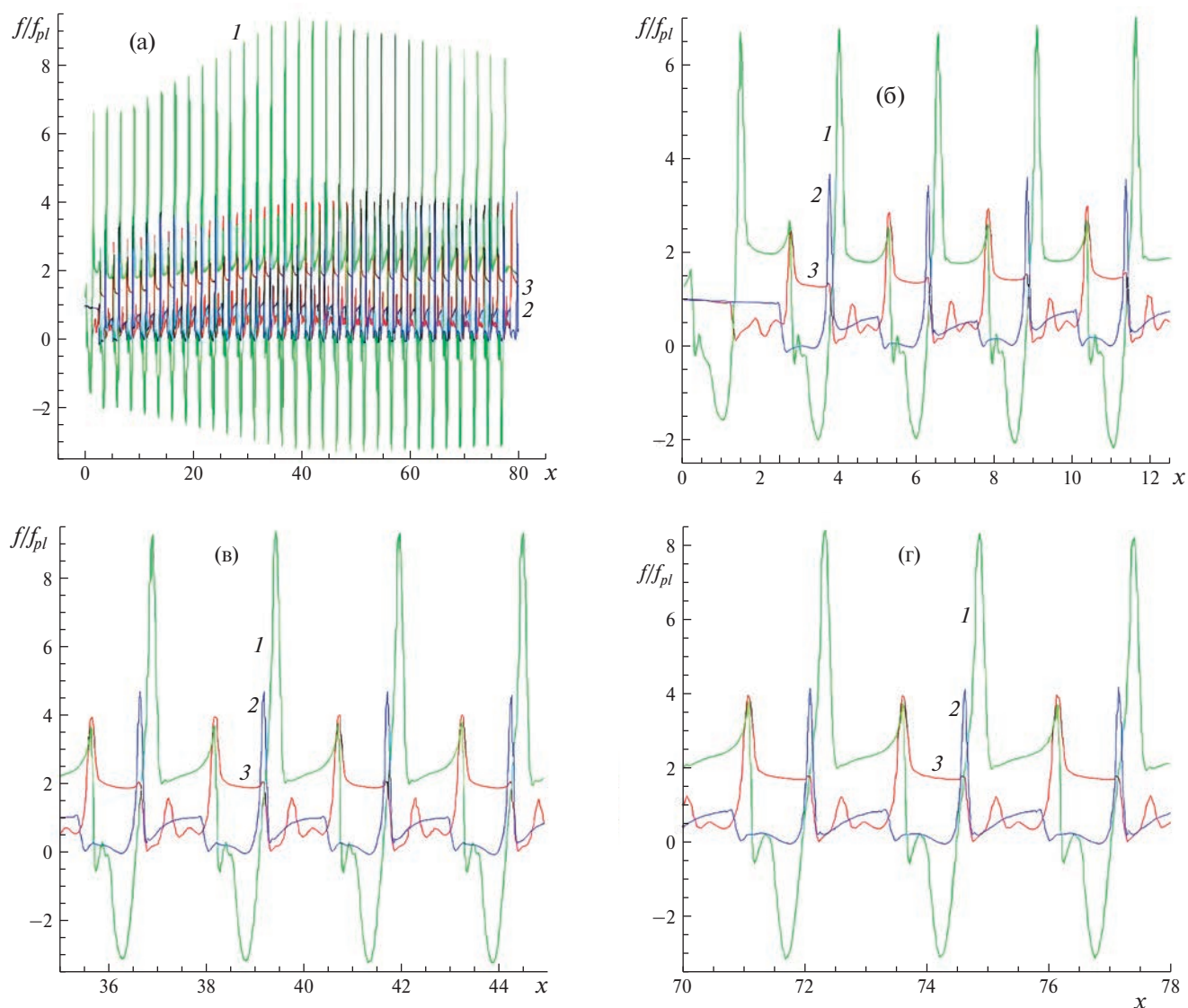


Рис. 2. Сравнение распределений относительного трения $f/f_{pl}(x)$ в трех продольных сечениях канала (а) с 31 канавками и в укрупненных фрагментах во входном (б), среднем (в) и выходном (г) участках. Кривые: 1 – $z = 1.245$, 2 – (-1.245) , 3 – 0.

Как видно по табл. 1, относительная теплоотдача от структурированной 31-й наклонной канавкой полосы канала при $q = \text{const}$ в 1.4 раза выше в сравнении с ее прогнозом при $T = \text{const}$. При этом оба предсказания заметно превосходят относительные гидравлические потери в канале.

Данное исследование во многом объясняет это различие и акцентирует внимание на фундаментальном механизме усиления аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в наклонных канавках по мере развития, формирования и интерференции вихревых структур в канале с равномерным потоком воздуха на входе.

На рис. 2 представлены распределения относительного трения $f/f_{pl}(x)$ вдоль трех продольных сечений структурированной стенки канала.

Первое и второе продольные сечения (первое показано на рис. 1в) проходят через центры сечений стыковки входных и выходных концевых сферических сегментов с цилиндрической траншеей при $z = \pm 1.245$. Третье сечение – срединное сечение нижней стенки канала ($z = 0$). Нумерация кривых совпадает с номером сечения.

Показанные на рис. 2а распределения относительного трения $f/f_{pl}(x)$ демонстрируют волнообразный характер изменения трения с быстрым нарастанием амплитуды колебаний по мере отхода от входного сечения канала. Примерно к 20-й канавке величины f/f_{pl} принимают экстремальные значения.

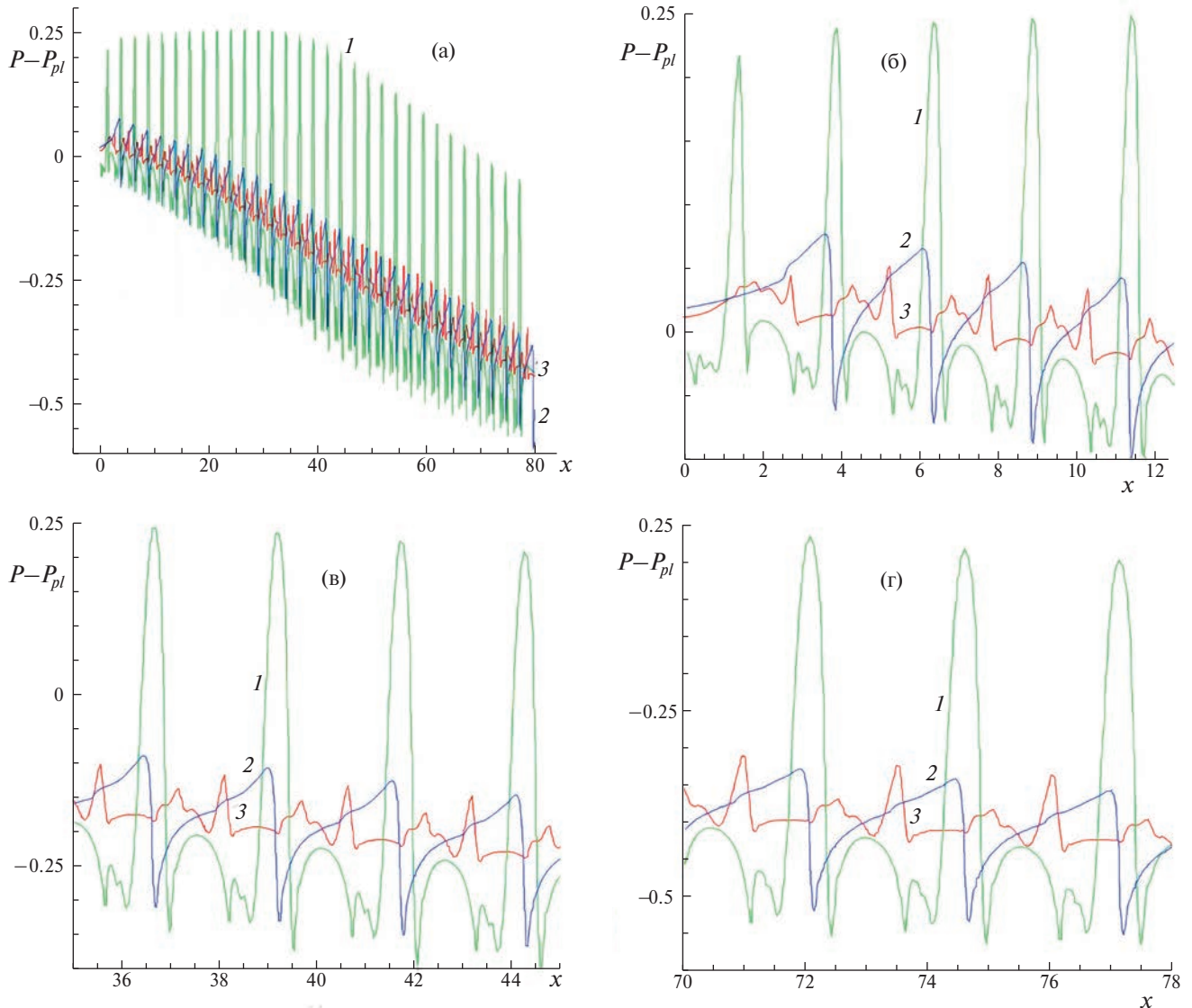


Рис. 3. Сравнение распределений перепада статического давления $P - P_{pl}(x)$ в трех продольных сечениях канала (а) с 31 канавками и в укрупненных фрагментах во входном (б), среднем (в) и выходном (г) участках: z на кривых 1–3 – то же, что на рис. 2.

На последнем участке канала наблюдается тенденция к стабилизации характеристик при некотором снижении разброса амплитуд колебаний. Для детального анализа фаз развития, достижения наибольших экстремумов и приближения к стабилизации течения в канале представляются укрупненные фрагменты $f/f_{pl}(x)$ в районе первой, двадцатой и тридцатой канавок (рис. 2б–г). С этой целью на этих и последующих рисунках рассматриваются входной (протяженностью от 0 до 12.5), средний (от 35 до 45 для относительного трения и перепада давления и от 46 до 56 для относительной осредненной теплоотдачи) и выходной участок (от 70 до 78).

Как видно по рис. 2, входящий в канал равномерный поток в пристеночном слое у структурированной стенки трансформируется в сдвиговой. В районе входов в канавки (кривые 1) экстремальные величины относительного трения характеризуются наибольшим разбросом, причем минимальные величины на дне канавок уменьшаются от -1.5 до -3.3 (более чем вдвое), а максимальные величины на наветренных кромках возрастают с 6.7 до 9.3 (примерно в 1.4 раза). К концу канала эти характеристики слегка корректируются, приближаясь к -3.2 и к 8 соответственно.

Важно отметить, что на всем протяжении канала в промежутках между канавками относительное трение сохраняется на примерно одном и том уровне, близком к $2-2.5$. Таким образом, наблюдается усиление

аномальной интенсификации отрывного течения в удаленных от входа канавках по сравнению с единичными канавками [26], что свидетельствует об увеличении интенсивности смерчей в канавках.

Распределения $f/f_{pl}(x)$ во втором продольном сечении канала отражают торможение пристеночного канального течения в окрестности выхода потока из канавки (кривые 2 на рис. 2). Отмечается резкое (двукратное) снижение максимальных амплитуд относительного трения в сравнении с первым сечением. Тем не менее просматривается тенденция к некоторому росту градиентов скорости. Так, $(f/f_{pl})_{\max}$ увеличивается с 3.5 до 4.5 к середине канала, а затем стабилизируется на уровне 4.

Внутри канавок в донной части на выходе из них наблюдается слабое возвратное течение на всей длине канала. И, наконец, срединное сечение (кривые 3) характеризуется максимальными амплитудами относительного трения, приближающимся к 4 в конце канала. Интересно отметить, что в донной части канавок трение положительное и в самих канавках сохраняется проточное течение с максимальным f/f_{pl} порядка 1. Также следует подчеркнуть, что в промежутках между канавками средний уровень относительного трения увеличивается с 1.5 до 2.

Эволюция перепадов статического давления $P-P_{pl}(x)$ в трех вышеуказанных продольных сечениях нижней стенки канала представлена на рис. 3.

Как и распределения $f/f_{pl}(x)$, зависимости $P-P_{pl}$ от продольной координаты x носят волнообразный колебательный характер. Максимальные величины перепадов давления возникают на наветренных склонах наклонных канавок, а минимальные (отрицательные) величины наблюдаются в их донных частях.

Интересно отметить, что наибольшие величины перепадов давления в первом продольном сечении быстро нарастают в первых трех канавках с 0.2 до 0.23, а затем медленно достигают максимального значения 0.24 в 12-й канавке и к 20-й канавке уменьшаются до 0.2, далее переходя на монотонное линейное снижение к выходному сечению из канала до уровня -0.05 . При этом минимальные отрицательные величины перепадов давления в донных частях канавок в продольном сечении по мере отхода от начала структурированного участка уменьшаются с увеличением амплитуды до 12-й канавки с умеренным темпом и в дальнейшем амплитуды колебаний сохраняются.

В то же время максимальные и минимальные величины $P-P_{pl}$ во втором и третьем (срединном) сечениях монотонно убывают по длине канала по закону, близкому к линейному. Амплитуды колебаний перепадов давления в этих сечениях кардинально ниже, чем в первом сечении.

Интересно отметить, что в промежутках между канавками в первом сечении возникают куполообразные распределения статического давления с максимумами, уменьшающимися по близкой к линейной зависимости. В целом по мере продвижения по пакету канавок перепады давления между зонами торможения на наветренном склоне и областями отрицательного давления в донных частях от 1-й до 20-й канавки увеличиваются примерно от 0.25 до 0.55 и далее незначительно снижается до 0.5 на выходе из структурированного участка.

Сравнение распределений интегральных и локальных относительных чисел Нуссельта на структурированной продольной полосе и трех указанных продольных сечениях стенки канала с наклонными канавками, рассчитанных при двух типах граничных условий: $q = \text{const}$ и $T = \text{const}$, проводится на рис. 4–7.

Осреднение по поперечным полосам структурированной стенки канала $\text{Num}/\text{Num}_{pl}(x)$ является общепринятым в расчетных и экспериментальных исследованиях (см., напр., работы [2–14]) и представляет собой своеобразную свертку по поперечной координате z относительных чисел Нуссельта Nu/Nu_{pl} , распределенных по поверхности нижней стенки (рис. 4).

Для длинного участка канала с характерным отношением длины к ширине 20 к 1 эта зависимость определяет изменение осредненной тепловой нагрузки вдоль канала. Как и распределения поверхностных локальных величин трения и давления в продольных сечениях канала, эта зависимость имеет волнообразный колебательный характер с быстрым ростом на входном участке, начиная с первой канавки, достиганием наибольшей теплоотдачи в середине (20-й максимум) и последующим снижением к выходной части (к 30-й канавке).

Максимумы и минимумы локальных осцилляций относительной теплоотдачи приходятся на проекции наклонных наветренных и подветренных кромок канавок на боковые грани канала. Они хорошо демонстрируются на укрупненных фрагментах зависимости $\text{Num}/\text{Num}_{pl}(x)$ для отмеченных участков нагретой стенки на рис. 4в–д.

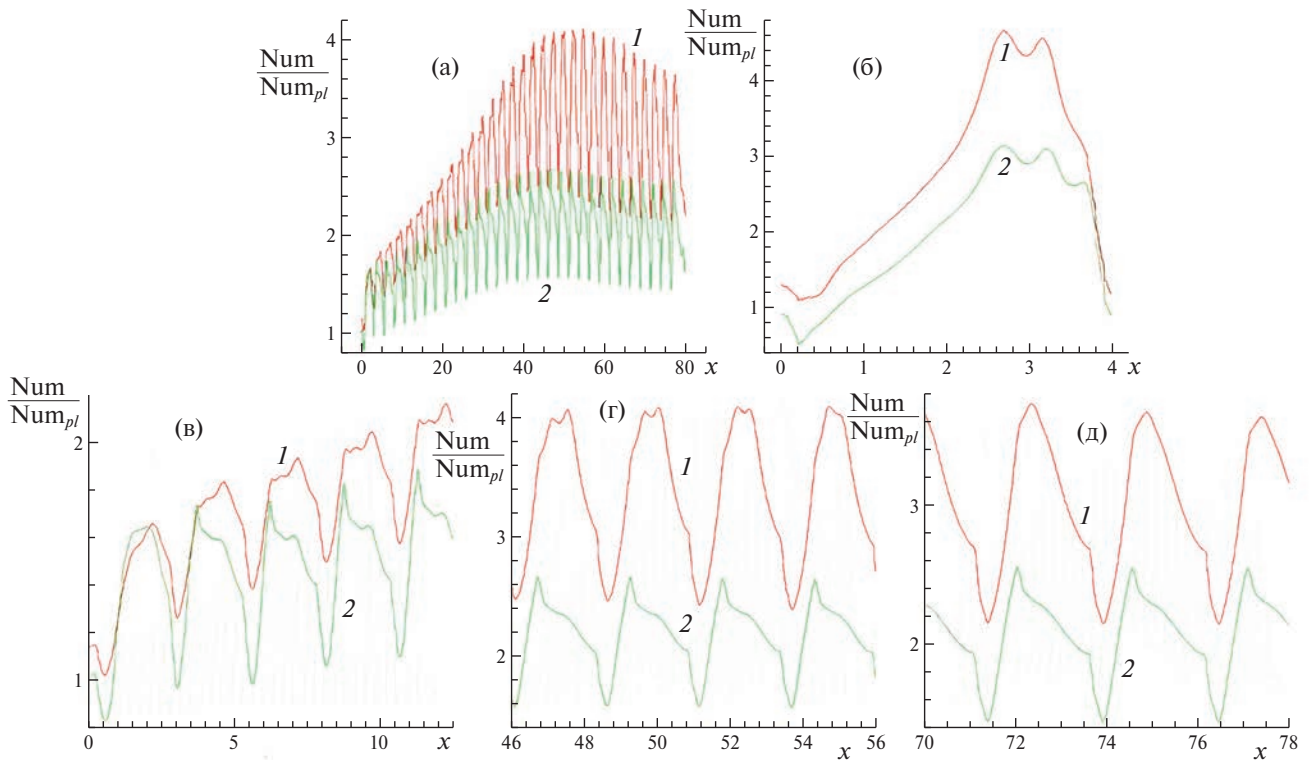


Рис. 4. Сравнение проинтегрированных по поперечным (а, в–д) и продольным (б) полосам распределений Num/Num_{pl} на нагретой стенке канала при граничных условиях $q = \text{const}$ (1) и $T = \text{const}$ (2). Укрупненные фрагменты $Num/Num_{pl}(x)$ соответствуют входному (в), среднему (г) и выходному (д) участкам канала.

Прежде всего следует отметить влияние на осредненную по полосе относительную теплоотдачу заданного типа граничных условий. Прогнозируемые максимальные амплитуды колебаний $(Num/Num_{pl})_{\text{max}}$ при $q = \text{const}$ и $T = \text{const}$ практически одинаковые в окрестности первой канавки к 20-му пику различаются в 1.56 раза на условно среднем участке, и далее к 30-й канавке это отличие снижается примерно в 1.5 раза.

Темп возрастания максимумов относительной теплоотдачи при $q = \text{const}$ после 10-го пика заметно увеличивается в сравнении с линейным возрастанием от 1-й канавки, а после 14-15-го пика уменьшается, стремясь к нулю при достижении наибольшего 20-го пика.

К выходному участку осредненная относительная теплоотдача понижается, но выход на стабилизированный участок по теплообмену не наблюдается. При использовании условий $T = \text{const}$ достижение наибольшей величины Num/Num_{pl} проходит быстрее (к 18-му пику, соответствующему среднему участку для трения и перепада давления).

Осреднение поверхностных чисел Нуссельта Nu/Nu_{pl} по продольным полосам и построение распределений $Num/Num_{pl}(z)$ позволяет определить наиболее теплонапряженные зоны нагретой стенки канала (рис. 4б).

Хотя в представленных кривых нет осцилляций, характерных для зависимостей на рис. 4а, отмечаются два локальных пика в районах входных участков канавок. Как видно по рис. 4б, правая сторона канала, соответствующая входным участкам канавок, характеризуется наибольшей относительной теплоотдачей. При $q = \text{const}$ максимум достигает 4.7, а при $T = \text{const}$ – 3. Для левой половины канала характерно монотонное снижение относительной осредненной теплоотдачи до близкого к 1 значения для $q = \text{const}$. В случае $T = \text{const}$ вблизи левой границы образуется зона пониженной теплоотдачи с $Num/Num_{pl} < 1$.

Распределения локальных чисел Нуссельта вдоль заданных продольных сечений нагретой стенки показывает значительные различия в интенсификации теплообмена на разных продольных полосах канала (рис. 5–7). На полосе, проходящей через сечения стыковочных входных сферических сегментов с цилиндрической траншеей, отмечается затянутый рост относительной теплоотдачи к максимуму порядка 16.5 в районе 26-й канавки (при $q = \text{const}$).

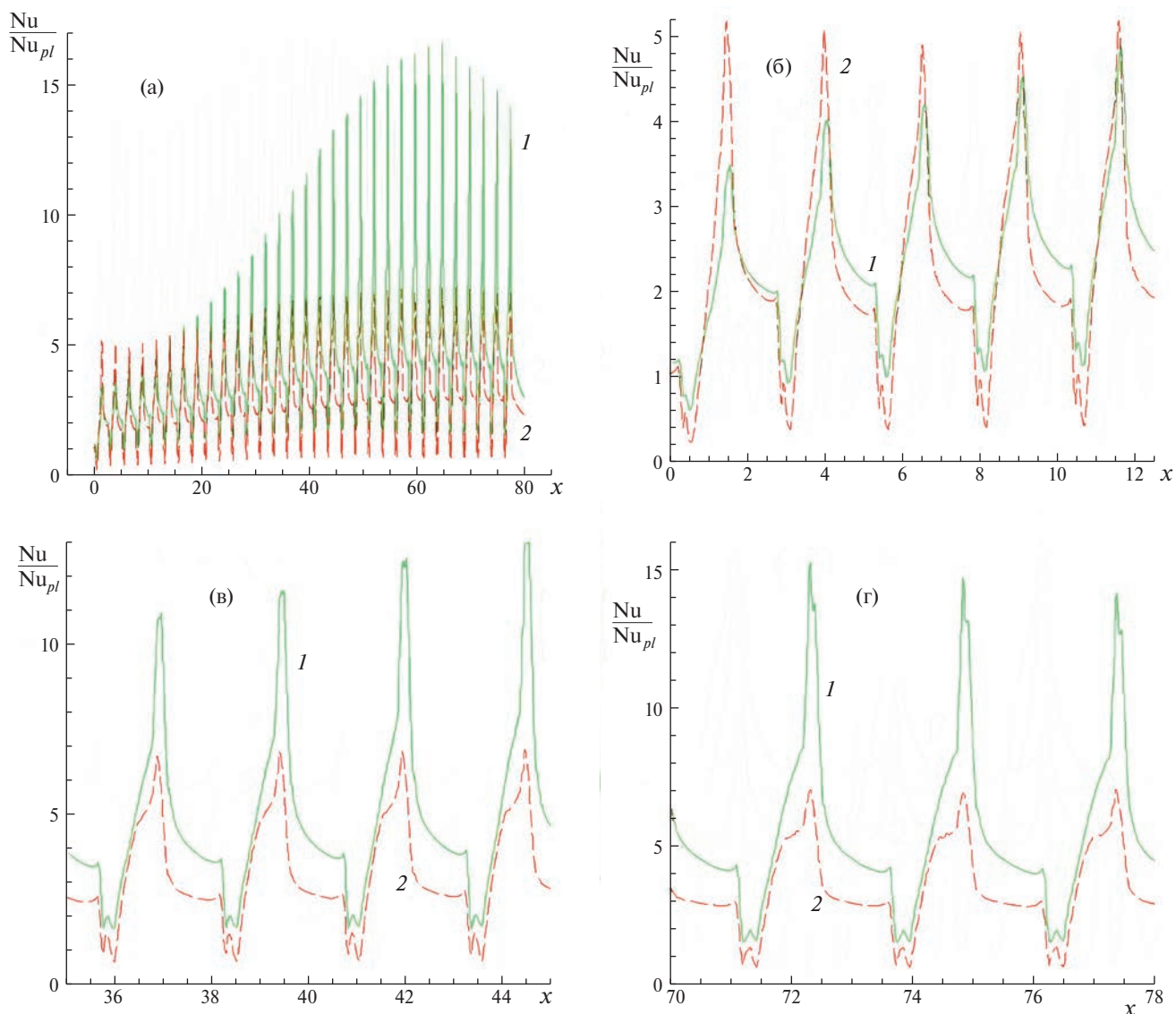


Рис. 5. Сравнение распределений локальных Nu/Nu_{pl} вдоль продольного сечения при $z = 1.245$ (а) для граничных условий $q = \text{const}$ (1) и $T = \text{const}$ (2). Укрупненные фрагменты $Nu/Nu_{pl}(x)$ соответствуют тем же участкам канала, что на рис. 4.

В срединном сечении канала 7-кратный рост относительной теплоотдачи наблюдается к 17-й канавке, а на крайней полосе, проходящей через стыковочное сечение выходного сферического сегмента и цилиндрической траншеи у левой границы, $(Nu/Nu_{pl})_{\text{max}}$ растет до 3.2 к 18-й канавке. Таким образом, интенсивность теплообмена падает вдвое при перемещении от сечения 1 к срединному сечению 3 и затем еще вдвое при смещении к сечению 2 у левой границы.

Колебания локального числа Нуссельта коррелируют с колебаниями относительного трения. Пиковые значения достигаются на наветренных краях канавок. За ними располагаются участки между канавками, на которых относительная теплоотдача снижается с различным темпом для разных граничных температурных условий: быстро для $q = \text{const}$ и более плавно для $T = \text{const}$.

Поведение теплоотдачи в канавках различно от сечения к сечению. В первом сечении относительная теплоотдача низкая на подветренных склонах канавок, а на дне и наветренных склонах быстро возрастает, переходя в пиковые величины на кромке. В среднем (3-м) сечении на дне канавок достигается ярко выраженный значительный максимум относительной теплоотдачи, сопоставимый и превосходящий уровень теплоотдачи перед канавкой. В крайнем левом (2-м) сечении максимумы относительной теплоотдачи на дне канавок сохраняются, но имеют меньшие величины в сравнении с 3-м сечением.

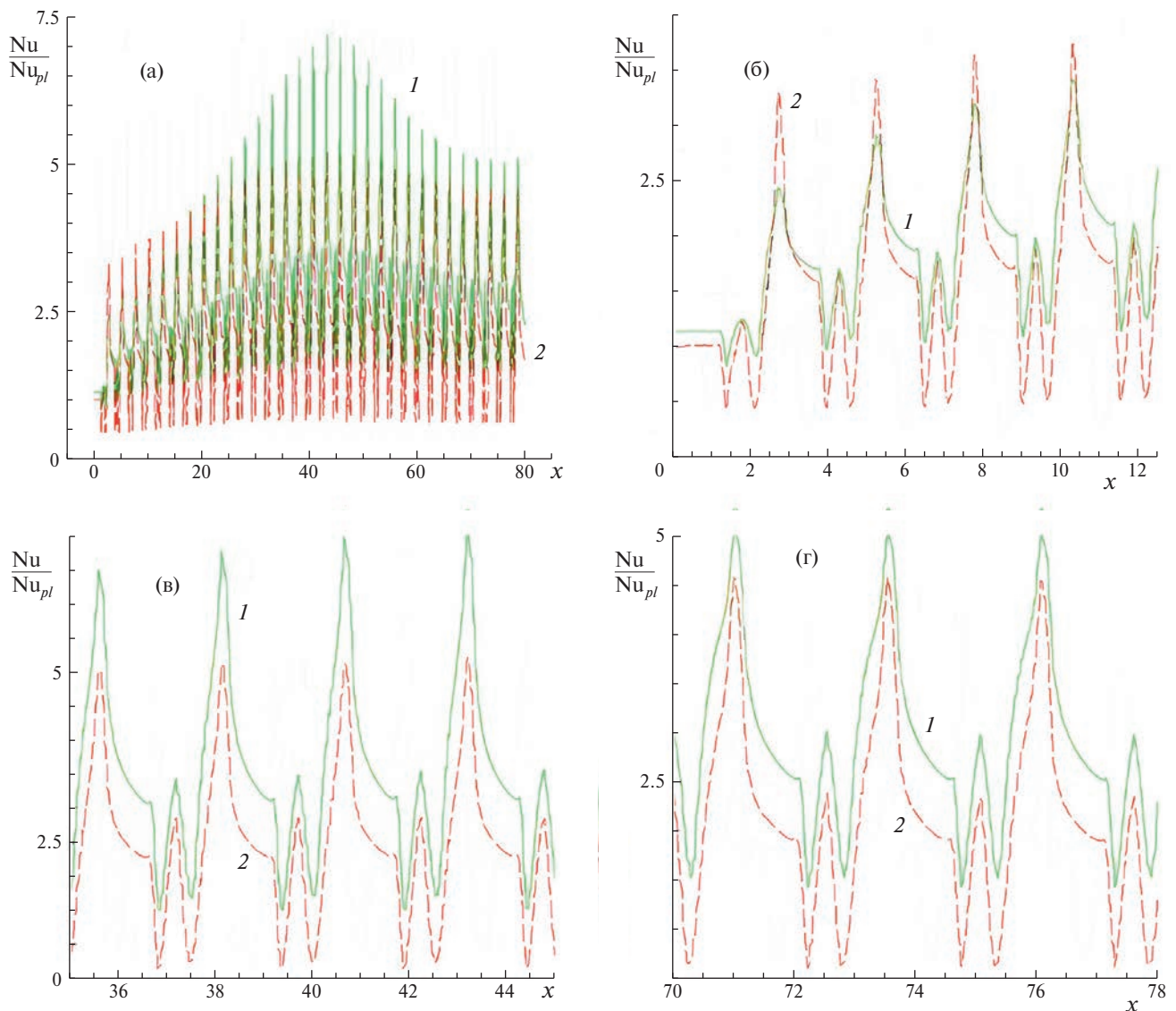


Рис. 6. Сравнение распределений локальных Nu/Nu_{pl} вдоль продольного сечения при $z = 0$ (а) для граничных условий $q = \text{const}$ (1) и $T = \text{const}$ (2). Укрупненные фрагменты $Nu/Nu_{pl}(x)$ соответствуют тем же участкам канала, что на рис. 4.

Вторая часть статьи посвящена анализу эволюции отрывного течения и теплообмена в избранных наклонных канавках подобно тому, как в работе [14] детально исследовался прямоугольный участок, ограничивающий контур единичной канавки. Сравнение полей поверхностных характеристик, таких как относительное трение f/f_{pl} , перепады статического давления $P - P_{pl}$, относительные числа Нуссельта Nu/Nu_{pl} , проводится при рассмотрении 1-й, 20-й и 30-й наклонных канавок. Динамика изменения локальных и интегральных характеристик течения и теплообмена изучается при анализе дискретного ряда канавок с номерами 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Сравнение полей относительного трения на рис. 8а—в дополнено картинками траекторий жидких частиц в пристеночном слое поверхности канавки, иллюстрирующими растекание потока по криволинейной стенке канала и аналогичными саже-масляным картинкам визуализации вихревых структур в физических экспериментах. Внутри канавок в зонах течения с отрывом потока на подветренной кромке и присоединением его к наветренной кромке развиваются сложные пространственные струйно-вихревые структуры, детально проанализированные в работах [5, 6, 13, 26–28].

Следы на картинах растекания позволяют идентифицировать их. Растекание на наветренном склоне от точки торможения входящего в наклонную канавку внешнего потока вызывает формирование во вход-

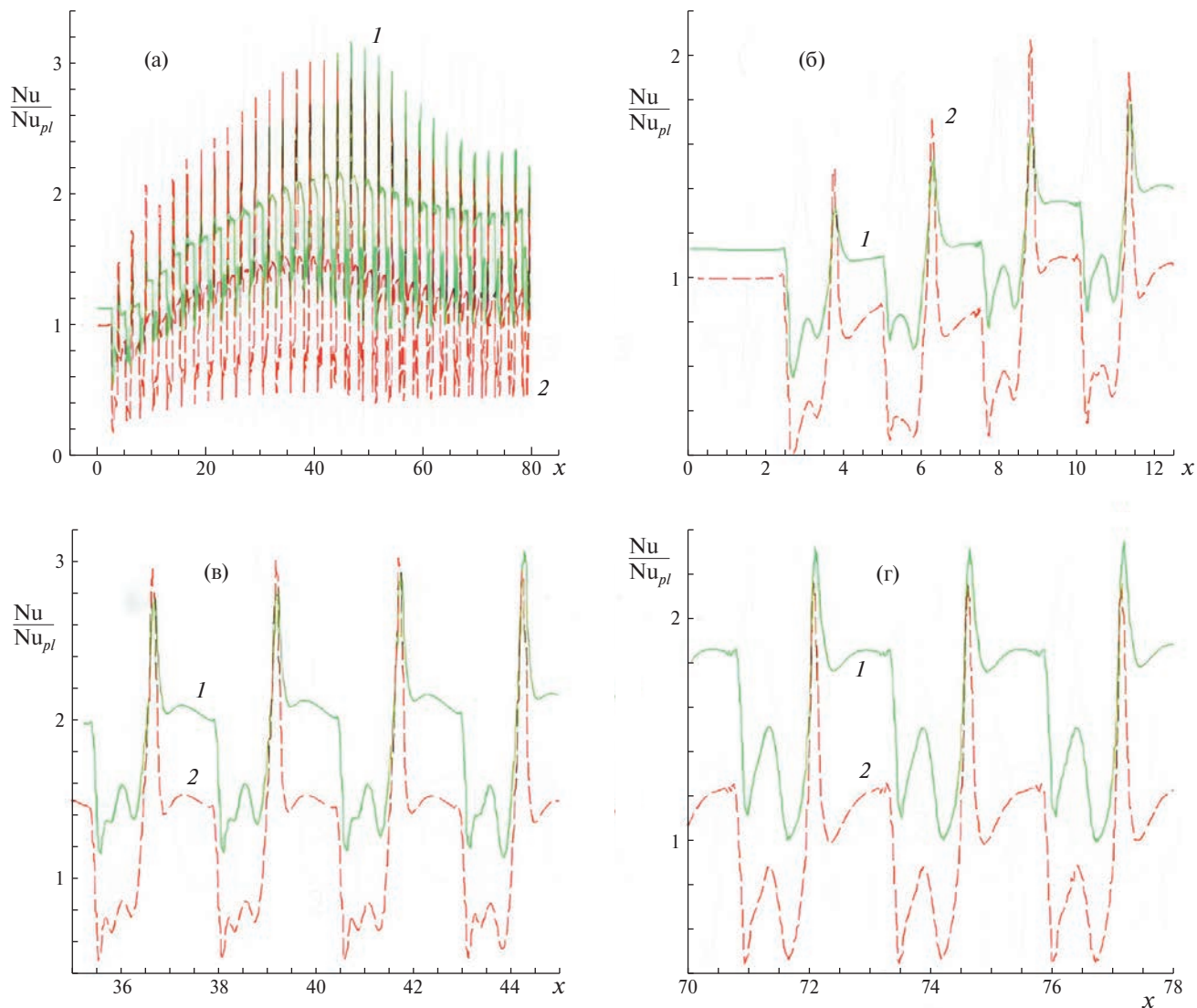


Рис. 7. Сравнение распределений локальных Nu/Nu_{pl} вдоль продольного сечения при $z = -1.245$ (а) для граничных условий $q = \text{const}$ (1) и $T = \text{const}$ (2). Укрупненные фрагменты $Nu/Nu_{pl}(x)$ соответствуют тем же участкам канала, что на рис. 4.

ной части канавок малоразмерной зоны возвратных токов высокой интенсивности. При обсуждении распределений относительного трения в продольных сечениях канала на рис. 2 внимание обращено на ультранизкие величины f/f_{pl} , доходящие до -4 .

Как видно по рис. 8а–в, узкие зоны с такими величинами относительного трения возникают в удаленных наклонных канавках на дне и наветренных склонах. Возвратные токи транспортируют воздух в район особой точки типа фокус на сферическом сегменте, являющимся ядром смерча [27]. На дне каждой из рассмотренных канавок образуется протяженная криволинейная линия отрыва пристеночного потока от точки торможения (детальный анализ ее возникновения дан в работе [28]).

Оторвавшийся поток взаимодействует с подветренным склоном, формируя точку растекания, и, таким образом, возникает не обладающая высокой интенсивностью эжекция воздуха к смерчу, формируется протяженный спиралевидный вихрь в окрестности наветренной передней кромки каждой из канавок. Линии тока на наветренном склоне, которые отражают растекание воздуха от точки торможения, являются следами мощного закрученного потока, развивающегося в каждой из канавок. Кстати, удаленные канавки в отличие от первой характеризуются возросшим уровнем относительного трения в центральной части канавок.

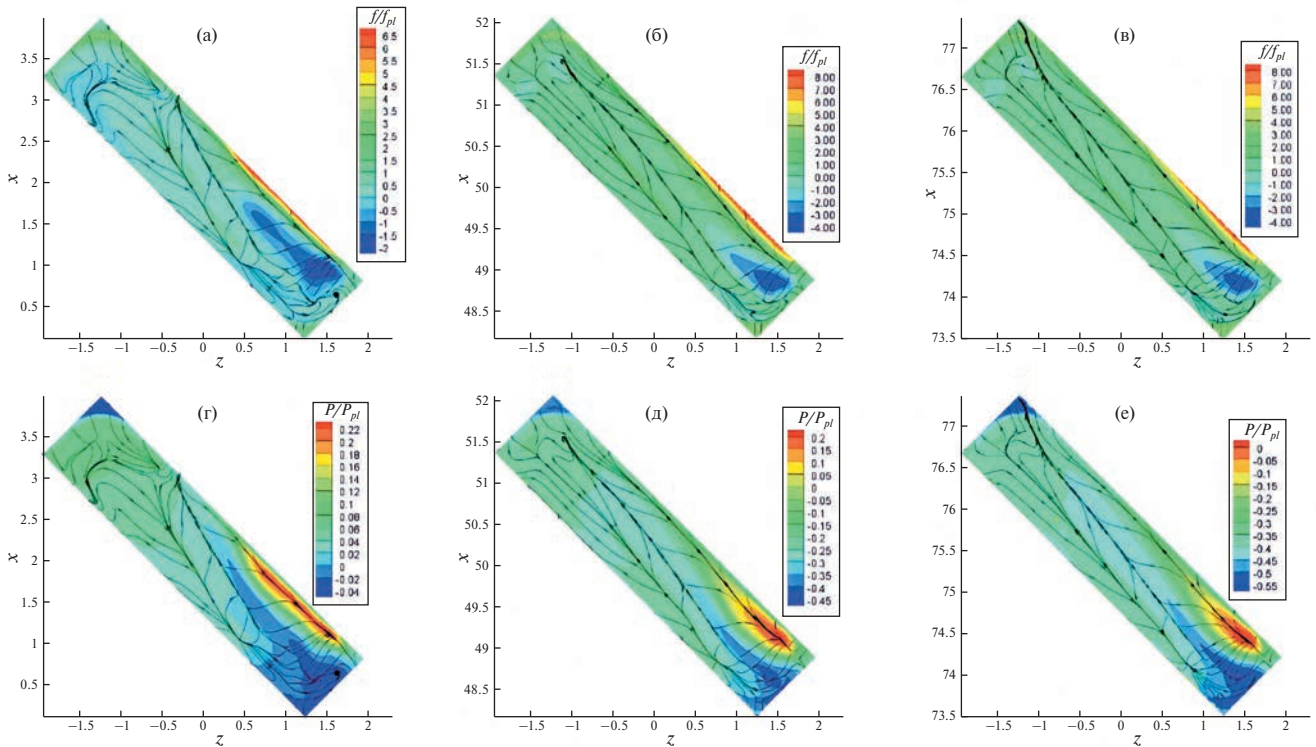


Рис. 8. Сравнение поверхностных распределений относительного трения f/f_{pl} (а–в) и перепадов относительного статического давления $P-P_{pl}$ (г–е) для первой (а, г), 20-й (б, д) и 30-й (в, е) канавок.

Перепады статического давления $P-P_{pl}$ между точками криволинейной стенки структурированного канала и точками с теми же координатами x, z на соответствующей нагретой стенке плоскопараллельного канала не вполне отражают перепады давления внутри канавок. Все же, как следует из рис. 3, давление в канале с канавками падает быстрее, чем в гладком канале. Поэтому помимо полей давления на рис. 8г–е здесь представлена табл. 2 сосредоточенных перепадов давления ΔP между максимумами давления P_{max} на наветренном склоне и минимумами отрицательного давления P_{min} на дне 1-, 5-, 10-, 15-, 20-, 25-, 30-й канавок, полученных обработкой прогнозов в первом продольном сечении канала (см. рис. 3).

Чрезвычайно любопытно, что мощные закрученные потоки внутри отрывных зон в канавках развиваются в условиях противодействия. Ведь во входных частях наклонных канавок имеет место мощное разрежение благодаря сгенерированным смерчам. А на выходах из канавок давление довольно высокое.

Таблица 2. Сосредоточенные перепады давления на дне избранных канавок

Параметр	Номер канавки						
	1	5	10	15	20	25	30
ΔP	0.245	0.335	0.436	0.555	0.575	0.540	0.500
P_{max}	0.215	0.245	0.251	0.245	0.170	0.065	-0.035
P_{min}	-0.03	-0.09	-0.185	-0.31	-0.405	-0.475	-0.535

Перепады давления ΔP в канавках растут по мере их удаления от входа, достигая максимума (0.575) к 20-й канавке с более чем двукратным превосходством над первой канавкой (0.245), а затем слегка снижаются к 30-й канавке (на величину примерно 13%).

Распределения локальных поверхностных характеристик относительного трения, перепадов давления, относительной температуры (при $q = const$) в срединных сечениях выбранных наклонных канавок на рис. 9 дополняют картины полей f/f_{pl} и $P-P_{pl}$ на рис. 8 и иллюстрируют эволюцию отрывного течения в наклонных канавках по мере их удаления от входа.

Усиление аномальной интенсификации отрывного течения в канавках отражает резкое уменьшение минимума f/f_{pl} (рис. 9а) в их входных частях: от -1 в первой канавке до -3.5 в 20-й. К 30-й канавке мини-

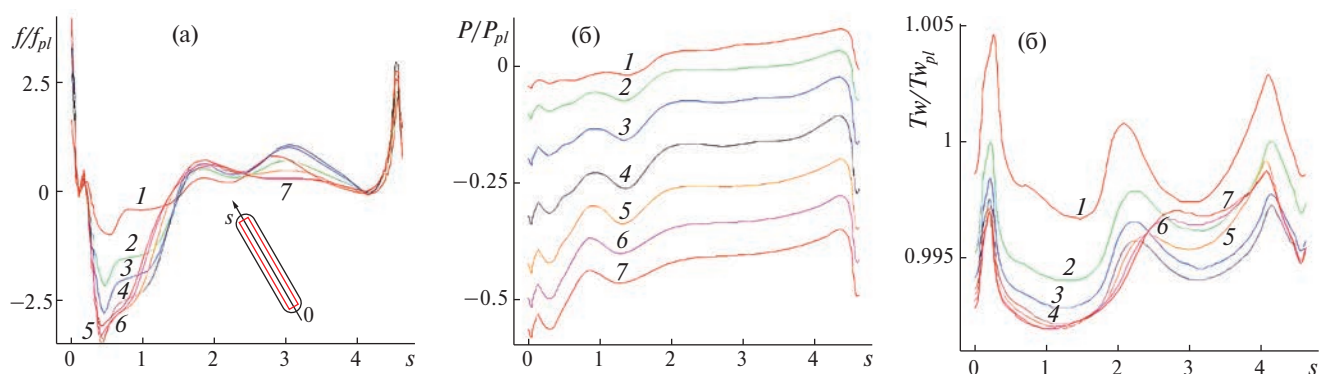


Рис. 9. Сопоставление поверхностных распределений относительного трения f/f_{pl} (а), перепада давления $P-P_{pl}$ (б) и относительной температуры $T_w/T_{w_{pl}}$ (в) при $q = \text{const}$ в срединном сечении выбранной канавки: 1 – 1-я; 2 – 5-я; 3 – 10-я; 4 – 15-я; 5 – 20-я; 6 – 25-я; 7 – 30-я.

мум f/f_{pl} несколько подрастает до -3 . С удалением от входа в канал в канавках заметно сокращается зона возвратных токов.

Два локальных максимума отмечаются в зависимостях $f/f_{pl}(s)$, причем первый располагается сразу же за областью отрыва в начале проточного участка, а второй возникает сразу за центром канавки. Начиная с 5-й канавки первый максимум находится в диапазоне $0.5-0.7$. А второй максимум в 10–15-й канавках достигает 1, а затем довольно резко снижается и исчезает в 25–30-й канавках, где f/f_{pl} стабилизируется на уровне 0.3. В конце канавок в срединном сечении отмечается незначительное пятно отрицательного трения, которое пропадает только к 30-й канавке.

Пик относительного трения на задней кромке канавки подрастает с 2 (1-я канавка) до 3 (15-я канавка) и затем монотонно снижается примерно до 2.5. Отмечается некоторое увеличение f/f_{pl} в районе передних кромок канавок в пределах $0.2-0.5$.

Как отмечалось ранее, статическое давление в структурированном канале падает более быстрым темпом, чем в гладком и поэтому кривые распределений $P-P_{pl}$ для выбранных канавок на рис. 9б располагаются лесенкой с последовательным уменьшением максимальных и минимальных величин. При сохранении характера зависимостей следует подчеркнуть, что с удалением канавок от входа в канал уровень разрежения во входных частях канавок понижается.

Зависимости относительной температуры в срединных сечениях канавок при $q = \text{const}$ на рис. 9в показывают тенденцию к захлаживанию поверхностей от 1-й до 15-й канавки. Для последующих канавок эта тенденция сохраняется на входных участках, а вот в выходных половинах канавок температура на дне растет. Пик относительной температуры на входной кромке, который в первой канавке свидетельствует о ее нагреве по сравнению с гладкой стенкой, с удалением от входа в канал постепенно уменьшается, оставаясь меньше единицы.

Интересно отметить, что пики $T_w/T_{w_{pl}}$ в серединах канавок снижаются к 15-й канавке, а с 20-й начинают возрастать со смещением к выходам из канавок. Величины пиков относительной температуры в районах концевых кромок канавок с их удалением от входа монотонно снижаются от перегрева к захлаживанию до 15-й канавки. Начиная с 20-й канавки наблюдается небольшой скачок пиковой температуры с последующим ее уменьшением.

Сравнение эволюций картин локальных относительных чисел Нуссельта Nu/Nu_{pl} , распределенных по поверхностям выбранных наклонных канавок, для разных типов температурных граничных условий представляется на рис. 10. Как и в случае рис. 8, анализируются 1-я, 20-я и 30-я канавки.

На картины распределений Nu/Nu_{pl} нанесены линии тока в пристеночном слое, иллюстрирующие вихревые особенности течения в канавках. Многоцветная интерпретация полей относительной теплоотдачи позволяет четко установить зоны интенсивного относительного теплообмена с $Nu/Nu_{pl} \geq 1$ и определить зоны угнетенного теплообмена с относительными числами Нуссельта, не превосходящими единицу.

В первой канавке на стенке канала, как отмечалось для единичной канавки в работе [14], при $q = \text{const}$ Nu/Nu_{pl} в донной части, на подветренном склоне и в концевой выходной части внутренней поверхности канавки оказываются заметно выше, чем при $T = \text{const}$.

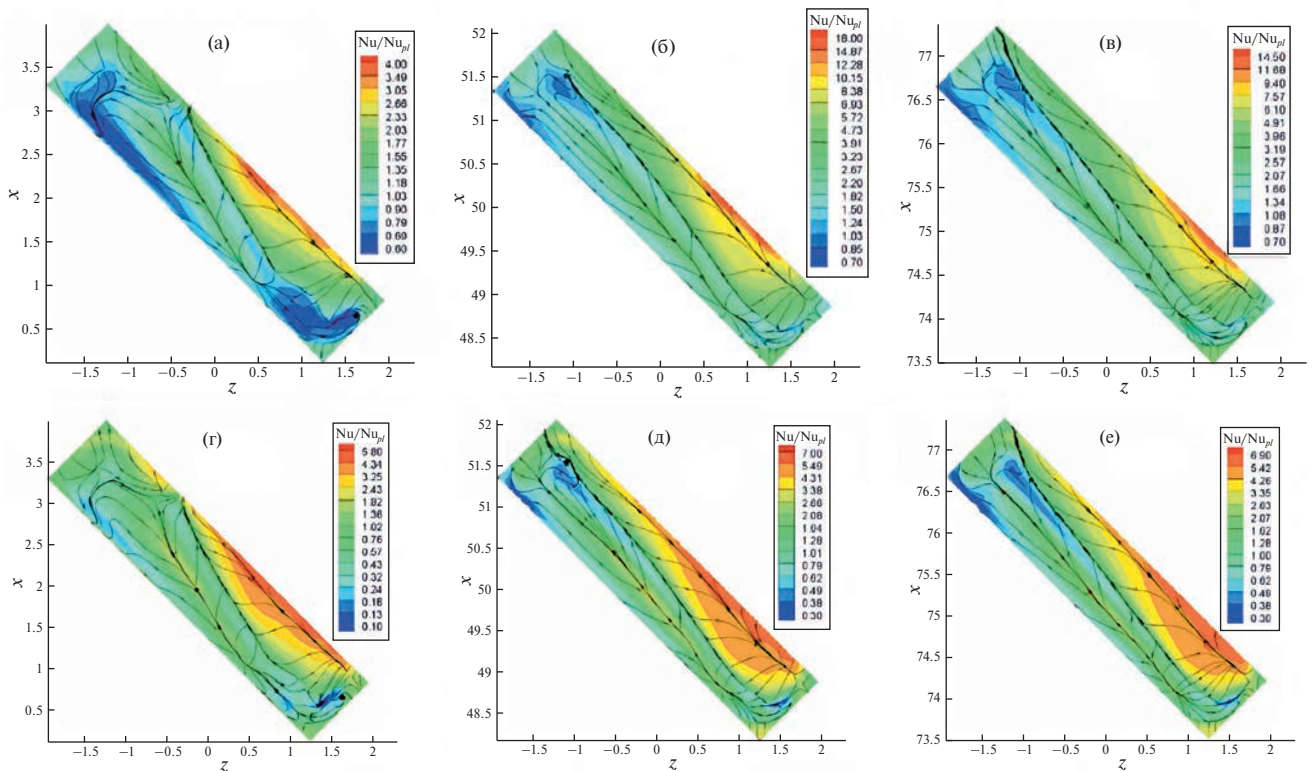


Рис. 10. Сравнение поверхностных распределений относительного числа Нуссельта Nu/Nu_{pl} при граничных условиях $q = \text{const}$ (а–в) и $T = \text{const}$ (г–е) для тех же канавок, что на рис. 8.

