

ISSN 1024-7084

Номер 6

Ноябрь - Декабрь 2023

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА



www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Номер 6, 2023

Взаимодействие акустических возмущений со сверхзвуковым пограничным слоем на плоской пластине <i>К. В. Шубин, П. В. Чувахов</i>	3
Численные оценки влияния диффузии ионов на электроконвекцию инжекционного типа в плоском слое слабопроводящей жидкости <i>И. А. Ермолаев</i>	14
Динамика вязкого газа в закрытой узкой трубе при гармонических колебаниях поршня <i>П. П. Осипов, Р. Р. Насыров</i>	22
Моделирование основных характеристик ближнего следа от пары цилиндров, расположенных бок о бок, не слишком близко <i>Г. В. Гембаржевский, К. Ю. Осипенко</i>	32
Влияние граничных условий на моделирование аномальной интенсификации турбулентного теплообмена в наклонной канавке на стенке узкого канала <i>С. А. Исаев, А. Г. Судаков, Д. В. Никущенко, В. Б. Харченко, Л. П. Юнаков</i>	38
Автомодельное решение для задачи нестационарной пленочной конденсации на полубесконечной вертикальной пластине <i>А. А. Куроедов, И. В. Лаптев, А. В. Суворов, С. Г. Черкасов</i>	48
Деформации и волновые силы при движении нагрузки по ледяному покрову и наличию течения со сдвигом скорости <i>Л. А. Ткачева</i>	59
Пристенные ламинарные закрученные струи <i>А. М. Гайфуллин, А. С. Щеглов</i>	67
Пристеночные пульсации давления на поверхности обтекателя в форме полуэллипсоида и в его окрестности <i>А. Ю. Голубев, С. В. Кузнецов</i>	75
Влияние конусной насадки на осаждение аэрозоля при акустических колебаниях малой амплитуды в трубе <i>Л. Р. Шайдуллин, С. А. Фадеев</i>	86
Режимы вытеснения жидкости из анизотропного пласта в поле силы тяжести <i>А. А. Чернова, А. А. Афанасьев</i>	95
Траектории жидких частиц в поле темного солитона в жидкости под ледяным покровом <i>А. Т. Ильичев, А. С. Савин, А. Ю. Шашков</i>	110
Особенности трансформации нелинейных внутренних волн на шельфе и в глубоком озере <i>В. В. Кириллов, В. Ю. Ляпидевский, И. А. Суторихин, Ф. Ф. Храпченков</i>	121
Турбулентные числа шмидта и прандтля в пограничном слое на стенке с завесным охлаждением при вдуве инородного газа через пористую вставку <i>В. Г. Луцкич, М. С. Макарова, С. С. Попович</i>	132
Сверхзвуковое обтекание заостренной пластины с поверхностным аномальным тлеющим разрядом в магнитном поле <i>С. Т. Суржиков</i>	144

Исследования автоколебательных процессов между возвращаемым аппаратом и двигательным отсеком пилотируемого космического корабля при их разделении в случае аварии <i>А. В. Гарбарук, Б. Н. Даньков, А. А. Дядькин, А. П. Косенко, М. В. Михайлов, С. П. Рыбак, М. Х. Стрелец, М. Л. Шур</i>	168
Кинетическая теория расширения двухкомпонентной плазмы в плоском вакуумном диоде <i>В. Ю. Кожевников, А. В. Козырев, В. С. Игумнов, Н. С. Семенюк, А. О. Коковин</i>	183
Численное исследование излучения в ударно-нагретой смеси CO_2 и N_2 методом прямого статистического моделирования <i>А. Л. Курсов, Н. Г. Быкова, Г. Я. Герасимов, И. Е. Забелинский, П. В. Козлов, В. Ю. Левашов</i>	192

УДК 532.5

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ СО СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

© 2023 г. К. В. Шубин^{a,*}, П. В. Чувахов^{a,b,**}

^aМосковский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Россия

^bЦентральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

*E-mail: ottdimile@mail.ru

**E-mail: pavel_chuvahov@mail.ru

Поступила в редакцию 28.09.2022 г.

После доработки 20.02.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

В рамках полных уравнений Навье–Стокса проведено численное моделирование восприимчивости сверхзвукового пограничного слоя на плоской заостренной пластине к модельным акустическим возмущениям, которые распространяются в набегающем потоке (число Маха 5) и характерны для фонового шума ударных аэродинамических труб. Проведен спектральный анализ возмущений, индуцированных в пограничном слое. Обсуждается способ восстановления амплитуды акустического возмущения в набегающем потоке с помощью измерения пульсаций давления на поверхности пластины.

Ключевые слова: акустические возмущения, сверхзвуковой пограничный слой, восприимчивость, численное моделирование, аэродинамическая труба, измерение пульсаций

DOI: 10.31857/S102470842260066X, EDN: WJQYDL

1. ВВЕДЕНИЕ

Возмущения в набегающем потоке играют важную роль в процессе ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП). Понимание факторов, влияющих на процесс ЛТП, является одной из ключевых задач при разработке сверхзвуковых летательных аппаратов, так как обычно высокая неопределенность в положении ЛТП ведет к значительной (в разы) неопределенности в оценке сопротивления трения и тепловых потоков к поверхности летательных аппаратов [1].

В однородном потоке могут распространяться элементарные возмущения трех типов: акустические волны, волны завихренности и энтропийные волны. Первые движутся относительно потока со скоростью звука, остальные сносятся со скоростью потока. Процесс взаимодействия этих возмущений с пограничным слоем носит название восприимчивости [1, 2]. Восприимчивость отвечает за начальный спектральный состав собственных возмущений (мод) конвективно неустойчивого пограничного слоя [1].

Акустические возмущения являются одним из вероятных источников ламинарно-турбулентного перехода при сверхзвуковых скоростях [3]. Хорошо известно, что акустические волны, излучаемые турбулентным пограничным слоем на стенках сопла и рабочей части сверхзвуковых аэродинамических труб (АДТ), являются основным источником ЛТП на испытываемых моделях [4–6]. Акустический шум от турбулентного пограничного слоя на сигарообразном фюзеляже, по-видимому, является главным источником ЛТП на прямых крыльях сверхзвуковых пассажирских самолетов [7].

Восприимчивость сверхзвукового пограничного слоя к акустическим возмущениям исследовалась теоретически [8] и расчетным путем [9–11]. Было показано, что вблизи кромки пластины акустические волны синхронизируются с модами пограничного слоя и возбуждают их. Подчеркнута важность корректного моделирования прохождения внешних возмущений через головную ударную волну, которая формируется у кромки вследствие вязко-невязкого взаимодействия. На плоской пластине ударная волна оказывается слабой и быстро вырождается в волну Маха.

Взаимодействие возмущений с такой волной практически не подвержено влиянию численных ошибок, связанных с недостаточным сеточным разрешением ударной волны [12].

Экспериментальные измерения возмущений набегающего потока – довольно сложная процедура. Ее сложность усугубляется тем, что высокочастотный дискретный датчик измеряет суммарное акустическое поле, приходящее со всех сторон АДТ. Поэтому в [4] приведены лишь статистические оценки для акустического шума. В недавней расчетно-экспериментальной работе [13] было подтверждено, что в обычных гиперзвуковых АДТ преобладают акустические возмущения. Для их измерения построен клиновидный насадок, который помещается в поток и позволяет измерять пульсации давления на своей поверхности. По этим измерениям авторы [13] пытаются восстановить поле возмущений в потоке АДТ с привлечением численных методов.

Численное моделирование является удобным инструментом для аккуратного описания физических механизмов восприимчивости пограничного слоя к возмущениям различного типа. Результаты численного моделирования развития возмущений, порождаемых турбулентным пограничным слоем на плоской пластине при числах Маха 2.5 [14] и 6 [15], также подтвердили, что над пограничным слоем преобладают именно акустические возмущения. Следует отметить, что возмущения характеризуются определенной ориентацией фронтов с отклонением от среднего значения в пределах 5%. Случай $M = 2.5$ [13] изучен более подробно: приведены количественные спектральные характеристики для частотно-волнового спектра ближнего и дальнего акустического поля, которые можно использовать для постановки соответствующих задач восприимчивости (см., напр., [7]).

Каждая АДТ обладает уникальным характерным только для нее фоном возмущений, который может являться причиной наблюдаемых и до сих пор не объясненных явлений. Как правило, особенности фона аэродинамических установок остаются неизвестными из-за сложности измерений.

Настоящая работа делает первый шаг к численному исследованию восприимчивости пограничного слоя к акустическим возмущениям в условиях, характерных для аэродинамического эксперимента в ударных АДТ. В двухмерной постановке для нескольких частот рассматриваются монохроматические акустические волны, падающие на заостренную пластину. Исследуются спектральные характеристики возмущений давления, развивающихся в пограничном слое. Результат можно рассматривать как передаточную функцию, позволяющую восстановить уровень модельных возмущений в набегающем потоке по измерению пульсаций давления на поверхности.

2. НЕВОЗМУЩЕННОЕ ПОЛЕ ТЕЧЕНИЯ

Невозмущенное поле течения над заостренной плоской пластиной получено для совершенного газа (воздуха с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ и числом Прандтля $Pr = 0.72$) при Махе $M_\infty = 5$, числе Рейнольдса $Re_{\infty,L} = 10^6$, температуре торможения $T_0^* = 500$ К.

Прямоугольная расчетная область такова, что слабый скачок уплотнения, формирующийся у передней кромки из-за вязко-невязкого взаимодействия, выходит из области через ее правую границу. На нижней границе накладывается условие прилипания, температура поверхности фиксирована, $T_w = 293$ К. На входных (левой и верхней) границах накладывается условие набегающего потока; на правой границе ставится условие линейной экстраполяции изнутри расчетной области.

Численное моделирование выполнено в рамках уравнений Навье–Стокса. Использован авторский пакет расчетных программ [16], основанный на квазимонотонной схеме конечного объема второго порядка аппроксимации по времени и для диссипативных слагаемых. Реконструкция конвективных составляющих потоковых величин на грани ячейки осуществляется с применением схемы WENO третьего порядка аппроксимации. Расчеты проводятся и анализируются в безразмерном виде. Координаты отнесены к характерному масштабу длины L^* ; компоненты вектора скорости (u^*, v^*), плотность ρ^* и температура T^* отнесены к соответствующим величинам в набегающем потоке, обозначаемым нижним индексом “ ∞ ”; давление отнесено к $\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$; время – к L^* / U_∞^* . Звездочкой в верхнем индексе отмечены размерные величины. Детали реализации даны в [16].

Расчетная область покрыта сеткой в 300×150 узлов по направлениям x и y , соответственно, как показано на рис. 1. Сетка имеет плавное сгущение к передней кромке в направлении x на от-

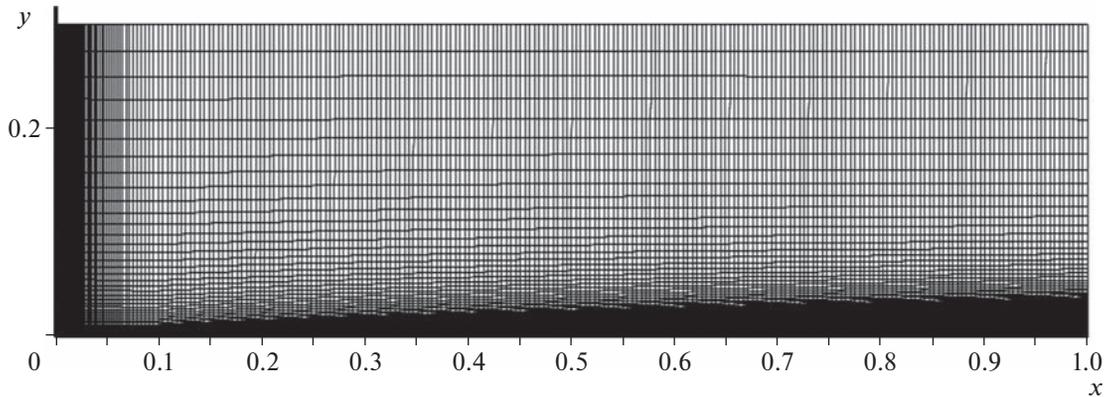


Рис. 1. Расчетная область течения над пластиной.

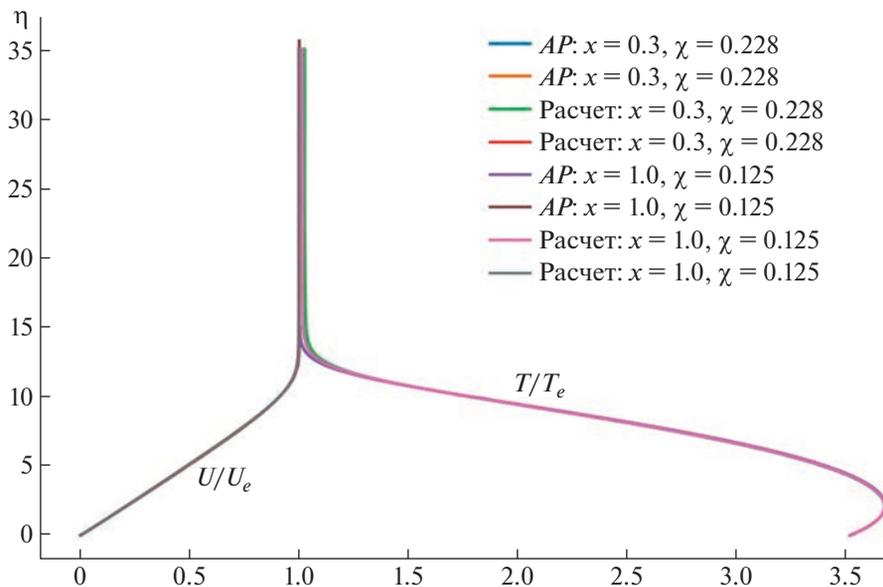


Рис. 2. Сопоставление профилей невозмущенного пограничного слоя: AP – автомодельное решение; Расчет – уравнения Навье–Стокса.

резке $[0, 0.1]$ и равномерна на оставшемся участке $[0.1, 1]$. В пограничный слой попадает 75 узлов, начиная $x = 0.1$; по мере удаления от него шаг сетки плавно увеличивается.

Невозмущенное поле течения тривиально и поэтому не иллюстрируется. На рис. 2 представлено сравнение профилей скорости и температуры с соответствующим автомодельным решением (AP) для сжимаемого пограничного слоя в двух сечениях: $x = 1, x = 0.3$; $\chi = M_\infty^3 / \sqrt{\text{Re}_{\infty, x}}$ – параметр вязко-невязкого взаимодействия; $\eta = y\sqrt{\text{Re}_{\infty, x}}/x$ – автомодельная переменная. Профили практически совпадают, однако ближе к передней кромке пластины различие нарастает из-за усиления вязко-невязкого взаимодействия, которое не учитывается в автомодельном течении.

Для оценки отклонения профилей воспользуемся следующим соотношением:

$$\Delta f = \frac{f_0 - f}{f_0} \times 100\%,$$

где f_0 – параметр, полученный из прямого расчета, а f – из сравниваемого течения. Максимальное различие между кривыми в сечении $x = 0.3$ не превосходит $\Delta u = 1.4\%$, $\Delta T = 3.24\%$.

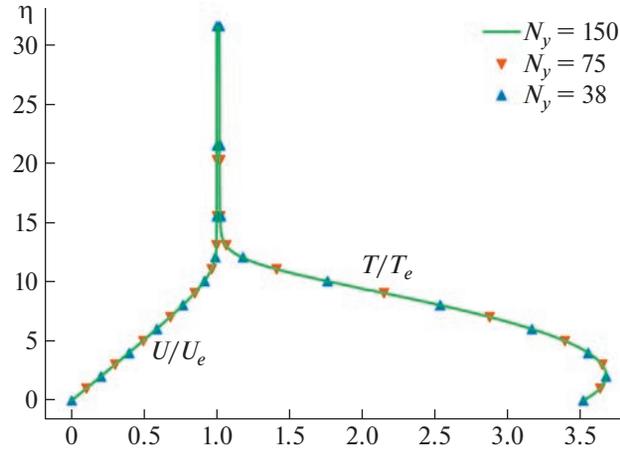


Рис. 3. Профили скорости и температуры в сечении $x = 0.3$ при различном количестве узлов N_y поперек пограничного слоя.

Анализ сеточной сходимости проведен для трех сеток в той же расчетной области; размерности сеток следующие: 300×150 , 300×75 , 300×39 . На рис. 3 видно, что уменьшение количества узлов по $y - N_y$ – в 2 и в 4 раза не ведет к заметному изменению профилей. Например, в сечении $x = 0.1$ для сеток 300×150 и 300×75 максимальная относительная погрешность составляет $\Delta u = 0.94\%$, тогда как в том же сечении для сеток 300×150 и 300×39 эта разность оказывается равной 2.93% . Такое уменьшение относительной ошибки при увеличении сеточного разрешения свидетельствует о сходимости решения с примерно вторым порядком, что соответствует порядку аппроксимации вязких членов при численном интегрировании уравнений Навье–Стокса [16]. Изменение сеточного разрешения в продольном направлении x вдвое и четверо не приводит к изменению профилей.

3. ВОЗМУЩЕННОЕ ПОЛЕ ТЕЧЕНИЯ

На невозмущенное течение накладывается плоская монохроматическая акустическая волна.

$$f' = \hat{f} e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)},$$

где \hat{f} – безразмерная амплитуда возмущений некоторой газодинамической величины (\hat{u} , \hat{v} , \hat{p} , \hat{T}).

$$\hat{p} = \varepsilon, \quad \hat{u} = \varepsilon M_\infty \cos \theta, \quad \hat{v} = \varepsilon M_\infty \sin \theta, \quad \hat{T} = (\gamma - 1) M_\infty^2 \varepsilon$$

Здесь θ – угол наклона акустических волн; компоненты волнового вектора медленной акустической волны выражаются следующим образом: $k_x = k_\infty \cos \theta$, $k_y = k_\infty \sin \theta$, где $k_\infty (\cos \theta - 1/M_\infty) = \omega$; $\varepsilon = 10^{-4}$ – амплитуда возмущения давления, выбрана достаточно малой для гарантии линейного режима развития возмущений; $\omega_0 = \omega_0^* L / V_\infty^* = 75$ – безразмерная циклическая частота, соответствующая периоду колебаний $\tau = 2\pi/\omega_0 \approx 0,084$. Схема взаимодействия такой волны с пограничным слоем проиллюстрирована на рис. 4.

3.1. Сходимость численного решения

Исследуем сходимость численного решения в нестационарном случае на примере модельной задачи о вязком затухании медленной акустической волны в однородном потоке. Данная задача имеет теоретическое решение, полученное в [17] на основе общих энергетических соображений.

Для этого на нижней и верхней границе расчетной области накладывается условие симметрии, а акустическая волна с вертикальным фронтом $\theta = 0$ задается в виде нестационарного граничного условия на левой границе вместе с набегающим потоком ($M_\infty = 5$, $\text{Re}_\infty = 10^6$). Численная задача решается в квазидвухмерной постановке ($N_y = 5$), так как зависимость решения от координаты y отсутствует.

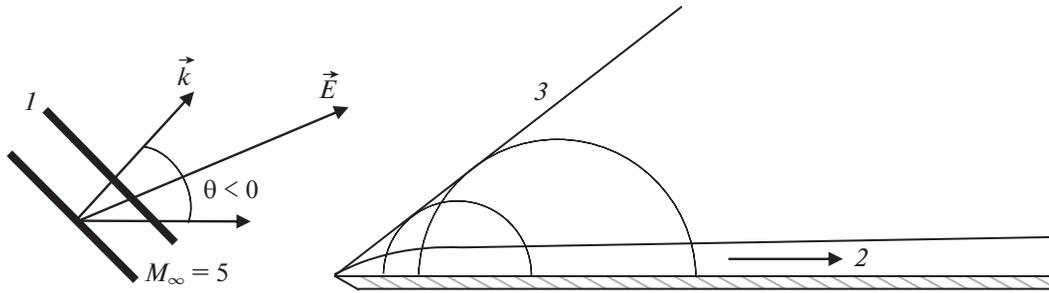


Рис. 4. Схематическое представление восприимчивости пограничного слоя: 1 – плоская волна, 2 – направление распространения возмущений в пограничном слое, 3 – скачок уплотнения; \vec{E} – вектор распространения акустической энергии.

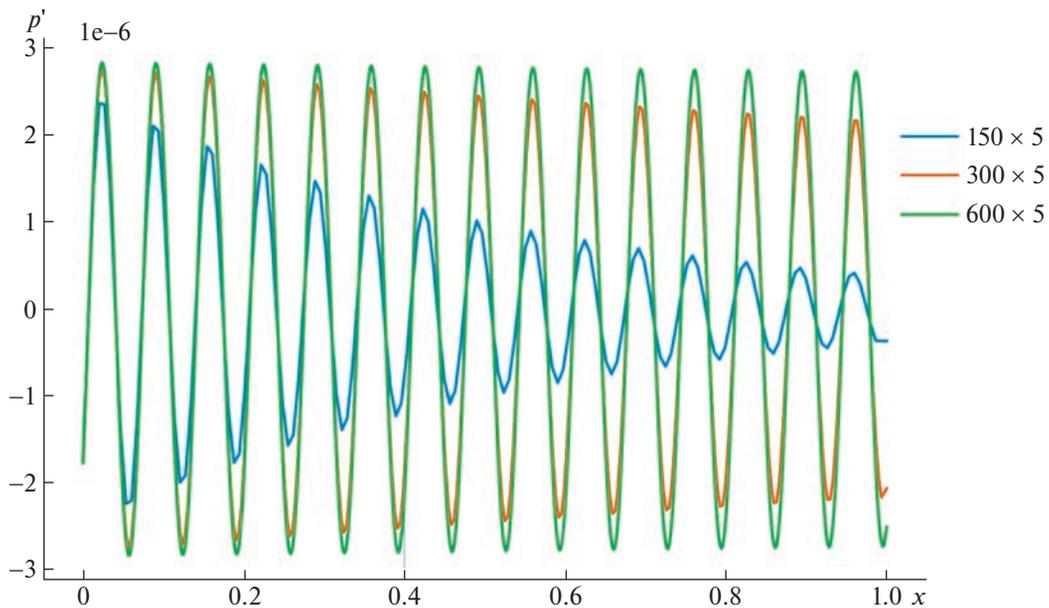


Рис. 5. Мгновенное распределение возмущения давления.

Вязкое затухание элементарной волны можно описать через комплексное волновое число $k_x = \alpha_r + i\alpha_i$, где α_i – пространственный логарифмический декремент. Величина α_i , полученная в расчете, включает в себя эффект численной вязкости, обусловленный особенностями численного метода. Этот эффект должен асимптотически приближаться к нулю, а величина α_i – к своему теоретическому значению по мере измельчении сетки и шага по времени. Поле возмущений давления, рассчитанное на сетках $N_x \times N_y = 150 \times 5, 300 \times 5, 600 \times 5$, проиллюстрировано на рис. 5 и представляет собой разницу мгновенного возмущенного и невозмущенного полей течений.

Помимо сходимости по сеточному шагу, также должна наблюдаться сходимость по времени. Поэтому для выбора оптимального сеточного разрешения рассмотрены сетки с числом узлов $300 \times 5, 600 \times 5, 1200 \times 5, 2400 \times 5$, причем для каждой из них шаг по времени варьировался таким образом, чтобы обеспечить следующее количество точек на период монохроматической волны: $\tau/dt = 100, 200, 400, 800$.

Декремент α_i определялся путем аппроксимации всех тридцати локальных максимумов $|p'(x)|_{\max}$ (рис. 5) с помощью экспоненциальной зависимости вида $a \exp(-bx)$. Коэффициенты аппроксимации подбирались методом наименьших квадратов для абсолютного значения невязки; применялся алгоритм Левенберга–Марквардта, реализованный в библиотеке `scipy.optimize` языка программирования Python. Минимизировалась абсолютное отклонение. Результаты на

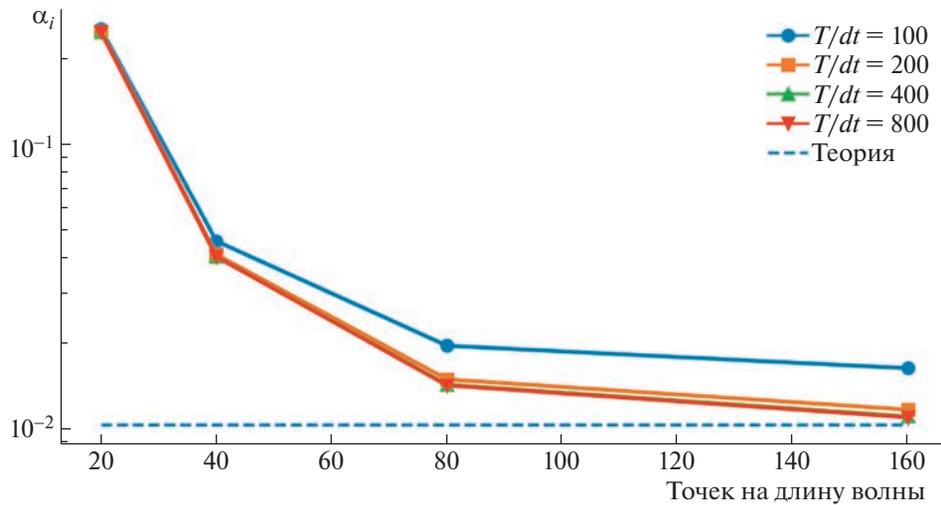


Рис. 6. Сходимость численного решения – величины декремента.

рис. 6 показывают, что при увеличении числа узлов на длину волны расчетное значение декремента монотонно стремится к теоретическому значению [17], которое в рамках гипотезы Стокса о нулевой объемной вязкости при данных параметрах потока и возмущения рассчитывается как

$$\alpha_{i, \text{теор}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\text{Re}_{\infty, L}} \frac{\omega^2}{c^3} \left(1 + \frac{3\gamma - 1}{4 \text{Pr}} \right) = 0.0103.$$

Очевидно, что корректное моделирование физического процесса затухания акустической волны требует чрезмерно подробного пространственно-временного разрешения возмущений. Однако в большинстве случаев не требуется точно воспроизводить вязкое затухание, допуская погрешность результатов нестационарного моделирования. Например, для 40 точек на длину волны и 200 точек на ее период относительная ошибка в расчете декремента α_i оказывается большой из-за численной диссипации, но абсолютная величина декремента 0.04 остается достаточно мала, и амплитуда волны уменьшается лишь на 4% на единице расчетной области. Таким образом, численная диссипация акустической волны будет приводить к ограниченной прогнозируемой погрешности результатов численного моделирования восприимчивости пограничного слоя.

3.2. Восприимчивость пограничного слоя

Монохроматическая акустическая волна и порожденные ею возмущения пограничного слоя сносятся вниз по потоку. Поэтому в процессе численного интегрирования нестационарное решение приближается к периодическому по времени решению в каждой точке расчетной области. Поле нестационарных возмущений будем называть квазипериодическим, если оно отличается от периодического в пределах погрешности 1% на одном характерном периоде возмущений. Очевидно, что на этом режиме средние характеристики течения должны слабо зависеть от времени.

Если амплитуда возмущений мала, их эволюция хорошо описывается линейной теорией. Это значит, что отклик течения на внешнее монохроматическое воздействие с частотой ω будет всюду оставаться монохроматическим с той же частотой ω (нелинейное взаимодействие элементарных гармоник не проявляется).

Рассмотрим поле возмущений на квазипериодическом режиме течения. На рис. 7 показано поле возмущений давления в случае медленных акустических волн с углом наклона $\theta = -66^\circ$, который примерно соответствует углу наклона акустических возмущений, преобладающих в тракте сверхзвуковых АДТ [13, 15]. Перед скачком возмущение состоит только из волны, проходящей через входную границу. За скачком наблюдается шахматнообразное расположение экстремумов возмущения давления, которое соответствует интерференции двух плоских волн – падающей волны и ее отражения от поверхности пластины. Отраженная волна, очевидно, не может распространяться под углом выше, чем угол Маха. Из-за неоднородности течения вблизи поверхности

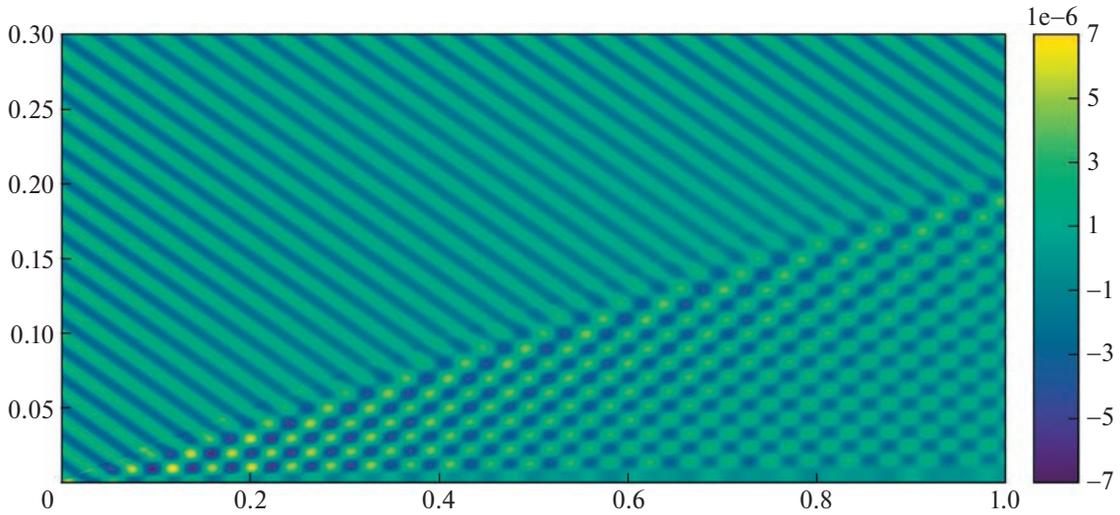


Рис. 7. Поле возмущений давления для $\omega = 75$ ($f^* \approx 10.9$ кГц).

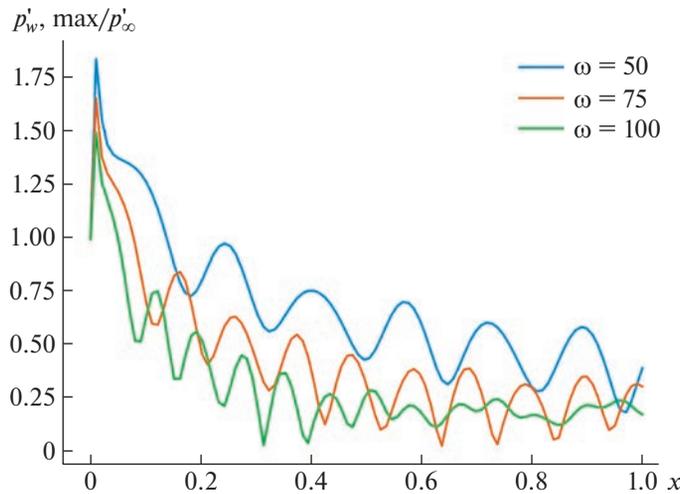


Рис. 8. Распределение амплитуды возмущений давления на поверхности $p'_w(x)$.

амплитуда возмущений в пограничном слое уменьшается. Таким образом, пульсации давления на стенке, вызванные падением монохроматической акустической волны, остаются монохроматическими с амплитудой $\epsilon_w < \epsilon$.

Рассмотрим распределение максимальной по времени амплитуды возмущений давления вдоль поверхности пластины

$$p'_{w,\max}(x) = \max_t |p'_w(x, t)|.$$

Данное распределение, нормированное на амплитуду акустических возмущений в набегающем потоке, показано на рис. 8 для трех рассмотренных частот. Наблюдается затухание возмущений вниз по потоку, а также стационарная (не зависящая от времени) амплитудная модуляция возмущений давления $p'_w(x)$. Длина волны модуляции уменьшается с ростом частоты ω .

На квазипериодическом режиме течения пространственный спектр распределения $p'_w(x)$ должен слабо зависеть от времени t , что подтверждается на рис. 9. Различие амплитуд длинноволновых возмущений $\alpha < 50$, по-видимому, объясняется недостаточной длиной расчетной об-

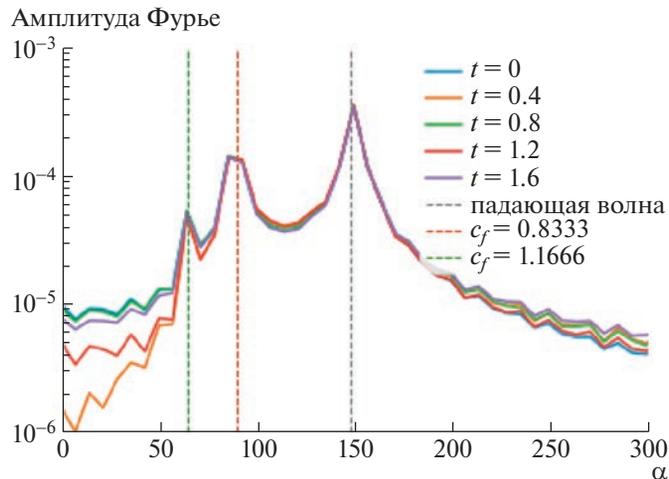


Рис. 9. Пространственное преобразование Фурье для пульсаций давления на стенке, $\omega = 75$.

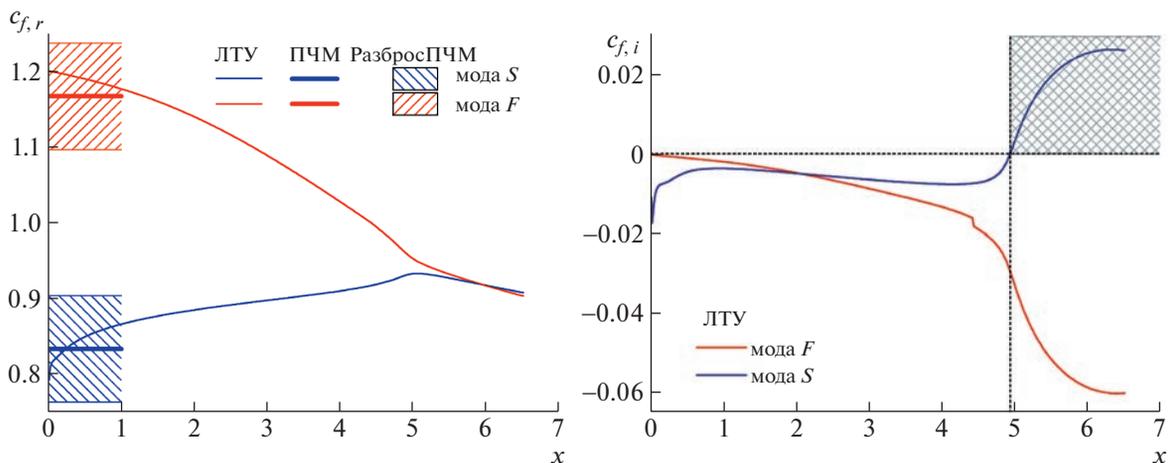


Рис. 10. Распределение фазовой скорости собственных возмущений пограничного слоя в рамках линейной теории устойчивости (ЛТУ) и прямого численного моделирования (ПЧМ), $\omega = 75$. Слева – $c_{f,r}(x)$, справа – $c_{f,i}(x)$.

ласти по сравнению с характерной длиной волны возмущения (данный вопрос не рассматривался). Вместе с тем на спектрах наблюдаются три пика: преобладающий пик соответствует падающей акустической волне; второй по величине пик – модулирующий, с характерной фазовой скоростью 0.83 ± 0.07 (точность обусловлена шагом $\Delta k = 2\pi/(x_{\max} - x_{\min})$ в фурье-пространстве); третий пик – 1.17 ± 0.07 .

Наблюдаемые модулирующие пики, по-видимому, соответствуют развивающимся в пограничном слое модам F и S, которые были возбуждены медленной акустической волной вблизи передней кромки пластины, где фазовые скорости мод соответствовали скоростям быстрой (для моды F) и медленной (для моды S) акустических волн: $1 \pm 1/M_\infty$.

На рис. 10 представлены результаты расчета линейной устойчивости пограничного слоя для рассматриваемых параметров течения, выполненные А.В. Федоровым с помощью кода [18]. Они подтверждают сделанное предположение (рис. 10, слева). В пределах расчетной области $[0;1]$ обе обнаруженные волны в пограничном слое соответствуют модам пограничного слоя, и их фазовые скорости из прямого расчета согласуются с теоретическими значениями.

Очевидно, что пограничный слой устойчив к рассматриваемым возмущениям: всюду в расчетной области $c_{f,i} < 0$. Для попадания в диапазон неустойчивости пришлось бы продолжить расчет до $x \approx 5$ или рассмотреть высокочастотные возмущения, что не является целью настоящей работы.

В работе [19] показано, что моды пограничного слоя на плоской пластине синхронизируются с акустическими волнами вблизи передней кромки (на масштабе $l \ll L$), а следовательно, могут эффективно возбуждаться такими волнами. В частности, при синхронизации фазовая скорость моды S стремится к значению $c_{f,r} = 1 - 1/M_\infty = 0.8$ медленной акустической волны при $x \rightarrow 0$. Поэтому для оценки можно рассмотреть рост неустойчивой моды не от ее точки потери устойчивости $x_0 \approx 0$, а от передней кромки. Начальная амплитуда возбужденной моды зависит от параметров внешнего воздействия ω и θ через комплексный коэффициент восприимчивости $D(\omega, \theta)$. Тогда усиление моды S в слабонепараллельном пограничном слое можно записать в рамках линейной теории устойчивости как

$$p'_{S,w}(\omega, \theta, x) = \epsilon \cdot D(\omega, \theta) \cdot e^{N(\omega, x)} \cdot \exp\left(i \int_0^x \alpha_r(\omega, \tilde{x}) d\tilde{x} - i\omega t\right).$$

Интерференция моды с падающей монохроматической волной имеет вид

$$p'_{\Sigma,w} = p'_{ak,w} + p'_{S,w} = \epsilon \cdot \exp(ik_x x - i\omega t) \left[\frac{\epsilon_w}{\epsilon} + D(\omega, \theta) e^{N(\omega, x)} \cdot \exp\left(i \int_0^x (\alpha_r(\omega, \tilde{x}) - k_x(\omega, \theta)) d\tilde{x}\right) \right]$$

Фазовая скорость моды меняется слабо на протяжении расчетной области, в пределах 10% (рис. 10, слева). Поэтому для монохроматической волны $\omega = \text{const}$ волновое число $\alpha_r(\omega, x)$ также будет меняться слабо, а волновая разбежка будет мала: $|\alpha_r - k_x| \ll k_x$. Таким образом, на поверхности пластины должна наблюдаться стационарная амплитудная модуляция (или биения), что и продемонстрировано на рис. 8.

3.3. О возможности восстановления спектра

Рисунок 8 можно рассматривать как передаточную функцию, которая позволяет восстановить амплитуду возмущений в набегающем потоке по результатам измерения пульсаций давления на поверхности пластины.

Пусть в набегающем потоке имеются слабые акустические возмущения с широким амплитудно-частотным спектром $A_\infty(\omega)$, а угол наклона волнового вектора $\theta \approx \text{const}$, как следует из [14]. Датчик пульсаций давления, установленный на поверхности пластины при x , измеряет сигнал $s(t, x)$. Соответствующий амплитудно-частотный спектр можно восстановить с помощью преобразования Фурье – $\hat{s}(\omega, x)$. Пока процесс развития возмущений можно считать линейным, численное моделирование дает связь амплитуды пульсаций на поверхности с амплитудой в потоке для каждой фиксированной гармоники ω , т.е. передаточную функцию $A(\omega, x)$ (рис. 8). Тогда спектральный состав возмущений в набегающем потоке теоретически восстанавливается и не должен зависеть от точки измерения x :

$$A_\infty(\omega) \equiv A_\infty(\omega, x) = \frac{\hat{s}(\omega, x)}{A(\omega, x)}$$

Проводя измерения в нескольких фиксированных точках $x = \text{const}$ и усредняя получаемые спектры $A_\infty^{\text{эксп}}(\omega, x)$, можно уменьшить погрешность изменения $A_\infty(\omega)$. Таким образом, имеется принципиальная возможность восстановления спектра внешних возмущений по измерению пульсаций давления на поверхности пластины.

Основным предположением предложенного метода является линейное развитие возмущений. Поэтому проведенные рассуждения остаются справедливыми при обтекании клина сжатия (пластина под углом атаки), а также в случае более сложных конфигураций, таких как притупленные тела или тела с искривленной поверхностью. Тем не менее на сложных конфигурациях может усложниться пространственная структура передаточной функции $A(\omega, x)$, и ее практическое использование может оказаться затруднительным. В частности, трудности могут возник-

нать, если длина стационарной модуляции на рис. 8 окажется соизмерима с размерами датчиков пульсаций давления.

Следует отметить, что во многих случаях форма внутренней поверхности АДТ является осесимметричной. Фронты акустического поля от такого источника расположены под фиксированным углом к излучающей поверхности. Но угол падения излучаемого акустического возмущения на поверхность плоской пластины существенно зависит от взаимного расположения пластины и места излучения на осесимметричной поверхности. Поэтому в общем случае нельзя считать, что $\theta \approx \text{const}$.

Тем не менее учет зависимости передаточной функции от угла θ может оказаться избыточным в практических приложениях. Дело в том, что зависимость положения начала перехода от амплитуды внешних возмущений является логарифмической. Это следует из амплитудного метода Мэка предсказания ЛТП [20] и было проиллюстрировано в работе [21] применительно к ЛТП на пластине, вызванному атмосферной турбулентностью, интенсивность которой определяется скоростью диссипации кинетической энергии турбулентности ϵ . Было показано, что неопределенность по ϵ в пределах двух порядков величины приводит к малой неопределенности в положении перехода $|\Delta x/x_{\text{ЛТП}}| < 17\%$. То есть для практических приложений требуется определить амплитудно-частотный спектр фона лишь по порядку величины. Для этого, по-видимому, достаточно оставаться в рамках предположения $\theta \approx \text{const}$, как было сделано выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное моделирование эволюции малых возмущений второй моды сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине при числе Маха 5. Эти возмущения возбуждены плоской монохроматической медленной акустической волной с фиксированным наклоном волновых фронтов.

Проанализированы спектральные характеристики возмущений. Показано, что всюду в пограничном слое сохраняется линейный режим развития возмущений, т.е. частота возмущений постоянна и соответствует частоте падающей волны. Падающая волна интерферирует с возбужденными модами, вызывая стационарную амплитудную модуляцию возмущений давления на поверхности пластины.

Амплитудную модуляцию можно рассматривать как передаточную функцию, которая позволяет восстановить характеристики внешнего акустического поля с помощью измерения амплитудно-частотных спектров возмущений в нескольких точках на поверхности пластины.