Интересно отметить, что область интенсивного теплообмена простирается выше протяженной линии вторичного отрыва потока на дне, формирующегося от точки торможения на наветренном склоне. В случае $q = \text{const}$ протяженная зона с $Nu/Nu_{pl} \geq 1$ возникает в окрестности распространяющегося вдоль подветренного склона спиралевидного вихря. Для $T = \text{const}$ она оказывается сильно уменьшенной.

И еще одно интересное наблюдение. В выходной части канавки зона ослабленного теплообмена образуется в окрестности подветренной кромки и сохраняется во всех наклонных канавках.

В 20-й канавке наблюдается максимальная осредненная по продольной полосе относительная теплоотдача (см. рис. 4). При $q = \text{const}$ практически для всей ее поверхности, включая зону ядра смерча, $Nu/Nu_{pl} > 1$. Максимальная относительная теплоотдача на наветренной кромке не совпадает с точкой торможения и достигает 18, превосходя аналогичный максимум первой канавки в 4.5 раза. В 30-й канавке теплообмен несколько ослабевает, $(Nu/Nu_{pl})_{\text{max}}$ снижается до 14.5.

Интересно отметить, что для канавок с высоким уровнем теплоотдачи зона интенсивного теплообмена внутри канавок расширяется и удлиняется по сравнению с первой канавкой и простирается по всему наветренному склону до конца канавки. При $T = \text{const}$ заметно интенсифицируется теплообмен на подветренном склоне удаленных от входа канавок. Для первой канавки максимум относительной теплоотдачи в этом случае оказывается выше, чем при $q = \text{const}$. Для удаленных канавок прогнозы $(Nu/Nu_{pl})_{\text{max}}$ при $q = \text{const}$ более чем вдвое выше, чем при $T = \text{const}$.

Эволюция распределений локальной и проинтегрированной по поперечным полосам относительной теплоотдачи в продольном s и поперечном t направлениях в выбранных канавках представлена на рис. 11 для различных типов температурных граничных условий $q = \text{const}$ и $T = \text{const}$. Как и на рис. 9 здесь выбраны 1-, 5-, 10-, 15-, 20-, 25-, 30-я канавки.

Аналогично материалам, показанным на рис. 4–7, анализируются зависимости Nu/Nu_{pl} по продольной координате s , зависимости $Num/Num_{pl}(s)$ и $Num/Num_{pl}(t)$. Поведение указанных характеристик на рис. 11 показывает, что их характер не зависит от типа температурных граничных условий. Растущие с удалением от входа канала пики относительной локальной теплоотдачи наблюдаются на входных участках канавок, а опадающие пики тепловых нагрузок – в концевых выходных частях.

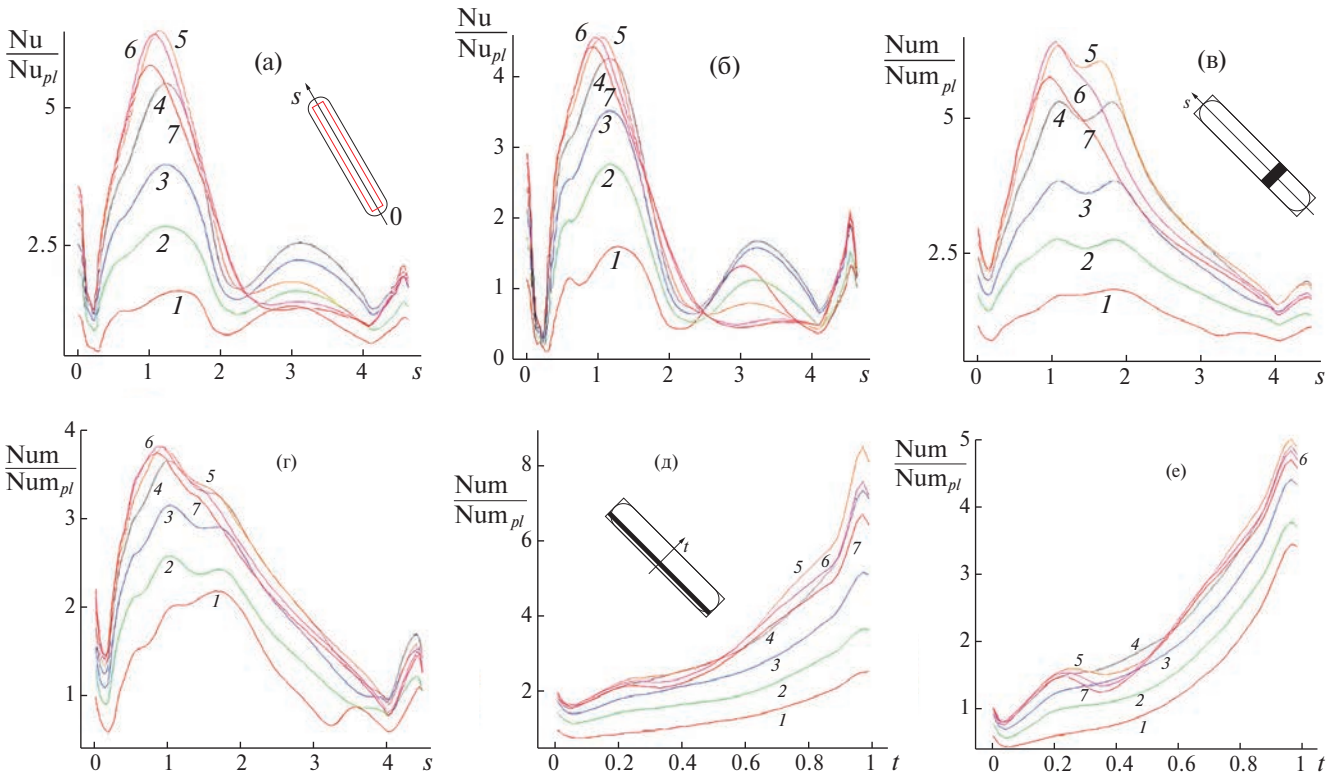


Рис. 11. Сопоставление распределений локальных относительных чисел Нуссельта $Nu/Nu_{pl}(s)$ в срединных сечениях канавок (а, б) и проинтегрированных по поперечным и продольным полосам Num/Num_{pl} вдоль продольной s (в, г) и поперечной t (д, е) координат выбранных канавок при граничных условиях $q = \text{const}$ (а, в, д) и $T = \text{const}$ (б, г, е): 1 – 1-я; 2 – 5-я; 3 – 10-я; 4 – 15-я; 5 – 20-я; 6 – 25-я; 7 – 30-я.

Отмечается формирование отчетливых при $q = \text{const}$ и слегка сглаженных при $T = \text{const}$ двугорбых распределений проинтегрированных поперек продольных канавок относительных чисел Нуссельта $Num/Num_{pl}(s)$, максимумы которых увеличиваются по мере удаления канавок.

Следует отметить, что после 20-й канавки двугорбые зависимости вырождаются в одногорбые. Восходящие от подветренной к наветренной кромке зависимости проинтегрированных продольным полосам относительных чисел Нуссельта $Num/Num_{pl}(t)$ также постепенно поднимаются от канавки к канавке. Очевидна тенденция к сближению распределений локальной и интегральной относительной теплоотдачи после 15-й наклонной канавки и формирование полосы прогнозов с небольшим разбросом.

Интересно отметить, что при $q = \text{const}$ наибольшие величины максимумов $Nu/Nu_{pl}(s)$ в срединном сечении и $Num/Num_{pl}(s)$ вдоль входного участка одинаковые и достигают 6.5 внутри 20-й канавки, а на ее наветренной кромке $Num/Num_{pl}(t) = 8.5$. При $T = \text{const}$ эти величины уступают указанным в 1.6–1.7 раза. В целом наиболее эффективные зоны в удаленных наклонных канавках находятся на входных участках и на наветренных склонах.

Зависимости интегральных теплогидравлических характеристик выбранных наклонных канавок от их местоположения в канале суммируются на рис. 12 для различных типов температурных граничных условий.

Тепловая эффективность $Numm/Numm_{pl}$, относительные гидравлические потери ξ/ξ_{pl} и теплогидравлическая эффективность $THE = Numm / Numm_{pl} / (\xi / \xi_{pl})^{1/3}$ являются объектом внимания. Там же показана зависимость растущих перепадов статического давления ΔP , представленных в табл. 2.

Взрывной рост относительной теплоотдачи в канале от первой ($Numm / Numm_{pl} = 1.3$) до 20-й канавки, приближающейся к 3.7 при $q = \text{const}$ и к 2.3 $T = \text{const}$, сочетается с умеренным возрастанием относительных гидравлических потерь от 1.45 до 2.2. К 30-й канавке тепловая эффективность в первом случае снижается до 3.2, а во втором – до 2.2 при относительных гидравлических потерях 2.1.

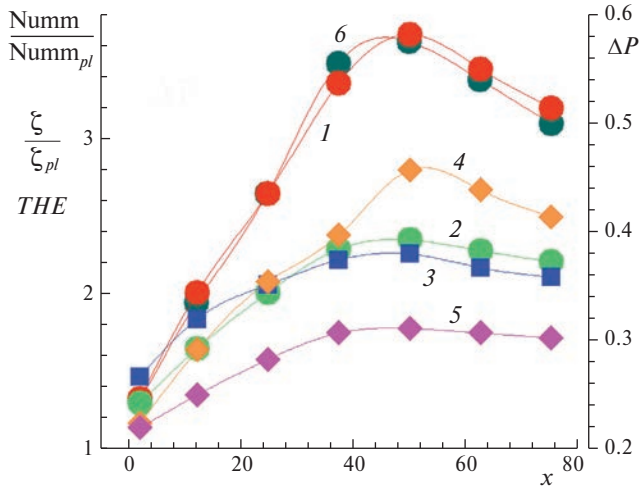


Рис. 12. Зависимости от продольных координат центров 1-, 5-, 10-, 15-, 20-, 25-, 30-й канавок относительной суммарной теплоотдачи $Numm/Numm_{pl}$ (маркированы круглыми точками) для поверхности, ограниченных контурами выбранных канавок (кривые 1, 2), локальных гидравлических потерь участков с выбранными канавками (кривая 3, маркированная квадратными точками) и теплогидравлической эффективности ТГЭ выбранных локальных участков поверхностей (кривые 4, 5, маркированные ромбическими точками) при $q = const$ (1 – красные точки) и $T = const$ (2 – зеленые точки). Здесь же показана зависимость растущих перепадов статического давления ΔP (кривая 6 с круглыми точками), представленных в табл. 2.

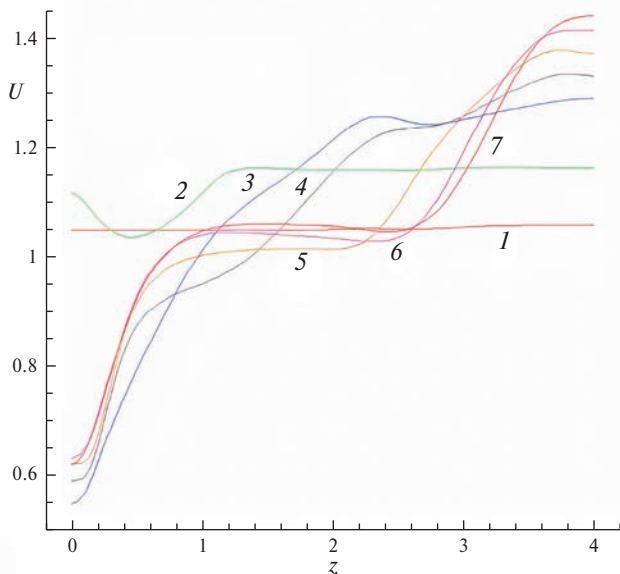


Рис. 13. Трансформация профилей продольной составляющей скорости $U(z)$ в продольных сечениях канала, соответствующих центрам выбранных канавок, при $y = 0.5$: 1 – 1-я; 2 – 5-я; 3 – 10-я; 4 – 15-я; 5 – 20-я; 6 – 25-я; 7 – 30-я.

Максимальная теплогидравлическая эффективность при $q = const$ достигает 2.8, а при $T = const$ – 1.8. Интересно отметить, что оказались качественно близки распределения тепловой эффективности наклонных канавок при $q = const$ и перепады статического давления ΔP в канавках.

Эволюция воздушного потока в канале с наклонными канавками, начиная от первой до 30-й канавки анализируется на рис. 13, 14, где представлены распределения продольной скорости $U(z)$ поперек канала на высоте $y = 0.5$ и сравниваются профили $U(z, y)$ в сечениях канала, соответствующих продольным координатам центров выбранных канавок.

Трансформация равномерного на входе в канал профиля скорости в сдвиговый S-образный профиль в конце канала наблюдается на рис. 13. На разгонном начальном участке канала (от 1-й до 20-й канавки) профиль $U(z)$ постепенно преобразуется в S-образный с формированием плато в середине канала с приближением величины скорости на нем к начальной скорости в ядре, равной 1.05. Таким образом, над входами в канавки скорость нарастает, а максимум скорости на правой границе приближается к 1.5. В то же время на левой границе поток притормаживается и его скорость приближается к 0.63.

Преобразование профиля $U(z, y)$ по мере удаления от входа канала, как видно из рис. 14, имеет переходную фазу, соответствующую начальному разгонному участку до 15-й канавки. На этом интервале профиль из простой ступенчатой формы эволюционирует в сложную с нарастающими выпуклостями и вогнутостями.

Следует учесть, что расход в канале сохраняется неизменным, а значит, локальные ускорения течения в слоях канала, на которые оказывает влияние смерчеобразование во входных участках канавок, должно компенсироваться торможением слоев течения в районах выхода из канавок. Локальное ускорение потока

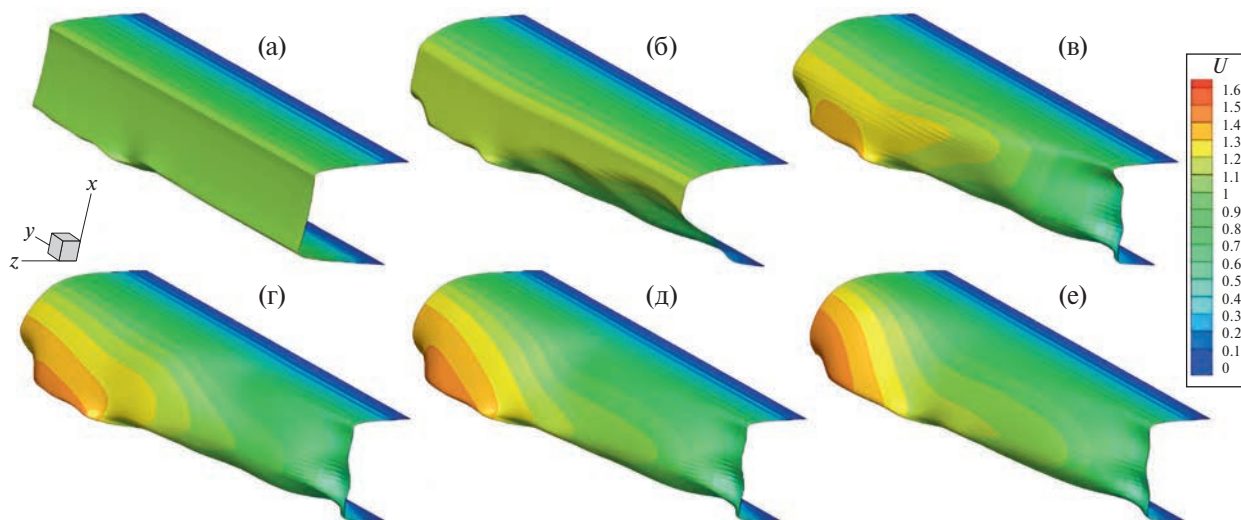


Рис. 14. Эволюция профилей продольной составляющей скорости $U(z, y)$ в продольных сечениях канала, соответствующих центрам выбранных канавок 1-й (а), 5-й (б), 10-й (в), 15-й (г), 20-й (д) и 30-й (е).

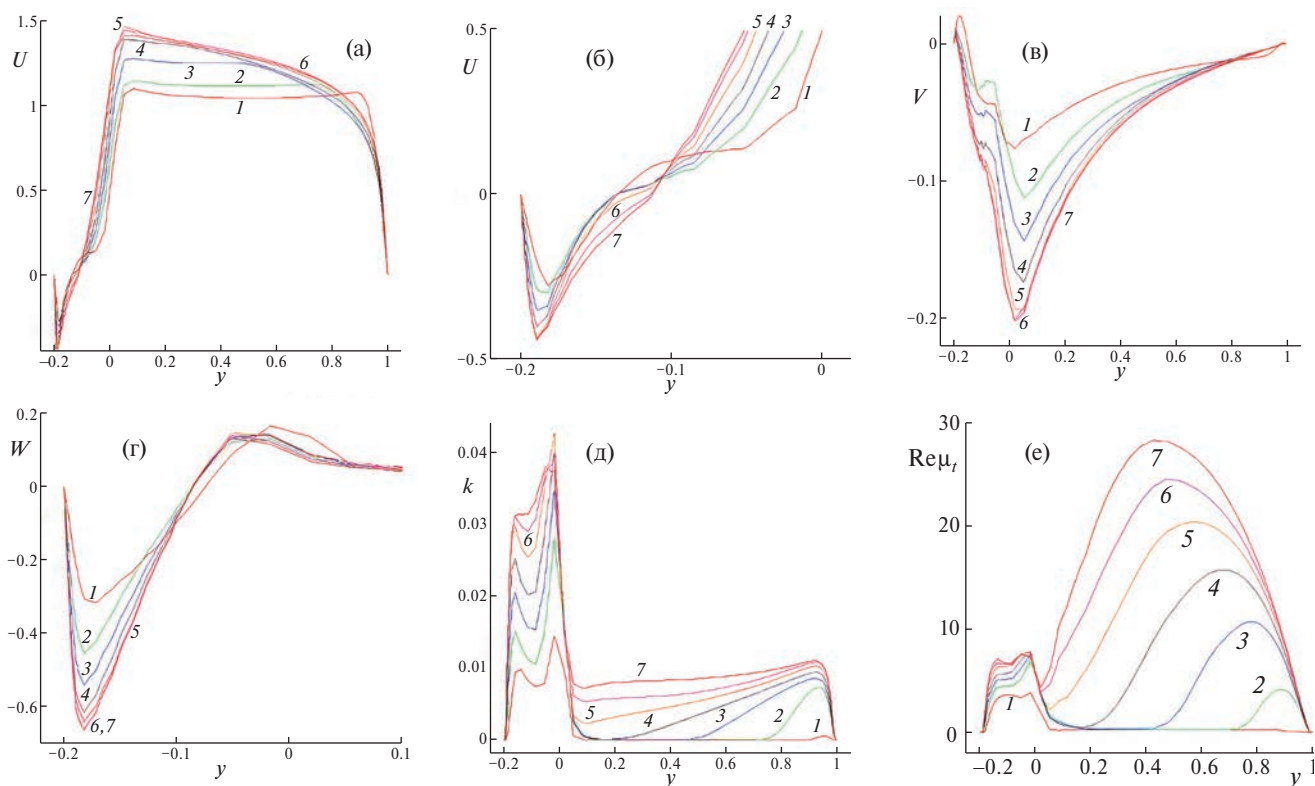


Рис. 15. Сравнение зависимостей от вертикальной координаты y декартовых составляющих скорости U (а, б), V (в), W (г), k (д), Re_{τ} (е) в центрах сечений перехода от входных сферических сегментов к траншейным вставкам выбранных канавок: 1 – 1-й; 2 – 5-й; 3 – 10-й; 4 – 15-й; 5 – 20-й; 6 – 25-й; 7 – 30-й. Графики на рис. 12б построены в крупном масштабе.

над входами в канавки приводит к возникновению в этих местах максимумов скорости порядка 1.6. После 15-й канавки намечается стабилизация профиля скорости со смещением максимума на правую границу канала.

Трансформация профилей декартовых составляющих скорости $U(y)$, $V(y)$, $W(y)$, энергии турбулентности $k(y)$ и нормированной вихревой вязкости $Re_{\tau}(y)$ анализируется в двух характерных точках на дне

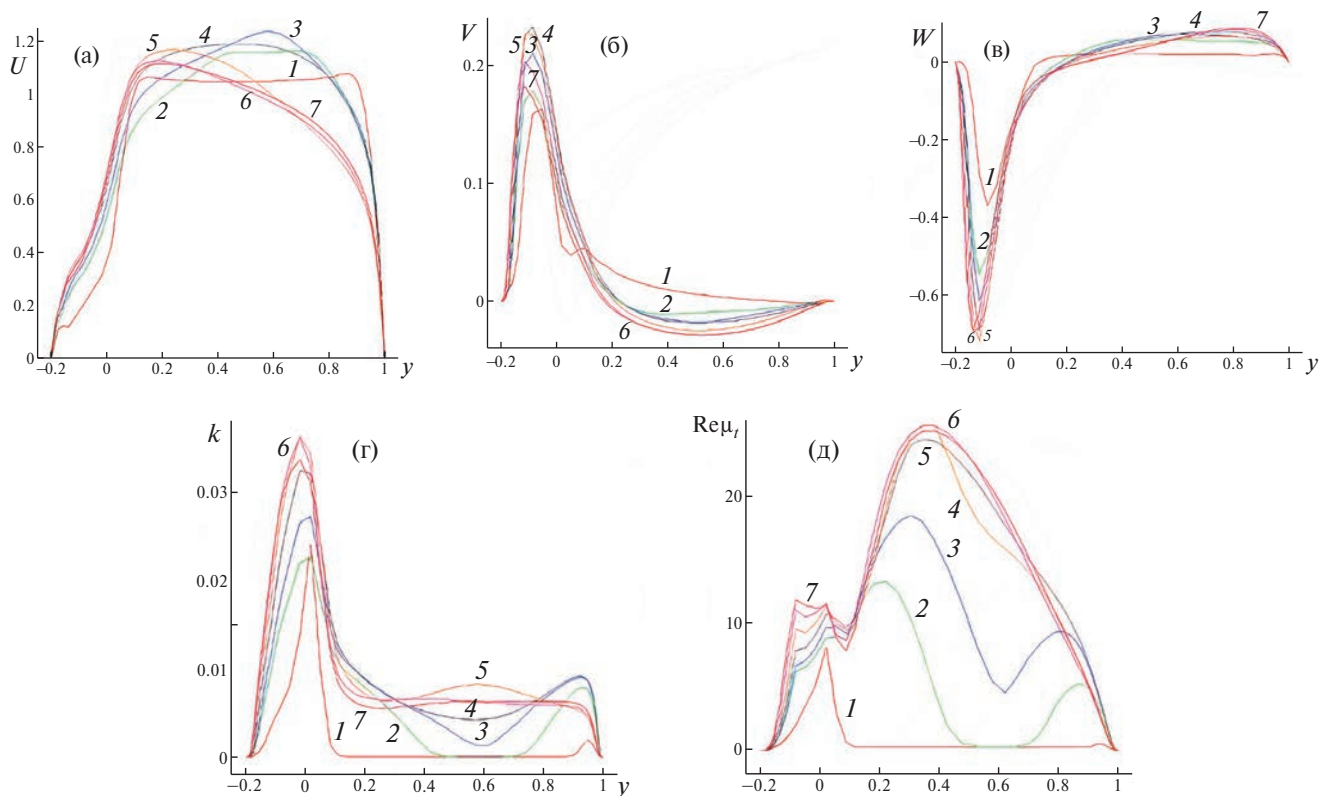


Рис. 16. Сравнение зависимостей от вертикальной координаты y декартовых составляющих скорости U (а), V (б), W (в), k (г), Re_{τ} (д) в центрах траншейных вставок выбранных канавок: 1 – 1-й; 2 – 5-й; 3 – 10-й; 4 – 15-й; 5 – 20-й; 6 – 25-й; 7 – 30-й.

канавки: центре сечения перехода от сферического сегмента к траншее и центре траншеи для выбранных наклонных канавок на рис. 15, 16).

В центре внимания находятся интенсификация возвратных токов во входных частях канавок и закрученного потока в них по мере удаления от входа в канал, утончение и ускорение пристеночных слоев над входными участками, смена режима вертикальных течений в канале, связанная с преобразованием нисходящих потоков в восходящие.

Как видно на рис. 15, по мере удаления от входа профиль продольной скорости из равномерного преобразуется в профиль, характерный для пограничного слоя течения вдоль пластины, причем его максимальная величина приближается к 1.45. Скорость в сечении $y = 0$ для удаленных канавок достигает 1.1, т.е. превышает скорость на входе в канал, налицо утончение пристеночного слоя и его ускорение.

Профиль $U(y)$ внутри канавки сочетает в себе участки закрученного струйного потока и возвратного тока растущей интенсивности, причем присутствующий участок сдвигового слоя в 1-й и 5-й канавках дальше пропадает. Максимальная скорость возвратных токов увеличивается от 0.26 до 0.45 и стабилизируется на этом уровне.

Для рассматриваемых мест в канале с канавками характерно формирование нисходящего потока с растущей максимальной скоростью от 0.07 (1-я канавка) до 0.2 (удаленные канавки). Максимальная скорость вторичного закрученного потока растет от 0.3 (1-я канавка) до 0.65 (удаленные канавки). Турбулентность внутри канавок монотонно возрастает, начиная от уровня 0.01 (1-я канавка) до 0.04 (30-я канавка). Также растет турбулентность в ядре канала.

Нормированная вихревая вязкость внутри канавок возрастает от 3 до 7, причем в отличие от k она быстро стабилизируется. В ядре канала наблюдается постепенный выход на установление турбулентного потока.

Профили продольной скорости в центрах канавок (рис. 16) показывают, что проточное течение в наклонных канавках быстро стабилизируется, а к 20-й канавке в ядре потока в канале формируется профиль, характерный для пограничного слоя. Максимум скорости приближается к 1.1. Внутри канавок по мере удаления от входа развивается сначала усиливающийся, а потом ослабевающий восходящий поток, максимальная скорость которого оказывается порядка 0.2.

Скорость вторичного закрученного потока возрастает от 0.35 до 0.7, т.е. оказывается несколько выше, чем в предыдущей рассматриваемой точке на дне канавки. Турбулентность в канавках растет с их удалением от входа, но ее уровень несколько ниже, чем во входных частях канавок (не выше 0.036). Величина нормированной вихревой вязкости также увеличивается по мере удаления канавок и оказывается выше (порядка 10), чем во входных областях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное прогнозирование характеристик турбулентного отрывного течения воздуха и теплообмена в канале с высотой 1, длиной 80 и шириной 4 с плотным однорядным пакетом из 31 наклонной канавки умеренной глубины (0.2) и удлинения (3.5) на нагретой стенке анализируется на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса, замкнутых с помощью дифференциальных уравнений модели переноса сдвиговых напряжений, и уравнения энергии при числе Рейнольдса 6 000.

На боковых границах канала задаются условия симметрии, на входе формируется равномерной изотермический поток, верхняя стенка принимается изотермической, а на структурированной стенке сравниваются различные температурные граничные условия: $q = \text{const}$ и $T = \text{const}$.

Детально исследуется быстрое развитие аномальной интенсификации отрывного турбулентного течения воздуха и теплообмена в канавках по мере их удаления от входа, вызванное интерференцией вихревых следов за канавками и ускорением в ядре канального потока с формированием локальной зоны ультравысокой продольной скорости.

Продольные распределения относительного трения f/f_{pl} и перепада статического давления $P - P_{pl}$, локального и проинтегрированного по поперечным полосам относительного числа Нуссельта Nu/Nu_{pl} и Num/Num_{pl} носят волнообразный характер с быстрым ростом амплитуды колебаний на входном участке канала. Стабилизация волнообразных характеристик происходит примерно к 15-й канавке, а затем наблюдается умеренное снижение амплитуды колебаний этих характеристик.

Возвратные токи в канавках по мере их удаления от входного сечения усиливаются, при этом минимальное отрицательное трение уменьшается от -2 до -4 на входном сферическом сегменте.

Растут сосредоточенные экстраординарные перепады статического давления между зонами торможения на наветренных склонах входных частей канавок и разрежения в ядрах смерчей на сферических сегментах, причем быстро уменьшается минимальное отрицательное давление. Максимальный перепад (0.575) достигается к 20-й канавке с более чем двукратным превосходством над первой канавкой (0.245), а затем слегка снижаются к 30-й канавке (на величину порядка 13%).

Максимальные величины относительной теплоотдачи, осредненной поперек полосы, достигают 4 примерно к 20-й наклонной канавке и далее снижаются до 3.6 к концу структурированного участка при $q = \text{const}$ и доходят до 2.4, а потом уменьшаются до 2.2 при $T = \text{const}$. Максимальное относительное число Нуссельта в центральном сечении дна канавки возрастает в 7 раз при переходе от 1-й к 20-й канавке при $q = \text{const}$.

Суммарная относительная теплоотдача структурированного участка растет при $q = \text{const}$ примерно в 2.75 раза, а при $T = \text{const}$ — в 2 раза при увеличении относительных гидравлических потерь в 1.7 раза по сравнению с гладкостенным каналом.

Относительная теплоотдача от поверхности, ограниченной контуром 20-й наклонной канавки, достигает примерно 3.7 ($q = \text{const}$) при 2.2 росте гидравлических потерь.

В канале наблюдается локальное ускорение потока в ядре. На разгонном начальном участке канала (от 1-й до 20-й канавки) профиль $U(z)$ постепенно преобразуется в S-образный с формированием плато в середине канала с приближением величины скорости на нем к начальной скорости в ядре, равной 1.05. Таким образом, над входами в канавки скорость нарастает, а максимум скорости на правой границе приближается к 1.5. В то же время на левой границе поток притормаживается и его скорость приближается к 0.63.

По мере удаления от входа профиль продольной скорости в центре сечения перехода от сферического сегмента к траншее из равномерного преобразуется в профиль, характерный для пограничного слоя, причем его максимальная величина приближается к 1.45. Скорость в сечении $y = 0$ для удаленных канавок достигает 1.1, т.е. превышает скорость на входе в канал, налицо утончение пристеночного слоя и его ускорение.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда по грантам 22-19-00056 (методология) и 23-19-00083 (расчеты).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жукаускас А., Макарявичус В., Шланчяускас А. Теплоотдача пучков труб в поперечном потоке жидкости. Вильнюс: Минтис, 1968. 192 с.
2. Isaev S.A., Leontiev A.I., Zhukova Yu.V., Baranov P.A., Gotovskii M.A., Usachov A.E. Numerical simulation of vortex heat transfer enhancement in transformer oil flow in a channel with one-row spherical dimples // Heat Transfer Research. 2011. V. 42. I. 7. P. 613–628.
3. Исаев С.А., Леонтьев А.И., Готовский М.А., Усачов А.Е., Жукова Ю.В. Анализ повышения теплогидравлической эффективности при движении трансформаторного масла в миниканале с однорядным пакетом сферических и овальных лунок на нагретой стенке // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 6. С. 884–890.
4. Исаев С.А., Леонтьев А.И., Корнев Н.В., Хассель Э., Чудновский Я.П. Интенсификация теплообмена при ламинарном и турбулентном течении в узком канале с однорядными овальными лунками // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 3. С. 390–402.
5. Исаев С.А. Генезис аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в наклонных канавках на структурированных поверхностях // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 5. С. 13–24.
6. Исаев С.А. Аэрогидродинамические механизмы интенсификации физико-энергетических процессов на структурированных энергоэффективных поверхностях с вихревыми генераторами // Теплофизика и аэромеханика. 2023. Т. 30. № 1. С. 83–88.
7. Isaev S., Leontiev A., Milman O., Nikushchenko D., Egorova A. Energy-efficient surface of air capacitors with inclined single-row oval-trench dimples and protrusions // Journal of Physics: Conference Series. 2020. № 1565. P. 012001. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1565/1/012001>
8. Исаев С.А., Леонтьев А.И., Мильман О.О., Никущенко Д.В., Попов И.А. Энергоэффективные поверхности с многорядными наклонными овально-траншейными лунками для воздушных конденсаторов // Известия РАН. Энергетика. 2020. № 4. С. 3–10.
9. Isaev S.A., Popov I.A., Mikheev N.I., Guvernuyuk S.V., Nikushchenko D.V., Sudakov A.G. Promising dimple technologies of vortex heat and mass transfer enhancement in energy and microelectronics // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1675. No. 012004. 7 p. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1675/1/012004>
10. Isaev S.A., Guvernuyuk S.V., Mikheev N.I., Popov I.A., Nikushchenko D.V. Numerical and experimental study of abnormal enhancement of separated turbulent flow and heat transfer in inclined oval-trench dimples on the plate and on the narrow channel wall // Journal of Physics: Conference Series. 2021. № 2039. P. 012009. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2039/1/012009>
11. Isaev S.A., Popov I.A., Mikheev N.I., Guvernuyuk S.V., Zubin M.A., Nikushchenko D.V., Sudakov A.G. Vortex heat transfer enhancement in the separated flow near structured dimpled surfaces // Journal of Physics: Conference Series. 2021. № 2057. P. 012002. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2057/1/012002>
12. Isaev S.A., Mikheev N.I., Dushin N.S., Goltsman A.E., Nikushchenko D.V. and Sudakov A.G. Vortex heat transfer enhancement on energy-efficient surfaces structured by inclined trench dimples // Journal of Physics: Conference Series. 2021. № 2119. P. 12016. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2119/1/012016>
13. Isaev S., Leontiev A., Gritskovich M., Nikushchenko D., Guvernuyuk S., Sudakov A., Chung K.-M., Tryaskin N., Zubin M., Sinyavin A. Development of energy efficient structured plates with zigzag arrangement of multirow inclined oval trench dimples // Int. J. Thermal Sciences. 2023. V. 184. No.107988.

14. *Исаев С.А., Судаков А.Г., Никущенко Д.В., Харченко В.Б., Юнаков Л.П.* Влияние граничных условий на моделирование аномальной интенсификации турбулентного теплообмена в наклонной канавке на стенке узкого канала // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 6. С. 38–47. EDN: RBCVPD. <https://doi.org/10.31857/S1024708423600367>
15. *Menter F.R.* Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper. 1993. No. 93-2906. 21 p.
16. *Isaev S.A., Baranov P.A., Usachov A.E.* Multiblock Computational Technologies in the VP2/3 Package on Aerothermodynamics; LAP LAMBERT Academic Publishing: Saarbrucken, Germany, 2013.
17. *Isaev S.A., Sudakov A.G., Baranov P.A., Zhukova Yu.V., Usachov A.E.* Analysis of errors of multiblock computational technologies by the example of calculating a circulation flow in a square cavity with a moving cover at $Re = 1000$ // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2013. V. 86. I. 5. P. 1134–1150.
18. *Jasak H.* Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. Thesis submitted for the Degree of Doctor of Philosophy of the University of London and Diploma of Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996. 394 p.
19. *Van Doormaal J.P., Raithby G.D.* Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow // Numerical Heat Transfer. 1984. V. 7. No. 2. P. 147–163.
20. *Rhie C.M., Chow W.L.* A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation // AIAA J. 1983. V. 21. P. 1525–1532.
21. *Pascau A., Garcia N.* Consistency of SIMPLEC scheme in collocated grids // Proc. V. European Conf. on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010. Lisbon, Portugal, 2010. 12 p.
22. *Leonard B.P.* A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1979. V. 19. No. 1. P. 59–98.
23. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys. 1979. V. 32. P. 101–136.
24. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003. 567 p.
25. *Demidov D.* AMGCL: C++ library for solving large sparse linear systems with algebraic multigrid method. <http://amgcl.readthedocs.org/>
26. *Исаев С.А., Губернюк С.В., Никущенко Д.В., Судаков А.Г., Синявин А.А., Дубко Е.Б.* Взаимосвязь аномальной интенсификации отрывного течения и экстраординарных перепадов давления в канавке на пластине при изменении угла наклона от 0 до 90° // Письма в журнал технической физики. 2023. Т. 49. Вып. 15. С. 39–42.
27. *Isaev S., Gritkevich M., Leontiev A., Popov I.* Abnormal enhancement of separated turbulent air flow and heat transfer in inclined single-row oval-trench dimples at the narrow channel wall // Acta Astronautica. 2019. V. 163 (Part. A). P. 202–207.
28. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Milman O.O., Popov I.A., Sudakov A.G.* Influence of the depth of single-row oval-trench dimples inclined to laminar air flow on heat transfer enhancement in a narrow micro-channel // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. V. 134. P. 338–358.

Обозначения

Nu – число Нуссельта, $Nu = \alpha H / \lambda$

Pr – число Прандтля, $Pr = \mu c_p / \lambda$

Re – число Рейнольдса, $Re = \rho U_c H / \mu$

T – температура, К

U_c – скорость набегающего потока, м/с

U, V, W – продольная, вертикальная и поперечная декартовы составляющие скорости в отношении к U_c

c_p – теплоемкость

H – высота канала, м

s – продольная координата в срединном сечении канавки в отношении к H

t – поперечная координата в сечении стыковки сферического сегмента и траншеи в отношении к H

k – турбулентная кинетическая энергия в отношении к U_c^2

p – давление, отнесенное к ρU_c^2

x, y, z – продольная, вертикальная и трансверсальная координаты в отношении к H

Греческие символы l – теплопроводность, $\text{Вт} \times \text{м}^{-1} \times \text{К}^{-1}$ μ – коэффициент динамической вязкости, $\text{кг}/\text{м} \times \text{с}$ ρ – плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$ ζ – коэффициент гидравлических потерь*Индексы*

min, max – минимальные и максимальные величины

 pl – плоская стенка m – параметры, осредненные по поперечной полосе mm – параметры, осредненные по площади контрольного участка*Аббревиатуры*

SST – модель переноса сдвиговых напряжений

VP2/3 – скорость–давление, 2D/3D-коды

ANOMALOUS HEAT TRANSFER ENHANCEMENT IN SEPARATED FLOW OVER A ZIGZAG-SHAPED DENSE PACKAGE OF INCLINED GROOVES IN A CHANNEL WALL AT DIFFERENT TEMPERATURE BOUNDARY CONDITIONS**S. A. Isaev^{a, b, *,}, O. O. Mil'man^c, A. A. Klyus^b, D. V. Nikushchenko^a, D. S. Khmara^a, and L. P. Yunakov^d**^a St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, 190121 Russia^b St. Petersburg State University of Civil Aviation, St. Petersburg, 196210 Russia^c Scientific and Production Implementation Company "Turbokon", Kaluga, 248010 Russia^d Baltic State Technical University VOENMEKH, St. Petersburg, 190005 Russia

* E-mail: isaev3612@yandex.ru

Rapid development of the anomalous enhancement of separated turbulent $Re = 6000$ air flow and heat transfer in an in-line single-row package of 31 inclined grooves, 0.2 in dimensionless depth, in a singled-out longitudinal region of the wall of a narrow channel is studied. It is due to the interference of vortex wakes behind the grooves and the acceleration in the channel flow core with the formation of a zone of ultrahigh longitudinal velocity. The wave-shaped parameter characteristics are stabilized in the region of approximately 15th groove, whereupon the oscillation amplitudes are moderately reduced. The return flows in the grooves are enhanced with distance from the entry section, the minimum negative friction diminishing from -2 to -4 . The total relative heat removal from the structured region increases at $q = \text{const}$ by a factor of approximately 2.75 and by the factor of two at $T = \text{const}$ with increase in the relative hydraulic losses by the factor of 1.7, as compared with the case of a plane-parallel channel. The relative heat removal from the surface bounded by the contour of the 20th inclined groove amounts to 3.7 ($q = \text{const}$) with increase in the hydraulic losses by the factor of 2.2. An increase in the local maximum of the longitudinal velocity up to a factor of 1.5, as compared with the mean-mass velocity, can be observable.

Keywords: anomalous enhancement, interference, inclined grooves, narrow channel, separation flow, vortex heat transfer, air, conditions of the first and second kind

УДК 532.593.2

ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ, ЗАМЕДЛЯЮЩИЕСЯ У БЕРЕГА

© 2024 г. И. Е. Мельников*, Е. Н. Пелиновский**

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,

Нижний Новгород, Россия

Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН,

Нижний Новгород, Россия

* E-mail: melnicovioann@gmail.com

** E-mail: pelinovsky@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 10.10.2023 г.

После доработки 15.12.2023 г.

Принята к публикации 23.12.2023 г.

Обсуждаются точные решения системы уравнений линейной теории мелкой воды, представляющие собой бегущие волны со специфическими свойствами на временных интервалах распространения, которое бесконечно при приближении к берегу и конечно при уходе на глубокую воду. Решения получены с помощью сведения одномерных уравнений мелкой воды к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу с отрицательным целым коэффициентом перед младшей производной. Проведен анализ динамики волнового поля. Показано, что форма волны, подходящей к берегу, будет дифференцироваться определенное число раз, что проиллюстрировано на ряде примеров. При движении волны от берега ее профиль интегрируется. Полученные решения в рамках линейной теории справедливы только на конечном интервале изменения глубины.

Ключевые слова: уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, волновое уравнение с переменными коэффициентами, линейная теория мелкой воды

DOI: 10.31857/S1024708424020081 EDN: RIXNEH

Большим испытанием даже для современных морских судов являются штормовые волны и цунами. Моделирование таких природных явлений просто необходимо как для кораблестроения и судоходства, так и для постройки береговых сооружений. В качестве одного из возможных вариантов математических моделей описания длинноволновых процессов в океане может быть выбрано приближение мелкой воды, точные решения линейной версии которого и будут обсуждаться в нашей статье.

Важной задачей является изучение волн, распространение которых происходит без отражения. И, следовательно, волна будет перемещаться на большие расстояния без потери энергии. Описывать такие волны могут решения, представимые в виде суммы бегущих волн $f(x+t)$, где f – произвольная функция, x – это координата, а t – время. Как известно, отражение очень мало в плавно неоднородных средах, где можно эффективно применять асимптотические методы, в силу наличия малого параметра – отношения длины волны к масштабу неоднородностей.

В линейной теории мелкой воды такие волновые процессы хорошо изучены [1–3], и, например, с помощью этого подхода выведен известный закон Грина, когда амплитуда волны изменяется пропорционально $h^{-1/4}$, где $h(x)$ – глубина бассейна.

Если смотреть на вопрос наличия волн, распространяющихся без отражения, с точки зрения математики, то можно попробовать свести уравнения мелкой воды к уже известным уравнениям математической физики с решениями в виде суммы бегущих волн. Идея преобразований к уравнениям с известными решениями является одним из классических методов нахождения точных решений линейных и нелинейных моделей неоднородных сред [4–6].

Уравнения мелкой воды уже преобразовывались к волновому уравнению [7, 8], уравнению Клейна–Гордона (см., напр., работу [14]), а также к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу с четным коэффициентом $2m$, $m \in \mathbf{Z}$ перед младшей производной [9].

При изучении последнего сведения выяснилось, что для положительных и отрицательных коэффициентов $2m$ динамика волн будет принципиально отличаться. Для случая положительных m качественный анализ был приведен в работе [9]. В данной же статье мы даем представление о поведении волн, полученных сведением к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу с целым отрицательным коэффициентом перед младшей производной.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 приведены одномерные уравнения линейной теории мелкой воды для волн, распространяющихся над неровным дном, а также кратко описан процесс их сведения к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу. В разд. 2 отмечаются основные особенности полученного решения. При этом находится также второй компонент волнового поля – усредненная по глубине скорость. В разд. 3 и 4 приводятся примеры, которые иллюстрируют характерное поведение волн для таких сведений с различными отрицательными целыми m . Полученные результаты суммируются в разд. 6 и заключении.

1. СВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ К УРАВНЕНИЮ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

Динамику одномерных длинных волн, распространяющихся в водоеме переменной глубины, можно описать с помощью уравнений мелкой воды:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [h(x)u] = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

где $\eta(x, t)$ – смещение водной поверхности; $u(x, t)$ – усредненная по глубине скорость течения; $h(x)$ – глубина воды (расстояние от дна до уровня воды в состоянии штиля); g – ускорение свободного падения.

Будем считать, что точка $x = 0$ – это берег, и изменение глубины происходит вдоль оси x (рис. 1). Граничное условие в точке $x = 0$ будет обсуждаться ниже. На бесконечности принимается условие свободного ухода волн, т.е., в некоторой, достаточно удаленной, точке $x = L_0$ мы полагаем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

С помощью элементарных преобразований из уравнений (1) и (2) мы можем исключить скорость u , перейдя к волновому уравнению на смещение η :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[c^2(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = 0, \tag{3}$$

где

$$c(x) = \sqrt{gh(x)}.$$

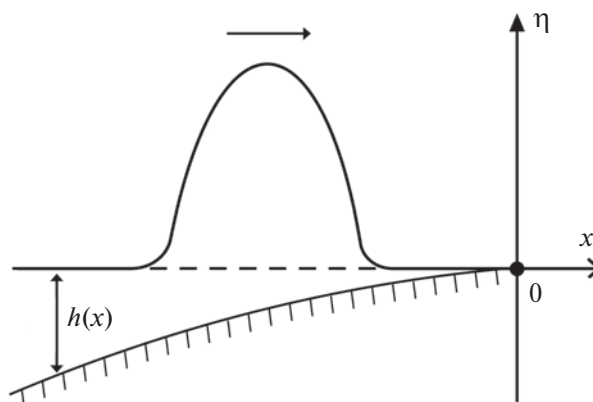


Рис. 1. Геометрическое представление распространения волн.

Решив это уравнение, мы можем найти второй компонент волнового поля, например из уравнения (2), как

$$u(x, t) = -g \frac{\partial}{\partial x} \int \eta(x, t) dt. \quad (4)$$

Теперь для целостности изложения кратко повторим способ, описанный в работе [13], с помощью которого будет получено решение для определенных конфигураций дна $h(x)$ уравнения (3). Для этого предположим, что смещение представляется в виде

$$\eta(x, t) = A(x)G[\tau(x), t], \quad (5)$$

где $A(x)$, $\tau(x)$, $G(\tau, t)$ – некоторые, пока неизвестные, произвольные гладкие функции. Проведя подстановку (5) в уравнение (3), получаем

$$A \left[\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{d\tau}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} \right] - \left[\frac{d}{dx} \left(c^2 A \frac{d\tau}{dx} \right) + c^2 \frac{dA}{dx} \frac{d\tau}{dx} \right] \frac{\partial G}{\partial \tau} - \frac{d}{dx} \left(c^2 \frac{dA}{dx} \right) G = 0. \quad (6)$$

Теперь, потребовав следующие условия:

$$c^2 \left(\frac{d\tau}{dx} \right)^2 = 1, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx}(cA) + c \frac{dA}{dx} = \frac{2m}{\tau} A, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx} \left(c^2 \frac{dA}{dx} \right) = 0, \quad (9)$$

уравнение (6) сведем к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу (10) (решаемому на полуоси $\tau > 0$):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} - \frac{2m}{\tau} \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0. \quad (10)$$

Известно [10–12], что при целых (неважно, положительных или отрицательных) m решением этого уравнения является линейная комбинация произвольных функций и их производных, которые в свою очередь зависят от суммы и разности t и τ . При $A(x) = 1$ условие (9) автоматически выполняется, и решение на смещение (для отрицательных m) тогда записывается как

$$\eta(x, t) = G[\tau(x), t] = \sum_{k=0}^{|m|} a_k \tau^k \left[f^{(k)}(\tau + t) + g^{(k)}(\tau - t) \right], \quad (11)$$

где производная берется по всему аргументу, и коэффициент a_0 в силу линейности можно принять равным 1 (функции f и g при этом имеют размерность смещения). Коэффициент $a_1 = -a_0 = -1$, а дальнейшие коэффициенты a_k можно искать по следующей формуле (обобщение выражений из [10]):

$$a_k = (-1)^k \frac{2^{k-1}}{k!} \frac{A_{|m|-1}^{k-1}}{A_{2|m|-1}^{k-1}}, \quad \text{где } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

или брать их из решения для положительных m (коэффициенты при одинаковых слагаемых для решений при $m > 0$ и $-m + 1$ совпадают).