Развитие предложенного метода на случай внешнего акустического шума от осесимметричной поверхности-источника, которая свойственна условиям АДТ, требует дальнейших исследований.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (ЦАГИ, проект № 20-01-00493; все разделы, кроме 3.1) и РНФ (МФТИ, проект № 19-79-10132; раздел 3.1). Авторы благодарны доценту кафедры Общей физики МФТИ А.В. Федорову за расчет устойчивости пограничного слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гапонов С.А., Маслов А.А.* Развитие возмущений в сжимаемых потоках. М.: Наука, 1980. 134 с.
2. *Morkovin M.V.* Critical evaluation of transition from laminar to turbulent shear layers with emphasis on hypersonically travelling bodies // Tech. Rep. AFFDL-TR-68-149. Air Force Flight Dynamics Laboratory. 1969.
3. *Bushnell D.M.* Notes on Initial Disturbance Fields for the Transition Problem, Springer-Verlag, Berlin, 1990. V. 1. P. 217–232
4. *Lauffer J.* Some Statistical Properties of the Pressure Field Radiated by a Turbulent Boundary Layer // Physics of Fluids/ 1964. V. 7. № 8. P. 1191–1197.
5. *Stetson K.F.* Nostip Bluntness Effects on Cone Frustum Boundary-Layer Transition in Hypersonic Flow // AIAA Paper. 1983. P. 83–1763.
6. *Pate S.R.* Effects of wind tunnel disturbances on boundary-layer transition with emphasis on radiated noise: A review // AIAA Paper. 1980. № 80-0431.
7. *Чувахов П.В., Погорелов И.О.* Источники турбулентности на прямом крыле сверхзвукового пассажирского самолета. // Математическое моделирование. 2022. Т. 34. № 8. С. 19–37.
8. *Fedorov A.V.* Receptivity of a high-speed boundary layer to acoustic disturbances. // J. Fluid Mech. 2003. V. 491. P. 101–129.
<https://doi.org/10.1017/S0022112003005263>

9. *Zhong X., Wang X.* Direct numerical simulation on the receptivity, instability, and transition of hypersonic boundary layers // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2012. V. 44. P. 527–561.
10. *Egorov I.V., Soudakov V.G., Fedorov A.V.* Numerical Modeling of the Receptivity of a Supersonic Boundary Layer to Acoustic Disturbances // *Fluid Dynamics*. 2006. V. 41. № 1. P. 37–48.
<https://doi.org/10.1007/s10697-006-0020-4>
11. *Soudakov V., Fedorov A., Ryzhov A.* DNS and the Theory of Receptivity of a Supersonic Boundary Layer to Free-Stream Disturbances // *Journal of Physics: Conference Series*. 2011. V. 318. № 3. Paper 032020.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/318/3/032020>
12. *Chuvakhov P.V.* Shock-Capturing Anomaly in the Interaction of Unsteady Disturbances with a Stationary Shock // *AIAA J.* 2021. V. 59. № 8.
<https://doi.org/10.2514/1.J059682>
13. *Wagner A., Schülein E., Petervari R., Hannemann K., Ali S., Cerminara A., Sandham N.* Combined free-stream disturbance measurements and receptivity studies in hypersonic wind tunnels by means of a slender wedge probe and direct numerical simulation // *Journal of Fluid Mechanics*. 2018. V. 842. P. 495–531.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2018.132>
14. *Duan L., Choudhari M.M., Wu M.* Numerical Study of Acoustic Radiation due to a Supersonic Turbulent Boundary Layer // *Journal of Fluid Mechanics*. 2014. V. 746. P. 165–192.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2014.116>
15. *Zhang C., Duan L.* Acoustic Radiation from High-Speed Turbulent Boundary Layers in a Tunnel-like Environment // 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, January 5–9, 2015, Kissimmee, Florida. AIAA Paper 2015-0836.
<https://doi.org/10.2514/6.2015-0836>
16. *Egorov I.V., Novikov A.V.* Direct numerical simulation of laminar-turbulent flow over a flat plate at hypersonic flow speeds // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2016. V. 56(6). P. 1064 – 1081.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика: т. VI. (3-е изд., перераб. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., Гл. VIII, § 79 Поглощение звука. 1986. 736 с.
18. *Образ А.О., Федоров А.В.* Пакет программ HSFS для анализа устойчивости сжимаемых пограничных слоев // *Ученые записки ЦАГИ*. 2017. Т. 48. № 3. С. 11–27 [A.O. Obraz, A.V. Fedorov The high-speed flow stability (HSFS) software package for stability analysis of compressible boundary layers. 2017. V. 48. № 3. P. 223–242. <https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2017022797>]
19. *Федоров А.В., Хохлов А.П.* Возбуждение неустойчивых мод в сверхзвуковом пограничном слое акустическими волнами // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1991. № 4. С. 67–74.
20. *Mack L.M.* Transition and Laminar Instability : tech. rep. Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology. Pasadena, CA, USA, 1977. NASA-CR–153203. NASA TRS: 19770017114.
21. *Egorov I.V., Fedorov A.V., Novikov A.V., Chuvakhov P.V.* The role of receptivity in prediction of high-speed laminar-turbulent transition // *IUTAM LaminarTurbulent Transition*. V. 38 (9th IUTAM Symposium, London, UK, Sept. 2–6, 2019). 2022. P. 541–552. (IUTAM bookseries).

УДК 532.5:537.84

ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ДИФФУЗИИ ИОНОВ НА ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИЮ ИНЖЕКЦИОННОГО ТИПА В ПЛОСКОМ СЛОЕ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

© 2023 г. И. А. Ермолаев^{а,*}

^аСаратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

*E-mail: iermolaev@rambler.ru

Поступила в редакцию 17.06.2023 г.

После доработки 16.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Изучено влияние диффузии на изотермическое электроконвективное течение слабопроводящей жидкости при униполярной инъекции в постоянном электрическом поле в плоскопараллельной системе электродов. Получены зависимости полей объемной плотности заряда и течения от интенсивности диффузии. Даны численные оценки величины коэффициента диффузии инжектированных ионов для ТМ + I₂. Результаты получены на основе сравнения численного эксперимента с существующими экспериментальными данными.

Ключевые слова: изотермическая электроконвекция, слабопроводящая жидкость, униполярная инъекционная проводимость, коэффициент диффузии

DOI: 10.31857/S1024708423600410, EDN: UYEBXS

Существуют расхождения в оценках как величины коэффициента диффузии ионов, так и влияния механизма диффузии на электроконвективные процессы в слабопроводящих жидкостях. В большинстве исследований электроконвективных течений диффузия не учитывается и коэффициент диффузии полагается равным нулю, например, [1–10].

В [11] предложен критерий, являющий собой отношение сил кулоновского отталкивания к коэффициенту диффузии. Показано, что диффузия должна учитываться, если величина критерия меньше единицы. Это позволяет пренебречь током диффузии в сравнении с токами проводимости и конвекции. В ряде работ диффузия ионов учитывается, но считается достаточно малой. Так, в [12] величина коэффициента диффузии D_i полагалась равной 10^{-9} м²/с (йодбензол, бромбензол). В [13] D_i считался равным 10^{-7} м²/с (ТМ + бутиловый спирт). При этом выбор величины коэффициента определялся соображениями повышения сходимости численного решения. В работе [13] показано, что увеличение коэффициента диффузии на порядок приводит к изменению основных величин не более чем на 1%. В [14] коэффициент диффузии инжектированных ионов был равен 10^{-10} м²/с, в [15] $D_i = 10^{-8}$ м²/с. В работе [15] отмечено, что величина коэффициента завышена (согласно соотношению Эйнштейна величина $D_i = 10^{-10}$ м²/с), однако величина диффузионного потока не превышала 2% от конвективного в тонком слое, расположенном у границы заряженной струи и пренебрежимо мала в остальной части. В [16] коэффициент диффузии считался равным 10^{-9} м²/с (ТМ), поскольку диффузия играет роль лишь в узких слоях с большими градиентами концентрации заряженных частиц вблизи стенок. В [17] показано, что, несмотря на малую величину коэффициента диффузии, влияние диффузии на динамику течения значительно. Таким образом, существующие оценки величины коэффициента диффузии разнятся на несколько порядков.

Полный ток при электрогидродинамических течениях слабопроводящих жидкостей является суммой токов проводимости, диффузии и конвекции $\mathbf{j} = bq\mathbf{E} - D\text{grad}q + \mathbf{V}q$, где \mathbf{j} – вектор плотности тока ионов, b – подвижность ионов, q – объемная плотность ионов, \mathbf{E} , \mathbf{V} – векторы напряженности электрического поля и скорости жидкости. Обычно при оценке величины коэффициента диффузии используется соотношение Эйнштейна $D = kTb/ez$, $kT/e = \varphi_0$, где k – постоянная Больцмана, T – температура, e – модуль заряда электрона, z – валентность ионов, φ_0 – характе-

ристический потенциал. При комнатной температуре характеристический потенциал равен приблизительно 0.026 В на единицу обратной валентности. При подвижности ионов 10^{-8} м²/В·с это дает порядок величины коэффициента диффузии 10^{-10} м²/с. Что позволяет считать диффузию пренебрежимо малой, поскольку $D/\nabla q$ много меньше qb/E .

Однако соотношение Эйнштейна, эмпирически оправданное для водных электролитов, не обязательно справедливо для слабопроводящих жидкостей [18]. Так, в опытах с очищенным трансформаторным маслом и другими слабопроводящими жидкостями [19] характеристический потенциал на 5 порядков превышал значение, соответствующее водным электролитам. Значения характеристического потенциала ϕ_0/z возрастали пропорционально приложенным напряжениям, как $\phi_0/zU = 0.36 \pm 0.01$.

Результаты [20] подтверждают, что значение характеристического потенциала для слабопроводящих жидкостей зависит от приложенного напряжения и отличается от значения kT/e , принятого в электрохимии водных растворов. При этом $\phi_0 = ZkT/(Ze - W/E)$, где Z – зарядовое число кластера, W – энергия взаимодействия зарядовой части кластера со своей дипольной оболочкой. Полученные в [20] зависимости для раствора бутилового спирта в трансформаторном масле позволяют оценить величину коэффициента диффузии как $10^{-7} - 10^{-6}$ м²/с при 1–10 кВ/см соответственно, для начальной удельной проводимости $\sigma_0 = 10^{-10}$ (Ом · м)⁻¹.

Таким образом, вопрос величины коэффициента диффузии и влияния диффузии инжектированных ионов на электроконвективные процессы в слабопроводящих жидкостях требует дополнительных исследований. В настоящей работе величина коэффициента диффузии ионов при изотермической электроконвекции жидкости с униполярной инжекционной проводимостью оценивалась методом вычислительного эксперимента.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривалась двухкомпонентная вязкая несжимаемая слабопроводящая жидкость, состоящая из заряженной и нейтральной компоненты, где плотность заряженной компоненты много меньше полной плотности. Процессы считались квазистатическими, условия – изотермические, джоулев нагрев пренебрежимо мал, инжекция – униполярна, плотность и диэлектрическая проницаемость среды – постоянны. Жидкость – вязкая, несжимаемая. В таких условиях общая система уравнений токопрохождения имеет вид [18]

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + q \mathbf{E} \\ \nabla \mathbf{V} &= 0 \\ \varepsilon \nabla \mathbf{E} &= q \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla(\sigma \mathbf{E} + q \mathbf{V} - D \nabla q) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь ρ – плотность, \mathbf{V} – вектор скорости, p – давление, \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля, ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость, μ – динамическая вязкость, q – объемная плотность зарядов, σ – начальная удельная проводимость (измеренная по линейному участку вольт-амперной характеристики), ϕ – электрический потенциал. Фоновая проводимость среды считалась постоянной. Подвижность зарядов, диэлектрическая проницаемость, вязкость слабо зависят от напряженности поля вплоть до пробивных напряжений, что для изотермических условий позволяет считать эти величины постоянными. Соответственно в последнем уравнении системы (1.1) пренебрегается нелинейностью зависимости $j \sim qbE$.

Плоскопараллельный бесконечный слой жидкости моделировался прямоугольной ячейкой шириной L , высотой H , с аспектным отношением $L/H = 1.3$ [3, 21]. Бесконечность слоя моделировалась условиями симметрии на боковых границах. Приложенное электрическое поле полагалось однородным: $E_x = 0$, $E_y = \phi/H$, где H – толщина слоя.

Использовалось безындукционное приближение как следствие малой инжекции. Которое предполагает, что распределение заряда не вызывает заметного изменения потенциала электрического поля. Такое приближение обосновано, поскольку рассматривалась жидкость с незначительной величиной начальной проводимости в поле со средней напряженностью порядка 1 кВ/см.

Для описания ЭК-течений использовалась декартова система координат. Начало совпадало с левым нижним углом расчетной области, ось x направлена горизонтально, ось y – вертикально.

В начальный момент времени жидкость находилась в гидростатическом равновесии. Для возбуждения течения и ускорения сходимости в начальный момент времени задавалось несимметричное поле объемной плотности заряда.

В качестве масштаба объемной плотности заряда был выбран $q = \eta E_0$, где η – коэффициент инжекции, E_0 – средняя напряженность поля. Масштабами расстояния, времени, скорости и напряженности поля были: $H, H^2/\nu, \nu/H, E_0$. Соответственно безразмерные переменные $X = x/H, Y = y/H, \tau = \nu t/H^2, U = uH/\nu, V = vH/\nu, Q = q/\eta E_0, e_x = E_x/E_0, e_y = E_y/E_0$. Таким образом, $x = XH, y = YH, t = H^2\tau/\nu, u = \nu U/H, v = \nu V/H, q = Q\eta E_0, E_x = e_x E_0, E_y = e_y E_0$. Здесь x, y – координаты; t – время; ν – коэффициент кинематической вязкости; u, v – составляющие скорости в проекции на оси x, y соответственно. Безразмерные уравнения изотермической электроконвекции (1.1) были записаны в переменных “вихрь скорости–функция тока–объемная плотность зарядов” как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} &= \Delta \omega + Gr_e A \cdot e_x \frac{\partial Q}{\partial Y} - Gr_e A \cdot e_y \frac{\partial Q}{\partial X} \\ \Delta \psi &= \omega \\ \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial Q}{\partial Y} &= -\frac{1}{Pr_e} Q + \frac{1}{Pr_d} \Delta Q \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $Gr_e = \varepsilon E_0^2 H^2 / 4\pi \rho \nu^2$ – электрический аналог числа Грасгофа (отношение кулоновских и вязких сил), $A = 4\pi H \eta / \varepsilon$ – безразмерной коэффициент инжекции, $Gr_e A = E_0^2 H^3 \eta / \rho \nu^2$ – произведение электрического числа Грасгофа на безразмерную инжекцию. $Pr_e = \varepsilon \nu / \sigma_0 H^2$ – электрический аналог числа Прандтля, являющий собой соотношение токов смещения и проводимости (отношение времени релаксации электрического заряда к характерному времени развития гидродинамических возмущений). $Pr_d = \nu / D_i$ – диффузионное число Прандтля.

Безразмерные граничные условия для системы уравнений (1.2) имели вид

$$\begin{aligned} X = 0: \quad \psi(0, Y, \tau) = \omega(0, Y, \tau) = \frac{\partial Q(0, Y, \tau)}{\partial X} &= 0 \\ X = L: \quad \psi(L, Y, \tau) = \omega(L, Y, \tau) = \frac{\partial Q(L, Y, \tau)}{\partial X} &= 0 \\ Y = 0: \quad \psi(X, 0, \tau) = \frac{\partial \psi(X, 0, \tau)}{\partial Y} &= 0 \\ Y = H: \quad \psi(X, H, \tau) = \frac{\partial \psi(X, H, \tau)}{\partial Y} &= 0 \end{aligned}$$

На нижнем электроде (катоде) был задан линейный закон инжекции зарядов (постоянная, равномерная инжекция) $Q(X, 0, \tau) = -1$ ($e_x = 0, e_y = -1$), на аноде разрядка ионов считалась мгновенной $Q(X, H, \tau) = 0$. На твердых непроницаемых границах (электродах) обеспечивались условия “прилипания” вязкой жидкости, граничные условия для вихря скорости вычислялись по формуле Вудса [22], начальные условия $\psi(X, Y, 0) = \omega(X, Y, 0) = Q(X, Y, 0) = 0$.

Для решения использовалась слабая формулировка метода конечных элементов Галеркина. Объемная плотность зарядов, вихрь скорости и функция тока аппроксимировались линейной комбинацией не зависящих от времени функций формы на линейных треугольных конечных элементах. Аппроксимации по времени осуществлялись с помощью полностью неявной двухслойной схемы. Уравнения (1.2) решались последовательно. Временной шаг начинался с вычисления поля объемной плотности зарядов. Далее определялись граничные условия, и решалось уравнение для вихря скорости; поле вихря скорости корректировалось, и определялось поле функции тока. Расчеты проводились с использованием конечно-элементной программы ЕРЕМАІ_ELECTRO (свидетельство № 2012611637 от 13.02.2012).

Все результаты получены на равномерных конечно-элементных сетках 32×25 с шагом по времени 10^{-3} . Проверка на сетке 42×33 показала, что относительные изменения экстремальных

значений функции тока и вихря скорости не превышают 1%. Стационарные решения были получены методом установления, критерием установления являлось неравенство

$$\left| Q_m^{k+1} - Q_m^k \right| + \left| \omega_m^{k+1} - \omega_m^k \right| + \left| \psi_m^{k+1} - \psi_m^k \right| < eps$$

где Q_m , ω_m , ψ_m – экстремальные значения объемной плотности зарядов, вихря скорости и функции тока. Индекс k – номер шага по времени, величина eps изменялась в интервале 10^{-5} – 10^{-6} .

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рассматривалось электроконвективное движение диэлектрической жидкости, характеризуемой значением электрического числа Прандтля $Pr_e = 1$, т.е. полагалось, что время релаксации заряда близко характерному времени затухания вязких возмущений. Для ТМ + I₂ ($\rho = 880$ кг/м³; $\nu = 2.25 \times 10^{-5}$ м²/с; $\epsilon = 2.25$; $H = 1$ см) это соответствует низковольтной проводимости $\sigma_0 = 4.48 \times 10^{-12}$ (Ом · м)⁻¹. Жидкость с такой начальной проводимостью обладает высокими изоляционными свойствами. Коэффициент диффузии инжектированных ионов варьировался в пределах 0 – 10^{-6} м²/с. Интенсивность ЭК-течения изменялась до $Gr_e A = 600$.

На рис. 1 показаны изменения полей объемной плотности зарядов и течения с ростом интенсивности диффузии. Поля стационарны, соответствуют развитым ЭК-течениям, переходные процессы завершены, поле течения двухвихревое. При пренебрежимо малой диффузии с коэффициентом от 0 до 10^{-8} м²/с (рис. 1а,б) распределения плотности заряда практически идентичны. Они представляют собой пограничный слой толщиной $0.15H$ и электроконвективные аналоги “термиков” в движущихся от катода конвективных потоках, пространственная периодичность которых равна $1.3H$. Вблизи катода плотность инжектируемых ионов изменяется по линейному закону. Исключение составляют области поперечных конвективных потоков от катода (рис. 1, 2). При этом скорости конвективных потоков от катода вдоль боковых границ расчетной ячейки больше скорости жидкости, движущейся от анода в ее центре. Соответственно центры конвективных вихрей смещены к боковым границам. Из рис. 3а (кривые 1–3) так же видно, что интенсивность течения практически не изменяется с ростом коэффициента диффузии от 0 до 10^{-8} м²/с. Изменения интенсивности течения не превышают 2%.

Количественные изменения полей плотности зарядов и течения возникают при $D_i \approx 10^{-7}$ м²/с. Толщина пограничного слоя объемной плотности заряда вблизи катода становится равной $0.19H$ (рис. 1в), при $Gr_e A = 600$ изменения интенсивности течения составляют уже 16% (кривая 4 на рис. 3а) в сравнении с $D_i = 0$ и увеличиваются с ростом интенсивности ЭК-движения. При $D_i \approx 10^{-6}$ м²/с влияние диффузии становится еще более существенным. Растет плотность инжектируемых ионов вблизи анода и в средней части слоя слабопроводящей жидкости (рис. 2, кривая 4). Толщина пограничного слоя плотности заряда $0.31H$ (рис. 1г), поле скоростей становится более симметричным, конвективный вихрь приобретает “прямоугольную” форму (рис. 1г), величины скоростей конвективных потоков от катода и от анода примерно равны.

Следует отметить, что ЭК-движение существует до значений критерия $Gr_e A \approx 250$ – 300 как медленное “ползущее” течение. Такое течение имело вид двух вихрей разной интенсивности, асимметрия которых $|\psi_{max}/\psi_{min}|$ изменялась от 0.7 до 1 с ростом числа $Gr_e A$. Вид кривых на рис. 3, где представлены зависимости средней величины $\psi_m = 0.5 \times (|\psi_{max}| + |\psi_{min}|)$ от критериального числа $Gr_e A$ при различной интенсивности диффузии, отражает указанные изменения течения. При $Gr_e A$ более 250 – 300 зависимости на рис. 3 соответствуют режиму развитого пограничного слоя и описываются корневым законом.

В изотермических условиях стационарная электроконвекция в плоском конденсаторе возникает в результате обратной бифуркации [23]. Аналогичным образом возникали переходы от равновесия к конечно-амплитудному режиму течения в работах автора, например, [24]. Однако в настоящем исследовании электроконвекция формировалась в результате бифуркации вперед. Что может быть связано приближением зависимости $j \sim qbE$ и величиной критерия Прандтля $Pr_e = 1$.

Вид кривых на рис. 3 типичен для задач со слабым нарушением условий равновесия [22]. При малых нарушениях условий равновесия амплитуда течения вблизи кризиса может быть описана кубическим уравнением вида $b^3 + c_1(G - G^*)b + c_2 = 0$ [25], где G – некоторый критерий устойчивости. Однако зависимость средней величины ψ_m от критерия $Gr_e A$ может быть приближенно

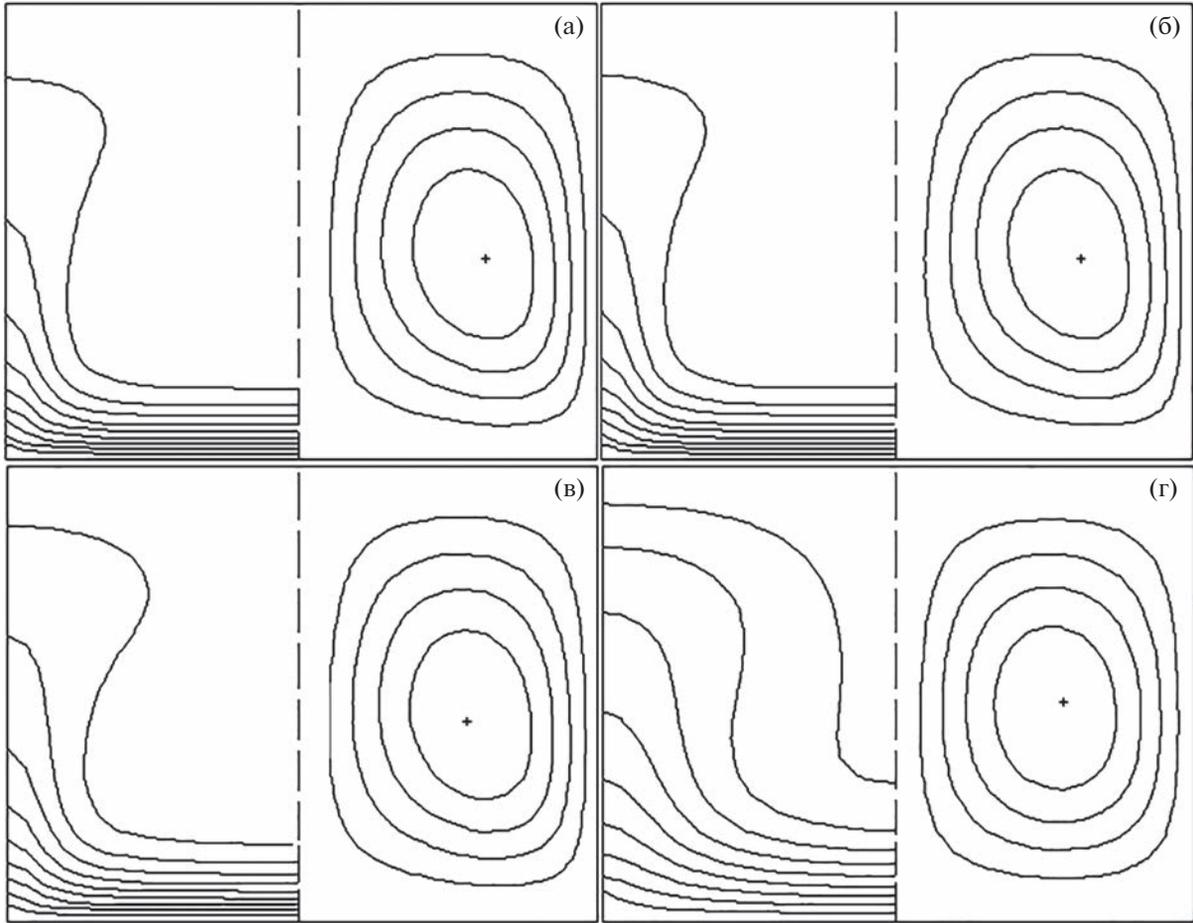


Рис. 1. Изолинии объемной плотности зарядов (слева) и линии тока (справа) при $Gr_e A = 600$: а-г – $D_i = 0, 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

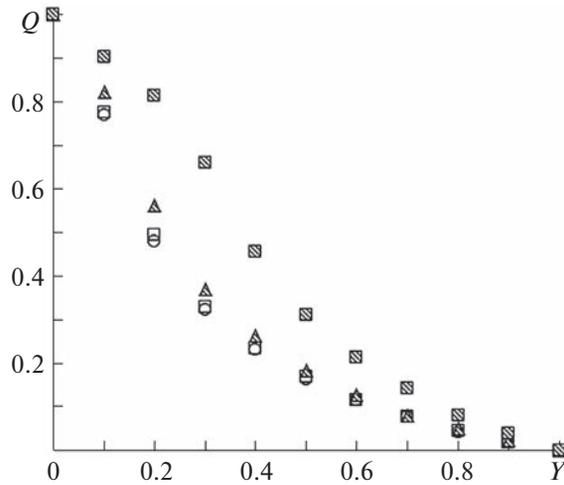


Рис. 2. Объемная плотность зарядов при $X = 0, Gr_e A = 600$: 1–6 – $D_i = 0, 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ (обозначения на рис. 2 и рис. 3 одинаковы).

описана уравнением второй степени. Во всяком случае, зависимости $\psi_m^{1/2} \sim (Gr_e A - Gr_e A^*)$ близки к линейным, как показано на рис. 3б. Экстраполяция на ноль позволяет вычислить критические значения числа $Gr_e A^*$ для различных величин коэффициента диффузии инжектированных ионов.

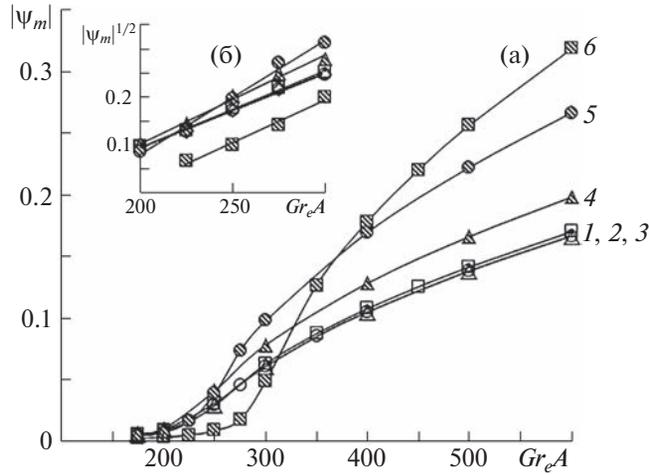


Рис. 3. (а) Зависимость интенсивности ЭК-течения от $Gr_e A$, 1–6 – $D_i = 0; 10^{-10}; 10^{-8}; 10^{-7}; 5 \times 10^{-7}; 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; (б) аппроксимация интенсивности медленного течения вблизи кризиса.

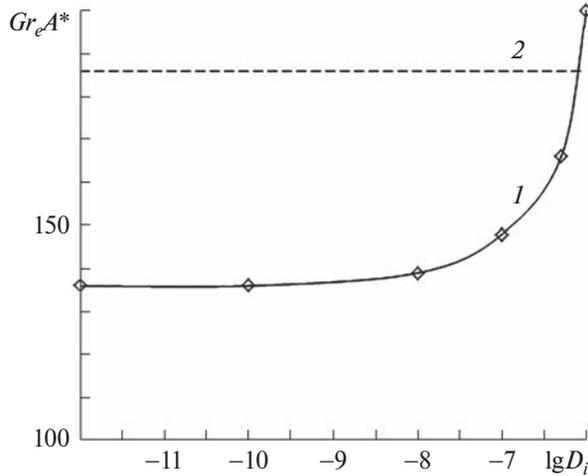


Рис. 4. Изменения порогового значения критерия $Gr_e A^*$ с ростом интенсивности диффузии: 1 – численные результаты, 2 – эксперимент [26].

Изменения пороговых значений $Gr_e A^*$ с ростом интенсивности диффузии представлены на рис. 4. Эти значения не меняются, или изменяются незначительно при $0 < D_i < 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ и существенно при $10^{-8} < D_i < 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Высокие токи диффузии смещают порог возникновения электроконвективного течения к бóльшим величинам параметра $Gr_e A$. Сравнение с существующими экспериментальными данными позволяет оценить величину коэффициента диффузии инжес-тированных ионов в выбранной слабопроводящей жидкости. Так, линия 2 ($Gr_e A^* = 186$) на рис. 4 соответствует экспериментально измеренному значению пороговой средней напряженности $E^* = 1 \text{ кВ/см}$ для ТМ + I_2 при $\sigma_0 = 4.48 \times 10^{-12} (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ [26].

В работе [26] исследовалась проводимость трансформаторного масла (ТМ) с добавлением малых доз молекулярного йода (I_2) в однородном поле (плоский конденсатор) и в сильно неоднородном поле (вблизи острия) в изотермических условиях. Визуализация ЭК-течений осуществлялась методом фотографирования треков светорассеивающих частиц. Напряжение на электродах изменялось с шагом 20 В . Получена зависимость пороговой средней напряженности поля в конденсаторе от проводимости жидкости в пределах $7 \times 10^{-14} \leq \sigma_0 \leq 2 \times 10^{-11} \text{ См/см}$. Зависимость

близка к линейной. Соответствующий коэффициент инжекции вычислен согласно [27] и равен 8.31×10^{-9} Кл/В · м².

Сравнение полученных численных результатов с результатами эксперимента [26] на рис. 4 показывает, что величина коэффициента диффузии при униполярной инжекции для раствора молекулярного йода в трансформаторном масле приближенно равна 7×10^{-7} м²/с. Порядок величины коэффициента диффузии совпадает с оценками работ [19, 20].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках модели слабопроводящей жидкости с униполярной инжекционной проводимостью, в качестве которой рассматривался раствор молекулярного йода в трансформаторном масле, даны оценки величины коэффициента диффузии инжектированных ионов. Оценки получены на основе сравнения численных результатов с экспериментальными данными [26]. Значение коэффициента диффузии 7×10^{-7} м²/с соответствует довольно заметному диффузионному току, которым нельзя пренебречь. Такая величина интенсивности диффузии ионов влияет на порог возникновения ЭК-течения, его параметры и структуру полей течения и объемной плотности зарядов. Важно отметить, что интенсивность диффузии оценивалась вблизи порога возникновения ЭК-течения. С ростом напряженности поля величина коэффициента диффузии может изменяться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарунин Е.Л., Ямшинина Ю.А. Расчет электрогидродинамического течения в сильно неоднородных электрических полях // Магнитная гидродинамика. 1990. № 2. С. 142–144.
2. Тарунин Е.Л., Ямшинина Ю.А. Ветвление стационарных решений системы уравнений электрогидродинамики при униполярной инжекции // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 23–29.
3. Жакин А.И., Тарапов И.Е. Неустойчивость и течение слабопроводящей жидкости при окислительно-восстановительных реакциях на электродах и рекомбинации // Изв. АН СССР. 1981. № 4. С. 20–26.
4. Ильин В.А., Мордвинов А.Н., Петров Д.А. Электроконвекция слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции заряда в постоянном электрическом поле // ЖЭТФ. 2015. Т. 147. Вып. 1. С. 181–188.
5. Ильин В.А., Чигорина Т.И. Стационарные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции заряда в постоянном электрическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 5. С. 3–13.
6. Ильин В.А. Электроконвекция слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 1. С. 64–73.
7. Смородин Б.Л., Тараут А.В. Параметрическая конвекция слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 3–11.
8. Ильин В.А. Электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе при униполярной инжекции заряда // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 1. С. 5–9.
9. Мордвинов А.Н., Смородин Б.Л. Электроконвекция при инжекции с катода и нагрева сверху // ЖЭТФ. 2012. Т. 141. Вып. 5. С. 997–1005.
10. Ильин В.А., Александрова В.Н. Волновые режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции заряда в постоянном электрическом поле // ЖЭТФ. 2020. Т. 157. Вып. 2. С. 349–356.
11. Perez A. T., Castellanos A. Role of charge diffusion in finite amplitude electro-convection // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. № 10. P. 5844–5855.
12. Смородин Б.Л., Тараут А.В. Влияние модуляции электрического поля на распространение заряда в полярной слабопроводящей жидкости // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 3–12.
13. Стишков Ю.К., Чирков В.А. Формирование электрогидродинамических течений в сильнонеоднородных электрических полях при двух механизмах зарядообразования // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 1. С. 3–13.
14. Тараут А.В., Смородин Б.Л. Электроконвекция при наличии автономной униполярной инжекции и остаточной проводимости // ЖЭТФ. 2012. Т. 142. Вып. 2. С. 403–412.
15. Ситников А.А., Стишков Ю.К. Трехионная модель ЭГД-течений в системе электродов “провод над плоскостью” // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 2. С. 3–10.
16. Панкратьева И.Л., Полянский В.А. Моделирование электрогидродинамических течений в слабопроводящих жидкостях // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 4. С. 36–44.
17. Zhang M., Martinelli F., Wu J., Schmid P.J., Quadrio M. Modal and non-modal stability analysis of electrohydrodynamic flow with and without cross-flow // J. Fluid. Mech. 2015. V. 770. P. 319–349.
18. Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. Физические основы электрогидродинамики. М.: Наука, 1979. 320 с.

19. *Остроумов Г.А., Петриченко Н.А.* Изолирующие жидкости как ионные проводники электричества. // ЭОМ. 1974. № 1. С. 40–44.
20. *Рычков Ю.М.* Контактные явления в жидких слабопроводящих средах // ИФЖ. 1997. № 6. С. 1007–1013.
21. *Стишков Ю.К.* Наблюдение изотермической конвекции в электрическом поле плоского конденсатора // ЭОМ. 1972. № 1. С. 61–62.
22. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
23. *Lacroix J.C., Atten P., Hopfinger E.J.* Electro-convection in a dielectric liquid layer subjected to unipolar injection // J. Fluid Mech. 1975. V. 69. P. 539–563.
24. *Ermolaev I.A., Zhanov A.I.* Investigation of the electroconvective flow of a weakly conducting liquid with unipolar injection conductivity by the finite element method // JEPT. 2002. V. 75. № 5. P. 1125–1129.
25. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
26. *Федоненко А.И., Жакин А.И.* Экспериментальные исследования электроконвективного движения в трансформаторном масле // Магнитная гидродинамика. 1982. № 3. С. 74–78.
27. *Ермолаев И.А., Жбанов А.И.* Численное исследование униполярной инжекции при электроконвективном движении в плоском слое трансформаторного масла // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 3–7.

УДК 532.516

ДИНАМИКА ВЯЗКОГО ГАЗА В ЗАКРЫТОЙ УЗКОЙ ТРУБЕ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ПОРШНЯ

© 2023 г. П. П. Осипов^{a,*}, Р. Р. Насыров^{a,**}

^aФедеральный исследовательский центр “Казанский научный центр” РАН,
Институт механики и машиностроения, Казань, Россия

*E-mail: petro300@rambler.ru

**E-mail: nasyrov.ravil@bk.ru

Поступила в редакцию 05.07.2023 г.

После доработки 14.08.2023 г.

Принята к публикации 01.09.2023 г.

В результате решения линеаризованных двумерных уравнений Навье–Стокса в цилиндрической системе координат получено периодическое решение задачи о динамике газа в закрытой трубе при колебаниях поршня по гармоническому закону. Представлены зависимости резонансных частот от диаметра трубы. Исследован вопрос о максимальной амплитуде продольной скорости колебаний вязкого политропного газа на первой резонансной частоте. Полученные зависимости сравнены с известными результатами для плоского резонатора. Показано, что максимальная продольная скорость примерно в два раза больше в плоском резонаторе, чем в трубе с диаметром, равным ширине плоского резонатора.

Ключевые слова: закрытая труба-резонатор, резонансная частота, колебания вязкого газа

DOI: 10.31857/S1024708423600458, EDN: CQWRSY

При исследовании колебаний газа в резонаторах зачастую используется предположение о плоском характере волн в исследуемой области. В работе [1] на основе полных уравнений Навье–Стокса проведено численное моделирование волн в плоском закрытом резонаторе, имеющем прямоугольную форму.

В [2] на основе редуцированных уравнений Навье–Стокса получено аналитическое решение задачи колебаний газа в узкой плоской прямоугольной осциллирующей каверне. На основе полученного решения исследован вопрос о зависимости первой резонансной частоты от ширины канала, а также изучены акустические течения газа в каверне, создаваемые на резонансной частоте стоячей волной.

В [3] представлено численное решение одномерной задачи распространения периодической ударной волны в резонаторе на основе подхода Лагранжа. Результаты расчетов показали хорошее согласование как с физическими экспериментами [4], так и с результатами численного моделирования динамики газа в двумерном резонаторе [5].

В [6] получено аналитическое решение задачи колебаний динамики вязкого политропного газа в закрытом плоском резонаторе. На основе аналитического решения построена резонансная кривая давления. Установлено хорошее согласование полученных результатов на резонансных и субрезонансных частотах с результатами подхода Лагранжа [3].

В [7] во втором приближении получено аналитическое решение задачи о колебаниях газа в плоском закрытом резонаторе с вибрирующей стенкой. Построены графики средних массовых скоростей, которые хорошо согласуются как с численным решением задачи с осциллирующей стенкой [1], так и с аналитическим решением колеблющегося канала [2].

В [8, 9] численно изучены колебания воздуха в закрытом резонаторе. В ходе исследования использовались полные уравнения Навье–Стокса с уравнением сохранения энергии, теплопроводности и состояния.

Во всех вышеизложенных работах акустические волны рассматривались в закрытом плоском резонаторе, однако на практике резонаторы представляют собой трубу. Поэтому целью настоя-

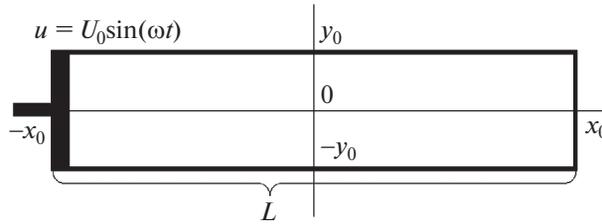


Рис. 1. Труба или плоский резонатор.

шей работы является получение аналитического решения задачи о колебаниях вязкого газа в трубе-резонаторе.

1. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ГАЗА В ТРУБЕ-РЕЗОНАТОРЕ

Рассмотрим резонатор $-x_0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq y_0$ с жесткими стенками (рис. 1). На левой границе возбуждается продольная скорость так, что

$$\frac{2}{y_0} \int_0^{y_0} y u(-x_0, y, t) dy = U_0 \sin \omega t.$$

Линеаризованная система, описывающая осесимметричные колебания вязкого сжимаемого газа, имеет вид [7]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial y v}{\partial y} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Будем искать периодическое решение системы (1.1) с граничными условиями: на левой границе – поршень, на правой – отсутствие протекания, на стенках – условия прилипания.

$$\begin{aligned} \frac{2}{y_0} \int_0^{y_0} y u(-x_0, y, t) dy &= U_0 e^{i\omega t}; \\ u(x_0, y, t) &= 0; \\ u(x, y_0, t) &= 0, \quad v(x, y_0, t) = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Заметим, что чем больше отношение x_0/y_0 , тем более точно линеаризованная система (1.1) описывает колебания вязкого сжимаемого газа в резонаторе. Периодическое решение задачи (1.1)–(1.2) ищем в виде стоячей волны

$$\begin{aligned} p &= \tilde{p}(x, y) e^{i\omega t}, \\ u &= \tilde{u}(x, y) e^{i\omega t}, \\ v &= \tilde{v}(x, y) e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Подстановка (1.3) в (1.1)–(1.2) дает

$$\frac{i\omega}{\rho_0 c_0^2} \tilde{p} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial y \tilde{v}}{\partial y} = 0, \tag{1.4a}$$

$$\tilde{u} + \frac{1}{i\omega \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\mu}{i\omega \rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right). \tag{1.4b}$$

Граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{2}{J_0^2} \int_0^{y_0} y \tilde{u}(-x_0, y) dy &= U_0; \\ \tilde{u}(x_0, y) &= 0; \\ \tilde{u}(x, y_0) &= 0, \quad \tilde{v}(x, y_0) = 0. \end{aligned}$$

1.1. Продольная скорость в произвольном сечении

Вводя амплитуду скорости $\tilde{u}_{x_0}(x) = -\frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$, запишем для нее уравнение

$$\tilde{u} - \frac{\mu}{i\omega\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) = \tilde{u}_{x_0}(x).$$

Его общее решение есть $\tilde{u} = \tilde{u}_{x_0}(x) + A(x)J_0(\beta^*y)$, где введена функция Бесселя нулевого рода, удовлетворяющая уравнению $z^2 J_0''(z) + zJ_0'(z) + z^2 J_0(z) = 0$, где $z = \beta^*y$, $\beta = \frac{1+i}{\delta}$, $\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho_0}}$, а звездочка означает комплексно-сопряженную величину. С учетом известного соотношения $J_0'(z) = -J_1(z)$ можно записать на оси

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right|_{y=0} = A(x)\beta^* J_0'(\beta^*y) \Big|_{y=0} = -A(x)\beta^* J_1(\beta^*y) \Big|_{y=0} = 0.$$

Из условий прилипания на стенке $y = y_0$:

$$\tilde{u}_{x_0}(x) + A(x)J_0(\beta^*y_0) = 0,$$

получим $A(x) = -\frac{\tilde{u}_{x_0}(x)}{J_0(\beta^*y_0)}$, откуда

$$\tilde{u} = \tilde{u}_{x_0}(x) \left(1 - \frac{J_0(\beta^*y)}{J_0(\beta^*y_0)} \right).$$

Вводя осредненную по сечению трубы продольную скорость

$$U(x) = \frac{2}{J_0^2} \int_0^{y_0} y \tilde{u}(x, y) dy,$$

с учетом известного соотношения $\int_0^z z J_0(z) dz = z J_1(z)$, запишем

$$\int_0^{y_0} y \frac{J_0(\beta^*y)}{J_0(\beta^*y_0)} dy = \frac{1}{\beta^{*2} J_0(\beta^*y_0)} \int_0^{\beta^*y_0} z J_0(z) dz = \frac{y_0 J_1(\beta^*y_0)}{\beta^* J_0(\beta^*y_0)},$$

откуда следует $U(x) = (1-f) \tilde{u}_{x_0}(x)$, где $f = \frac{2}{\beta^* y_0} \frac{J_1(\beta^* y_0)}{J_0(\beta^* y_0)}$. Таким образом, запишем амплитуду колебаний продольной скорости

$$\tilde{u} = \frac{U(x)}{1-f} \left(1 - \frac{J_0(\beta^*y)}{J_0(\beta^*y_0)} \right).$$

1.2. Касательное напряжение на стенке

Амплитуда касательного напряжения имеет вид:

$$\tilde{\sigma} = \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \Big|_{y_0} = \mu \frac{U(x)}{1-f} \beta^* \frac{J_1(\beta^* y_0)}{J_0(\beta^* y_0)} = \mu \frac{U(x)}{1-f} \frac{\beta^{*2} y_0}{2} f = -\mu \frac{U(x)}{1-f} i \frac{y_0}{\delta^2} f.$$

То есть, касательное напряжение пропорционально средней по сечению x продольной скорости.

1.3. Усредненные по сечению уравнения неразрывности и импульса

Запишем осредненные по сечению уравнения (1.4)

$$\frac{i\omega}{\rho_0 c_0^2} \tilde{p} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

$$U(x) + \frac{1}{i\omega \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{2}{i\omega \rho_0 y_0} \tilde{\sigma} = -\frac{2}{i\omega \rho_0 y_0} \mu \frac{U(x)}{1-f} i \frac{y_0}{\delta^2} f = -\frac{U(x)}{1-f} f,$$

окончательно:

$$\frac{i\omega}{\rho_0 c_0^2} \tilde{p} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (1.5a)$$

$$\frac{U(x)}{1-f} + \frac{1}{i\omega \rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0. \quad (1.5b)$$

1.4. Продольная скорость

Дифференцируя уравнение (1.5a) по x и исключая градиент давления с помощью (1.5b), получим уравнение для средней продольной скорости

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^2 U = 0,$$

где $\alpha = \frac{i\omega/c_0}{\sqrt{1-f}}$.

Запишем общее решение этого уравнения $U = A \operatorname{ch} \alpha x + B \operatorname{sh} \alpha x$. Граничные условия дают

$$U_{-x_0} = A \operatorname{ch} \alpha x_0 - B \operatorname{sh} \alpha x_0 = U_0,$$

$$U_{x_0} = A \operatorname{ch} \alpha x_0 + B \operatorname{sh} \alpha x_0 = 0,$$

откуда $A = \frac{U_0}{2 \operatorname{ch} \alpha x_0}$, $B = -\frac{U_0}{2 \operatorname{sh} \alpha x_0}$ и $U(x) = \frac{U_0}{2} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha x_0} - \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha x_0} \right)$.