Уравнения (7) и (8) дают выражения для неизвестной функции $\tau(x)$, профиля дна $h(x)$ и скорости волны $c(x)$ (с точностью до сдвига координаты по оси x):

$$h(x) = h_0 \left(x/L \right)^{\frac{4m}{2m+1}}, \quad (12)$$

$$\tau(x) = \tau_0 \left(x/L \right)^{\frac{1}{2m+1}}, \quad (13)$$

$$c(x) = \pm \frac{1}{\tau'(x)} = \pm \frac{(2m+1)L}{\tau_0} \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{2m}{2m+1}}, \quad (14)$$

где $h_0 \in \mathbf{R}_+$ – это глубина водоема на расстоянии L от берега; $\tau_0 \in \mathbf{R}_+$ – время, за которое волна от точки L уйдет на бесконечность. Именно такой выбор согласуется с рис. 1, ведь тогда берегом является точка $x=0$. Все профили дна лежат между x^2 и x^4 , при этом предельным случаем, как и при положительных m , будет профиль x^2 .

Особенностью этих решений является то, что, с одной стороны, вблизи берега время движения волны τ стремится к бесконечности, и это значит, что волна не может достичь берега за конечное время. С другой стороны, волна уходит на бесконечность за конечное время, сильно ускоряясь. Оба предельных случая лежат за рамками линейной теории мелкой воды, и мы это обсудим в заключении. Здесь же ограничимся рассмотрением произвольного интервала (a, b) , $-\infty < a < b < 0$.

2. УЕДИНЕННАЯ ВОЛНА, ДВИЖУЩАЯСЯ К БЕРЕГУ

В дальнейшем мы будем рассматривать только функции смещения и скорости из пространства L^2 , описывающие волны с конечной энергией (уединенные волны). Смещение волны, приближающейся к берегу, записывается как

$$\eta(x, t) = \sum_{k=0}^{|m|} a_k \tau^k f^{(k)}(\tau + t). \quad (15)$$

Теперь найдем выражение для усредненной по глубине скорости волны, бегущей к берегу:

$$\begin{aligned} u &= -g \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^t \sum_{k=0}^{|m|} a_k \tau^k \left[f^{(k)}(\tau + t) \right] dt = \\ &= \frac{g}{c(x)} \sum_{k=0}^{|m|} \left[a_k k \tau^{k-1} f^{(k-1)}(\tau + t) + a_k \tau^k f^{(k)}(\tau + t) \right] = \frac{g}{c(x)} \sum_{k=0}^{|m|} b_k \tau^k f^{(k)}(\tau + t), \end{aligned} \quad (16)$$

где $b_k = a_k + (k+1)a_{k+1}$ вплоть до $|m|-1$ и $b_{|m|} = a_{|m|}$. Здесь мы воспользовались тем, что $\tau' = -1/c$. Легко заметить, что дополнительного интеграла в скорости, в отличие от случая положительного m , не появится в силу коэффициента перед ним $-k=0$. Отметим, что $b_0 = 0$ всегда, поскольку $b_0 = a_0 + a_1 = 1 - 1 = 0$, поэтому мы можем переписать скорость как

$$u = \frac{g}{c(x)} \sum_{k=1}^{|m|} b_k \tau^k f^{(k)}(\tau + t). \quad (17)$$

Рассмотрим ситуацию, когда волна подходит к берегу издалека. В этом случае можно считать, что волна описывается приближенно как

$$\eta(x, t) \approx f(\tau + t),$$

поскольку все остальные слагаемые в сумме будут давать незначительный вклад в (15). Отметим, что в силу большой глубины далеко от берега усредненная по глубине скорость течения мала, так что можно не приводить для нее соответствующего выражения. А при приближении волны к берегу в решении будут превалировать все более высокие производные от функции f . Тогда очевидно, что $\forall x_0 \in (a, b)$ будет выполняться:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(x_0, t) = 0.$$

Поэтому мы остаемся в пространстве волн с конечной энергией, и никаких дополнительных условий на функцию f накладывать не надо, в отличие от обратного случая – отхода волны от берега (см. далее).

3. УСЛОВИЯ НА НАЧАЛЬНУЮ ФОРМУ ВОЛНЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ОТ БЕРЕГА

Отдельно выделим случай волны, заданной в точке x_0 вблизи берега как $a_{|m|} \tau^m \varphi(t)$ и идущей от него. В таком случае в формуле (11) присутствует только функция $g(t-\tau)$, и у берега превалирует $|m|$ -я производная функции g . При этом верно асимптотическое равенство (в зависимости от близости к берегу)

$$\varphi(\tau_0 - t) \approx g^{(|m|)}(\tau_0 - t),$$

в то время как на бесконечности будет превалировать сама функция g , т.е.

$$g(t) = \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{t_2} \varphi(t_1) dt_1 \dots dt_m.$$

Для наглядности перепишем решение на смещение через функцию $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \eta(\tau, t) = & a_{|m|} \tau^{|m|} \varphi(t + \tau) + a_{|m|-1} \tau^{|m|-1} \int_{-\infty}^t \varphi(t_1 + \tau) dt_1 + \\ & + a_{|m|-2} \tau^{|m|-2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t_1} \varphi(t_1 + \tau) dt_1 dt_2 + \dots + \\ & + a_0 \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{t_2} \varphi(t_1 + \tau) dt_1 \dots dt_m, \end{aligned}$$

и, чтобы остаться в пространстве волн с ограниченной энергией, понятно, что достаточно потребовать, чтобы все интегралы вплоть до $|m|$ -го порядка по \mathbf{R} равнялись нулю, поскольку отличие от него хотя бы одного интеграла повлечет за собой расходимость последующих:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t_1) dt_1 &= 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t_2} \varphi(t_1) dt_1 dt_2 &= 0, \\ &\dots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{t_2} \varphi(t_1) dt_1 \dots dt_m &= 0. \end{aligned}$$

Данное условие в точности повторяет условие на решения для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с натуральным m , однако с существенным изменением — они накладываются на форму волны, задаваемую у берега и бегущую от него, а не наоборот. Выражение для скорости волны не имеет в своей записи более высоких интегралов от φ , поэтому дополнительных ограничений на класс $\varphi(t)$ оно не внесет.

Далее приведем несколько примеров, иллюстрирующих сходства и расхождения поведения волн при сведении к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу с различными отрицательными m .

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ ПРИ $m = -1$

В качестве первого примера рассмотрим поведение волн при сведении к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу при $m = -1$. Профиль безотражательного дна в данном случае задается уравнением

$$h(x) = h_0(x/L)^4,$$

а $\tau(x)$ и $c(x)$ задаются как

$$\tau(x) = \tau_0 \frac{L}{x}, \quad c(x) = \frac{L}{\tau_0} \left(\frac{x^2}{L} \right).$$

Смещение волны, бегущей к берегу:

$$\eta(t, x) = f[t + \tau(x)] - \tau(x) \frac{\partial f[t + \tau(x)]}{\partial t}. \quad (18)$$

У первого слагаемого амплитуда не меняется, второе слагаемое прямо пропорционально $h^{-1/4}$, поэтому все решение вблизи берега будет удовлетворять закону Грина (превалирует второе слагаемое), а вдали от берега амплитуда будет практически константой (основной вклад дает первое слагаемое). Выражение для усредненной по глубине скорости

$$u(x, t) = -\frac{g\tau(x)}{c(x)} f'(\tau(x) + t) \quad (19)$$

состоит из одного слагаемого и также никаких ограничений не приносит. Амплитуда пропорциональна $h^{-3/4}$ – закон Грина для скорости выполняется везде (этот результат уже был получен в [7]).

Пусть в некоторой точке (достаточно удаленной от берега) задана уединенная волна вида

$$f(t) = A \exp\left[-\frac{t^2}{T^2}\right], \tag{20}$$

где A – амплитуда волны, а T характеризует ее длительность. Дальнейшие расчеты мы будем проводить в нормализованных переменных $\eta/A = \eta_d$, $t/T = t_d$, $x/L = x_d$, $\sqrt{h_0}u/\sqrt{g}A = u_d$ (индекс d означает безразмерность физической величины). Тогда мы будем иметь дело только с одним параметром $a = T/\tau_0$, физический смысл которого – это время распространения волны в единицах периода.

Тогда решения (18) и (19) записываются как

$$\eta_d = \exp\left[-\left(t_d + \frac{a}{x_d} + a\right)^2\right] \left[1 + \frac{2a}{x_d}\left(t_d + \frac{a}{x_d} + a\right)\right], \tag{21}$$

$$u_d = \exp\left[-\left(t_d + \frac{a}{x_d} + a\right)^2\right] \frac{2a}{x_d}\left(t_d + \frac{a}{x_d} + a\right). \tag{22}$$

В такой записи сразу же становится видно, что при малом параметре a смещение не будет практически отличаться от заданной функции f в точке $x = -L$, а при большом – отличаться сильно, больше напоминая производную функции f . Однако очевидно, что в независимости от a на бесконечности смещением будет чисто гауссовский импульс.

Возьмем, например, такой импульс, что в точке $x = -L$ он в 10 раз короче τ_0 , т.е. $a = 10$. На рис. 2–4 представлена трансформация решений смещения и скорости.

Вдали от берега (см. рис. 2) импульс – чисто гауссовский. Графики практически не сдвигаются на рисунке – так и должно быть: у волны очень большая скорость движения, поэтому из точки $x = -70L$ она практически сразу же приходит в $x = -10L$. Затем форма волны не интегрируется, как в случае с натуральным m , а дифференцируется, что можно заметить на рис. 3 (слева). Амплитуда ее растет по закону Грина, и при этом волна все сильнее и сильнее замедляется. Далее происходит обрушение, чего линейная теория не учитывает (см. рис. 4). Рисунки 2–4 (справа), как и предполагала формула, иллюстрируют рост амплитуды и неизменность формы графика скорости.

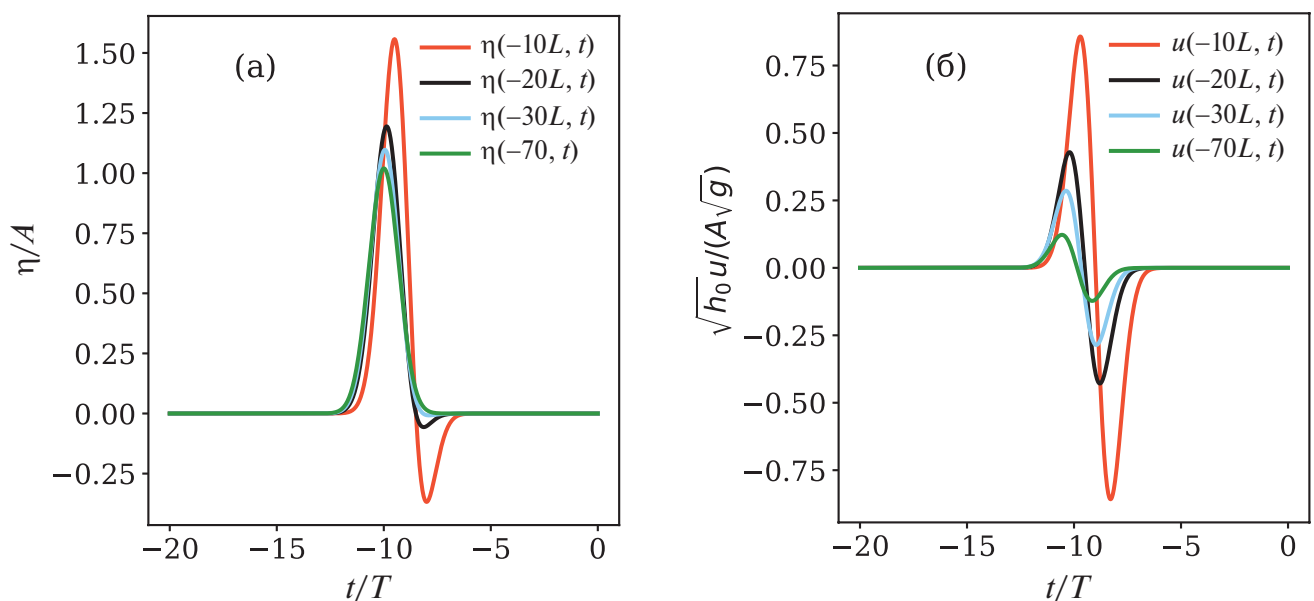


Рис. 2. Мареограммы смещения (а) и скорости (б) вдали от берега.

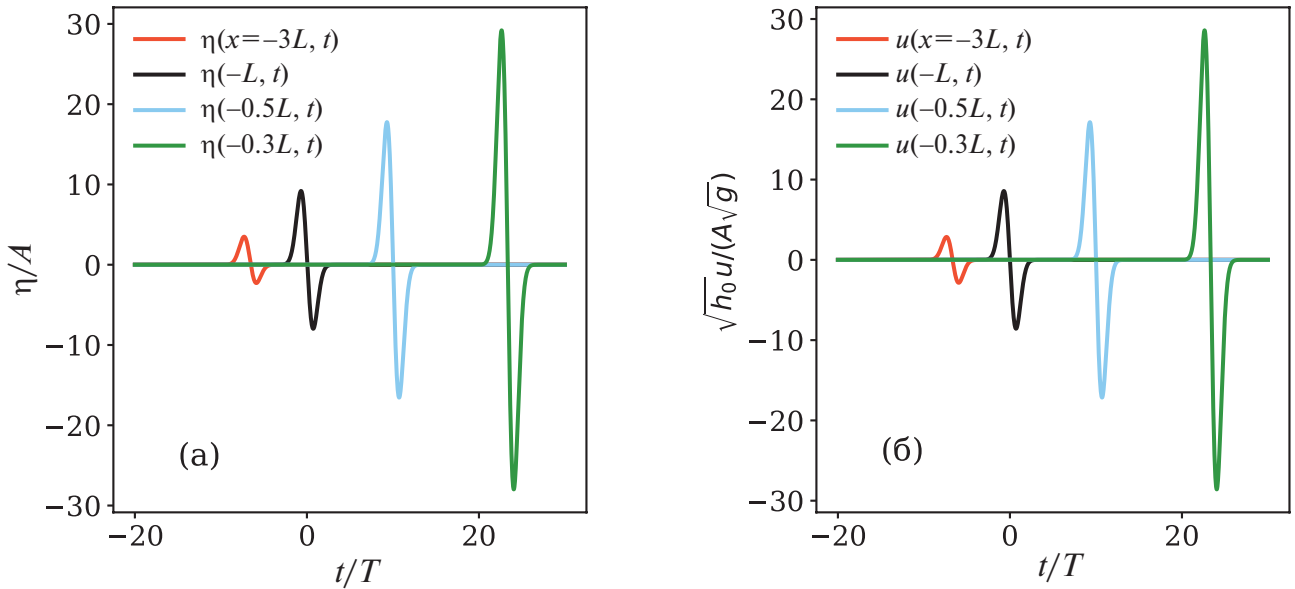


Рис. 3. Мареограммы смещения (а) и скорости (б) в окрестности L .

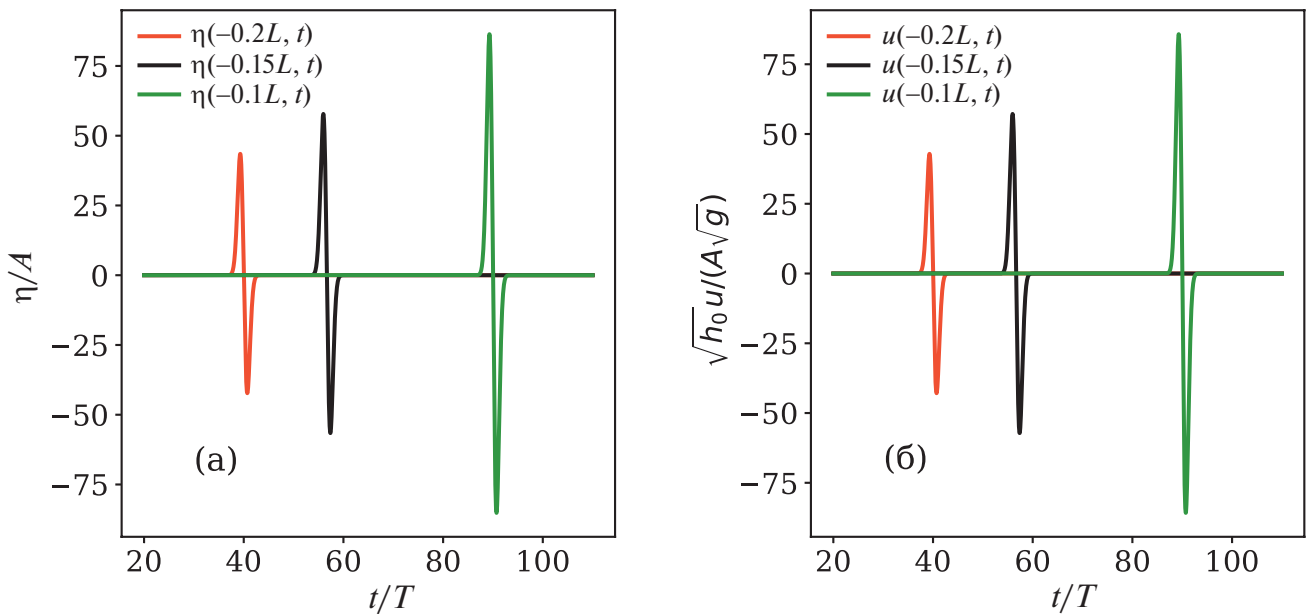


Рис. 4. Мареограммы смещения (а) и скорости (б) при подходе к берегу.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ ПРИ $m = -2$

Теперь рассмотрим пример сведения к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу с $m = -2$. Профиль дна в таком случае выражается как

$$h(x) = h_0(x/L)^{8/3} \sim x^{8/3},$$

$$\tau(x) = \tau_0(L/x)^{1/3} \sim x^{-1/3}, \quad c(x) = \frac{3L}{\tau_0} \frac{x^{4/3}}{L} \sim x^{4/3}.$$

Волновое поле импульса, бегущего к берегу, для этого случая описывают выражения

$$\eta(\tau, t) = f(\tau + t) - \tau f'(\tau + t) + \frac{1}{3} \tau^2 f''(\tau + t), \tag{23}$$

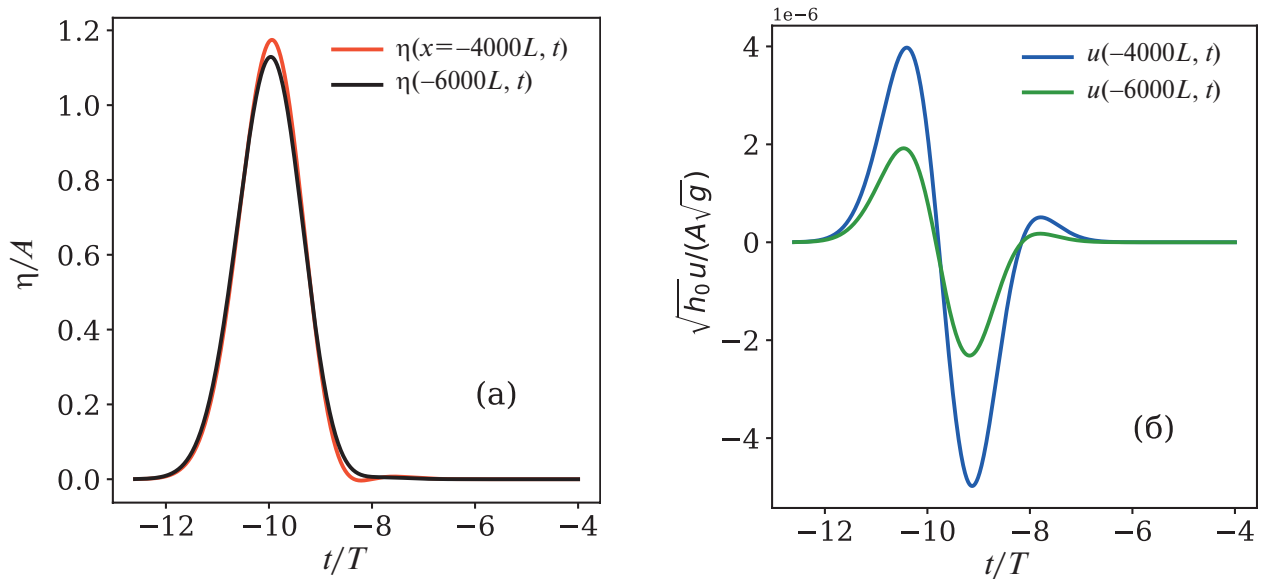


Рис. 5. Мареограммы смещения (а) и скорости (б) вдали от берега, и постепенная трансформация формы волны.

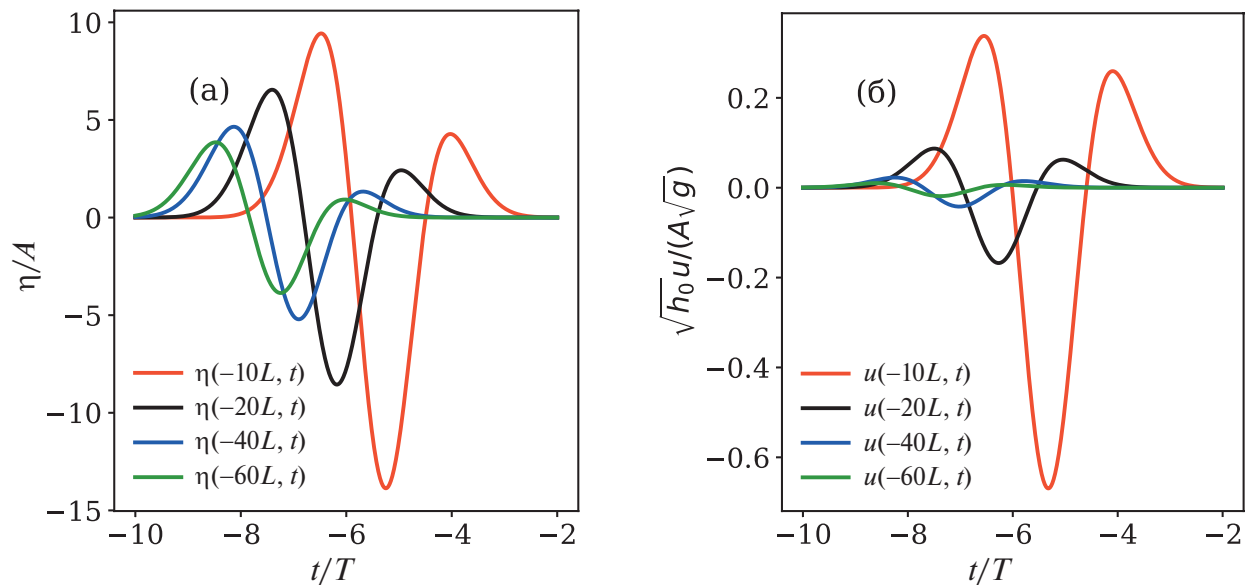


Рис. 6. Мареограммы смещения (а) и скорости (б) на промежуточных расстояниях до берега.

$$u(\tau, t) = \frac{g}{3c(x)} \left[\tau^2 f''(\tau + t) - \tau f'(\tau + t) \right]. \tag{24}$$

Из формул (23) и (24) легко заметить, что функция смещения водной поверхности при подходе к берегу будет дважды трансформироваться – дифференцироваться, а скорость претерпит только одну трансформацию, что также следует из серии рис. 5–7.

Для иллюстрации наших соображений возьмем ту же функцию, что и в первом примере:

$$f(t) = A \exp \left[-t^2 / T^2 \right].$$

Тогда мы можем записать решение в виде

$$\eta_d = \exp \left[- \left(t_d + \frac{a}{x_d} + a \right)^2 \right] \left\{ 1 + \frac{2a}{x_d} \left(t_d + \frac{a}{x_d} + a \right) + \frac{a^2}{x_d^2} \left[\frac{4}{3} \left(t_d + \frac{a}{x_d} + a \right)^2 - \frac{2}{3} \right] \right\},$$

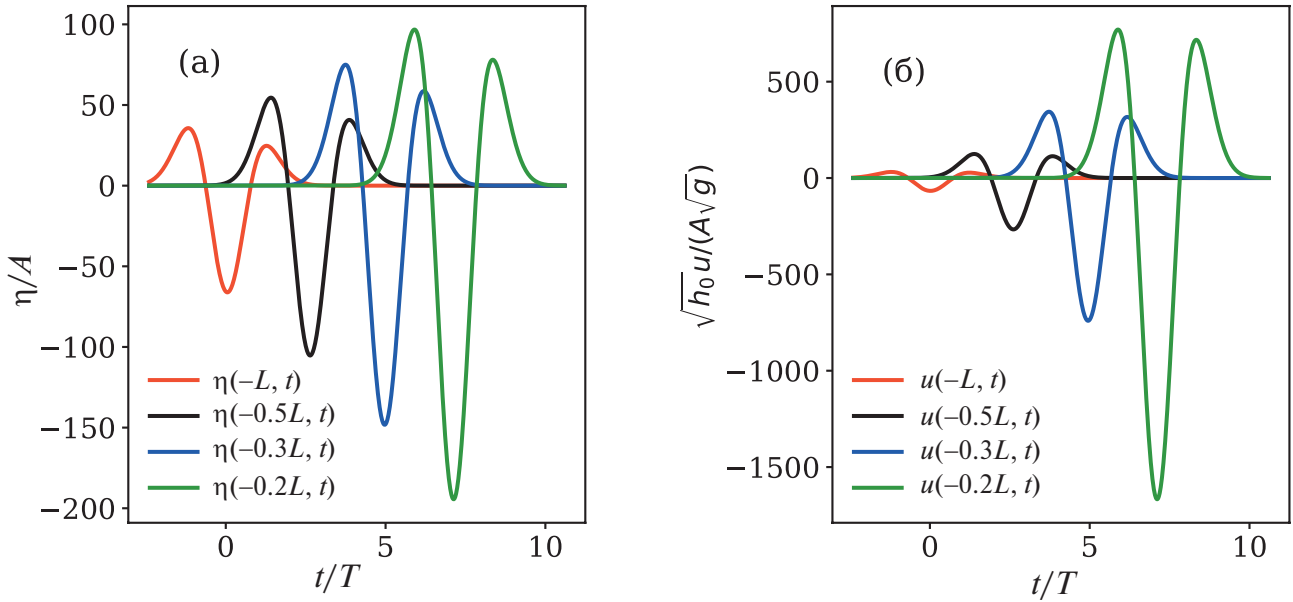


Рис. 7. Мареограммы смещения (а) и скорости (б) при подходе к берегу.

а скорость – как

$$u_d = \frac{1}{3x_d^{4/3}} \exp \left[- \left(t_d + \frac{a}{x_d} + a \right)^2 \right] \left\{ - \frac{2a}{x_d} \left(t_d + \frac{a}{x_d} + a \right) + \frac{2a^2}{x_d^2} \left[2 \left(t_d + \frac{a}{x_d} + a \right)^2 - 1 \right] \right\}.$$

Аналогичную роль в решении играет параметр a – чем он больше, тем более различны в точке L величины f и η . Как и раньше, возьмем $\tau_0 = 10T$. Тогда получим результаты, которые иллюстрируют графики на рис. 5–7. При этом максимальные значения смещения и скорости у берега подчиняются закону Грина, что можно заметить и для общего случая m : $\eta \sim x^{-2/3} \sim h^{-1/4}$ и $u \sim x^{-2} \sim h^{-3/4}$.

6. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПОЛУЧЕННОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Рассмотрев два примера, а также обратив внимание на формулы (11) и (17), можно выделить основные закономерности для случаев сведения (к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу) с различными отрицательными m .

1. Смещение водной поверхности трансформируется $|m|$ раз, и к берегу подходит $|m|$ -я производная изначальной функции смещения с растущей амплитудой.

2. При этом если волна задается у берега, то на бесконечность уходит, наоборот, $|m|$ -й интеграл, и появляется серия ограничений на класс начальных мареограмм.

3. График усредненной по глубине скорости трансформируется $|m| - 1$ раз, и к берегу подходит $(|m| - 1)$ -я производная изначальной функции скорости ($|m|$ -я производная изначальной функции смещения) с растущей амплитудой.

4. Асимптотика амплитуды волны вблизи берега для любого m удовлетворяет закону Грина ($\sim h^{-1/4}$), как и максимальные значения скорости: $u \sim h^{-3/4}$.

5. Асимптотики смещения ($\sim \text{const}$) и скорости ($\sim h^{1/(4m) - 1/2}$) вдали от берега в общем случае не удовлетворяют закону Грина (исключением является только асимптотика скорости при $m = -1$). Хотя понятно, что приближения мелкой воды в данном случае уже работать не будут, и этот случай нужно рассматривать отдельно.

Также стоит отметить, что если для положительных m закон Грина выполнялся вдали от берега [9] – то для отрицательных m все стало ровно наоборот – он выполняется вблизи берега.

6. Волна не может достичь береговой линии, ее время прохождения стремится к бесконечности. То есть при подходе к берегу волна все сильнее и сильнее замедляется. Если амплитуда волны сильно нарастает

и волна не добежит до берега, это означает, что волна обрушится, и в рамках линейной теории анализировать поведение волны вблизи берега мы не можем. Но на конечных расстояниях это будет физически разумным решением.

Волна же, бегущая от берега, достигает бесконечность за конечное время. Такое поведение можно объяснить тем, что мы выходим за рамки начальных приближений мелкой воды — глубина будет расти как $\sim x^{4m/(2m+1)}$. Мы не можем как приблизиться к берегу, так и уйти далеко от него, поэтому, как и предлагалось выше, необходимо рассматривать это решение только на промежутке (a, b) .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено обсуждение свойств точных решений уравнений мелкой воды, полученные сведением системы уравнений мелководья к уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу отрицательными целыми m . Получено аналитическое решение для всего волнового поля — как для смещения, так и для усредненной по глубине скорости. Решения проиллюстрированы примерами. Выявлены основные закономерности в поведении волнового поля.

В дальнейшем авторы предполагают изучить различные режимы трансформации бегущей волны на урезе, а также ее уход на бесконечность, где нужно будет рассматривать задачу в рамках нелинейной теории, как, например в [13], поскольку в этих областях уже будут важны дисперсия и нелинейность.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-77-01074.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mei C.C.* The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. W.S.: Singapore, 1989. 740 p.
2. *Brekhovskikh L.M.* Waves in Layered Media. Cambridge Univ. Press, USA, 1976. 520 p.
3. *Dingemans M.W.* Water Wave Propagation over Uneven Bottom. W.S.: Singapore, 1997. 700 p.
4. *Kravtsov Y.A., Orlov Y.I.* Geometrical Optics of Inhomogeneous Media. Spring.: N.Y., 1990. 325 p.
5. *Babich V.M., Buldyrev V.S.* Asymptotic Methods In Short-Wavelength Diffraction Theory. Alpha Sci., 2009. 495 p.
6. *Капцов О.В., Капцов Д.О.* Решения некоторых волновых моделей механики // ПММ. 2023. Т. 87. № 2. С. 176–185.
7. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
8. *Zaitsev V.F., Polyinin A.D.* Exact solutions and transformations of nonlinear heat and wave equations // Dokl. Math. 2001. V. 64. № 3. P. 416–420.
9. *Didenkulova I.I., Pelinovsky E.N., Soomere T.* Long surface wave dynamics along a convex bottom // J. Geophys. Res. 2008. V. 114. № C7. 14 p.
10. *Didenkulova I.I., Pelinovsky E.N.* Travelling water waves along a quartic bottom profile // Proc. Estonian Acad. Sci. 2010. V. 59. № 2. P. 166–171. DOI: 10.3176/proc.2010.2.16.
11. *Didenkulova I.I., Pelinovsky D.E., Tyugin D.Y., Giniyatullin A.R., Pelinovsky E.N.* Travelling long waves in water rectangular channels of variable cross section // Geogr. Environ. and Liv. Syst. 2012. № 5. P. 89–93.
12. *Пелиновский Е.Н., Диденкулова И.И., Шургалкина Е.Г.* // Динамика волн в каналах переменного сечения. Морской гидр. жур. 2017. № 3. С. 22–31.
13. *Pelinovsky E.N., Kaptsov O.V.* Traveling Waves in Shallow Seas of Variable Depths // Symm. 2022. V. 14. № 7. P. 1448.
14. *Melnikov I.E., Pelinovsky E.N.* Euler-Darboux-Poisson Equation in Context of the Traveling Waves in a Strongly Inhomogeneous Media // Math. 2023. V. 11. № 15. P. 3309. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11153309>.
15. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление. Т. 3. М: ГИФМЛ. 1958. 447 с.
16. *Kaptsov O.V.* Equivalence of linear partial differential equations and Euler-Darboux transformations // Comput. Technol. 2007. V. 12. № 4. P. 59–72.
17. *Copson E.T.* Partial differential equations. Cambridge Univ. Press, 1975. 292 p.
18. *Didenkulova I.I.* New Trends in the Analytical Theory of Long Sea Wave Runup // In Appl. Wave Math. Spring. 2009. P. 265–296.

LINEAR WAVES IN SHALLOW WATER OVER AN UNEVEN BOTTOM, SLOWING DOWN NEAR THE SHORE

I. E. Melnikov*, E. N. Pelinovsky**

* *E-mail: melnicovioann@gmail.com*

** *E-mail: pelinovsky@appl.sci-nnov.ru*

The exact solutions of the system of equations of the linear theory of shallow water are discussed, representing traveling waves with specific properties for the time propagation, which is infinite when approaching the shore and finite when leaving for deep water. These solutions are obtained by reducing one-dimensional shallow water equations to the Euler–Poisson–Darboux equation with a negative integer coefficient before the lower derivative. The analysis of the wave field dynamics is carried out. It is shown that the shape of a wave approaching the shore will be differentiated a certain number of times, which is illustrated by a number of examples. When a wave moves away from the shore, its profile is integrated. The solutions obtained in the framework of linear theory are valid only for a finite interval of depth variation.

Keywords: Euler–Poisson–Darboux equation, wave equation with variable coefficient, linear shallow water theory

УДК 532.526.3

ВЛИЯНИЕ ОТСОСА ГАЗА НА НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОПЕРЕЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ СТРЕЛОВИДНОГО КРЫЛА

© 2024 г. А. В. Новиков^{a, b}, А. О. Образ^{a, b, *}, Д. А. Тимохин^b

^a Центральны́й аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, г. Жуковский, Россия

^b Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

* E-mail: obraz.ao@mipt.ru

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

Представлены результаты исследования устойчивости пограничного слоя над стреловидным крылом с участком отсоса газа через стенку по нормали к поверхности при числе Маха 2. Для рассмотренного режима течения доминирующим типом неустойчивости в пограничном слое является неустойчивость поперечного течения. Влияние отсоса газа на развитие неустойчивых мод в пограничном слое проводится с помощью линейной теории устойчивости и метода прямого численного моделирования. Численное моделирование ламинарных (невозмущенных) полей течения с участками отсоса газа и полей течения с возмущениями производится с помощью интегрирования уравнений Навье–Стокса. В рамках линейной теории устойчивости производится анализ с помощью e^N -метода. Положение области отсоса варьируется с сохранением интегральной интенсивности. Показана возможность существенного подавления роста неустойчивых мод за счет оптимального расположения области отсоса.

Ключевые слова: неустойчивость поперечного течения, отсос, линейная теория устойчивости, прямое численное моделирование

DOI: 10.31857/S1024708424020096 EDN: RIWAAP

ВВЕДЕНИЕ

Одним из способов снижения сопротивления трения при обтекании летательных аппаратов является активное управление устойчивостью пограничного слоя с помощью выдува/отсоса газа через пронцаемую поверхность. Для гладких аэродинамических конфигураций при малом фоне возмущений в набегающем потоке обычно реализуется сценарий перехода, вызванный нарастанием собственных мод пограничного слоя.

При дозвуковых и умеренных сверхзвуковых скоростях доминирующими типами неустойчивости на крыльях самолетов являются волны Толлмина–Шлихтинга (ТШ) и неустойчивость поперечного течения (*CF*-неустойчивость, от англ. Cross-Flow).

Волна ТШ имеет вязкую природу, ее инкременты роста связаны со второй производной скорости среднего течения на стенке. При отсосе профиль пограничного слоя становится более наполненным и это приводит к стабилизации возмущений данного типа. Уменьшение толщины пограничного слоя также приводит и к ослаблению поперечной компоненты скорости, вызванной разницей в направлении градиента давления и течения на верхней границе пограничного слоя для стреловидных крыльев.

Известно, что уменьшение поперечной компоненты скорости является одним из основных способов подавления развития неустойчивостей поперечного течения [1]. Таким образом, отсос газа из пограничного слоя в общем приводит к стабилизации течения и более позднему ламинарно-турбулентному переходу [2].

Распределение интенсивности отсоса по поверхности также является важным параметром. В работе [3] для автомодельных двух- и трехмерных пограничных слоев были найдены оптимальные с точки зрения затягивания перехода распределения интенсивности отсоса: область отсоса должна располагаться в окрестности точки потери устойчивости пограничного слоя. Для двумерных конфигураций течения данный результат также подтверждается экспериментальной работой [4].

Влияние отсоса пограничного слоя на сверхзвуковые стреловидные конфигурации изучено менее детально, чем на дозвуковые и трансзвуковые. Авторам известен один полетный эксперимент [5], в котором была продемонстрирована применимость отсоса пограничного слоя для затягивания ламинарно-турбулентного перехода на сверхзвуковом крыле.

В экспериментальной работе [6] произведено исследование влияния участка отсоса газа на устойчивость пограничного слоя на поверхности стреловидного крыла с параболическим профилем при числе Маха 2 в аэродинамической трубе. Отсос газа производился с помощью проницаемой пористой вставки на поверхности модели. При этом в качестве материала вставки использовался спекаемый металлический порошок, который обеспечивает гораздо больший коэффициент пористости, чем традиционный способ лазерного сверления отверстий.

В последнем случае во многих экспериментальных работах отмечались краевые эффекты на границах отверстий, ухудшающие эффективность всей системы и затрудняющие теоретический анализ в связи с появлением немодальных сценариев ламинарно-турбулентного перехода. Численный анализ устойчивости пограничного слоя с учетом таких краевых эффектов и геометрии системы отсоса производился в работе [7].

В работе [8] выполнен численный анализ эксперимента [6]. В частности, с помощью e^N -метода были рассчитаны инкременты роста стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения, а также на основе экспериментальных данных получены значения критических N -факторов для модели с проницаемой вставкой. Оказалось, что для нестационарных неустойчивостей поперечного течения значения критических N -факторов практически не зависели от наличия вставки, что свидетельствует о реализации сценария перехода, связанного с ростом собственных мод пограничного слоя.

В работе [9] производился анализ устойчивости стационарных вихрей поперечного течения в пограничном слое на крыле для различных интенсивностей отсоса, при этом параметры течения соответствовали эксперименту [6].

В нашей работе численно исследуется развитие CF -неустойчивостей в пограничном слое на крыле с параметрами течения, соответствующими работе [6]. Развитие возмущений моделируется с помощью как линейной теории устойчивости (ЛТУ), так и прямого численного моделирования (ПЧМ) уравнений Навье–Стокса.

В отличие от экспериментальной установки, где вставка с пористым покрытием, через которую осуществлялся отсос, была фиксирована на крыле, в данной работе производится варьирование данной области. При этом интегральная интенсивность отсоса остается постоянной. Для рассматриваемой геометрии крыла найдена оптимальная с точки зрения подавления стационарных мод CF -неустойчивостей область с отсосом газа из пограничного слоя.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Моделирование обтекания стреловидного крыла выполняется путём решения уравнений Навье–Стокса для идеального сжимаемого газа. Рассматривается бесконечное стреловидное крыло с параболическим профилем, форма которого задается соотношением $y = 2\epsilon x(1 - x)$, где $\epsilon = 0.13$ – относительная толщина профиля (рис. 1).

Задача решается в следующей прямоугольной системе координат: ось x направлена вдоль оси симметрии хорды крыла, ось z – по размаху крыла, ось y перпендикулярна осям x и z . Применяется трехмерная формулировка уравнений в консервативной безразмерной форме.

Координаты нормируются на характерную длину L^* ; зависимые переменные $\{u, v, w, T\}$ – на соответствующие значения в набегающем потоке $\{U_\infty^*, T_\infty^*\}$, а давление p – на удвоенный скоростной напор $\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$.

Здесь и далее верхний индекс $*$ означает размерные величины. В качестве масштаба длины обезразмеривания в данной работе используется $L^* = c^* = 0.3$ м, где c^* – длина хорды модели (в направлении перпендикулярно передней кромке). Угол скольжения крыла $\chi = 30^\circ$ (вектор скорости набегающего потока имеет компоненты $\{U_\infty^* \cos \chi, 0, U_\infty^* \sin \chi\}$). Единичное число Рейнольдса в набегающем потоке $Re_1 = 30 \times 10^6 \text{ м}^{-1}$, соответственно число Рейнольдса по хорде крыла $Re_c = 9 \times 10^6$. Температура поверхности модели $T_w^* = 290 \text{ К}$. Все указанные параметры соответствуют параметрам экспериментальной установки [6].

Уравнения Навье–Стокса интегрируют с помощью авторского пакета расчетных программ [10], который реализует неявный метод конечного объема сквозного счета с аппроксимацией второго порядка по пространству и времени. Используется TVD-схема с приближенным решателем задачи распада разрыва методом Роу. Реконструкция зависимых переменных на границах ячеек сетки выполняется с использова-

нием подхода WENO3, который эффективно дает аппроксимацию по пространству конвективных слагаемых третьего порядка.

Развитие вихрей неустойчивости поперечного течения в рамках метода прямого численного моделирования исследуется с помощью искусственного стационарного возмущения в виде полосы периодического в поперечном направлении искажения массового расхода газа вида вдув–отсос:

$$(\rho v)_w = \varepsilon \cos\left(\pi \frac{x - x_c}{2r}\right) \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda_z}\right).$$

Генератор возмущений располагается в окрестности точки потери устойчивости для наиболее усиливающихся возмущений поперечного течения (положение генератора $x_c \approx 0.06$, точка потери устойчивости для различных длин волн стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения $x_{np} \approx 0.07-0.08$). Амплитуда возмущения $\varepsilon = 10^{-5}$ выбирается достаточно малой для обеспечения линейного развития пакета волн неустойчивости.

Ширина области генерации возмущения в продольном направлении $2r = 0.02$ (область действия генератора в продольном направлении $x_c - r \leq x \leq x_c + r$). Длина волны $\lambda_z = 0.004$ соответствует наиболее усиливающимся на выходе из расчетной области ($x = 0.5$) стационарным CF-возмущениям согласно линейной теории устойчивости.

В рамках этой теории характеристики устойчивости пограничного слоя исследуют с использованием авторского кода [11]. Рассматривается усиление стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения, распространяющихся в пограничном слое, полученном при решении уравнений Навье–Стокса (ламинарное поле течения с отключенным генератором).

В рамках локально-параллельного приближения рассматривают возмущения газодинамических величин вида $q(y) \exp(i\alpha x + i\beta z - i\omega t)$. Здесь $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ – комплексное волновое число, получающееся в результате численного интегрирования однородной краевой задачи на собственные значения; $\alpha(\omega; x)$ зависит от круговой частоты волны ω и продольной координаты x как от параметра.

В нашей работе в основном рассматриваются стационарные вихри неустойчивости поперечного течения (частота $\omega = 0$). Если $\alpha_i < 0$, то амплитуда волны растет вниз по потоку с инкрементом $\sigma(\omega; x) = -\alpha_i$, а ее интегральное усиление характеризуется N-фактором

$$N(\omega; x) = \int_{x_0(\omega)}^x \sigma(\omega; x) dx,$$

где x_0 – точка потери устойчивости, лежащая на нижней ветви нейтральной кривой.

2. ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ВИХРЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО ТЕЧЕНИЯ

Отсос пограничного слоя через стенку моделируется на конечном участке, а интенсивность задается коэффициентом отсоса $c_q(x) = \rho_w v_w \sqrt{2 \text{Re}_{\infty, x}}$, где $\text{Re}_{\infty, x} = x \text{Re}_{\infty, L}$. Отсосу газа из пограничного слоя внутрь стенки соответствуют отрицательные значения коэффициента c_q . Отсос задается в области $x_{s1} \leq x \leq x_{s2}$, значения x_{s1}, x_{s2} варьируют для разных расчетных случаев.

Выход с участка без отсоса на постоянное значение коэффициента c_q внутри проницаемой области происходит плавно в достаточно узких областях $x_{s1} - 0.5D \leq x \leq x_{s1} + 0.5D$ и $x_{s2} - 0.5D \leq x \leq x_{s2} + 0.5D$ по формуле $c_q = c_q^{\max} \cos(\pi|x - x_0|/D)$, где $D = 0.01$ – протяженность переходных областей.

Расчеты проводятся для случаев постоянного коэффициента отсоса $c_q = \text{const} = \{0.0, -0.80, -1.37, -2.40, -4, 8\}$. Для выбранного режима течения на крыле без отсоса для стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения реализуются характерные максимальные N-факторы $N \approx 5-7$, что соответствует критическим

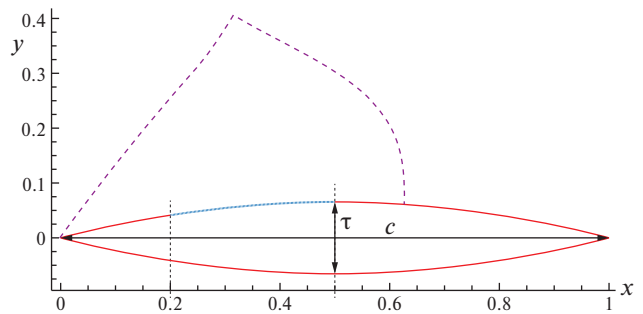


Рис. 1. Геометрия профиля крыла. Синим отмечено типовое положение области отсоса.

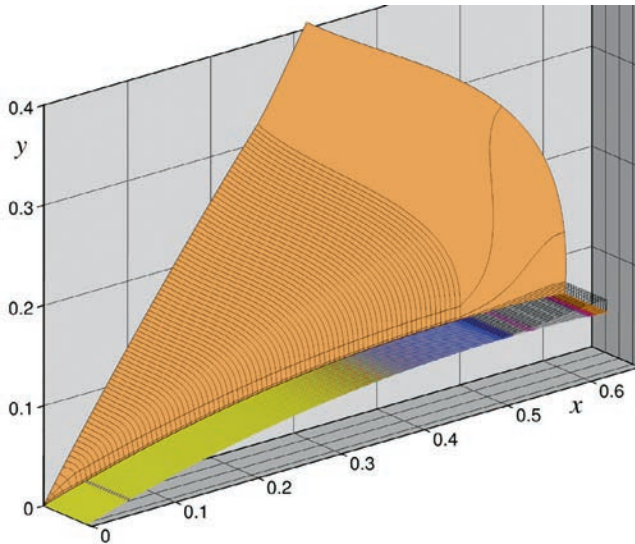


Рис. 2. Расчетная область при прямом численном моделировании развития возмущений. Вблизи передней кромки отмечено положение генератора возмущений.

значениям для начала ламинарно-турбулентного перехода в условиях аэродинамической трубы с умеренным фоном возмущений в набегающем потоке.

Расчетная область расположена над верхней поверхностью полукрыла с ортогональной структурированной многоблочной сеткой из $3001 \times 401 \times 41$ узлов в направлении вдоль пластины, по нормали к стенке и вдоль размаха крыла соответственно (рис. 2).

Такое количество узлов обусловлено предварительными расчетами, в рамках которых была осуществлена проверка сходимости по сетке. Указанное выше число узлов по заданным направлениям гарантировало достаточное разрешение возмущений при прямом численном моделировании.

Граничные условия задаются следующие: условие прилипания — на обтекаемой поверхности вне области отсоса; условие набегающего потока — на входной и верхней границах; линейная экстраполяция изнутри области для зависимых переменных — на выходной границе; в области отсоса на стенке граничное условие для вертикальной компоненты скорости модифицируется с помощью задания массового

потока газа $[\rho v]_w(x) = c_q / \sqrt{2\text{Re}_{\infty,x}}$.

По размаху крыла на границах расчетной области используется условие $df/dz=0$ для всех газодинамических величин f . Использование коэффициента отсоса c_q в такой форме удобно для проведения фундаментальных исследований, потому что для течений с простыми конфигурациями (например, плоская пластина) с введением такого коэффициента сохраняются автомодельные свойства профилей среднего течения. Отметим также, что для всех расчетов методом прямого численного моделирования область отсоса располагалась вниз по потоку от области генерации возмущения.

Исследование проводилось в два этапа. Сначала с помощью метода установления вычислялось поле стационарного ламинарного обтекания крыла для различных интенсивностей отсоса. Затем из полученного стационарного поля извлекались профили пограничного слоя в различных сечениях по x и решалась задача линейной теории устойчивости в локально-однородном приближении. В результате, для наиболее усиливающихся волн рассчитывались распределения инкрементов роста $\sigma(x)$ и коэффициенты интегрального усиления (N -факторы). Отметим, что интегрирование в данном случае производилось вдоль групповой скорости возмущений, направленной практически вдоль оси x .

Далее при анализе в рамках метода прямого численного моделирования установившееся стационарное поле течения использовалось в качестве начального при включении генератора возмущения. Затем производился нестационарный расчет вплоть до установления волнового поезда в пограничном слое до выходной границы (в случае стационарного генератора возмущений в процессе расчета получается стационарное решение).

3. РАСЧЕТ УСИЛЕНИЯ ВИХРЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Отсос газа приводит к искажению профилей среднего течения. В качестве примера на рис. 3 представлены поля поперечной скорости w в пристенной области в сечении $x=0.1$ для различных интенсивностей отсоса. Видно, что отсос пограничного слоя приводит к значительному ослаблению поперечной компоненты скорости, что локально приводит к ослаблению нарастания неустойчивостей поперечного течения.

Вторым важным фактором является релаксация профилей среднего течения после перехода в область без отсоса — ниже будет показано, что в этой области может сохраняться значительный эффект стабилизации пограничного слоя.

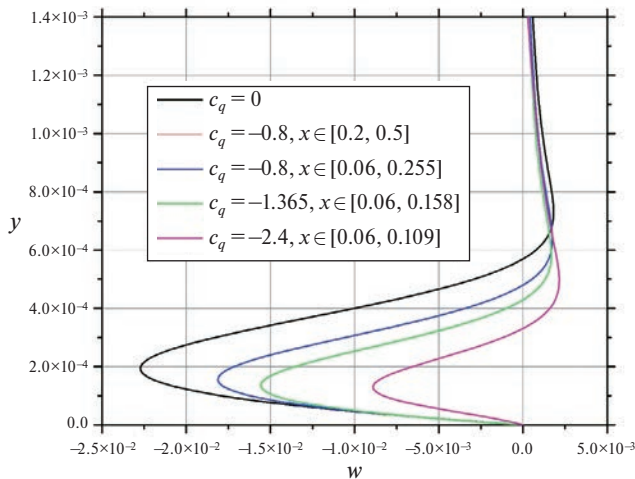


Рис. 3. Влияние отсоса на профили поперечной компоненты скорости (CF) внутри пограничного слоя в сечении $x = 0.1$.

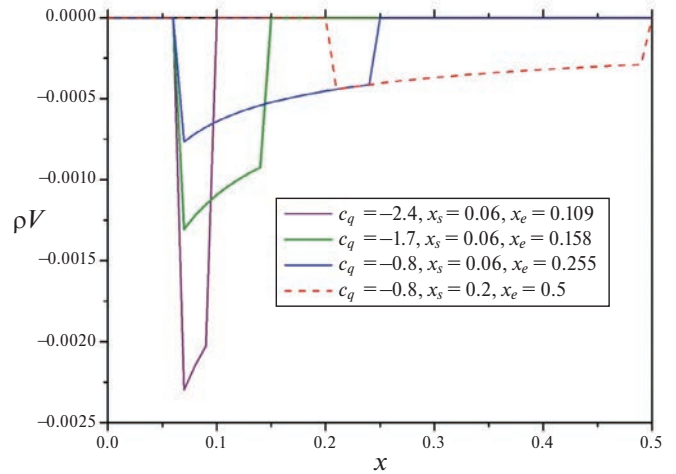


Рис. 4. Распределение массового расхода газа через стенку для различных положений области отсоса.

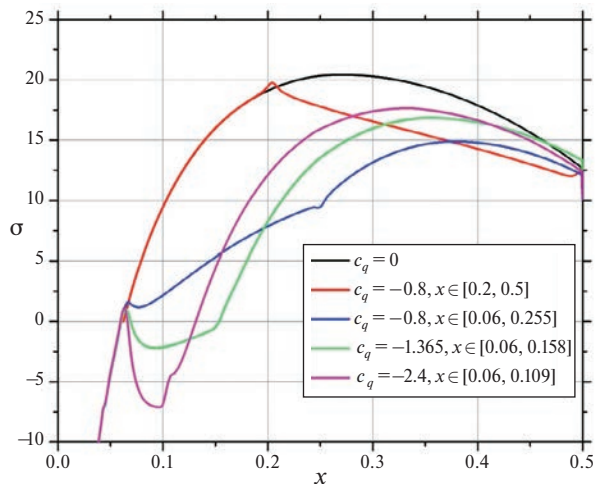


Рис. 5. Распределение инкрементов роста для стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения согласно линейной теории устойчивости для всех рассмотренных конфигураций отсоса.

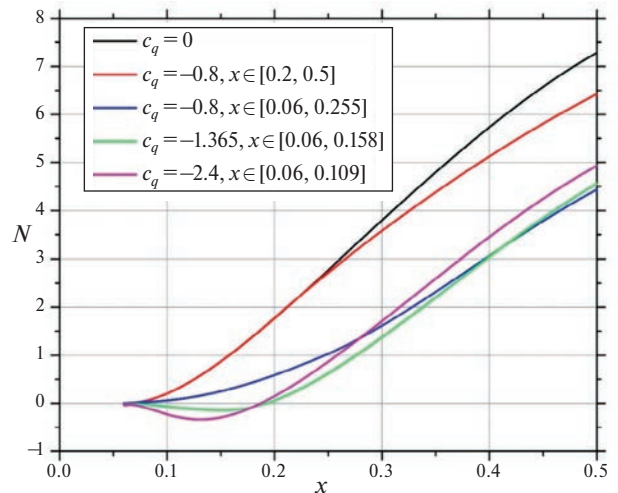


Рис. 6. Распределение N -факторов роста стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения согласно линейной теории устойчивости.

Производились расчеты ламинарного обтекания пластины с участком отсоса пограничного слоя интенсивностью $c_q = \text{const} = \{0.0, -0.8, -1.37, -2.40, -4.8\}$. Область отсоса варьируется для рассмотренных случаев: распределение массового расхода газа через стенку представлено на рис. 4.

Важно отметить, что для всех расчетных случаев площадь под графиком кривых остается постоянной, т.е. интегральный массовый расход газа через стенку постоянен. При этом даже в расчете с наименее протяженной областью отсоса газа выполнялось условие

$$\frac{x_{s2} - x_{s1}}{2\pi/\alpha_r} \gg 1,$$

что свидетельствует о справедливости применения локального подхода для анализа устойчивости в области воздействия во всех представленных выше случаях. Это позволяет сравнивать эффективность подавления CF -неустойчивостей для различных положений отсоса.

Для каждого рассмотренного случая рассчитывались инкременты стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения во всей области течения вниз по потоку от точки потери устойчивости (рис. 5). На рис. 6 показано влияние отсоса газа на расчетные N -факторы.

Расчет кривых усиления N -факторов для всех случаев проводится от точки $x = x_s$, что соответствует расчету усиления неустойчивых мод от положения генератора возмущения при прямом численном моделировании. Рассматриваются возмущения с фиксированной длиной волны вдоль размаха крыла $\lambda = 0.004$ (соответствует длине волны возмущений при прямом численном моделировании $\lambda = \lambda_z$).

Оказалось, что для всех рассмотренных случаев инкременты CF -неустойчивостей подавляются сразу после попадания в область с отсосом. При этом для высоких интенсивностей отсоса можно добиться затухания возмущений в области, где без отсоса наблюдается существенный рост. Кроме того, важным эффектом является поведение кривых усиления в области релаксации пограничного слоя: инкременты роста восстанавливают свои значения на значительном протяжении вдоль хорды крыла. В связи с этим с точки зрения подавления роста возмущений оказывается выгодно смещать область отсоса как можно выше по потоку: во-первых, подавляется рост возмущений в области где инкремент достигает максимальных значений, во-вторых, наблюдается значительный эффект стабилизации в максимально протяженной области релаксации. Этот вывод согласуется с расчетами, полученными в работе [3], и экспериментальными данными [4] для двумерных конфигураций течения.

4. ВЛИЯНИЕ ОТСОСА НА АМПЛИТУДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ПРЯМОМ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

При прямом численном моделировании развития стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения в пограничном слое производился анализ амплитуд возмущений в пограничном слое. Для каждой из рассмотренных конфигураций отсоса в заданном сечении по продольной координате x проводилось разложение сигнала – возмущения давления на стенке ($y = 0$) – по волновому числу (генератор стационарен по времени и преобразование Фурье по времени не требуется – на линейном режиме генерируются только стационарные моды):

$$\Delta p(z)|_{x,y} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\beta) \exp(i\beta z) d\beta. \quad (4.1)$$

Для сопоставления результатов с расчетами по линейной теории устойчивости выбиралось волновое число $\beta = 1560$ ($\lambda = 2\pi/\beta = 0.004$), что соответствует максимально усиливающейся волне в сечении $x = 0.5$ в расчете по линейной теории устойчивости (случай без отсоса).

В ПЧМ-расчете максимуму спектра $p(\beta)$ в сечении $x = 0.5$ соответствует близкое значение $\beta = 1620$. Проводя разложение (4.1) в каждом сечении по x , в результате получаем кривую усиления данной спектральной компоненты для всех рассмотренных конфигураций отсоса (рис. 7).

Видно, что при сдвигании области отсоса вверх по потоку происходит уменьшение интегрального усиления возмущений. Увеличение интенсивности отсоса с уменьшением области отсоса начиная с некоторого значения снова приводит к росту интегрального усиления. Данный результат качественно согласуется с расчетами по линейной теории устойчивости. Как и при рассмотрении в рамках линейной теории устойчивости оптимальное расположение области отсоса таково: начало отсоса вблизи точки потери устойчивости (и положения генератора) $x_s = 0.06$, протяженность области отсоса $x_e - x_s \approx 0.1 - 0.2$.

На рис. 8 представлены данные по эффективности отсоса: разница расчетного числа N -фактора в сечении $x = 0.5$ для рассматриваемого случая с отсосом (N^{suct}) и без него (N^0): $\Delta N = N_{x=0.5}^0 - N_{x=0.5}^{suct}$. Расчет проводится для всех случаев с положением начала области отсоса в точке $x_s = 0.06$.

Видно, что максимальная эффективность отсоса пограничного слоя как для расчетов по e^N -методу, так и для стационарного вихря неустойчивости поперечного течения при прямом численном моделировании реализуется при ширине области отсоса $d = 0.1$. Видно и то, что для волнового пакета при ПЧМ-расчете эффективность зоны отсоса оказывается выше, чем для расчета с помощью линейной теории устойчивости. Это связано с двумя факторами.

Во-первых, расчеты в рамках e^N -метода производятся в локально-однородном приближении пограничного слоя, т.е. без учета эффектов непараллельности основного течения. Известно, что в этом случае результаты расчетов дают несколько меньшие инкременты роста [12].

Во-вторых, при прямом численном моделировании N -факторы вычисляются от начального положения генератора, при этом в начальном сечении $x = 0.6$ предполагается равенство начальных амплитуд возму-

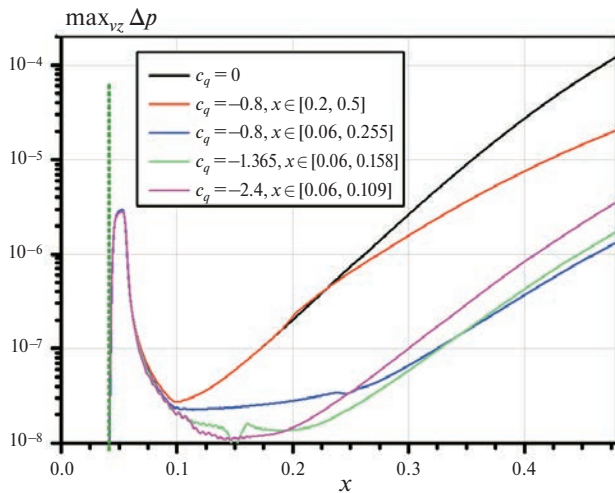


Рис. 7. Распределение максимума возмущения давления на стенке для стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения при прямом численном моделировании.

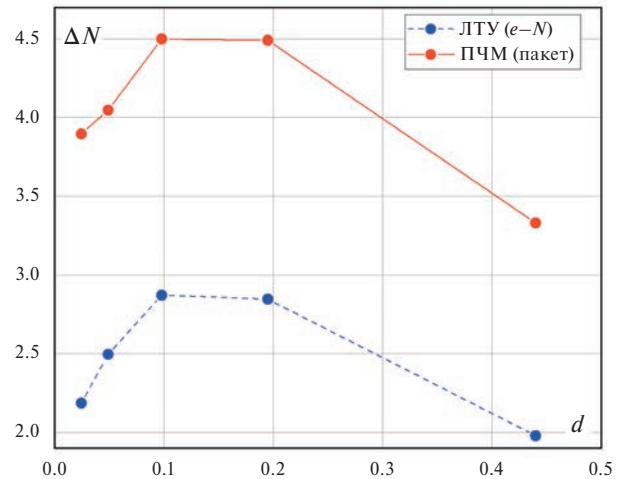


Рис. 8. Уменьшение N -фактора в зависимости от ширины области отсоса для e^N -расчета и для амплитуды возмущения давления на стенке при прямом численном моделировании.

шения давления на стенке для всех расчетных случаев: $N = \ln(P_{x=0.5}/P_{x=0.06})$. При этом амплитудная функция моды дискретного спектра не выделялась из Фурье-разложения (1), т.е. не производилось разложение волнового пакета по биортогональной системе мод, что для возмущения в области близкой к зоне генерации является трудоемкой задачей. Тем не менее данные расчеты показывают, что быстрые расчеты с помощью линейной теории устойчивости позволяют правильно оценивать влияние положения области отсоса на эффективность подавления роста неустойчивостей поперечного течения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнены расчеты усиления стационарных неустойчивостей поперечного течения в пограничном слое над стреловидным крылом с участком отсоса газа по нормали к стенке. Рассмотрены различные положения области отсоса, при этом интегральный массовый расход газа через стенку оставался постоянным. Расчет усиления неустойчивых мод выполнялся с помощью линейной теории устойчивости (e^N -метод в локально-однородном приближении) и прямого численного моделирования развития возмущений.

Оказалось, что для подавления роста CF -неустойчивостей наиболее выгодным положением начала отсоса является положение вблизи точки потери устойчивости для наиболее усиливающихся возмущений. Кроме того, при фиксации положения начала отсоса в точке потери устойчивости существует оптимальная протяженность области отсоса, при которой достигается максимальное подавление роста стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения.

Расчеты показали, что для выбранной интегральной интенсивности отсоса протяженность данной области составляет примерно 10% от хорды крыла.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00470).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Устинов М.В. Управление ламинарно-турбулентным переходом на стреловидном крыле с помощью микро-рельефа поверхности // Изв. РАН МЖГ. 2018. № 6. С. 43–54.
2. Joslin R.D. Overview of Laminar Flow Control // NASA Tech. Pap. NASA/TP-1998-208705, 1998.
3. Balakumar P., Hall P. Optimum Suction Distribution for Transition Control // Theor. Comput. Fluid Dyn. 1999. V. 13. P. 1–19. <https://doi.org/10.1007/s001620050109>

4. Reynolds G.A., Saric W.S. Experiments on the Stability of the Flat-Plate Boundary Layer with Suction // AIAA J. 1986. V. 24. P. 202–207. <https://doi.org/10.2514/3.9246>
5. Smith B.A. F-16XL flights could aid in HSCT design // Aviat. Week and Space Technol. Oct. 23, 1995. P. 42–44.
6. Schülein E. Experimental Investigation of Laminar Flow Control on a Supersonic Swept Wing by Suction // 4th Flow Control Conference, 23–26 June 2008, Seattle, Washington. AIAA 2008–4208. <https://doi.org/10.2514/6.2008-4208>
7. Hein S., Schülein E., Hanifi A., Sousa J., Arnal D. Laminar Flow Control by Suction at Mach 2. // CEAS/KATnet II Conference on Key Aerodynamic Technologies, 2009.
8. Balakumar P. Control of Supersonic Boundary Layers Using Steady Suction // 36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. 2006. Conference Paper 20060022120.
9. Новиков А.В., Образ А.О., Тимохин Д.А. Влияние отсоса пограничного слоя на неустойчивость поперечного течения на сверхзвуковом скользящем крыле // Уч. зап. ЦАГИ. 2023. Т. LIV. № 2. С. 16–23.
10. Егоров И.В., Новиков А.В., Фёдоров А.В. Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода при гиперзвуковых скоростях потока на супер-ЭВМ // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57. № 8. С. 1347–1373. <https://doi.org/10.7868/S0044466917080063>
11. Образ А.О., Федоров А.В. The high-speed flow stability (HSFS) software package for stability analysis of compressible boundary layers // TsAGI Sci. J. 2017. V. 48. P. 223–242. <https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2017022797>
12. Padhye A.R., Nayfeh A.H. Nonparallel stability of three-dimensional flows // AIAA Pap. 1981. P. 81–1281.

GAS SUCTION EFFECT ON THE CROSSFLOW INSTABILITY IN FLOW PAST A SWEEP WING

A. V. Novikov^{a, b}, A. O. Obraz^{a, b, *}, and D. A. Timokhin^b

^a Zhukovski Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovski, Moscow region, 140180 Russia

^b Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow region, 141170 Russia

* E-mail: obraz.ao@mipt.ru

The results of the swept wing boundary layer stability investigation are presented for the case, when the wing surface has a region of gas suction through the wall normal to the surface, while the wing is in Mach number 2 flow. In the flow regime considered the predominant boundary layer instability type is the crossflow instability. The gas suction effect on the development of unstable modes in the boundary layer is investigated using the linear stability theory and direct numerical modeling. The numerical modeling of laminar (undisturbed) flow fields with regions of gas suction and disturbed flow fields is carried out by integrating Navier–Stokes equations. An analysis within the framework of the linear stability theory is performed using the e^N -method. The suction region location is varied with conservation of the integral intensity. It is shown that the mode instability growth can be considerably suppressed at the expense of an optimal disposition of the suction region.

Keywords: crossflow instability, suction, linear theory of stability, direct numerical modeling

УДК 532.526.3:533.6.011.55:519.63

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН И СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ С ЗАТУПЛЕННОЙ ПЕРЕДНЕЙ КРОМКОЙ

© 2024 г. И. В. Егоров^{a, b}, Н. К. Нгуен^a, П. В. Чувахов^{a, b, *}

^a Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

^b Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, г. Жуковский, Россия

* E-mail: pavel_chuvahov@mail.ru

Поступила в редакцию 30.10.2023 г.

После доработки 17.11.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

Расчетным путем исследовано взаимодействие слабых ударных волн в виде N-волны со сверхзвуковым ламинарным пограничным слоем на плоской пластине с затупленной передней кромкой при числе Маха набегающего потока $M = 2.5$. Численные результаты сопоставлены с известными экспериментальными данными. Обсуждается совместное влияние N-волны и притупления передней кромки на процесс ламинарно-турбулентного перехода.

Ключевые слова: численное моделирование, уравнение Навье–Стокса, волна Маха, слабая ударная волна, плоская пластина с затупленной передней кромкой, сверхзвуковой пограничный слой

DOI: 10.31857/S1024708424020102 EDN: RIVINY

ВВЕДЕНИЕ

Турбулизация сжимаемых пограничных слоев существенно влияет на аэротермодинамические характеристики высокоскоростной авиационной техники, приводя к значительному увеличению сопротивления вязкого трения и тепловых потоков к обтекаемой поверхности. Поэтому тепловой режим поверхности сверхзвукового летательного аппарата может быть корректно проанализирован, только если положение ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) пограничного слоя предсказано с достаточной точностью.

Сценарий, по которому развивается ЛТП пограничного слоя, существенно зависит от уровня возмущений в набегающем потоке [1]. В сверхзвуковых аэродинамических трубах (АДТ) имеются акустические пульсации в рабочей части [2–4], обусловленные шумом турбулентного пограничного слоя на стенках сопла и рабочей части, а также различными неровностями на них. На гладких моделях ЛТП может сопровождаться появлением турбулентных клиньев [5], которые возникают в некоторых местах над обтекаемой поверхностью и не меняют своего расположения от пуска к пуску АДТ.

Одной из причин возникновения турбулентных клиньев могут являться возмущения от неровностей поверхности рабочей части АДТ, которые приводят к порождению пары слабых ударных волн в виде N-волн, распространяющихся в набегающем потоке (в некоторых работах их называют волнами Маха).

С N-волнами экспериментаторы связывают аномально высокие уровни пульсаций массового расхода (до 20% от среднего удельного массового расхода в набегающем потоке) в пограничном слое плоского треугольного крыла с притупленной передней кромкой [6]. Дело в том, что взаимодействие N-волны и пограничного слоя вблизи притупления приводит к появлению около линии растекания возмущений, которые распространяются в пограничном слое вниз по потоку. Наиболее энергоемкой является низкочастотная (до 3 кГц) часть наблюдаемых пульсаций. Аналогичные эксперименты [7] по возбуждению N-волной высокоинтенсивных возмущений в пограничном слое на модели плоского дельта-крыла показали, что максимальная величина пульсаций составляет 12–15% и слабо зависит от условий обтекания. Различные аспекты взаимодействия N-волн и сверхзвукового пограничного слоя рассмотрены в последующих экспериментальных работах [8–10].

Численному моделированию взаимодействия N-волн и сверхзвукового пограничного слоя на заостренной пластине посвящены работы [11–13]. В частности, в труде [11] разработана оригинальная методика моделирования тонкой неровности на стенке рабочей части АДТ.

Наша статья является развитием работ [11–13] и направлена на исследование случая пластины с цилиндрически притупленной передней кромкой, обтекаемой воздушным потоком при числе Маха $M = 2.5$. Численное исследование проводится в рамках полных уравнений Навье–Стокса, а стационарные решения получаются методом установления по времени. Результаты численного моделирования сопоставляются с данными аэродинамического эксперимента [8].

Следует отметить, что в отличие от случая заостренной пластины расчет сверхзвукового обтекания затупленной пластины имеет ряд вычислительных особенностей, связанных с взаимодействием N-волны с головной ударной волной перед притуплением. Такие особенности обсуждаются в нашей работе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Основные условия задачи и параметры потока соответствуют экспериментальному исследованию [8], которое выполнено в малотурбулентной сверхзвуковой АДТ Т-325 Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения Российской академии наук. Общая конфигурация задачи схематично представлена на рис. 1. Рассматривается течение воздуха в рамках модели совершенного двухатомного газа.

В работе [8] N-волна возбуждалась на стенке рабочей части с помощью изолянты, которая наклеивалась на расстоянии $x^* = -233.5$ мм вверх по потоку от передней кромки пластины и формировала малую двухмерную неровность (координата $x^* = 0$ соответствует передней кромке пластины; звездочка обозначает размерную величину).

При численном моделировании N-волны использована эквивалентная модель [11], в которой тонкая двухмерная прямоугольная неровность заменяется параболической дужкой $z_1 = \varepsilon F(x_1)$ (рис. 2):

$$\begin{aligned} F(x_1) &= 4x_1(1-x_1), \\ x_1 &= (x^* - x_0^*)/a^*, \\ z_1 &= (z^* - z_{\min}^*)/a^*, \\ \varepsilon &= h^*/a^*, \end{aligned}$$

где h^* – толщина прямоугольной неровности; a^* – ее ширина.

Возмущения давления, скорости и температуры, индуцированные модельной неровностью в сверхзвуковом потоке, рассчитаны с помощью формул Аккерета:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{p - p_\infty}{\rho u_\infty^2} = \varepsilon \frac{F'(x_1)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + O(\varepsilon^2), \quad \Delta u = \frac{u - u_\infty}{u_\infty} = -\varepsilon \frac{F'(x_1)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + O(\varepsilon^2), \\ \Delta w &= \frac{w}{u_\infty} = \varepsilon F'(x_1) + O(\varepsilon^2), \quad \Delta T = \frac{T - T_\infty}{T_\infty} = \varepsilon \frac{(\gamma - 1) M_\infty^2 F'(x_1)}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

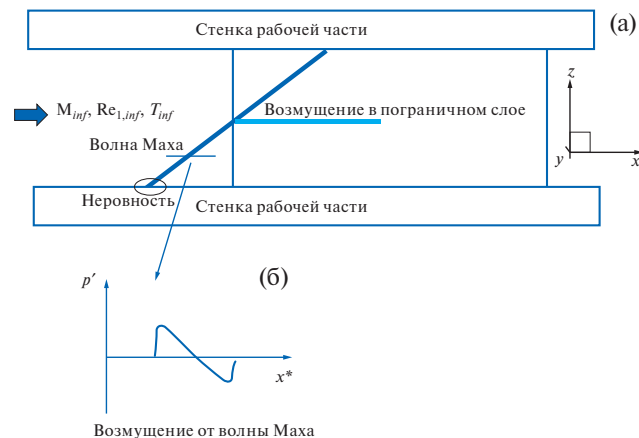


Рис. 1. Схема (а) взаимодействия N-волны, возбуждаемой двумерной неровностью на боковой стенке аэродинамической трубы (вид сверху) и возмущение давления p' от N-волны (б); M_{inf} , $Re_{1,inf}$, T_{inf} – число Маха, единичное число Рейнольдса, статическая температура набегающего потока соответственно.

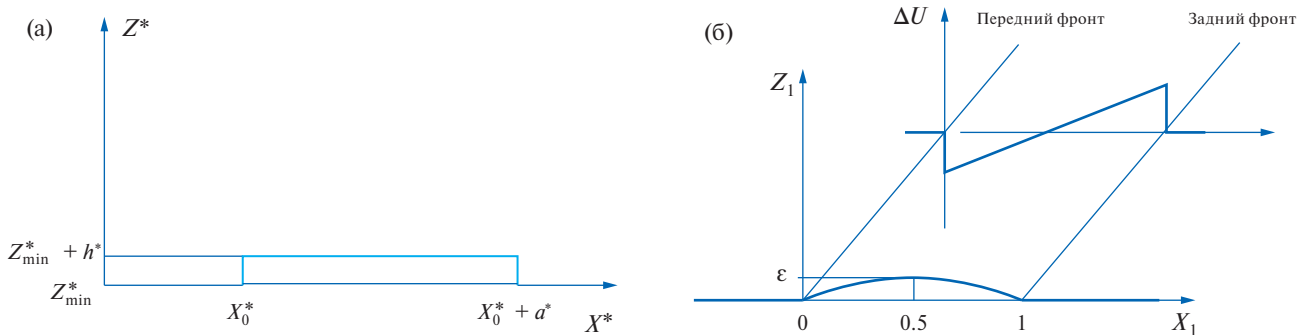


Рис. 2. Тонкая лента (а) и ее эквивалентная математическая модель (б).

В нашей работе рассматривается N-волна с амплитудой 1%, которая соответствует геометрическим параметрам ленты $a^* = 20$ мм, $h^* = 0.2$ мм, $x_0^* = -251$ мм.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для решения численной задачи использован оригинальный пакет программ [14], с помощью которого проводится численное моделирование на основе полных уравнений Навье–Стокса. Уравнения Навье–Стокса интегрируются в безразмерных переменных. Декартовы координаты $x^* = xL$, $y^* = yL$, $z^* = zL$ отнесены к характерному масштабу длины L , время $t^* = tL/V_\infty$ – к характерному масштабу времени L/V_∞ , компоненты вектора скорости $u^* = u/V_\infty$, $v^* = v/V_\infty$, $w^* = w/V_\infty$ – к модулю вектора скорости набегающего потока V_∞ , давление $p^* = p/(p_\infty V_\infty^2)$ – к удвоенному скоростному напору набегающего потока, остальные газодинамические переменные – к их значениям в набегающем потоке. Звездочка в верхнем индексе обозначает размерную величину; если звездочка отсутствует, переменная предполагается безразмерной. Символ ∞ соответствует значению переменной в набегающем потоке. В нашей работе $L = 1$ м.

Динамический коэффициент молекулярной вязкости вычисляется по формуле Сазерленда $\mu = (1 + T_\mu)/(T + T_\mu) T^{3/2}$, где $T_\mu = T_\mu^*/T_\infty^* = 110.4 \text{ К} / 103.6 \text{ К} \approx 1.07$. Газ является совершенным с постоянными показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ и числом Прандтля $Pr = \mu^* c_p^* / \lambda^* = 0.72$. Для замыкания задачи использовано уравнение состояния совершенного газа $\gamma M_\infty^2 p = \rho T$.

Набегающий поток считается ламинарным, а фоновые пульсации массового расхода, которые в эксперименте [8] достигали величины 0.4%, отсутствуют.

РАСЧЕТНАЯ СЕТКА И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

При численном моделировании расчетная область разбита на две подобласти. Подобласть 1 целиком находится перед затупленной пластиной и используется для моделирования стационарного распространения N-волны. Подобласть 2 содержит затупленную пластину и небольшой участок перед ней. Подобласть 1 представлена на рис. 3а для случая обтекания пластины с острой передней кромкой и на рис. 3б для случая обтекания пластины с затупленной передней кромкой.

На рис. 3 также построены сечения с полями продольной компоненты вектора скорости и одна из сеточных плоскостей. Левые границы рис. 3а и 3б соответствуют стенке АДТ; на них накладывается условие прилипания потока и теплоизолированной поверхности, а также условие возбуждения N-волны, описанное выше. N-волна распространяется вниз по потоку. Из приведенных данных можно заключить, что максимальное относительное возмущение продольной компоненты вектора скорости, вызванное неровностью, составляет около 1.4%.

Боковые границы подобласти 1 не визуализированы на рис. 3; на ближней к читателю границе накладывается условие первого рода, соответствующее набегающему вдоль оси x газовому потоку. На другой границе накладывается мягкое граничное условие в виде экстраполяции всех зависимых газодинамических переменных задачи изнутри расчетной области вдоль сеточных линий. На верхней и нижней границах по оси y накладываются условия симметрии.

Установившееся течение с N-волной в подобласти 1 используется для формулирования стационарного граничного условия в подобласти 2. Для этого все зависимые переменные с выходной (правой) границы

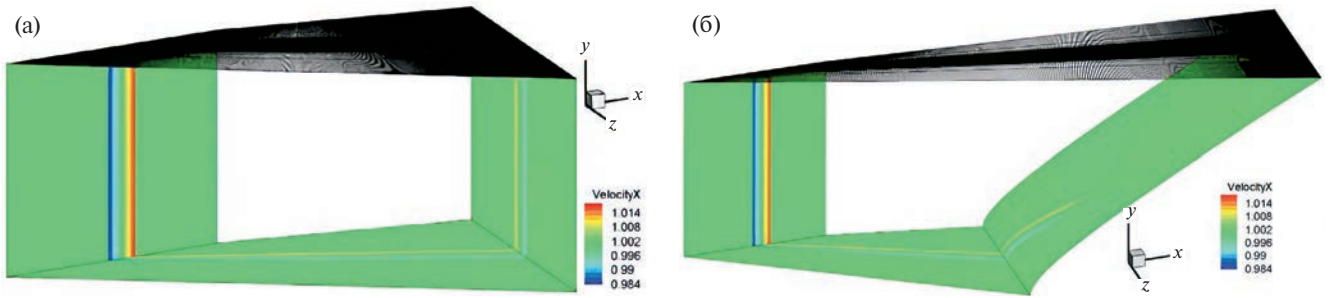


Рис. 3. Расчетная подобласть 1 для пластины с острой (а) и с затупленной (б) передней кромкой

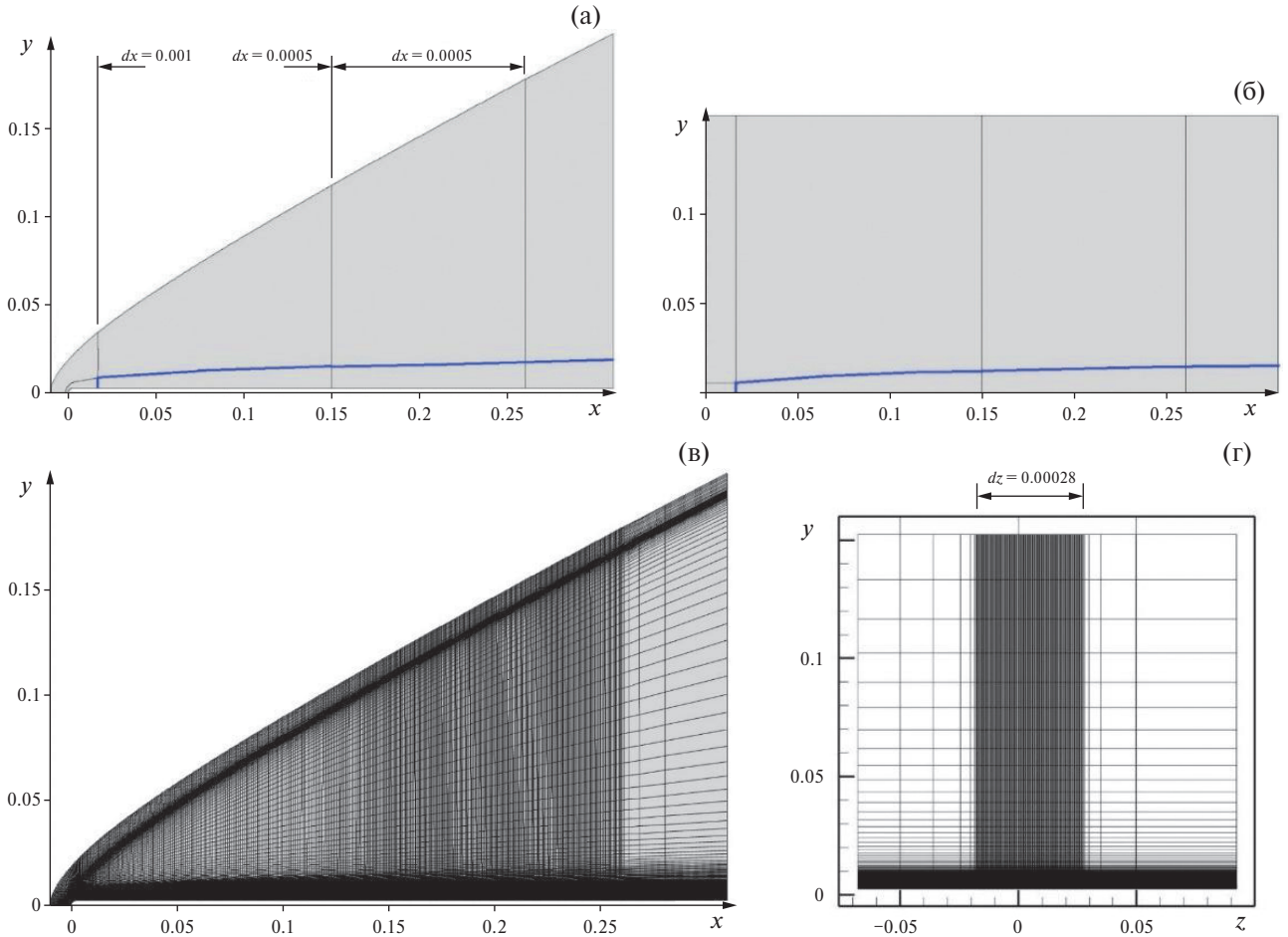


Рис. 4. Расчетная подобласть 2 и фрагменты расчетной сетки: (а) – сечение xu , затупленная кромка; (б) – сечение xu , острая кромка; (в) – сетка в сечении xu , затупленная кромка; (г) – сетка в сечении yz , острая кромка.

подобласти 1 накладываются в виде условия первого рода во входном (левом) сечении подобласти 2. При этом выходное сечение подобласти 1 и входное сечение подобласти 2 совпадают узел в узел. Расчетная сетка в области 2 показана на рис. 4.

На рис. 4в, г изображены также фрагменты расчетной сетки в двух характерных сечениях, иллюстрирующие ее сгущение в различных направлениях. В продольном направлении расчетная сетка имеет буферную зону (рис. 4в) для демпфирования возмущений в выходном сечении.

В подобласти 2 на поверхности пластины накладываются условия прилипания и теплоизолированной поверхности. На выходной границе подобласти 2 задается мягкое граничное условие. На границах в боковом направлении, а также на границе $x < 0, y = 0$ накладывается условие симметрии.

Размер ячейки расчетной сетки по направлению x показан на рис. 4а, по направлению z – на рис. 4г. По нормальному к пластине направлению y сетка сгущена к стенке. По опыту расчетных исследований,

мелкость сетки в пограничном слое оказывается избыточной для получаемых установившихся ламинарных полей течения, в том числе, возмущенных падающей слабой ударной волной.

Кроме этого, сетка имеет дополнительное сгущение в окрестности ударной волны при обтекании затупленной пластины (рис. 4г). Для сопоставления полей возмущений на пластинах с затупленной и с острой передней кромкой, в обоих случаях формируются идентичные сеточные подобласти, ограниченные синей линией на рис. 4а и 4б.

Особенность моделирования взаимодействия N-волны и ударной волны

При взаимодействии N-волны с головной ударной волной, возникающей перед притуплением, появляются вычислительные трудности, которые могут приводить к численной неустойчивости процесса расчета. Причины этого связаны с особенностями моделирования скачков уплотнения с применением схем сквозного счета [15, 16]. Одним из способов избежать численную неустойчивость такого рода является выравнивание сеточных плоскостей вдоль скачка и измельчение расчетной сетки в его окрестности в целях разрешения профиля ударной волны. Выбор оптимального значения сеточного разрешения на ударной волне учитывает выводы работы [16] и опирается на тестовые расчеты, проведенные в рамках настоящей работы.

На рис. 5 показана структура ударной волны вдоль линии симметрии s_1 (рис. 6а), полученная при решении уравнений Навье–Стокса. Толщина ударной волны, обусловленная конечными значениями вязкости и теплопроводности, составляет примерно 4 мкм. Данные рис. 5 свидетельствуют о сходимости расчетных данных на сетках с различным сгущением.

Чтобы изучить особенности полученных решений, на различных сетках рассматриваются распределения вдоль линий ($x = \text{const}$, $y = \text{const}$), где точка $(x^*, y^*) = (-0.0002, 0)$ находится на линии торможения (s_1), а $(x^*, y^*) = (0.00245, 0.0026)$ – в пограничном слое вблизи сопряжения притупления с плоской поверхностью. Разрешение ударной волны анализируется в зависимости от шага расчетной сетки Δx поперек нее.

Из рис. 6б, на которой проиллюстрировано поле давления в сечении $y = 0$ и расчетная сетка в данном сечении, следует, что ударная волна попадает в область повышенного сеточного разрешения и не выходит за ее пределы. Из рис. 7–9, на которых представлены распределения давления, температуры и скорости вдоль линий s_1 и s_2 в зависимости от Δx поперек ударной волны, следует, что в области ударной волны s_1 осцилляции существенно сильнее, чем в пограничном слое s_2 .

По мере уменьшения величины Δx расчет становится более устойчивым, а распределения характеристик вдоль линий s_1 и s_2 остаются вблизи некоторого среднего распределения с погрешностью, не превосходящей 10^{-3} . Это наблюдение соответствует выводам других исследователей о том, что схемы сквозного счета корректно воспроизводят параметры потока до и после скачка, а проблемы с устойчивостью счета связаны с внутренней структурой скачка и исчезают по мере разрешения вязкой структуры скачка [16].

По результатам данного анализа выбран оптимальный размер ячейки, который зафиксирован для последующих расчетов: $\Delta x = 6 \times 10^{-7}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Визуализация течения

Рассмотрим процесс взаимодействия N-волны с пограничным слоем с помощью визуализации поля продольной компоненты скорости в различных сечениях. Для сравнения также представлены результаты расчетов [11–13] для случая острой пластины.

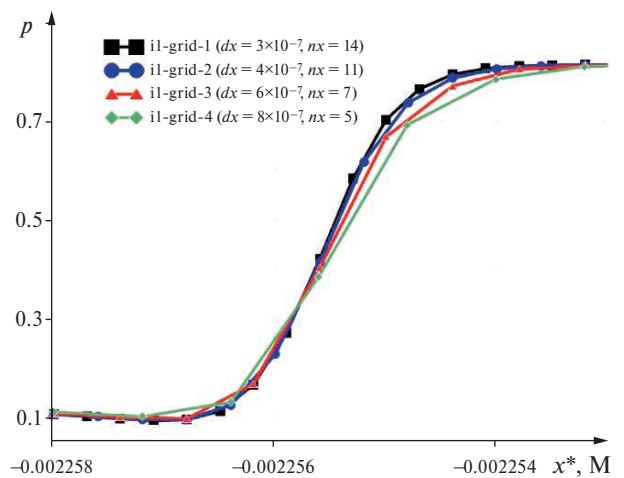


Рис. 5. Распределение давления поперек ударной волны в сечении s_1 при $y = 0$.

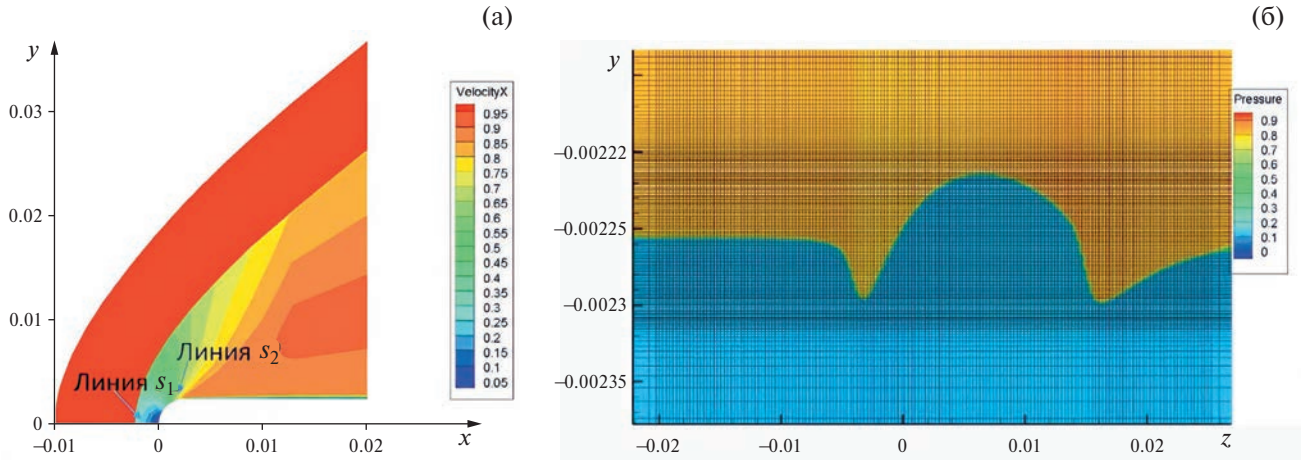


Рис. 6. Поле продольной компоненты вектора скорости в сечении xy (а) и поле давления в сечении xz при $y = 0$ ($\Delta x^* = 8 \times 10^{-7} \text{ м}$) (б).

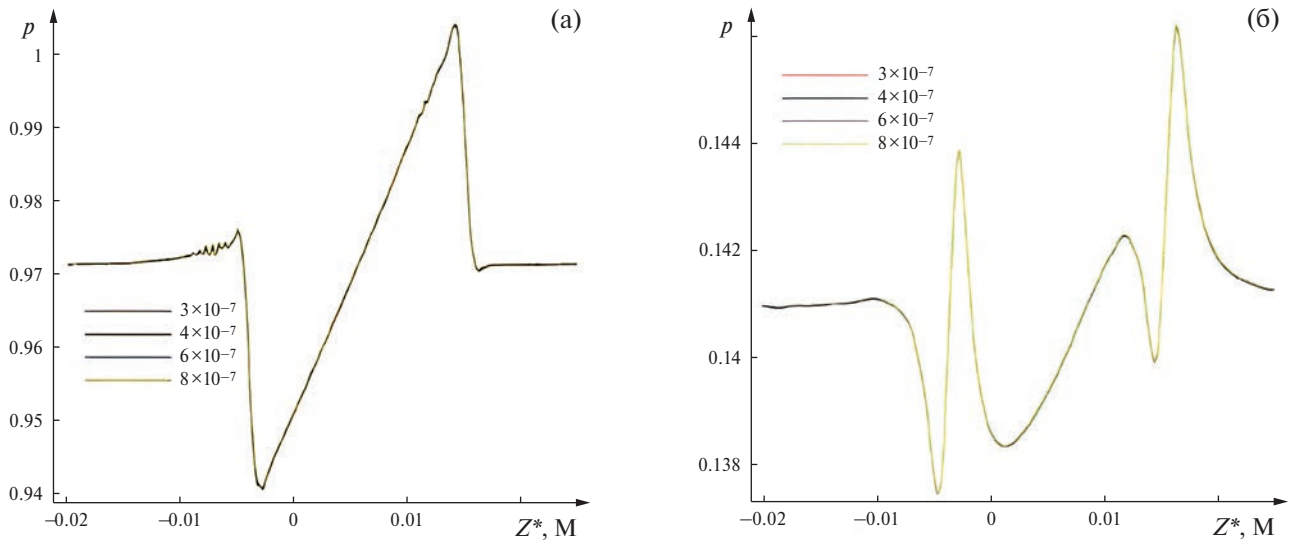


Рис. 7. Давление вдоль линии s_1 (а) и линии s_2 (б).

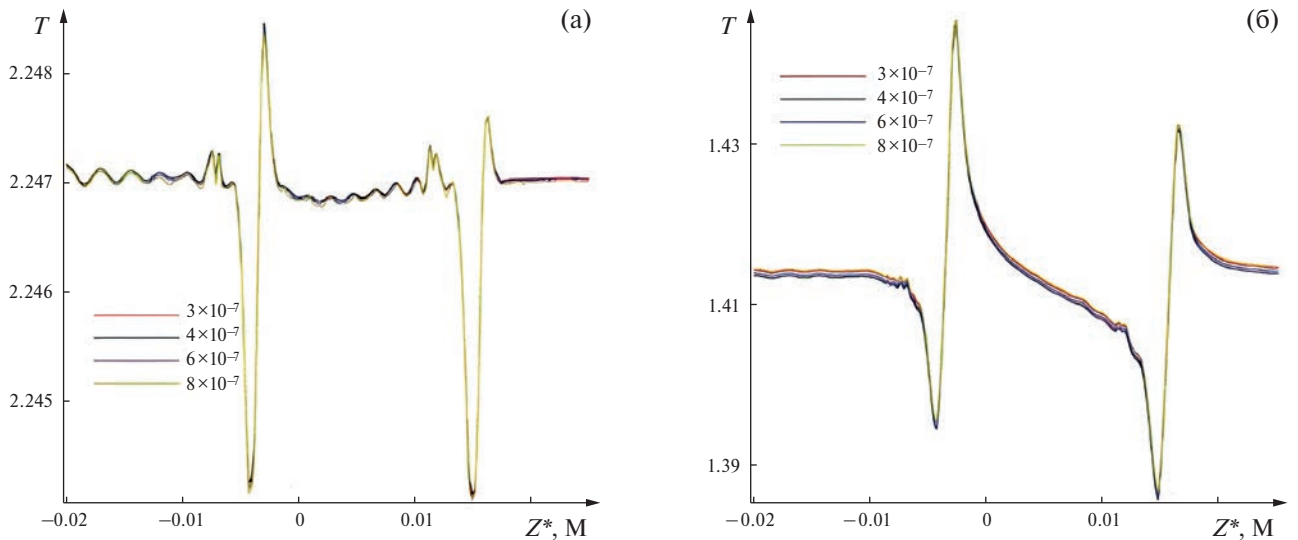


Рис. 8. Температура вдоль линии s_1 (а) и линии s_2 (б).

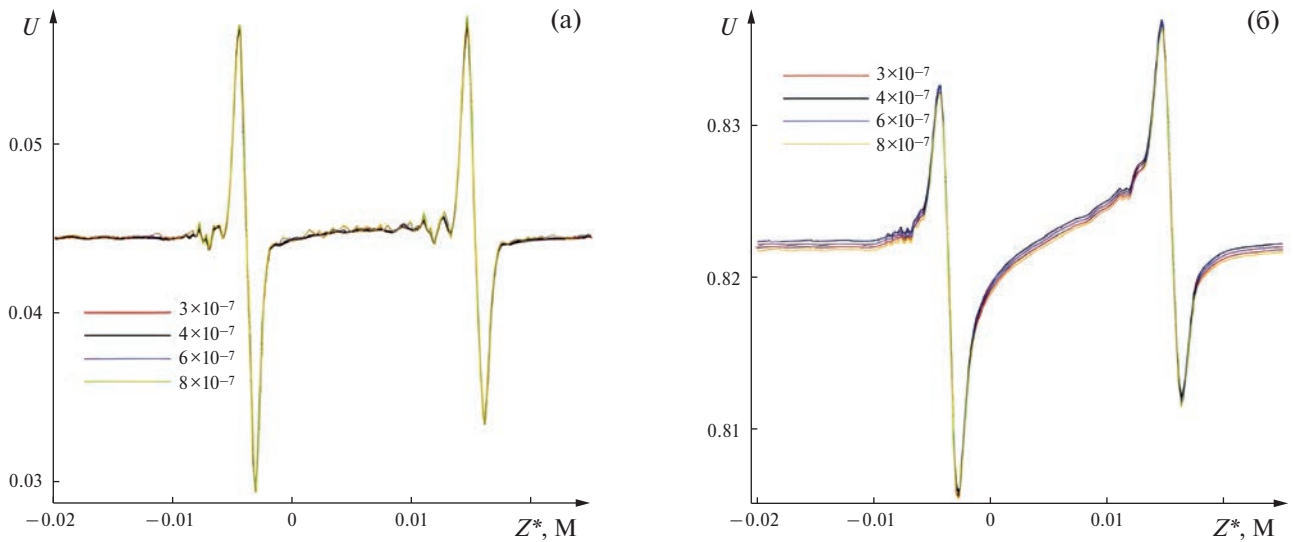


Рис. 9. Продольная компонента скорости вдоль линии s_1 (а) и линии s_2 (б).