Поэтому амплитуда продольной скорости равна

$$\frac{\tilde{u}}{U_0} = \frac{0.5}{1-f} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha x_0} - \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha x_0} \right) \left(1 - \frac{J_0(\beta^* y)}{J_0(\beta^* y_0)} \right).$$

1.5. Давление

Из (1.5a) получаем

$$\tilde{p} = -\frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\rho_0 c_0 U_0}{2} \frac{1}{\sqrt{1-f}} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha x_0} - \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha x_0} \right),$$

откуда

$$\frac{\tilde{p}}{\rho_0 c_0 U_0} = -\frac{0.5}{\sqrt{1-f}} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha x_0} - \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{sh} \alpha x_0} \right).$$

1.6. Поперечная скорость

Уравнение для поперечной скорости найдем, умножив (1.4а) на y и проинтегрировав полученное уравнение по y . Выражая поперечную скорость, получим

$$\frac{\tilde{v}}{U_0} = -\frac{i\omega}{\rho_0 c_0^2} \frac{y}{2U_0} \tilde{p} - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y y \frac{\tilde{u}}{U_0} dy.$$

Вычисляя $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y y \frac{\tilde{u}}{U_0} dy = \frac{0.5\alpha}{1-f} \left(\frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \int_0^y y \left(1 - \frac{J_0(\beta^* y)}{J_0(\beta^* y_0)} \right) dy$, с учетом известного соотношения

$$\int_0^y y \frac{J_0(\beta^* y)}{J_0(\beta^* y_0)} dy = \frac{1}{\beta^{*2} J_0(\beta^* y_0)} \int_0^{\beta^* y} z J_0(z) dz = \frac{y J_1(\beta^* y)}{\beta^* J_0(\beta^* y_0)}$$

запишем, опуская громоздкие вычисления

$$\frac{\tilde{v}}{U_0} = y_0 \alpha \frac{0.25f}{1-f} \left(\frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \left(\frac{J_1(\beta^* y)}{J_1(\beta^* y_0)} - \frac{y}{y_0} \right).$$

1.7. Резонатор-труба

Переходя к мнимым частям, получим формулы

$$\begin{aligned} \frac{u(x, y, t)}{U_0} &= \text{Im} \left(\frac{0.5}{1-f} \left(\frac{\text{ch } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{sh } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \left(1 - \frac{J_0(\beta^* y)}{J_0(\beta^* y_0)} \right) e^{i\omega t} \right), \\ \frac{v(x, y, t)}{U_0} &= \text{Im} \left(\alpha y_0 \frac{0.25f}{1-f} \left(\frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \left(\frac{J_1(\beta^* y)}{J_1(\beta^* y_0)} - \frac{y}{y_0} \right) e^{i\omega t} \right), \\ \frac{p(x, t) - p_0}{\rho_0 c_0 U_0} &= -\text{Im} \left(\frac{0.5}{\sqrt{1-f}} \left(\frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) e^{i\omega t} \right), \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{i\omega/c_0}{\sqrt{1-f}}$, $f = \frac{2}{\beta^* y_0} \frac{J_1(\beta^* y_0)}{J_0(\beta^* y_0)}$, $\beta = \frac{i+1}{\delta}$, $\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho_0}}$.

1.8. Плоский резонатор

Для сравнения приведем аналогичные формулы, полученные в работе [3] для плоского резонатора

$$\begin{aligned} \frac{u(x, y, t)}{U_0} &= \text{Im} \left(\frac{0.5}{1-f} \left(\frac{\text{ch } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{sh } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \left(1 - \frac{\text{ch } \beta y}{\text{ch } \beta y_0} \right) e^{i\omega t} \right), \\ \frac{v(x, y, t)}{U_0} &= \text{Im} \left(\alpha y_0 \frac{0.5f}{1-f} \left(\frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) \left(\frac{\text{sh } \beta y}{\text{sh } \beta y_0} - \frac{y}{y_0} \right) e^{i\omega t} \right), \\ \frac{p(x, t) - p_0}{\rho_0 c_0 U_0} &= -\text{Im} \left(\frac{0.5}{\sqrt{1-f}} \left(\frac{\text{sh } \alpha x}{\text{ch } \alpha x_0} - \frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha x_0} \right) e^{i\omega t} \right), \end{aligned}$$

где $\alpha = \frac{i\omega/c_0}{\sqrt{1-f}}$, $f = \frac{\text{th } \beta y_0}{\beta y_0}$, $\beta = \frac{i+1}{\delta}$, $\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho_0}}$.

2. СРАВНЕНИЕ ПЛОСКОГО И ОСЕСИММЕТРИЧНОГО РЕШЕНИЯ

Далее будем сравнивать резонатор-трубу и плоский резонатор. При этом диаметр первого будет равен ширине плоского резонатора. Максимум амплитуды продольной скорости достигается

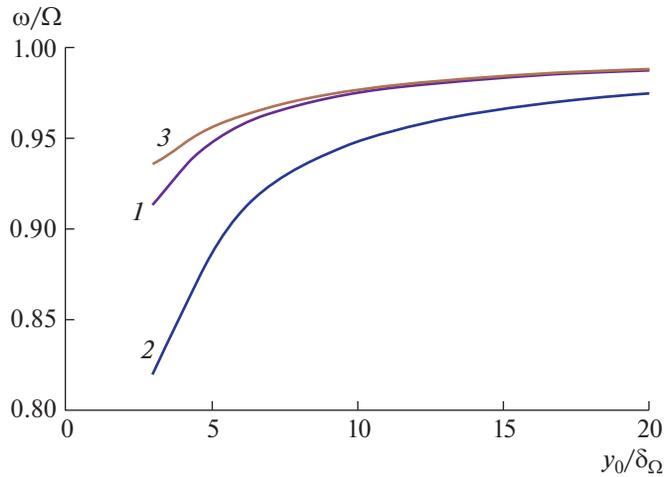


Рис. 2. Резонансная частота: 1 — плоский резонатор, 2 — труба-резонатор диаметром, равным ширине плоского резонатора, 3 — плоская каверна [2].

на оси $y = 0$ в центре резонатора $x = 0$. Поэтому будем искать максимум модуля продольной скорости газа по частоте ω , т.е. величины

$$\frac{|\tilde{u}(0,0)|}{U_0} = \left| \frac{0.5}{1-f} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha x_0} \left(1 - \frac{1}{J_0(\beta^* y_0)} \right) \right|.$$

При этом надо учесть, что величины δ , β^* , f , α зависят от частоты ω . В результате определяются оптимальные значения частоты ω и максимальная продольная скорость U_{\max} .

Для поиска максимума скорости будем задавать длину резонатора $L = 2x_0$ и его относительный радиус y_0/δ_Ω . Толщина акустического пограничного слоя $\delta_\Omega = \sqrt{\frac{2\nu}{\Omega}}$ берется для фундаментальной частоты $\Omega = \pi c_0/L$. Для воздуха эта толщина может быть выражена в системе СГС через длину резонатора $\delta_\Omega = \sqrt{\frac{2\nu}{\pi c_0}} \sqrt{L} = 0.00165\sqrt{L}$.

Для плоского резонатора будем искать максимум по частоте ω выражения [7]

$$\frac{|\tilde{u}(0,0)|}{U_0} = \left| \frac{0.5}{1-f} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha x_0} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \beta y_0} \right) \right|.$$

На рис. 2 приведены графики зависимости резонансной частоты от поперечных размеров плоского [7], осесимметричного резонатора и плоской каверны [2]. Чем больше эти размеры, тем ближе резонансная частота к фундаментальной. Чем меньше поперечные размеры резонаторов, тем больше сказывается вязкость газа и тем более сдвигается резонанс от фундаментальной частоты в область низких частот. Для осесимметричного резонатора резонансные частоты меньше частот, чем для плоского.

В случае колеблющейся каверны, рассмотренной в работе [2], резонансная частота определяется из выражения $\frac{|\tilde{u}(0,0)|}{2U_0} = \left| \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha x_0} \right) \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \beta y_0} \right) \right|$, и ее зависимость от ширины каверны представлена на рис. 2.

На рис. 3 представлены зависимости максимальной амплитуды продольной скорости газа U_{\max}/U_0 от поперечных размеров плоского и осесимметричного резонаторов на резонансной частоте.

Графики рис. 3 показывают, что в диапазоне $5 \leq y_0/\delta \leq 20$ скорости U_{\max}/U_0 пропорциональны относительным поперечным размерам резонаторов y_0/δ_Ω . Эти значения приближенно могут быть оценены по следующим формулам: для трубы-резонатора $\frac{U_{\max}}{U_0} \approx 0.64 \frac{y_0}{\delta_\Omega}$; для плоского ре-

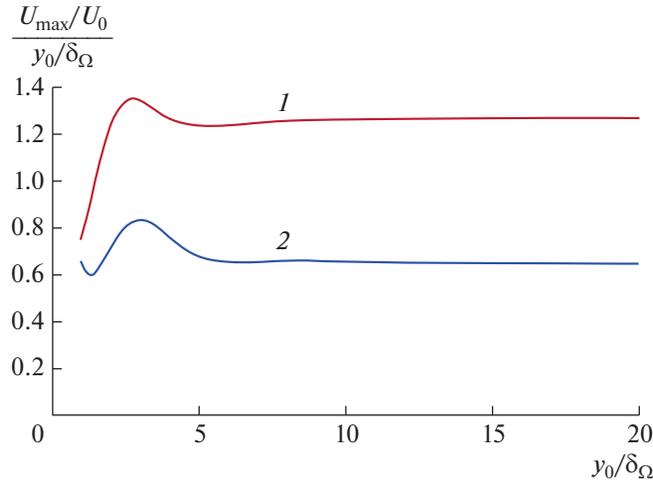


Рис. 3. Максимальная продольная скорость: 1 – плоский резонатор, 2 – труба-резонатор диаметром, равным ширине плоского резонатора.

зонатора $\frac{U_{\max}}{U_0} \approx 1.26 \frac{y_0}{\delta_\Omega}$. Максимальная амплитуда продольной скорости газа в плоском резонаторе шириной $2y_0$ примерно в два раза больше, чем в трубе диаметром $2y_0$.

Приведенная формула позволяет оценить трудно измеряемую максимальную продольную скорость газа. Так, для трубы-резонатора длиной $L = 106$ см с внутренним диаметром $2y_0 = 3.65$ см изучаемой в работе [10], при угловой частоте $\omega \approx 1009$ рад/с, амплитуде смещения поршня $X_0 = 0.035$ см, амплитуде скорости поршня $U_0 = 35.3$ см/с толщина акустического пограничного слоя равна $\delta_\Omega = 0.00165\sqrt{L} \approx 0.0165$ см = 165 мкм, а максимальная продольная скорость газа равна $\frac{U_{\max}}{U_0} \approx 0.64 \times \frac{1.8}{0.0165} \approx 69.8$.

В качестве другого примера рассмотрим плоский резонатор длиной $L = 0.8825$ см, шириной $2y_0 = 0.0316$ см [1]. Толщина акустического пограничного слоя равна $\delta_\Omega = 0.00165 \times \sqrt{0.8825} \approx 0.00155$ см = 15.5 мкм. Максимальная амплитуда продольной скорости газа в этом случае равна $\frac{U_{\max}}{U_0} \approx 1.26 \times \frac{0.0158}{0.00155} \approx 12.84$.

На рис. 4 изображены резонансные кривые давления в осесимметричном резонаторе, посчитанные аналитически и численно, в диапазоне частот $\omega/\Omega \in [0.94, 1.06]$.

Графики полностью совпадают вне резонанса в областях $[0.94, 0.98]$ и $[1.02, 1.06]$, хорошо согласуются около резонанса $[0.98, 0.99]$ и $[1.01, 1.02]$. В резонансе $\omega/\Omega = 1$ значения безразмерной амплитуды давления $\frac{p_{\max} - p_{\min}}{2p_0}$ максимальны и примерно равны 0.03.

На рис. 5 изображены графики максимальной амплитуды продольной скорости газа для частот, близких к фундаментальной частоте $\Omega = \pi c_0/L$. На графиках а и в представлены амплитудно-частотные характеристики для цилиндрического резонатора, на б и г – для плоского прямоугольного резонатора. Из графиков видно, что максимальные амплитуды продольной скорости газа для резонаторов различной ширины/радиуса значительно различаются вблизи фундаментальной частоты и сближаются по мере отклонения от нее. Максимальные амплитуды продольной скорости газа достигаются вблизи фундаментальной частоты попарно для осесимметричного и плоского случаев для резонаторов одинаковой ширины (или радиуса для осесимметричного случая). Графики имеют схожий колоколообразный характер. Из графиков видно, что максимальная скорость газа в плоском случае в 2 раза превышает скорость в осесимметричном случае вблизи фундаментальной частоты и совпадает вне фундаментальной резонансной области. На графиках пики сплошной линии находятся левее пиков пунктирной, значит резонансная частота для осесимметричного случая меньше резонансной частоты для плоского случая. Видно,

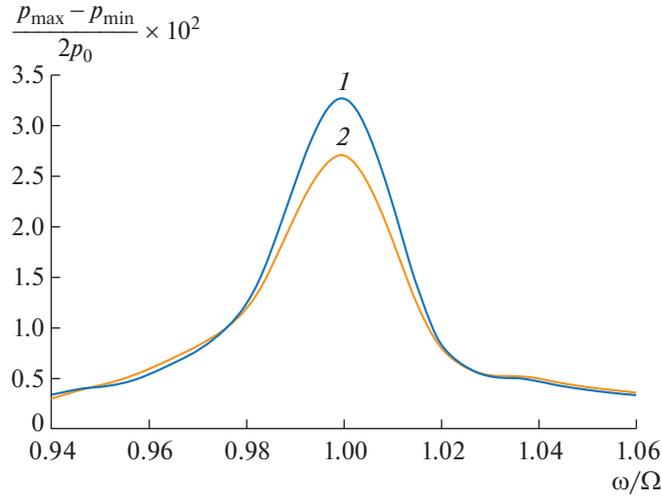


Рис. 4. Резонансная кривая давления в осесимметричном резонаторе. 1 – аналитическое решение, 2 – численное моделирование.

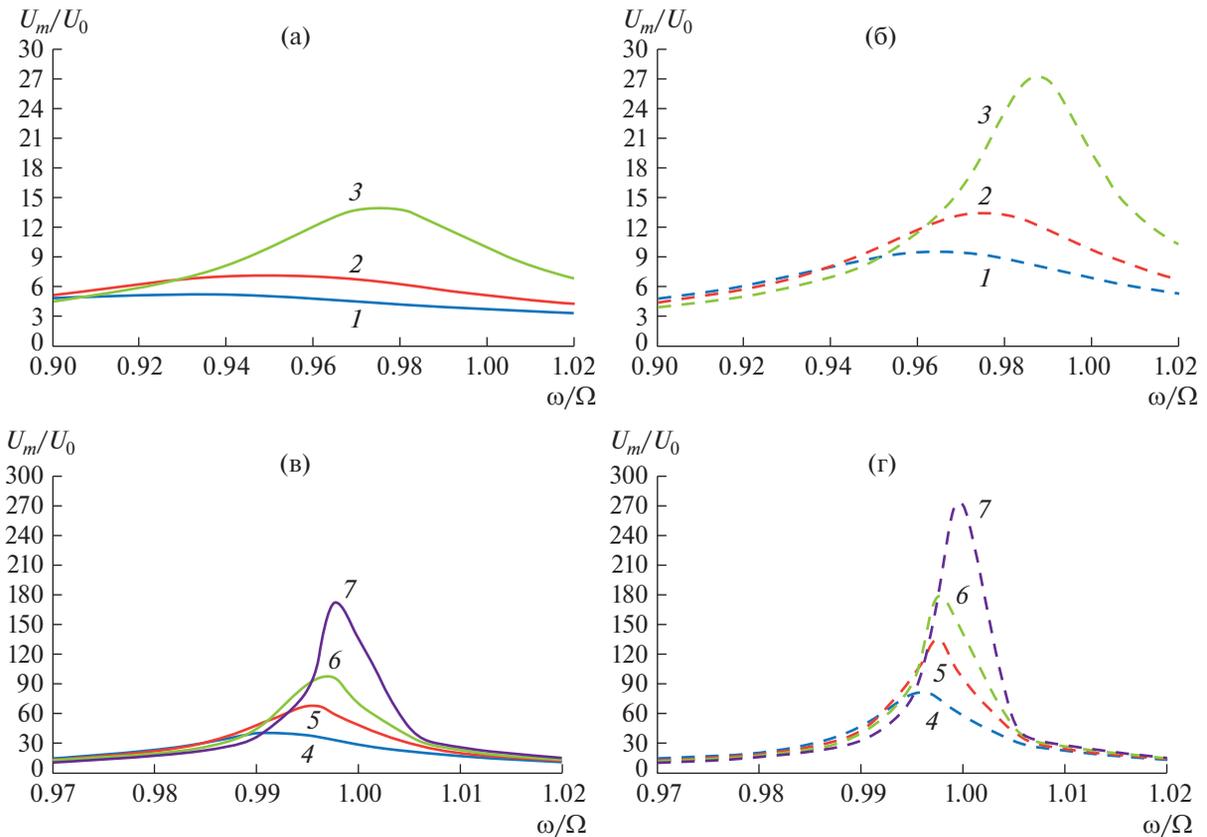


Рис. 5. Максимальные амплитуды продольной скорости газа вблизи фундаментальной частоты. а и в – цилиндрический резонатор, б и г – плоский двумерный резонатор. 1 – $y_0/\delta = 7$, 2 – $y_0/\delta = 10$, 3 – $y_0/\delta = 20$, 4 – $y_0/\delta = 60$, 5 – $y_0/\delta = 100$, 6 – $y_0/\delta = 150$, 7 – $y_0/\delta = 300$.

что для узких резонаторов максимальная скорость газа достигается при частотах меньше фундаментальной. С ростом ширины (радиуса) резонатора максимальная скорость достигается при частотах, близких к фундаментальной частоте.

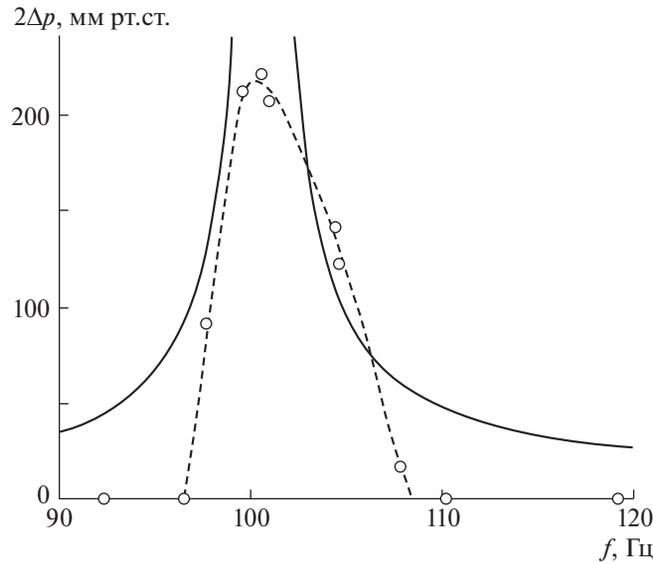


Рис. 6. Резонансная кривая максимального размаха давления на закрытом конце трубы-резонатора. Пунктиром – эксперимент [4], сплошной – аналитическое решение.

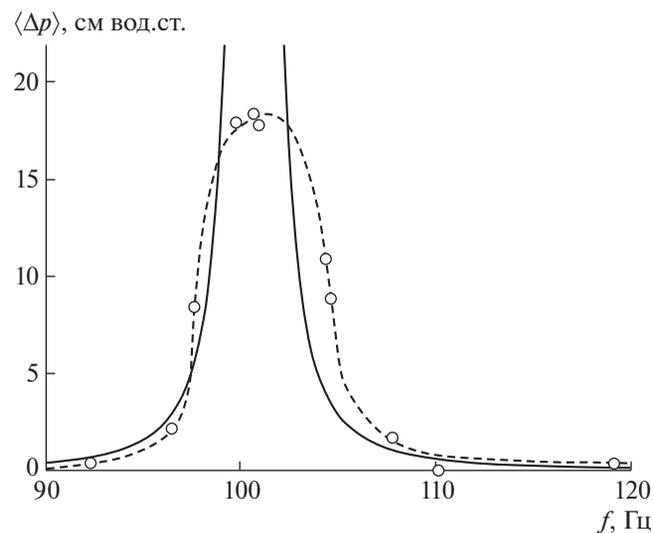


Рис. 7. Резонансная кривая среднего возмущения давления на закрытом конце трубы-резонатора. Пунктиром – эксперимент [4], сплошной – аналитическое решение.

В [4] изучены колебания газа в трубе-резонаторе длиной $L = 170.18$ см и диаметром $d = 4.826$ см. Толщина пограничного слоя равна $\delta_\Omega = \sqrt{\frac{2\nu}{\pi c_0}} \sqrt{L} = 0.00165 \times \sqrt{1.7018} = 0.002145$ см, $d/\delta = 0.04826/0.002145 = 22.5$, т.е. $d = 22.5\delta$, что говорит о том, что эта труба достаточно узкая для применения предложенного аналитического решения.

На рис. 6 изображены резонансные кривые максимального размаха давления $\Delta p = p - p_0$ на закрытом конце трубы-резонатора, посчитанные аналитически и экспериментально. В работе [4] изучались ударные волны, которые возникают вблизи резонансной частоты, поэтому вне резонансных частот (где ударные волны не возникают) размах давления принимался равным нулю. Графики удовлетворительно согласуются на субрезонансных частотах.

На рис. 7 изображены резонансные кривые среднего возмущения давления на закрытом конце трубы-резонатора, посчитанные аналитически и экспериментально [4]. Графики хорошо согласуются вне резонанса и удовлетворительно согласуются на субрезонансных частотах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено приближенное решение задачи о колебаниях газа в закрытой трубе-резонаторе в замкнутом виде. На основе этого решения изучены поля скоростей и давления на резонансной и субрезонансных частотах для труб различного диаметра. Построены зависимости резонансных частот от диаметра трубы-резонатора. Установлено, что чем больше диаметр резонатора, тем ближе резонансная частота к фундаментальной. Чем меньше поперечные размеры резонаторов, тем больше сказывается вязкость газа и тем более сдвигается резонанс от фундаментальной частоты в область низких частот. Показано, что для осесимметричного резонатора резонансные частоты меньше частот, чем для плоского.

Найдены зависимости максимальной продольной скорости колебаний вязкого политропного газа от диаметра резонатора. Полученные зависимости сравнены с известными результатами для плоского резонатора. Показано, что средняя продольная скорость плоского резонатора примерно в два раза больше, чем скорость в трубе-резонаторе с диаметром, равным ширине плоского резонатора.

Получены резонансные кривые давления в осесимметричном резонаторе, посчитанные аналитически и численно вблизи резонанса. Установлены хорошее согласование графиков вблизи резонанса и удовлетворительное согласование амплитуды безразмерного давления в резонансе. Заметим, что, помимо практической пользы для прикладных оценок, аналитическое решение необходимо для учета вторичных течений.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-11-20070, <https://rscf.ru/project/20-11-20070/>

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aktas M.K., Farouk B.* Numerical simulation of acoustic streaming generated by finite-amplitude resonant oscillations in an enclosure // Journal of the Acoustical Society of America. 2004. V. 116. № 5. P. 2822–2831. <https://doi.org/10.1121/1.1795332>
2. *Hamilton M.F., Ilinskii Yu.A., Zabolotskaya E.A.* Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width // Journal of the Acoustical Society of America. 2003. V. 113. № 1. P. 153–160. <https://doi.org/10.1121/1.1528928>
3. *Gubaidullin D.A., Osipov P.P., Nasyrov R.R., Almakaev I.M.* Numerical simulation of the shock wave in the closed resonator using 1D Lagrange's approach // Journal of Physics: Conference Series. 2018. V. 1058. № 012064. P. 1–4. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1058/1/012064>
4. *Saenger R.A., Hudson G.E.* Periodic shock waves in resonating gas columns // Journal of the Acoustical Society of America. 1960. V. 32. P. 961–970. <https://doi.org/10.1121/1.1908343>
5. *Chester W.* Resonant oscillations in closed tubes // Journal of Fluid Mechanics. 1964. V. 18. P. 44–64. <https://doi.org/10.1017/S0022112064000040>
6. *Osipov P.P., Nasyrov R.R.* Resonance curve in rectangular closed channel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. № 7. P. 1283–1288. <https://doi.org/10.1134/S1995080220070355>
7. *Губайдуллин Д.А., Осипов П.П., Насыров Р.Р.* Акустическое течение, индуцированное колебанием стенки плоского прямоугольного резонатора // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 1. С. 3–13. <https://doi.org/10.31857/S0568528122010054>
8. *Aganin A.A., Ilgamov M.A., Smirnova E.T.* Development of longitudinal gas oscillations in a closed tube // Journal of Sound and Vibration. 1996. V. 195. P. 359–374. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0431>
9. *Тукмаков А.Л.* Численное моделирование колебаний монодисперсной газовзвеси в нелинейном волновом поле // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 2. С. 36–43. <https://doi.org/10.1134/S0021894411020040>
10. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А.* Экспериментальное исследование коагуляции и осаждения аэрозоля в закрытой трубе в безударно-волновом режиме // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 4. С. 603–605. <https://doi.org/10.1134/S0018151X12040098>

УДК 532.517

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК БЛИЖНЕГО СЛЕДА ОТ ПАРЫ ЦИЛИНДРОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ БОК О БОК, НЕ СЛИШКОМ БЛИЗКО

© 2023 г. Г. В. Гембаржевский^{a,*}, К. Ю. Осипенко^{a,**}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: gvgeb@ipmnet.ru

**E-mail: osipenko@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 21.04.2023 г.

После доработки 20.06.2023 г.

Принята к публикации 25.06.2023 г.

На основе модели Ландау–Стюарта и теории возмущений построена одномерная модель ближнего следа в вязкой несжимаемой жидкости от пары не слишком тесно расположенных цилиндров. Этот комплексный след рассматривается как две взаимодействующие парциальные дорожки Кармана – два связанных осциллятора Ландау–Стюарта, при этом нелинейный характер взаимодействия дорожек учитывается. Получены: наблюдаемый спектр глобальных мод такого следа и согласие между расчетными и экспериментальными собственными частотами осцилляций по модам.

Ключевые слова: модель Ландау–Стюарта, взаимодействие дорожек Кармана, перемежаемость глобальных мод, собственные частоты

DOI: 10.31857/S1024708423600240, **EDN:** UZJAOY

Для физического понимания явлений и эффективного управления объектами служат прозрачные – физические модели. Так, известно, что свойства ближних следовых течений в значительной степени определяются параметрами их крупномасштабной когерентной структуры – дорожки Кармана (К), наличествующей в следе [1]. Соответственно, с целью управления свойствами следовых течений, как-то: силами, приложенными к телам, коэффициентами переноса в течениях, успешно применяют различные методы модификации дорожек К в следе. В частности, используют вздув/отсос газа с поверхности тел или проницаемые вставки, локализованный электрический разряд, а при моделировании следа – дорожки К применяют простейшую – одномерную модель Ландау–Стюарта (Л–С) [2–4]. Уместно отметить, что задача обтекания группы близко расположенных цилиндров представляет не меньший практический интерес, чем случай одиночного цилиндра. Как пример типичных актуальных задач, отметим: расчет ветровой нагрузки массива высотных зданий/сооружений, или тепло/массо-обмена в химических/ядерных реакторах-теплообменниках, задачу стабилизации горения топлив. В настоящее время обтекание группы цилиндров принято рассчитывать с помощью численных методов как краевую задачу для уравнений Навье–Стокса или их модификаций. Однако трудоемкость такого расчета резко возрастает с ростом числа Рейнольдса течения. Простая физическая модель обтекания группы цилиндров была бы здесь полезна, по крайней мере, на первоначальном этапе решения оптимизационных задач. Соответственно, предпринимались попытки обобщить модель Л–С хотя бы на случай следа от пары цилиндров, но адекватно воспроизвести наблюдаемые режимы течения не удалось в рамках обобщений с линейным представлением взаимодействия дорожек К от цилиндров [5]. В статье ставится задача построения модели ближнего следа от двух цилиндров, пригодной для предсказания крупномасштабной структуры следа и, в перспективе, для управления перестройкой или, напротив, стабилизации определенной (оптимальной) структуры такого следа.

1. МОДЕЛЬ СЛЕДА С НЕЛИНЕЙНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ ДОРОЖЕК КАРМАНА

Для построения модели следа от пары цилиндров, расположенных в плоскости перпендикулярной набегающему потоку вязкого несжимаемого флюида, исходим из модели Ландау–Стюарта (Л–С) следа от одиночного цилиндра. Она обоснована на решении краевой задачи для уравнений Навье–Стокса [2, 3] в случае ламинарного двумерного течения при числе Рейнольдса $R < 180$. Здесь число Рейнольдса определено по диаметру цилиндров D и невозмущенной скорости течения U_∞ . При построении модели учитывается, что осцилляции в различных точках одной дорожки К приблизительно когерентны, но различаются по амплитуде и фазе колебаний, так, что вся дорожка за порождающим ее цилиндром моделируется уравнением одного осциллятора Л–С [4, Fig. 4]. (Упомянутая когерентность в ламинарном следе соблюдается точно только после выхода на стационар $t \rightarrow \infty$.) В рамках теории возмущений, комплексный след от пары цилиндров рассматривается как две парциальные дорожки К, существенно взаимодействующие между собой в области их формирования, вблизи порождающих цилиндров. Соответственно, записываются два связанных (возмущенных, модифицированных) уравнения осцилляторов Л–С для двух комплексных, учитывающих фазу осцилляций, управляющих параметров (a и b) двух осцилляторов-дорожек К. В рассматриваемой модели цилиндры должны располагаться не слишком тесно, иначе их комплексный след вырождается в одну дорожку К от одного плохо проникаемого тела – пары цилиндров. В последнем случае пара взаимодействующих дорожек К будет неудачным первым приближением для такого комплексного следа.

$$\frac{da}{dt} - a \left\{ i\omega_0 + \varepsilon_{LS} \left[\lambda + \Lambda \operatorname{Re} \lambda - (\mu - i l \operatorname{Im} \mu) \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Re} \mu} \right) |a|^2 - (\operatorname{Re} \lambda) \Lambda |b|^4 - l (\operatorname{Re} \lambda) a \bar{b} \right] \right\} = St_a \quad (1.1)$$

$$\frac{db}{dt} - b \left\{ i\omega_0 + \varepsilon_{LS} \left[\lambda + \Lambda \operatorname{Re} \lambda - (\mu - i l \operatorname{Im} \mu) \left(\frac{\operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Re} \mu} \right) |b|^2 - (\operatorname{Re} \lambda) \Lambda |a|^4 - l (\operatorname{Re} \lambda) b \bar{a} \right] \right\} = St_b \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1), (1.2) приведены в форме принятой в [3]. Здесь зависимыми переменными являются: a – управляющий параметр первой дорожки К, b – управляющий параметр второй дорожки. В эксперименте эти управляющие параметры отождествляются, с точностью до мультипликативной константы, с поперечной составляющей скорости течения в характерной точке соответствующей дорожки (точке на ее оси, т.е. там, где среднее значение поперечной скорости нулевое). Удаление этой точки вниз по потоку от порождающего цилиндра целесообразно выбрать равным $x/D \approx 5$, поскольку в этом случае коэффициенты уравнений Л–С наиболее консервативны [4, Fig. 3]. Черта над символом управляющего параметра в уравнениях обозначает комплексное сопряжение. Независимое переменное t в уравнениях – это время, обезразмеренное по невозмущенной скорости течения и диаметру цилиндров $t = t_{phys} U_\infty / D$. Уравнения (1.1), (1.2) содержат параметры, наследуемые от модели Л–С для следа одиночного цилиндра. Во-первых, это безразмерная частота установившихся колебаний на пороге (при критическом числе Рейнольдса $R_{cr} = 46$, [3]) бифуркации Ландау–Хопфа к осциллирующему течению $\omega_0 = 2\pi Sh_1 = 0.74$, где $Sh_1 = f_{L-H} D / U_\infty$ – соответствующее число Струхалия. Во-вторых, малый параметр $\varepsilon_{LS} = (1/R_{cr}) - (1/R)$, определяющий малую скорость эволюции следа в масштабе периода базовых осцилляций. В-третьих, два комплексных параметра λ и μ модели Л–С, фактически определяющих, совместно с ε_{LS} , динамику классического осциллятора Л–С – уединенной дорожки К. В работе [3] приведены выражения λ и μ через квадратуры от установившегося решения соответствующей краевой задачи. Для учета взаимодействия дорожек К в области их формирования в стандартные уравнения модели Л–С [3] введены дополнительные – возмущающие члены, пропорциональные действительным параметрам l и Λ . Параметр l характеризует интенсивность взаимодействия дорожек К, зависящую от относительной фазы осцилляций в дорожках К, а параметр Λ – интенсивность фазонезависимого взаимодействия дорожек. Естественно ожидать, что оба этих параметра являются монотонно убывающими функциями расстояния между осями цилиндров. Форма возмущающих членов уравнений, т.е. их зависимость от определяющих параметров дорожек К – a и b , выбрана нелинейной, поскольку известно, что простейшая – линейная форма дополнительных членов в уравнениях модели Л–С не приводит к полностью удовлетворительным результатам моделирования следа [5]. В пользу нелинейности возмущающих членов свидетельствует и квадратичная нелинейность основополагающих уравнений Навье–Стокса. Для случая турбулентного следа уравнения модели содержат в правой части стохастизи-

рующие члены St – аналог сил Ланжевена. Это – некоторые случайные функции времени, моделирующие воздействие высокочастотных мод течения на основную – низкочастотную моду осцилляций дорожки К, а также и влияние турбулентности набегающего потока. В соответствии с [3], без ограничения общности, можно считать, что $\text{Re } \lambda = \text{Re } \mu$, так чтобы управляющие параметры дорожек К удовлетворяли естественной нормировке $|a| = |b| = 1$ для случая установившегося следа от уединенных цилиндров $\Lambda = l = 0$.

Для анализа систему комплексных уравнений модели (1.1), (1.2) удобно привести к системе четырех уравнений для действительных амплитуд r , ρ и фаз φ , ψ осцилляций в двух дорожках К согласно преобразованию переменных (1.3)

$$\begin{aligned} a &= r \exp i(\omega_0 t + \varphi) \\ b &= \rho \exp i(\omega_0 t + \psi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Введем также “медленное” время $\tau = 2\varepsilon_{LS} t \text{Re } \lambda$, интенсивности $x = r^2$, $y = \rho^2$ и разность фаз $P = \varphi - \psi$ осцилляций в двух осцилляторах-дорожках К (по образцу [6]). В результате проведенных преобразований имеем систему четырех уравнений модели

$$\frac{dx}{d\tau} - x[1 + \Lambda - x - \Lambda y^2 - l\sqrt{xy} \cos P] = St_x \quad (1.4)$$

$$\frac{dy}{d\tau} - y[1 + \Lambda - y - \Lambda x^2 - l\sqrt{xy} \cos P] = St_y \quad (1.5)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} - k[(1-l)x - 1] + \frac{l}{2}\sqrt{xy} \sin P = St_\varphi \quad (1.6)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} - k[(1-l)y - 1] - \frac{l}{2}\sqrt{xy} \sin P = St_\psi \quad (1.7)$$

Здесь введен коэффициент $k = -\text{Im } \mu / 2 \text{Re } \mu$. В модели (1.4)–(1.7) можно усмотреть отделяющуюся систему из трех уравнений (1.4), (1.5) и (1.8) для интенсивностей x , y и относительной фазы P колебаний в двух дорожках К, составляющих комплексный след.

$$\frac{dP}{d\tau} - k(1-l)(x-y) + l\sqrt{xy} \sin P = St_\varphi - St_\psi \quad (1.8)$$

Разрешив эту систему трех “ведущих” уравнений, можно восстановить полное решение согласно уравнениям (1.6) и (1.7). Как модель (1.4)–(1.7), так и ведущая система уравнений (1.4), (1.5), (1.8) содержит всего три действительных параметра: k , Λ и l , причем первый из них – наследуемый от модели Л–С. Для его оценки можно использовать результаты расчета для случая следа от одиночного цилиндра вблизи порога бифуркации $R \approx R_{cr}$, согласно которому $k = 1.64$ по [3], или $k = -c/2 \approx 1.35$, где $c \approx -2.7$ – “постоянная Ландау” для характерной точки дорожки К $x/D \approx 5$ по [4].

2. МОДЫ И РЕЖИМЫ СЛЕДА ОТ ПАРЫ ЦИЛИНДРОВ; СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Простую модель комплексного следа (1.4)–(1.8) удалось проанализировать почти полностью аналитически, определив набор мод и собственных частот осцилляций. Глобальные моды находим как линейно-устойчивые точки покоя или квазипериодические решения уравнений модели (1.4)–(1.8) при нулевых правых частях $St = 0$. Имеем следующий спектр мод – рис. 1. При произвольной интенсивности взаимодействия $\Lambda > 0$ и при $l > 0$, но вне клина $\Lambda > 0.5$, $|l| < 2\Lambda^2 + 2\Lambda - 1.5$ существует первая симметричная мода, в форме одинаковых синфазно-синхронизованных парциальных дорожек К. Конфигурация моды I следующая: $x = y = [\sqrt{(1+l)^2 + 4\Lambda(1+\Lambda)} - (1+l)]/2\Lambda$, $P = 0$. Напротив, при $\Lambda > 0$, но $l < 0$ и вне отмеченного клина существует вторая симметричная мода, в виде одинаковых противофазно-синхронизованных дорожек с конфигурацией: $x = y = [\sqrt{(1-l)^2 + 4\Lambda(1+\Lambda)} - (1-l)]/2\Lambda$, $P = \pi$. При относительно интенсивном взаимодействии парциальных дорожек К, т.е. на интервале изменения параметра $0.5 < \Lambda < 0.5(\sqrt{5} - 1)$, становится линейно-устойчивой третья асимметричная мода в форме двух

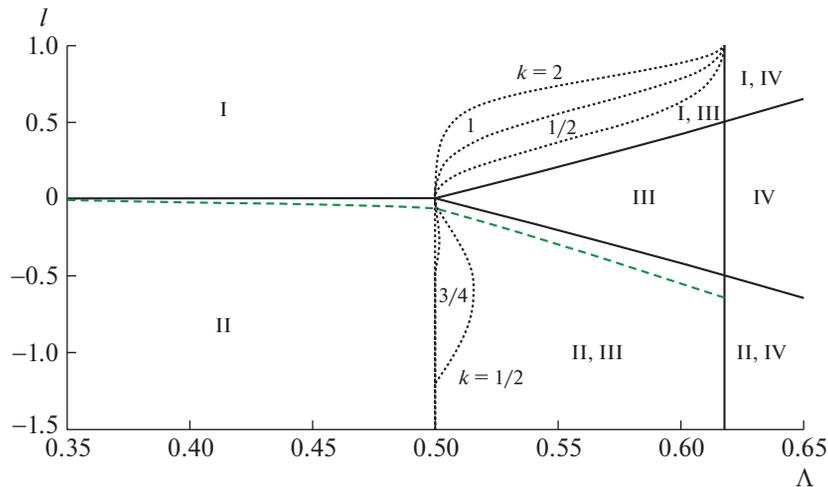


Рис. 1. Области существования глобальных мод I–IV следа. На каждом сегменте плоскости Λ, l римскими цифрами нанесены номера реализующихся в пределах этого сегмента мод. Положение границ сегментов (сплошные линии) не зависит от параметра модели k , за исключением левой границы области существования моды III – $\underline{\Delta}(l, k)$, нанесенной пунктиром. Возможная траектория изменения параметров взаимодействия дорожек Кармана (согласно уравнениям (2.2), $\alpha = 1$) – зеленая штриховая линия.

различающихся по всем характеристикам дорожек К. Примерная конфигурация моды III следующая: $x \approx [1 + \sqrt{4\Lambda(1 + \Lambda) - 3}]/2\Lambda$, $y \approx [1 - \sqrt{4\Lambda(1 + \Lambda) - 3}]/2\Lambda$. Эта мода глобально устойчива в треугольнике параметров: $0.5 < \Lambda < 0.5(\sqrt{5} - 1)$, $|l| < 2\Lambda^2 + 2\Lambda - 1.5$. Вне этого треугольника, когда параметр $\Lambda > \underline{\Delta}(l, k)$, она перемежается при $l > 0$ с модой I или при $l < 0$ с модой II. Здесь для левой границы области существования моды III, найденной численным расчетом системы уравнений (1.4)–(1.7), введено обозначение $\underline{\Delta}(l, k)$ (рис. 1, пунктир). При дальнейшем повышении интенсивности взаимодействия дорожек, т.е. при $\Lambda > 0.5(\sqrt{5} - 1)$, модель теряет корректность, ввиду предсказания для этой области не наблюдавшейся моды IV в форме невозмущенной дорожки К от одного из цилиндров при полном подавлении дорожки от второго цилиндра. Кроме того, при весьма малых значениях параметра k дополнительно обнаруживается мода V в виде различающихся по интенсивности, но синхронизованных дорожек К (при $l < 0$ и $0.5 < \Lambda < 0.5(\sqrt{5} - 1)$ для этого требуется выполнение неравенства $k < 1/4\sqrt{2}$).

Из приведенных данных видно, что спектр расчетных глобальных мод I–III точно соответствует экспериментально наблюдаемому набору трех огрубленных мод следа [7–9]. При этом, в случае достаточно широко разнесенных цилиндров $L/D > 2 - 2.5$, в эксперименте наблюдается перемежающееся течение по модам I и II, причем № II – преимущественно реализуемая мода, согласно [8]. Соответственно этому случаю, в модели при сравнительно слабом взаимодействии дорожек К – при $0 < \Lambda < 0.5$ воспроизводится одномодовое течение по моде II (при надлежащем выборе зависимости $l = l(\Lambda)$, о чем будет сказано ниже). Далее, при сближении цилиндров до расстояния $L/D = 2 - 2.5$ (в зависимости от числа Рейнольдса течения) в эксперименте визуализируется бифуркация от течения по моде II к перемежающемуся по модам II и III следу [7, 8]. Эта бифуркация полностью воспроизводится в рамках модели при критическом значении параметра $\Lambda \approx 0.5$: смотри движение изображающей точки слева-направо вдоль зеленой штриховой линии на рис. 1.

Что можно сказать о расчете собственных частот осцилляций по модам следа? Соответствующие данные приведены на рис. 2, где частоты осцилляций рассчитывались по формулам (2.1), для средних установившихся значений интенсивностей осцилляций в дорожках – $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$.

$$\begin{aligned} \omega_x &= 1 + \left(\frac{k\varepsilon_{LS} \operatorname{Re} \lambda}{\pi S h_1} \right) [(1 - l)\langle x \rangle - 1] \\ \omega_y &= 1 + \left(\frac{k\varepsilon_{LS} \operatorname{Re} \lambda}{\pi S h_1} \right) [(1 - l)\langle y \rangle - 1] \end{aligned} \tag{2.1}$$

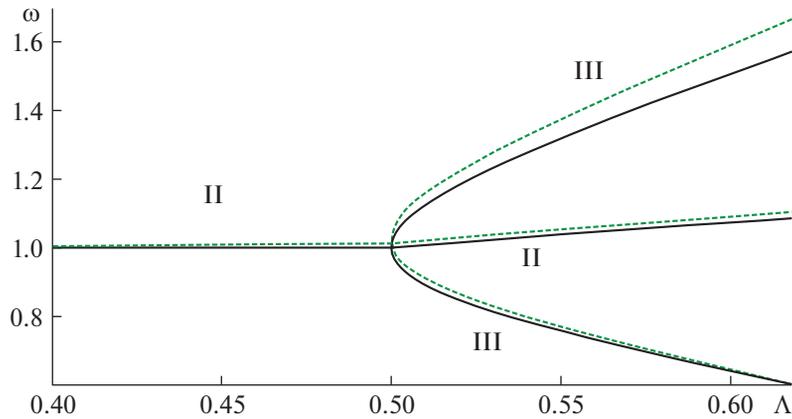


Рис. 2. Спектр собственных частот осцилляций в следе от двух цилиндров, случай $(k\epsilon_{LS} \text{Re } \lambda) / (2\pi Sh) = 0.2$. Номера мод приведены возле соответствующих ветвей спектра римскими цифрами. Сплошные черные кривые соответствуют траектории изображающей точки, проходящей по верхней границе существования моды II – согласно уравнению (2.2) при значении $\alpha = 0$, зеленые штриховые линии – для траектории (2.2): $\alpha = 1$.

В частности, для уединенных дорожек $\Lambda = l = 0$ имеем $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 1$, и соответствующие безразмерные частоты осцилляций $\omega_x = \omega_y = 1$ при любом закритическом числе Рейнольдса течения $R > R_{cr}$. Дорожки К в комплексном следе интенсивно взаимодействуют лишь в области их формирования вблизи цилиндров, соответственно, считаем основным параметр, характеризующий взаимодействие дорожек в модели, – $\Lambda(L/D, R)$ монотонно убывающей функцией расстояния между осями цилиндров L/D . (Дополнительно учитываем, что эффективный зазор между цилиндрами, с учетом пограничных слоев на цилиндрах, определяется не исключительно геометрией, но и числом Рейнольдса). Для согласования расчетных частот с экспериментальными данными, выбираем значение второго параметра взаимодействия – l чуть ниже верхней границы области существования моды II, например:

$$l = -\alpha\Lambda^4, \quad 0 \leq \Lambda \leq 0.5 \quad (2.2)$$

$$l = -2\Lambda(1 + \Lambda) + 1.5 - \alpha\Lambda^4, \quad 0.5 \leq \Lambda < 0.5(\sqrt{5} - 1); \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

С учетом установленного соответствия $l = l(\Lambda)$ и $\Lambda = \Lambda(L/D, R)$ констатируем хорошее согласие расчетных данных о распределении частот осцилляций по глобальным модам следа – рис. 2 с известными экспериментальными данными $Sh = Sh(L/D, R)$ [7, Fig. 31, 32; 8, Fig. 14a]. Замечание: если на интервале $0 \leq \Lambda \leq 0.5$ сместить траекторию изображающей точки чуть выше уровня $l = 0$, то в рамках модели, при слабом взаимодействии дорожек К вместо моды II будет существовать мода I, но частота осцилляций по моде I останется примерно единичной (как и была для моды II), что соответствует экспериментальным измерениям для разнесенных цилиндров $L/D > 2 - 2.5$ (когда частоты осцилляций по перемежающимся модам I и II не удается различить).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вариант модели ближнего следа от пары цилиндров, установленных бок о бок, предлагается как обобщение, с использованием теории возмущений, известной, обоснованной модели Ландау–Стюарта для следа уединенного цилиндра. Этот вариант, в целом, адекватно воспроизводит спектр огрубленных экспериментальных мод комплексного следа I–III и, в частности, бифуркацию к режиму перемежаемости мод II \rightarrow II/III в турбулентном следе, а также собственные частоты осцилляций мод следа для не слишком близко расположенных цилиндров, примерно $L/D \geq 1.5$. Известно [7–9], что при меньших расстояниях, в результате усиления взаимодействия между областями формирования дорожек К, след принимает форму одной широкой дорожки К. Такая форма комплексного следа плохо воспроизводится в рамках модели, хотя и допускает неформальную интерпретацию в виде следа в состоянии моды III с наличествующей низкочастот-

ной дорожкой К, но при полностью релаксировавшей вниз по потоку высокочастотной дорожке. Существенное различие в скорости диссипации двух дорожек, составляющих моду III, действительно наблюдается в эксперименте [7, 8].

Лежащая в основе предлагаемой модели, модель Л–С следа от одиночного цилиндра находит применение в широком диапазоне чисел Рейнольдса $R < 10^5$ (например, при расчете ветровой нагрузки линий передачи электроэнергии, трубопроводов). Можно ожидать, что обобщенная модель комплексного следа работоспособна примерно в том же широком диапазоне чисел Рейнольдса. Здесь подразумевается, что эффективность применения теории возмущений в предлагаемой модели следа определяется, прежде всего, широко варьируемой интенсивностью Λ и l возмущающих членов уравнений, а не изменением сравнительно консервативных наследуемых параметров модели Л–С. Естественно, численные значения коэффициентов уравнений модели будут варьировать при изменении числа Рейнольдса течения, граничных условий на концах цилиндров и других параметров задачи, как это имеет место уже для следа одиночного цилиндра, например [10].

Здесь уместно отметить, что осцилляторная модель следа от двух цилиндров, при нелинейном представлении взаимодействия парциальных дорожек К, рассматривается нами где-то с 2013 г. При этом смоделировать экспериментальное распределение частот осцилляций по модам следа [7, Fig. 31, 32; 8, Fig. 14a] в широком диапазоне изменения интенсивности взаимодействия дорожек К удалось только в 2022 г., тогда как набор трех огрубленных мод I–III следа был получен сразу [6, 11, 12]. Предыдущие варианты модели удавалось согласовать с нашими измерениями базовых частот осцилляций только для одного фиксированного расстояния между осями цилиндров $L/D = 2.1 - 2.2$ [6].

Работа выполнена с использованием средств государственного бюджета по госзаданию № 123021700057-0.

Статья посвящена светлой памяти профессора Эдуарда Владимировича Теодоровича 18.07.1932–1.11.2022.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гувернюк С.В., Дынников Я.А., Дынникова Г.Я., Малахова Т.В.* Вклад силы присоединенных масс в формирование пропульсивной силы машущего профиля в вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 5. С. 3–12.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
3. *Sipp D., Lebedev A.* Global stability of base and mean flows: a general approach and its applications to cylinder- and open cavity flows // J. Fluid Mech. 2007. V. 593. P. 333–358.
4. *Thompson M.C., Le Gal P.* The Sturst-Landau model applied to wake transition revisited // Europ. J. Mech. B/Fluids. 2004. V. 23. P. 219–228.
5. *Peschard I., Le Gal P.* Coupled wakes of cylinders // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. № 15. P. 3122–3125.
6. *Гембаржевский Г.В., Осипенко К.Ю.* Интерпретация и механизм перестройки течения ближнего следа под действием тлеющего разряда // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 1. С. 14–31.
7. *Sumner D.* Two circular cylinders in cross-flow: A review // J. Fluids Struct. 2010. V. 26. P. 849–899.
8. *Alam Md.M., Moriya M., Sakamoto H.* Aerodynamic characteristics of two side-by-side circular cylinders and application of wavelet analysis on the switching phenomenon // J. Fluids Struct. 2003. V. 18. P. 325–346.
9. *Sumner D., Reitenbach H.K.* Wake interference effects for two finite cylinders: A brief review and some new measurements // J. Fluids Struct. 2019. V. 89. P. 25–39.
10. *Душина О.А., Калинин Е.И., Клюев М.А., Мазо А.Б., Молочников В.М.* Влияние ограничения потока боковыми стенками на поперечное обтекание кругового цилиндра при умеренных числах Рейнольдса // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 1. С. 97–114.
11. *Гембаржевский Г.В., Леднев А.К., Осипенко К.Ю.* Моделирование эволюции плазменного следа пары цилиндров под действием электрического разряда // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. № 23. С. 40–48.
12. *Гембаржевский Г.В., Леднев А.К., Осипенко К.Ю.* Развитие простой модели следа от пары цилиндров: двухчастотная мода течения // ТВТ. 2019. Т. 57. № 1. С. 121–126.

УДК 532.517: 4.621.1.016.4

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА МОДЕЛИРОВАНИЕ АНОМАЛЬНОЙ ИНТЕНСИФИКАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛООБМЕНА В НАКЛОННОЙ КАНАВКЕ НА СТЕНКЕ УЗКОГО КАНАЛА

© 2023 г. С. А. Исаев^{a,b,*}, А. Г. Судаков^b, Д. В. Никущенко^a, В. Б. Харченко^a, Л. П. Юнаков^c

^aСанкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия

^bСанкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации им. Главного маршала авиации
А.А. Новикова, Санкт-Петербург, Россия

^cБалтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова,
Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: isaev3612@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.04.2023 г.

После доработки 06.06.2023 г.

Принята к публикации 23.06.2023 г.

Представляется численное исследование влияния граничных условий первого и второго рода на прогнозирование характеристик аномальной интенсификации теплообмена при низкоскоростном турбулентном обтекании воздухом наклонной канавки на нагреваемой стенке узкого канала. Показано, что условия изотермичности приводят к заметному занижению тепловой эффективности структурированной наклонными канавками поверхности в сравнении с условиями постоянства теплового потока.

Ключевые слова: интенсификация теплообмена, отрывное течение, торнадоподобный вихрь, турбулентность, наклонная канавка, узкий канал, условия первого и второго рода

DOI: 10.31857/S1024708423600367, EDN: RBCVPD

Роль граничных условий на омываемых стенках при решении фундаментальных и прикладных задач конвективного теплообмена весьма значительная, причем как в экспериментальных, так и расчетных случаях. Различают граничные условия первого, второго и третьего рода [1]. В подавляющем большинстве проведенных физических экспериментов реализуются условия второго рода, т.е. на поверхности контакта стенки и потока теплоносителя выполняется условие постоянства теплового потока (см., например, [2–4]). Подвод тепла происходит, как правило, при пропускании электрического тока в стенке. При этом дискуссионным остается вопрос обеспечения постоянства теплового потока на негладкой структурированной стенке при наличии упорядоченных выступов или впадин.

Намного реже в экспериментальных установках создаются условия первого рода, т.е. на контактных поверхностях реализуются изотермические граничные условия. Практическое осуществление таких условий в [5, 6] достигается при их поддержании за счет введения паровой области, граничащей с омываемой внешней средой стенкой. Интересно, что использование таких изотермических структурированных стенок, сохраняющихся при температуре $T = 373$ К, сочетается с методами градиентной термометрии, основанной на градиентных датчиках теплового потока.

Корректное теоретическое определение граничного условия на стенке для прогнозирования характеристик теплообмена связано с решением задачи теплопроводности в стенке. Так, в [7] предлагается оценивать граничные условия, решая обратную задачу теплопроводности.

Однако при численном моделировании конвективного теплообмена в энергетических устройствах, двигательных трактах, системах охлаждения в микроэлектронике с использованием пакетных технологий принято задавать на стенке постоянство подводимого теплового потока или определять поверхность стенки как изотермическую с постоянной температурой.

В данной работе влияние граничных условий рассматривается в цикле задач вихревой интенсификации теплообмена на структурированных негладких поверхностях. На протяжении тридцати лет развиваются расчетно-экспериментальные исследования влияния упорядоченных лунок на тепловую эффективность омываемых поверхностей при умеренных гидравлических потерях при прокачке теплоносителя. В монографии Г.И. Кикнадзе и др. [8] представлена концепция самоорганизации струйно-вихревых структур в сферических лунках. Численное моделирование таких структур в сферических и слегка асимметричных лунках на стенках каналов и пластинах [9–13] показывает, что отрывное течение внутри лунок не обладает высокой интенсивностью, а скорости возвратного и закрученного течения невелики и не превосходят 30% от характерной скорости течения. Условия второго рода, как правило, используются при расчете конвективного теплообмена в длинных каналах с лунками на развивающемся начальном или полностью развитом гидродинамическом участке [9] или течения на пластине. Условия первого рода, как уже отмечалось, применяются для расчета теплообмена в цифровых аналогах теплофизических стендов с паровой камерой для поддержания температуры стенки, равной 373 К [10–12]. Также они используются при прогнозировании характеристик течения и теплообмена на участке стабилизированного течения при постановке периодических граничных условий на проточных границах выделенного повторяющегося расчетного модуля с лункой [13].

Сравнение граничных условий первого и второго рода при моделировании конвективного теплообмена в узком канале со сферической лункой показало незначительное различие численных прогнозов тепловых потоков в лунке и ее окрестности и близость суммарной теплоотдачи от участка стенки с лункой [14].

В последние годы в области вихревой интенсификации теплообмена при использовании структурированных поверхностей достигнут прорыв за счет замены лунок наклонными канавками. Численно открыто и экспериментально подтверждено явление аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в наклонных канавках на стенке узкого канала и пластине [15, 16]. Для единичных [17, 18] и пакетных однорядных [19–22] канавок на начальном гидродинамическом участке и участке стабилизации течения установлено достижение ультравысоких скоростей возвратного и вторичного течения до величин порядка и превосходящих характерные скорости, многократный рост (от 2 до 9 раз) относительных величин трения и тепловых потоков на дне канавок. Явление вызвано экстраординарными перепадами статического давления между зонами торможения на наветренном склоне заходящего в канавку потока и разрежения в стволе самоорганизованного торнадо подобного вихря на входном сферическом сегменте.

В данной статье рассматривается влияние граничных условий на конвективный теплообмен в наклонной канавке на нагретой стенке узкого канала при турбулентном низкоскоростном течении воздуха.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается турбулентный конвективный теплообмен при стационарном обтекании воздухом уединенной канавки под углом наклона 45° на нагретой стенке узкого канала (рис. 1), соответствующего экспериментам [2] и расчетам [11, 12, 14, 17, 18]. В качестве характерных параметров выбираются высота канала D и среднемассовая скорость потока U . Число Рейнольдса Re на стабилизированном участке воздушного потока в канале принимается равным 3333. Безразмерная высота канала принимается равной 1, ширина – 7.5, длина – 22. Цилиндрическая канавка образована соединением двух половинок сферической лунки диаметром 1 и глубиной 0.39 с траншеей длиной 7. Степень турбулентности задается близкой к экспериментальной (1–5%), а масштаб турбулентности принимается порядка характерного размера. Относительный радиус скругления кромки значителен и равен 0.25. Число Прандтля Pr принимается равным 0.71.

Турбулентное стационарное отрывное течение несжимаемой вязкой среды в узком канале с наклонной канавкой описывается в рамках подхода на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS) [23], замкнутых с помощью дифференциальных уравнений модели сдвиговых напряжений Ментера [24]. Теплообмен рассчитывается с использованием уравнения энергии [23].

Расчетная область охватывает ограниченное стенками пространство узкого канала протяженностью 22 (рис. 1). Входная проточная граница с профилями характеристик полностью развитого турбулентного потока располагается на расстоянии 8.5 от проекции центра канавки на плоскость нижней стенки, а центр декартовой системы координат x, y, z находится в срединном сечении канала на расстоянии 5 от входа. В выходном сечении канала задаются “мягкие” граничные

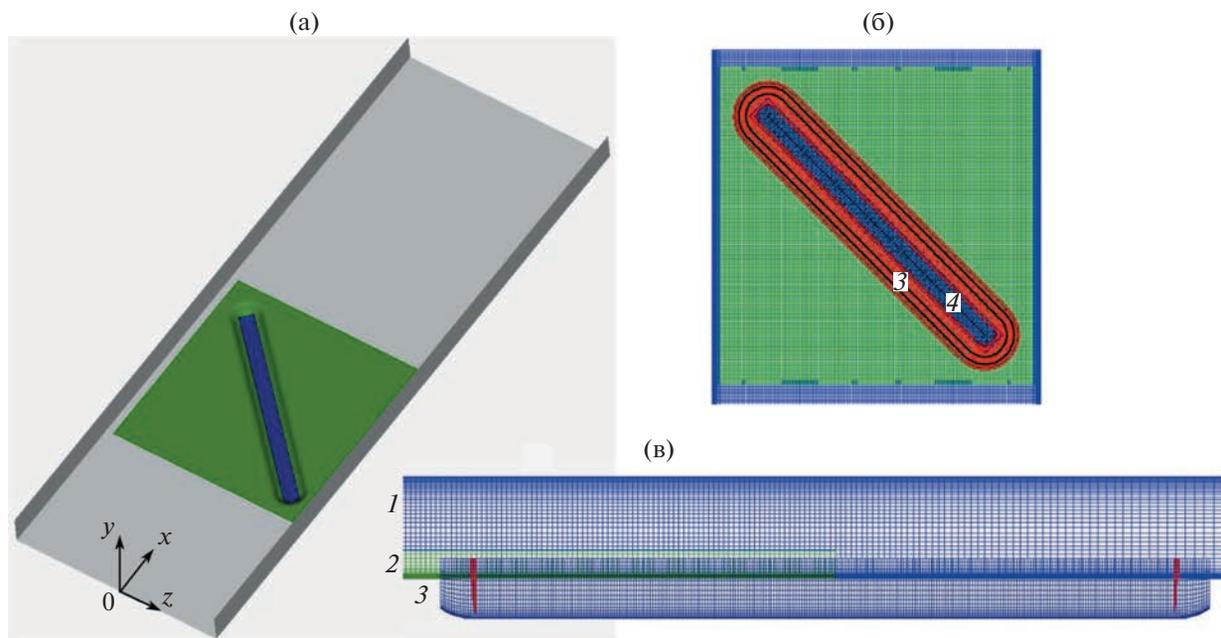


Рис. 1. Участок узкого канала с наклонной канавкой на нагретой стенке (а) с декартовой системой координат x , y , z и многоблочные сетки в окрестности канавки (б – вид сверху; в – вид сбоку). 1 – канальная сетка MG; 2 – измельченная декартовая сетка MR, покрывающая канавку; 3 – O-образная криволинейная сетка Ring внутри канавки; 4 – сетка Res – “заплата” на дне канавки. Верхняя стенка канала снята.

условия – условия продолжения решения на границу, а на омываемых стенках канала ставятся условия прилипания.

При реализации граничных условий первого рода нижняя стенка канала с лункой поддерживается при постоянной температуре 30°C (303 K), как в [11, 12, 14], а при постановке граничных условий второго рода аналогично [14, 17, 18] на стенке задается тепловой поток q . Подводимый постоянный тепловой поток q пересчитывается в безразмерный вид по формуле

$$q_{\text{norm}} = qD/(\lambda\text{PrRe}T_{\text{ref}}),$$

а его величина принимается $\sim 3.4 \times 10^{-5}$. Здесь λ – теплопроводность воздуха.

Боковые стенки канала адиабатические, а верхняя изотермическая с температурой T_{ref} , принятой в качестве масштаба обезразмеривания (293 K). На входе температура T задается постоянной и равной T_{ref} , а на выходе из канала для T ставятся мягкие граничные условия. Безразмерная температура на изотермической стенке принимается равной 1.034.

Численное решение стационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS) и энергии основывается на концепции расщепления по физическим процессам [23] при использовании процедуры коррекции давления SIMPLEC [25] и многоблочных структурированных сеток с их частичным перекрытием. Уравнения движения замыкаются с помощью полуэмпирической модели переноса сдвиговых напряжений (SST) [24]. Развиваемая методология распараллеливается применительно к кластерным (многоядерным и многопроцессорным) системам и обобщается на случай неструктурированных сеток. Подобно [23], обобщенное уравнение переноса записывается в приращениях зависимых переменных. Явная часть уравнения дискретизируется по схемам второго порядка аппроксимации (противопоточная схема с квадратичной интерполяцией Леонарда [26] для конвективных членов уравнений количества движения, схема TVD [27] для конвективных членов уравнений характеристик турбулентности и центрально-разностная схема для диффузионных членов). Неявная часть представляется с помощью противопоточной схемы с односторонними разностями. Применение централированных сеток с размещением зависимых переменных в центрах расчетных ячеек приводит к необходимости монотонизации поля давления за счет введения коррекции Рхи–Чоу [28, 29]. В качестве метода решения алгебраических уравнений используется предобусловленный BiCGSTAB [30] с алгебраическим многосеточным ускорителем из библиотеки Демидова (amgcl) [31] для поправки давле-

ния и ILU0 для остальных переменных. В разработанном пакете VP2/3 (Velocity-Pressure, 2D/3D) применены многоблочные вычислительные технологии (МВТ), описанные в [23]. Они основываются на совокупности разномасштабных, ярусных и пересекающихся структурированных сеток, согласованных со структурными элементами соответствующих масштабов физической задачи. В двух рядах приграничных ячеек каждой из пересекающихся или накладываемых сеток параметры определяются с помощью линейной интерполяции [23].

Для решения задачи применяется многоблочная расчетная сетка, содержащая порядка 5.6 млн ячеек. Композиционно сетка состоит из четырех разномасштабных фрагментов: 1 – канальной прямоугольной (с минимальным шагом по продольной и поперечной координате – 0.05) сетки со сгущением узлов к стенке, предназначенной для отображения течения в пределах канала; 2 – подробной, предназначенной для детализации течения в ближнем следе канавки, декартовой сетки (с продольным и поперечным шагом 0.03), покрывающей контрольный участок канала с канавкой размерами $7 \times 0.2 \times 7$ (с передней границей, удаленной от центра канавки на расстояние 3.5); 3 – криволинейной, согласованной с поверхностью канавки, эллиптической сетки, сгущающейся к стенке и кромке; 4 – косоугольной сетки, покрывающей дно канавки в виде “заплатки”. Пристеночный шаг выбирается равным 10^{-4} . Канальная сетка содержит 4.34 млн ячеек, а окружающая канавку детальная прямоугольная сетка – 0.58 млн ячеек. Цилиндрическая эллиптическая сетка, согласованная с канавкой, содержит 0.45 млн ячеек, а косоугольная сетка, накрывающая дно, – 0.21 млн ячеек.

Расчетная методология имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным. На каждом итерационном шаге решается уравнение поправки давления и рассчитываются поля декартовых составляющих скорости, давления, а также характеристик турбулентности. Вычислительный процесс заканчивается при достижении максимальных погрешностей зависимых переменных уровня 10^{-5} и выходе на стабилизацию экстремальных локальных и интегральных параметров, включая поперечную силу и суммарную теплоотдачу на контрольном участке с наклонной канавкой. В данной работе анализируются экстремальные локальные и интегральные характеристики течения и теплообмена в канале с канавкой и без нее при различных граничных условиях по теплообмену. В их число входят продольные и поперечные распределения перепада статического давления $P - P_{pl}$, относительной теплоотдачи Nu/Nu_{pl} , относительного трения f/f_{pl} и относительной температуры $T_w/T_{w_{pl}}$ (для условий второго рода) в характерных сечениях омываемой стенки канала с канавкой, осредненные по поперечным полосам относительные числа Нуссельта Num/Num_{pl} для контрольного участка и прямоугольного контура, окружающего канавку. Индекс pl относится к параметрам на стенке плоскопараллельного канала. Также сравниваются экстремальные характеристики течения P_{min} , P_{max} , U_{min} , U_{max} , V_{min} , V_{max} , W_{min} , W_{max} , турбулентности K_{max} , μ_{max} , тепловой ($Numm/Numm_{pl}$) и теплогидравлической $TNE = ((Numm/Numm_{pl})/(\zeta/\zeta_{pl}))$ эффективности, а также относительных коэффициентов гидравлических потерь (ζ/ζ_{pl}) .

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2–5 и в табл. 1, 2 представлены некоторые из полученных результатов. Явление аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена вблизи однорядных наклонных канавок на стенках узких каналов и пластинах, как показано в [15, 16], связано с генерацией внутри таких канавок торнадо подобных вихрей, создающих зоны отрицательного давления. Экстраординарные перепады статического давления возникают между областями торможения входящего в канавку потока на наветренном склоне и разрежения в месте зарождения вихря на сферическом сегменте канавки. Их величина сопоставима с перепадом давления между критическими точками при обтекании затупленных тел типа шара или цилиндра. Следствием формирования перепадов давления во входной части наклонной канавки является аномальная интенсификация возвратного и вторичного течения, восходящих и нисходящих потоков при достижении ультравысоких величин скорости, сопоставимых и превышающих характерную среднемассовую скорость. Внутри канавки возникают зоны высоких градиентов характеристик течения и теплообмена: отрицательного трения и тепловых потоков, многократно (до 6–9 раз) превышающих по абсолютной величине соответствующие характеристики на гладкой стенке канала без канавок.

Следует отметить, что аномальная интенсификация течения и теплообмена характерна также для единичных канавок на стенке узкого канала и пластине [15–18], правда, эффект усиления градиентов течения и теплообмена в них гораздо слабее, чем для пакета канавок.

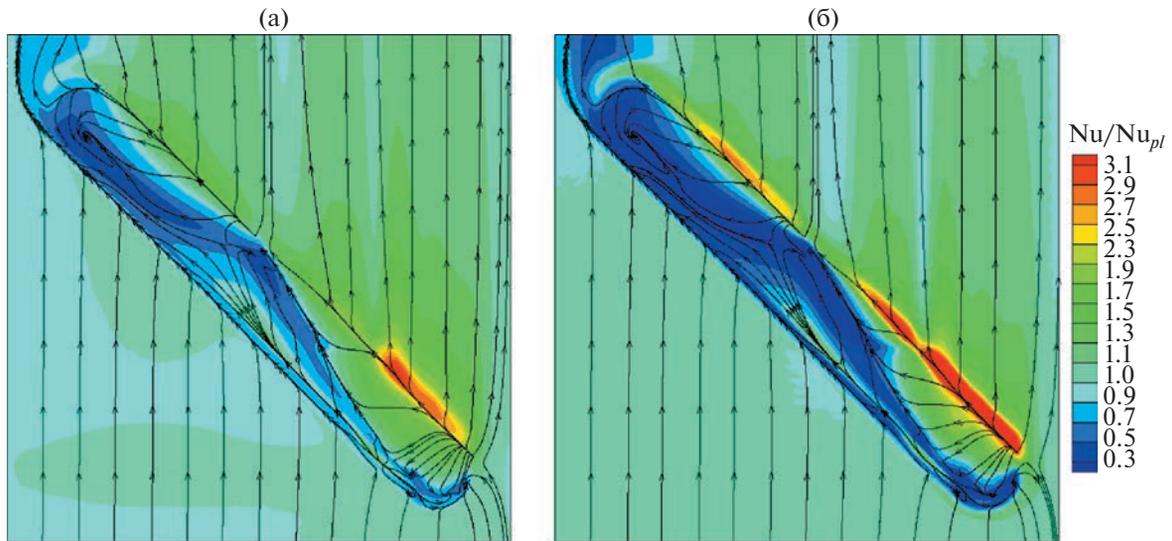


Рис. 2. Рассчитанные поля относительных чисел Нуссельта Nu/Nu_{pl} с нанесенными линиями растекания на контрольном участке структурированной стенки канала при задании граничных условий $q = \text{const}$ (а) и $T = \text{const}$ (б).

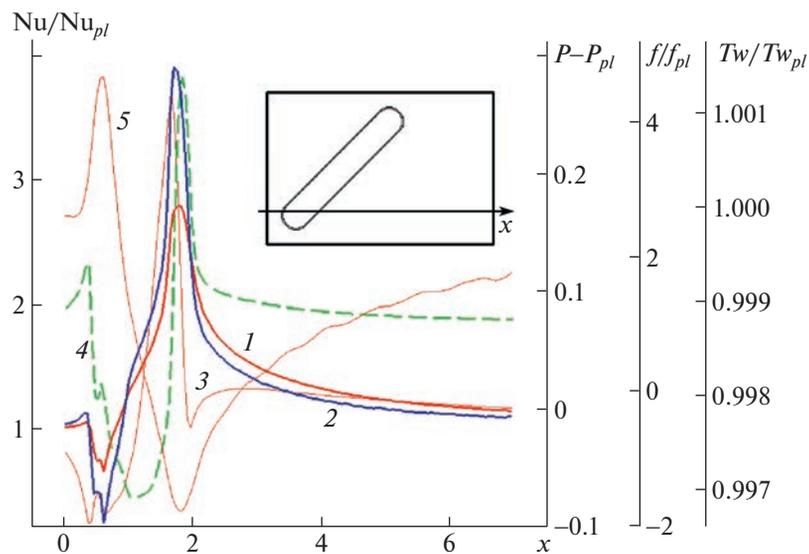


Рис. 3. Сравнение распределений относительного числа Нуссельта $Nu/Nu_{pl} - 1, 2$, перепада статического давления $P - P_{pl} - 3$, относительных величин трения $f/f_{pl} - 4$ и температуры $T_w/T_{w_{pl}} - 5$ в продольном характерном сечении стенки канала с наклонной канавкой при задании граничных условий $q = \text{const} - 1, 3-5$ и $T = \text{const} 2-4$.

Струйно-вихревая гидродинамика в канале с единичной канавкой на нагретой стенке иллюстрируется сравнительными прогнозами в табл. 1 и картинami растекания воздуха по контрольному участку на рис. 2. Подтвержден значительный перепад давления в канавке, отнесенного к удвоенному скоростному потоку, по сравнению с гладким каналом. Отмечаются ультравысокая скорость вторичного течения и заметное ускорение в ядре канального потока. Почти трехкратный рост максимальной энергии турбулентности в канале с канавкой сочетается с незначительным увеличением максимальной вихревой вязкости. Рассчитанная структура отрывного течения в наклонной канавке хорошо согласуется с аналогичной, полученной в [18] для водяного теплоносителя и близкой геометрии. Высокоинтенсивная зона возвратного течения в области отрыва внутри канавки весьма мала, но именно в ней формируется закрученный поток, часть которого

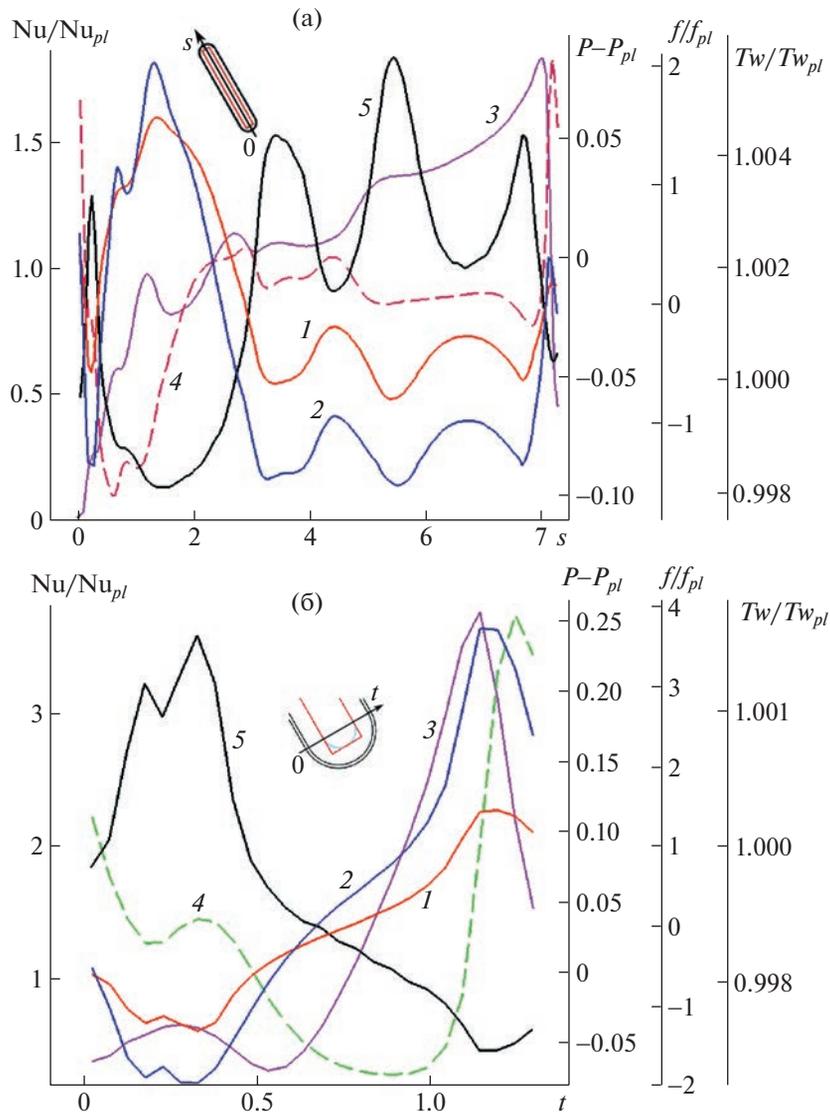


Рис. 4. Сравнение распределений относительного числа Нуссельта Nu/Nu_{pl} – 1, 2, перепада статического давления $P - P_{pl}$ – 3, относительных величин трения f/f_{pl} – 4 и температуры $T_w/T_{w_{pl}}$ – 5 в срединном продольном (а) и поперечном характерном (б) сечениях канавки на стенке канала при задании граничных условий $q = \text{const}$ – 1, 3–5 и $T = \text{const}$ – 2–4.

в виде спиралевидного вихря покидает канавку, не дойдя до ее конца. В выходной части канавки наблюдается возникновение вторичных смерчевых структур.

В данном исследовании акцент делается на сравнении типов граничных условий для теплообмена при выборе геометрической формы и размеров канавки, для которой достигается наибольшая тепловая эффективность, т.е. максимальная теплоотдача от контрольного участка с канавкой. Причем известно, что решение тепловой задачи для несжимаемой среды не влияет на решение динамической задачи. В аналогичном исследовании [14], выполненном для сферической лунки на стенке узкого канала, показано, что, как и в случае траншеи в узком канале, локальные и интегральные характеристики теплообмена практически (с точностью до 3%) не зависят от граничного условия на нагретой стенке ($q = \text{const}$ и $T = \text{const}$ эквивалентны).

Как видно из рис. 2 и табл. 2, теплообмен в наклонной канавке на стенке узкого канала существенно зависит от типа граничных условий. При $T = \text{const}$ относительные тепловые потоки Nu/Nu_{pl} внутри канавки заметно ниже, чем для $q = \text{const}$. Хотя по тепловой эффективности $Numm/Numm_{pl}$ участки с канавкой кардинально не отличаются (различие находится в пределах

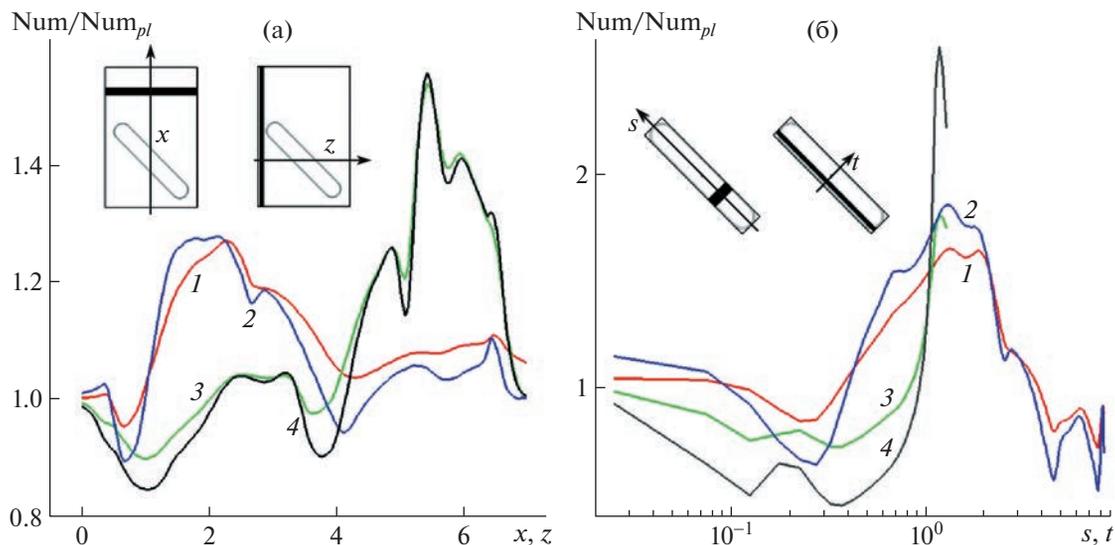


Рис. 5. Сравнение осредненных по поперечным полосам относительных чисел Нуссельта $\text{Num}/\text{Num}_{pl}$ в срединных продольном – 1, 2 и поперечном – 3, 4 сечениях контрольного участка с наклонной канавкой (а) и контура, окружающего канавку (б) при задании граничных условий $q = \text{const}$ – 1, 3 и $T = \text{const}$ – 2, 4.

2–3%), однако тепловая эффективность контура, окружающего лунку, заметно (на 4%) ниже для варианта с $T = \text{const}$. Следует отметить, что теплогидравлическая эффективность (ТНЕ) участка с канавкой превышает 1 для граничных условий второго рода и оказывается меньше 1 для граничных условий первого рода.

В отличие от сопоставления поверхностных характеристик течения и теплообмена в продольном срединном сечении нагретой стенки узкого канала с наклонной канавкой [17], в данном исследовании для анализа численных прогнозов выбирается продольное сечение, проходящее через центр сечения перехода от входного сферического сегмента к цилиндрической траншее (рис. 3). Как уже отмечалось при рассмотрении картин Nu/Nu_{pl} , теплоотдача от стенки для граничных условий первого рода заметно отличается от прогнозируемой теплоотдачи для граничных условий второго рода. Максимум Nu/Nu_{pl} для изотермической нагретой стенки в районе скругленной наветренной кромки примерно на 1.2 превосходит $(\text{Nu}/\text{Nu}_{pl})_{\text{max}}$ стенки с $q = \text{const}$, достигая почти четырехкратного увеличения в сравнении с плоскопараллельной стенкой. В то же время на подветренной стороне канавки минимальная относительная теплоотдача при $T = \text{const}$ почти

Таблица 1

	Канал с канавкой	Канал без канавки
Pmin	−0.3242	−0.2519
Pmax	0.2031	0.0041
Umin	−0.4160	0
Umax	1.277	1.259
Vmin	−0.3895	−0.0005
Vmax	0.5361	0.0006
Wmin	−0.8269	−0.0005
Wmax	0.3555	0.0005
Kmax	0.03408	0.01173
μ_{max}	0.004241	0.004162
Tmax	1.018	1.012

Таблица 2

Тип условия	$Numm/Numm_{pl}$	$Nummd/Nummd_{pl}$	ζ/ζ_{pl}	THE
$q = \text{const}$	1.104	1.071	1.088	1.015
$T = \text{const}$	1.081	1.027	1.087	0.994

вдвое ниже, чем при $q = \text{const}$. На дне канавки в центральной части прогнозы Nu/Nu_{pl} близки по величине с некоторым превышением для изотермической стенки и оказываются порядка 1.5.

На наветренной сглаженной кромке достигают максимумов перепад статического давления $P-P_{pl}$ и относительное трение f/f_{pl} . Отмечается характерный для аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена экстраординарный перепад статического давления, величина которого оказывается порядка 0.35. Пик относительного трения порядка 4.5 коррелирует с максимумом Nu/Nu_{pl} , близким к 4, а минимальное значение f/f_{pl} оказывается порядка -1.5 . Интересным представляется распределение относительной температуры на стенке с $q = \text{const}$. Пик $T_w/T_{w_{pl}}$ на подветренной скругленной кромке, превышающий 1, внутри канавки быстро падает до минимума заметно ниже 1 (0.997), а затем в следе за канавкой быстро подрастает, оставаясь ниже 1 на значительном удалении, т.е. имеет место захлаживание стенки в области следа.

Как и в ряде проведенных исследований [14–18], интерес для сравнений представляют два характерных сечения канавки: срединное продольное сечение и поперечное сечение стыковки входного сферического сегмента и цилиндрической траншеи. На рис. 4 построены зависимости локальных поверхностных характеристик течения и теплообмена от локальных координат s и t , причем нулевые значения координат выбраны на стенке перед скругленной кромкой канавки. Как уже отмечалось ранее, распределения $Nu/Nu_{pl}(s)$ (кривые 1, 2 на рис. 4а) демонстрируют значительное различие численных прогнозов для граничных условий первого и второго рода. Максимумы относительной теплоотдачи достигают близких величин -1.85 для $T = \text{const}$ и 1.6 для $q = \text{const}$ в входной части канавки. Следует отметить, что теплоотдача на дне канавки оказывается значительно (в 1.5–2 раза) выше теплоотдачи от гладкой плоской стенки. В траншейной части и на конце канавки Nu/Nu_{pl} существенно меньше 1, причем прогнозы для изотермической поверхности канавки примерно вдвое ниже прогнозов для $q = \text{const}$. Распределение перепада статического давления $P-P_{pl}$ по длине канавки носит в целом возрастающий характер с минимумом порядка -0.1 на входе и максимумом порядка 0.1 на выходе. Относительное трение $f/f_{pl}(s)$ показывает формирование зоны интенсивного отрывного течения с минимумом порядка -1.6 , переходящей в область проточного течения с $f/f_{pl} > 0$, занимающей практически всю канавку, за исключением малой окрестности конца канавки. Распределение относительной температуры $T_w/T_{w_{pl}}(s)$ при $q = \text{const}$ имеет ярко выраженный минимум во входной части в зоне образования интенсивного торнадоподобного потока и три разновеликих локальных максимума, превосходящие 1 и отражающие перемены тепловых режимов по мере развития проточного течения вдоль канавки. Как уже отмечалось, один из максимумов может быть связан с выходом из канавки спиралеобразного вихря в центральной части за серединой (рис. 2).

Поперечное сечение стыковки сферического сегмента и траншеи характеризует наиболее интенсивную зону отрывного течения и теплообмена в наклонной канавке (рис. 4б). Перепад статического давления между зонами торможения на наветренном склоне и разрежения на дне канавки превысил заявленный ранее уровень 0.35. Минимум отрицательного относительного трения приблизился к -1.8 и сместился по дну канавки к наветренной кромке. Установлено кардинальное влияние граничных условий на прогнозы относительной теплоотдачи. Величина $(Nu/Nu_{pl})_{\text{max}}$ вдвое выше на изотермической скругленной кромке канавки в сравнении с $q = \text{const}$ и $(Nu/Nu_{pl})_{\text{min}}$ вдвое ниже на подветренном склоне. На подветренной кромке наблюдается пик относительной температуры в случае $q = \text{const}$ с величиной порядка 1.003. По мере движения к наветренной кромке $T_w/T_{w_{pl}}$ резко падает и достигает уровня 0.997 на кромке.

Представленные на рис. 5 зависимости проинтегрированных по поперечным полосам относительных чисел Нуссельта позволяют оценить тепловую эффективность участков структурированной поверхности, анализируя зависимости Num/Num_{pl} от продольных (x, s) и поперечных (z, t) координат выбранных участков. Также определяется влияние на численные прогнозы граничных условий первого и второго рода.

Пиковые тепловые нагрузки на профилированный наклонной канавкой контрольный участок нагретой стенки узкого канала, как видно из рис. 5а, приходится на переднюю его часть (кривые 1, 2), причем уровень относительной теплоотдачи доходит до 1.25–1.3, и на правую боковую часть (кривые 3, 4) с $(Num/Num_p)_{max} = 1.55$. Различие между прогнозами при $T = const$ и $q = const$ не выглядит значительным, что обуславливает 2% разницу в интегральной тепловой эффективности контрольного участка.

В то же время различие в прогнозах осредненной по полосам относительной теплоотдачи в пределах контура, окружающего канавку, на рис. 5б несомненно значительное. Если в продольном направлении s максимумы и минимумы отличаются на величину порядка 0.2 (кривые 1, 2), то в поперечном направлении t их отличие доходит до 1.5 раза. Становится понятной 4% разница в прогнозах с использованием различных граничных условий интегральной тепловой эффективности участка, ограниченного контуром канавки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное моделирование конвективного теплообмена в узком канале с единичной наклонной канавкой глубиной 0.39 (в долях ширины) и длиной 8 на нагретой стенке при турбулентном низкоскоростном течении воздуха. Определяется влияние граничных условий первого и второго рода на прогнозы тепловой и теплогидравлической эффективности. При аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в выбранной наклонной канавке суммарная относительная (по отношению к плоскопараллельному каналу) теплоотдача от контрольного участка структурированной изотермической стенки оказывается заметно (на 2%) ниже, чем для стенки с $q = const$. Особенно сильное различие (порядка 4%) установлено для относительной теплоотдачи от прямоугольного участка, контур которого окружает канавку. Анализ локальных относительных чисел Нуссельта в окрестности канавки показал, что экстремальные величины могут кардинально (до полутора раз) различаться в зависимости от вида граничных условий. Установленная на примере единичной наклонной канавки тенденция к занижению численных прогнозов тепловой и теплогидравлической эффективности для нагретых изотермических поверхностей может усилиться для пакетов наклонных канавок на структурированной стенке. Это обстоятельство необходимо учитывать при конструировании энергоэффективных структурированных поверхностей, которые эксплуатируются при $q = const$.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда по грантам 22-19-00056 (эксперименты) 23-19-00083 (расчеты).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исаев С.И., Кожин И.А., Кофанов В.И., Леонтьев А.И., Миронов Б.М., Никитин В.М., Петражицкий Г.Б., Хвостов В.И., Чукаев А.Г., Шишов Е.В., Школа В.В. Теория теплообмена / Под ред. А.И. Леонтьева, М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 464 с.
2. Terekhov V., Kalinina S., Mshvidobadze Yu. Heat transfer coefficient and aerodynamic resistance on a surface with a single dimple // Enhanced Heat Transfer. 1997. V. 4. P. 131–145.
3. Burgess N.K., Ligrani P.M. Effects of dimple depth on channel Nusselt numbers and friction factors // J. Heat Transfer. 2005. V. 127. P. 839–847.
4. Rao Y., Feng Y., Li B., Weigand B. Experimental and numerical study of heat transfer and flow friction in channels with dimples of different shapes // J. Heat Transfer. 2015. V. 137. P. 031901–1–10. <https://doi.org/10.1115/1.4029036>
5. Сапожников С.З., Митяков В.Ю., Митяков А.В. Градиентные датчики теплового потока. СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003. 168 с.
6. Сапожников С.З., Митяков В.Ю., Митяков А.В. Основы градиентной теплотрии. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 203 с.
7. Балашова И.Е., Юдин В.М. Определение параметров граничных условий теплообмена на основе решения обратной задачи теплопроводности // Ученые Записки ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 5. С. 84–91.
8. Кикнадзе Г.И., Гачечиладзе И.А., Алексеев В.В. Самоорганизация смерче-образных струй в потоках вязких сплошных сред и интенсификация теплообмена, сопровождающая это явление. М.: Изд-во МЭИ, 2005. 84 с.
9. Xie G., Liu J., Ligrani P.M., Zhang W. Numerical predictions of heat transfer and flow structure in a square cross-section channel with various non-spherical indentation dimples // Numerical Heat Transfer. Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology. 2013. V. 64. № 3. P. 187–215. <https://doi.org/10.1080/10407782.2013.779485>

10. Баранов П.А., Исаев С.А., Леонтьев А.И., Митяков А.В., Митяков В.Ю., Сапожников С.З. Физическое и численное моделирование вихревого теплообмена при турбулентном обтекании сферической лунки на плоскости // Теплофизика и аэромеханика. 2002. Т. 9. № 4. С. 521–532.
11. Isaev S.A., Kornev N.V., Leontiev A.I., Hassel E. Influence of the Reynolds number and the spherical dimple depth on the turbulent heat transfer and hydraulic loss in a narrow channel // Int. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53. Iss. 1–3. P. 178–197.
12. Isaev S.A., Schelchkov A.V., Leontiev A.I., Baranov P.A., Gulcova M.E. Numerical simulation of the turbulent air flow in the narrow channel with a heated wall and a spherical dimple placed on it for vortex heat transfer enhancement depending on the dimple depth // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2016. V. 94. P. 426–448.
13. Nasr M.A., Tay C.M., Khoo B.C. Numerical investigation of heat transfer and drag over different dimple geometries in turbulent channel flow // J. Enhanced Heat Transfer. 2022. V. 29. № 4. P. 81–114.
14. Исаев С.А., Гульцова М.Е. Численное моделирование турбулентного течения воды и конвективного теплообмена в узком канале с траншеей и сферической лункой. Сравнение граничных условий $T = \text{const}$ и $Q = \text{const}$ // Тепловые процессы в технике. 2013. № 6. С. 242–246.
15. Исаев С.А. Генезис аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в наклонных канавках на структурированных поверхностях // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 5. С. 13–24.
16. Исаев С.А. Аэрогидродинамические механизмы интенсификации физико-энергетических процессов на структурированных энергоэффективных поверхностях с вихревыми генераторами // Теплофизика и аэромеханика. 2023. Т. 30. № 1. С. 83–88.
17. Isaev S.A., Schelchkov A.V., Leontiev A.I., Gortyshov Yu.F., Baranov P.A., Popov I.A. Tornado-like heat transfer enhancement in the narrow plane-parallel channel with the oval-trench dimple of fixed depth and spot area // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2017. V. 109. P. 40–62.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.01.103>
18. Isaev S., Leontiev A., Chudnovsky Y., Nikushchenko D., Popov I. and Sudakov A. Simulation of vortex heat transfer enhancement in the turbulent water flow in the narrow plane-parallel channel with an inclined oval-trench dimple of fixed depth and spot area // Energies. 2019. V. 12. № 1296. P. 1–24.
19. Isaev S., Gritckevich M., Leontiev A., Popov I. Abnormal enhancement of separated turbulent air flow and heat transfer in inclined single-row oval-trench dimples at the narrow channel wall // Acta Astronautica. 2019. V. 163. Part. A. P. 202–207.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.01.033>
20. Isaev S.A., Leontiev A.I., Milman O.O., Popov I.A., Sudakov A.G. Influence of the depth of single-row oval-trench dimples inclined to laminar air flow on heat transfer enhancement in a narrow micro-channel // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2019. V. 134. P. 338–358.
21. Isaev S.A., Gritckevich M.S., Leontiev A.I., Milman O.O., Nikushchenko D.V. Vortex enhancement of heat transfer and flow in the narrow channel with a dense packing of inclined one-row oval-trench dimples // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2019. V. 145. 118737. P. 1–13.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118737>
22. Isaev S., Leontiev A., Gritckevich M., Nikushchenko D., Guvernuyuk S., Sudakov A., Chung K.-M., Tryaskin N., Zubin M., Sinyavin A. Development of energy efficient structured plates with zigzag arrangement of multirow inclined oval trench dimples // Int. J. Thermal Sciences. 2023. V. 184. P. 107988.
23. Isaev S.A., Baranov P.A., Usachov A.E. Multiblock computational technologies in the VP2/3 package on aerothermodynamics. LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrucken, 2013. 316 p.
24. Menter F.R. Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper. 1993. № 93–2906. 21 p.
25. Van Doormaal J.P., Raithby G.D. Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow // Numerical Heat Transfer. 1984. V. 7. P. 147–163.
26. Leonard B.P. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1979. V. 19. № 1. P. 59–98.
27. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys. 1979. V. 32. P. 101–136.
28. Rhie C.M., Chow W.L. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation // AIAA J. 1983. V. 21. P. 1525–1532.
29. Pascau A., Garcia N. Consistency of SIMPLEC scheme in collocated grids. V European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2010. Lisbon, Portugal, 2010, 12 p.
30. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems, 2nd ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003. 567p.
31. Demidov D. AMGCL: C++ library for solving large sparse linear systems with algebraic multigrid method. <http://amgcl.readthedocs.org/>

УДК 532.62

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛЕНОЧНОЙ КОНДЕНСАЦИИ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ

© 2023 г. А. А. Куроедов^{a,*}, И. В. Лаптев^a, А. В. Суворов^{a,b}, С. Г. Черкасов^{a,**}

^aАО ГНЦ “Центр Келдыша”, Москва, Россия

^bМосковский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

*E-mail: kuroedov@kerc.msk.ru

**E-mail: sgcherkasov@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.03.2023 г.

После доработки 01.08.2023 г.