По рис. 10а и 11а видно, что влияние N-волны на пограничный слой на заостренной пластине проявляется в виде слабого утолщения пограничного слоя в области переднего фронта N-волны при $z \approx 0.13$, который приводит к появлению дефицита скорости в пограничном слое. Аналогично наблюдается слабое утончение пограничного слоя в области заднего фронта N-волны при $z \approx 0$, которое приводит к появлению избытка скорости в пограничном слое.

В случае притупленной передней кромки (рис. 10б и 11б) влияние N-волны проявляется иначе на качественном уровне. В частности, наблюдаются две изолированные друг от друга локальные области утолщения и утончения пограничного слоя при $z \approx -0.03$ и при $z \approx 0.16$, причем изменение толщины пограничного слоя выражено заметно сильнее.

На рис. 12 показаны соответствующие поля продольной компоненты скорости показаны на виде сверху в сечении $y^* = 0.0029$ м. За острой кромкой образуется широкий след из пары вихрей (в соответствии с исходной терминологией [6–10]), а за затупленной кромкой образуются два изолированных друг от друга следа меньшего поперечного размера.

Более наглядно качественное отличие между случаями острой и притупленной кромки можно проследить на рис. 13–14, где в различных сечениях показаны поля возмущения продольной составляющей вектора скорости относительно течения без N-волны. Как отмечено ранее, за острой передней кромкой образуется

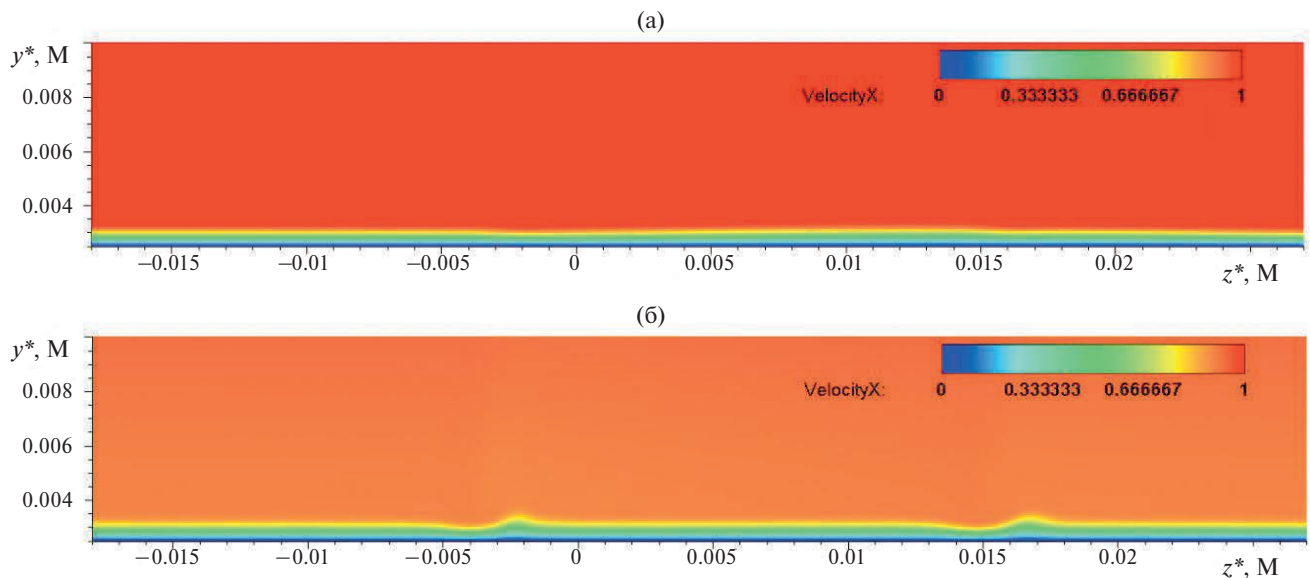


Рис. 10. Продольная компонента скорости в сечении $x^* = 0.06$ м: острая (а) и затупленная (б) пластина.

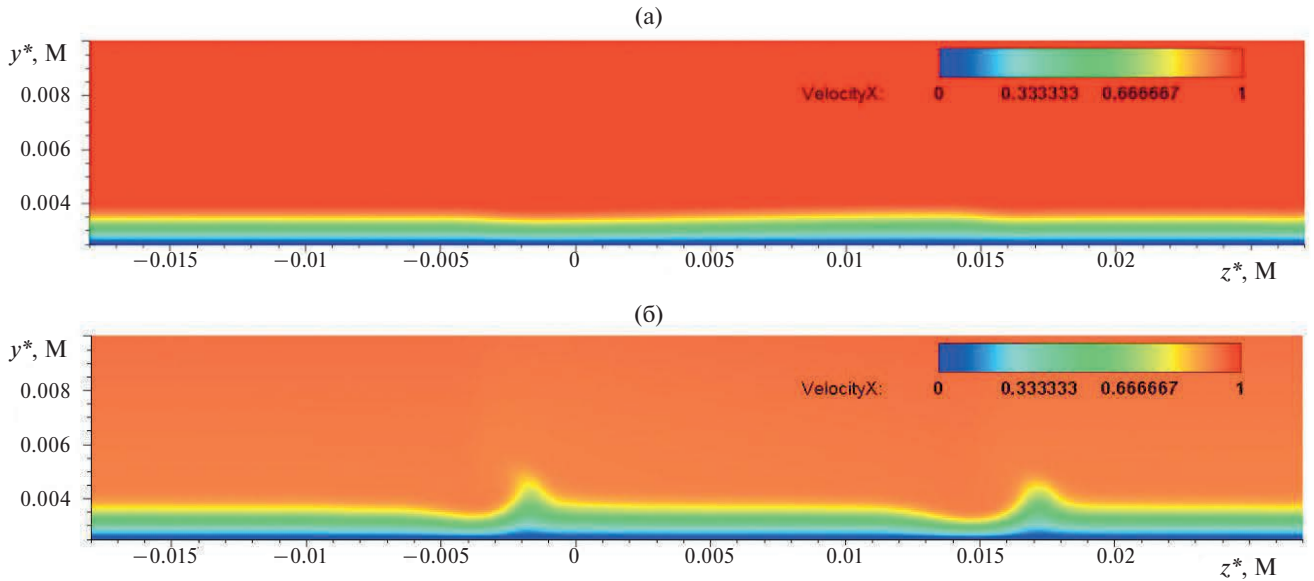


Рис. 11. Продольная компонента скорости в сечении $x^* = 0.2$ м: острая (а) и затупленная (б) пластина.

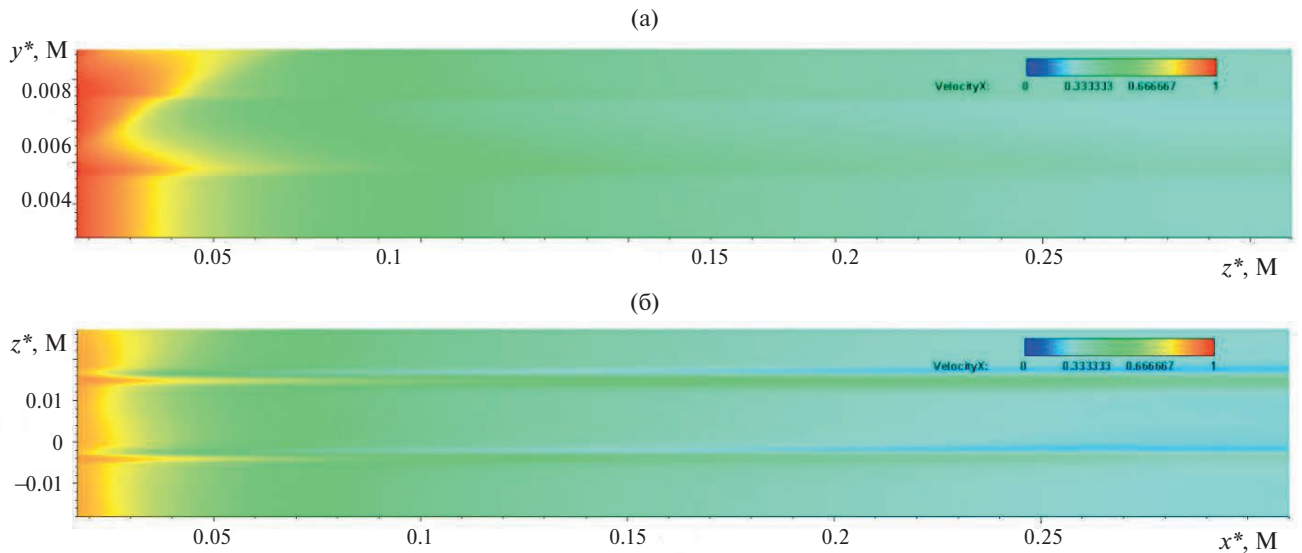


Рис. 12. Поле продольной компоненты скорости в сечении $y^* = 0.0029$ м: острая (а) и затупленная (б) пластина.

след, соответствующий дефициту и избытку скорости, соответственно, на переднем и заднем фронтах N-волны. В этом случае след имеет большой размер, но амплитуда возмущений в нем относительно мала.

В случае затупленной пластины образуются два таких следа: один соответствует переднему фронту N-волны, второй – заднему. Эти следы имеют меньший размер, но амплитуда соответствующих возмущений примерно втрое выше по сравнению со случаем острой передней кромки.

Сравнение с экспериментальными данными

Для валидации расчетных результатов задачи взаимодействия N-волны с затупленной пластиной проведено сравнение среднего значения массового расхода и среднеквадратичного значения пульсаций массового расхода с экспериментальными данными из работы [8].

Анализ расчетных данных указывает на то, что нестационарность, связанная с N-волной, является слабой. Поэтому при обтекании затупленной пластины взаимодействие N-волны с пограничным слоем можно в главном приближении считать стационарным. В этом случае справедлива процедура численного

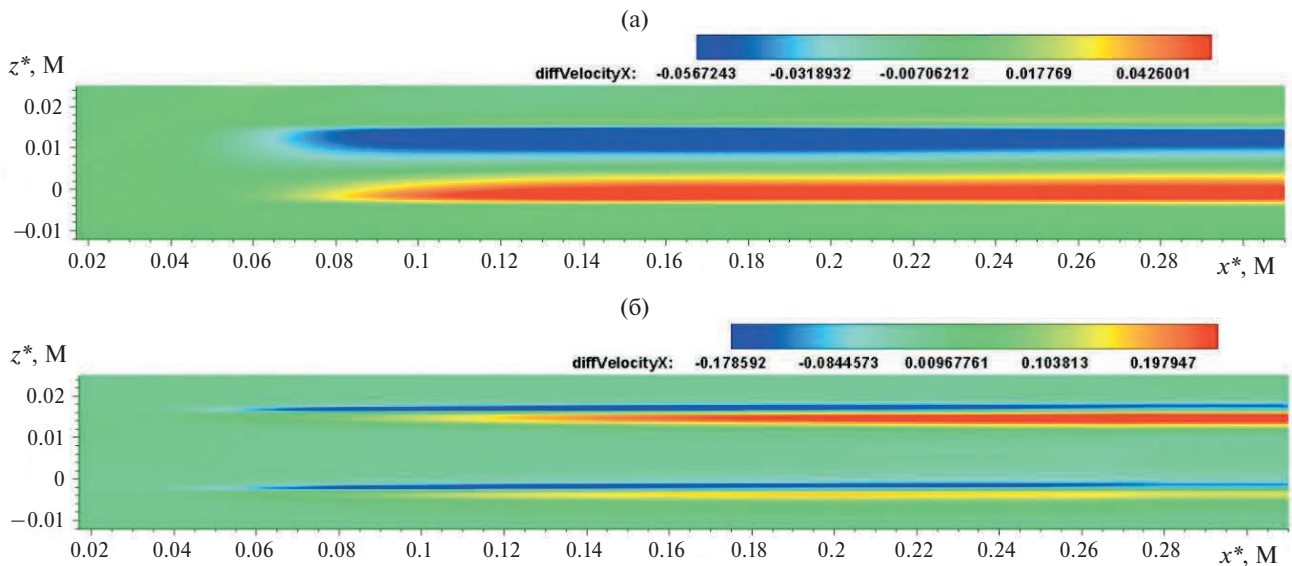


Рис. 13. Возмущение продольной компоненты скорости в сечении $y^* = 0.0033$ м: острая (а) и затупленная (б) пластина.

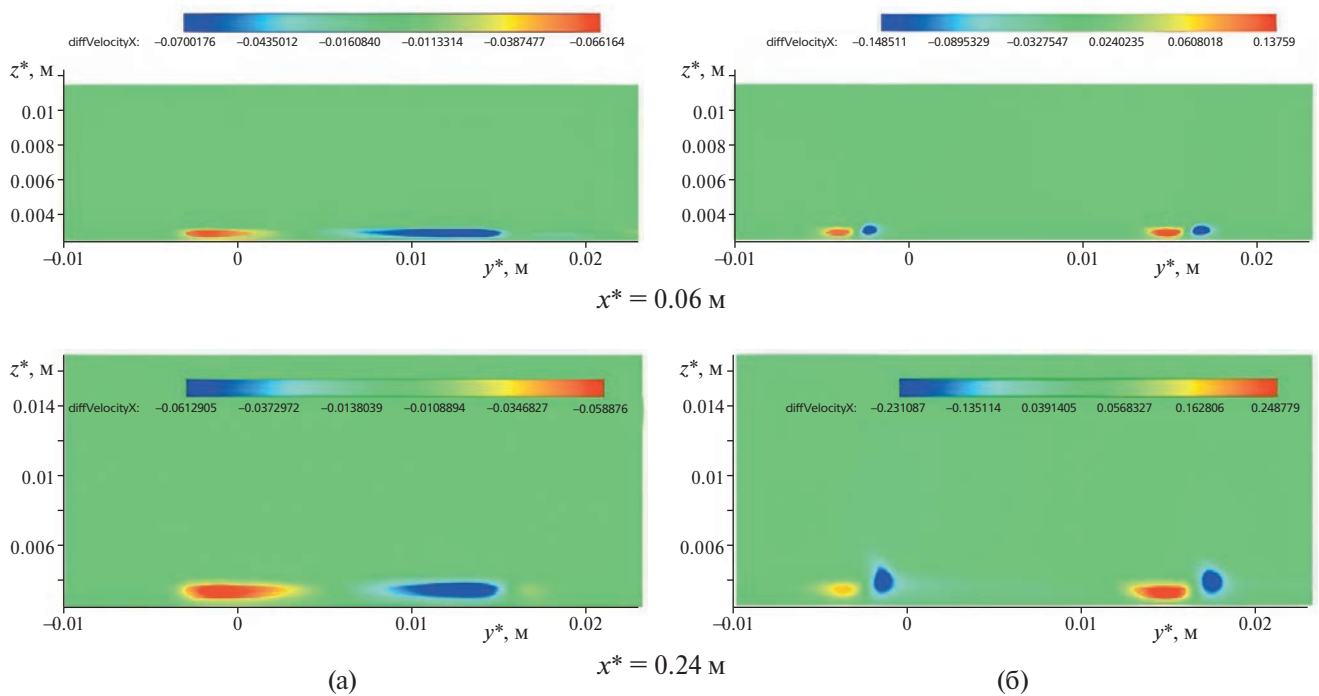


Рис. 14. Возмущение продольной компоненты скорости: острая (а) и затупленная (б) пластина при разных x^* .

анализа среднеквадратичного значения пульсаций массового расхода, приведенная в [13]. Так как пульсации N-волны наблюдаются в диапазоне малых частот, предположим, что их можно считать квазистационарными. В этом приближении N-волна и возбуждаемые ею возмущения осциллируют в направлении оси z как целое. Тогда перемещение таких пульсаций есть

$$\Delta m'_{N-wave} = f'(z) \Delta z(t),$$

где $f(z)$ – распределение стационарного массового расхода.

Пусть фоновые пульсации массового расхода в потоке без N-волны равны $\Delta m'_F(t)$ и не зависят от z . Тогда суммарные пульсации (дрожащая N-волна плюс фон) имеют вид

$$\Delta m' = \Delta m'_{N-wave} + \Delta m'_F.$$

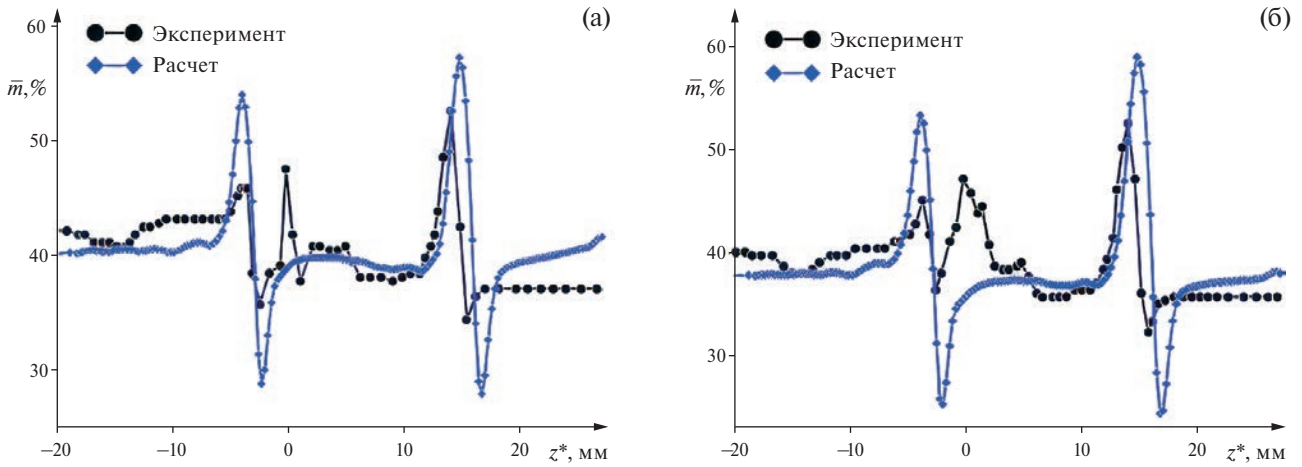


Рис. 15. Средние значения массового расхода: (а) $-x^* = 60$ мм, $y^* \approx 2.983$ мм, (б) $-x^* = 90$ мм, $y^* \approx 3.079$ мм.

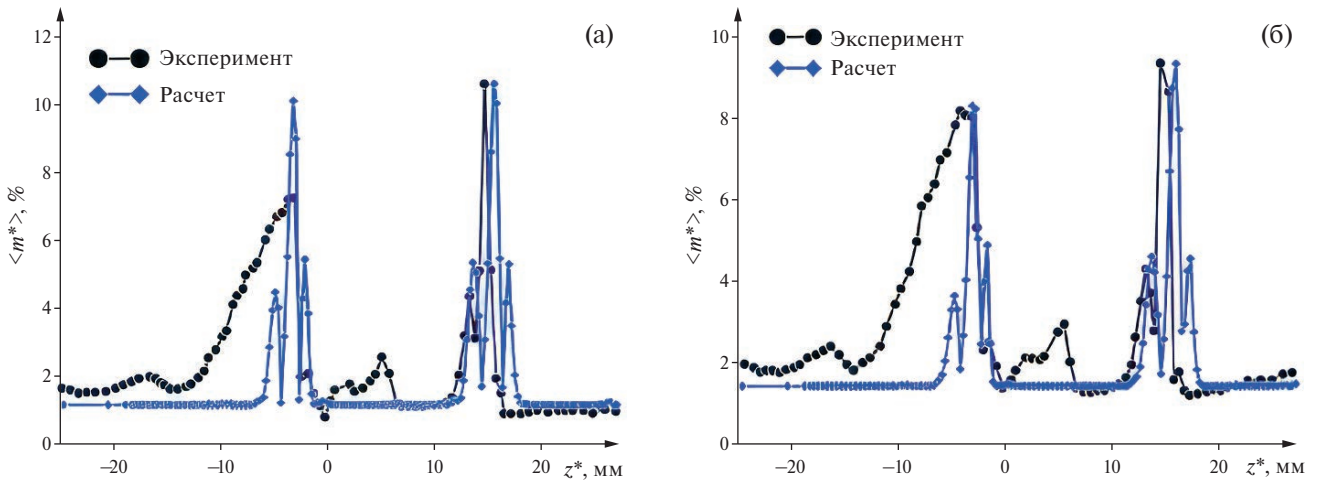


Рис. 16. Среднеквадратичные пульсации массового расхода: (а) $-x^* = 60$ мм, $y^* \approx 2.983$ мм, (б) $x^* = 90$ мм, $y^* \approx 3.079$ мм.

Их среднеквадратичные значения равны

$$\langle \Delta m' \rangle = [f'(z)]^2 \langle (\Delta z)^2 \rangle + \langle (\Delta m'_F)^2 \rangle.$$

Производная от формы волны вычисляется по формуле второго порядка точности:

$$f'(z) = \frac{3^* f(z_{j+1}) - 4^* f(z_j) + f(z_{j-1}))}{z_{j+1} - z_{j-1}}.$$

В результате среднеквадратичные пульсации массового расхода имеют вид

$$\langle m' \rangle = \sqrt{\alpha [f'(z)]^2 + \beta},$$

где $\beta = \langle (\Delta m'_F)^2 \rangle$ определяется по экспериментальным данным и характеризует фоновые пульсации массового расхода, а $\alpha = \langle (\Delta z)^2 \rangle$ выбирается так, чтобы расчетное распределение совпадало с экспериментальным в точке локального максимума, соответствующего переднему фронту N -волны.

На рис. 15 средние значения массового расхода вдоль линии $x^* = 60$ мм и $x^* = 90$ мм сопоставлены с данными эксперимента. Соответствующее сопоставление для среднеквадратичного значения пульсаций массового расхода приведено на рис. 16. Из сопоставления следует, что результаты численного моделирования удовлетворительно согласуются с данными эксперимента. Это свидетельствует о корректности численного моделирования взаимодействия N -волны и затупленной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа.

ОБСУЖДЕНИЕ

Следы N-волны в пограничном слое на пластине имеют качественно разную структуру в случаях заостренной и притупленной передней кромки. По-видимому, при постепенном увеличении величины притупления след за острой кромкой, состоящий из одной пары вихрей с относительно большим поперечным масштабом длины, будет деформироваться в два следа, каждый из пары вихрей с относительно малым поперечным масштабом длины.

Каждый из двух следов, по-видимому, будет располагаться там, где за острой кромкой в поперечном направлении располагались линии переднего и заднего фронтов N-волны. Анализ влияния N-волны на пограничный слой в зависимости от величины притупления требует трудоемкого параметрического исследования, которое не было проведено в данной работе, но несомненно представляет интерес.

Местное изменение характеристик пограничного слоя из-за его взаимодействия с падающей N-волной оказывает влияние на устойчивость пограничного слоя и процесс его турбулизации. В работе [13] это было продемонстрировано для случая заостренной пластины. На стационарное течение в пограничном слое с падающей N-волной и без нее накладывались периодические возмущения, которые вводились в пограничный слой с помощью генератора типа вдув–отсос, размещаемого на поверхности пластины. Спектральные и геометрические характеристики генератора подбирались на основе расчета линейной устойчивости пограничного слоя.

Было показано, что в области дефицита скорости, которая формируется в следе от переднего фронта N-волны, линия ЛТП искажается, смещаясь вверх по потоку и формируя подобие турбулентного клина. Аналогично в области избытка скорости, которая формируется в следе от заднего фронта N-волны, линия ЛТП смещается вниз по потоку.

Из полученных результатов следует, что в случае затупленной пластины область дефицита скорости появляется как в следе от переднего фронта N-волны, так и в следе от заднего фронта. Поэтому можно предположить, что линия ЛТП, зафиксированная в отсутствие N-волны, исказится таким образом при появлении N-волны, что на следах от обоих фронтов N-волны ЛТП сместится вверх по потоку. Подтверждение этого предположения путем параметрического численного исследования также представляет интерес.

В работе [17] были получены первые качественные расчетные данные о влиянии N-волны на ЛТП на затупленной пластине. Пограничный слой возбуждался идентично случаю острой пластины [13].

В частности, использовались характеристики генератора возмущений, определенные из расчета устойчивости пограничного слоя на острой, а не на затупленной пластине. В связи с этим линия ЛТП в отсутствие N-волны оказалась ниже по потоку по сравнению с ее положением на острой пластине.

Однако появление N-волны привело к существенно более значительному относительному смещению положения ЛТП вверх по потоку на обоих следах от N-волны, чем смещение на линии переднего фронта от N-волны в случае заостренной пластины.

Отмеченные результаты работы [17] качественно подтверждают выдвинутую гипотезу о влиянии N-волны на ЛТП в случае затупленной кромки. Однако требуется провести параметрические численные исследования, в которых параметры генератора возмущений будут подобраны для пограничного слоя на затупленной пластине. Такое исследование является предметом дальнейшей работы авторов.

ВЫВОДЫ

Выполнено численное моделирование взаимодействия N-волны со сверхзвуковым пограничным слоем на пластине с цилиндрически затупленной передней кромкой. Показано, что полученные результаты удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Полученные результаты сопоставлены с результатами для случая острой пластины. Показано, что на острой пластине формируется единственный стационарный след, состоящий из пары вихрей и распространяющийся в пограничном слое с потоком.

Вместе с тем, на затупленной пластине образуются два изолированных друг от друга следа, причем каждый состоит из пары вихрей: один след распространяется вниз по потоку от места падения переднего фронта N-волны на притупление, а другой — заднего. Амплитуда стационарных возмущений в каждом следе на затупленной пластине оказывается в несколько раз выше, чем в случае заостренной пластины.

При этом в каждой вихревой паре имеется область дефицита скорости, что указывает на усиление неустойчивости течения и предполагает более ранний переход к турбулентности на обоих следах.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в МФТИ при финансовой поддержке РНФ по проекту № 21-19-00307 (И. В. Егоров, Н. К. Нгуен – постановка задачи, модельные граничные условия, численное моделирование) и по проекту № 19-19-00470 (П. В. Чувахов – анализ численных результатов; особенности моделирования ударной волны п. 2.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гапонов С.А., Маслов А.А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.
2. Laufer J. Aerodynamic noise in supersonic wind tunnels // *Aerospace Sci.* 1961. V. 28. № 9. P. 685–692.
3. Kendall J.M. Wind tunnel experiments relating to supersonic and hypersonic boundary-layer transition // *AIAA J.* 1975. V. 13. № 3. P. 290–299.
4. Приданов В.Г., Харитонов А.М., Черных В.В. Совместное влияние чисел Маха и Рейнольдса на переход в пограничном слое // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1974. № 1. С. 160–163.
5. Боровой В.Я., Егоров И.В., Мошаров В.Е., Скуратов А.С., Радченко В.Н. Экстремальный нагрев тел в гиперзвуковом потоке. М.: Наука, 2018. 390 с.
6. Ваганов А.В., Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Семенов Н.В., Шалаев В.И. Экспериментальное исследование структуры течения и перехода в пограничном слое треугольного крыла с затупленными передними кромками при числах Маха 2, 2.5 и 4 // *Труды МФТИ.* 2013. Т. 5. № 3. С. 164–173.
7. Ваганов А.В., Ермолаев Ю.Г., Колосов Г.Л., Косинов А.Д., Панина А.В., Семенов Н.В. О воздействии падающей волны Маха на поле пульсаций в пограничном слое при обтекании плоского дельта крыла // *Вестник НГУ. Сер. Физика.* 2014. Т. 9. № 1. С. 29–38.
8. Ваганов А.В., Ермолаев Ю.Г., Колосов Г.Л., Косинов А.Д., Панина А.В., Семенов Н.В., Яцких А.А. К воздействию падающей волны Маха на сверхзвуковой пограничный слой // *Теплофизика и аэромеханика.* 2016. Т. 23. № 1. С. 45–50.
9. Косинов А.Д., Семёнов Н.В., Яцких А.А., Ермолаев Ю.Г., Питеримова М.В. Экспериментальное исследование взаимодействия слабых ударных волн со сверхзвуковым пограничным слоем плоской затупленной пластины при числе Маха 2 // *Сибирский физический журнал.* 2018. Т. 13. № 3. С. 16–23.
10. Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Кочарин В.Л., Семенов Н.В., Яцких А.А. Об экспериментальном исследовании воздействия слабых ударных волн на пограничный слой плоской притупленной пластины при числе Маха 2.5 // *Известия РАН. МЖГ.* 2019. № 2. С. 112–118.
11. Динь К.Х., Егоров И.В., Фёдоров А.В. Взаимодействие волн Маха и пограничного слоя при сверхзвуковом обтекании пластины с острой передней кромкой // *Ученые записки ЦАГИ.* 2017. Т. XLVIII. № 4. С. 10–19.
12. Динь К.Х., Егоров И.В., Фёдоров А.В. Влияние волн Маха на ламинарно-турбулентный переход при сверхзвуковом обтекании плоской пластины // *Изв. РАН. МЖГ.* 2018. № 5. С. 113–124.
13. Егоров И.В., Динь К.Х., Нгуен Н.К., Пальчевская Н.В. Численное моделирование взаимодействия волны Маха и сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине с острой передней кромкой // *Ученые записки ЦАГИ.* 2021. Т. LII. № 3. С. 18–28.
14. Егоров И.В., Новиков А.В., Фёдоров А.В. Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода при гиперзвуковых скоростях потока на супер-ЭВМ // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2017. Т. 57. № 8. С. 1347–1373.
15. Quirk J.J. A contribution to the great Riemann solver debate // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 1994. V. 18. P. 555–574.
16. Chuvakhov P.V. Shock-Capturing Anomaly in the Interaction of Unsteady Disturbances with a Stationary Shock. *AIAA Journal.* 2021. P. 1–11.
17. Нгуен Ньи Кан. Разработка и применение гибридных разностных схем для моделирования ламинарно-турбулентного перехода при взаимодействии N-волны со сверхзвуковым пограничным слоем // *Дисс. ... к. ф.-м. н., Долгопрудный, МФТИ, 15.09.2022.*

NUMERICAL SIMULATION OF THE INTERACTION BETWEEN WEAK SHOCK WAVES AND SUPERSONIC BOUNDARY LAYER ON A FLAT PLATE WITH THE BLUNT LEADING EDGE

I. V. Egorov^{a, b}, N. K. Nguen^a, and P. V. Chuvakhov^{a, b, *}

^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow oblast, Russia*

^b *Zhukovski Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Moscow oblast, Russia*

* *E-mail: pavel_chuvahov@mail.ru*

The interaction of weak shock waves in form of an N-wave with the supersonic laminar boundary layer on a flat plate with blunt leading edge at the free-stream Mach number $M = 2.5$ is numerically studied. The numerical results are compared with known experimental data. The combined influence of the N-wave and the leading edge bluntness on the laminar-turbulent transition process is discussed.

Keywords: numerical simulation, Navier–Stokes equations, Mach wave, weak shock waves, flat plate with the blunt leading edge, supersonic boundary layer

УДК 532.546

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ, СООБЩАЮЩЕЙСЯ С ПЛАСТОМ СИСТЕМОЙ РАДИАЛЬНЫХ ТРЕЩИН

© 2024 г. Р. А. Башмаков^{a,b,*}, Д. А. Насырова^{b,**}, З. Р. Хакимова^{c,***}

^a Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

^b Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

^c Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

*E-mail: Bashmakov_Rustem@mail.ru

**E-mail: dinasyrova@mail.ru

***E-mail: zulfya.hakimova@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.09.2023 г.

После доработки 10.12.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

Рассмотрена задача о собственных колебаниях жидкости в горизонтальной скважине с множественными трещинами, полученными путем гидроразрыва пласта (ГРП). Построена математическая модель собственных колебаний жидкости в горизонтальной нефтяной скважине, сообщающейся с пластом системой радиальных трещин ГРП, и определены частотные характеристики собственных колебаний жидкости в зависимости от параметров трещины ГРП и пласта. С помощью численного анализа частотных характеристик колебаний показано влияние изменения ширины трещины, количества трещин и проницаемости пласта на собственные частоты.

Ключевые слова: собственное колебание, горизонтальная скважина, гидроразрыв пласта, период колебаний, интенсивность затухания

DOI: 10.31857/S1024708424020115 EDN: RIURNQ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при добыче нефти широко применяется технология гидроразрыва пласта (ГРП). В пласте создаются трещины, которые закрепляются пропантантами для предотвращения их смыкания. Трещины, которые возникают в результате применения технологии ГРП, увеличивают площадь, с которой можно извлечь нефть из добывающей скважины, или расширяют поверхность закачки жидкости, если это нагнетающая скважина [1]. Применение горизонтальных скважин с множественными трещинами ГРП позволяет повысить эффективность разработки низкопроницаемых пластов.

Трещины гидроразрыва могут обладать весьма необычными очертаниями, которые зависят от структуры пласта. Конфигурация трещин ГРП на вертикальных скважинах достаточно подробно изучена. Имеется большое число работ, в которых дается описание фильтрации флюида в призабойной зоне таких скважин [2–4].

Эффективным и удобным с точки зрения технической реализации способом определения качества и параметров трещин ГРП является способ, основанный на возбуждении собственных колебаний столба жидкости в скважине. Период колебаний, а также, особенно, интенсивность затухания колебаний будут определяться не только протяженностью столба жидкости в скважине, диаметром скважины и реологическими свойствами жидкости, но и коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта (в частности, коэффициентами проницаемости, качеством перфорации скважин и свойствами образованных трещин ГРП). Колебания могут инициироваться резким открытием или закрытием скважины. При этом время (период инициирования) должно быть сопоставимо со временем прохождения акустическим сигналом расстояния, порядка протяженности столба жидкости в скважине. Если этот промежуток будет короче, чем время пробега акустического сигнала, то образуется одиночный импульсный сигнал, распространяющийся в скважине с отражением на ее границах.

В работе [5] предложен метод гидравлического импедансного тестирования, идея которого заключается в интерпретации фактического изменения гидравлического сопротивления между стволом скважины и открытой трещиной ГРП. Для этого искусственно создается импульс давления в скважине и анализируется отраженный сигнал.

Волны Стоунли, излучаемые источником и воспринимаемые приемником, расположенными в скважине рассматриваются в [6]. Импульс передается по трубе и обсадной колонне. Ствол скважины моделируется, как линия электропередачи с потерями, трещина моделируется, как сопротивление и емкость.

В работе [7] для моделирования процесса изменения давления в результате гидроудара объединили уравнение неразрывности и сохранения импульса в стволе скважины с представлением трещины ГРП в виде цепи с сопротивлением, емкостью и индуктивностью (контуром). Изменение емкости изменяет период колебаний, сопротивление влияет на амплитуду и скорость затухания колебаний, индуктивность также влияет на период. В этой работе также выведены уравнения, связывающие эти параметры с размерами трещины и ее коллекторскими характеристиками.

В работе [8] приведены результаты полевых измерений изменения давления в различных точках скважины при резком изменении скорости потока жидкости. Скважинные датчики фиксировали изменение давления в зависимости от времени со скоростью 100 проб в секунду. При этом вид полученных осциллограмм свидетельствует, что они соответствуют собственным колебаниям столба жидкости.

В работе [9] предлагается математическая модель, описывающая фазовые и амплитудные характеристики волнового пакета, проведено сравнение численных расчетов, полученных на основе модели с данными работы [8]. Граничные условия на нижнем конце скважины учитывают либо ламинарный, либо турбулентный режим течения, связанный с трением в перфорационных каналах.

В работах [10, 11] приведены опытные данные и изучаются колебания давления после остановки насосов закачки жидкости для создания трещины. Источником колебаний давления, по мнению авторов, являются колебания стенок трещины, возникающие в процессе смыкания трещины ГРП.

В трудах [12–14] рассматривали собственные колебания столба жидкости в нефтяной скважине при отсутствии или наличии трещины ГРП. Проведен анализ влияния характеристик трещины и пласта на частоту колебаний, коэффициент затухания. Определено изменение давления в различных точках скважины.

Во всех упомянутых работах изучали вертикальные трещины ГРП, параллельные оси вертикальной скважины и симметричные относительно нее.

В исследовании [15] рассматривается задача об отборе жидкости из пласта в скважину или закачке жидкости из скважины в пласт при наличии трещины ГРП, перпендикулярной стволу скважины в режиме постоянного расхода. Получены аналитические решения, описывающие эволюцию давления в трещине при постоянном расходе флюида из пласта в скважину. Проанализировано влияние коллекторских характеристик пласта и трещины на эволюцию давления в трещине и в скважине.

В нашей работе построена математическая модель собственных колебаний жидкости в горизонтальной нефтяной скважине, сообщающейся с пластом системой радиальных трещин ГРП. Определены частотные характеристики собственных колебаний жидкости в зависимости от параметров трещины ГРП и пласта.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть обсаженная горизонтальная скважина длиной l сообщается с пластом посредством N радиальных трещин ГРП, расположенных равномерно вдоль скважины (рис. 1). Тогда число трещин ГРП, приходящееся на единицу длины скважины, равно $n = N/l$. Величины, аналогичные введенному числу n , можно найти в работе [16], где дается понятие густоты трещин применительно к трещиноватым коллекторам для количественной оценки трещиноватости.

Для малых возмущений давления, плотности и скорости запишем уравнения, описывающие движение жидкости в скважине. Поскольку скважина обсаженная, приток флюида из пласта в скважину происходит только через трещины ГРП.

Имеем систему уравнений сохранения массы и сохранения импульса

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{2}{a} \rho_0 n d_f u_{f(w)}, \\ \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{2\sigma}{a}, \quad (0 < z < l), \end{cases} \quad (1.1)$$

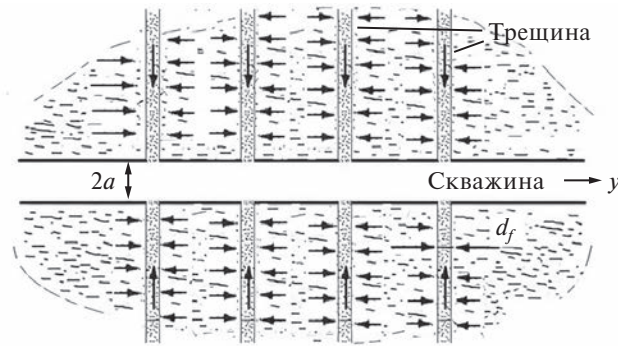


Рис. 1. Схема системы “скважина – трещины ГРП – пласт”.

где

$$\sigma = \mu \int_{-\infty}^t \frac{\partial w / \partial \tau}{\sqrt{\pi \nu (t - \tau)}} d\tau, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad \rho = \frac{p}{C^2},$$

$p = p(t, z)$ – давление в скважине на расстоянии z от начала горизонтального участка; σ – касательное напряжение в жидкости на поверхности стенки скважины; μ и ν – динамическая и кинематическая вязкости жидкости; C – скорость звука в жидкости; a – радиус скважины; $u_{f(w)}$ – скорость фильтрации на выходе из скважины в трещину.

Уравнения (1.1) записаны в линеаризованном виде относительно гидростатического состояния равновесия. Принятые уравнения неразрывности в таком виде означают, что расход флюида через трещины “размазывается” равномерно на всю длину скважины, а это в свою очередь означает, что длина волны (для рассматриваемой задачи она порядка длины скважины) значительно больше расстояния между соседними трещинами ГРП, т.е. $l/N \gg 1$.

Для определения $u_{f(w)}$ рассмотрим фильтрационную задачу в трещине. Для этого запишем уравнение фильтрации в ней в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) = \chi_f \int_{-\infty}^t \frac{\partial p_f / \partial \tau}{\sqrt{\pi (t - \tau)}} d\tau, \quad (1.2)$$

$$u_f = - \frac{k_f}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r} \quad (a < r < \infty), \quad \chi_f = \frac{2 m_p \sqrt{\chi_p}}{d_f m_f \chi_f}, \quad \chi_i = \frac{k_i \rho_0 C^2}{m_i \mu} \quad (i = p, f),$$

при граничных условиях

$$p_f|_{r=a} = p(t, z) \quad \text{и} \quad p_f|_{r=\infty} = 0. \quad (1.3)$$

Нижние индексы $i = p$ и f указывают, что значения параметров относятся соответственно к пласту и трещине.

Скорость фильтрации из трещины в скважину будет определяться по закону Дарси

$$u_{f(w)} = - \frac{k_f}{\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial r} \right)_{r=a}. \quad (1.4)$$

2. РЕШЕНИЕ В ВИДЕ СТОЯЧИХ ВОЛН

Рассмотрим в рамках выше представленных уравнений задачу собственных затухающих колебаний столба жидкости в скважине. Решение уравнений (1.1) будем искать в виде

$$p = A^{(p)}(z) e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad w = A^{(w)}(z) e^{i\omega t}. \quad (2.1)$$

Для этого сначала следует определить скорость фильтрации $u_{f(w)}$, используя решение (1.2) с учетом граничных условий (1.3), а также (1.4). Решение (1.2) будем искать в виде

$$p_f(t, z, r) = A_f^{(p)}(z, r)e^{i\omega t}.$$

Подставляя его в (1.2), имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_f^{(p)} e^{i\omega t}}{\partial r} \right) = \chi_f \int_{-\infty}^t \frac{\partial A_f^{(p)} e^{i\omega \tau} / \partial \tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau.$$

После преобразований получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_f^{(p)}}{\partial r} \right) = x^2 A_f^{(p)}, \quad x^2 = \chi_f \sqrt{-i\omega}. \quad (2.2)$$

Из условий (1.3) следует

$$A_f^{(p)}(z, r) = A^{(p)}(z) \text{ при } r = a \text{ и } A_f^{(p)}(z, r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Тогда для решения уравнения (2.2) можем записать

$$A_f^{(p)}(z, r) = A^{(p)}(z) \frac{K_0(xr)}{K_0(xa)}.$$

Из этого решения для скорости фильтрации получим

$$u_{f(w)} = -\frac{k_f}{\mu} \left(\frac{\partial p_f}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{k_f x}{\mu} A^{(p)}(z) \frac{K_1(xa)}{K_0(xa)} e^{i\omega t}. \quad (2.3)$$

Здесь использовано $dK_0(s)/ds = -K_1(s)$, где $K_0(xr)$ и $K_1(xr)$ – функции Макдональда нулевого и первого порядков [17].

Подставляя в систему (1.1) решения (2.1), с учетом (2.3) имеем

$$\begin{cases} -\frac{i\omega}{\rho_0 C^2} A^{(p)}(z) + \frac{dA^{(w)}(z)}{dz} + \frac{2nd_f k_f x}{a\mu} \frac{K_1(xa)}{K_0(xa)} = 0, \\ \frac{1}{i\rho_0 \omega (1 + 2/y)} \frac{dA^{(p)}(z)}{dz} + A^{(w)}(z) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $1 + \frac{2\sqrt{v}}{a\sqrt{i\omega}} = 1 + \frac{2}{y}$, $(y = \sqrt{i\omega a^2 / v})$.

Выражая $A^{(w)}(z)$ из второго уравнения системы (2.4) и подставляя его в первое уравнение, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 A^{(p)}(z)}{dz^2} + K^2 A^{(p)}(z) = 0, \quad (2.5)$$

где $K^2 = \frac{\omega^2}{C^2} \left(1 + \frac{2}{y} \right) \left(1 + \frac{2nd_f k_f x C^2}{iav\omega} \frac{K_1(xa)}{K_0(xa)} \right)$.

Решение этого уравнения имеет вид

$$A^{(p)}(z) = c_1 \sin(Kz) + c_2 \cos(Kz). \quad (2.6)$$

Будем полагать, что оба конца скважины наглухо закрыты. Тогда решение уравнений (2.4) должно удовлетворять условиям

$$A^{(w)}(0) = A^{(w)}(l) = 0. \quad (2.7)$$

Из условия (2.7) в силу второго уравнения из (2.4), должны выполняться условия для давлений

$$\frac{dA^{(p)}(z)}{dz} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l. \quad (2.8)$$

Чтобы для уравнения (2.6) было выполнено условие (2.8) при $z = 0$, постоянная c_1 должна равняться нулю ($c_1 = 0$). Тогда при $z = l$ получим

$$\sin(Kl) = 0. \quad (2.9)$$

Это уравнение представляет собой характеристическое уравнение для определения комплексной частоты $\omega = \Omega + i\delta$. Причем действительная часть Ω определяет круговую частоту колебаний, а мнимая часть – интенсивность затухания. Уравнение (2.9) имеет множество решений, удовлетворяющих условию

$$Kl = \pi k, k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

Если пренебречь вязкостным трением жидкости об стенки скважины ($\nu = 0$), а также наличием радиальных трещин ГРП ($n = 0$), то с учетом выражения для K из (2.5) получим

$$\frac{\omega_k l}{C} = \pi k, k = 1, 2, 3, \dots, \text{ тогда } \omega_k = \frac{\pi C}{l} k, k = 1, 2, 3, \dots$$

Решение (2.6) в этом случае запишется как

$$A^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^n c_k \cos\left(\frac{\pi z}{l} k\right) \exp\left(i \frac{\pi C t}{l} k\right).$$

В случае отсутствия трещин ГРП ($n = 0$) из (2.10) следует

$$\frac{\omega_k l}{C} \sqrt{1 + 2 \sqrt{\frac{\nu}{i\omega_k a^2}}} = \pi k, k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

Предположим, что для первой гармоники ($k = 1$) удовлетворяется условие $\Omega_1 \gg \delta_1$. Так как $\omega = \Omega + i\delta$, разделяя действительную и мнимую части и делая оценки параметров, из (2.11) имеем

$$\Omega_1 = \frac{\pi C}{l}, \quad \delta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\nu \Omega_1}{a^2}}.$$

Наиболее информативной и долгоживущей в общем случае является первая гармоника. Поэтому для определения комплексной частоты этой гармоники из (2.10), учитывая (2.5), можем записать

$$\frac{\omega l}{C} \sqrt{\left(1 + \frac{2}{y}\right) \left(1 + \frac{2nd_f k_f x C^2}{i a \nu \omega}\right)} = \pi.$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для численных расчетов примем следующие значения параметров: $a = 0.01$ м – радиус скважины, $l = 500$ м – длина горизонтального закрытого с двух концов участка скважины, $\rho = 1000$ кг/м³ – плотность жидкости, $C = 1500$ м/с – скорость звука в среде, $m_p = 0.1$ – пористость пласта, $m_f = 0.2$ – пористость трещины, $\mu = 10^{-3}$ Па·с – динамическая вязкость жидкости.

Отметим, что в теоретической модели, описывающей течение в трещинах, ширина трещины d_f и проницаемость k_f входят в виде произведения $d_f k_f = C_f$. Это, в свою очередь, приводит к неоднозначности определения значений d_f и k_f по промысловым данным. Параметр C_f называется проводимостью трещины.

На рис. 2 приведены зависимости собственной частоты Ω (а), коэффициента затухания d (б) и декремента затухания Δ (в), определяемого так $(2\pi/\Omega)\delta$ от проводимости трещины ГРП. Линии 1–3 соответствуют значениям проницаемости пласта $k_p = 10^{-15}, 10^{-13}, 10^{-12}$ м². Число трещин $N = 10$.

Из рисунка следует, что увеличение проводимости с 10^{-15} до 10^{-12} м² приводит к снижению собственной частоты, при этом если проницаемость $k_p = 10^{-15}$ м², то собственная частота снижается на 0.2 с⁻¹, а при проницаемостях $k_p = 10^{-13}, 10^{-12}$ частота снижается на 0.4 с⁻¹.

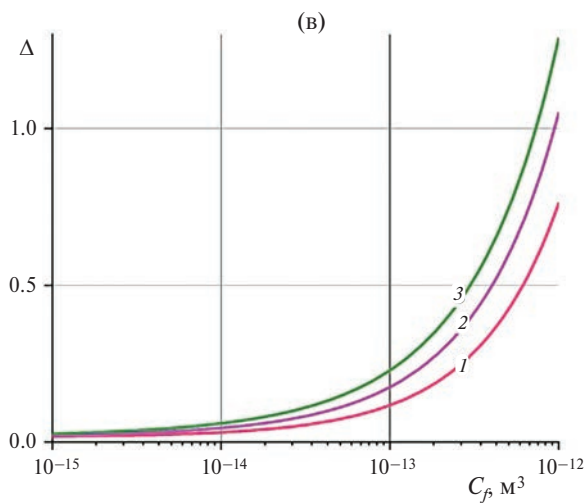
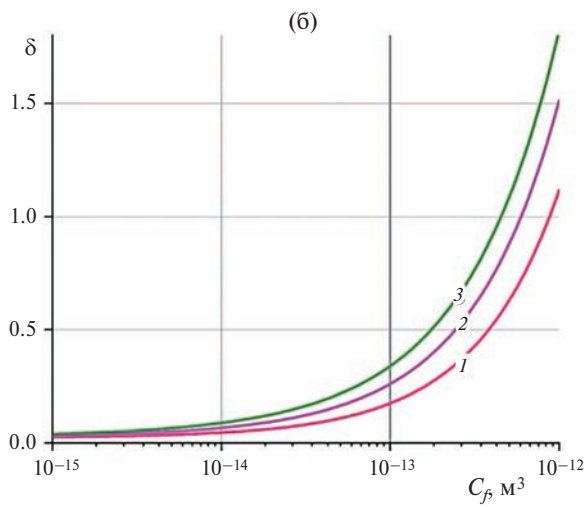
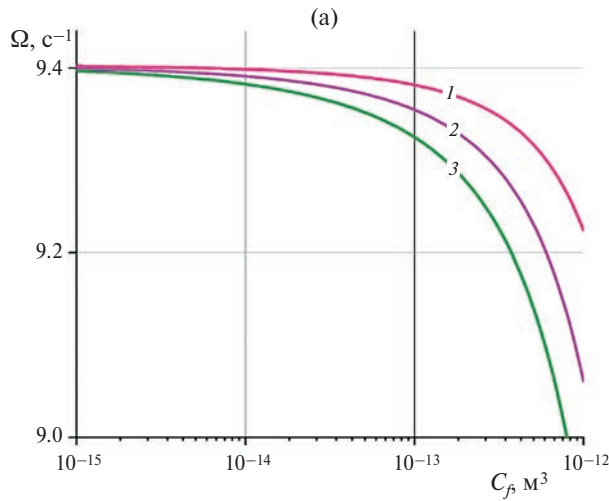


Рис. 2. Зависимости собственной частоты (а), коэффициента затухания (б) и декремента (в) от проводимости C_f трещины ГРП при числе трещин $N = 10$: 1–3 – $k_p = 10^{-15}, 10^{-13}, 10^{-12}$.