Принята к публикации 01.09.2023 г.

В рамках упрощенной физико-математической модели гидродинамических и тепловых процессов при нестационарной пленочной конденсации на вертикальной полубесконечной пластине рассматривается смена режимов течения пленки конденсата вдоль подстилающей поверхности под действием массовой силы. Модель используется для определения условий применимости приближения идеальной невесомости при рассмотрении пленочной конденсации. Установлено, что корректность использования приближения идеальной невесомости для расчета скорости роста толщины пленки на каком-либо участке пластины зависит не только от величины массовой силы, но и от времени и от расстояния между этим участком и носиком пластины.

Ключевые слова: пленочное течение, конденсация, приближение идеальной невесомости

DOI: 10.31857/S1024708423600173, **EDN:** RAQAVG

Гидродинамические и тепловые эффекты при нестационарной пленочной конденсации изучены в настоящее время относительно мало. Подавляющее число работ, посвященных пленочной конденсации, касается стационарного режима, и здесь к настоящему времени накоплено множество результатов [1, 2]. Одна из причин такого положения дел состоит в том, что в условиях земной силы тяжести стационарный режим устанавливается, как правило, сравнительно быстро, поэтому нестационарный режим не представляет большого практического интереса. Совершенно другая ситуация реализуется на борту космических аппаратов в условиях реальной невесомости, когда ускорение массовой силы может быть на 4–5 порядков меньше, чем на Земле. При этом скорость стекания конденсата также уменьшается на порядки, и время установления стационарного режима настолько растягивается, что нестационарный режим становится, с точки зрения практических приложений, наиболее интересным.

Для теоретических исследований гидродинамических и теплообменных процессов при микрогравитации часто используется приближение идеальной невесомости [3–6], когда наличие массовых сил полностью игнорируется. Понятно, что такой подход оправдан, если преобладающее влияние на изучаемые процессы оказывает не массовая сила, а другие физические факторы. Что же касается пленочной конденсации, то здесь необходимо отметить следующее. Все известные решения, описывающие стационарную пленочную конденсацию при определяющем влиянии массовой силы, не имеют прямых ограничений на величину массовой силы. Поэтому стационарные решения и для условий микрогравитации будут оставаться в силе, и не учитывать силу тяжести при этом нельзя, какой бы малой она не была. Однако для описания нестационарных режимов использование приближения идеальной невесомости не только привлекательно из-за возможности упрощений в постановке задачи, но и допустимо с физической точки зрения. Но здесь необходимо отметить, что, хотя приближение идеальной невесомости используется относительно часто, условия его применимости для задач пленочной конденсации практически не изучены.

Целью данной работы является исследование смены режимов течения при нестационарной пленочной конденсации на вертикальной полубесконечной пластине под действием массовой силы в рамках упрощенной физико-математической модели гидродинамических и тепловых процессов. Отметим, что использованная в данной работе физико-математическая модель не претендует на высокую точность. Например, не учитываются процессы волнообразования и влияние капиллярных сил. Эти процессы подробно изучались в работах [7–9], в том числе и при наличии фазовых переходов для пленки на бесконечной пластине. Однако для рассматриваемой задачи о пленке на полубесконечной пластине, развитый в работах [7–9] теоретический подход к описанию капиллярных эффектов напрямую неприменим из-за трудностей с постановкой граничных условий на носике пластины, где толщина пленки равна нулю. Если же отвлечься от влияния волнообразования и поверхностного натяжения, то использованная в данной работе модель основана на тех же базовых физических предположениях, что и модель [7–9]. Главное ее достоинство состоит в том, что она позволила для задачи о нестационарной конденсации на полубесконечной пластине получить результаты в виде простых аналитических формул. Это существенно упрощает физический анализ результатов и дает возможность для оценок, интересных с точки зрения практики (условия применимости приближения идеальной невесомости).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сначала конденсацию неподвижного насыщенного пара с температурой T_s , а безграничную плоскость с температурой T_w при полном отсутствии массовых сил, т.е. в условиях идеальной невесомости. Ясно, что в этом случае пленка будет нарастать однородно по всей плоскости, и жидкость в пленке будет неподвижна. Примем, что профиль температуры поперек пленки близок к линейному. Тогда

$$q = \frac{\lambda\theta}{\delta} \tag{1.1}$$

Здесь q – удельный тепловой поток в стенку, δ – толщина пленки конденсата, λ – коэффициент теплопроводности конденсата, $\theta = T_s - T_w$ перепад температуры на пленке.

Предполагается, что давление пара поддерживается постоянным, а температура поверхности жидкости фиксирована в соответствии с кривой насыщения. В дальнейшем будем считать, что тепло, выделившееся при фазовом переходе, полностью уходит в жидкую фазу и далее в стенку. Данное допущение правомерно при конденсации чистого пара, когда процесс конденсации лимитируется исключительно скоростью отвода тепла от поверхности раздела фаз в холодную стенку через жидкую пленку. Однако в случае конденсации из парогазовой смеси часть выделяющегося тепла может поступать также в газовую фазу. Поэтому в таких условиях необходимо учитывать процессы теплообмена и диффузии в газовой фазе. Один из подходов описания данных явлений (применительно к процессу испарения криогенной жидкости в атмосферу) представлен в работах [10, 11].

Используя связь между массой сконденсировавшегося пара и выделившимся при этом теплом, и выражая прирост массы в пленке через прирост ее толщины, получим

$$q = \rho r \frac{d\delta}{dt} \tag{1.2}$$

Здесь ρ – плотность конденсата, r – теплота фазового перехода, t – время. Из (1.1) и (1.2) можно легко получить уравнение, описывающее изменение толщины пленки

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\lambda\theta}{\rho r \delta} \tag{1.3}$$

Интегрируя уравнение (1.3) с учетом начального условия ($\delta = 0$ при $t = 0$) получим

$$\varphi = \delta^2 = \frac{2\lambda\theta}{\rho r} t \tag{1.4}$$

Рассмотрим теперь случай, когда параллельно плоскости действует некоторая массовая сила с ускорением g – рис. 1а. Под действием этой силы возникнет течение конденсата вдоль поверхности. В произвольном объеме пленки конденсата между сечениями $x = x_1$ и $x = x_2 = x_1 + \Delta x$ изменение толщины пленки обусловлено конденсацией на поверхности пленки, вытеканием кон-

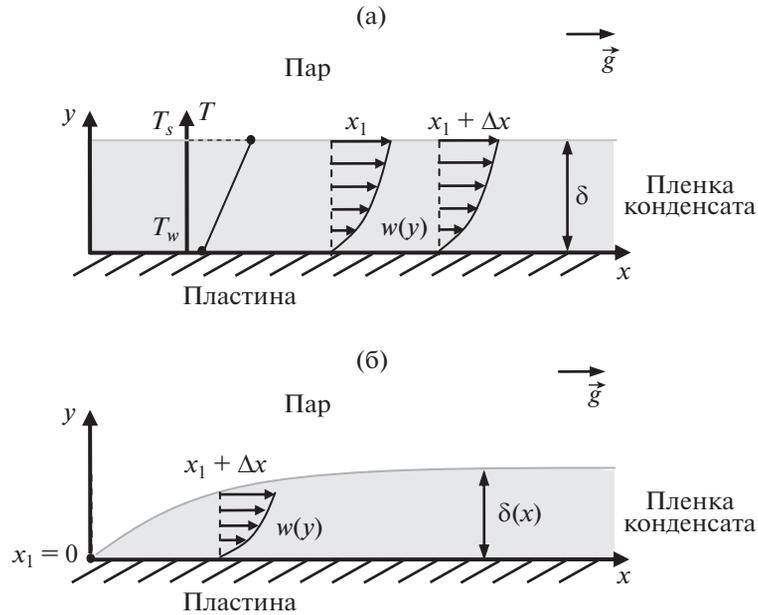


Рис. 1. Конденсация насыщенного пара на вертикальной пластине в поле силы тяжести: (а) – бесконечная пластина; (б) – полубесконечная пластина.

денсата через сечение x_2 и втеканием через сечение x_1 . Однако, поскольку расходы втекающего и вытекающего конденсата в рассматриваемом случае одинаковы, то течение не будет влиять на скорость роста толщины пленки. При этом формула (1.4) останется справедливой для любой точки поверхности.

Ситуация меняется, если пластина имеет верхнюю кромку (рис. 1б), которую примем за начало координаты. Рассмотрим теперь объем между сечениями $x_1 = 0$ и $x_2 = x_1 + \Delta x$. Очевидно, что в этом случае нет никакого втекания конденсата в рассматриваемый объем через сечение x_1 , тогда как вытекание через сечение x_2 будет иметь место. Поэтому непосредственно вблизи верхней кромки пластины стекание конденсата под действием силы тяжести будет с самого начала процесса влиять на рост толщины пленки и формула (1.4) в этой зоне выполняться уже не будет.

Считаем, что течение пленки конденсата является ламинарным и волнообразование отсутствует, конвективный и кондуктивный переносы тепла вдоль пленки несущественны по сравнению с кондуктивным переносом тепла поперек нее, поперечный градиент скорости конденсата на границе раздела фаз равен нулю в силу малости отношения коэффициентов динамической вязкости для пара и жидкости. Также для упрощения полагаем, что температура насыщенного пара поддерживается постоянной по всему занимаемому объему. В рамках данных допущений уравнение движения и граничные условия к нему для стационарного случая будут иметь следующий вид [12]

$$g + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

$$w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \delta \quad (1.7)$$

Здесь w – составляющая скорости вдоль оси x , ν – кинематический коэффициент вязкости конденсата, y – поперечная к стенке координата. Из (1.5)–(1.7) вытекают следующие выражения для поперечного профиля скорости в пленке и объемного расхода конденсата F через пленку

$$w = \frac{g}{\nu} \left(y\delta - \frac{1}{2}y^2 \right) \quad (1.8)$$

Таблица 1. Параметры задачи формирования пленки конденсата для различных веществ [14–16]

Вещество	T_s , К	T_w , К	ρ , кг/м ³	λ , Вт/(м · К)	c_p , Дж/(кг · К)	r , кДж/кг	ν , м ² /с
H ₂ O	323	300	988	0.643	4181	2382.5	5.51×10^{-7}
NH ₃	303	300	600	0.470	2510	1158.7	2.27×10^{-7}
C ₃ H ₈	303	300	490	0.028	1800	332.5	1.96×10^{-8}

$$F = \int_0^{\delta} w dy = \frac{g\delta^3}{3\nu} \tag{1.9}$$

При рассмотрении нестационарной пленочной конденсации в более общей постановке в [13] для профиля скорости поперек пленки было получено следующее выражение

$$w(t, y) = \frac{g}{\nu} \left(y\delta \left(1 - \frac{y}{2\delta} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\delta^2}{\gamma_n^3} e^{-\alpha_n} \sin \left(\gamma_n \frac{y}{\delta} \right) \right) \tag{1.10}$$

где $\gamma_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}$; $\alpha_n = \frac{\nu\gamma_n^2}{\delta^2} t$; ν – коэффициент кинематической вязкости.

Наибольший вклад в сумму в выражении (1.10) дает первый член ряда ($n = 1$). Для дальнейших оценок воспользуемся соотношением (1.4). Тогда

$$\alpha_1 = \frac{\nu\pi^2\rho r}{8\lambda\theta}$$

Как легко убедиться, для параметров задачи, представленных в табл. 1 для воды, аммиака и пропана, параметр α_1 по порядку величины лежит в диапазоне $10^{-5} - 10^{-2}$, что позволяет использовать формулу (1.8) вместо соотношения (1.10).

Отметим, что в рассматриваемом случае $\delta = \delta(x, t)$, $w = w(x, y, t)$, $F = F(x, t)$. Обозначим через j удельный поток массы конденсата в пленку, тогда баланс массы для пленки запишется в виде

$$\frac{j}{\rho} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \tag{1.11}$$

Как отмечалось ранее, профиль температуры поперек пленки считается линейным. В более общей постановке [13] профиль температуры описывается следующим выражением

$$T(t, y) = T_w + (T_s - T_w) \frac{y}{\delta} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n} \sin \left(\pi n \frac{y}{\delta} \right) \tag{1.12}$$

где $A_n = \frac{(-1)^n}{n} (T_s - T_w)$, $\beta_n = \frac{an^2\pi^2}{\delta^2} t$; $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ – коэффициент температуропроводности.

Как и в случае профиля скорости, наибольший вклад в сумму в выражении (1.12) дает первый член ряда ($n = 1$). Вводя число Прандтля $Pr = \frac{\nu}{a}$, можно записать

$$\beta_1 = \frac{\nu\pi^2}{Pr\delta^2} t = \frac{4\alpha_1}{Pr}$$

Как видно, если $Pr \sim 1$, то $\beta_1 \sim \alpha_1$. Это означает, что можно пренебречь вкладом нелинейного члена в выражении (1.12) и считать профиль температуры линейным.

Тогда, используя связь между сконденсировавшейся массой и выделившимся при этом теплом, можно записать

$$j = \frac{q}{r} = \frac{\lambda\theta}{r\delta} \quad (1.13)$$

Подставляя теперь (1.13) в (1.11) и используя (1.9), получим уравнение

$$\frac{g}{v}\delta^2 \frac{\partial\delta}{\partial x} + \frac{\partial\delta}{\partial t} = \frac{\lambda\theta}{\rho r\delta} \quad (1.14)$$

Будем рассматривать случай, когда момент времени $t = 0$ соответствует моменту начала конденсации. Тогда граничное и начальное условия для уравнения (1.12) будут иметь вид

$$\delta|_{x=0} = 0, \quad \delta|_{t=0} = 0$$

Преобразуем уравнение (1.14) к следующему виду

$$\frac{\rho g r}{2v\lambda\theta} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\rho r}{2\lambda\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 1 \quad (1.15)$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем обозначения

$$A = \frac{\rho r}{2\lambda\theta}, \quad B = \frac{g}{v}$$

Тогда уравнение (1.15) можно записать в виде

$$AB\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} + A \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 1 \quad (1.16)$$

Аналогичное уравнение было получено при исследовании катящихся волн на поверхности стекающей пленки конденсата в рамках длинноволнового приближения в работе [9].

Уравнение (1.16) является уравнением в частных производных. Введем новые зависимую и независимую переменные по формулам

$$f = A \frac{\varphi}{t}, \quad \eta(x, t) = 2 \frac{A x}{B t^2} \quad (1.17)$$

Предположим теперь, что функция f является функцией единственной переменной η . Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f' \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2f' \frac{A}{B} t^{-2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = f' \frac{\partial \eta}{\partial t} = -4f' \frac{Ax}{B} t^{-3}, \quad f' = \frac{df}{d\eta} \quad (1.18)$$

Подставляя формулы (1.17) и (1.18) в уравнение (1.16), его можно свести к следующему дифференциальному уравнению

$$f - 2(\eta - f)f' = 1 \quad (1.19)$$

Стоит отметить, что уравнение (1.19) является частным случаем уравнения, полученного в работе [7] при $p = 0$ и $C = 1/2$.

2. РЕШЕНИЕ

Решением рассматриваемой задачи является функция $f(\eta) = A\delta^2 t^{-1}$, удовлетворяющая соотношениям (1.17) и обеспечивающая выполнение граничного и начального условий

$$\delta|_{x=0} = 0 \quad (2.1)$$

$$\delta|_{t=0} = 0 \quad (2.2)$$

Уравнение (1.19) имеет два точных решения

$$f_1 = \eta^{1/2} \quad (2.3)$$

$$f_2 = 1 \quad (2.4)$$

Отметим, что решение (2.3) обеспечивает выполнение граничного условия (2.1), но не соответствует начальному условию (2.2). Более того, при переходе к размерным переменным время вообще “выпадает” из этого решения, которое преобразуется к виду

$$\delta_1 = \left(\frac{2x}{AB}\right)^{1/4} = \left(4x \frac{\lambda\theta_V}{\rho r g}\right)^{1/4} \quad (2.5)$$

Как легко убедиться, это решение является классическим решением Нуссельта [1, 2] для стационарной пленочной конденсации на вертикальной пластине. При этом стационарное течение конденсата в пленке описывается, в соответствии с формулами (1.8), (1.9) и (2.5), выражениями

$$w_1 = B \left(y \left(\frac{2x}{AB}\right)^{1/4} - \frac{1}{2} y^2 \right) \quad (2.6)$$

$$F_1 = \frac{B}{3} \left(\frac{2x}{AB}\right)^{3/4} \quad (2.7)$$

Что касается решения (2.4), то оно, наоборот, обеспечивает выполнение начального условия (2.2), но не соответствует граничному условию (2.1). В размерных переменных это решение можно переписать в виде

$$\delta_2 = \left(\frac{t}{A}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\lambda\theta_t}{\rho r}\right)^{1/2} \quad (2.8)$$

Отметим, что при переходе к размерным переменным из решения “выпадает” и пространственная координата x . Это означает, что данное решение описывает пленку, толщина которой однородно нарастает по поверхности. Отметим также, что формально решение (2.8) совпадает с формулой (1.4), полученной для случая конденсации на безграничной плоскости в условиях идеальной невесомости. Однако совпадение касается только толщины пленки. При выводе формулы (1.4) конденсат в пленке предполагался неподвижным, тогда как формула (2.8) получена в предположении о течении конденсата. При этом независимость толщины пленки от координаты означает, что течение в пленке является плоскопараллельным. Подставляя (2.8) в (1.8) и (1.9), получим следующие выражения для поперечного профиля скорости и объемного расхода через пленку

$$w_2 = B \left(y \left(\frac{t}{A}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} y^2 \right) \quad (2.9)$$

$$F_2 = \frac{B}{3} \left(\frac{t}{A}\right)^{3/2} \quad (2.10)$$

Отметим, что функции f_1 и f_2 совпадают в точке $\eta = 1$. Рассмотрим теперь функцию (рис. 2а)

$$f_3 = f_1 = \eta^{1/2} \quad \text{при} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (2.11)$$

$$f_3 = f_2 = 1 \quad \text{при} \quad 1 \leq \eta \leq \infty \quad (2.12)$$

Как легко убедиться, функция f_3 является точным решением уравнения (1.19) при всех значениях η обеспечивает выполнение обоих условий (2.1) и (2.2), поэтому данная функция является точным решением рассматриваемой физической задачи в рамках принятой математической модели. Отметим, что функция $f_3(\eta)$ является непрерывной, но имеет разрыв производной f' в точке $\eta = 1$ (имеет слабый разрыв на линии $2Ax = Bt^2$ (рис. 2 б), которая является характеристикой уравнения (1.19)). Это обстоятельство, однако, никак не нарушает непрерывности второго слагаемого в уравнении (1.19), поскольку коэффициент перед производной в точке $\eta = 1$ равен нулю.

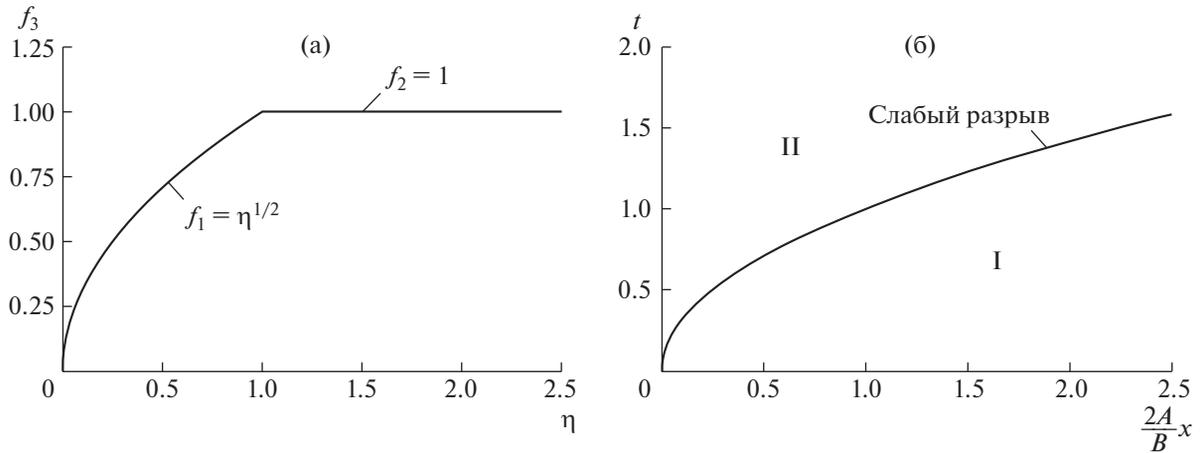


Рис. 2. (а) Точное решение уравнения (1.19) с граничными условиями (2.1) и (2.2); (б) область I – однородная по пространству пленочная конденсация; область II – классическое решение Нуссельта.

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

3.1. Толщина пленки

Для упрощения анализа рассмотрим участок пластины от $x = 0$ до $x = L$. Отметим, что, в рамках принятой физико-математической модели, задача для данного участка полубесконечной пластины полностью эквивалентна задаче для конечной пластины длиной L .

Введем новые безразмерные переменные по формулам

$$\tilde{x} = \frac{x}{M_x}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{M_t}, \quad \tilde{\delta} = \frac{\delta}{M_\delta}, \quad \psi = \tilde{\delta}^2 \quad (3.1)$$

$$M_x = L, \quad M_t = \left(\frac{2AL}{B}\right)^{1/2}, \quad M_\delta = \left(\frac{2L}{AB}\right)^{1/4} \quad (3.2)$$

Перейдем теперь от функции f_3 автомодельной переменной η более удобным для физического анализа переменным $\tilde{\delta}$, \tilde{x} и \tilde{t} (безразмерная толщина пленки, безразмерная координата и безразмерное время). В этих переменных решение (2.11) и (2.12) имеет вид

$$\tilde{\delta} = (\tilde{x})^{1/4} \quad \text{при} \quad 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_* \quad (3.3)$$

$$\tilde{\delta} = (\tilde{t})^{1/2} \quad \text{при} \quad \tilde{x}_* \leq \tilde{x} \leq 1 \quad (3.4)$$

$$\tilde{x}_* = \tilde{t}^2 \quad (3.5)$$

Формулы (3.3)–(3.5) имеют простой физический смысл (рис. 3). Если время не слишком велико, то рассматриваемый участок пластины в каждый момент времени разделяется координатой \tilde{x}_* на две зоны: $0 \leq \tilde{x} < \tilde{x}_*$ и $\tilde{x}_* < \tilde{x} \leq \infty$. В первой зоне все гидродинамические и тепловые параметры стационарны – здесь реализуется классическое решение Нуссельта для стационарной пленочной конденсации. В частности, толщина пленки, скорость жидкости в пленке и объемный расход жидкости через пленку описываются формулами (2.5), (2.6) и (2.7). Во второй зоне процесс конденсации нестационарен. При этом толщина пленки здесь однородна по пространству и нарастает во времени с такой же скоростью, как при идеальной невесомости (как легко убедиться, формула (3.4) является безразмерной формой уравнения (1.4)). Однако, в отличие от случая идеальной невесомости, конденсат в пленке не является неподвижным (рис. 4). Течение здесь таково, что поле скорости, в отличие от первой зоны, не зависит от продольной пространственной координаты, но изменяется во времени, в соответствии с формулами (2.9) и (2.10).

В дальнейшем будем называть точку с координатой $\tilde{x}_*(\tilde{t})$ разделяющей точкой. Отметим, что эта точка перемещается вниз по потоку в соответствии с формулой (3.5). В рамках принятой ма-

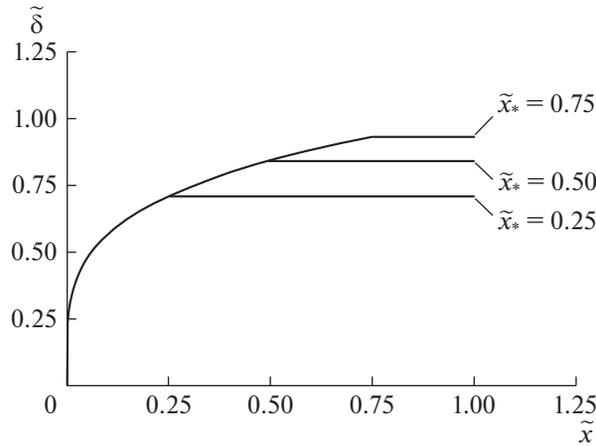


Рис. 3. Распределение безразмерной толщины пленки конденсата в различные моменты времени.

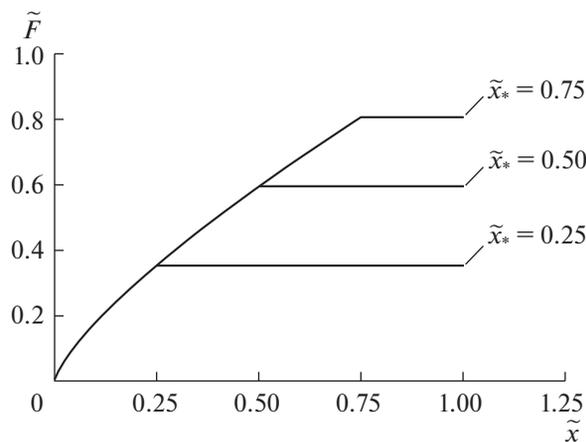


Рис. 4. Распределение безразмерного объемного расхода $\tilde{F} = 3F$ в различные моменты времени.

тематической модели стационарный режим на каком-либо участке поверхности устанавливается сразу после того, как разделяющая точка проходит этот участок. Поэтому граница области стационарного решения сдвигается со временем вниз по потоку в соответствии с формулой (3.5) и область стационарного решения со временем распространяется на все большую площадь. В частности, в случае конечной пластины через некоторое время стационарный режим охватит всю пластину и это время можно легко рассчитать по формуле (3.5). Интересно отметить, что аналогичный сценарий установления стационарного режима (“кинематическая волна”) обнаружен в работе [17] при исследовании пленочной конденсации на пластине из движущегося потока пара при отсутствии массовых сил.

Используя соотношения (3.1), (3.2) и (3.5), можно получить выражение для времени установления стационарного профиля пленки на пластине длины L размерном виде

$$t = \sqrt{\frac{\rho r v}{\lambda g \theta}} L \tag{3.6}$$

Так, для воды, аммиака и пропана (табл. 1) время перехода к стационарному режиму конденсации на пластине длиной 0.2 м в условиях микрогравитации ($g = 10^{-4} \text{ м/с}^2$), реализуемых, например, на борту космического аппарата, превышает 100 с – 419 с, 473 с, 276 с соответственно. Как следует из полученных оценок, в условиях микрогравитации время формирования стационарного профиля пленки становится уже макроскопическим.

Как отмечалось выше, разделяющая точка является точкой разрыва производных. Полученное решение таково, что все производные по времени равны нулю при $\tilde{x} < \tilde{x}_*$ и отличны от нуля при $\tilde{x} > \tilde{x}_*$, а пространственные производные, наоборот, равны нулю при $\tilde{x} > \tilde{x}_*$ и отличны от нуля при $\tilde{x} < \tilde{x}_*$. Покажем, что, в рамках принятой математической модели, этот разрыв существует уже в начальный момент времени. Используя переменные (3.1), преобразуем основное уравнение (1.16) и условия (1.13) к виду

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\psi^2) + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{t}} = 1 \quad (3.7)$$

$$\psi|_{\tilde{x}=0} = 0 \quad (3.8)$$

$$\psi|_{\tilde{t}=0} = 0 \quad (3.9)$$

Из условия (3.9) следует

$$\frac{\delta \psi}{\delta \tilde{x}}|_{\tilde{t}=0} = 0 \quad (3.10)$$

Отметим, что уравнение (3.7) и условие (3.8), как и условие (3.9), выполняются, в том числе, и в начальный момент времени. Тогда, подставляя (3.10) в (3.7), получим, что, в начальный момент времени для всех значений \tilde{x}

$$\frac{\delta \psi}{\delta \tilde{t}}|_{\tilde{t}=0} = 1 \quad (3.11)$$

С другой стороны, поскольку условие (3.8) справедливо для любого времени, то из этого условия следует, что в точке $\tilde{x} = 0$

$$\frac{\delta \psi}{\delta \tilde{t}}|_{\tilde{t}=0} = 0 \quad (3.12)$$

Сравнивая (3.11) и (3.12), видим, что в начальный момент времени в точке $\tilde{x} = 0$ уже имеет место разрыв производной по времени. Аналогично можно показать, что в начальный момент времени в точке $\tilde{x} = 0$ имеет место также разрыв производной и по пространственной координате. Таким образом, разрыв производных в разделяющей точке \tilde{x}_* существует уже в начальный момент времени, и в дальнейшем он “сносится” вниз по потоку вместе с разделяющей точкой в соответствии с формулой (3.5).

Наличие разрыва производных связано, разумеется, с тем, что принятая математическая модель учитывает далеко не все факторы. Однако относительная грубость этой математической модели, как показано выше, приводит к решениям в виде простых формул. Поэтому данная модель может быть полезным инструментом для проведения различных оценок, необходимых в инженерной практике. Для примера рассмотрим вопрос о том, когда при пленочной конденсации в условиях микрогравитации можно полностью пренебречь наличием массовых сил при расчете теплообмена.

3.2. Тепловой поток

Обозначим через Q интегральный тепловой поток в стенку на участке пластины длиной L

$$Q = \int_0^L q dx = \int_0^L \frac{\lambda \theta}{\delta} dx = \int_0^1 \frac{\lambda \theta}{\delta} d\tilde{x} \quad (3.13)$$

Ниже будем использовать индекс “0” для обозначения параметров, относящихся к идеальной невесомости, а те же параметры без индекса будем относить к случаю наличия массовой силы. Тогда, используя полученные результаты, можно получить

$$\frac{Q_0}{Q} = \left(1 + \frac{1}{3} \tilde{t}^2\right)^{-1} \quad \text{при } \tilde{t} \leq 1 \quad (3.14)$$

$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{3}{4} (\sqrt{\tilde{t}})^{-1} \quad \text{при } \tilde{t} \geq 1 \quad (3.15)$$

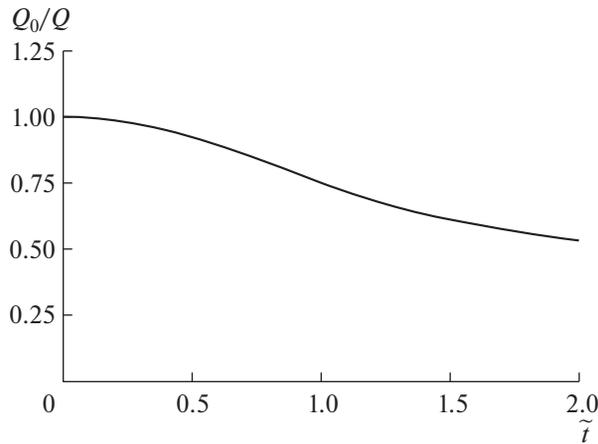


Рис. 5. Временное изменение относительного интегрального теплового потока в пластину.

Отметим, что безразмерное время $\tilde{t} = 1$ соответствует моменту, когда стационарный режим устанавливается на всем рассматриваемом участке пластины. Формулы (3.14) и (3.15) иллюстрируются на рис. 5. Как видно, сначала тепловые потоки Q и Q_0 совпадают, но со временем разница между ними нарастает, причем при наличии массовой силы тепловой поток больше, чем при невесомости. Этот результат вполне предсказуем, т.к. толщина пленки при наличии силы тяжести со временем выходит на стационарное значение, тогда как при невесомости она все время растет. Отметим, что в момент времени, когда стационарный режим устанавливается на всем рассматриваемом участке пластины, тепловой поток, вычисленный в приближении идеальной невесомости, составляет 75% от теплового потока при наличии массовой силы. После момента времени $\tilde{t} = 1$ тепловой поток, соответствующий невесомости, продолжает уменьшаться, тогда как тепловой поток при наличии силы тяжести уже не меняется и в момент времени $\tilde{t} = 2$ их отношение составляет уже 0.53.

Используя формулы (3.5) и (3.14), можно получить удобную для оценок формулу

$$\frac{Q - Q_0}{Q_0} = \frac{1}{3} \tilde{x}_* \tag{3.16}$$

Как уже отмечалось, полученные в данном разделе формулы пригодны для задачи о конденсации на пластине конечного размера. В этом случае величина \tilde{x}_* равна доле, которую занимает область стационарного режима от общей длины пластины, а эта доля растет со временем согласно формуле (3.5). Тогда из формулы (3.16) следует, что погрешность при использовании приближения идеальной невесомости тем меньше, чем меньше доля стационарного участка и, соответственно, чем меньше время после начала процесса. В частности, из формулы (3.16) следует, что приближение идеальной невесомости для расчета интегрального теплового потока можно использовать с погрешностью не выше 3.5% до тех пор, пока доля стационарного участка не превышает 10%. При этом локальная величина теплового потока при $\tilde{x} \geq \tilde{x}_*$ будет описываться точно. Таким образом, возможность применения приближения идеальной невесомости для задач пленочной конденсации зависит не только от величины ускорения массовой силы, но и от размера поверхности и времени после начала процесса.

Используя соотношения (3.16), (3.2) и (3.5), можно установить момент времени, до которого погрешность определения интегрального теплового потока в рамках приближения идеальной невесомости не будет превосходить некоторой величины ϵ

$$t_\epsilon = \sqrt{\frac{3\epsilon\rho r v}{\lambda g \theta}} L \tag{3.17}$$

Так, при конденсации воды, аммиака и пропана (табл. 1) на пластине длиной 0.2 м в условиях микрогравитации ($g = 10^{-4}$ м/с²) при $\epsilon = 0.035$ время t_ϵ будет составлять 136, 153 и 89 с соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках упрощенной физико-математической модели исследованы течение и теплообмен при нестационарной пленочной конденсации на вертикальной пластине. Показано, что в рамках данной модели задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, для которого найдено точное решение.

Получено, что развитие процесса происходит следующим образом. В каждый момент времени имеется точка, которая разделяет пластину на две зоны. В первой зоне (от носика пластины до разделяющей точки) реализуется классическое стационарное решение Нуссельта для пленочной конденсации на вертикальной пластине. В области за разделяющей точкой реализуется нестационарное решение, в котором, несмотря на наличие течения конденсата, толщина пленки нарастает во времени однородно по пространству, причем с тем же темпом, что и при отсутствии массовой силы, когда конденсат неподвижен.

Получены формулы, описывающие продвижение разделяющей точки вниз по потоку с течением времени. Полученные результаты показывают, что корректность использования приближения идеальной невесомости для расчета скорости роста толщины пленки на каком-либо участке пластины зависит не только от величины массовой силы, но и от времени и от расстояния между этим участком и носиком пластины. Для пластины конечной длины показано, что применение приближения идеальной невесомости для расчета интегрального теплового потока приводит к нарастающей во времени погрешности, которая составляет приблизительно 3.5%, когда длина стационарной зоны составляет 10% от полной длины пластины, и увеличивается до 33% в момент установления стационарного режима по всей длине пластины.

По данным результатам получена формула для оценки интервала времени, на котором справедливо приближение идеальной невесомости. В качестве критерия используется интегральный тепловой поток, поглощаемый подстилающей поверхностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория тепломассообмена: учебник для вузов / под ред. А.И. Леонтьева. 3-е изд., испр. и доп. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 462 с.
2. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. Учебник для вузов 3-е изд., пер. и доп. М.: Энергия, 1975. 488 с.
3. Ажаев В.С., Черкасов С.Г. Развитие гидродинамической неустойчивости при пленочной конденсации на цилиндрической трубке в невесомости // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 106–110.
4. Ажаев В.С., Черкасов С.Г. Стационарный режим конденсации насыщенного пара на конической поверхности в условиях невесомости // ТВТ. 1996. Т. 34. № 5. С. 816–819.
5. Kuznetsov S.A., Cherkasov S.G. Investigation of the heat transfer and evolution of the condensate film during saturated vapor condensation on a tube in zero gravity and on a cone in gravity // Russ. J. Eng. Thermophys. 2000. V. 10. № 3. P. 187–199.
6. Куроедов А.А., Черкасов С.Г., Лантев И.В., Мусеева Л.А. Конденсация газа наддува в топливном баке с разделительной диафрагмой в условиях невесомости // Тепловые процессы в технике. 2021. Т. 13. № 4. С. 155–163.
7. Frolovskaya O.A., Pukhnachev V.V. Traveling waves and structures of a film flow with phase transitions in the Nakoryakov–Ostapenko–Bartashevich model // J. Eng. Thermophys. 2018. V. 27. № 3. P. 273–284.
8. Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., Bartashevich M.V. Rolling waves on the surface of a thin layer of viscous liquid at phase transition // Int. J. Heat Mass Transfer. 2015. V. 89. P. 846–855.
9. Накоряков В.Е., Остапенко В.В., Барташевич М.В. Исследование катящихся волн на поверхности стекающей пленки конденсата // Докл. РАН. 2014. Т. 454. № 5. С. 540–544.
10. Смирнов Н.Н., Зверев Н.И., Щепотьев Н.А., Дехтяренко Л.А., Якубович Д.М. Нестационарное испарение жидкого кислорода в атмосферу // ФГВ. 1989. Т. 25. № 3. С. 73–78.
11. Smirnov N.N., Dekhtyarenko L.A., Zverev N.I. Condensed gas evaporation into the atmosphere // Heat Mass Trans. V. 36. № 13. P. 3393–3398.
12. Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: ВО “Наука”. Сибирская издательская фирма, 1992. 256 с.
13. Логинов В.С., Озерова И.П. Оценка нестационарной теплоотдачи при пленочной конденсации пара на вертикальной пластине // Изв. ГПУ. Инжиниринг георесурсов. 2003. Т. 306. № 6. С. 67–69.
14. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
15. Leng D.E., Comings E.W. Thermal conductivity of propane // Ind. Eng. Chem. 1957. V. 49. № 12. P. 2042–2045.
16. Diller D.E. Measurements of the viscosity of saturated and compressed liquid propane // J. Chem. Phys. 1965. V. 42. № 6. P. 2089–2100.
17. Balasubramaniam R., Mohammad M., Hasan Transient condensation of flowing vapor on a flat-plate: A scaling analysis // Int J. Heat Mass Transfer. 2015. V. 91. P. 793–799.

УДК 532.59:539.3

ДЕФОРМАЦИИ И ВОЛНОВЫЕ СИЛЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ НАГРУЗКИ ПО ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ И НАЛИЧИИ ТЕЧЕНИЯ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

© 2023 г. Л. А. Ткачева^{а,*}

^аИнститут гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

*E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 24.03.2023 г.

После доработки 10.06.2023 г.

Принята к публикации 10.07.2023 г.

Изучаются деформации ледяного покрова на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под действием движущейся прямолинейно с постоянной скоростью области давления при наличии течения со сдвигом скорости, а также волновые силы, действующие на движущееся тело. Течение жидкости не потенциально. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной с учетом равномерного сжатия. Движение нагрузки может происходить под произвольным углом к направлению течения. Предполагается, что в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, прогиб льда является установившимся. Использован метод преобразования Фурье в рамках линейной теории волн. Исследованы зависимости максимальных деформаций ледяного покрова и волновых сил от градиента скорости течения, направления движения и коэффициента сжатия.

Ключевые слова: тонкая упругая плавающая пластина, изгибно-гравитационные волны, сдвиговое течение, движущаяся нагрузка, критическая скорость, волновые силы, деформации

DOI: 10.31857/S1024708423600203, EDN: QXOXEV

Интенсивное освоение Арктики вызывает интерес к решению задач, связанных с взаимодействием различных возмущений в жидкости с ледяным покровом. В настоящее время наиболее полно изучена задача о воздействии динамических возмущений и возбуждении изгибно-гравитационных волн для безграничного однородного ледяного покрова. Ледяной покров обычно моделируется тонкой упругой пластиной, плавающей на поверхности воды. Достаточно хорошо исследованы процессы развития и распространения изгибно-гравитационных волн в покоящейся в невозмущенном состоянии среде или в потоке жидкости, текущей с постоянной по глубине скоростью (см., например, [1–12]). Однако в реальных морских условиях существуют подледные течения, вертикальное распределение скорости может меняться и по величине, и по направлению.

Влияние сдвига скорости в подледном течении на изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове в настоящее время изучено недостаточно. Значительно лучше исследовано воздействие сдвига скорости на поверхностные волны. Обзор полученных результатов можно найти в работе [13], в которой исследованы критические скорости и прогиб ледяного покрова в зависимости от градиента скорости течения, направления движения и коэффициента сжатия под действием движущейся прямолинейно с постоянной скоростью области давления. Настоящая работа является продолжением работы [13] – с помощью решения [13] изучаются деформации ледяного покрова и волновые силы, действующие на движущееся тело.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечный ледяной покров, плывущий на поверхности потока идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H с вертикальным сдвигом скорости. Ледяной покров моделируется упругой бесконечной пластиной постоянной толщины. В подвижной декартовой системе координат $Oxuz$, связанной с пластиной, с центром O на верхней границе жидко-

сти, осью Ox , направленной противоположно основному течению, и осью Oz , направленной вертикально вверх, вектор скорости жидкости можно представить в виде

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = (U(z) + u, v, w), \quad U(z) = \gamma z$$

где γ – константа, основное течение жидкости $U(z)$ не потенциально, имеет постоянную завихренность, u, v, w – возмущенные компоненты скорости, малые по сравнению с основным течением. Предполагается, что заданное внешнее давление p_0 равномерно распределено по прямоугольной области шириной $2b$ и длиной $2a$. Область давления движется с постоянной скоростью V под углом ψ к оси Ox . Давление внешней нагрузки равно $p_0 = gM/(4ab)$, где M – масса движущегося тела, g – ускорение свободного падения. Данная нагрузка моделирует судно на воздушной подушке.