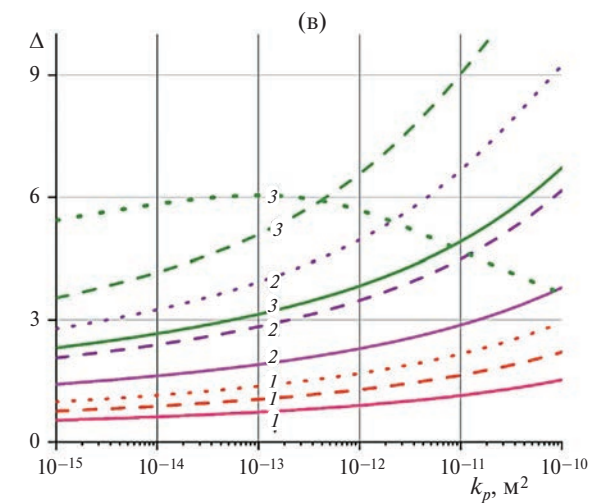
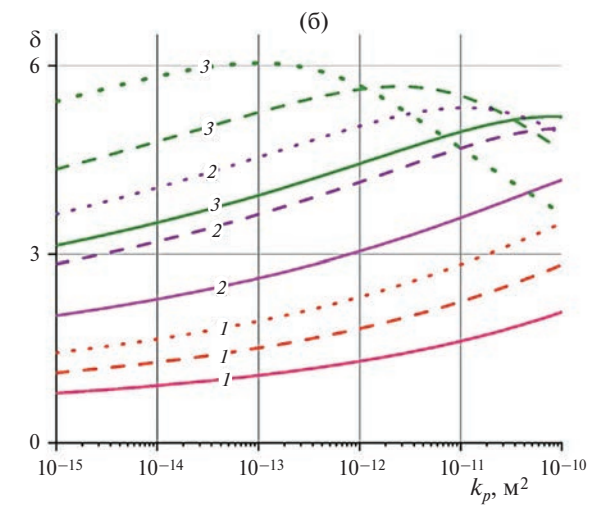
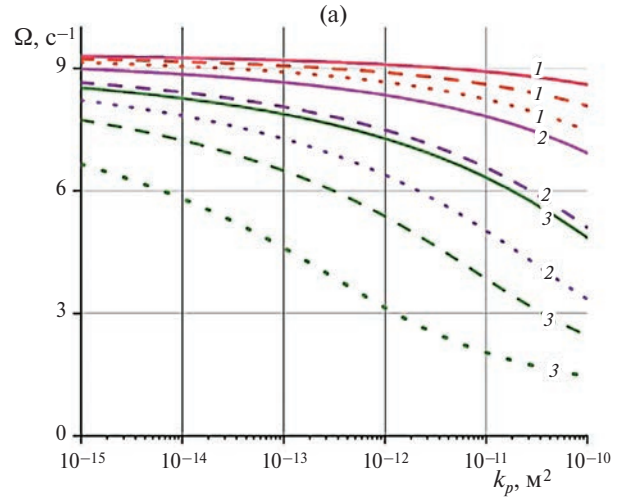


Рис. 3. Зависимости собственной частоты (а), коэффициента затухания (б) и декремента затухания (в) от проницаемости пласта k_p при значениях ширины трещины: 1–3 – $d_f = 1, 3, 5$ мм и числе трещин: $N = 7, 10, 13$ – соответственно сплошная, штриховая, точечная линии.

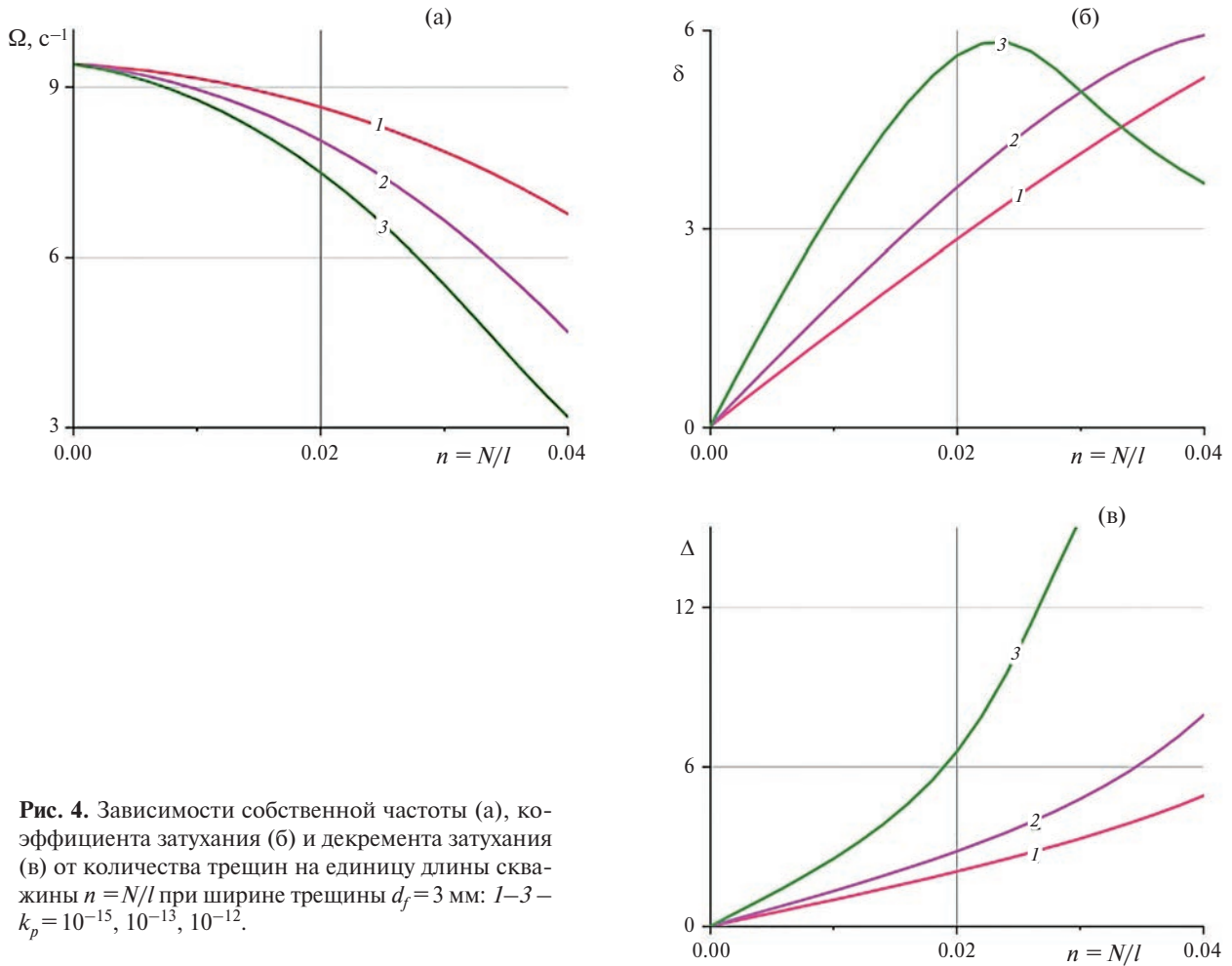


Рис. 4. Зависимости собственной частоты (а), коэффициента затухания (б) и декремента затухания (в) от количества трещин на единицу длины скважины $n = N/l$ при ширине трещины $d_f = 3$ мм: 1–3 – $k_p = 10^{-15}, 10^{-13}, 10^{-12}$.

Особенно резкое изменение частоты наблюдается при проводимости в промежутке от 10^{-13} до 10^{-12} м³. Что касается коэффициента затухания и декремента затухания, то при увеличении проводимости с 10^{-15} до 10^{-12} м³, коэффициент затухания увеличивается в диапазоне от 0 до 1.5 с⁻¹, а декремент затухания в диапазоне от 0 до 1. При этом также значительно увеличиваются коэффициент и декремент затухания при проводимости от 10^{-13} до 10^{-12} м³.

На рис. 3 приведены зависимости собственной частоты Ω (а), коэффициента затухания δ (б) и декремента затухания Δ (в) от проницаемости пласта k_p при значениях ширины трещины d_f : 1 – 1 мм, 2 – 3 мм, 3 – 5 мм. Сплошная линия – количество трещин $N=7$, штриховая – 10, точечная – 13.

Видно, что при увеличении проницаемости с 10^{-15} до 10^{-10} м² собственная частота падает. Однако когда $d_f = 1$ мм, частота падает незначительно: с 9 до 8 с⁻¹. Также незначительно частота падает с 9 до 7 с⁻¹, когда $d_f = 3$ мм и $N = 7$. При $d_f = 5$ мм и $N = 7$ увеличение проницаемости приводит к более быстрому уменьшению собственной частоты с 8 до 5 с⁻¹, а если $d_f = 5$ мм и $N = 10$, $N = 13$, $d_f = 3$ мм и $N = 13$, то увеличение проницаемости приводит более чем двукратному снижению собственных колебаний.

При $d_f = 1$ мм и $N = 7$, $N = 10$ и $N = 13$ и $d_f = 3$ мм и $N = 7$ и $N = 10$, $d_f = 5$ мм и $N = 7$ коэффициент затухания увеличивается на 1 с⁻¹ с увеличением проницаемости в диапазоне от 10^{-15} до 10^{-10} .

В случаях когда $d_f = 3$ мм и $N = 13$, а также $d_f = 5$ мм и $N = 10$, $N = 13$ при увеличении проницаемости коэффициент затухания возрастает, достигает своего максимума в диапазоне с 10^{-13} до 10^{-11} м² и начинает убывать. Что касается декремента затухания, то при $d_f = 1$ мм с увеличением проницаемости с 10^{-15} до 10^{-10} м² он увеличивается незначительно: около 1 с⁻¹. Однако при $d_f = 3$ мм и $N = 10$, $N = 13$, а также при $d_f = 5$ мм и $N = 7$, $N = 10$ декремент затухания увеличивается более чем двукратно с увеличением проницаемости с 10^{-15} до 10^{-10} м².

Наиболее нетривиальный эффект наблюдается когда $d_f = 5$ мм и $N = 13$: Декремент затухания увеличивается, достигает свой максимум $\Delta = 6$ при проницаемости $k_p = 10^{-13}$ и далее уменьшается до $\Delta \approx 3.5$ с увеличением проницаемости до 10^{-10} м².

На рис. 4 показана зависимость собственной частоты Ω (а), коэффициента затухания d (б) и декремента затухания Δ (в) от количества трещин на единицу длины скважины $n = N/l$. Ширина трещины $d_f = 3$ мм. Линии 1–3 соответствуют значениям проницаемости пласта $k_p = 10^{-15}$, 10^{-13} , 10^{-12} м². Собственная частота падает при увеличении n с 0 до 0.04, однако при проницаемости пласта $k_p = 10^{-13}$ м² собственная частота снижается с 9.5 до 5 с⁻¹, при $k_p = 10^{-12}$ м² собственная частота снижается более чем в три раза, с 9.5 до 3 с⁻¹.

Коэффициент затухания и декремент затухания возрастают при увеличении n с 0 до 0.04. Однако при проницаемости $k_p = 10^{-15}$ м² декремент затухания увеличиваются в два раза быстрее, в отличие от случая, когда $k_p = 10^{-13}$, 10^{-12} м². Коэффициент затухания увеличивается, достигает максимума ($\delta \approx 6$ при $n \approx 0.02$) и убывает с увеличением n .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено трансцендентное уравнение для комплексной частоты собственных колебаний столба жидкости в горизонтальной скважине с множественным ГРП. На основе этого уравнения определены частотные характеристики (частота колебаний, коэффициент затухания, амплитуда колебаний), описывающие собственные колебания жидкости в горизонтальной скважине с системой трещин, перпендикулярных стволу скважины.

Проведенный численный анализ частотных характеристик колебаний показывает влияние изменения ширины трещины, количества трещин и проницаемости пласта на собственные частоты.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при поддержке средствами госбюджета по госзаданию № 075-00570-24-01 (“Гидрогазодинамика многофазных, термовязких и микродисперсных сред”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Экономидес М., Олини Р., Валько П.* Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике. М.; Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2007. 237 с.
2. *Cinco-Ley H.* Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods // Proc. Petrol. Exh. Techn. Symp. Beijing, China. 1982. SPE-10043-MS.
3. *Нагаева З.М., Шаганов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // ПММ. 2017. Т. 81. № 3. С. 319–329.
4. *Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.* Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 5. С. 6–14. DOI: 10.1134/S0568528119050050.
5. *Holzhausen G.R., Gooch R.P.* Impedance of Hydraulic Fractures: Its Measurement and Use for Estimating Fracture Closure Pressure and Dimensions // Paper SPE-13892-MS pres. at the SPE Low Perm. Gas Reserv. Symp. 1985.
6. *Patzek T., De A.* Lossy Transmission Line Model of Hydrofractured Well Dynamics // J. Pet. Sci. Eng. V. 25(1-2). 2000. P. 59–77.
7. *Carey M., Mondal S., Sharma M.* Analysis of Water Hammer Signatures for Fracture Diagnostics // Paper SPE-174866-MS presented at the SPE Annu. Techn. Conf. and Exh. 2015.
8. *Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y.* Water Hammer Effects on Water Injection Well Performance and Longevity // Paper SPE-112282-MS pres. at the SPE Int. Symp. and Exh. on Form. Damage Control. 2008.
9. *Ляпидевский В.Ю., Неверов В.В., Кривоцов А.М.* Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. № 15. С. 1687–1696. DOI: 10.33048/semi.2018.15.140.
10. *Байков В.А., Булгакова Г.Т., Ильясов А.М., Кауанов Д.В.* К оценке геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 5. С. 64–75. DOI: 10.31857/S056852810001790-0.
11. *Ильясов А.М., Булгакова Г.Т.* Квазиодномерная модель гиперболического типа гидроразрыва пласта // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 4. С. 739–754. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1522>.
12. *Баишаков Р.А., Насырова Д.А., Шаганов В.Ш.* Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом, при наличии трещины ГРП // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 1. С. 88–104. DOI: 10.31857/S0032823522010027.

13. Башмаков Р.А., Насырова Д.А., Шагапов В.Ш., Хакимова З.Р. Колебания столба жидкости в открытой скважине и сообщающейся с пластом, подверженным ГРП // Вестн. Башкирск. ун-та. 2022. Т. 7. Вып. 4. С. 872–880. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2022.4.10.
14. Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З. Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом // ПМТФ. 2020. Т. 61. № 4. С. 5–14. DOI: 10.31857/S0032823522010027.
15. Аносова Е.П., Нагаева З.М., Шагапов В.Ш. Фильтрация флюида к скважине через радиальную трещину ГРП при постоянном расходе // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 2. С. 90–101. DOI: 10.31857/S0568528122600692.
16. Голф-Рахт Т.Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов / Под ред. А.Г. Ковалёва. М.: Недра, 1986. 608 с.
17. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: Изд. иностр. лит-ры, 1949. 728 с.

NATURAL VIBRATIONS OF FLUID IN A WELL CONNECTED WITH THE RESERVOIR BY A SYSTEM OF RADIAL FRACTURES

R. A. Bashmakov^{a,b,*}, D. A. Nasyrova^{b,**}, and Z. R. Khakimova^{c,***}

^a Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

^b Mavlyutov Institute of Mechanics of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

^c Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

* E-mail: Bashmakov_Rustem@mail.ru

** E-mail: dinasyrova@mail.ru

*** E-mail: zulfya.hakimova@yandex.ru

The problem of natural vibrations of a fluid in a horizontal well with multiple fractures obtained by hydraulic fracturing is considered. A mathematical model of the natural vibrations of fluid in a horizontal oil well connected to the reservoir by a system of radial hydraulic fractures is constructed and the frequency characteristics of the natural vibrations of fluid as functions of the hydraulic fracture and reservoir parameters are determined. Using a numerical analysis of the frequency characteristics of vibrations, the effect of changes in the fracture width, the number of fractures, and the reservoir permeability on the natural frequencies is demonstrated.

Keywords: natural vibrations, horizontal well, hydraulic fracturing, vibration period, damping rate

УДК 532.73

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ И РАЗМЕРОВ МОЛЕКУЛ ПОЛИМЕРОВ В РАСТВОРАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИФФУЗИОННОЙ ЯМР-РЕЛАКСАЦИИ

© 2024 г. В. А. Иванова^{a, *}, А. В. Максимычев^{a, **}, П. Л. Меньшиков^{a, b, ***},
А. Р. Пашутин^{a, ****}, А. М. Перепухов^{a, c, *****}, А. Н. Рожков^{d, *****}, М. В. Царьков^{a, *****}

^a Московский физико-технический институт (государственный университет), Московская обл., Долгопрудный, Россия

^b Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

^c Институт органической химии им. Н. Д. Зелинского РАН, Москва, Россия

^d Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: valeriya.ivanova@phystech.edu

**E-mail: maksimychev.av@mipt.ru

***E-mail: menshikov2005@mail.ru

****E-mail: nituhsap@mail.ru

*****E-mail: aleksandr-iv@mail.ru

*****E-mail: rozhkov@ipmnet.ru

*****E-mail: m.carkov@phystech.edu

Поступила в редакцию 25.09.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

Предложен и проверен метод определения размеров и формы полимерных молекул в растворах, основанный на измерении релаксации поперечной намагниченности ядер. Установлено, что затухающий сигнал спинового эха от удлиненных молекул содержит два экспоненциально спадающих со временем слагаемых, соответствующие двум коэффициентам диффузии, различающимся примерно в два раза. Сигнал от молекул, форма которых ближе к сферической, содержит только одну экспоненту.

Ключевые слова: раствор полимера, макромолекула, диффузия, ядерный магнитный резонанс

DOI: 10.31857/S1024708424020127 EDN: RISUUK

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью исследования является разработка метода, позволяющего на основе данных ядерного магнитного резонанса (ЯМР) о диффузионной подвижности растворенного полимера определять форму и размеры его молекул.

Известно [1], что полимерная молекула с малым числом звеньев, как правило, линейна, а с большим представляет собой либо клубок, либо глобулу, т.е. напоминает, скорее, шар.

Коэффициент диффузии (далее – КД) молекулы в форме шара радиуса R в жидкости с вязкостью η , вычисленный с использованием формулы Стокса, $D = k_B T / (6\pi\eta R)$.

Коэффициент диффузии линейной молекулы является симметричным тензором. Действительно, на цилиндр радиусом R и длиной $L \gg R$, движущийся в вязкой жидкости со скоростью V вдоль и поперек своей оси, со стороны жидкости действуют силы, соответственно,

$$F_{\parallel} = \frac{2\pi\eta L}{\Lambda} V, \quad F_{\perp} = \frac{4\pi\eta L}{\Lambda} V, \quad (1.1)$$

где $\Lambda = \ln(L/R)$. Для вывода первой формулы нужно сначала рассмотреть движение бесконечно длинного цилиндра и приравнять к нулю скорость увлекаемой им жидкости на расстоянии от оси $r \sim L$, что дает для F_{\parallel} выражение (1.1), справедливое с логарифмической точностью $\sim 1/\Lambda$. Приведенное в (1.1) выражение для F_{\perp} имеет такую же погрешность и является предельным случаем задачи об обтекании эллипсоида, решенной в [2].

Если создать условия, при которых растворенные линейные молекулы будут диффундировать либо только вдоль, либо только поперек своей оси, то, в соответствии с формулами (1.1), КД для таких движений будут различаться в два раза:

$$D_{\parallel} = \frac{k_B T \Lambda}{2\pi\eta L}, \quad D_{\perp} = \frac{k_B T \Lambda}{4\pi\eta L}, \quad (1.2)$$

(в этом качественном соображении состоит исходная идея определения формы растворенных молекул). Покажем, что такие условия существуют.

2. НАБЛЮДЕНИЕ ДВУХ РЕЖИМОВ ДИФФУЗИИ

Данная работа была проделана в рамках разработок биоразлагаемых наноконтейнеров для адресной доставки лекарственных средств. Одна из задач состояла в том, чтобы научиться определять и отбирать полимерные молекулы, принимающие в заданном растворителе линейную форму.

Для отработки методики отбора был выбран полиэтиленгликоль (ПЭГ), молекулы которого состоят из ~10 звеньев. В этом случае

$$L \sim 20 \text{ нм}, \quad R \sim 0.2 \text{ нм}. \quad (2.1)$$

Из условий (2.1) следует, что погрешность формул (1.2) составляет $\sim 1/\Lambda \sim 20\%$, что приемлемо для возможности различения КД из (1.2).

Для измерения КД применялась импульсная последовательность DOSY (см., напр., труд [3]). В ней, как и в известной последовательности КПМГ (Карр–Парселл–Мейбум–Гилл), измеряется спад интенсивности спинового эха со временем.

Соответствующая методика измерения КД молекул хорошо отработана, изложена во многих руководствах (см., напр., [4–6]). Этот технический вопрос, второстепенный как для нас, так и для основной тематики журнала, не будем обсуждать детально. Для пояснения сути метода достаточно будет сказать, что зависимость величины сигнала протонного спинового эха от времени t в простых случаях имеет вид

$$U = U_0 \exp(-\alpha t), \quad (2.2)$$

где параметр α известным образом (см. пионерскую работу [5]) связан с КД. Так, $\alpha = D(\gamma G T_{\pi})^2/12$ в наиболее простом случае — для последовательности КПМГ при наличии постоянного по времени и объему образца градиента модуля магнитного поля $G = |\nabla B|$. Здесь γ — гиромагнитное отношение (для протонов $\gamma = 2.675 \times 10^8 \text{ с}^{-1} \text{ Тл}^{-1}$), T_{π} — период между повторяющимися р-импульсами в КПМГ-последовательности. Измеряя α , находим КД.

Из формул (1.2) и (2.1) следует оценка $D \sim (1-3) \times 10^{-6} \text{ см}^2/\text{с}$, что, во-первых, удовлетворительно согласуется с результатами наших измерений (рис. 1) и, во-вторых, указывает на возможность определения размеров макромолекул рассматриваемым методом. В нашем методе улавливается сигнал от протонов, входящих в состав растворенных молекул. По этой причине в качестве растворителя был выбран дейтерохлороформ CDCl_3 . Применение этого растворителя вместо хлороформа CHCl_3 позволяет избавиться от фонового сигнала, производимого протонами растворителя.

Обсудим смысл данных, приведенных на рис. 1 и 2.

Из них видно, что при мольных долях линейных молекул ПЭГ $\xi \lesssim 0.05$ имеет место случай (2.2), т.е. сигнал спинового эха описывается одной экспонентой. Затухание спинового эха определяется перемещением молекул только вдоль градиента модуля магнитного поля ∇B , который создается при измерениях по методу DOSY.

При малых концентрациях раствора молекулы движутся независимо друг от друга. За характерное время релаксации сигнала $\tau \sim 1/\alpha \sim 0.5 \text{ с}$ молекула диффундирует на расстояние $S \sim \sqrt{6D\tau} \sim 0.002 \text{ см} \gg L$. За это время линейная молекула хаотически совершает $\sim S/L \sim 1000$ полных оборотов. В таком случае все протоны каждой отдельной молекулы между собой равноправны, поскольку диффузионносмешаются практически на одинаковые расстояния $\sim \sqrt{6D\tau}$, отличающиеся друг от друга на малую величину $\leq L \ll \sqrt{6D\tau}$. По этой причине наблюдаемый коэффициент диффузии для всех протонов линейных молекул одинаков, и ЯМР-сигнал описывается одной экспонентой. Таким образом, при малых ξ по этому сигналу нельзя отличить линейную молекулу от сферической.

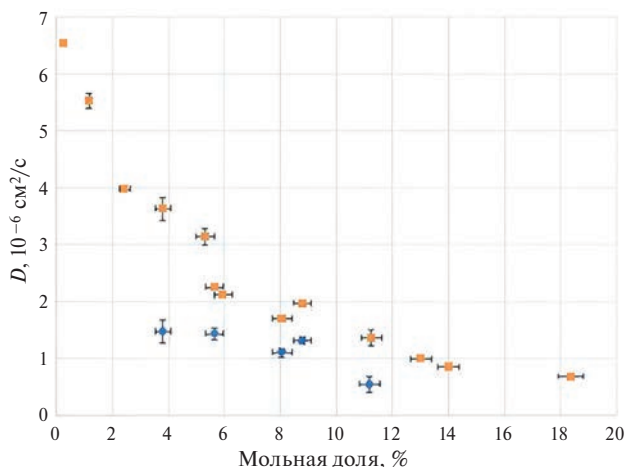


Рис. 1. Зависимость величин коэффициентов диффузии D_1 и D_2 от мольной доли линейных молекул полиэтиленгликоля (ПЭГ), растворенных в дейтеро-хлороформе CDCl_3 .

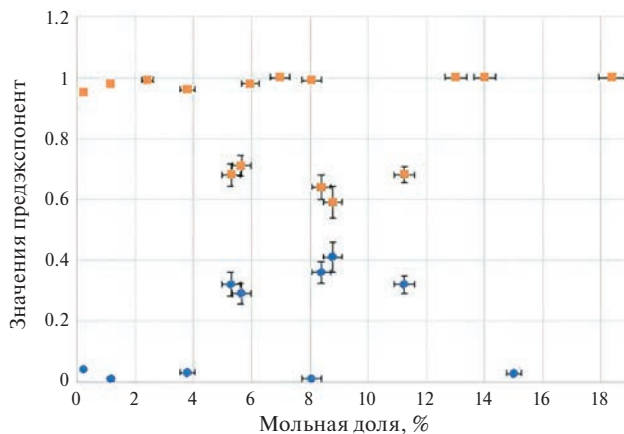


Рис. 2. Зависимость величин предэкспоненциальных множителей $U_{1,2}$ от мольной доли линейных молекул ПЭГ в CDCl_3 .

Положение меняется с ростом ξ , когда молекулы начинают касаться друг друга, и по этой причине их вращение затрудняется. Имея это обстоятельство в виду, а также формулы (1.2), мы обработали сигнал по формуле

$$U = U_1 e^{-\alpha_1 t} + U_2 e^{-\alpha_2 t} \tag{2.3}$$

и получили результаты, представленные на рис. 1 и 2.

Видно, что двухкомпонентная диффузия (2.3) существует при мольных долях ПЭГ $0.05 \lesssim \xi \lesssim 0.12$ причем, согласно рис. 1, измеренные величины КД согласуются с формулами (1.2), т.е. различаются примерно в два раза. Некие сбои, отмеченные на рис. 2, связаны с неустойчивостями нахождения параметров формулы (2.3) по методу наименьших квадратов, порожденными недостаточным объемом статистики.

При концентрациях $\xi \gtrsim 0.05$ длина молекул ПЭГ превышает расстояние между их центрами, поэтому вращение молекул становится затрудненным, “замороженным”, что и приводит к двухкомпонентности наблюдаемого сигнала.

Как говорилось ранее, затухание спинового эха определяется перемещением молекул только вдоль вектора ∇B градиента модуля магнитного поля. Приблизительно, на качественном уровне, линейные молекулы можно подразделить на две группы: ориентированные преимущественно вдоль и поперек вектора ∇B . Из-за затрудненности вращения каждой из этих групп свойственен свой коэффициент диффузии, определяемый формулами (1.2), что и проявляется в сигнале спинового эха.

При более строгой обработке опытов молекулы следовало бы разделить на большее количество групп в зависимости от их ориентации относительно ∇B , что привело бы к увеличению количества слагаемых в формуле (2.3). Однако, как показали приведенные здесь данные опытов с молекулами ПЭГ, а также с другими линейными молекулами (для краткости изложения их не обсуждаем), учет двух экспонент достаточен для различения линейных молекул от сферических.

Неясной остается природа однокомпонентности диффузии при $\xi \gtrsim 0.12$ что может стать предметом будущего исследования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что диффузионно-чувствительный метод ядерного магнитного резонанса (DOSY) позволяет идентифицировать конформационное состояние растворенных макромолекул в форме клубка (глобулы) или стержня.

В первом случае интенсивность сигнала спинового эха от макромолекул описывается одним слагаемым, экспоненциально спадающим со временем. В случае же линейных молекул в сигнале обнаруживаются по меньшей мере две экспоненты.

Этот результат может найти применение в физикохимии растворов макромолекул. Во всяком случае, он практически значим в некоторых медицинских приложениях, на которые и направлено наше исследование.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ “Курчатовский институт” при частичной поддержке гранта Российского научного фонда № 23-19-00451.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гросберг А.Ю., Хохлов А.Р. Статистическая физика макромолекул. М.: Наука, 1989. 343 с.
2. Лэмб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Palmin V., Mukhin A., Ivanova V., Perepukhov A., Nozik A.* Automated component analysis in DOSY NMR using information criteria // *J. Magn. Res.* 2023. V. 355. Article 107541.
4. Сликтер Ч. Основы магнитного резонанса. М.: Мир, 1981. 448 с.
5. Чижик В.И. Ядерная магнитная релаксация. СПб.: Изд-во Санкт-Петербург. ун-та, 2000. 385 с.
6. *Carr H. Y., Purcell E. M.* Effects of diffusion on free precession in nuclear magnetic resonance experiments // *Phys. Rev.* 1954. V. 94. P. 630–638.

DETERMINATION OF THE SHAPE AND DIMENSIONS OF THE POLYMER MOLECULES IN SOLUTIONS USING DIFFUSIONAL NMR RELAXATION

V. A. Ivanova^{a,*}, A. V. Maksimychev^{a,}, P. L. Men'shikov^{a,b,***}, A. R. Pashutin^{a,****},
A. M. Perepukhov^{a,c,*****}, A. N. Rozhkov^{d,*****}, and M. V. Tsar'kov^{a,*****}**

^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701 Russia*

^b *National Research Center "Kurchatov Institute", Moscow, 123182 Russia*

^c *Zelinsky Institute of Organic Chemistry of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^d *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

**E-mail: valeriya.ivanova@phystech.edu*

***E-mail: maksimychev.av@mipt.ru*

****E-mail: menshikov2005@mail.ru*

*****E-mail: nituhsap@mail.ru*

******E-mail: aleksandr-iv@mail.ru*

******E-mail: rozhkov@imnet.ru*

******E-mail: m.carkov@phystech.edu*

A new method of determining the dimensions and shapes of polymer molecules in solutions is proposed and verified in experiments. The method is based on the measurements of the relaxation of the transverse magnetization intensity of nuclei. It is established that the decaying signal of the spin echo from elongated molecules contains two terms exponentially decaying with time, which correspond to two diffusion coefficients differing by a factor of about two. The signal from molecules with a near-spherical shape contain only one exponent.

Keywords: polymer solutions, macromolecules, diffusion, nuclear magnetic resonance

УДК 534.222.2

РАЗРУШЕНИЕ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С МНОЖЕСТВЕННЫМИ БАРЬЕРАМИ

© 2024 г. Т. А. Журавская*, В. А. Левин

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: zhuravskaya@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 02.11.2023 г.

После доработки 14.11.2023 г.

Принята к публикации 14.11.2023 г.

Представлены результаты численного исследования взаимодействия сформированной ячеистой волны детонации, распространяющейся в заполненном покоящейся стехиометрической водородно-воздушной смесью плоском канале, с расположенными на его внутренней поверхности множественными препятствиями (барьерами). Исследование проведено в целях определения условий, обеспечивающих подавление детонации. Изучено влияние геометрических параметров области с препятствиями на распространение волны. Обнаружено, что локализация препятствий в углублении в стенке канала приводит к снижению их разрушающего воздействия на детонацию. Рассмотрено гашение детонационного горения расположенным вдоль стенки канала слоем не реагирующего газа, ограниченным одиночными барьерами. Исследовано влияние состава газа на взаимодействие волны детонации со слоем. Предложены не реагирующие газовые смеси, при заполнении которыми области с препятствиями усиливается разрушающее воздействие барьеров на детонационную волну.

Ключевые слова: плоский канал, самоподдерживающаяся детонационная волна, множественные препятствия (барьеры), слой не реагирующего газа, гашение детонационного горения

DOI: 10.31857/S1024708424020135 EDN: RINJEP

Определение новых способов гашения детонации для решения задач взрывобезопасности представляет собой одно из основных направлений изучения детонационного горения. Исследования показали, что для разрушения распространяющейся волны детонации можно использовать завесы из не реагирующих частиц пыли [1], помещенные в газ неподвижные инертные частицы или облака частиц [2–3].

Установлено, что в качестве элементов пассивной системы взрывобезопасности можно рассматривать расположенные в канале щелевые пластины [4] и перфорированные стенки [5, 6], различные пористые вставки на внутренней поверхности канала, см., например, [7–10]. Разрушающее воздействие на волну оказывают помещенные в канал препятствия различной конфигурации [11–15], в том числе множественные барьеры, расположенные на его внутренней поверхности.

Было обнаружено, что в случае стехиометрической водородно-воздушной смеси для повышения устойчивости детонации к возмущениям, вызванным серией барьеров, можно использовать как предварительную частичную диссоциацию молекулярного кислорода и водорода на атомы [13, 14], так и одновременное внесение в смесь добавок аргона и озона [15].

Продолжая исследование [16], данная работа численно изучает распространение детонационной волны в стехиометрической водородно-воздушной смеси в плоском канале, на одной из стенок которого локально расположены множественные барьеры, в целях определения условий, обеспечивающих гашение детонационного горения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается распространение детонационной волны в покоящейся при нормальных условиях ($p_0 = 1$ атм, $T_0 = 298$ К) стехиометрической водородно-воздушной смеси в полубесконечном плоском канале шириной L ($L = 2$ см), на внутренней поверхности которого расположена область с барьерами. Подобные серии препятствий можно рассматривать как модель вставки с пористым покрытием, например, покрытой стальной ватой [10].

Для инициирования детонации используется мгновенный однородный сверхкритический (достаточный для прямого инициирования детонации) подвод энергии в узком слое около закрытого торца канала. Горючая смесь моделируется смесью газов H_2 , O_2 , N_2 в молярном соотношении 42:21:79 соответственно.

Система уравнений, описывающих плоское двумерное нестационарное течение невязкой многокомпонентной реагирующей газовой смеси, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(\rho(u^2 + v^2)/2 + \rho h - p)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u((u^2 + v^2)/2 + h))}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v((u^2 + v^2)/2 + h))}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(\rho n_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u n_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v n_i)}{\partial y} = \rho \omega_i, \quad i = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Здесь x и y – декартовы координаты; u и v – соответствующие компоненты скорости; t – время; ρ , p и h – плотность, давление и удельная энтальпия смеси; n_i и ω_i – удельные концентрация и скорость образования i -го компонента смеси; M – количество компонентов. Уравнения состояния горючей смеси есть

$$p = \rho R_0 T \sum_{i=1}^M n_i, \quad h = \sum_{i=1}^M n_i h_i(T),$$

где T – температура; R_0 – универсальная газовая постоянная. Зависимости парциальных энтальпий от температуры $h_i(T)$ определяются по приведенным энергиям Гиббса соответствующих компонентов смеси [17]. Для описания химического взаимодействия используется детальный кинетический механизм окисления водорода, предложенный в работе [18].

Расположенные в канале барьеры моделируются как бесконечно-тонкие твердые поверхности, на которых, как и на стенках канала, выполняется условие непротекания.

Для решения уравнений газовой динамики использовалась явная схема второго порядка аппроксимации на основе схемы С.К. Годунова [19–22].

Расчет проведен на сетке с шагом разбиения $\Delta = 5$ мкм, обеспечивающим корректное разрешение структуры волны детонации. Для численного моделирования использовался оригинальный программный модуль, в котором реализовано гибридное распараллеливание расчетов MPI/OpenMP.

Исследование выполнено с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова [23].

ГАШЕНИЕ ДЕТОНАЦИИ В КАНАЛЕ С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

Начальный однородный энергоподвод инициирует плоскую детонационную волну, фронт которой со временем искривляется, возникают поперечные волны, в результате формируется самоподдерживающаяся детонационная волна с ячеистой структурой [24]. Нерегулярность полученной в расчетах структуры детонации согласуется с результатами экспериментального исследования детонационного горения разбавленных азотом водородно-кислородных смесей [25].

Средняя скорость распространения полученной в расчетах самоподдерживающейся волны $D \cong 1970$ м/с. Относительное отклонение численного значения скорости от определенного в эксперименте [26] не превосходит 0.5%. Протяженность зоны индукции (расстояние от лидирующей ударной волны до точки максимального градиента температуры в зоне реакции), полученная при рассмотрении структуры детонации Зельдовича–Неймана–Деринга, $\Delta_{ind} = 0.23$ мм, что совпадает с данными работы [27].

Однако следует отметить, что средний размер детонационной ячейки полученной в расчетах волны существенно меньше размера ячейки детонации, наблюдаемой в эксперименте [26, 28]. Подобное несоответствие размеров численной и экспериментальной детонационных ячеек в водородно-воздушной смеси отмечалось в ряде работ (см., напр., [29]).

Положение препятствий на стенке канала выбиралось так, чтобы к ним подходила сформировавшаяся ячеистая детонация. Результат взаимодействия волны с областью с препятствиями зависит от протяженности области L_b , высоты барьеров H_b и расстояния между соседними барьерами ΔL_b .

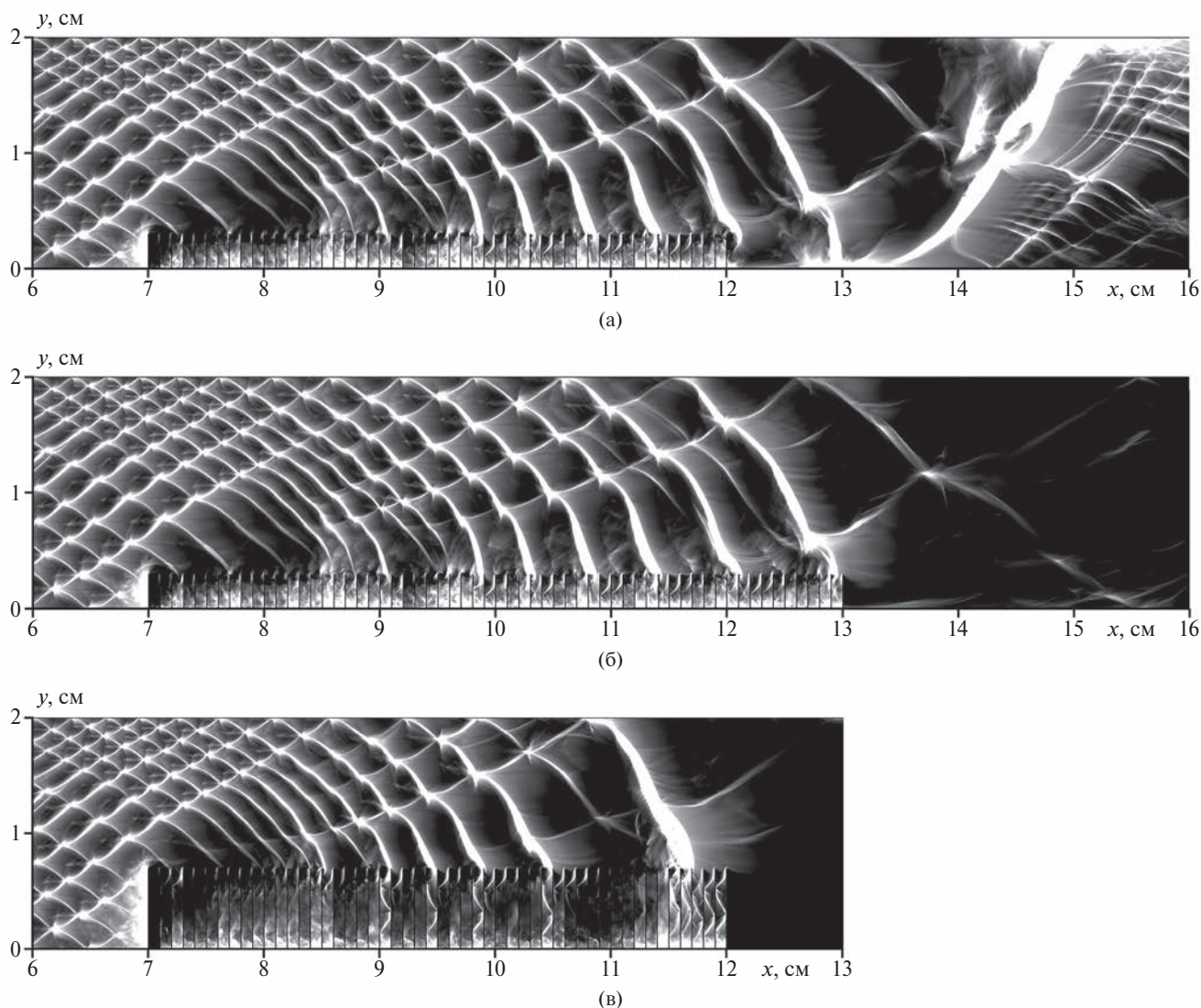


Рис. 1. Численные аналоги следа детонационной волны при взаимодействии с множественными барьерами ($\Delta L_b = 1$ мм): а – реиницирование детонации при $L_b = 5$ см и $H_b = 3$ мм; б, в – гашение детонационного горения при $L_b = 6$ см, $H_b = 3$ мм и $L_b = 5$ см, $H_b = 7$ мм соответственно. Здесь и далее волна распространяется слева направо.

В данной работе рассмотрены области с шагом расстановки препятствий $\Delta L_b = 1$ мм. Проведенные расчеты показали, что увеличение высоты барьеров или протяженности области при прочих фиксированных параметрах можно рассматривать как способы гашения детонационного горения. Так, детонация восстанавливается после взаимодействия с препятствиями высотой $H_b = 3$ мм, расположенными на части стенки канала протяженностью $L_b = 5$ см (рис. 1а).

Однако расширение области до $L_b = 6$ см или увеличение высоты препятствий до $H_b = 7$ мм оказываются достаточными условиями для гашения детонационного горения барьерами (рис. 1б, в). На рис. 1 и далее представлены численные аналоги следа, оставляемого в эксперименте проходящей детонационной волной на расположенной вдоль стенки канала закопченной пластине.

При прохождении детонации вдоль области с барьерами наблюдается гашение поперечных волн на препятствиях и зарождение новых в волне детонации, при этом размер ячейки детонационной волны постепенно увеличивается. Подобное изменение структуры волны наблюдалось при экспериментальных исследованиях распространения детонации в каналах с пористыми стенками [9].

В случае реиницирования детонации после взаимодействия с барьерами (см. рис. 1а) восстановление детонационного горения поперек всего канала происходит на некотором расстоянии от препятствий: первоначально формируется пересжатая детонация, о чем свидетельствует ее мелкая ячеистая структура;

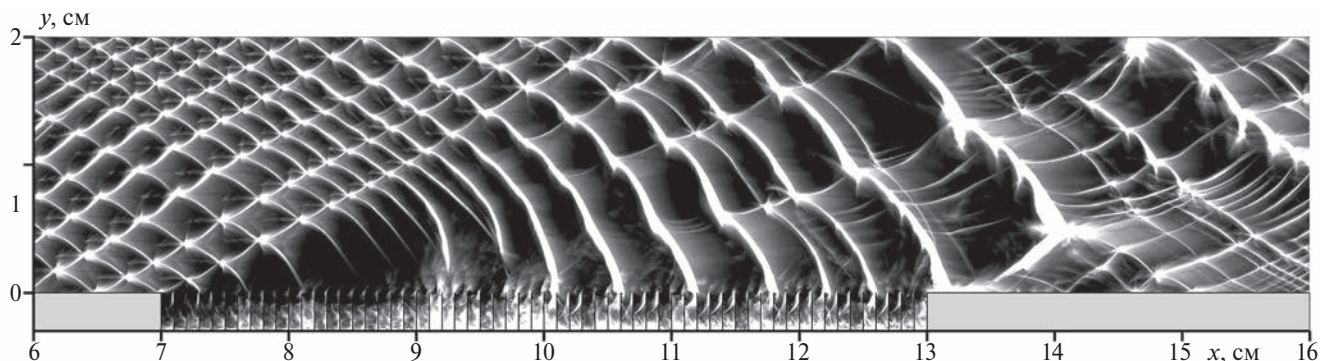


Рис. 2. Численный аналог следа детонационной волны при взаимодействии с множественными барьерами, расположенными в углублении в стенке канала ($L_b = 6$ см, $H_b = 3$ мм, $\Delta L_b = 1$ мм).

постепенно размер детонационной ячейки увеличивается. Такой характер восстановления детонации наблюдался в экспериментах для смесей с нерегулярной ячеистой структурой [6].

Наряду с препятствиями на внутренней поверхности канала рассмотрено взаимодействие волны с множественными барьерами, помещенными в расположенную в стенке нишу, глубина которой равна высоте препятствий. Расчеты показали, что несмотря на расширение канала в области барьеров (величина расширения докритическая), приводящее к локальному распаду волны при ее выходе в углубление (нишу), общее разрушающее воздействие препятствий на волну существенно слабее, чем препятствий, расположенных на внутренней поверхности канала, при прочих равных условиях.

Так, область протяженностью $L_b = 6$ см с барьерами высотой $H_b = 3$ мм, гасящая детонационное горение в случае ее расположения на внутренней поверхности канала (см. рис. 1б), не разрушает волну при ее локализации в углублении (рис. 2).

Это связано с тем, что при расположении барьеров в нише формируется течение с распространяющейся волной в канале с препятствиями, ширина которого больше ширины первоначального канала на величину углубления, а расширение канала при прочих равных условиях снижает разрушающее воздействие препятствий на детонацию.

Исследовано взаимодействие волны детонации с расположенным вдоль стенки канала слоем воздуха при нормальных условиях, ограниченным с обеих сторон одиночными барьерами. Получено, что, как и в случае области с препятствиями, наличие воздушного слоя приводит к ослаблению подходящих к нему поперечных волн, а увеличение его протяженности или высоты усиливают разрушающее воздействие слоя на волну (рис. 3).

Более того, в ряде случаев установлено, что использование воздушного слоя для гашения детонационного горения более эффективно по сравнению с областью с препятствиями той же высоты и протяженности с расстоянием между барьерами $\Delta L_b = 1$ мм (рис. 4).

Так, использование воздушного слоя протяженностью $L_b = 5$ см и высотой $H_b = 6$ мм позволяет погасить детонационное горение (рис. 4а), в то время как область с препятствиями с теми же параметрами не разрушает детонацию (рис. 4б).

Рассмотрено взаимодействие волны с рассматриваемым слоем ($L_b = 5$ см, $H_b = 6$ мм) в случае замены воздуха другим нереагирующим газом. Использование аргона (Ar) вместо воздуха при прочих равных условиях усиливает отражение поперечных волн от слоя в связи с его более высокой плотностью (в этом случае отношение плотности газа в слое к плотности стехиометрической водородно-воздушной смеси $\alpha = 1.91$, в то время как для слоя воздуха $\alpha = 1.38$), что снижает разрушающее воздействие слоя на волну. Согласно расчетам, после взаимодействия со слоем аргона с данными параметрами детонационная волна восстанавливается (рис. 5а).

Замена воздуха на гелий ($\alpha = 0.19$) качественно меняет характер взаимодействия детонационной волны со слоем (рис. 5б). В этом случае формируется движущаяся по гелию ударная волна, которая опережает волну детонации в горючей смеси, сопрягаясь с ней через косой скачок (рис. 6). Возникающее в этом случае течение подобно формирующемуся при взаимодействии ударной волны со слоем газа пониженной плотности, подробное исследование которого проведено в [30].