Рассмотрим движение жидкости. Скорость течения жидкости удовлетворяет уравнениям Эйлера и неразрывности

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla P/\rho - g\mathbf{i}_z, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ P &= -\rho gz + p \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь d/dt – полная производная по времени, P – гидродинамическое давление, которое складывается из гидростатической части и возмущенного гидродинамического давления p , ρ – плотность жидкости, \mathbf{i}_z – единичный орт оси Oz . Прогиб ледяного покрова $\eta(x, y, t)$ описывается уравнением изгиба тонких упругих пластин Кирхгофа-Лява

$$\begin{aligned} D\Delta^2\eta + Q\Delta\eta + \rho_0 h d^2\eta/dt^2 &= -\rho g\eta + p(x, y, 0, t) - p_0(x, y, t) \\ \Delta &= \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга, ρ_0, h – плотность и толщина льда, ν – коэффициент Пуассона, Q – сжимающие усилия в пластине.

Ставятся граничные условия: условие непротекания на дне

$$w(x, y, -H, t) = 0 \quad (1.3)$$

а на верхней границе жидкости кинематическое условие

$$w(x, y, 0, t) = d\eta/dt \quad (1.4)$$

и динамическое условие (1.2). Условие излучения ставится в следующем виде: перед нагрузкой распространяются только те волны, групповая скорость которых больше скорости нагрузки.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введем безразмерные переменные, параметры и функции по формулам

$$(x', y', z', H', b') = (x, y, z, H, b)/a, \quad a' = 1, \quad t' = t\sqrt{g/a}$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{ag}}, \quad S = \gamma\sqrt{a/g}, \quad \beta = \frac{D}{\rho ga^4}, \quad q = \frac{Q}{\rho ga^2}, \quad \chi = \frac{\rho_0 h}{\rho a}$$

$$(U', u', v', w') = (U, u, v, w)/\sqrt{ag}, \quad \eta' = \eta/a, \quad (p', p'_0) = (p, p_0)/(\rho ga)$$

Штрихи далее опускаем. Поскольку мы ищем стационарное решение в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, то в исходной системе координат, связанной с ледяной пластиной, возмущенные скорости движения жидкости имеют вид

$$(u, v, w) = (u(\mathbf{r}_1, z), v(\mathbf{r}_1, z), w(\mathbf{r}_1, z)), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{F}t$$

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{F} = (F \cos \psi, F \sin \psi)$$

В предположении малости возмущенных скоростей по сравнению с основным течением уравнения (1.1) линеаризуются. Применяем преобразование Фурье по переменным x, y . Неизвестные функции u, v, w, η, p ищем в виде

$$(u, v, w)(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y)$$

$$\eta(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{\eta}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y$$

$$p(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{p}(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y$$

С помощью обратного преобразования Фурье из уравнений (1.1)–(1.4) получаем решение. В системе координат Ox_1y_1z , повернутой относительно исходной системы координат на угол ψ , с осью Ox_1 , направленной вдоль линии движения, осью Oy_1 , перпендикулярной ей, прогиб ледяного покрова выражается формулами [13]

$$\eta(x_1, y_1) = -\frac{p_0}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{f_1(k, \sigma)}{f(k, \sigma)} e^{ik(x_1 \cos \sigma + y_1 \sin \sigma)} dk d\sigma \quad (2.1)$$

$$f(k, \sigma) = [\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi k^2 F^2 \cos^2 \sigma - SF \cos(\sigma + \psi) \cos \sigma] \text{th} k H - k F^2 \cos^2 \sigma$$

$$f_1(k, \sigma) = \frac{\sin(ka \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma) \text{th} k H}{k \sin \sigma \cos \sigma}$$

Если скорость движения нагрузки больше критической, функция $f(k, \sigma)$ имеет нули $k_1 = k_1(\sigma)$ и $k_2 = k_2(\sigma)$, $k_1 < k_2$ в некоторых областях значений угла σ . Поэтому при этих значениях угла σ интеграл по k в выражении (2.1) является интегралом в смысле главного значения. Контур интегрирования деформируется таким образом, чтобы выполнить условие излучения. Известно, что групповая скорость изгибно-гравитационных волн больше их фазовой скорости для коротких волн и меньше для длинных волн. Короткие волны соответствуют упругой ветви дисперсионной кривой, а длинные волны – гравитационной ветви. Поэтому при $\cos \sigma > 0$ корень k_1 обходится сверху, а корень k_2 – снизу, при $\cos \sigma < 0$ – наоборот.

Согласно линейной теории упругости деформации пластины изменяются по толщине по линейному закону. Тензор максимальных деформаций имеет вид

$$e(x_1, y_1) = -\frac{h}{2} \begin{pmatrix} \eta_{x_1 x_1} & \eta_{x_1 y_1} \\ \eta_{x_1 y_1} & \eta_{y_1 y_1} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$(\eta_{x_1 x_1}, \eta_{y_1 y_1}, \eta_{x_1 y_1}) = \frac{2p_0}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(k(x_1 \cos \sigma + y_1 \sin \sigma)) k \text{th} k H}{f(k, \sigma)} (f_x, f_y, f_{xy}) dk d\sigma \quad (2.3)$$

$$f_x(k, \sigma) = \sin(ka \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma) \cos \sigma / \sin \sigma$$

$$f_y(k, \sigma) = \sin(ka \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma) \sin \sigma / \cos \sigma$$

$$f_{xy}(k, \sigma) = \sin(ka \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma)$$

Подынтегральная функция в (2.1) при $k \rightarrow \infty$ имеет порядок $O(k^{-5})$. При вычислении компонентов тензора (2.2) подынтегральная функция (2.3) имеет порядок $O(k^{-3})$ при $k \rightarrow \infty$, сходимость интеграла в этом случае значительно хуже. При $0 < k < K$ интеграл вычислялся с помо-

щью выделения особенности и добавления соответствующих вычетов. При $k > K$ можно положить $\text{th}kH = 1$, где $K \approx 20/H$. Подынтегральная функция преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} & \sin(ka \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma) \cos(k(x_1 \cos \sigma + y_1 \sin \sigma)) = \\ & = [\cos(k((x_1 + a) \cos \sigma + (y_1 - b) \sin \sigma)) + \cos(k((x_1 - a) \cos \sigma + (y_1 + b) \sin \sigma)) - \\ & - \cos(k((x_1 + a) \cos \sigma + (y_1 + b) \sin \sigma)) - \cos(k((x_1 - a) \cos \sigma + (y_1 - b) \sin \sigma))] / 4 \end{aligned}$$

Выделяя главный член при $k \rightarrow \infty$, представим функцию $1/f$ в виде

$$\frac{1}{f(k, \sigma)} = \frac{1}{\beta k^4} + \frac{k^2(q + \chi F^2 \cos^2 \sigma) - 1 + SF \cos \sigma \cos(\sigma + \psi) + kF^2 \cos^2 \sigma}{\beta k^4 f(k, \sigma)}$$

Интеграл от первого слагаемого по k в (2.3) вычисляется аналитически, а второй член имеет порядок $O(k^{-6})$. Таким образом, сходимость значительно улучшилась.

Для оценки вероятности разрушения ледяного покрова движущимся телом достаточно рассмотреть случай $y_1 = 0$, так как наибольшие деформации ожидаются на линии движения. Отметим, что при $\psi = 0, \pi$ вычисление $\eta_{x_1 y_1}$ упрощается, в силу симметрии интеграл по k определяется вкладом вычетов.

Главные значения тензора деформаций e_m определяются как собственные значения матрицы, составленной из компонентов тензора. В линейной теории упругости напряжения и деформации связаны линейной зависимостью. Необходимо, чтобы деформации и напряжения не превышали предельных значений, при которых начинаются пластические деформации и разрушение. Экспериментально полученные в [14] критические значения максимальных деформаций для льда составляют $4.4 \times 10^{-5} - 8.5 \times 10^{-5}$. В работе [15] использовалось критическое значение максимальных деформаций $e_* = 8 \times 10^{-5}$, которое используется ниже.

Волновое сопротивление F_1 и боковая сила F_2 , действующие на движущееся тело, определяются формулами

$$(F_1, F_2) = -p_0 \int_{-a-b}^a \int_{-b}^b \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta}{\partial y_1} \right) dx_1 dy_1$$

Подставляя в эти формулы выражение (2.1) для прогиба ледяного покрова, получаем

$$\begin{aligned} F_1 &= i \frac{4p_0^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi\infty} \int_0^{2\pi\infty} \frac{\sin^2(ka \cos \sigma) \sin^2(kb \sin \sigma) \text{th}kH}{k^2 \sin^2 \sigma \cos \sigma f(k, \sigma)} dk d\sigma \\ F_2 &= i \frac{4p_0^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi\infty} \int_0^{2\pi\infty} \frac{\sin^2(ka \cos \sigma) \sin^2(kb \sin \sigma) \text{th}kH}{k^2 \sin \sigma \cos^2 \sigma f(k, \sigma)} dk d\sigma \end{aligned}$$

В силу симметрии вклад в эти интегралы дают только вычеты в нулях знаменателя. Получаем

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{8p_0^2}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left[\frac{\sin^2(k_1 a \cos \sigma) \sin^2(k_1 b \sin \sigma) \text{th}k_1 H}{k_1^2 \sin^2 \sigma \cos \sigma f'(k_1, \sigma)} - \frac{\sin^2(k_2 a \cos \sigma) \sin^2(k_2 b \sin \sigma) \text{th}k_2 H}{k_2^2 \sin^2 \sigma \cos \sigma f'(k_2, \sigma)} \right] d\sigma \\ F_2 &= \frac{8p_0^2}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left[\frac{\sin^2(k_1 a \cos \sigma) \sin^2(k_1 b \sin \sigma) \text{th}k_1 H}{k_1^2 \sin \sigma \cos^2 \sigma f'(k_1, \sigma)} - \frac{\sin^2(k_2 a \cos \sigma) \sin^2(k_2 b \sin \sigma) \text{th}k_2 H}{k_2^2 \sin \sigma \cos^2 \sigma f'(k_2, \sigma)} \right] d\sigma \end{aligned}$$

где (σ_1, σ_2) – интервал значений угла σ в правой полуплоскости, при которых имеются нули дисперсионной функции $f(k, \sigma)$, штрих означает производную функции f по переменной k .

Безразмерные коэффициенты волновых сил определяются формулами

$$(A_1, A_2) = \frac{g\rho}{2bp_0^2} (-F_1, F_2)$$

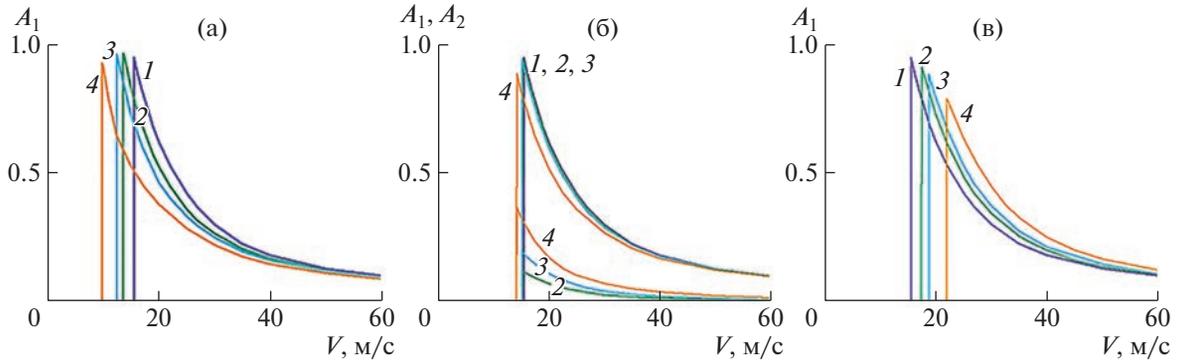


Рис. 1. Зависимости безразмерных коэффициентов волновых сил A_1, A_2 от скорости движения нагрузки при $\bar{Q} = 0$: (а–в) – $\psi = 0, \pi/2, \pi$; 1–4 – $S = 0, 0.3, 0.5, 1$.

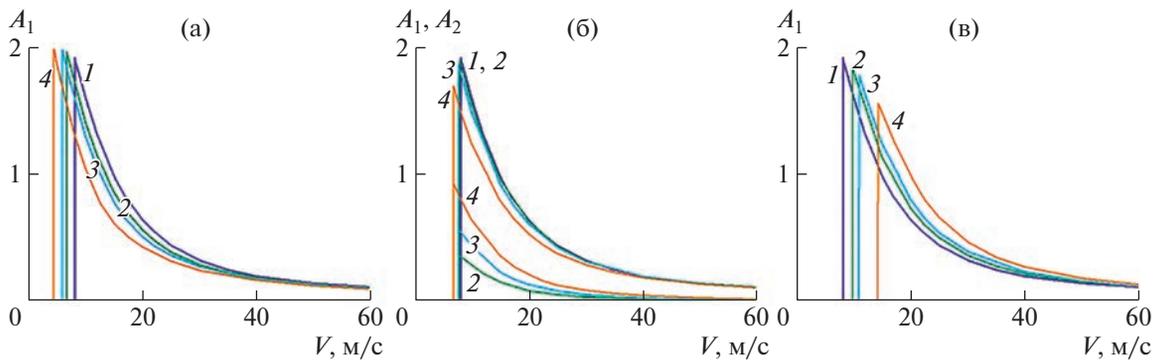


Рис. 2. Зависимости безразмерных коэффициентов волновых сил A_1, A_2 от скорости движения нагрузки при $\bar{Q} = 1.5$, (а–в) – $\psi = 0, \pi/2, \pi$; 1–4 – $S = 0, 0.3, 0.5, 1$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчеты проводились для ледяного покрова при следующих входных параметрах задачи: $E = 5$ ГПа, $\rho = 1025$ кг/м³, $\rho_0 = 922.5$ кг/м³, $\nu = 0.3$, толщина льда $h = 1$ м, глубина жидкости $H = 100$ м, $p_0 = 1000$ Н/м², $a = 20$ м, $b = 10$ м, скорость движения нагрузки $V = 20$ м/с. Сжимающие усилия в пластине заданы в виде $Q = \bar{Q}\sqrt{\rho g D}$, $\bar{Q} = 0$ и 1.5.

На рис. 1 представлены графики зависимости безразмерных коэффициентов волновых сил A_1, A_2 от скорости движения нагрузки при $\bar{Q} = 0$, $\psi = 0, \pi/2, \pi$ и различных значениях параметра S . При скорости, меньшей критической, волн нет, и волновые силы равны нулю. Максимальные значения прогиба ледяного покрова достигаются при скоростях, близких к критическим. Соответственно максимальные значения волновых сил также достигаются при скоростях, близких к критическим. Максимальные различия критических скоростей при изменении градиента скорости течения (параметра S) наблюдаются при углах $\psi = 0$ и $\psi = \pi$ (рис. 2 [13]). Поэтому максимальное отличие кривых безразмерного волнового сопротивления A_1 при различных значениях параметра S наблюдается также при $\psi = 0$ и $\psi = \pi$.

Из графиков следует, что при движении нагрузки против течения ($\psi = 0$) при увеличении градиента скорости потока волновое сопротивление уменьшается, что на первый взгляд неожиданно. Объясняется это тем, что с ростом параметра S при $\psi = 0$ уменьшается критическая скорость, а прогиб ледяного покрова максимален вблизи критической скорости. Поэтому при увеличении параметра S при фиксированной скорости движения нагрузки прогиб ледяного покрова становится меньше, соответственно волновое сопротивление уменьшается. При движении по течению волновое сопротивление увеличивается с ростом параметра S в области сверхкритиче-

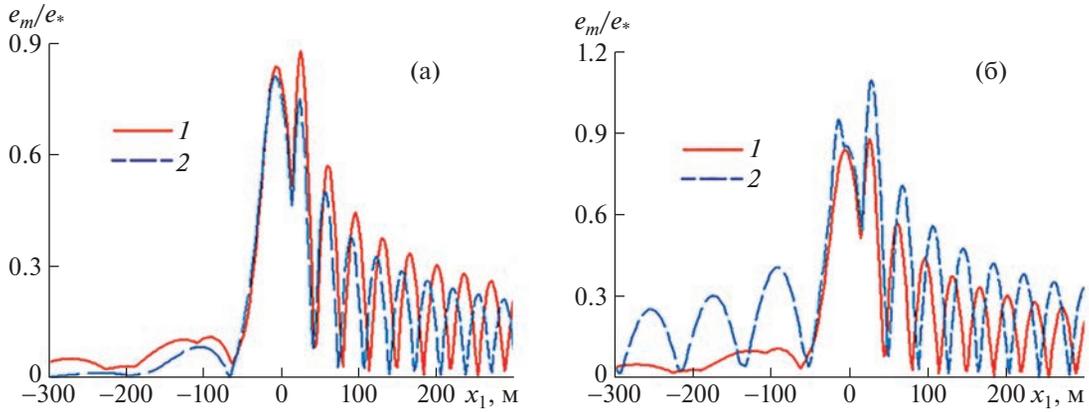


Рис. 3. Зависимости от координаты x_1 максимальных деформаций ледяного покрова e_m/e_* при $y_1 = 0$, $\bar{Q} = 0$, $V = 20$ м/с: (а–б) – $\psi = 0, \pi$; 1–2 – $S = 0, 0.4$.

ских скоростей. При $\psi = \pi/2$ критические скорости оказываются близкими при различных значениях параметра S , потому кривые 1–3 на рис. 1б практически совпадают. В этом случае максимального значения достигает боковая сила. Боковая сила A_2 существенно меньше волнового сопротивления A_1 .

На рис. 2 изображены такие же графики, что на рис. 1, но при $\bar{Q} = 1.5$. Видно, что при $\bar{Q} = 1.5$ поведение зависимостей волновых сил от скорости движения нагрузки аналогично, но значения их приблизительно в два раза выше.

Максимальные деформации ледяного покрова также происходят при скоростях движения нагрузки, близких к критической. Стационарное решение при равномерном движении нагрузки с критической скоростью по упругой плавающей пластине в линейном приближении не существует. Для определения ограниченного решения при критической скорости необходимо привлекать нелинейные модели или учитывать структурное демпфирование пластины.

На рис. 3 приведены зависимости от координаты x_1 максимальных деформаций ледяного покрова, отнесенных к критическому значению e_* , при $y_1 = 0$, $\bar{Q} = 0$, $V = 20$ м/с, $\psi = 0$ и $\psi = \pi$, $S = 0$ и $S = 0.4$. Видно, что при движении нагрузки против течения максимальные деформации меньше, чем в отсутствие течения, а при движении по течению больше и превышают допустимый уровень деформаций. Ледяной покров может разрушиться при движении нагрузки по течению. Это объясняется тем, что скорость $V = 20$ м/с близка к критической скорости $V = 18.7$ м/с при $\psi = \pi$. Однако, если скорость движения нагрузки меньше этого значения, то волн не будет при движении по течению, и деформации ледяного покрова могут быть как меньше, так и больше, чем при движении против течения.

На рис. 4 представлены аналогичные зависимости при $\bar{Q} = 1.5$. При $\bar{Q} = 0$ максимальные деформации больше перед нагрузкой, а при $\bar{Q} = 1.5$ за нагрузкой. При $\bar{Q} = 1.5$ максимальные деформации значительно выше, чем при $\bar{Q} = 0$, допустимый уровень максимальных деформаций превышен в обоих случаях. Сжатие льда приводит к повышению прогиба и деформаций ледяного покрова.

На рис. 5 показаны зависимости максимальных деформаций e_m/e_* от координаты x_1 при $y_1 = 0$ (а) и от координаты y_1 при $x_1 = 0$ (б) при $\bar{Q} = 0$, $V = 20$ м/с, $\psi = \pi/2$, $S = 0$ и $S = 0.4$. В этом случае течение поперек линии движения не влияет практически на зависимость максимальных деформаций от координаты x_1 , поскольку критическая скорость при $\psi = \pi/2$ приблизительно равна критической скорости в отсутствие течения [13], но зависимость от координаты y_1 существенна.

Наибольшие деформации происходят под областью нагрузки. На рис. 6 представлены изолинии максимальных деформаций e_m/e_* при $\bar{Q} = 0$, $V = 20$ м/с, $S = 0.4$, $\psi = \pi/2$ (а) и $\psi = \pi$. В обо-

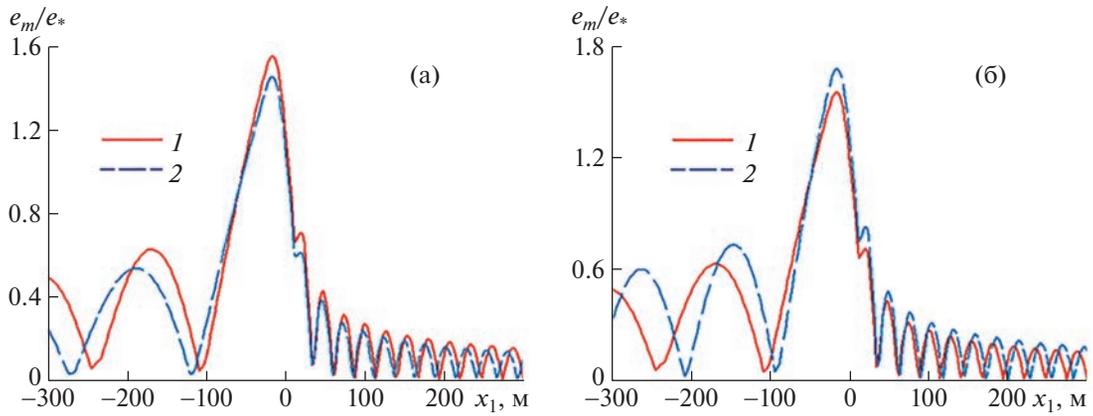


Рис. 4. Зависимости от координаты x_1 максимальных деформаций ледяного покрова e_m/e_* при $y_1 = 0$, $\bar{Q} = 1.5$, $V = 20$ м/с: (а-б) – $\psi = 0, \pi$; 1–2 – $S = 0, 0.4$.

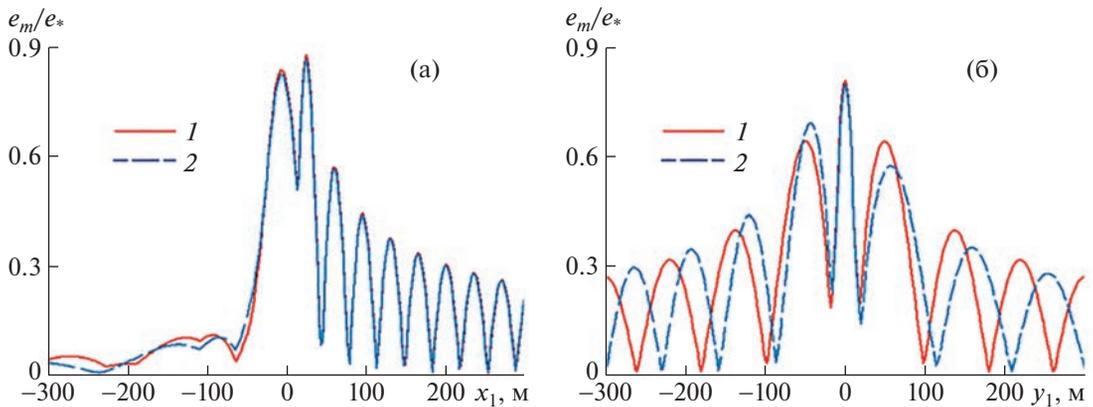


Рис. 5. Зависимости от координаты x_1 при $y_1 = 0$ (а) и от координаты y_1 при $x_1 = 0$ (б) максимальных деформаций ледяного покрова e_m/e_* при $\bar{Q} = 0$, $V = 20$ м/с, $\psi = \pi/2$: 1–2 – $S = 0, 0.4$.

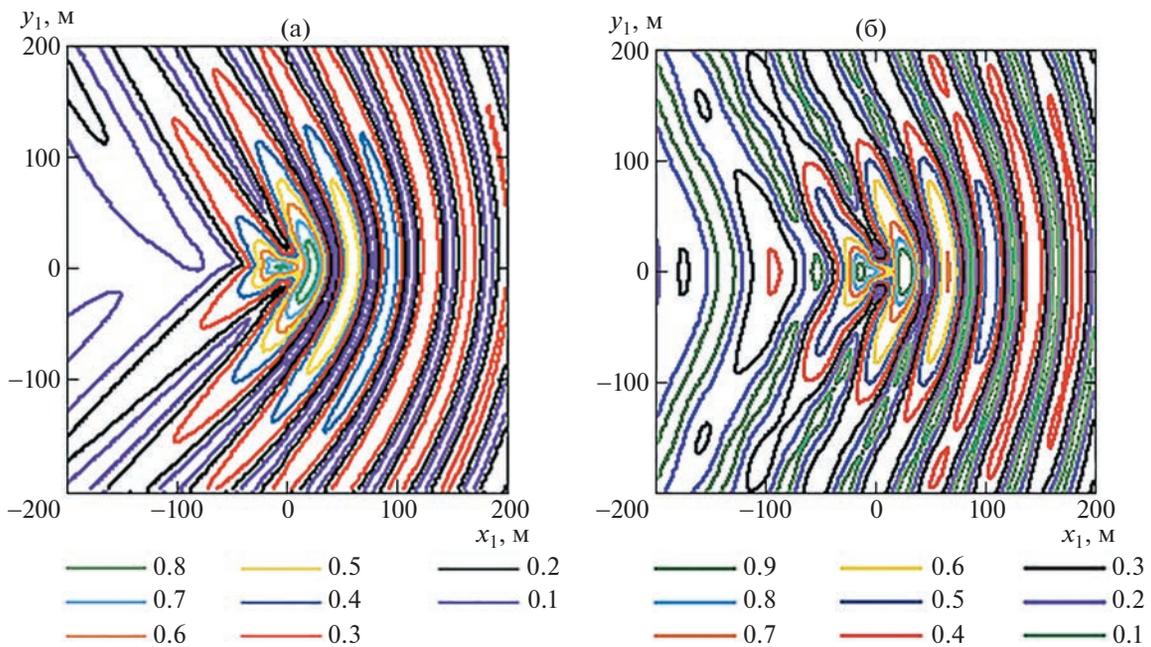


Рис. 6. Изолинии максимальных деформаций ледяного покрова e_m/e_* при $\bar{Q} = 0$, $V = 20$ м/с, $S = 0.4$: (а-б) – $\psi = \pi/2, \pi$.

их случаях амплитуды волн деформации перед нагрузкой значительно больше, чем в других направлениях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано влияние сдвига скорости жидкости на деформации ледяного покрова при равномерном прямолинейном движении нагрузки под произвольным углом к направлению течения с учетом однородного сжатия льда, а также волновые силы, действующие на тело. Поле скоростей жидкости не потенциально. Показано, что сдвиг скорости, направление движения нагрузки и коэффициент сжатия льда оказывают существенное влияние на максимальные деформации ледяного покрова и волновые силы. Максимальные деформации наблюдаются под нагрузкой при скоростях движения нагрузки, близких к критической. При увеличении коэффициента сжатия льда максимальные деформации значительно увеличиваются.

Волновое сопротивление уменьшается при движении нагрузки против течения и увеличивается при ее движении по течению в области сверхкритических скоростей. Боковая сила максимальна при движении нагрузки перпендикулярно течению. При увеличении коэффициента сжатия льда волновые силы значительно растут.

Следует отметить, что направление течения жидкости зависит от системы координат. Если в неподвижной системе координат ось Ox' направлена вдоль течения жидкости, то при переходе в систему координат, связанную с пластиной, жидкость течет в противоположном направлении. В данной работе и в статье [13] направление течения определяется в системе координат, связанной с пластиной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат. 1967. 215 с.
2. Davys J.W., Hosking R.I., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 269–287.
3. Schulkes R.M.S.M., Hosking R.J., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2 // J. Fluid Mech. 1987. V. 180. P. 297–318.
4. Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д. Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // ПМТФ. 1991. № 6. С. 51–57.
5. Жесткая В.Д., Козин В.М. Исследования напряженно-деформированного состояния полубесконечного ледяного покрова под действием движущейся нагрузки // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 5. С. 112–117.
6. Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N.W. A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangle load // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 173–197.
7. Squire V.A. Moving Loads on Ice Plates. / V.A. Squire, R.J. Hosking, A.D. Kerr, et al. Dordrecht: Kluwer, 1996.
8. Das S., Sahoo T., Meylan M.H. Dynamics of flexural gravity waves: from sea ice to Hawking radiation and analogue gravity // Proc. R. Soc. A 2018. V. 474. P. 20170223.
9. Sturova I.V. Unsteady three-dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications // J. Fluid Mech. 2013. V. 730. P. 392–418.
10. Козин В.М., Погорелова А.В., Земляк В.Л., Верецагин В.Ю., Рогожникова В.Е., Кипин Д.Ю., Матюшина А.А. Экспериментально-теоретические исследования зависимости параметров, распространяющихся в плавающей пластине изгибно-гравитационных волн от условий их возбуждения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 221 с.
11. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Морской гидрофизический институт РАН. Севастополь. 2017. 357 с.
12. Bao-yu Ni, Duan-feng Han, Shao-cheng Di, Yan-zhuo Xue On the development of ice-water-structure interaction // J. Hydrodynamics. 2020. V. 32. № 4. P. 629–652. <https://doi.org/10.1007/s42241-020-0047-8>
13. Ткачева Л.А. Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии течения со сдвигом скорости // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 2. С. 113–122.
14. Squire V., Martin S. A field study of the physical properties, response to swell, and subsequent fracture of a single ice floe in the winter Bering sea. Technical report 18. University of Washington. 1980.
15. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. The response of ice cover to a load moving along a frozen channel // Appl. Ocean Res. 2016. V. 59. P. 313–326.

УДК 532.522

ПРИСТЕННЫЕ ЛАМИНАРНЫЕ ЗАКРУЧЕННЫЕ СТРУИ

© 2023 г. А. М. Гайфуллин^{а,*}, А. С. Щеглов^{а,**}

^аЦентральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

*E-mail: gaifullin@tsagi.ru

**E-mail: shcheglov@phystech.edu

Поступила в редакцию 05.06.2023 г.

После доработки 20.06.2023 г.

Принята к публикации 25.06.2023 г.

Рассмотрена задача об определении характеристик пристенной ламинарной закрученной струи несжимаемой жидкости. Получены численные решения уравнений Навье–Стокса в стационарной и нестационарной постановках. Показано, что на больших расстояниях от источника струи характеристики струи подчиняются автомодельному закону, как и при истечении трехмерной ламинарной незакрученной струи, но распространение струи при этом происходит под некоторым углом к первоначальному направлению выдува струи. При большой закрутке потока в струе возникают области рециркуляционного течения, течение в струе становится нестационарным.

Ключевые слова: пристенная струя, затопленная струя, закрученная струя, автомодельное решение, рециркуляционное течение, уравнения Навье–Стокса

DOI: 10.31857/S1024708423600343, EDN: TWTIDE

Пристенные струи – струи, распространяющиеся вдоль твердой поверхности. Несмотря на практическую важность изучения пристенных струй, исследованию течения в них посвящено небольшое количество публикаций. В основном это экспериментальные исследования турбулентных пристенных струй, которые можно условно разделить на плоские струи [1–4], трехмерные незакрученные струи [5–12], трехмерные закрученные струи [13]. Численные исследования плоских пристенных струй проводились в работах [14, 15], трехмерных пристенных незакрученных струй – в [16–19]; авторам не известны работы по численному исследованию трехмерных пристенных закрученных струй.

Для ламинарных пристенных струй теоретические и численные исследования проводились только для плоских и трехмерных незакрученных струй. Впервые задача о плоской ламинарной струе, вытекающей из тонкой щели параллельно твердой поверхности, была решена в рамках уравнений пограничного слоя [20] и через три года повторена в [21]. Успеху в решении задачи способствовал тот факт, что в плоском случае удалось найти инвариант, сохраняющий свое значение в любом поперечном сечении струи. Наличие инварианта позволило теоретически определить параметр автомодельности, отвечающий за изменение характеристик струи вдоль продольной координаты x , толщина струи растет пропорционально $x^{3/4}$, а продольная компонента скорости затухает как $x^{-1/2}$.

В случае трехмерной пристенной струи, вытекающей из практически точечного источника параллельно твердой поверхности, течение можно описать с помощью параболизированных уравнений Навье–Стокса, в которых пренебрегают неперспективными членами: продольным градиентом давления и вторыми производными вдоль продольной координаты в вязких членах уравнений. В [22] сделано предположение, что на больших расстояниях от источника струи решение должно выходить на автомодельный режим. Но для определения параметра автомодельности в [22] был применен закон сохранения момента импульса потока, который на самом деле не сохраняется. Значение параметра автомодельности и связанные с ним различные характеристики струи получены в работе [23]. Так как инвариантного решения для трехмерной пристенной струи на сегодняшний день не построено, параметр автомодельности можно определить только с помощью численного решения задачи [24], что и было сделано в [23]. Как правило, при отсутствии инварианта невозможно получить универсальные характеристики. Так, в случае трехмерной

пристенной струи профили компонент скорости и давления будут меняться в зависимости от формы и высоты над плоскостью выходного отверстия струи, от профиля скорости в выходном сечении и от числа Рейнольдса. Но, как показано в [23], универсальные профили все же можно построить, если предположить, что инвариант, хоть и не найден, но существует и если имеется асимптотическое решение задачи в некоторых областях.

В данной статье рассмотрены трехмерные пристенные закрученные ламинарные струи. В результате исследований авторы попытались ответить на следующие вопросы. Подчиняются ли характеристики в дальнем поле струи автомодельным законам, и если да, то зависит ли параметр автомодельности от закрутки струи? Линия, вдоль которой происходит распространение струи при наличии закрутки, уже не будет прямой. Является ли в дальнем поле эта линия параллельной оси x , вдоль которой выдувается струя, наклонена ли к ней под некоторым углом? Решению этих и некоторых других вопросов посвящена данная статья.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившееся течение несжимаемой жидкости. Введем декартову систему координат x_1, y_1, z_1 . Компоненты скорости \mathbf{V}_1 в этой системе координат обозначим через u_1, v_1, w_1 . Плотность жидкости ρ , давление p_1 , кинематический коэффициент вязкости ν . Бесконечная твердая плоскость определяется уравнением $y_1 = 0$. Струя выдувается из круглой цилиндрической трубы радиуса a параллельно твердой плоскости в направлении оси x_1 в затопленное пространство. Центр входного сечения трубы имеет координаты $x_1 = 0, y_1 = h_1, z_1 = 0$. Аналогично [25] закрутка струе придается вращением внутренней поверхности трубы. Внешняя поверхность трубы не вращается. На выходном сечении трубы со стороны потока струя закручена по часовой стрелке.

Определим безразмерные координаты и переменные

$$x = \frac{x_1}{a}, \quad y = \frac{y_1}{a}, \quad z = \frac{z_1}{a}, \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}_1}{u_{1*}}, \quad p = \frac{p_1 - p_{1\infty}}{\rho u_{1*}^2}, \quad \text{Re} = \frac{u_{1*} a}{\nu}$$

где u_{1*} — среднерасходная продольная скорость жидкости в трубе.

Течение жидкости будем считать ламинарным, его характеристики удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса

$$\text{div} \mathbf{V} = 0, \quad (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\text{grad} p + \text{Re}^{-1} \Delta \mathbf{V} \quad (1.1)$$

В [23] было также показано, что характеристики трехмерной пристенной струи при больших числах Рейнольдса можно определить в приближении параболизированных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.3)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (1.4)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1.5)$$

В случае незакрученной трехмерной пристенной струи при больших x решение уравнений (1.2)–(1.5) стремится к автомодельному с параметром автомодельности, равным $4/3$

$$u(x, y, z) = \text{Re}^{5/3} x^{-5/3} U(\eta, \xi)$$

$$v(x, y, z) = \text{Re}^{1/3} x^{-4/3} V(\eta, \xi)$$

$$w(x, y, z) = \text{Re}^{1/3} x^{-4/3} W(\eta, \xi)$$

$$p(x, y, z) = \text{Re}^{2/3} x^{-8/3} P(\eta, \xi)$$

$$\eta = \frac{y \text{Re}^{4/3}}{x^{4/3}}, \quad \xi = \frac{z \text{Re}^{4/3}}{x^{4/3}}.$$

Таким образом, толщина и ширина трехмерной пристенной незакрученной ламинарной струи растут пропорционально $x^{4/3}$.

При заданной форме и высоте над поверхностью выходного сечения трубы характеристики пристенной закрученной ламинарной струи будут зависеть от нескольких начальных параметров, заданных в сечении истечения струи: расхода, закрутки, числа Рейнольдса. Определим недостающие параметры. Будем считать, что труба, из которой выдувается струя, достаточно длинная, чтобы в сечениях, не близких к выходному, установился профиль Пуазейля для продольной компоненты скорости и твердотельное вращение для азимутальной скорости v_φ

$$u = 2(1 - r^2), \quad v_\varphi = \Omega r \tag{1.6}$$

Здесь безразмерный радиус r отсчитывается от оси трубы, $\Omega_1 = (u_* / a)\Omega$ угловая скорость вращения жидкости в трубе, учтено то, что среднерасходная скорость $u_* = 1$, а максимальная скорость $u_{\max} = 2$. Под закруткой будем понимать величину $S = \Omega_1 a / u_{1\max} = \Omega / 2$.

На выходе из трубы струя обладает импульсом J_x в направлении оси x и близким к нулю импульсом J_z в направлении оси z

$$J_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u^2 dy dz, \quad J_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u w dy dz$$

Под действием сил трения жидкости о твердую поверхность продольный импульс струи с ростом x будет уменьшаться, а поперечный импульс будет сначала приобретаться, а затем уже теряться. Из уравнений (1.3) и (1.5)

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} = -\frac{1}{\text{Re}} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} dz, \quad \frac{\partial J_z}{\partial x} = -\frac{1}{\text{Re}} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} dz.$$

Выскажем гипотезу: на больших расстояниях от источника струи несимметрия в струе, вызванная вращением жидкости в выходном сечении, исчезнет; эволюция струи ничем не будет отличаться от эволюции незакрученной струи, но за счет приобретенного бокового импульса струя будет распространяться не вдоль оси x , а вдоль прямой линии, наклоненной к оси x на некоторый угол θ ; параметр автономности для закрученной струи совпадет с параметром автономности для незакрученной струи, т.е. будет равен $4/3$.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Численно с помощью метода конечных объемов решались уравнения Навье–Стокса (1.1). Аппроксимация конвективных членов проводилась по схеме второго порядка точности с разностями против потока, а диффузионных членов и давления – с помощью центральных разностей второго порядка точности. Уравнения импульсов и давления решаются совместно. Задача решается как псевдонестационарная методом установления с фиксированным шагом по псевдовремени.

Моделирование проводится на структурированной расчетной сетке с общим количеством ячеек 6×10^6 . На рис. 1 приведены параметры расчетной области и геометрические параметры трубы (поверхность трубы выделена серым цветом); пропорции между различными размерами на рис. 1 не соблюдаются. Расширяющаяся расчетная область позволяет сосредоточить большую часть ячеек внутри ядра струи.

На границах расчетной области были поставлены следующие граничные условия:

- В начальном сечении (5) заданы профили компонент скорости (1.6)

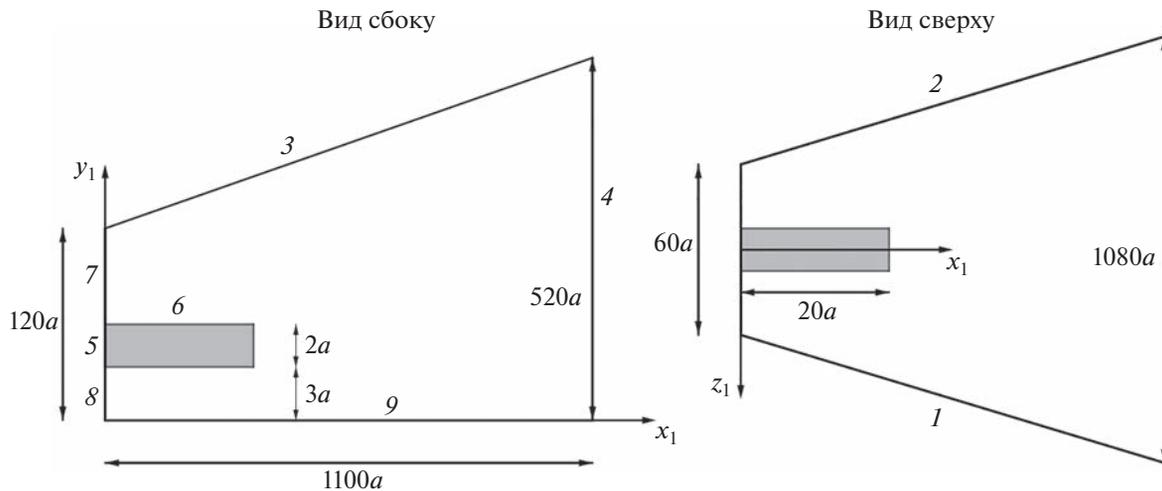


Рис. 1. Система координат задачи и геометрия расчетной области.

- На горизонтальной твердой поверхности (9) и на поверхностях (внутренней и внешней) трубы (6) задано условие прилипания
- На боковых (1), (2), верхней (3), передней (7, 8) и выходной (4) свободных границах поставлено условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

Установление решения отслеживается по величине массового расхода через границу (4) расчетной области. При этом величина невязок по уравнению импульса не превосходит 10^{-6} .

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для определенности будем считать, что центр выходного сечения трубы расположен на высоте $h_1 = 4a$ (рис. 1). Было проведено два расчета при $Re = 77$, $S = 0.56$ и $S = 0.33$.

Имеется некоторый произвол в выборе определения центра струи. В данной работе центром струи в сечении $x = \text{const}$ называется точка с координатами $y_c(x)$, $z_c(x)$, в которой имеет максимум составляющая скорости, параллельная твердой плоскости, т.е. функция $\sqrt{u^2(x, y, z) + w^2(x, y, z)}$ имеет максимум при фиксированном x . На рис. 2 представлены графики функций $y_c(x)$, $z_c(x)$, из которых следует, что действительно струя распространяется под некоторым углом к оси x . Очевидно, что этот угол зависит от начальной закрутки струи. При $S = 0.33$ и $S = 0.56$ эти углы соответственно равны 1.7° и 2.7° .

Введем понятие линии тока поперечного течения в сечении $x = x_0 = \text{const}$. Уравнение линий тока

$$\frac{dy}{v(x_0, y, z)} = \frac{dz}{w(x_0, y, z)}$$

На рис. 3а показаны линии тока поперечного течения при $x = 600$. Если вместо координат x , y , z ввести повернутую на угол θ систему координат ζ , y , τ (рис. 4), то в этой системе координат линии тока поперечного течения соответствуют показанным на рис. 3б. Линии тока на рис. 3б соответствуют аналогичным расчетам для незакрученной струи [23]. Определенный показатель автомодельности при распространении струи вдоль оси ζ соответствует значению $4/3$. Тем самым подтверждена гипотеза о соответствии в дальнем поле эволюции закрученной струи, повернутой на угол θ , эволюции незакрученной струи.

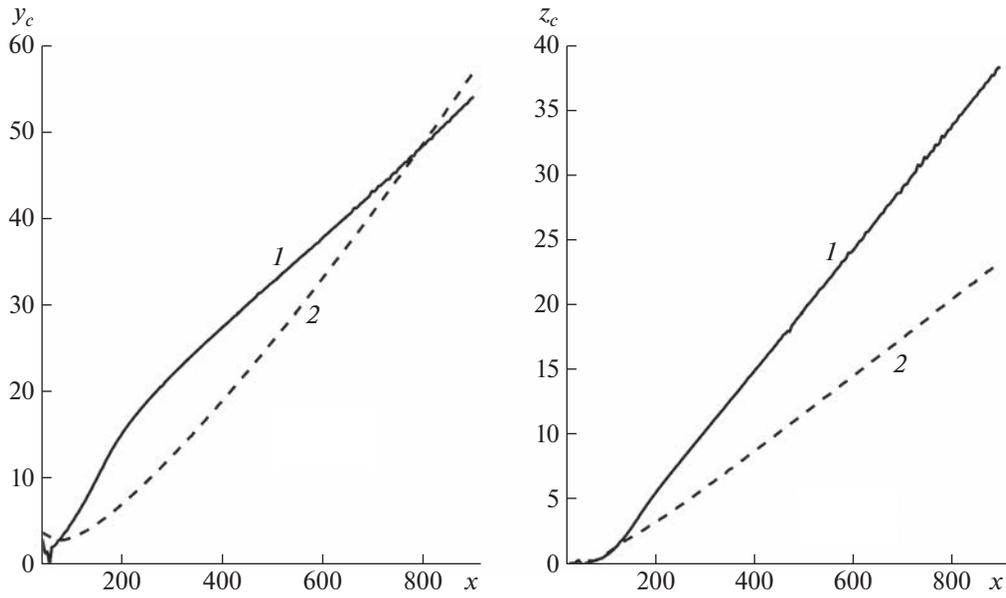


Рис. 2. Графики $y_c(x)$, $z_c(x)$: 1, 2 – $S = 0.56, 0.33$.

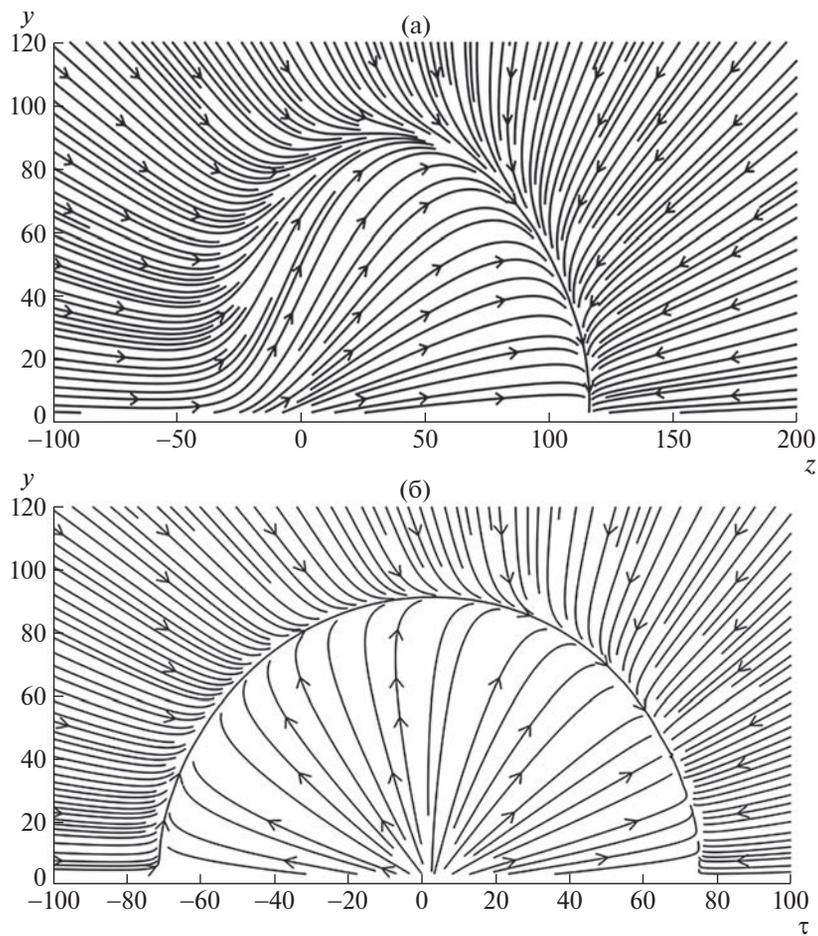


Рис. 3. (а) Линии тока поперечного течения при $Re = 77$ и $S = 0.56$ в сечении $x = 600$ в исходной системе координат. (б) Линии тока поперечного течения при $Re = 77$ и $S = 0.56$ в сечении $x = 600$ в новой системе координат.

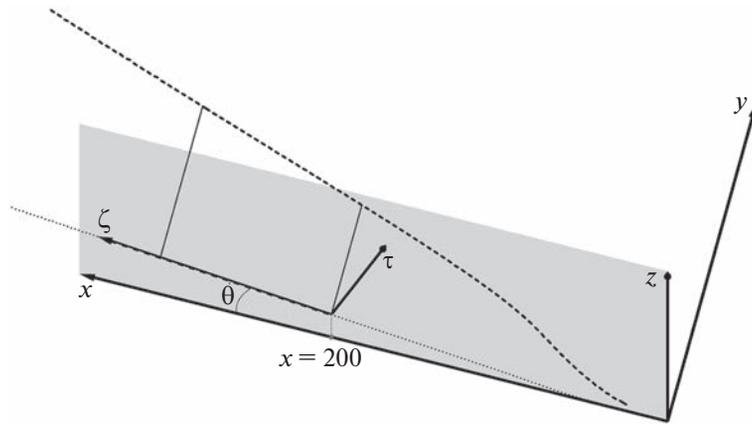


Рис. 4. Прямоугольные декартовы системы координат x, y, z и ζ, y, τ . Пунктир соответствует линии $y = y_c(x)$, $z = z_c(x)$, точки – проекции пунктирной линии на плоскость $y = 0$. Ось ζ направлена вдоль касательной к проекции пунктирной линии на плоскость $y = 0$ в точке $x = 200$.

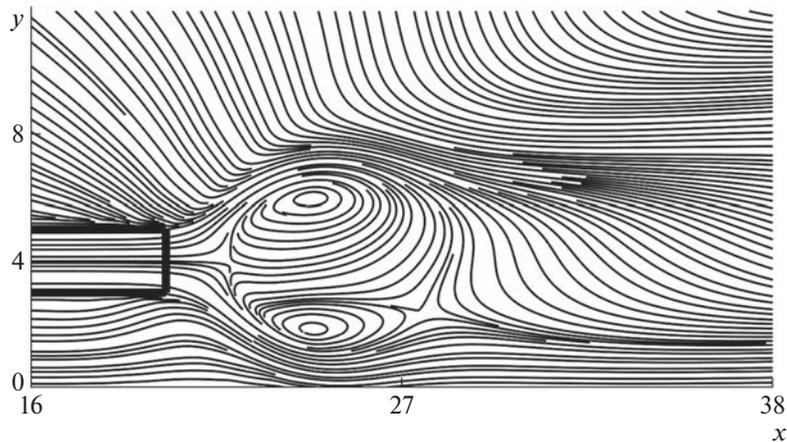


Рис. 5. Линии тока, соответствующие расчету при $S \approx 1.1$.

4. ОТСУТСТВИЕ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ S

Так же, как и в свободной струе, увеличение закрутки струи приводит к появлению в потоке областей рециркуляционного течения [26]. При появлении возвратного течения невязки при решении стационарных уравнений Навье–Стокса уже нельзя сделать меньше некоторой заданной величины. Этот факт указывает на необходимость решения задачи с помощью нестационарных уравнений Навье–Стокса.

Результаты расчетов представлены на рис. 5 и 6 в виде уже линий тока в сечении $z = 0$

$$\frac{dx}{u(x, y, 0)} = \frac{dy}{v(x, y, 0)}$$

При $S \approx 1.1$ нестационарность, хотя и присутствует, но картина линий тока слабо зависит от времени – рис. 5. Иное дело, когда закрутка струи становится еще больше, $S \approx 2.2$ – рис. 6. В этом случае в окрестности рециркуляционной области, геометрия которой сильно зависит от времени, образуются дополнительные вихри различного направления вращения. Течение становится периодическим. На рис. 6 представлено характерное изменение линий тока через равные промежутки времени в течение периода. Периодичность течения можно наблюдать и по изменению продольной компоненты скорости в заданной точке пространства. В качестве таковой выбрана точка на продолжении оси трубы, отстоящая на 4 радиуса от выходного сечения – рис. 7.

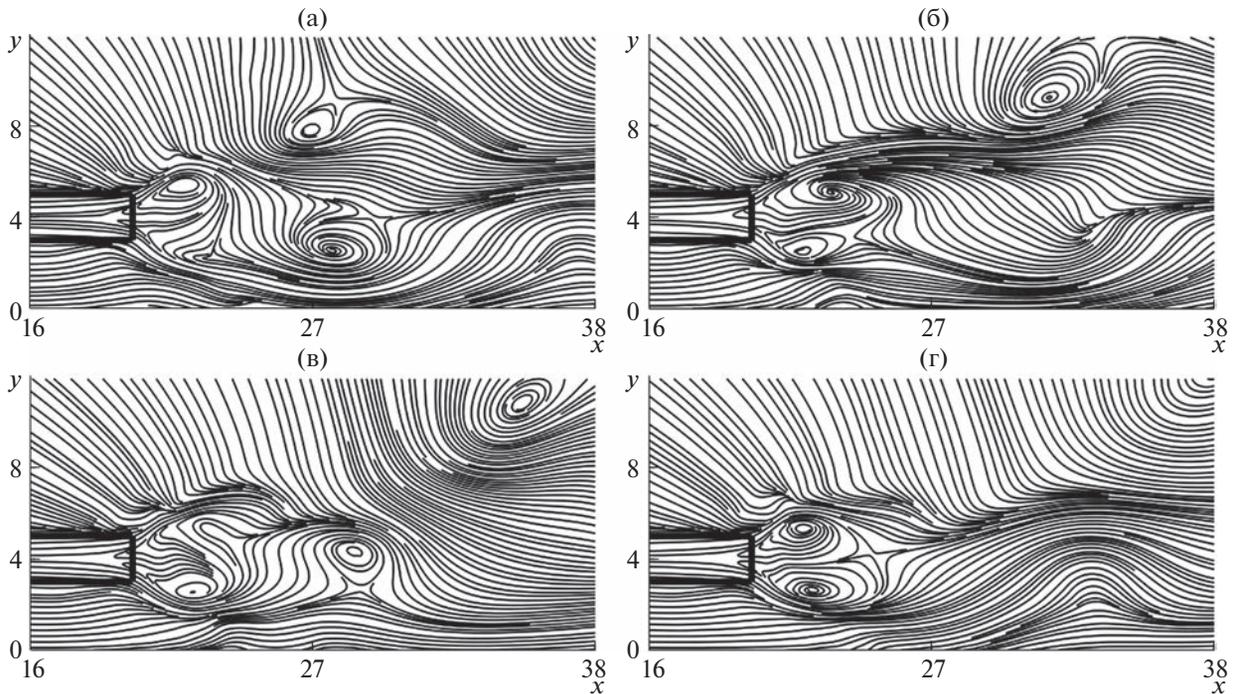


Рис. 6. Линии тока, соответствующие расчету при $S \approx 2.2$.

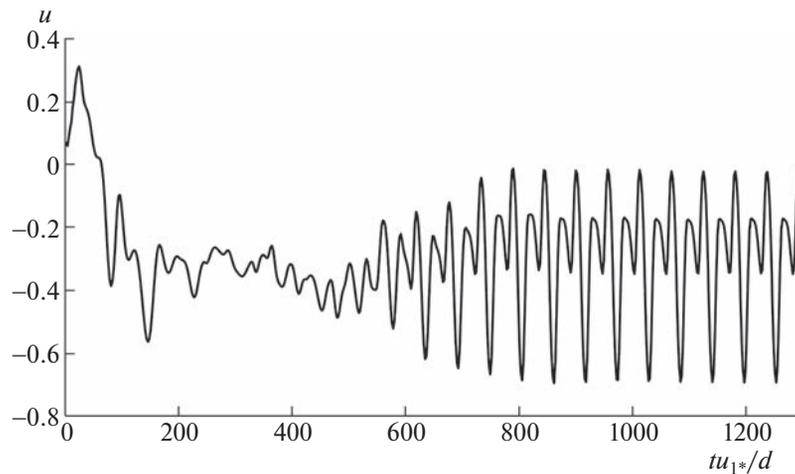


Рис. 7. Изменение продольной компоненты скорости в фиксированной точке пространства вблизи выходного сечения трубы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые определены важные особенности эволюции трехмерной закрученной ламинарной струи. Закрутка струи приводит к отклонению оси струи от первоначального направления. В дальней области струя распространяется под некоторым углом к этому первоначальному направлению. Закрученная трехмерная пристенная струя достаточно быстро теряет свою закрутку, и в повернутой системе координат ее поведение в дальней области слабо отличается от незакрученной струи. Соответственно, и параметр автомодельности оказывается таким же, как в незакрученной струе – $4/3$. Поперечные размеры струи растут пропорционально $\zeta^{4/3}$, продольная компонента скорости затухает по закону $\zeta^{-5/3}$, а поперечные компоненты пропорционально $\zeta^{-4/3}$.

При больших значениях закрутки в струе возникают области рециркуляционного течения. Течение становится нестационарным, периодическим.

Научное исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00210, <https://rscf.ru/project/23-11-00210/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wygnanski I., Katz Y., Horev E.* On the applicability of various scaling laws to the turbulent wall jet // *J. Fluid Mech.* 1992.
2. *Schneider M.E., Goldstein R.J.* Laser Doppler measurement of turbulence parameters in a two-dimensional plane wall jet // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6. P. 3116–3129.
3. *Eriksson J., Karlsson R., Persson J.* An experimental study of a two-dimensional plane turbulent wall jet // *Exp. Fluids.* 1998.
4. *Eriksson J.* Experimental studies of the plane turbulent wall jet: PhD thesis / Eriksson J. – Stockholm, Sweden: Royal Institute of Technology. Department of Mechanics. 2003.
5. *Sun H., Ewing D.* Effect of initial and boundary conditions on development of three-dimensional wall jets // 40th AIAA ASME. 2002. P. 733.
6. *Agelin-Chaab M., Tachie M.F.* Characteristics of turbulent three-dimensional wall jets // *ASME. J. Fluids Eng.* 2011. V. 133. № 2.
7. *Namgyal L., Hall J.* Reynolds stress distribution and turbulence generated secondary flow in the turbulent three-dimensional wall jet // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 800. P. 613–644.
8. *Inoue Y., Yano H., Yamashita S.* Experimental study on a three-dimensional wall jet // *JFST.* 2007. V. 2. № 3. P. 655–664.
9. *Hall J.W., Ewing D.* Three-dimensional turbulent wall jets issuing from moderate-aspect-ratio rectangular channels // *AIAA J.* 2007. V. 45. P. 1177–1186.
10. *Newman B., Patel R., Savage S., Tjio H.* three-dimensional wall jet originating from a circular orifice // *AEQ.* 1972. V. 23. № 3. P. 188–200.
11. *Matsuda H., Iida S., Hayakawa M.* Coherent structures in a three-dimensional wall jet // *ASME. J. Fluids Eng.* 1990. V. 112. № 4. P. 462–467.
12. *Padmanabham G., Lakshmana Gowda B.H.* Mean and turbulence characteristics of a class of three-dimensional wall jets—Part 1: Mean flow characteristics // *ASME. J. Fluids Eng.* 1991. V. 113. № 4. P. 620–628.
13. *Pani B.S., Rajaratnam N.* Swirling Circular Turbulent Wall Jets // *JHR.* 1976. V. 14. № 2. P. 145–154.
14. *Dejoan A., Leschziner M.* Large eddy simulation of a plane turbulent wall jet // *Phys. Fluids.* 2005. V. 17.
15. *Naqavi I.Z., Tyacke J.C., Tucker P.G.* Direct numerical simulation of a wall jet: flow physics // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 852. P. 507–542.
16. *Гайфуллин А.М., Щеглов А.С.* Структура течения в трехмерной пристенной турбулентной струе. // *ПММ.* 2023. № 2. С. 226–239.
17. *Craft T., Launder B.* On the spreading mechanism of the three-dimensional turbulent wall jet. // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 435. P. 305–326.
18. *Kakka P., Anupindi K.* Flow and thermal characteristics of three-dimensional turbulent wall jet // *Phys. Fluids.* 2021. V. 33. № 2.
19. *Khosronejad A., Rennie C.D.* Three-dimensional numerical modeling of unconfined and confined wall-jet flow with two different turbulence models // *Can. J. Civ. Eng.* 2010. V. 37. № 4. P. 576–587.
20. *Акатнов Н.И.* Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твердой стенки // *Труды ЛПИ.* 1953. № 5. С. 24–31.
21. *Glauert M.B.* The wall jet // *J. Fluid Mech.* 1956. V. 1. P. 625–643.
22. *Krechtnikov R., Lipatov I.* Hidden invariances in problems of two-dimensional and three-dimensional wall jets for Newtonian and non-Newtonian fluids // *SIAP.* 2002. V. 62. № 6. P. 1837–1855.
23. *Бут И.И., Гайфуллин А.М., Жвик В.В.* Дальнее поле трехмерной пристенной ламинарной струи // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 6. С. 51–61.
24. *Баренблатт Г.И.* Автомодельные явления — анализ размерностей и скейлинг. — Долгопрудный: Интеллект, 2009.
25. *Гайфуллин А.М., Жвик В.В.* Взаимодействие двух противоположно закрученных затопленных струй. // *Изв. РАН МЖГ.* № 3. 2019. С. 48–57.
26. *Жвик В.В.* Инварианты и асимптотики осесимметричных закрученных затопленных струй // *ПМТФ.* 2020. Т. 61. № 2. С. 92–108.

УДК 532.526.4

ПРИСТЕНОЧНЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ОБТЕКАТЕЛЯ В ФОРМЕ ПОЛУЭЛЛИпсоИДА И В ЕГО ОКРЕСТНОСТИ

© 2023 г. А. Ю. Голубев^{а,*}, С. В. Кузнецов^{а,**}

^аЦентральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Москва, Россия

*E-mail: alexeygolubev@yandex.ru

**E-mail: international@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.04.2023 г.

После доработки 16.06.2023 г.

Принята к публикации 20.06.2023 г.

Проведены экспериментальные исследования полей пристеночных пульсаций давления на поверхности обтекателей и вокруг них в турбулентном пограничном слое. Обтекатели имели форму полуэллипсоида и устанавливались на стенке дозвуковой малошумной аэродинамической трубы. Их высота составляла 25% от толщины набегающего пограничного слоя. С помощью визуализации предельных линий тока определены основные физические особенности исследуемого течения. Проведено сопоставление поля пристеночных пульсаций давления с картиной течения. Показано, что наибольшие уровни пульсаций давления регистрируются на поверхности обтекателя в его носовой части. Установлено, что удлинение модели приводит к существенному снижению интенсивности пульсаций давления в области отрыва потока с поверхности обтекателя.

Ключевые слова: пульсации давления, отрывное течение, турбулентный пограничный слой

DOI: 10.31857/S1024708423600227, EDN: QKJXKW

Турбулентность, формирующаяся вблизи поверхности высокоскоростных транспортных средств, является источником шума и нестационарных аэроакустических нагрузок на элементы конструкции. Они возбуждают вибрации упругой конструкции, что приводит к снижению комфорта пассажиров, ухудшению условий работы экипажа и бортового оборудования, накоплению усталостных повреждений. Для борьбы с данными нежелательными явлениями требуется подробная информация о пространственно-временной структуре поля пульсаций давления на обтекаемой поверхности.

Выступающие в поток элементы конструкции многократно усиливают пристеночные пульсации давления не только вблизи препятствия, но и в следе за ним [1, 2]. Зачастую протяженность области возмущенного течения на порядок больше характерного размера выступающего тела [3, 4]. В частном случае пассажирского самолета примерами выступающих элементов конструкции являются обтекатели антенн, ниш шасси и приводов закрылков, сочленение крыла с фюзеляжем и т.п.

К настоящему времени большая часть исследований пристеночных пульсаций давления, порождаемых обтеканием выступающих элементов, посвящена сравнительно простой геометрии двумерных уступов, ширина которых существенно превышает высоту [1–12]. Установлено, что нестационарные возмущения, вносимые в поток прямыми и обратными уступами, связаны с отрывом пограничного слоя, колебаниями зон возвратного течения и неустойчивостью сдвигового слоя на их границе [13–16].

Трехмерность осредненного по времени течения в окрестности выступающих тел конечной ширины приводит к появлению новых организованных структур и к их взаимодействию. В качестве примера можно привести подковообразный вихрь, образующийся при обтекании сочленения крыла или цилиндра с плоской поверхностью. Колебания этого вихря являются источником повышенных пристеночных пульсаций давления [17–20].

В целом количество исследований, посвященных пристеночным пульсациям давления в трехмерных течениях, невелико. Помимо работ [17–20] можно выделить измерения пульсаций давления на поверхности полусферы [21], работы, посвященные изучению влияния конечной ширины уступов [22–24] и угла скоса потока [25–27], а также измерения пристеночных пульсаций давления в окрестности [28] и на поверхности обтекателей различной формы [29]. Отмечается, что при уменьшении ширины препятствия до значений, сопоставимых с его высотой, интенсивность пристеночных пульсаций давления и их пространственное распределение заметно изменяются [23]. Это напрямую свидетельствует о существенном влиянии трехмерности осредненного течения на поле пульсаций давления.

Настоящая статья расширяет экспериментальные данные о пристеночных пульсациях давления, порождаемых трехмерными выступающими телами в турбулентном пограничном слое. Она является продолжением работы [29], которая ограничивалась регистрацией пульсаций давления на поверхности обтекателей. В настоящем исследовании проведены измерения пульсаций давления как на поверхности, так и на стенке вокруг обтекателей. Кроме того, выполнена визуализация предельных линий тока методом масляной пленки, позволившая провести детальное сопоставление осредненной картины течения с особенностями поля пристеночных пульсаций давления.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Измерения проводились на аэроакустической установке П-2 Московского комплекса ЦАГИ. Установка представляет собой дозвуковую аэродинамическую трубу, в которой были предприняты меры по снижению шума в рабочей части. Рабочая часть трубы – это канал прямоугольного сечения 500×160 мм длиной 6 м, перед которым располагается конфузور с односторонним поджатием порядка 9.5. На входе в конфузор устанавливается мелкочаеистая сетка. За рабочей частью трубы размещается безотрывной диффузор длиной 3 м, за которым следует глушитель с эффективным диаметром 450 мм. Далее поток попадает в заглушенную камеру объемом 2 м^3 . Течение создается системой из 4 вентиляторов, размещенных за капитальной кирпичной стеной.

Практически по всей длине рабочей части аэроакустической установки П-2 пограничный слой является турбулентным. Профиль скорости в измерительной зоне соответствует распределению скоростей в развитом турбулентном пограничном слое с логарифмическим законом стенки. Максимальная толщина пограничного слоя, реализуемая в установке П-2, составляет 70 мм. Спектры пристеночных пульсаций давления на стенке рабочей части соответствуют невозмущенному турбулентному пограничному слою с нулевым градиентом среднего давления на частотах выше 63 Гц.

2. УСЛОВИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Эксперименты проводились при скорости в ядре набегающего потока $U = 41$ м/с. Толщина пограничного слоя δ составляла 60 мм, толщина вытеснения $\delta^* = 5.5$ мм, а толщина потери импульса $\theta = 4.3$ мм. Число Рейнольдса, определяемое по толщине потери импульса и скорости на внешней границе пограничного слоя, равнялось 1.2×10^4 .

Использовались две модели обтекателей, представляющих собой половину эллипсоида вращения, отличающихся длиной продольной оси (вдоль направления потока). В первом случае $l = 60$ мм, а во втором – $l = 120$ мм. Высота моделей $h = 15$ мм, а ширина $d = 30$ мм. Обтекатели изготавливались на 3D-принтере с отверстиями под установку датчиков пульсаций давления. Неиспользуемые отверстия заделывались пластилином таким образом, чтобы обеспечить гладкость поверхности. Отношение высоты препятствия к толщине пограничного слоя равнялось 0.25.

Измерения проводились с помощью приемников пульсаций давления Kulite XCS-062-5A, устанавливаемых заподлицо с обтекаемой поверхностью. Известно, что отклонение датчика на доли миллиметра от гладкой поверхности приводит к искажению спектральных уровней вплоть до нескольких дБ [30, 31]. Таким образом, наибольший вклад в погрешность измерений вносит выступание или углубление датчика. Статистическая оценка по серии измерений различными датчиками одного типа показывает, что погрешность измерения третьоктавных спектральных уровней пульсаций давления не превышает 0.7 дБ (без учета разрешающей способности).

Для оцифровки сигнала использовалась 24-битная АЦП National Instruments PCI-4472 с 8-ю каналами регистрации. Частота дискретизации составляла 30 кГц. Перед оцифровкой сиг-

нал обрезался аналоговым фильтром низких частот с частотой среза 12.5 кГц. Длительность записи составляла 20 с.

При обработке результатов измерений вычислялись третьоктавные спектры пульсаций давления. По ним определялись среднеквадратичные уровни мощности пульсаций давления в диапазоне частот от 63 до 10000 Гц. Также вычислялись узкополосные спектры с шириной полосы 3.66 Гц и спектральная плотность мощности. При спектральном анализе использовалась оконная функция Хэннинга с длиной сегмента 8192 отсчета и перекрытием 50%.

Спектральные характеристики вычисляются с помощью финитного преобразования Фурье

$$P_k(f, T) = \int_0^T p_k(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

где $p_k(t)$ – одна из реализаций случайного процесса, описывающая отклонение давления от среднего значения, k – номер реализации, t – время, T – длительность реализации, f – частота.

Спектральная плотность мощности определяется через финитное преобразование Фурье следующим образом [32]

$$\Phi(f) = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{T} P_k^*(f, T) P_k(f, T) \right\rangle$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают осреднение по ансамблю реализаций, звездочка * – комплексное сопряжение. Коэффициент 2 учитывает то обстоятельство, что на практике мощность сигнала вычисляется только в области неотрицательных частот.

Среднеквадратичный уровень мощности (средний квадрат пульсаций давления) вычисляется через спектральную плотность по следующему соотношению

$$\langle p_k^2(t) \rangle = \int_0^{\infty} \Phi(f) df$$

Для большей общности представления результатов спектральная плотность мощности приводится в безразмерном виде

$$\bar{\Phi}(f) = \frac{\Phi(f)U}{q^2 h}$$

где $q = \rho U^2 / 2$ – скоростной напор.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим результаты визуализации предельных линий тока методом масляной пленки, представленные на рис. 1. Перед моделью обтекателя наблюдается отрыв набегающего турбулентного пограничного слоя (ТПС). Растекание в поперечном направлении приводит к формированию из области возвратного течения характерной структуры – подковообразного вихря, огибающего обтекатель. Его размер $x_s = 0.6h$ и $0.4h$ для короткого и длинного обтекателей. В хвостовой части модели наблюдается отрыв потока с поверхности обтекателя, проявляющийся в значительной концентрации красителя, вследствие наличия возвратного течения. Белые пятна за коротким обтекателем выявляют область присоединения оторвавшегося потока. Размер области возвратного течения от точки отрыва до точки присоединения $x_r \approx 2.3h$ для модели с $l/d = 2$ и $x_r \approx 2.2h$ при $l/d = 4$. Приведенные числовые значения носят приближенный характер, связанный как с погрешностью метода визуализации, так и с неоднозначностью определения величин x_s и x_r .

Полученная картина течения находит свое отражение в поле пристеночных пульсаций давления. На рис. 2 дано превышение среднеквадратичных уровней мощности пульсаций давления над уровнями невозмущенного ТПС. Данные приведены для измерительных точек, расположенных в продольной плоскости симметрии обтекателя. Начало системы координат совпадает с носиком модели. Координатная ось X направлена вдоль набегающего потока. Максимум пульсаций регистрируется на носике модели. Он обусловлен нестационарным отрывом пограничного слоя перед обтекателем. Превышение над невозмущенным уровнем достигает 20 дБ. При представлении расстояния в единицах длины области возвратного течения x_s (рис. 2б) распреде-

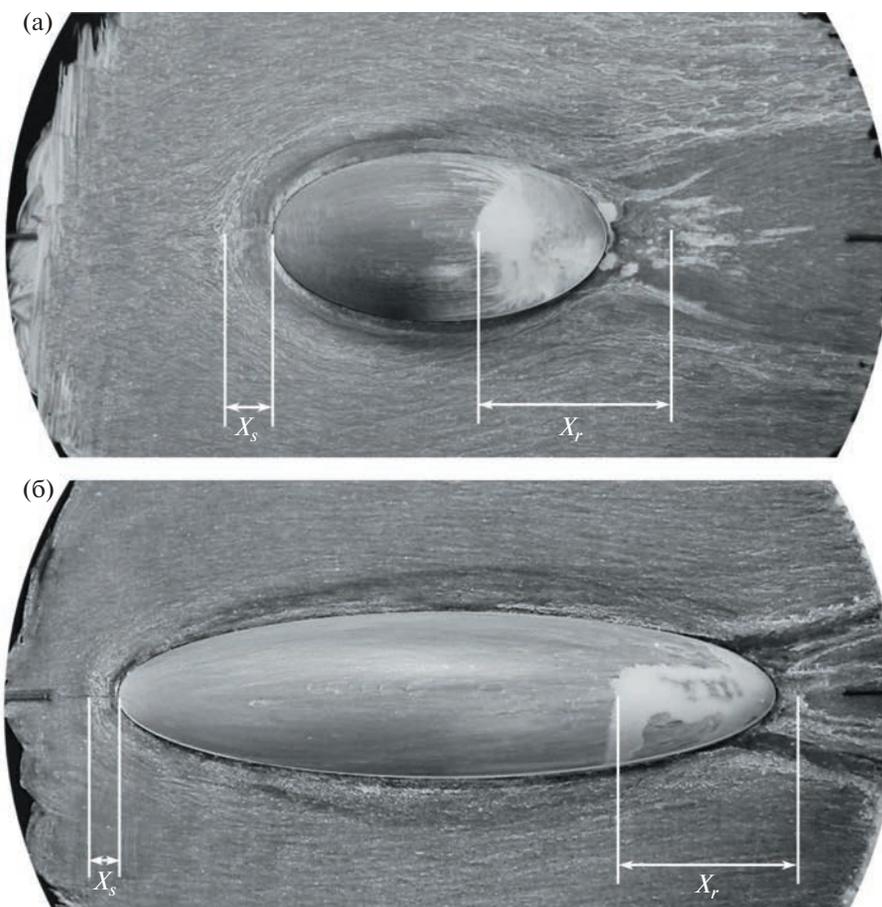


Рис. 1. Визуализация предельных линий тока для двух обтекателей различной длины: (а–б) – $l/d = 2, 4$.

ление среднеквадратичных уровней пульсаций давления практически не зависит от длины обтекателя. Другой ярко выраженный пик наблюдается на расстоянии порядка $0.7l$, т.е. в области отрыва потока с поверхности обтекателя. Интенсивность пульсаций давления в данной области существенно зависит от длины модели. В случае короткого обтекателя превышение над ТПС составляет 14 дБ, в то время как для длинного оно не превышает 3 дБ. Это свидетельствует о существенном ослаблении отрыва при удлинении обтекателя. Третьей областью, характеризующейся повышенными пристеночными пульсациями давления, является зона присоединения потока в следе за моделью. Здесь уровни пульсаций также существенно зависят от длины обтекателя. В случае короткой модели превышение над уровнем невозмущенного ТПС достигает 12 дБ, а для короткой – не превышает 6 дБ.

Полезно рассмотреть, как меняются уровни пульсаций давления на стенке вдоль боковой поверхности обтекателя, и сопоставить их с распределением пульсаций в продольной плоскости симметрии. Соответствующие графики приведены на рис. 3 для короткого обтекателя. Видно, что в зонах максимальных нагрузок уровни пульсаций давления сбоку от обтекателя на 7–10 дБ ниже, чем в плоскости симметрии модели. Наибольшее превышение над уровнями пульсаций ТПС составляет примерно 8 дБ и регистрируется вблизи носовой и хвостовой частей обтекателя. Сбоку от обтекателя не наблюдается характерного повышения интенсивности пульсаций давления на расстоянии порядка $0.7l$ длины модели в области начала отрыва с поверхности обтекателя. По мере увеличения расстояния до модели уровни пульсаций давления постепенно снижаются, при этом никаких дополнительных особенностей в распределении интенсивности пульсаций давления не проявляется. Следует отметить, что повышенные нагрузки сбоку от обтекателя сконцентрированы, главным образом, в пределах подковообразного вихря, размер которого для данного обтекателя составляет примерно $0.6h$. Уже на расстоянии $0.87h$ среднеквадратичные

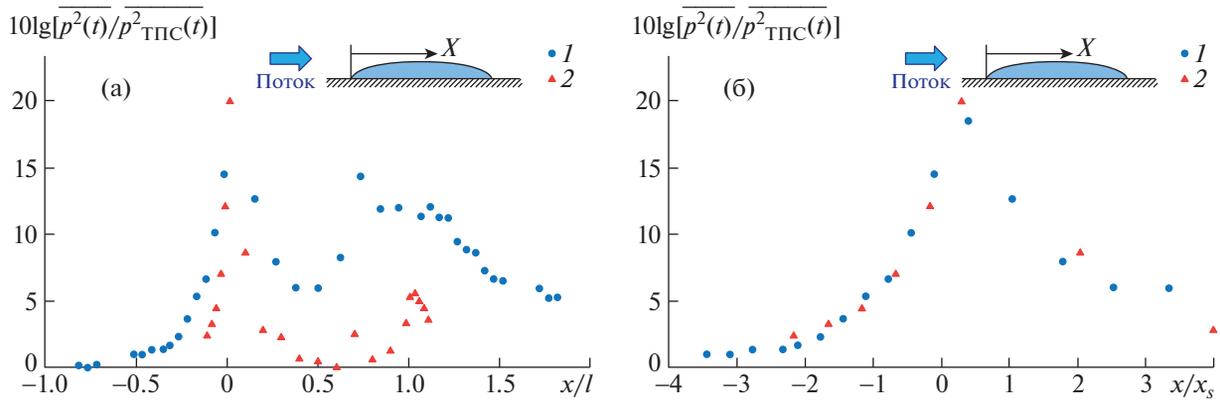


Рис. 2. Распределение средневладратичных уровней мощности пристеночных пульсаций давления относительно невозмущенного ТПС. Измерительные точки расположены в продольной плоскости симметрии обтекателя: 1 – короткий обтекатель; 2 – длинный обтекатель. Координата x представлена (а) в единицах длины обтекателя l , (б) в единицах длины области возврата течения перед моделью x_s .

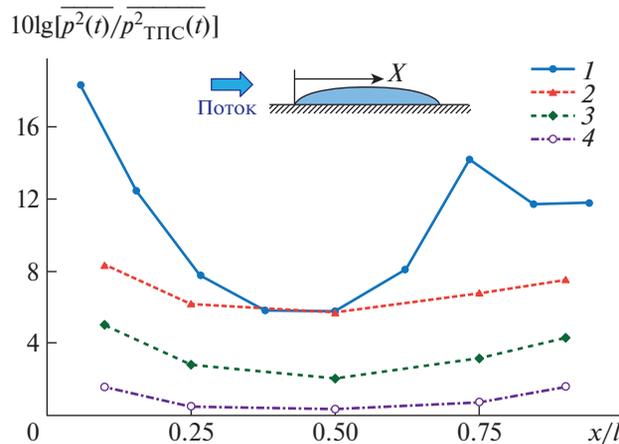


Рис. 3. Сравнение уровней пристеночных пульсаций давления на поверхности обтекателя и сбоку от него ($l/d = 2$): 1 – измерительные точки расположены в продольной плоскости симметрии модели; 2–4 – измерительные точки расположены сбоку от обтекателя на расстояниях 1, 7 и 13 мм от его боковой поверхности.

уровни мощности пульсаций давления превышают аналогичные значения в пограничном слое не более чем на 2 дБ.

Перейдем к анализу частотного состава пристеночных пульсаций давления, характерного для различных областей течения. На рис. 4 представлена безразмерная спектральная плотность мощности пульсаций давления в различных измерительных точках в районе носика модели. В качестве параметров подобия по аналогии с уступами [5–7] выбраны высота модели h , скорость U и скоростной напор q на внешней границе пограничного слоя. Поле давления перед обтекателем (точка 1) характеризуется преимущественно низкочастотными пульсациями, что согласуется с результатами измерений при двумерном отрыве пограничного слоя перед прямыми уступами [1, 4]. Внутри подковообразного вихря сбоку от обтекателя (точка 2) пристеночные пульсации давления имеют практически идентичный низко- и среднечастотный спектральный состав. На поверхности модели интенсивные нагрузки регистрируются в более широкой полосе частот, что связано с присоединением слоя смешения, формирующегося на границе зоны возвратного течения перед обтекателем. При переходе от измерительной точки 2, расположенной сбоку от модели, к точке 3, расположенной на поверхности обтекателя на сопоставимом расстоянии от носика модели, в области числа Струхала $fh/U = 0.03$ спектральные уровни возрастают на 3 дБ, а при $fh/U = 0.3$ – на 7 дБ.

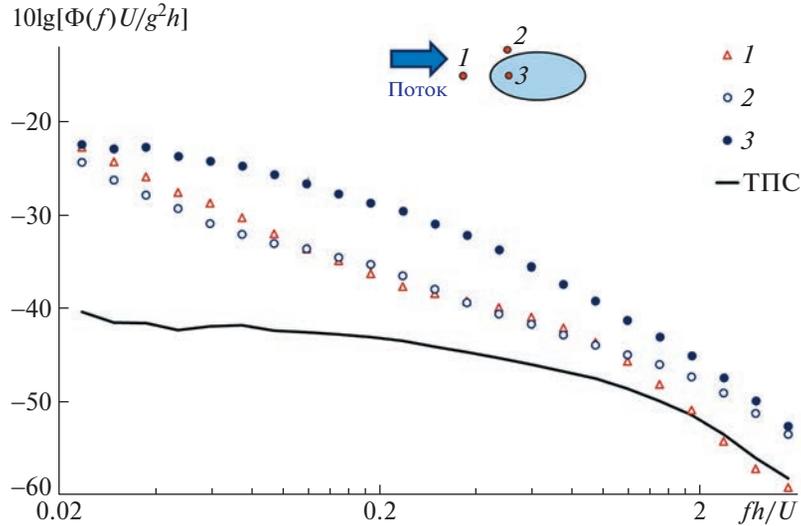


Рис. 4. Спектральная плотность мощности пристеночных пульсаций давления вблизи носика модели ($l/d = 2$). ТПС – турбулентный пограничный слой.

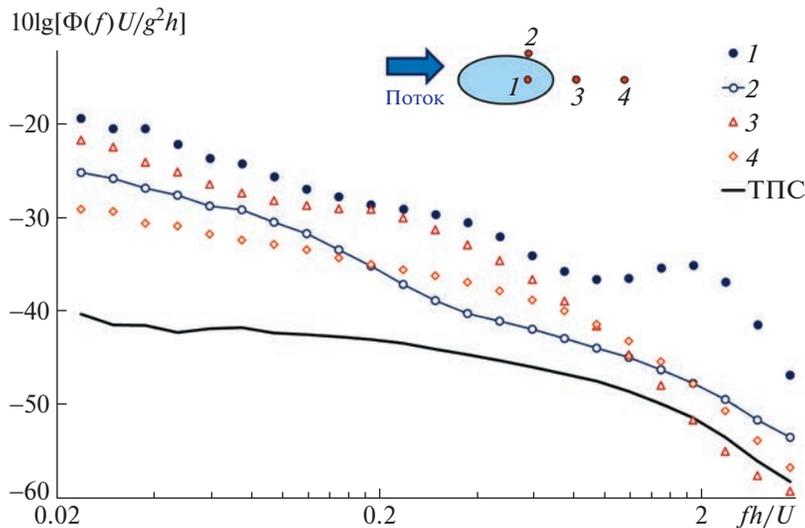


Рис. 5. Спектральная плотность пристеночных пульсаций давления в области отрыва потока с поверхности обтекателя и в следе за ним ($l/d = 2$).

На рис. 5 приведена спектральная плотность пульсаций давления вблизи отрыва потока с поверхности обтекателя (точки 1 и 2), в области присоединения слоя смешения (точка 3) и в следе за моделью (точка 4). Здесь можно выделить три характерные области частот, определяемые изменением формы спектра. Во-первых, во всех представленных измерительных точках регистрируются интенсивные пульсации давления в низкочастотной области $fh/U < 0.1$. Низкочастотный спектральный состав характерен для нестационарного отрыва [33]. В этом диапазоне чисел Струхала превышение над уровнями невозмущенного ТПС достигает 20 дБ. Далее следует область средних частот $0.1 \leq fh/U < 0.6$, где интенсивные пульсации наблюдаются в измерительных точках 1, 3 и 4, расположенных в продольной плоскости симметрии обтекателя. Для указанного диапазона чисел Струхала характерны замедление спада спектральной плотности с частотой и кратковременный выход на близкие к константным значения спектральных уровней. Это хорошо заметно при сравнении результатов измерений в точках 2 и 3. Схожие особенности спектра наблюдаются в области возвратного течения за прямыми уступами [1, 9, 12]. Характерным для нестационарных зон рециркуляции является число Струхала $fx_r/U \approx 0.5$, где x_r – длина области возвратного течения. Указанное число Струхала определяет среднюю частоту схода вих-

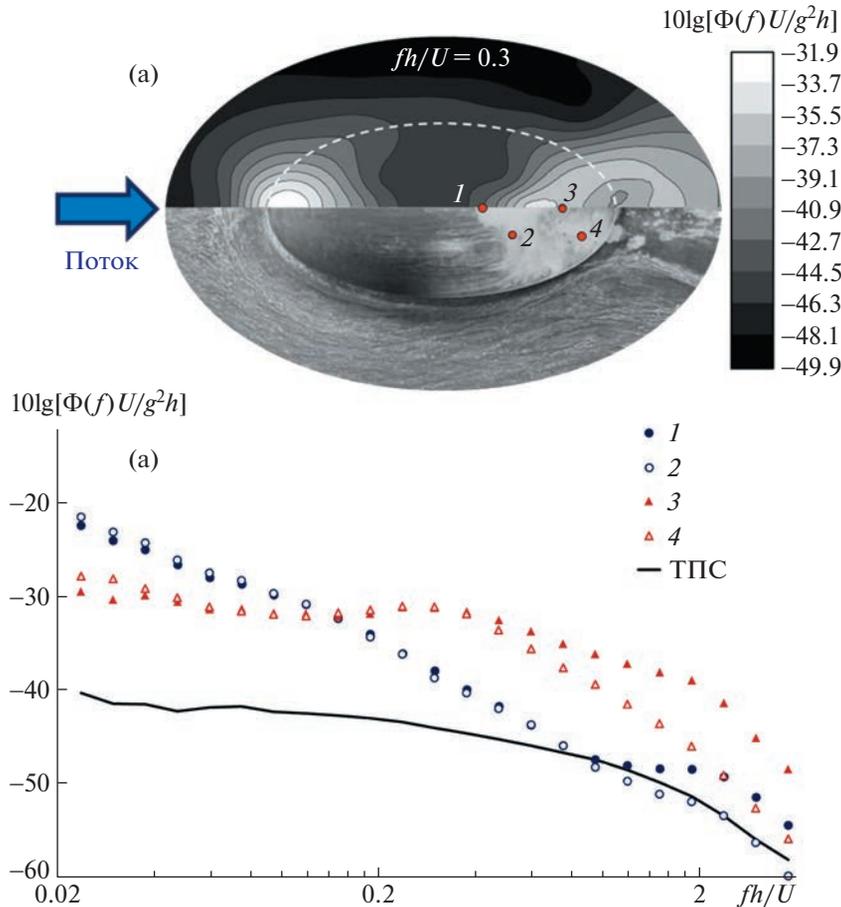


Рис. 6. Пространственное распределение пристеночных пульсаций давления в случае короткого обтекателя ($l/d = 2$): (а) – сопоставление контуров равных уровней в среднечастотной области ($fh/U = 0.3$) с картиной течения; (б) – спектральная плотность пульсаций давления в отрывной зоне.

рей, образующихся в слое смешения между замедленной жидкостью в зоне рециркуляции и ускоренным внешним течением [3, 12]. В нашем случае величина $fx_c/U = 0.5$ примерно соответствует числу Струхала $fh/U = 0.2$, т.е. лежит в пределах рассматриваемого среднечастотного диапазона. Отметим, что изменение наклона спектра в окрестности данной безразмерной частоты, характерное для точек 1 и 3, не проявляется в расположенной в следе точке 4. В то же время наблюдается некоторое увеличение спектральной плотности пульсаций давления в области $fh/U > 1$ по мере удаления от обтекателя. Данный эффект может быть связан с трехмерностью течения в окрестности модели, а именно, с тем, что взаимодействие сходящего с верхней поверхности слоя смешения и огибающего обтекателя подковообразного вихря приводит к перераспределению энергии турбулентных пульсаций по более широкому диапазону временных и пространственных масштабов. Отдельно выделяется высокочастотная область $fh/U \geq 0.6$, в которой интенсивные пульсации давления регистрируются только в измерительной точке 1, расположенной на поверхности модели. В этом диапазоне частот в точке 1 имеется пик спектральной плотности при $fh/U = 1.9$. Подобное явление не наблюдалось в двумерных отрывных течениях в окрестности уступов, на основании чего можно сделать предположение, что указанные высокочастотные пульсации давления связаны с существенной трехмерностью течения в зоне отрыва с поверхности обтекателя. Действительно, в данной области заметно искривление предельных линий тока в сторону продольной плоскости симметрии обтекателя (см. рис. 1). В измерительной точке 4, расположенной сбоку от обтекателя, отсутствуют характерные интенсивные пульсации в средне- и высокочастотном диапазоне.