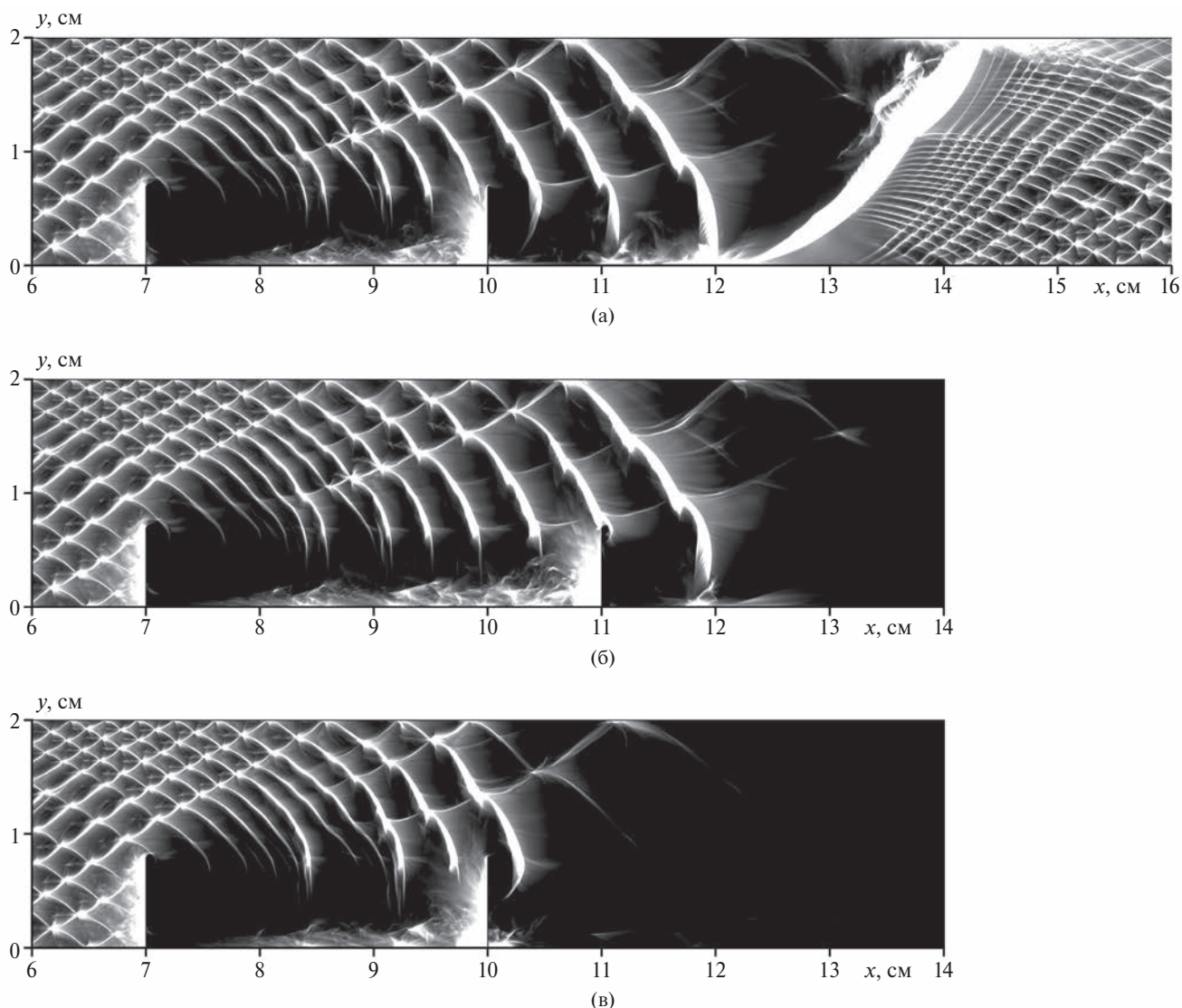


Рис. 3. След детонационной волны при взаимодействии со слоем воздуха: а – реиницирование детонации при $L_b = 3$ см и $H_b = 7$ мм; б, в – гашение детонационного горения при $L_b = 4$ см, $H_b = 7$ мм и $L_b = 3$ см, $H_b = 8$ мм соответственно.

На этапе формирования обгоняющей детонацию ударно-волновой структуры, получившей название “предвестник”, ее высота меняется незначительно и близка к начальной высоте слоя гелия. На этом этапе происходит гашение поперечных волн в волне детонации, размер детонационной ячейки увеличивается.

Далее высота сформированного “предвестника” растет по закону, близкому к линейному, что приводит к сужению области детонационного горения. Волна детонации становится пересжатой: ее скорость растет, ячеистая структура измельчается. В результате вышедшая из области над слоем гелия волна реиницирует детонационное горение поперек всего канала на некотором расстоянии от слоя (рис. 5б). Таким образом, замена воздуха на гелий также снижает разрушающее воздействие слоя на детонацию.

Рассмотрено взаимодействие детонационной волны со слоем нереагирующего газа, состав которого подобран из условия $\alpha = 1$ (равенство плотностей стехиометрической водородно-воздушной смеси и газа в слое). Установлено, что в случае заполнения рассматриваемого слоя смесью 7.1 He–16.9 N₂ детонационная волна разрушается после взаимодействия с ним (рис. 5в). Однако использование в слое смеси 19.1 He–16.9 Ar при прочих равных условиях не приводит к гашению детонационного горения (рис. 5г). Это связано с большей скоростью распространения ударной волны по слою в последнем случае, что уменьшает искривление детонационного фронта и снижает разрушающее воздействие слоя на волну.

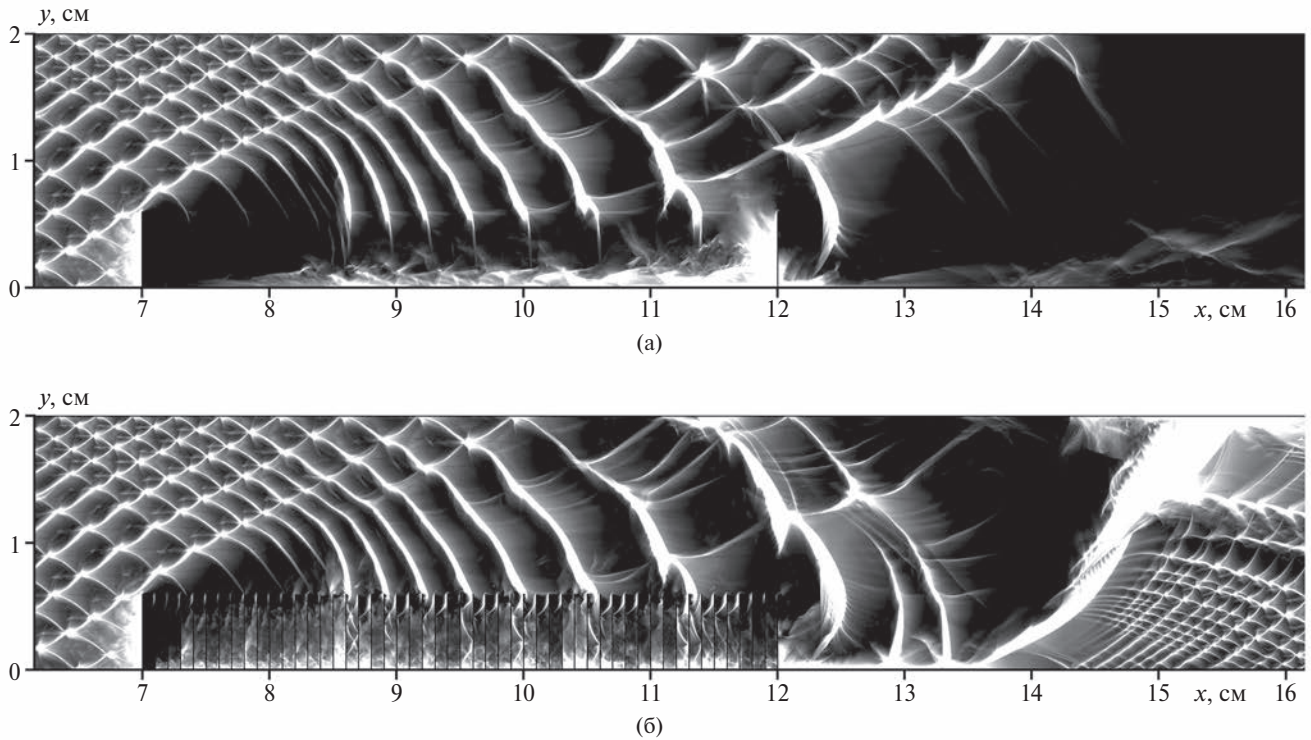


Рис. 4. Численный след детонационной волны при взаимодействии со слоем воздуха и областью с барьерами ($\Delta L_b = 1$ мм) при $L_b = 5$ см и $H_b = 6$ мм: а – гашение детонационного горения слоем воздуха; б – реиницирование детонации после прохождения области с барьерами.

Подобно наблюдаемому в экспериментах при детонационном горении смесей с нерегулярной ячеистой структурой в каналах с пористыми вставками [9] в расчетах получено, что сохранение/гашение детонации при взаимодействии с барьерами определяется конкуренцией двух противоположных процессов: ослаблением поперечных волн на барьерах и зарождением новых из локальных возмущений в зоне реакции (см. рис. 1). Следовательно, конструктивные изменения, усиливающие первый из них, будут способствовать разрушению детонационной волны.

Согласно проведенному исследованию, подобным способом увеличения разрушающего воздействия препятствий на волну является заполнение области с барьерами рядом не реагирующих газов. Так, при замене первоначальной горючей смеси на воздух между препятствиями высотой $L_b = 3$ мм в области протяженностью $L_b = 5$ см наблюдается полное гашение детонации (рис. 7а), в то время как данная область с препятствиями при ее заполнении горючей смесью (рис. 1а) или слой воздуха с теми же протяженностью и высотой не разрушают волну. Расчеты показали, что достаточным условием для подавления детонации при взаимодействии с данной серией препятствий ($L_b = 5$ см, $H_b = 3$ мм) является также заполнение пространства между барьерами аргоном, несмотря на более интенсивное формирование отраженных от области волн в этом случае (рис. 7б).

Рассмотрено взаимодействие волны детонации с данной областью с барьерами при ее заполнении не реагирующим газом (азотом, аргоном или воздухом), разбавленным гелием из условия равенства плотностей газа в области и горючей смеси в остальной части канала (т.е. при $\alpha = 1$). Наиболее эффективным оказалось заполнение пространства между препятствиями смесью 19.1 He–16.9 Ar, обеспечивающей разрушение волны детонации (рис. 7в).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное моделирование взаимодействия сформированной ячеистой волны детонации, распространяющейся в заполненном покоящейся стехиометрической водородно-воздушной смесью плоском канале, с расположенными на его внутренней поверхности множественными препятствиями (барьерами). Определены условия и предложены конструктивные решения, обеспечивающие подавление детонации.

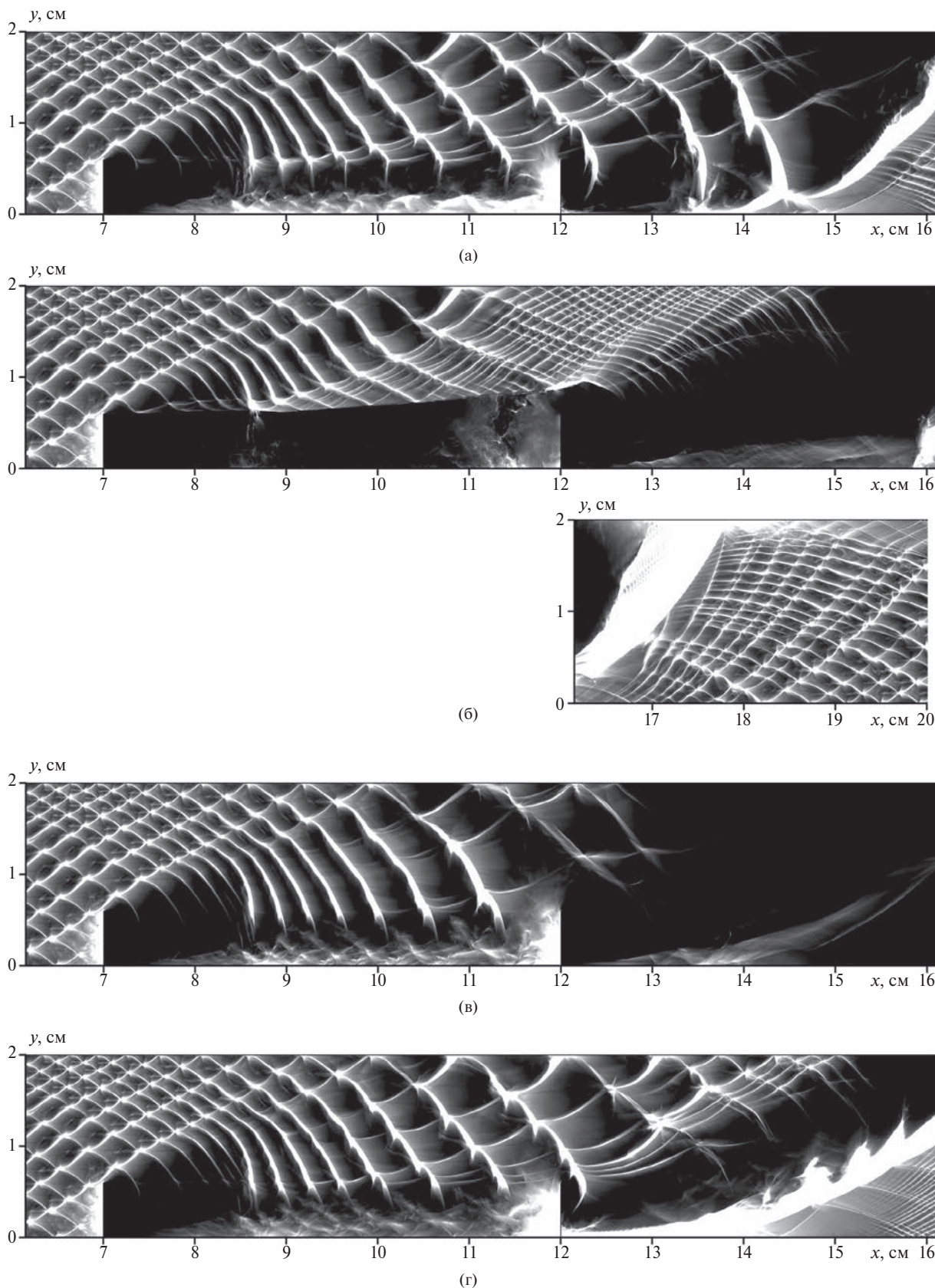


Рис. 5. След детонационной волны при взаимодействии со слоем не реагирующего газа ($L_b = 5$ см, $H_b = 6$ мм): а, б, г – реиницирование детонации при заполнении слоя Ar, He и 19.1 He–16.9 Ar соответственно; в – разрушение волны взаимодействием со слоем смеси 7.1 He–16.9 N₂.

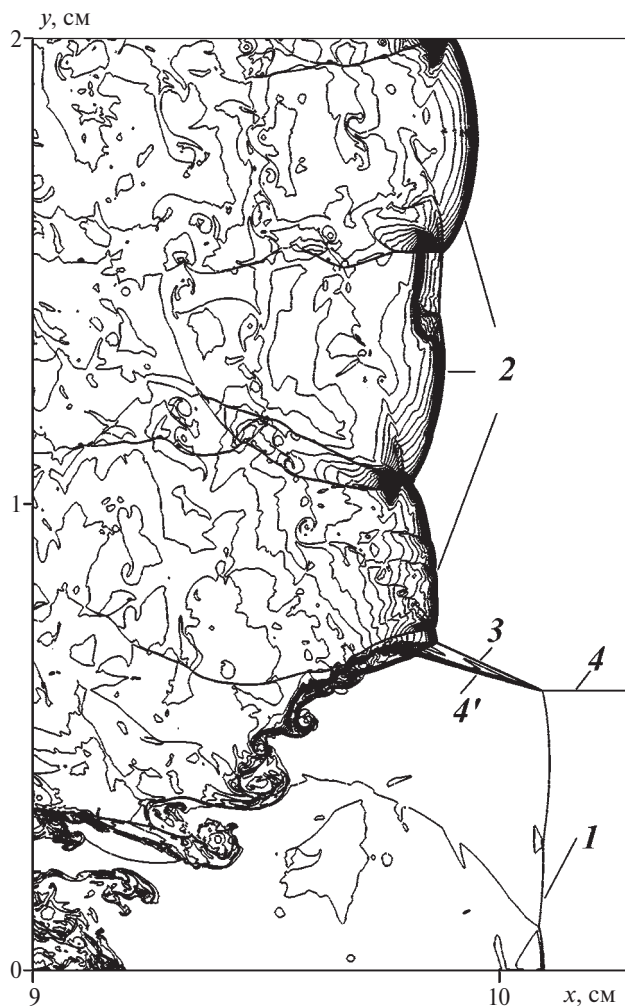


Рис. 6. Изолинии плотности в случае взаимодействия детонационной волны со слоем геля ($L_b = 5$ см, $H_b = 6$ мм) в момент $t = 0.050$ мс: 1 – ударная волна, распространяющаяся по гелию; 2 – детонационная волна; 3 – косой скачок; 4 и 4' – контактный разрыв.

Установлено, что увеличение протяженности области с препятствиями или высоты барьеров при прочих равных условиях способствует гашению детонационного горения, а размещение препятствий в углублении в стенке канала, напротив, ослабляет их разрушающее воздействие на волну.

Обнаружено, что для подавления детонации можно использовать расположенный вдоль стенки канала слой нереагирующего газа, ограниченный одиночными барьерами. Расчеты показали, что разрушающее воздействие слоя на волну определяется как его геометрическими параметрами, так и составом заполняющей его газовой смеси.

Исследовано взаимодействие детонационной волны с областью с препятствиями в случае ее заполнения нереагирующим газом. Для серии неразрушающих детонацию барьеров предложен ряд нереагирующих газовых смесей, использование которых для заполнения пространства между препятствиями обеспечивает гашение детонационного горения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте механики МГУ при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00307).

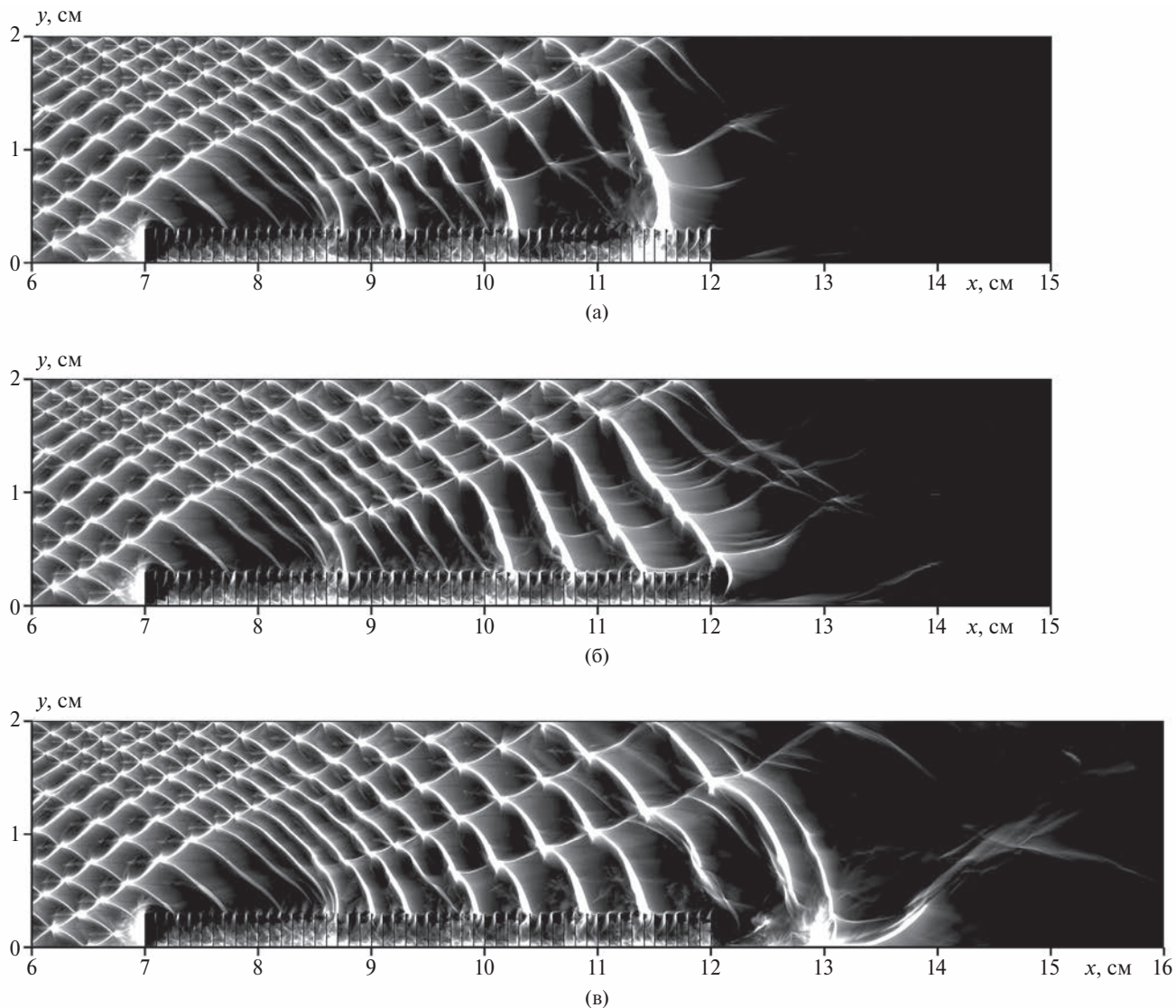


Рис. 7. Численный следовой отпечаток, иллюстрирующий гашение детонационного горения заполненной нереагирующим газом областью с барьерами ($L_b = 5$ см, $H_b = 3$ мм, $\Delta L_b = 1$ мм): а – воздух; б – Ar; в – 19.1 He–16.9 Ar.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев А.А., Пинаев А.В., Трубицын А.А., Грачёв А.Ю., Троцюк А.В., Фомин П.А., Трилис А.В. Что горит в шахте: метан или угольная пыль? // Физика горения и взрыва. 2017. Т. 53. № 1. С. 11–18. DOI: 10.15372/FGV20170102. Vasil'ev A.A., Pinaev A.V., Trubitsyn A.A., Grachev A.Yu., Trotsyuk A.V., Fomin P.A., and Trilis A.V. What is burning in coal mines: Methane or coal dust? // Combust. Explos. Shock Waves. 2017. V. 53. P. 8–14. <https://doi.org/10.1134/S0010508217010026>
2. Bedarev I.A., Fedorov A.V. Mathematical modeling of the detonation wave and inert particles interaction at the macro and micro levels // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 894. P. 012008. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012008.
3. Тропин Д.А., Фёдоров А.В. Ослабление и подавление детонационных волн в реагирующих газовых смесях облаками инертных микро- и наночастиц // Физика горения и взрыва. 2018. Т. 54. № 2. С. 82–88. DOI: 10.15372/FGV20180209.

- Tropin D.A., Fedorov A.V.* Attenuation and Suppression of Detonation Waves in Reacting Gas Mixtures by Clouds of Inert Microand Nanoparticles // *Combust. Explos. Shock Waves*. 2018. V. 54. P. 200–206.
<https://doi.org/10.1134/S0010508218020090>
4. *Obara T., Sentanuhady J., Tsukada Y., Ohyagi S.* Reinitiation process of detonation wave behind a slit-plate // *Shock Waves*. 2008. V. 18. P. 117–127. <https://doi.org/10.1007/s00193-008-0147-9>
5. *Медведев С.П., Хомик С.В., Гельфанд Б.Е.* Регенерация и подавление детонации водородовоздушной смеси преградой с отверстиями // *Химическая физика*. 2009. Т. 28. № 12. С. 52–60.
Medvedev S.P., Khomik S.V., Gel'fand B.E. Recovery and suppression of the detonation of hydrogen-air mixtures at an obstacle with orifices // *Russian Journal of Physical Chemistry B*. 2009. V. 3. P. 963–970.
<https://doi.org/10.1134/S1990793109060165>
6. *Qin H., Lee J.H.S., Wang Z., Zhuang F.* An experimental study on the onset processes of detonation waves downstream of a perforated plate // *Proceeding the Combustion Institute*. 2015. V. 35. I. 2. P. 1973–1979.
<https://doi.org/10.1016/j.proci.2014.07.056>
7. *Шарыпов О.В., Пирогов Е.А.* О механизме ослабления и срыва газовой детонации в каналах с акустически поглощающими стенками // *Физика горения и взрыва*. 1995. Т. 31. № 4. С. 71–76.
Sharypov O.V., Pirogov Y.A. On the mechanism of weakening and breaking of gas detonation in channels with acoustically absorbing walls // *Comb. Expl. Shock Waves*. 1995. V. 31. P. 466–470. <https://doi.org/10.1007/BF00789368>
8. *Teodorczyk A., Lee J.H.S.* Detonation attenuation by foams and wire meshes lining the walls // *Shock Waves*. 1995. V. 4. P. 225–236. <https://doi.org/10.1007/BF01414988>
9. *Radulescu M.I., Lee J.H.S.* The failure mechanism of gaseous detonations: experiments in porous wall tubes // *Combustion and Flame*. 2002. V. 131. I. 1-2. P. 29–46. [http://dx.doi.org/10.1016/S0010-2180\(02\)00390-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0010-2180(02)00390-5)
10. *Bivol G.Yu., Golovastov S.V., Golub V.V.* Detonation suppression in hydrogen–air mixtures using porous coatings on the walls // *Shock Waves*. 2018. V. 28. P. 1011–1018. <https://doi.org/10.1007/s00193-018-0831-3>
11. *Yang T., He Q., Ning J., Li J.* Experimental and numerical studies on detonation failure and re-initiation behind a half-cylinder // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2022. V. 47. I. 25. P. 12711–12725.
<https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.01.230>
12. *Tropin D., Temerbekov V.* Numerical simulation of detonation wave propagation through a rigid permeable barrier // *International Journal of Hydrogen Energy*. 2022. V. 47. No. 87. P. 37106–37124.
<https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.08.256>
13. *Левин В.А., Журавская Т.А.* Управление детонационным горением посредством предварительной подготовки газовой смеси // *Письма в ЖТФ*. 2020. Т. 46. № 4. С. 40–44. <https://doi.org/10.21883/PJTF.2020.04.49050.18074>
Levin V.A., Zhuravskaya T.A. Detonation Combustion Control Using Preliminary Preparation of the Gas Mixture // *Tech. Phys. Lett.* 2020. V. 46. № 2. P. 189–192. <https://doi.org/10.1134/S1063785020020248>
14. *Журавская Т.А., Левин В.А.* Управление детонационной волной в канале с препятствиями посредством предварительной подготовки газовой смеси // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2020. № 4. С. 59–68.
Zhuravskaya T.A., Levin V.A. Control of a Detonation Wave in a Channel with Obstacles Using Preliminary Gas Mixture Preparation // *Fluid Dynamics*. 2020. № 55. P. 488–497. <https://doi.org/10.1134/S0015462820040138>
15. *Левин В.А., Журавская Т.А.* Управление детонационным горением водородно-воздушной смеси посредством внесения аргона и озона // *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. 2021. № 501. С. 48–53.
Levin V.A., Zhuravskaya T.A. Control of detonation combustion of a hydrogen–air mixture by argon and ozone addition // *Doklady Physics*. 2021. № 66. P. 320–324. <https://doi.org/10.1134/S1028335821110057>
16. *Левин В.А., Журавская Т.А.* Гашение детонационного горения водородно-воздушной смеси в плоском канале // *Письма в Журнал технической физики*. 2023. Т. 49. № 18. С. 42–46.
<https://doi.org/10.21883/PJTF.2023.18.56177.19657>
17. *Термодинамические свойства индивидуальных веществ / Под ред. В.П. Глушко и др. Т. I. Кн. 2. М.: Наука, 1978. 328 с.*
Thermodynamic Properties of Individual Substances / Ed. by L.V. Gurvich and I.V. Veyts. V. 1. Part 2. New York: Hemisphere, 1989.
18. *Bezgin L.V., Kopchenov V.I., Sharipov A.S., Titova N.S., Starik A.M.* Evaluation of Prediction Ability of Detailed Reaction Mechanisms in the Combustion Performance in Hydrogen/Air Supersonic Flows // *Combustion Science and Technology*. 2013. V. 185. I. 1. P. 62–94. <https://doi.org/10.1080/00102202.2012.709562>
19. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.

20. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
21. Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection // Journal of Computational Physics. 1977. No. 23. P. 276–299.
22. Родионов А.В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчёта неравновесных течений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 4. С. 585–593.
Rodionov A.V. Monotonic scheme of the second order of approximation for the continuous calculation of non-equilibrium flows // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1987. V. 27. I. 2. P. 175–180.
[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(87\)90174-1](https://doi.org/10.1016/0041-5553(87)90174-1)
23. Voevodin V.I., Antonov A., Nikitenko D., Shvets P., Sobolev S., Sidorov I., Stefanov K., Voevodin Vad., Zhumatiy S. Supercomputer Lomonosov-2: Large Scale, Deep Monitoring and Fine Analytics for the User Community // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2019. V. 6. No. 2. P. 4–11. <https://doi.org/10.14529/jsfi190201>
24. Солоухин Р.И. Ударные волны и детонация в газах. М.: ГИФМЛ, 1963. 176 с.
Soloukhin R.I. Shock Waves and Detonations in Gases. Baltimore: Mono Book, 1966.
25. Pintgen F., Eckert C.A., Austin J.M., Shepherd J.E. Direct observations of reaction zone structure in propagating detonations // Combustion and Flame. 2003. V. 133. I. 3. P. 211–229. [https://doi.org/10.1016/S0010-2180\(02\)00458-3](https://doi.org/10.1016/S0010-2180(02)00458-3)
26. Ciccarelli G., Ginsberg T., Boccio J., Finfrook C., Gerlach L., Tagawa H., Malliakos A. Detonation Cell Size Measurements in High-Temperature Hydrogen–Air–Steam Mixtures at BNL High-Temperature Combustion Facility // Brookhaven National Laboratory Rep. 1997. NUREG/CR-6391, BNL-NUREG-52482.
27. Shepherd J.E. Chemical kinetics of hydrogen-air-diluent detonations // Progress in Astronautics and Aeronautics. 1986. V. 106. P. 263–293.
28. Bull D.C., Elsworth J.E., Shuff P.J. Detonation cell structures in fuel/air mixtures // Combust. Flame. 1982. V. 45. P. 7–22. [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(82\)90028-1](https://doi.org/10.1016/0010-2180(82)90028-1)
29. Taylor B.D., Kessler D.A., Gamezo V.N., Oran E.S. Numerical simulations of hydrogen detonations with detailed chemical kinetics // Proceedings of the Combustion Institute. 2013. V. 34. I. 2. P. 2009–2016.
<https://doi.org/10.1016/j.proci.2012.05.045>
30. Георгиевский П.Ю., Левин В.А., Сутырин О.Г. Взаимодействие ударной волны с продольным слоем газа пониженной плотности // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 125–132.
Georgievskii P.Y., Levin V.A., Sutyurin O.G. Interaction between a shock wave and a longitudinal low-density gas layer // Fluid Dynamics. 2016. V. 51. № 5. P. 696–702. <https://doi.org/10.1134/S0015462816050148>

FAILURE OF A DETONATION WAVE IN A PLANE CHANNEL WITH MULTIPLE OBSTACLES

T. A. Zhuravskaya^{a, *} and V. A. Levin^a

^a Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, Russia

* E-mail: zhuravskaya@imec.msu.ru

The results of numerical study of the interaction of a formed cellular detonation wave propagating in a plane channel occupied by a quiescent stoichiometric hydrogen-air mixture with multiple obstacles (barriers) located on the inner surface of the channel are given. The study is carried out to determine the conditions that ensure suppression of detonation. The influence of geometric parameters of the area with obstacles on wave propagation is studied. It is found that localization of the obstacles in a recess in the channel wall leads to a decrease in their destructive effect on detonation. Quenching of detonation combustion by the layer of a non-reacting gas located along the channel wall, limited by single barriers, is considered. The effect of gas composition on the interaction of the detonation wave with the layer is studied. Non-reacting gas mixtures, which, being filled into the area with obstacles, enhance the destructive effect of barriers on the detonation wave are proposed.

Keywords: plane channel, self-sustaining detonation wave, multiple obstacles (barriers), layer of nonreacting gas, quenching of detonation combustion

УДК 534-13

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЯМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

© 2024 г. А. Н. Нуриев*, О. Н. Зайцева**, А. М. Камалутдинов***,
Е. Е. Богданович****, А. Р. Баймуратова*****

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

*E-mail: Artem.Nuriev@kpfu.ru

**E-mail: olga_fdpi@mail.ru

***E-mail: amkamalutdinov@kpfu.ru

****E-mail: helenbogdanovich03@gmail.com

*****E-mail: angelina.baimuratova@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.09.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

Проводится исследование гидродинамических течений, индуцированных поступательными колебаниями цилиндрических тел с разной формой сечения. Движение жидкости около осциллирующих тел описывается с помощью системы уравнений Навье–Стокса, которая записывается в обобщенной криволинейной системе координат. Переход к заданной форме тела реализуется с помощью конформного отображения. Решение задачи осуществляется в предположении о малости амплитуд колебаний с помощью метода последовательных асимптотических разложений. Подзадачи в каждом асимптотическом приближении решаются численно с помощью метода конечных разностей. По результатам работы получены оценки гидродинамического воздействия, проведена оценка применимости высокочастотного асимптотического приближения, изучены вторичные стационарные течения около цилиндров, в частности, на примере профиля Жуковского рассмотрено возникновение направленных стационарных потоков около колеблющегося несимметричного тела.

Ключевые слова: колебательное движение, вязкая жидкость, гидродинамическая сила, вторичное стационарное течение, пропульсивное движение

DOI: 10.31857/S1024708424020143 EDN: RILRDJ

Исследования аэрогидродинамики колебательного движения тел в жидкости имеют большое значение для широкого спектра прикладных направлений, таких как морское строительство [1, 2], авиационно-космическая инженерия [3, 4], атомно-силовая микроскопия [5, 6], альтернативная энергетика [7], микрофлюидика [8, 9], разработка биомиметических пропульсивных систем [10–12] и др.

Основой для многих гидродинамических моделей в обозначенной области является двумерная теория обтекания осциллирующих цилиндрических тел простой формы, например, круглой, квадратной, эллиптической и т.д. Однако даже в двумерном случае задача описания течений и определения соответствующего воздействия на колеблющиеся тела является нетривиальной.

При больших и средних амплитудах колебаний, когда около тел реализуются вихревые отрывные режимы обтекания, изучение аэрогидродинамики главным образом основывается на экспериментах и численных решениях (см., напр., [6, 9, 10, 13]), а также на моделях теории идеальной жидкости [14, 15]. При малых амплитудах колебаний, когда вязкие эффекты проявляются главным образом в пограничном слое около тела, полную картину гидродинамических процессов можно получить, используя асимптотический подход.

Первые результаты в этой области получены еще Стоксом [16] в XIX в. Им, в частности, в первом приближении было построено аналитическое решение для случая малоамплитудных колебаний круглого цилиндра. Развитие асимптотических исследований этой задачи проводилось далее в многочисленных работах, напр. [17–19, 28, 29].

Переход к некруглой форме сечения существенно осложняет решение задачи в рамках асимптотического подхода. Исследования в этой области не так многочисленны. Обобщение решения Стокса на цилиндрическое тело с произвольной формой сечения проводилось в работе Така [20], им был предложен метод

расчета гидродинамической силы, основанный на численном методе граничных элементов. Развитие этот подход получил в работах [21, 22]. Также следует отметить аналитические результаты для цилиндрических тел с разной формой сечения, полученные в исследованиях [23, 24] для случая высокочастотных малоамплитудных колебаний.

В данной работе в рамках развития метода формальных асимптотических разложений и численного моделирования исследуются гидродинамическое воздействие на тела с разной формой сечения, совершающие малоамплитудные поступательные колебания, и индуцированные такими колебаниями стационарные вторичные течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течения, которые возникают около цилиндрического тела характерного размера R , совершающего малоамплитудные гармонические поступательные колебания в вязкой несжимаемой жидкости со скоростью

$$u_0 = U_0 \cos(\omega t)(\cos \alpha, \sin \alpha),$$

где U_0 – характерная амплитуда скорости колебаний; ω – частота колебаний; α – угол между осью колебаний и осью Ox .

Решение гидродинамической задачи будем проводить в подвижной криволинейной ортогональной системе координат (r, θ) жестко связанной с телом, которая задается конформным отображением

$$z(\zeta) = x + iy, \quad \zeta = r + i\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial y}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{\partial x}{\partial \theta}.$$

Оно отображает полуполосу $r_0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ во внешность сечения цилиндра в физической области. При этом $r = r_0$ переходит в замкнутую кривую, определяющую профиль сечения цилиндра, бесконечно удаленная точка перейдет в бесконечно удаленную $z(\infty) = \infty$ и $\partial z / \partial \zeta > 0$. Коэффициенты Ламе (масштабные коэффициенты) определяются следующим образом:

$$\lambda = \lambda_r = \lambda_\theta, \quad \lambda^2 = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta}.$$

Нормируя пространственные координаты на R , время на ω^{-1} , функцию тока w на $U_0 R$, завихренность ω на ω , запишем уравнения, описывающие движение вязкой несжимаемой жидкости около цилиндра, в терминах завихренности – функция тока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k}{\lambda^2} \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} &= \beta^{-1} \Delta w, \quad w = \Delta \psi, \\ \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \Delta = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь безразмерные параметры

$$k = U_0 / (R\omega), \quad \beta = R^2 \omega / \nu$$

определяют безразмерную амплитуду колебаний и безразмерную частоту колебаний (где ν – кинематическая вязкость жидкости) цилиндра соответственно, далее будем считать $k \ll 1$.

В заданной подвижной системе координат на границе цилиндра ставятся условия прилипания и непротекания, а на бесконечности задаются граничные условия, соответствующие безвихревому осциллирующему течению:

$$r = r_0: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi \sim m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha) \cos t, \quad m_\infty = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{-\zeta} \right)_{\zeta=\infty}.$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Для решения задачи будем использовать метод формальных асимптотических разложений. Полагая k малой величиной, представим функции ψ и w в виде ряда по степеням k :

$$\psi = k^0 \psi_0 + k^1 \psi_1 + \dots, \quad w = k^0 w_0 + k^1 w_1 + \dots \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и (2) и собирая члены при одинаковых степенях k , получим серию линейных подзадач.

В главном члене решение описывает нестационарное стоксовское (осцилляционное) течение жидкости около цилиндра:

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} = \beta^{-1} \Delta w_0, \quad w_0 = \Delta \psi_0, \quad (4)$$

$$r = r_0: \quad \psi_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_0 = m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha) \cos t + O(1).$$

В соответствии с имеющимися граничными условиями решение подзадачи в этом члене можно представить в следующем виде:

$$\psi_0 = \text{Real} \left((\psi_0^1 + i \psi_0^2) e^{it} \right) = \psi_0^1 \cos t - \psi_0^2 \sin t, \quad (5)$$

$$w_0 = \text{Real} \left((w_0^1 + i w_0^2) e^{it} \right) = w_0^1 \cos t - w_0^2 \sin t.$$

Подставляя (5) в (4), перепишем эту подзадачу как

$$\begin{cases} \Delta \psi_0^{1,2} = w_0^{1,2} \\ -w_0^2 = \beta^{-1} \Delta w_0^1, \\ w_0^1 = \beta^{-1} \Delta w_0^2 \end{cases} \quad (6)$$

$$r = r_0: \quad \psi_0^{1,2} = \frac{\partial \psi_0^{1,2}}{\partial r} = 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_0^1 \sim m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha), \quad \psi_0^2 = O(1).$$

Далее ее решение будет определяться численно.

Подзадача при первой степени k , описывает как осцилляционные, так и стационарные потоки (далее стационарная часть обозначается с помощью индекса s). В ходе дальнейшего решения мы будем исследовать только стационарную составляющую решения, описывающую вторичные стационарные течения. Подзадача для определения этой составляющей записывается следующим образом:

$$\Delta w_1^s = \frac{\beta}{\lambda^2} \frac{\partial(\psi_0, w_0)^s}{\partial(r, \theta)} = \frac{\beta}{(2\lambda^2)} \frac{\partial(\psi_0^1, w_0^1)}{\partial(r, \theta)} + \frac{\partial(\psi_0^2, w_0^2)}{\partial(r, \theta)}, \quad (7)$$

$$\Delta \psi_1^s = w_1^s,$$

$$r = r_0: \quad \psi_1^s = \frac{\partial \psi_1^s}{\partial r} = 0.$$

Для симметричных тел на бесконечности будем использовать следующие условия:

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_1^s = O(1).$$

При колебаниях несимметричных тел могут возникать направленные потоки, в этом случае условие на бесконечности нужно рассматривать в виде

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_1^s = O(e^r).$$

Решение стационарной задачи далее также будет определяться численно.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Численное решение подзадач (6), (7) проводится с помощью метода конечных разностей. Решение строится в ограниченной области $r_0 \leq r \leq r_\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ на равномерных (в пространстве конформного отображения) сетках с $n_r \times n_\theta$ узлов. Дискретные значения переменных определяются в узлах расчетной сетки.

Для аппроксимации оператора Лапласа (в двумерной области) используется стандартный симметричный пятиточечный шаблон. Для вычисления частных производных в правой части уравнения (7) по дискретному решению, полученному в главном члене, используются симметричные конечно-разностные схемы 4-го порядка точности за исключением точек в окрестности границ области, где применяются центральные разности 2-го порядка точности. Как показывают расчеты, высокий порядок схемы для вычисления правой части позволяет существенно снизить накопление ошибок при решении задачи (7), в особенности при изучении колебаний несимметричных тел.

Остановимся более подробно на дискретизации граничных условий (ГУ). На границе цилиндра ГУ преобразуются к следующему виду:

$$\tilde{\psi}_0^{1,2}(r_0) = 0, \quad \tilde{w}_0^{1,2}(r_0) = \frac{1}{\lambda(r_0)^2} \frac{2}{h^2} \tilde{\psi}_0^{1,2}(r_0 + h_r),$$

где тильда обозначает приближенную сеточную функцию; h_r – шаг сетки по координате r . Условие для завихренности здесь отражает широкоизвестное условие Тома 2-го порядка точности [25].

На внешней границе расчетной области в первой подзадаче (6) ГУ записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0^1(r_\infty) + \frac{\partial^{(up2)} \tilde{\psi}_0^1}{\partial r}(r_\infty) &= 2 m_\infty e^{r_\infty} \sin(\theta - \alpha), \\ \tilde{\psi}_0^2(r_\infty) + \frac{\partial^{(up2)} \tilde{\psi}_0^2}{\partial r}(r_\infty) &= 0, \quad \frac{\partial^{(up2)} \tilde{w}_0^{1,2}}{\partial r}(r_\infty) = 0. \end{aligned}$$

Индекс (up2) у символа частной производной указывает здесь на использование направленной разности второго порядка точности для аппроксимации соответствующей производной. Представленные условия призваны смоделировать правильное осцилляционное поведение течения на удаленной (на конечное расстояние) границе. Дополнительные замечания по критериям выбора соответствующих условий даны в разделе 5.1.

Во второй подзадаче дискретные граничные условия на внешней границе задаются для симметричных тел как

$$\begin{aligned} e^{2r_\infty} \frac{\partial^{(up)} \tilde{\psi}_1^s}{\partial r}(r_\infty) - e^{2(r_\infty - h_r)} \frac{\partial^{(up)} \tilde{\psi}_1^s}{\partial r}(r_\infty - h_r) &= 0, \\ 2\tilde{w}_1^s(r_\infty) + \frac{\partial^{(up2)} \tilde{w}_1^s}{\partial r}(r_\infty) &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

для несимметричных тел как

$$\begin{aligned} e^{-r_\infty} \frac{\partial^{(up)} \tilde{\psi}_1^s}{\partial r}(r_\infty) - e^{-(r_\infty - h_r)} \frac{\partial^{(up)} \tilde{\psi}_1^s}{\partial r}(r_\infty - h_r) &= 0, \\ 2\tilde{w}_1^s(r_\infty) + \frac{\partial^{(up2)} \tilde{w}_1^s}{\partial r}(r_\infty) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь аналогично индекс (up) указывает на использование направленной разности 1-го порядка точности.

Решение результирующих систем линейных алгебраических уравнений проводилось с помощью геометрического многосеточного метода. Использовался V-цикл, количество пре- и поститераций сглаживания

в котором варьировалось от 3 до 6 в зависимости от сетки и геометрии цилиндра. В качестве метода сглаживания использовался метод релаксации. Решение считалось найденным при достижении невязки 10^{-8} .

Программный код был реализован на языке C⁺⁺ на базе кода, созданного в работе [26]. Благодаря использованию многосеточного метода алгоритм решения имеет высокую скорость сходимости, характерное время полного расчета (в двух приближениях) одного случая на сетке с 2.6×10^5 узлов составляет от 30 с до 5 мин (в зависимости от формы тела) на одном ядре мобильного процессора Intel Core i7-1165G7.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ЦИЛИНДР

Одной из важнейших характеристик, исследуемых течений, является гидродинамическая сила $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$, действующая на цилиндр. Ее компоненты (обезразмеренные на $2\pi R^2 U \omega$) можно определить по следующим формулам:

$$f_x = \frac{1}{2\pi\beta} \left(\int_0^{2\pi} \omega \frac{\partial x}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0} d\theta + \int_0^{2\pi} y \frac{\partial \omega}{\partial r} \Big|_{r=r_0} d\theta \right),$$

$$f_y = \frac{1}{2\pi\beta} \left(\int_0^{2\pi} \omega \frac{\partial y}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0} d\theta - \int_0^{2\pi} x \frac{\partial \omega}{\partial r} \Big|_{r=r_0} d\theta \right).$$

В соответствии с используемым разложением сила представляется в виде суммы слагаемых

$$f_x \approx f_x^1 \cos t - f_x^2 \sin t + k f_x^s,$$

$$f_y \approx f_y^1 \cos t - f_y^2 \sin t + k f_y^s,$$

для вычисления которых в программе использовались следующие приближенные формулы:

$$f_x^{1,2,s} = \frac{1}{2\pi\beta} \left(\sum_i \tilde{w}_{0,1}^{1,2,s}(r_0, ih_\theta) \frac{\partial^{(c)} x}{\partial \theta}(r_0, ih_\theta) h_\theta + \sum_i y(r_0, ih_\theta) \frac{\partial^{(h)} \tilde{w}_{0,1}^{1,2,s}}{\partial r}(r_0, ih_\theta) h_\theta \right),$$

$$f_y^{1,2,s} = \frac{1}{2\pi\beta} \left(\sum_i \tilde{w}_{0,1}^{1,2,s}(r_0, ih_\theta) \frac{\partial^{(c)} y}{\partial \theta}(r_0, ih_\theta) h_\theta - \sum_i x(r_0, ih_\theta) \frac{\partial^{(h)} \tilde{w}_{0,1}^{1,2,s}}{\partial r}(r_0, ih_\theta) h_\theta \right).$$

Здесь индекс (c) указывает на использование центрально-разностной аппроксимации, а индекс (h) — на использование следующей аппроксимации 2-го порядка точности с компактным шаблоном:

$$\frac{\partial^{(h)} \tilde{w}}{\partial r}(r_0, ih_\theta) = \frac{\tilde{w}(r_0 + h) - \tilde{w}(r_0)}{h_r} + \frac{h_r}{2} \left(-g(r_0, ih_\theta) \lambda(r_0)^2 + \frac{-\tilde{w}(r_0, (i-1)h_\theta) + 2\tilde{w}(r_0, ih_\theta) - \tilde{w}(r_0, (i+1)h_\theta)}{h_\theta^2} \right),$$

при построении которой используются исходные уравнения для завихренности (6), (7), записанные в виде

$$\Delta w = g.$$

Такой способ аппроксимации, основанный на схеме дискретизации исходных уравнений, является более предпочтительным, чем, например, использование направленных разностей второго порядка точности, так как снижает накопление ошибки, связанной с повторным приближенным вычислением производной по известным дискретным значениям функции. Заметим также, что стационарные составляющие f_x^s и f_y^s для симметричных тел в обозначенных условиях равны нулю.

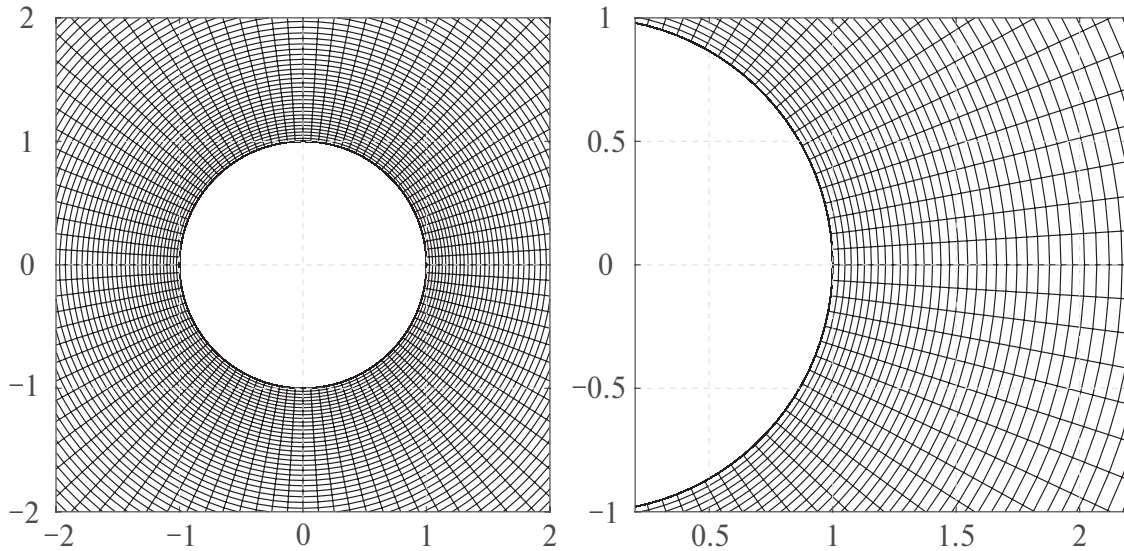


Рис. 1. Характерная структура сетки ($n = 100 \times 100$) в окрестности круглого цилиндра (в физической плоскости).

Традиционно в численных и экспериментальных работах для аппроксимации нестационарной силы (f_α), действующий на тело вдоль оси колебаний при установившемся движении, используют представление Морисона [27]:

$$f_\alpha \approx -\frac{4}{3\pi^2} k C_D \cos t + \frac{1}{2} C_M \sin t,$$

где C_D называется коэффициентом сопротивления или демпфирования, а C_M называется коэффициентом инерциальных сил. В нашем случае коэффициенты Морисона могут быть вычислены как

$$C_D = -\frac{3\pi^2}{4k} (f_x^1 \cos \alpha + f_y^1 \sin \alpha),$$

$$C_M = -2(f_x^2 \cos \alpha + f_y^2 \sin \alpha).$$

Заметим также, что вычисленная в используемой подвижной системе координат сила f отлична от силы f^* в неподвижной системе координат на величину, называемую силой Крылова–Фруда f^{FK} ($f = f^* + f^{FK}$). Она равна произведению ускорения на площадь S поперечного сечения тела:

$$f^{FK} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \sin t S.$$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

5.1. Колебания круглого цилиндра

В качестве первого примера рассмотрим колебания круглого цилиндра в жидкости. Преобразование координат для круглого цилиндра задается как

$$x = e^r \cos \theta, \quad y = e^r \sin \theta;$$

$$\lambda^2 = e^{2r}, \quad r_0 = 0.$$

Заметим, что при таком преобразовании используемая равномерная сетка в области конформного отображения соответствует экспоненциально сгущающейся сетке в направлении нормалей к цилиндру в физической плоскости (рис. 1).

На базе этого примера проведем непосредственную апробацию модели, сравнивая результаты с известным аналитическим решением. В главном члене оно было полученное впервые в знаменитой работе Стокса [16]. Его можно записать в следующем виде [28]:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \text{Real}\left((\psi_0^1 + i\psi_0^2)e^{it}\right)\sin\theta, \\ \psi_0^1 + i\psi_0^2 &= e^r - e^{-r} - S_x e^{-r} - z^{-2}W_1, \\ z = \sqrt{i\beta}, \quad W_1 &= -2z \frac{K_1(z e^r)}{K_0(z)}, \quad S_x(z) = \frac{2K_1(z)}{zK_0(z)},\end{aligned}$$

здесь K_j — модифицированные функции Бесселя второго рода.

Стационарную часть решения в следующем приближении также можно выразить аналитически [19], [28]:

$$\begin{aligned}\psi_1^s &= \sin 2\theta \left(\Psi(r) - \Psi(0)e^{-2r} - (\Psi'(0) + 2\Psi(0))(1 - e^{-2r})/2 \right), \\ \Psi(r) &= -\frac{e^{4r}}{48} \frac{\beta\pi}{2} \int_1^\infty G(e^{r+x})(e^{2x} - 1)^3 dx, \\ G(r) &= \frac{\beta\pi}{4} \text{Imag} \left(\frac{\bar{S}\Phi_0}{r^2} + 2S\Phi_2\bar{\Phi}_0 - S\Phi_2 \right), \\ \Phi_k(r) &= \frac{K_k(zr)}{K_0(z)}, \quad S = \frac{K_2(z)}{K_0(z)}.\end{aligned}$$

Структура аналитических решений учитывалась при выборе ГУ, представленных в разд. 3, на внешней границе расчетной области.

На рис. 2 представлена относительная погрешность $err_i^j = (\psi_i^j - \tilde{\psi}_i^j) / \psi_i^j$ численного решения, полученного на разных сетках при $\beta = 314$ в нестационарном и стационарном слагаемых. Как можно видеть, наибольшее значение относительной погрешности в главном члене достигается в пограничном слое около тела. На самой грубой сетке с $n = 256 \times 256$ узлами максимальная погрешность достигает приблизительно 0.82%, на наилучшей сетке с $n = 1024 \times 1024$ узлами — чуть менее 0.01%.

В следующем приближении, вычисленном с использованием результатов расчета главного члена, ошибка ожидаемо увеличивается. Максимальные значения относительной погрешности, как можно видеть на графиках, здесь достигаются в области перехода между внутренней и внешней циркуляционными зонами (см. подробнее разд. 5.2), где функция тока переходит через ноль.

Как следствие, в этой области при расчете относительной погрешности возникает деление на ноль, что и объясняет ее резкий скачок. Другое локальное значение максимума погрешности находится в стационарном погранслое у поверхности цилиндра, на лучшей сетке оно не превышает 2%. Во всей остальной области относительная погрешность численного решения в среднем не превышает 0.6% на самой грубой сетке и 0.04% на самой точной.

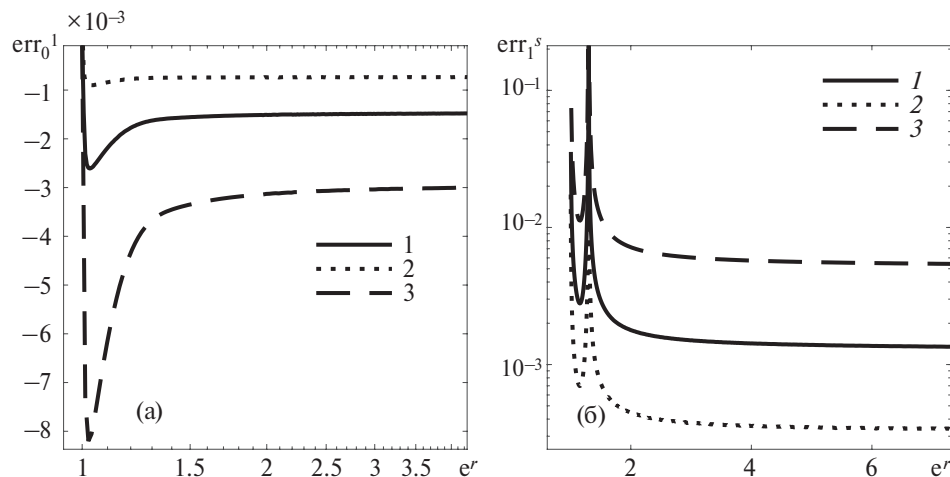


Рис. 2. Относительная погрешность численного решения $\tilde{\psi}_0^1$ (а) и $\tilde{\psi}_0^s$ (б) при $\beta = 314$, $\theta = \pi/4$, вычисленного на сетках с $n = n_r \times n_\theta$ узлов с $r_\infty = 3$: 1 — $n = 512 \times 512$, 2 — $n = 1024 \times 1024$, 3 — $n = 2566 \times 256$.

Таблица 1. Значения коэффициентов инерциальных сил и сил сопротивления для круглого цилиндра

$2^* \beta$	$2^* k$	C_D/C_M					
		n_1	n_2	n_3	(10)	(11)	[24]
*319	0.16	3.82/2.16	3.82/2.16	3.81/2.16	3.81/2.16	3.81/2.16	4/2.16
	0.22	2.77/2.16	2.77/2.16	2.77/2.16	2.77/2.16	2.77/2.16	2.9/2.16
	0.32	1.91/2.16	1.91/2.16	1.9/2.16	1.9/2.16	1.9/2.16	2.1/2.14
3*722	0.16	2.44/2.1	2.43/2.1	2.41/2.1	2.41/2.1	2.41/2.1	2.57/–
	0.22	1.77/2.1	1.77/2.1	1.75/2.1	1.75/2.1	1.75/2.1	1.85/–
	0.32	1.22/2.1	1.22/2.1	1.21/2.1	1.21/2.1	1.21/2.1	1.35/–
3*1600	0.16	1.71/2.07	1.68/2.07	1.67/2.07	1.67/2.07	1.67/2.07	1.8/–
	0.22	1.24/2.07	1.22/2.07	1.21/2.07	1.21/2.07	1.21/2.07	1.25/–
	0.32	0.86/2.07	0.84/2.07	0.84/2.07	0.84/2.07	0.84/2.07	0.95/–

Далее проведем анализ интегральных характеристик течения, рассмотрим гидродинамические силы, действующие на круглый цилиндр. При малоамплитудных колебаниях силы в этом случае, очевидно, действуют лишь вдоль оси колебаний. Согласно аналитическому решению коэффициенты гидродинамических сил находятся следующим образом [28]:

$$C_D = -\frac{3\pi^2}{4k} \text{Imag}(S_x) + O(k), \quad (10)$$

$$C_M = 2 + 2\text{Real}(S_x) + O(k^2).$$

В табл. 1 представлены значения коэффициентов разложения Морисона вычисленные на сетках с количеством узлов $n_1 = 256 \times 256$, $n_2 = 512 \times 512$, $n_3 = 1024 \times 1024$ для разных значений β . Там же представлены значения C_D, C_M в приближении $\beta \rightarrow \infty$ [17] (их можно получить из (10), раскладывая S_x в ряд по степеням β):

$$\beta \rightarrow \infty: \quad C_D = \frac{3\pi^2}{4k} (\sqrt{2}\beta^{-1/2} + \beta^{-1}) + O(\beta^{-3/2}) + O(k), \quad (11)$$

$$C_M = 2 + 2\sqrt{2}\beta^{-1/2} + O(\beta^{-3/2}) + O(k^2);$$

и данные прямого численного моделирования [24].

Как можно видеть, на всех рассматриваемых сетках мы получаем результат с хорошей точностью. Максимальная относительная погрешность по сравнению с аналитическим решением составляет не более 2.4% на самой грубой сетке.

Отметим хорошую согласованность рассматриваемой асимптотики (полученной в предположении $k \ll 1$) с данными прямого численного моделирования: при относительно малых амплитудах ($k=0.16, 0.22$) разница между оценками C_D не превышает 6%.

Отдельно укажем на широкую область применимости формулы, которая дает хорошее приближение (совпадающее с полным решением в первых трех значащих цифрах) во всем рассмотренном диапазоне.

5.2. Эллиптический цилиндр

В качестве второго примера рассмотрим колебания эллиптического цилиндра в жидкости. Преобразование координат для этого случая задается следующим образом:

$$x = \sqrt{1-b^2} \cosh r \cos \theta,$$

$$y = \sqrt{1-b^2} \sinh r \sin \theta, \quad b = \frac{R_y}{R_x} < 1,$$

$$r_0 = \ln \left(\frac{\sqrt{1+b}}{\sqrt{1-b}} \right), \quad \lambda = (\sqrt{1-b^2}) \sqrt{\cos^2 h^2 r - \cos^2 \theta},$$

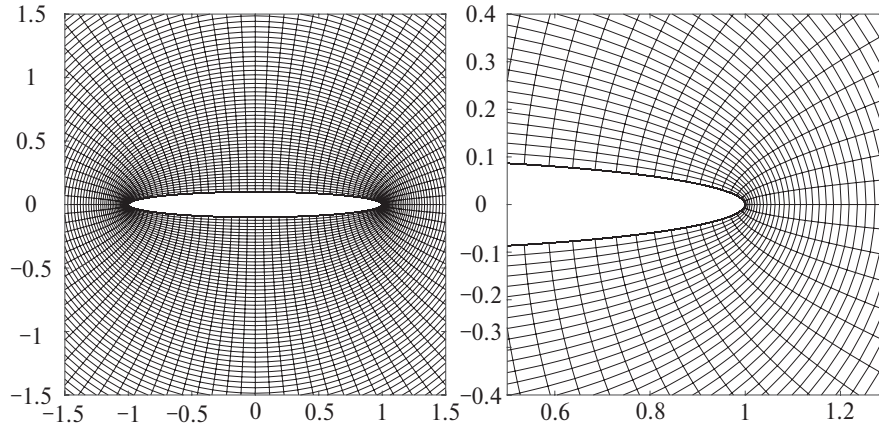


Рис. 3. Характерная структура сетки ($n = 100 \times 100$) в физической плоскости в окрестности эллиптического цилиндра при $b = 0.1$.

Таблица 2. Результаты исследования сеточной сходимости для случая $b = 0.1$ при $\beta = 772$, $\alpha = \pi/2$, $k = 0.032$.

2^*n	C_D			C_M		
	$r_\infty = 2.4$	$r_\infty = 3$	$r_\infty = 3.4$	$r_\infty = 2.4$	$r_\infty = 3$	$r_\infty = 3.4$
256×256	11.78	11.76	11.75	1.2		
512×512	11.83	11.82	11.81			
1024×1024	11.84					

где R_x, R_y – длины полуосей сечения цилиндра, расположенных вдоль соответствующих осей Ox, Oy в физической плоскости. Размер большей полуоси R_x в дальнейшем будем принимать в качестве характерного размера профиля ($R = R_x$).

Так как при малых значениях b геометрия тела существенно отличается от рассмотренного случая круглого цилиндра (рис. 3), проведем дополнительный анализ сеточной сходимости для $b = 0.1$.

В табл. 2 представлены результаты вычисления коэффициентов силы в расчетных областях разного размера (для разных значений r_∞) и на сетках с разным количеством узлов.

Как можно видеть, близость внешней границы (в обозначенных диапазонах) не сильно влияет на коэффициенты сил. Практически для всех расчетных параметров были получены идентичные результаты. На сетке с наибольшим количеством узлов значения коэффициентов при разных r_∞ вообще не отличаются в четырех первых значащих цифрах. Последующая серия расчетов выполнялась на сетке с 512×512 узлами при $r_\infty = 3$.

Проведем анализ зависимости коэффициентов C_M и C_D гидродинамической силы от отношения полуосей эллипса, переходя от круглого цилиндра при $b = 1$ к бесконечно тонкой пластине при $b = 0$. Графики соответствующих зависимостей, полученные в настоящей работе, представлены на рис. 4 для $\beta = 772$, $\alpha = \pi/2$ одновременно с результатами прямого численного моделирования и графиками асимптотических зависимостей, выведенных для случая $\beta \rightarrow \infty$ в [24]:

$$C_D^{(3)} = \frac{3\pi^2}{8k} (1+b)^2 \left\{ \beta^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \sin^2 \alpha) + \beta^{-1} \left[\cos^2 \alpha \left(-\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} j A_j^2 \right) + \sin^2 \alpha \left(-\frac{1}{2b^2} + \sum_{j=1}^{\infty} j B_j^2 \right) \right] \right\},$$

$$C_M^{(3)} = (1+b) (b \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \beta^{-1/2} \frac{(1+b)^2}{\sqrt{2}} (A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \sin^2 \alpha), \quad (12)$$

$$A_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \theta \sin(j\theta)}{\lambda \sqrt{\cosh^2 r_0 - \cos^2 \theta}} d\theta,$$

$$B_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta \cos(j\theta)}{\lambda \sqrt{\cosh^2 r_0 - \cos^2 \theta}} d\theta.$$

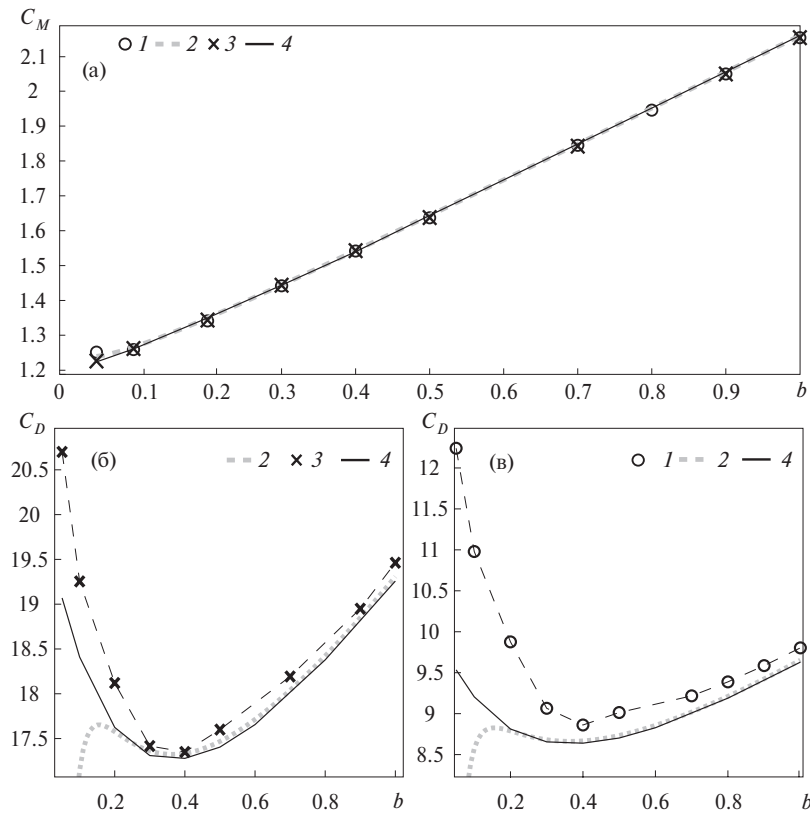


Рис. 4. Изменение коэффициентов C_M (а) и C_D (б, в) в зависимости от соотношения полуосей b для эллиптического цилиндра при $\beta = 314$, $k = 0.032$, $k = 0.064$. Сравнение малоамплитудной асимптотики (результаты настоящей работы) с высокочастотным приближением (12) и результатами прямого численного моделирования: 1 – численное моделирование при $k = 0.064$; 2 – асимптотика $\beta \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 0$; 3 – численное моделирование при $k = 0.032$; 4 – асимптотика $k \rightarrow 0$.

Таблица 3. Значения коэффициентов инерциальных сил и сил сопротивления для $\alpha = \pi/2$.

b	$\beta = 40$		$\beta = 314$		$\beta = 772$		$\beta = 1600$		$\beta = 4000$	
	$C_D k$	$C_D^{(03)} k$	$C_D k$	$C_D^{(03)} k$	$C_D k$	$C_D^{(03)} k$	$C_D k$	$C_D^{(03)} k$	$C_D k$	$C_D^{(03)} k$
1	1.84	1.84	0.614	0.614	0.386	0.386	0.266	0.266	0.167	0.167
0.5	1.66	1.67	0.554	0.556	0.348	0.349	0.240	0.241	0.152	0.151
0.1	1.66	1.14	0.586	0.541	0.375	0.362	0.263	0.258	0.168	0.167
0.05	1.69	-1.50	0.604	0.260	0.392	0.268	0.227	0.224	0.180	0.164

Здесь индекс (03) указывает на удержание трех членов при разложении по степеням b .

Как можно видеть, вычисленные в настоящей работе значения коэффициента C_M полностью согласуются как с асимптотической зависимостью (12), так и с результатами прямого численного моделирования.

Значения C_D при $b > 0.3$, полученные в разных приближениях (в том числе по данным численного моделирования), также хорошо совпадают. В области $b \rightarrow 0$ слагаемые ряда (12) для C_D попеременно стремятся то к плюс бесконечности, то к минус бесконечности, что ставит вопрос о границах применимости формулы при малых b . Как можно видеть, высокочастотная асимптотика (12) для рассматриваемого b хорошо совпадает с асимптотическим решением, полученным в нашей работе, начиная с $b \approx 0.2$.

В табл. 3 приведено сравнение C_D полученного в ходе численного асимптотического решения для произвольных β с высокочастотной асимптотикой (12).

Результаты показывают, что формула (12) в действительности имеет достаточно широкую область применимости, корректно описывая изменение C_D , начиная с низких частот b в широком диапазоне изменения параметра b . Существенные ошибки в определении коэффициента сопротивления наблюдаются лишь при малых b .

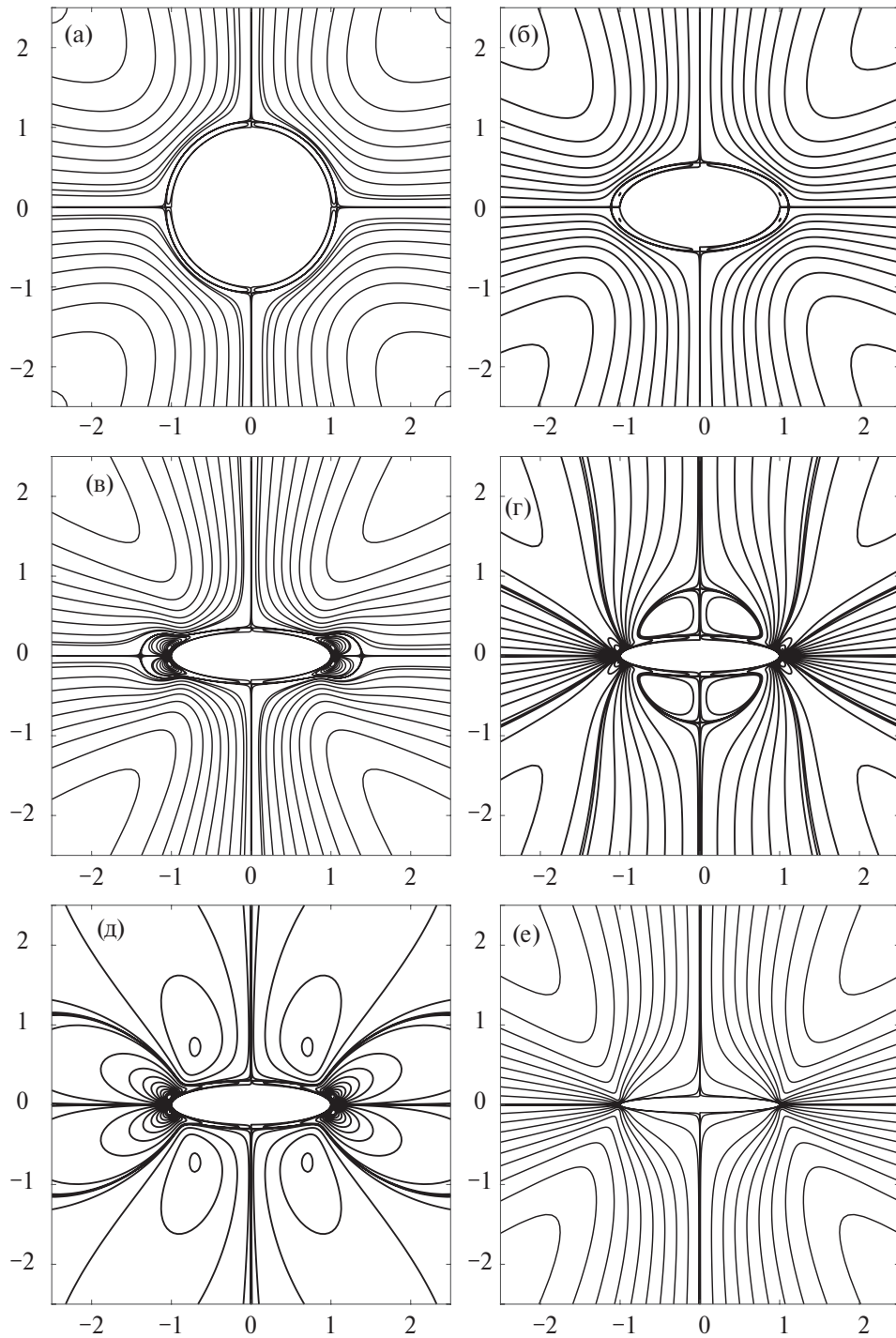


Рис. 5. Картины вторичных стационарных течений. Линии тока $\psi_1^s = \text{const}$ при $\beta = 4000$, $\alpha = \pi/2$: (а–е) – $b = 1, 0.5, 0.3, 0.25, 0.2, 0.1$.

Важно также отметить хорошее совпадение асимптотических оценок коэффициента сопротивления и результатов прямого численного моделирования. Видимые отличия наблюдаются лишь в области малых $b < 0.2$. Причем они усиливаются с ростом безразмерной амплитуды, что является следствием увеличения вклада членов порядка k^2 в определении силы (которые не определялись в данной работе).

Большой интерес при изучении гидродинамики колебательного движения тел представляют вторичные стационарные течения, которые формируются на фоне первичного колебательного движения и определяют перенос массы жидкости в области. Рассматриваемый подход дает большие возможности для изучения таких течений, возникающих во втором приближении. Здесь высокочастотная теория имеет

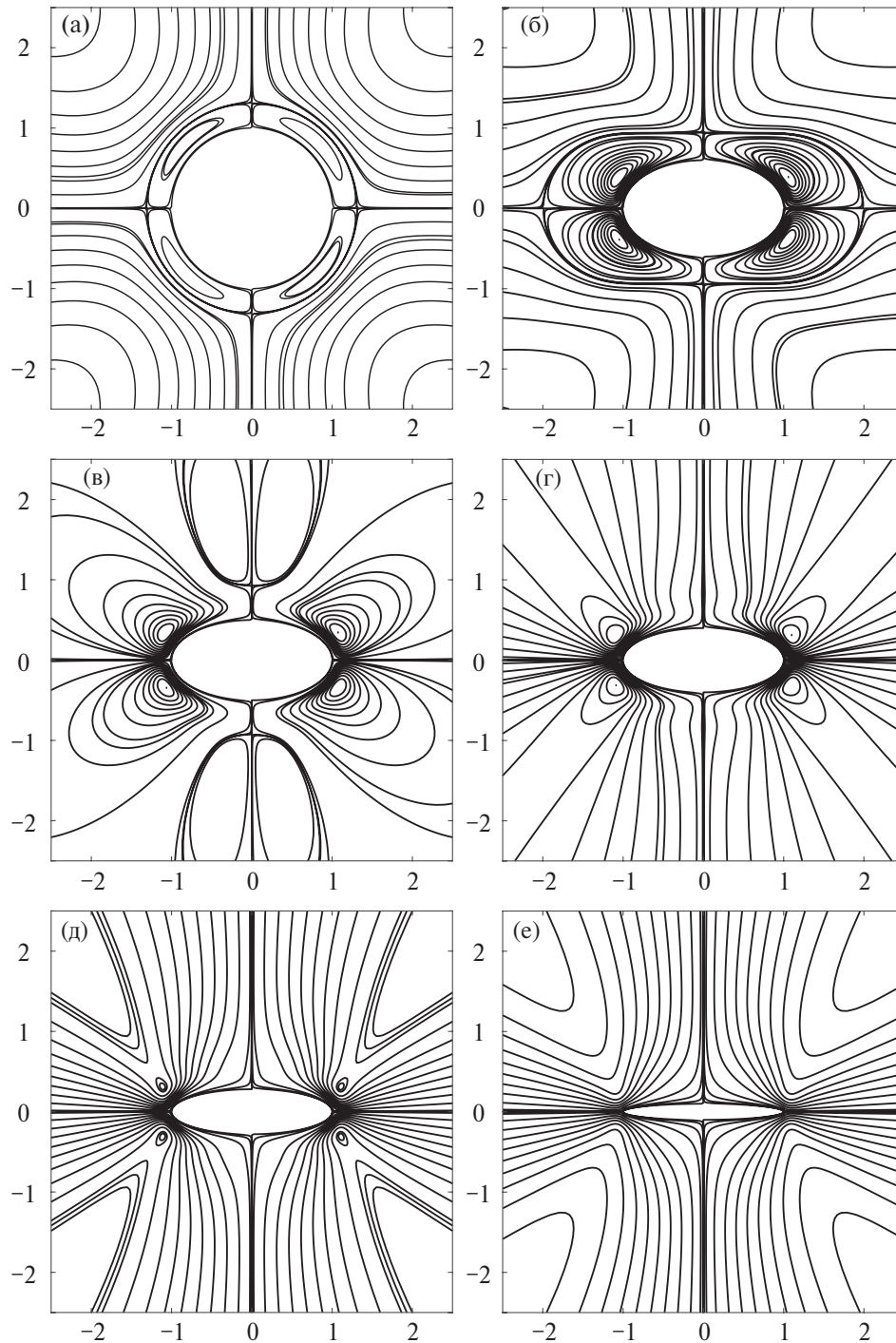


Рис. 6. Картины вторичных стационарных течений. Линии тока $\psi_1^s = \text{const}$ при $\beta = 314$, $\alpha = \pi/2$: (а–е) – $b = 1, 0.6, 0.5, 0.4, 0.28, 0.1$.

весьма ограниченные возможности, а прямое численное моделирование требует больших вычислительных затрат, так как требуются расчеты сотен циклов колебаний для описания стационарного течения.

На рис. 5, 6 представлены характерные структуры вторичных течений при разных значениях b для $\beta = 4000$ и $\beta = 134$. При $b = 1$ для всех рассматриваемых частот можно наблюдать один и тот же режим течения, в литературе он иногда называется закритическим [28].

Подобный режим течения был впервые теоретически описан Шлихтингом в 1932 г. [29]. Он реализуется при всех $\beta > 37.064$ [28] и характеризуется формированием двух циркуляционных зон около цилиндра.

Внутренняя циркуляционная зона состоит из четырех симметрично расположенных ячеек, внешняя граница которых образует окружность. Ее радиус зависит от параметра b . Внешнее циркуляционное течение на удалении от тела представляет собой квадрауполь

$$b=1, r \rightarrow \infty: \psi_1^s \sim \left(1 - \frac{1}{e^{2r}}\right) \sin 2(\theta - \alpha).$$

При $\beta=4000$ аналогичный режим можно наблюдать при $b=0.5$ и $b=0.3$. С уменьшением b центры внутренних циркуляционных ячеек смещаются вдоль поверхности цилиндра ближе к оси, перпендикулярной оси колебаний. При $b=0.25$ ($\beta=4000$) можно наблюдать значительное увеличение размера ячеек внутренней зоны. При $b=0.2$ ($\beta=4000$) они становятся бесконечно большого размера, ядро каждой из ячеек разделяется на два: один из центров остается около тела, второй устремляется к бесконечности. Внешняя циркуляционная зона при этом прижимается к оси колебания, превращаясь в циркуляционные ячейки конечных размеров. При $b=0.1$ ($\beta=4000$) эти ячейки полностью исчезают, также исчезают и ядра ячеек бывшей внутренней циркуляционной зоны, расположенные около цилиндра.

Изменение структуры течения при $\beta=314$ происходит похожим образом, только изменяются границы перехода между разными режимами. Трансформации закритического режима начинаются уже при $b=0.5$. Также разделение ячеек внешней циркуляционной зоны происходит здесь уже после полного исчезновения внешней циркуляционной зоны. До разделения, при $b=0.4$ течение приобретает структуру похожую на докритический режим, наблюдаемый у круглого цилиндра при $\beta < 37.064$.

5.3. Профиль Жуковского

В качестве заключительного примера рассмотрим колебания цилиндрического тела с сечением в форме руля Жуковского. Преобразование координат для описания геометрии этого тела задается как

$$x = m_\infty \left(e^r \cos \theta - m \right) + \frac{(1-m)^2 (e^r \cos \theta - m)}{e^{2r} - 2me^r \cos \theta + m^2};$$

$$y = m_\infty \left(e^r \sin \theta \right) - \frac{(1-m)^2 (e^r \sin \theta)}{e^{2r} - 2me^r \cos \theta + m^2};$$

$$m_\infty = \frac{1+m}{2}, 0 < m \leq 1,$$

$$\lambda^2 = e^{2r} \frac{(e^{2r} - 2(2m-1)e^r \cos \theta + (2m-1)^2)(e^{2r} - 2e^r \cos \theta + 1)}{(e^{2r} - 2me^r \cos \theta + m^2)^2} m_\infty^2.$$

Здесь x , y , λ^2 записаны в виде вещественных функций от вещественных переменных в той форме, в которой они использовались в программной реализации. Для получения классического профиля с острой кромкой нужно выбрать $r_0=0$, при этом сама кромка становится особой точкой в которой, в частности, λ^2 обращается в ноль. Для проведения расчетов профиль скруглялся, и значение r_0 выбиралось равным 0.02. Форма профиля и структура расчетной сетки в физической области для этого случая представлены на рис. 7.

Далее рассмотрим колебания этого цилиндрического тела вдоль оси симметрии (при $\alpha=0$). Проверка на сеточную сходимость и влияние размеров расчетной области проводились практически в каждом расчетном случае, в качестве основной была выбрана расчетная сетка с $n=512 \times 512$ узлами.

Результаты расчета силовых коэффициентов Морисона по решению в главном члене представлены в табл. 4. Для сравнения с круглым цилиндром ($m=1$), значения коэффициентов (и значения β) рассчитаны для случая, когда максимальная толщина крылового профиля равна двум. Как можно видеть значения коэффициента инерциальных сил последовательно снижается при уменьшении m , значение коэффициента сопротивления наоборот возрастает как следствие увеличение площади поверхности тела.

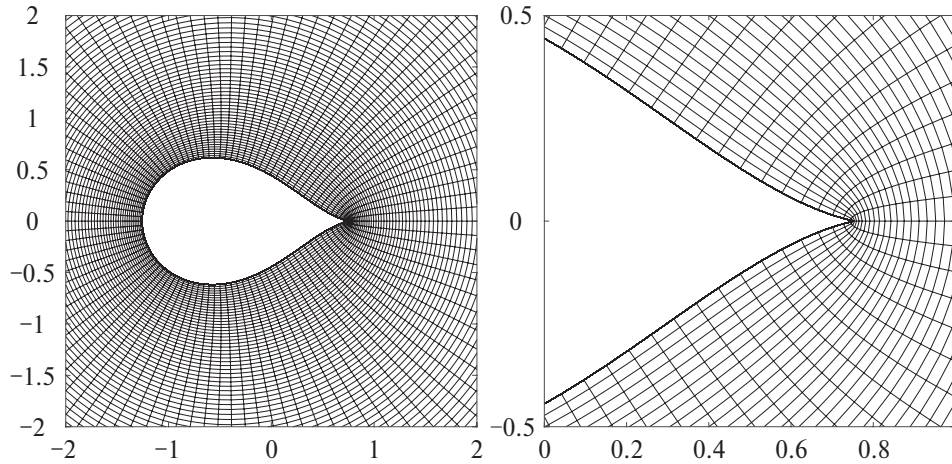


Рис. 7. Характерная структура сетки ($n = 100 \times 100$) в окрестности симметричного профиля Жуковского при $m = 0.5$, $r_0 = 0.02$.

Таблица 4. Значения коэффициентов инерциальных сил и сопротивления для крылового профиля при $\alpha = 0$, значения β вычислены по толщине профиля

m	$\beta = 40$		$\beta = 314$		$\beta = 772$		$\beta = 1600$		$\beta = 4000$	
	C_{Dk}	C_{DM}	C_{Dk}	C_{DM}	C_{Dk}	C_{DM}	C_{Dk}	C_{DM}	C_{Dk}	C_{DM}
1	1.84	2.45	0.614	2.15	0.386	2.1	0.266	2.07	0.167	2.04
0.9	1.83	2.38	0.614	2.10	0.389	2.05	0.272	2.02	0.179	1.99
0.5	1.98	1.750	0.673	1.55	0.428	1.51	0.303	1.487	0.245	1.47
0.3	2.41	1.44	0.832	1.28	0.539	1.24	0.386	1.225	0.250	1.208

Поскольку крыловой профиль не является симметричным относительно оси перпендикулярной оси колебаний, появляется асимметрия течений, индуцированных движением тела. В этом случае может возникнуть ненулевая скорость движения тела (направленный поток на бесконечности в рассматриваемой подвижной системе координат) или ненулевая средняя сила.

Второй вариант в рассматриваемом приближении приведет к появлению логарифмической особенности на бесконечности при решении уравнения Стокса [12] (в используемых координатах речь идет о члене re^r в функции тока), поэтому далее будем искать решение, при котором тело движется с крейсерской скоростью u^{st} при нулевой средней силе.

Для построения такого решения вместо условия (8), применявшегося ранее для симметричных тел, будем использовать на удаленной границе условие (9). Оно не ограничивает появление направленного потока, но запрещает возрастание скорости на бесконечности. При этом u^{st} находится из решения задачи.

Характерные структуры вторичных течений, возникающих при колебаниях профиля Жуковского, представлены на рис. 8. Как можно видеть, большинство из них похоже на те, что формируются у круглого и эллиптического цилиндров. При малых числах β (см. $\beta = 20$) около колеблющегося формируется одна циркуляционная зона, состоящая из четырех вихрей (как в докритическом режиме у круглого цилиндра), которые из-за формы тела и присутствия направленного потока расположены несимметрично относительно оси Oy . При больших значениях β (см. $\beta = 500, 7000, 4 \times 10^5$) хорошо различимы уже две циркуляционные зоны: внутренняя, прижатая к телу, и внешняя, как в закритическом режиме. Случаи $\beta = 50, 100$ можно отнести к переходным режимам.

Направление движения профиля с ростом β меняется несколько раз (значения скорости при разных β представлены в подписи к рис. 8). При $\beta = 20, 50, 100$ профиль движется острым торцом вперед. Затем, с появлением полноценной внешней циркуляционной зоны (см. $\beta = 500, 7000$), направление движения меняется на противоположное. В пределе больших β профиль вновь движется острым концом вперед.

В то же время следует отметить, что скорость стационарного движения во всех режимах является весьма незначительной. С учетом условия $k \ll 1$ она по крайней мере на два порядка ниже амплитуды скорости колебаний.

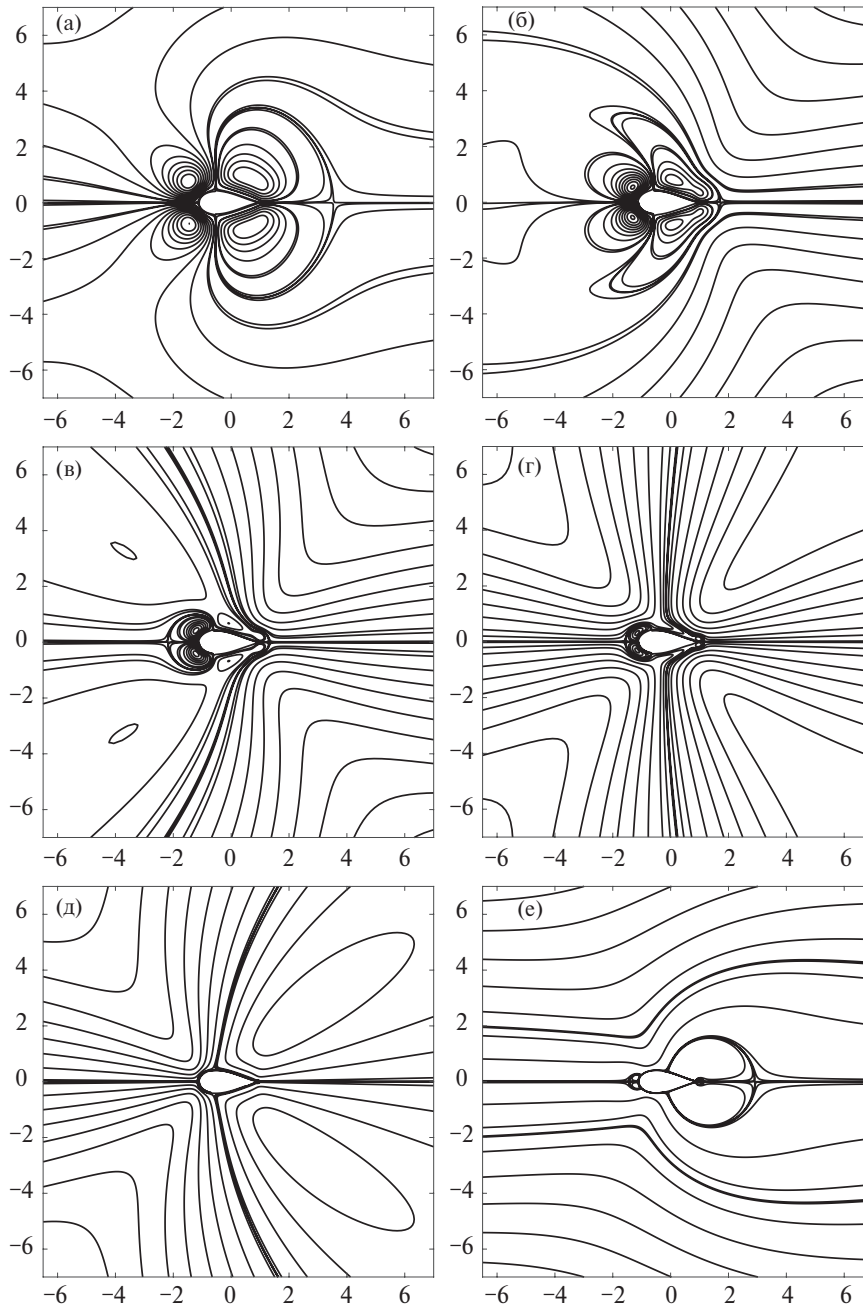


Рис. 8. Вторичные стационарные течения около кылового профиля. Линии тока для $m=0.3$ (а) $\beta=20$, $u^{st}=0.0069k$, (б) $\beta=50$, $u^{st}=0.0068k$, (в) $\beta=100$, $u^{st}=0.0065k$, (г) $\beta=300$, $u^{st}=0.003k$, (д) $\beta=7000$, $u^{st}=-0.025k$, (е) $\beta=4 \times 10^5$, $u^{st}=0.23k$; β вычислено по длине хорды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование гидродинамических течений, индуцированных малоамплитудными поступательными колебаниями цилиндрических тел в вязкой несжимаемой жидкости.

Движение жидкости описывалось с помощью системы уравнений Навье–Сокса, для решения которой была реализована аналитико-численная модель, основанная на методе формальных асимптотических разложений. Выбранный комплекс методов обеспечивал скорость расчетов на несколько порядков выше той, что может быть достигнута при прямом численном решении рассматриваемого класса задач.

Апробация метода была проведена на задаче о колебаниях круглого цилиндра, по результатам которой была подтверждена точность расчетной схемы, а также продемонстрирован широкий диапазон примени-

мости малоамплитудной асимптотической модели. В рамках решения задач о колебаниях эллиптического цилиндра и профиля Жуковского были построены асимптотические оценки нестационарной гидродинамической силы, проведены оценки границ их применимости, описаны трансформации вторичных стационарных течений, возникающих в результате нелинейности на фоне первичного нестационарного течения.

На примере профиля Жуковского изучена возможность появления направленных стационарных вторичных потоков или, что эквивалентно, движения колеблющегося тела с ненулевой крейсерской скоростью. Показано, что колеблющийся профиль является двигателем. В результате несимметричной формы он может совершать направленное движение в жидкости даже при симметричном законе колебаний. Направление такого пропульсивного движения зависит от безразмерной частоты колебаний.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда 22-79-10033 (разд. 1–4, 5.3) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук МК-3245.2022.1.1 (разд. 5.1, 5.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tang G., Cheng L., Lu L., Teng Y., Zhao M., An H.* Effect of oscillatory boundary layer on hydrodynamic forces on pipelines // *Coast. Eng.* 2018. V. 140. P. 114–123.
2. *Cheng L., An H., Draper S., White D.* Effect of wave boundary layer on hydrodynamic forces on small diameter pipelines // *Ocean Eng.* 2016. V. 125. P. 26–30.
3. *Бужинский В.А., Петряхин Д.А., Соломонов Е.В.* Колебания в жидкости пластин с ребрами жесткости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 1. С. 39–46.
4. *Бужинский В.А.* Колебания жидкости в цилиндрических баках с продольными демпфирующими перегородками // *Изв. РАН. МЖГ.* 2020. № 1. С. 9–21.
5. *Sader J.E.* Frequency response of cantilever beams immersed in vis-cous fluids with applications to the atomic force microscope // *J. Appl. Phys.* 1998. V. 84. № 1. P. 64–76.
6. *Scherer M.P., Frank G., Gummer A.W.* Experimental determination of the mechanical impedance of atomic force microscopy cantilevers in fluids up to 70 kHz // *J. Appl. Phys.* 2000. V. 88. № 5. P. 2912–2920.
7. *Erturk A., Inman D.* Piezoelectric energy harvesting. N.Y.: John Wiley & Sons, 2011. P. 416.
8. *Zhu H., Zhang P., Zhong Z., Xia J., Rich J., Mai J., Su X., Tian Z., Bachman H., Rufo J., Gu Y., Kang P., Chakrabarty K., Witelski T.P., Huang T.J.* Acoustohydrodynamic tweezers via spatial arrangement of streaming vortices // *Science Advances.* 2021. V. 7. № 2. P. eabc7885.
9. *Semati A., Amani E., Saffaraval F., Saffar-Avval M.* Numerical simulation of oscillating plates at the visco-inertial regime for bio-inspired pumping and mixing applications // *Phys. Fluids.* 2020. V. 32. № 10. P. 101906.
10. *Yeh P.D., Demirel E., Alexeev A.* Turning strategies for plunging elastic plate propulsor // *Phys. Rev. Fluids.* 2019. V. 4. № 064101.
11. *Гувернюк С.В., Дынников Я.А., Дынникова Г.Я., Малахова Т.В.* Гидродинамические механизмы влияния упругой связи на пропульсивную силу крылового профиля при полудетерминированных колебаниях в потоке вязкой жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 5. С. 3–12.
12. *Nuriev A.N., Egorov A.G.* Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section // *J. Fluid Mech.* 2022. V. 941. № A23.
13. *Нуриев А.Н., Камалутдинов А.М.* Идентификация характеристик силового аэродинамического воздействия на колеблющиеся консольно-закрепленные балки // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 5. С. 62–79.
14. *Бужинский В.А.* Вихревое сопротивление пластинки при колебаниях в маловязкой жидкости // *ПММ.* 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 233–238.
15. *Graham J.M.R.* The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 97. № 2. P. 331–346.
16. *Stokes G.G.* On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // *Trans. Camb. Phil. Soc.* 1851. V. 9. P. 8–106.
17. *Wang C.-Y.* On high-frequency oscillatory viscous flows // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. № 1. P. 55–68.
18. *Riley N.* The steady streaming induced by a vibrating cylinder // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 68. № 4. P. 801–812.
19. *Holtmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S.* Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid // *J. Acoust. Soc. Am.* 1954. V. 26. № 1. P. 26–39.

20. *Tuck E.O.* Calculation of unsteady flows due to small motions of cylinders in a viscous fluid // *J. Engng Maths* 1969. V. 3. № 1. P. 29–44.
21. *Brumley D.R., Willcox M., Sader J.E.* Oscillation of cylinders of rectangular cross section immersed in fluid // *Phys. Fluids*. 2010. V. 22. № 5. P. 052001.
22. *Ahsan S.N., Aureli M.* Finite amplitude oscillations of flanged laminas in viscous flows: vortex-structure interactions for hydrodynamic damping control // *J. Fluids Struct.* 2015. V. 59. P. 297–315.
23. *Davidson B.J., Riley N.* Jets induced by oscillatory motion // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 53, № 2. P. 287–303.
24. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M.* Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 913. P. A40.
25. *Weinan E., Liu J.G.* Vorticity boundary conditions and related issues for finite difference schemes // *J. Comput. Phys.* 1996. V. 124. P. 368–382.
26. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N.* Bifurcation analysis of steady-state flows in the lid-driven cavity // *Fluid Dyn. Res.* 2016. V. 48. № 6. P. 061405.
27. *Morison J.R., Johnson J.W., Schaaf S.A.* The force exerted by surface waves on piles // *J. Pet. Technol* 1950. V. 2. № 1. P. 149–154.
28. *Egorov A.G., Nuriev A.N.* Steady streaming generated by low-amplitude oscillations of a cylinder // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42, № 9. P. 2102–2108.
29. *Schlichting H.* Berechnung ebener periodischer grenzschichtströmungen // *Phys. Zeit.* 1932. V. 33. P. 327–335.

ASYMPTOTIC STUDY OF FLOWS INDUCED BY OSCILLATIONS OF CYLINDRICAL BODIES

A. N. Nuriev^{a,*}, O. N. Zaitseva^{a,}, A. M. Kamalutdinov^{a,***}, E. E. Bogdanovich^{a,****},
and A. R. Baimuratova^{a,*****}**

^a *Kazan Federal University, Kazan, Russia*

* *E-mail: Artem.Nuriev@kpfu.ru*

** *E-mail: olga_fdpi@mail.ru*

*** *E-mail: amkamalutdinov@kpfu.ru*

**** *E-mail: helenbogdanovich03@gmail.com*

***** *E-mail: angelina.baimuratova@yandex.ru*

Hydrodynamic flows induced by translational oscillations of cylindrical bodies of various cross-sectional shapes are studied. The motion of fluid around oscillating bodies is described using the system of Navier–Stokes equations written in a generalized curvilinear coordinate system. Transition to a given body shape is implemented using a conformal mapping. The problem is solved using the method of successive asymptotic expansions under the assumption that the oscillation amplitudes are small. In each asymptotic approximation, the subproblems are solved numerically using the finite-difference method. Based on the results of the work, estimates of the hydrodynamic effect are obtained, the applicability of the high-frequency asymptotic approximation is estimated, and secondary stationary flows near cylinders are studied, in particular, the occurrence of directed stationary flows near an oscillating asymmetric body is considered with reference to the Joukowski airfoil.

Keywords: oscillatory motion, viscous fluid, hydrodynamic forces, secondary stationary flows, propulsive motion