Остановимся подробнее на распределении пульсаций давления по измерительной области. На рис. 6 приведено сопоставление контуров равных уровней пристеночных пульсаций давления при $fh/U = 0.3$ с картиной течения, полученной методом визуализации предельных линий

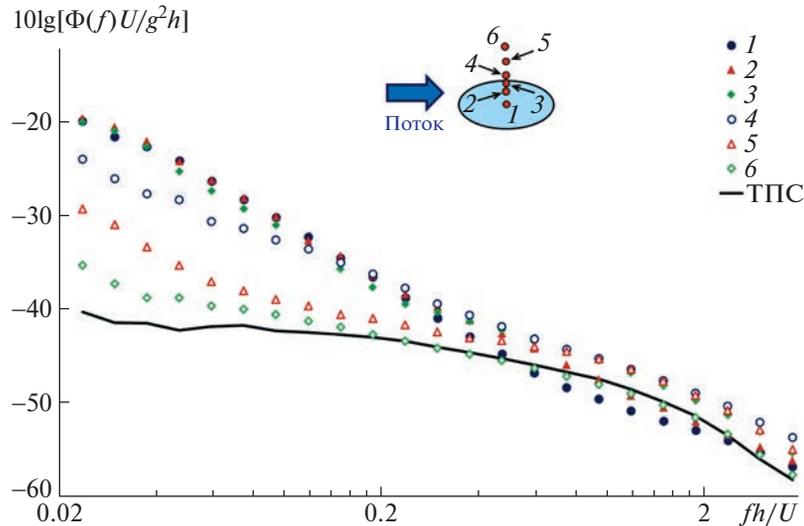


Рис. 7. Изменение спектральной плотности пристеночных пульсаций давления в поперечном направлении перед областью отрыва в случае короткого обтекателя ($l/d = 2$). Датчики расположены на линии $x/l = 0.5$.

тока. Также представлена спектральная плотность пульсаций давления в измерительных точках, сдвинутых вдоль линии отрыва. Полученные результаты показывают, что область повышенных среднечастотных спектральных уровней по форме практически совпадает с отрывной зоной. Рассмотрим изменение спектральной плотности пульсаций давления в поперечном направлении перед линией отрыва. Соответствующие данные представлены на рис. 7. На поверхности модели (точки 1–3) не наблюдается вариации спектральных уровней пульсаций давления в наиболее энергонесущей низкочастотной и частично среднечастотной части спектра, соответствующей числам Струхала $fh/U < 0.3$. Сбоку от обтекателя пристеночные пульсации давления также характеризуются преобладанием низкочастотных компонент. По мере удаления от поверхности модели форма спектра не претерпевает существенных изменений, регистрируется лишь постепенное снижение интенсивности пульсаций давления до уровней невозмущенного ТПС.

Удлинение обтекателя не приводит к ощутимому изменению спектрального состава пристеночных пульсаций давления в области отрыва набегающего ТПС и подковообразного вихря, что демонстрируется на рис. 8а. При двукратном увеличении l/d спектральные уровни пульсаций давления снижаются на 2–4 дБ. Вероятнее всего, это связано с уменьшением радиуса кривизны носика модели при росте l/d . Наибольшее снижение достигается в среднечастотном диапазоне. В области отрыва потока с поверхности обтекателя обнаружено значительное влияние удлинения модели. Спектральная плотность пульсаций давления в данной области приведена на рис. 8б. Видно, что при увеличении длины обтекателя наблюдается снижение спектральных уровней пульсаций давления во всем диапазоне частот. Наибольшие эффекты проявляются непосредственно в области отрыва на поверхности обтекателя (точки 1 и 2). Здесь при числах Струхала $fh/U < 0.12$ снижение спектральных уровней составляет примерно 10 дБ. При числах Струхала $fh/U > 0.2$ спектральные уровни снижаются на 13–15 дБ, в результате чего интенсивность пульсаций давления в высокочастотном диапазоне становится сопоставимой с уровнями невозмущенного ТПС. Данное явление объясняется ослаблением отрыва и сокращением области возвратного течения, что хорошо согласуется с результатами измерений пульсаций давления на поверхности уступов с закругленной [11] и наклонной [12] передней кромкой. Высокочастотные пульсации, регистрируемые на поверхности короткого обтекателя в окрестности числа Струхала $fh/U = 1.9$, судя по всему, ответственные за повышение спектральных уровней в области $fh/U > 2$ в измерительной точке 2 на поверхности длинной модели. Более высокие характерные частоты могут быть связаны с уменьшением масштабов турбулентных вихрей, ответственных за формирование соответствующих возмущений давления, что объясняется сокращением отрывной зоны на поверхности модели с $l/d = 4$. В следе за обтекателем (точки 3 и 4) наибольшее снижение интенсивности пристеночных пульсаций давления достигает 7–8 дБ в диапазоне $0.2 < fh/U < 0.5$, т.е. в среднечастотной области.

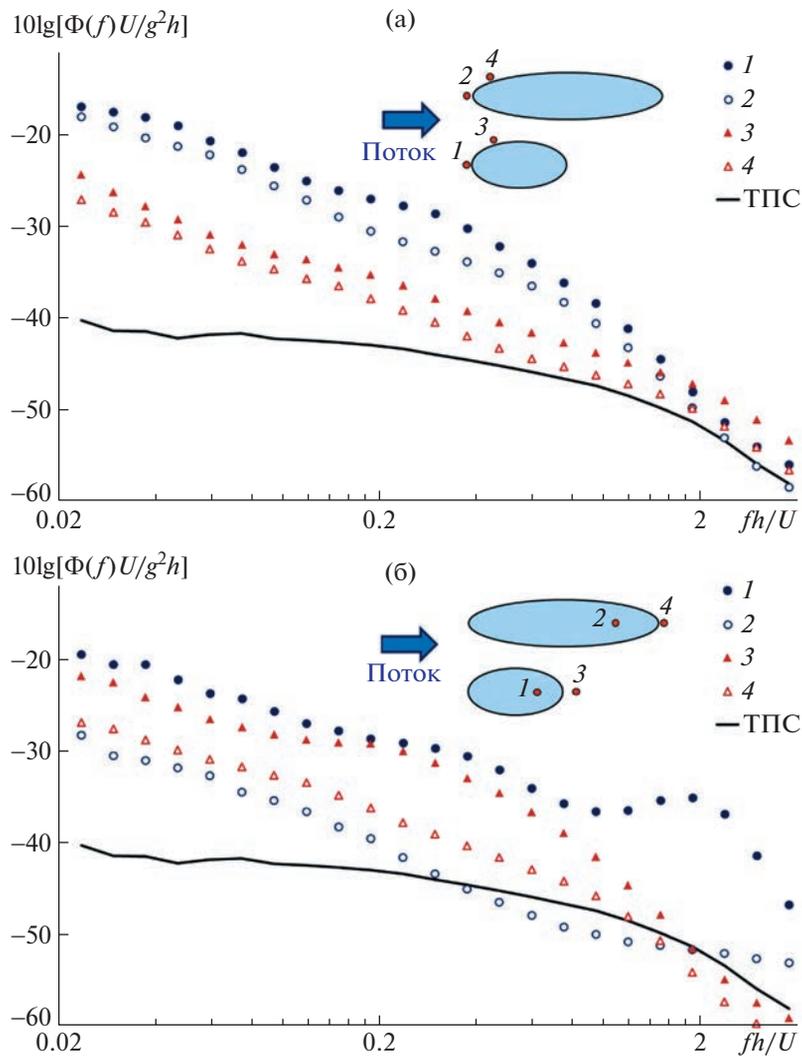


Рис. 8. Влияние удлинения обтекателей на спектральную плотность пристеночных пульсаций давления в области формирования подковообразного вихря (а) и в зоне отрыва потока с верхней поверхности обтекателя (б). Закрашенные маркеры – $l/d = 2$, белые маркеры – $l/d = 4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты экспериментальных исследований пристеночных пульсаций давления, формирующихся на поверхности и в окрестности обтекателя в форме полуэллипсоида. Посредством визуализации предельных линий тока определены основные особенности осредненного течения, которые находят непосредственное отражение в поле пульсаций давления, как на поверхности, так и в окрестности обтекателя.

Максимальные уровни пристеночных пульсаций давления регистрируются на поверхности носовой части обтекателя в области отрыва набегающего турбулентного пограничного слоя. Протяженность зоны возмущенного поля давления определяется размером подковообразного вихря x_s . Наибольшие уровни спектральной плотности пристеночных пульсаций давления наблюдаются в низкочастотной области ($fh/U < 0.1$).

Мощные пульсации давления наблюдаются в области отрыва потока с поверхности короткого обтекателя. Здесь регистрируются интенсивные средне- и высокочастотные пульсации. Соответствующие им характерные числа Струхала $fh/U = 0.2$ и 1.9 . Интенсивность данных возмущений и их частота существенно зависят от удлинения обтекателя.

В зоне присоединения потока за коротким обтекателем также регистрируются пристеночные пульсации давления в окрестности числа Струхала $fh/U = 0.2$, в то же время для длинной модели характерен преимущественно низкочастотный спектральный состав.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 21-71-30016.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Farabee T.M., Casarella M.J.* Measurements of Fluctuating Wall Pressure for Separated/Reattached Boundary Layer Flows // ASME J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des. 1986. V. 108. P. 301–307.
2. *Efimtsov B.M., Golubev A. Yu., Rizzi S.A., Andersson A.O., Rackl R.G., Andrianov E.V.* Influence of small steps on wall pressure fluctuation spectra measured on Tu-144LL flying laboratory // AIAA paper 2002–2605.
3. *Власов Е.В., Гиневский А.С., Каравосов Р.К., Франкфурт М.О.* Статистические характеристики пульсаций давления в зоне отрыва потока на пластине за интерцептором // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 3. С. 367–372.
4. *Awasthi M., Devenport W.J., Glegg S.A.L., Forest J.B.* Pressure fluctuations produced by forward steps immersed in a turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 2014. V. 756. P. 384–421.
5. *Efimtsov B.M., Kozlov N.M., Kravchenko S.V. and Andersson A.O.* Wall Pressure Fluctuation Spectra at Small Forward-Facing Steps // AIAA paper 99–1964. 1999.
6. *Efimtsov B.M., Kozlov N.M., Kravchenko S.V. and Andersson A.O.* Wall Pressure Fluctuation Spectra at Small Backward-Facing Steps // AIAA paper 2000–2053. 2000.
7. *Leclercq D.J.J., Jacob M.C., Louisot A., Talotte C.* Forward-Backward Facing Step Pair: Aerodynamic Flow, Wall Pressure and Acoustic Characterisation // AIAA paper 2001–2249. 2001.
8. *Lee I., Sung H.J.* Multiple-arrayed pressure measurement for investigation of the unsteady flow structure of a reattaching shear layer // J. Fluid Mech. 2002. V. 463. P. 377–402.
9. *Camussi R., Felli M., Pereira F., Aloisio G., Di Marco A.* Statistical properties of wall pressure fluctuations over a forward-facing step // Phys. Fluids. 2008. V. 20. № 7. Paper 75113.
10. *Ji M., Wang M.* Surface pressure fluctuations on steps immersed in turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 2012. V. 712. P. 471–504.
11. *Awasthi M., Devenport W.J., Alexander W.N., Glegg, S.A.L.* Aeroacoustics of rounded forward-facing steps: near-field behavior // AIAA J. 2019. V. 57. № 3. P. 1237–1249.
12. *Golubev A., Kuznetsov S.* Wall pressure fluctuations on the surface of sloped forward-facing steps // AIAA J. 2020. V. 58. № 10. P. 4595–4599.
13. *Kiya M., Sasaki K.* Structure of a turbulent separation bubble // J. Fluid Mech. 1983. V. 137. P. 83–113.
14. *Pearson D.S., Goulart P.J., Ganapathisubramani B.* Turbulent separation upstream of a forward-facing step // J. Fluid Mech. 2013. V. 724. P. 284–304.
15. *Graziani A., Kerherve F., Martinuzzi R.J., Keirsbulck L.* Dynamics of the recirculating areas of a forward-facing step // Exp. Fluids. 2018. V. 59. № 154. P. 1–18.
16. *Fang V., Tachie M.F.* Spatio-temporal dynamics of flow separation induced by a forward-facing step submerged in a thick turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 2020. V. 892. A40–1–30.
17. *Olcmen S.M., Simpson R.L.* Influence of Wing Shapes on Surface Pressure Fluctuations at Wing-Body Junctions // AIAA J. 1994. V. 32. № 1. P. 6–15.
18. *Goody M.C., Simpson R.L.* Surface Pressure Fluctuations Beneath Two- and Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers // AIAA J. 2000. V. 38. № 10. P. 1822–1831.
19. *Голубев А.Ю., Потокин Г.А.* Трехмерные поля пульсаций давления в окрестности консольных цилиндрических препятствий // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 6. С. 42–49.
20. *Awasthi M., Rowlands J., Moreau D.J., Doolan C.J.* The Effect of Aspect Ratio on Wall Pressure Fluctuations at a Wing-Plate Junction // ASME J. Fluids Eng. 2020. V. 142. № 7. 11 p.
21. *Suzuki Y., Kiya M., Sampo T., Naka Y.* Pressure Fluctuations on the Surface of a Hemisphere Immersed in a Thick Turbulent Boundary Layer // ASME J. Fluids Eng. 1987. V. 109. P. 130–135.
22. *Largeau J.F., Moriniere V.* Wall pressure fluctuations and topology in separated flows over a forward-facing step // Exp. Fluids. 2007. V. 42. P. 21–40.
23. *Голубев А.Ю., Ефимцов Б.М.* Особенности структуры полей пульсаций давления в окрестности выступов // Изв. РАН. МЖГ. 2015. Т. 50. № 1. С. 55–66.
24. *Кузнецов С.В., Голубев А.Ю.* Влияние высоты выступа на пристеночные пульсации давления вблизи его боковой кромки в турбулентном пограничном слое // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 2. С. 207–215.
25. *Haо J., Wang M.* Flow Noise from Swept Steps in Turbulent Boundary Layers // AIAA paper 2013–2248. 2013.
26. *Бибко В.Н., Голубев А.Ю.* Основные закономерности влияния скоса потока на характеристики полей пульсаций давления перед прямым и за обратным уступом // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 5. С. 483–491.

27. Голубев А.Ю., Кузнецов С.В. Особенности полей пульсаций давления на поверхности выступов // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 6. С. 67–75.
28. Efimtsov B.M., Golubev A.Yu. Pressure Fluctuations on the Surface Surrounding Tall Protrusion into Flow // AIAA paper 2007–3413. 2007.
29. Голубев А.Ю., Потокин Г.А. Пульсации давления на поверхности трехмерных выступающих тел // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 1. С. 57–63.
30. Efimtsov B.M., Golubev A.Yu., Kuznetsov V.B., Rizzi S.A., Andersson A.O., Rackl R.G., Andrianov E.V. Effects of transducer flushness on measured surface pressure fluctuations in flight // AIAA paper 2005–800. 2005.
31. Hu N., Erbig L. Effect of Sensor Mounting and Flow History on Measured Wall Pressure Spectra // AIAA J. 2020. V. 58. № 7. P. 1–11.
32. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. 540 с.
33. Cherry N.J., Hillier R., Latour M.E.M. Unsteady measurements in a separated and reattaching flow // J. Fluid Mech. 1984. V. 144. P. 13–46.

УДК 532.529:534.2

ВЛИЯНИЕ КОНУСНОЙ НАСАДКИ НА ОСАЖДЕНИЕ АЭРОЗОЛЯ ПРИ АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ТРУБЕ

© 2023 г. Л. Р. Шайдуллин^{а,*}, С. А. Фадеев^{а,**}

^аФИЦ “Казанский научный центр” РАН, Институт механики и машиностроения, Казань, Россия

*E-mail: shaidullin@imm.knc.ru

**E-mail: fadееv.sergei@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2023 г.

После доработки 29.04.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Экспериментально исследовано воздействие на аэрозоль слабоинтенсивных акустических колебаний в однородной трубе и в трубе с конусной насадкой в условиях равенства объемов резонаторов. Показано, что форма резонатора влияет на интенсивность, форму волны давления и спектр колебаний при постоянных значениях резонансной частоты и амплитуды смещения поршня. Наблюдается увеличение добротности резонатора с конусной насадкой. Выявлено ускоренное осаждение аэрозоля в трубах при акустических колебаниях на резонансной частоте. При наличии конусной насадки уменьшение концентрации капель аэрозоля происходит быстрее в 1.2 раза в отличие от однородной трубы и в 3 раза в сравнении с естественным осаждением. Полученные результаты могут быть использованы для повышения эффективности акустических методов очистки газов от дисперсной фазы.

Ключевые слова: акустические колебания, аэрозоль, резонатор, труба, осаждение, конусная насадка

DOI: 10.31857/S1024708423600124, **EDN:** XCQVVH

В настоящее время сохраняется интерес к нелинейным волновым процессам, которые широко применяются в разных областях науки и техники [1–3]. Данные процессы были рассмотрены для акустических резонаторов с различной геометрией [4–10]. Изучены оптимальные формы резонаторов для увеличения амплитуды акустического давления при наличии диссипации энергии в пограничном слое [5]. Для различных геометрий резонатора в виде конуса, конуса с горлом и колбы получены амплитуды давления, сильно превышающие амплитуды, полученные в цилиндрическом резонаторе [11]. Результаты решения одномерных нелинейных уравнений показали, что в конических и косинусоидальных трубках индуцируются высокие акустические давления в безударно-волновом режиме колебаний, когда в цилиндрической трубе равной длины и объема наблюдаются ударные волны [12]. При этом нелинейные характеристики акустического давления сильно зависят как от формы трубы, так и от амплитуды ускорения. В работе [6] рассматривается влияние нелинейности и геометрии на колебательное движение газа при резонансных колебаниях в усеченном конусе. Получено уравнение с собственными значениями, соответствующее переменной равновесной плотности и проведено сравнение с точными численными решениями. Особый интерес представляют цилиндрические резонаторы в виде трубы с изменяющимся сечением [11, 13–17]. Исследования колебаний газа в таких резонаторах выявили искажение формы волны, дисперсию резонансной частоты [13, 17] и появление сильных нелинейностей [15] в сравнении с цилиндрическими трубами постоянного радиуса. Полученные результаты применимы при разработке оптимальных форм труб для звукового компрессора, насосов или выявления эффективных способов акустического осаждения аэрозолей в пыле-каплеуловительных устройствах. Установлено, что при акустическом воздействии на туманы происходит ускорение процессов испарения, конденсации и дегазации капель. В случае увлажнения дыма и пылей осуществляется подсушка твердой дисперсной фазы. Рассмотренные процессы оказывают влияние на кинетику осаждения и агрегирования аэрозольных частиц [18–20]. Для улавливания аэрозолей и очистки от примесей применяют различные газоочистные оборудования, где

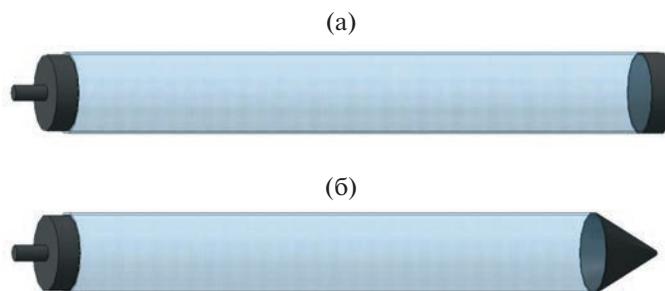


Рис. 1. Виды резонаторов: однородная труба (а), труба с конусной насадкой (б).

особое внимание уделяется интенсификации осаждения мелкодисперсных частиц аэрозоля [21]. Физическое воздействие в виде акустических полей с подобранными параметрами и геометрией резонаторов для увеличения интенсивности колебаний существенно влияет на движение дисперсной фазы [18, 22–24]. Образующиеся при этом вихревые акустические течения приводят к повышению вероятности сближения частиц и их осаждения на стенках резонатора [25, 26].

Результаты исследования волновых процессов в газах и аэрозолях представляют большой практический интерес при решении проблем сепарации конденсата из природных газов, сушке порошков, мониторинге окружающей среды или предварительной фильтрации взвешенных частиц. Помимо этого, аэрозоль в малых концентрациях может быть использован в качестве трассеров для визуализации и изучения вторичных акустических течений в резонаторах оптическими методами измерения мгновенных полей скорости газа [27]. Акустические методы очистки воздуха используются в качестве вспомогательных технических решений для предварительной обработки воздуха с целью повышения эффективности удаления дисперсной фазы в традиционных системах очистки газов [18, 19, 25]. Дальнейшее изучение динамики аэрозолей в резонаторах сложной формы призвано стимулировать развитие волновых технологий для промышленной экологии.

В настоящей работе исследуется влияние конусной насадки на осаждение мелкодисперсного аэрозоля и динамику газа при акустических колебаниях малой амплитуды в трубе.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Исследования проведены на экспериментальной установке TV51075, которая представляет собой виброгенератор S511 с усилителем мощности марки ВАА 120 фирмы TIRA [28]. На столе вибростенда при помощи специальной системы устанавливался плоский поршень из легкого прочного сплава Д16Т, который колебался в цилиндре соединенного с прозрачной, вертикально ориентированной, стеклянной трубой радиусом $R = 0.018$ м. Радиус трубы равен радиусу поршня и цилиндра. Противоположный конец трубы герметично закрывался плоской крышкой, расположенной перпендикулярно оси трубы (однородная труба), или крышкой в виде полого симметричного конуса с радиусом основания, равным радиусу трубы (труба с конусной насадкой). Геометрия исследуемых резонаторов представлена на рис. 1. Длина однородной трубы $L_n = 0.51$ м (рис. 1а), длина трубы с конусной насадкой (рис. 1б) состоит из длины цилиндрической части $l = 0.498$ м и конуса с высотой $d = 0.036$ м; следовательно, расстояние от поршня до вершины конуса составляет $L_c = l + d = 0.534$ м. Для указанных геометрических параметров трубы с конусной насадкой системой-аналогом является однородная труба с приведенной длиной [3, 29], определяемой выражением, выведенным из равенства объемов

$$L_n = l + l_m, \quad l_m = \frac{d}{3}$$

где l_m – отношение объема конуса к площади поперечного сечения трубы. Учитывая поправку l_m , длина приведенной трубы $L_n = 0.51$ м. Таким образом, геометрические параметры исследуемых труб выбраны исходя из равенства объемов резонаторов, что позволяет напрямую сравнивать основные характеристики колебательных систем.

Управление и контроль вибростендом осуществлялись исходя из данных IEPЕ акселерометра марки 4513–001 фирмы Bruel & Kjaer и контроллера типа VR8500-1 фирмы Vibration Research

Corporation, через специальное программное обеспечение SineVIEW. Система управления выполняла спектральный анализ на базе быстрого преобразования Фурье полученных параметров и работала как система с обратной связью. Избыточное давление среды p измерялось пьезоэлектрическим датчиком модели 8530С-15 фирмы ENDEVCO вблизи поршня. Сигнал с датчика через трехканальный мостовой усилитель напряжения модели 136 фирмы ENDEVCO подавался на цифровой осциллограф TDS3012С фирмы Tektronix. Эксперименты проводились в воздухе при атмосферном давлении $p_0 = 102.5 \times 10^3$ Па и температуре $T_0 = 291$ К.

В качестве рабочей среды использовался аэрозоль, который создавался при помощи аэрозольного генератора АТМ 225 TOPAS из жидкости DEHS [20, 23]. Измерения с помощью лазерного спектрометра LAP-320 фирмы TOPAS показали, что радиус капель аэрозоля составляют от 0.42 до 0.53 мкм, что достигается благодаря высокоэффективному НЕРА фильтру на выходе генератора. Спектрометр реализовывал принцип количественной регистрации интенсивности света, рассеянного одной каплей, зависящей от первоначальной интенсивности. Размер среднего и наибольшего количества полученных капель, согласно интегральному распределению частиц, $r = 0.43$ мкм [30]. Это позволяет рассматривать аэрозоль как монодисперсную систему. Аэрозоль равномерно заполнял резонатор без избыточного давления. Время заполнения резонатора было одинаковым для каждого эксперимента, при постоянном расходе аэрозольного генератора. Начальная числовая концентрация аэрозоля для каждого случая равнялась $n_0 = 6.4 \times 10^{12}$ м⁻³. Полученная концентрация соответствует малым объемному и массовому содержаниям капель аэрозоля в резонаторах $\alpha = 2.17 \times 10^{-7}$, $m = 0.16 \times 10^{-3}$, соответственно, определяемых следующими выражениями [31]

$$\alpha = \frac{4}{3} \pi r^3 n_0, \quad m = \frac{\alpha \rho_a}{(1 - \alpha) \rho_g} \quad (1.1)$$

где ρ_0 – плотность несущей фазы (газа), ρ_a – плотность дисперсной фазы (DEHS). Скорость звука в такой разреженной системе ($\alpha \ll 1$, $m \ll 1$) слабо отличается от скорости звука в чистом газе. Выражения (1.1) справедливы для случая монодисперсной системы, когда дисперсная фаза в каждом элементарном объеме представляет собой сферическую частицу, что дает возможность пренебречь эффектами взаимодействия частиц.

Осаждение аэрозоля, которое проявляется в просветлении трубы под действием акустических колебаний со временем, определялось с помощью лазера (SYD1230) с длиной волны 650 нм и мощностью 5 мВт. Луч света падал перпендикулярно оси через середину трубы на датчик (фотодиод) люксметра марки АТТ-1505 (Актаком), время замера значений датчиком равняется 0.4 с с точностью до 4%. Для оценки числовой концентрации аэрозоля можно воспользоваться соотношением, учитывающим показания люксметра и начальную концентрацию [28]

$$N = n_0 \frac{E_t - E_0}{E_1 - E_0}$$

где E_1 – значения освещенности с датчика люксметра после полного заполнения трубы аэрозолем, E_0 – показание люксметра до заполнения трубы, E_t – показания датчика в момент времени t . При этом коэффициент пропускания среды $\tau = \Phi_1 / \Phi_0$ для светового потока без аэрозоля Φ_0 и с аэрозолем Φ_1 падающего на датчик люксметра равен 0.52 [32].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2, 3 представлены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и осциллограммы колебаний давления газа для однородной трубы и трубы с конусной насадкой при амплитуде смещения поршня $l_0 = 0.05$ мм. Амплитуда колебаний давления максимальна на резонансной частоте $f_t = f_c = 334.5$ Гц, одинаковой для обоих случаев в силу равенства объемов резонаторов. Наблюдается несимметричный вид зависимостей $p(f)$ относительно резонансной частоты. В первом случае амплитуда колебаний давления на резонансной частоте $p_{\max} = 406.5$ Па, во втором 512.4 Па. Измеренные значения интерполированы полиномиальными зависимостями типа

$$p = C_0 + C_1 f + C_2 f^2 + \dots + C_k f^k$$

где коэффициенты полиномов C_k представлены в табл. 1.

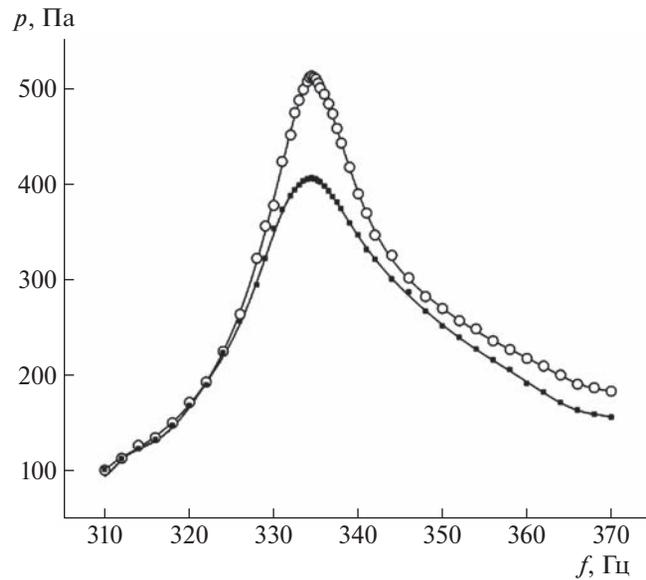


Рис. 2. Зависимость амплитуды колебаний давления газа от частоты: ■ — однородная труба; о — труба с конусной насадкой; линии — полиномиальная аппроксимация.

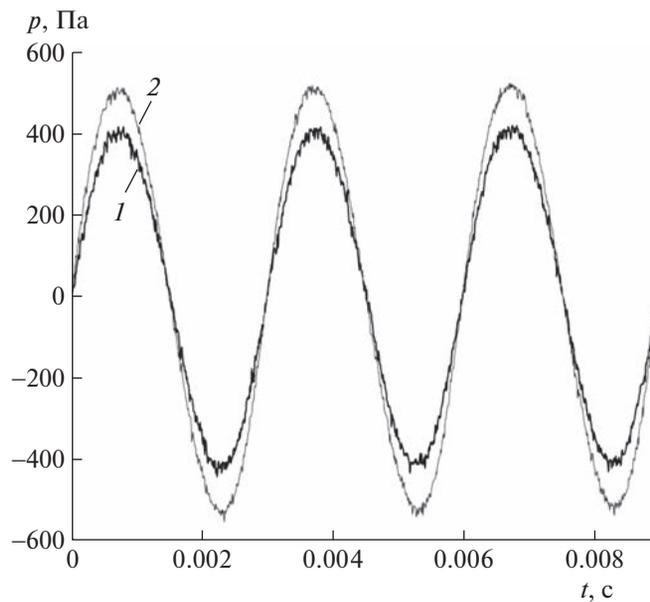


Рис. 3. Осциллограммы колебаний в однородной трубе (1) и в трубе с конусной насадкой (2).

При наличии конусной насадки в трубе наблюдаются увеличение амплитуды колебаний давления на 26% в сравнении с однородной трубой и сильное различие добротностей. Оценим добротность по формуле [33]

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

где f_0 — резонансная частота, $\Delta f = f_1 - f_2$ — ширина полосы пропускания, f_1, f_2 — нижняя и верхняя границы полосы пропускания, определяемые амплитудой колебаний давления $p_{\max}/\sqrt{2}$.

Для случая однородной трубы добротность составляет $Q = 18.57$, для трубы с конусной насадкой 27.83. Таким образом, добротность трубы с конусной насадкой на 50% выше добротности од-

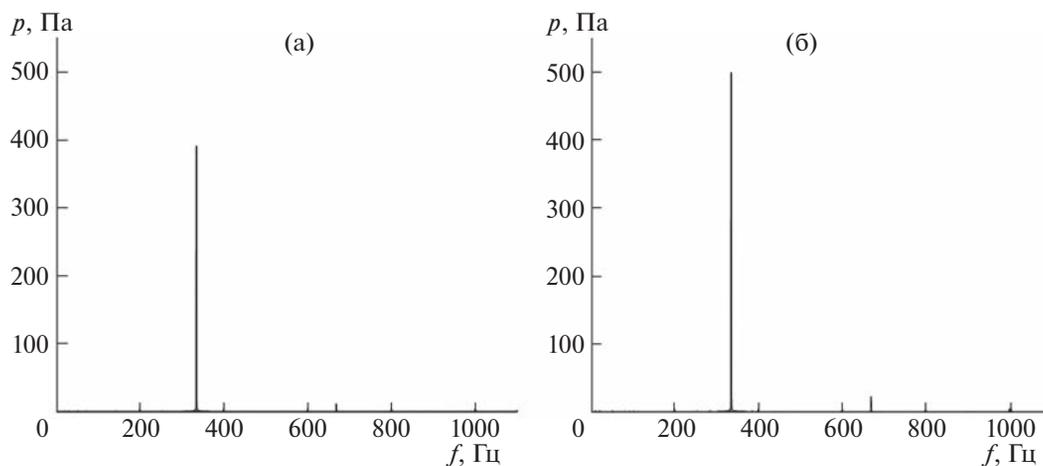
Таблица 1. Коэффициенты полиномиальной аппроксимации зависимостей $p(f)$

Коэф.	Однородная труба		Труба с конусной насадкой	
	$f \leq f_0$	$f \geq f_0$	$f \leq f_0$	$f \geq f_0$
C_0	5.86×10^{13}	-3.39×10^{12}	-1.06×10^{13}	-4.98×10^{12}
C_1	-1.46×10^{12}	7.68×10^{10}	2.65×10^{11}	1.12×10^{11}
C_2	1.58×10^{10}	-7.62×10^8	-2.88×10^9	-1.11×10^9
C_3	-9.85×10^7	4.32×10^6	1.8×10^7	6.27×10^6
C_4	3.83×10^5	-1.53×10^4	-6.99×10^4	-2.21×10^4
C_5	-9.51×10^2	34.66	174.17	49.93
C_6	1.48	-4.9×10^{-2}	-0.27	-7×10^{-2}
C_7	-1.31×10^{-3}	3.97×10^{-5}	2.41×10^{-4}	5.68×10^{-5}
C_8	5.09×10^{-7}	-1.41×10^{-8}	-9.39×10^{-8}	-2×10^{-8}

нородной трубы в условиях равенства объемов. Дальнейшее увеличение длины конусной насадки приведет к разнонаправленной динамике амплитуды давления на поршне и закрытом конце [29]. Так, амплитуда давления на поршне будет уменьшаться, в вершине конусной насадки будет наблюдаться повышение амплитуды давления.

На осциллограммах наблюдается слабая нелинейность – асимметричность переднего и заднего фронтов волны давления. Для однородной трубы на резонансной частоте длительность переднего фронта равна 1.44 мс, заднего 1.57 мс, для трубы с конусной насадкой 1.35 и 1.63 мс соответственно. В процессе распространения акустическая волна, возбуждаемая синусоидально колеблющимся поршнем, постепенно стремится превратиться из синусоидальной в пилообразную. Это обусловлено тем, что при сравнительно больших амплитудах колебаний давления газа различные части волны движутся с разной скоростью. Участки повышенного давления, где частицы среды движутся в направлении распространения волны, перемещаются с увеличенной скоростью, и, наоборот, участки пониженного давления, где частицы движутся в обратном направлении, перемещаются с пониженной скоростью [18]. Таким образом, в трубе с конусной насадкой, с увеличением амплитуды колебаний давления, уменьшается длительность переднего фронта и профиль волны становится более крутым по сравнению с однородной трубой (рис. 3), а в спектре наиболее ярко выражены высшие гармоники (рис. 4).

На рис. 5 приведены экспериментальные результаты зависимости давления газа от амплитуды смещения поршня. Видно, что с ростом амплитуды смещения поршня давление увеличива-

**Рис. 4.** Спектр акустических колебаний при $l_0 = 0.05$ мм: однородная труба (а), труба с конусной насадкой (б).

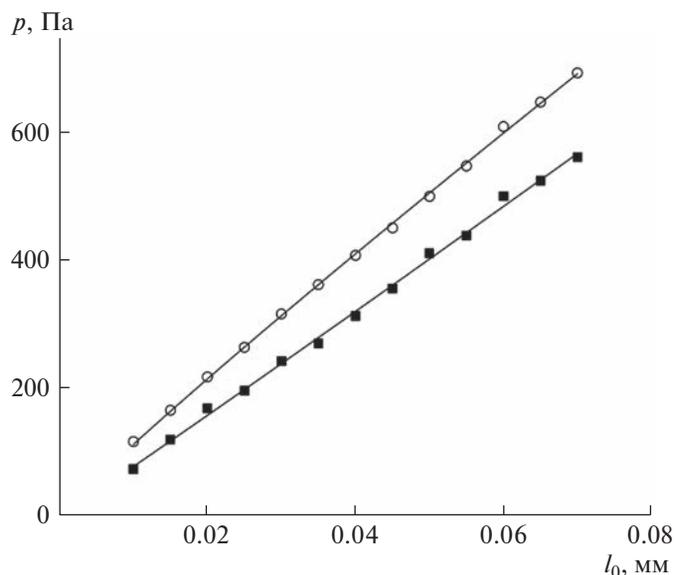


Рис. 5. Зависимость давления p от амплитуды смещения поршня l_0 на резонансной частоте колебаний газа: ■ – однородная труба; ○ – труба с конусной насадкой; линии – степенная аппроксимация.

ется. Как известно, амплитуда колебаний давления пропорциональна величине l_0^n ($n > 0$), которая характеризует интенсивность колебаний [8]. Аппроксимация полученных экспериментальных данных дает степенную зависимость

$$p = al_0^n$$

Коэффициенты аппроксимации представлены в табл. 2. Отметим, что показатели степени n близки к 1, что говорит о безударно-волновом режиме колебаний для обоих случаев геометрии закрытого конца.

Количественные данные по осаждению аэрозоля приведены на рис. 6. Показано монотонное уменьшение числовой концентрации капель аэрозоля от начального значения до полного осаждения на стенках резонатора со временем при амплитуде смещения поршня $l_0 = 0.05$ мм на резонансной частоте колебаний. Время полного осаждения аэрозоля для однородной трубы и трубы с конусной насадкой равны $t_1 = 680$ с и $t_2 = 816$ с соответственно. Время естественного осаждения аэрозоля при отсутствии колебаний $t_0 = 2016$ с.

Приведем теоретические оценки гравитационного и диффузионного осаждения в отсутствие колебаний газа. Предполагается, что размеры частиц r и его концентрация n_0 малы, поэтому взаимодействие между частицами незначительно.

Скорость движения частиц под действием сил тяжести, Стокса и Архимеда, известная как скорость осаждения частиц, определяется по формуле [34]

$$v_s = \frac{2r^2(\rho_a - \rho_0)}{9\mu} \quad (2.1)$$

где μ – динамическая вязкость газа. Расчет по (2.1) дает $v_s = 2 \times 10^{-5}$ м/с.

Таблица 2. Коэффициенты степенной аппроксимации зависимостей $p(l)$

Коэф.	Однородная труба	Труба с конусной насадкой
a	8578	8300
n	1	0.93

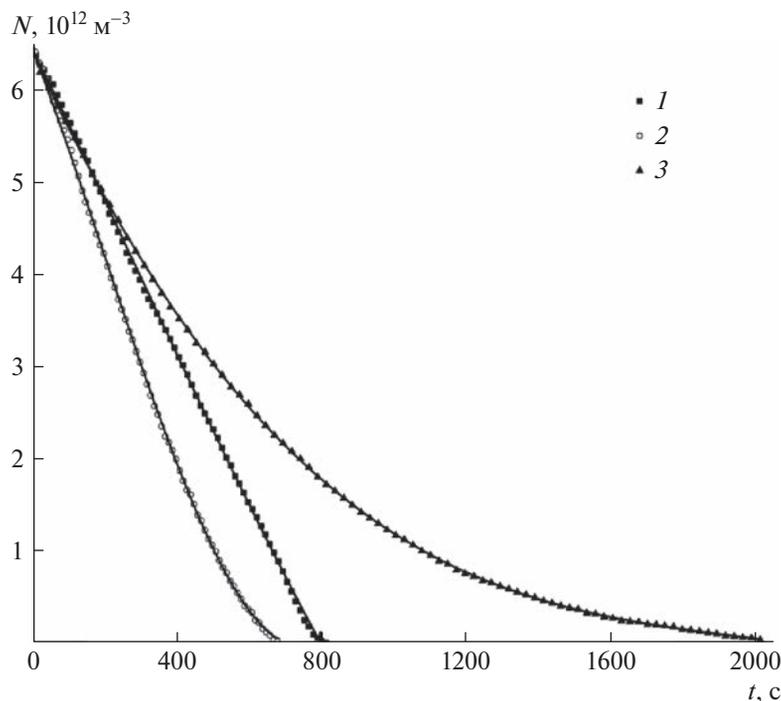


Рис. 6. Зависимости концентрации частиц аэрозоля от времени в однородной трубе (1), в трубе с конусом (2) и при естественном осаждении (3) при амплитуде смещения поршня $l_0 = 0.05$ мм. Линии – полиномиальная аппроксимация.

Для характеристики скорости диффузии частиц аэрозоля в результате теплового движения молекул при возникновении градиента концентрации у стенок необходимо определить коэффициент диффузии частиц, который рассчитывается по уравнению Стокса–Эйнштейна [35]

$$D = \frac{kT_0}{6\pi\mu r}$$

где k – постоянная Больцмана. Для параметров эксперимента $D = 2.73 \times 10^{-11}$ м²/с.

Механизм движения частиц характеризуется числом Пекле [36, 37]

$$Pe = \frac{v_s r}{D}$$

Если $Pe \gg 1$, то броуновским движением частиц аэрозоля можно пренебречь; при $Pe \ll 1$ осаждение является диффузионным. Стоит отметить, что аналитические [34, 38] и численные [37] расчеты показывают, что для аэрозольных частиц радиуса 0.3–0.5 мкм скорости гравитационного и диффузионного осаждения имеют один и тот же порядок величины. Для частиц аэрозоля, используемого в эксперименте, число $Pe = 0.31$, откуда следует, что с учетом геометрических размеров ($L \gg R$) и вертикальной ориентации трубы диффузионное осаждение превалирует над гравитационным.

Выявлено, что осаждение для трубы с конусной насадкой происходит в 1.2 раза быстрее в сравнении с однородной трубой, и в 3 раза быстрее, чем при естественном осаждении. Частицы аэрозоля принимают участие в колебательном и поступательном движении газа, в том числе под действием эффектов второго порядка: асимметрия формы звуковой волны, акустические течения [18]. В данных режимах ускоренное осаждение частиц на стенках резонаторов в первую очередь вызвано акустическими течениями в виде двух тороидальных вихрей в ядре потока ($R - 4.6\delta$, где R – внутренний радиус трубы, δ – акустический пограничный слой [39]), возникающих в стоячей волне [18, 23, 40]. Наличие конуса ведет к увеличению интенсивности колебаний (рис. 2), что, соответственно, уменьшает время осаждения аэрозоля.

Таблица 3. Коэффициенты полиномиальной аппроксимации зависимостей $N(t)$

	Естественное ос.	Однородная труба	Труба с конусной насадкой
K_0	6.47	6.47	6.47
K_1	-0.008	-0.01	-0.008
K_2	4.1×10^{-6}	-8.1×10^{-6}	-1.2×10^{-6}
K_3	6.9×10^{-10}	1.3×10^{-8}	1.4×10^{-10}

Выражение для аппроксимации экспериментальных результатов имеет вид

$$N = K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3$$

где постоянные K_0, K_1, K_2, K_3 определены в диапазонах, представленных в табл. 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально исследовано осаждение аэрозоля при нелинейных колебаниях в трубах с плоским и конусным окончаниями. Наличие конусной насадки, в сравнении с плоским окончанием, позволяет интенсифицировать колебания газа в трубе при равных амплитудах смещения поршня и резонансных частотах. В обоих случаях наблюдается слабая нелинейность, однако колебания сохраняют непрерывный, близкий к гармоническому, вид.

Спектр колебаний газа в трубе с конусной насадкой содержит ярко выраженные пики на удвоенной и утроенной резонансных частотах. При наличии конусной насадки в условиях безударно-волнового режима колебаний газа наблюдается ускоренное осаждение аэрозоля. Выявлено, что осаждение аэрозоля в трубе с конусной насадкой происходит в 1.2 раза быстрее в сравнении с однородной трубой и в 3 раза быстрее по сравнению с естественным осаждением.

Таким образом, конструкционное решение в виде конусного окончания резонансной трубы может быть использовано для повышения эффективности технологий очистки промышленных выбросов от дисперсных примесей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-00302, <https://rscf.ru/project/22-79-00302>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
2. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
3. Skuchik E. *Osnovy akustiki [Fundamentals of acoustics]*: translated from English, edited by L.M. Lyamshev. V. 2. М.: Mir, 1976. 542 p.
4. Li X., Finkbeiner J., Raman G., Daniels C., Steinetz B.M. Optimized shapes of oscillating resonators for generating high-amplitude pressure waves // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 116. № 5. P. 2814–2821.
5. Cervenka M., Soltés M., Bednarik M. Optimal shaping of acoustic resonators for the generation of high-amplitude standing waves // *J. Acoust. Soc. Am.* 2014. V. 136. № 3. P. 1003–1012.
6. Amundsen D.E., Mortell M.P., Seymour B.R. Resonant radial oscillations of an inhomogeneous gas in the frustum of a cone // *Z. Angew. Math. Phys.* 2015. V. 66. P. 2647–2663.
7. Antao D.S., Farouk B. High amplitude nonlinear acoustic wave driven flow fields in cylindrical and conical resonators // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 134. № 2. P. 917–932.
8. Shaidullin L., Fadeev S. Acoustic gas oscillations in a cubic resonator with a throat under small perturbations // *Appl. Acoust.* 2022. V. 192. 108758.
9. Feng H., Peng Y., Bin G., Shen Y. Evolution of Flow and Streaming in Exponential Variable Cross-Section Resonators // *Appl. Sci.* 2020. V. 10 № 5. 1694.
10. Yanan Yu, Wei Liu, Wen He. A study on finite amplitude standing waves in stepped acoustic resonator // *Appl. Acoust.* 2023. V. 202. 109164.
11. Lawrenson C.C., Lipkens B., Lucas T.S., Perkins D.K., VanDoren T.W. Measurements of macrosonic standing waves in oscillating closed cavities // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 104. № 2. P. 623–636.
12. Chun Y.-D., Kim Y.-H. Numerical analysis for nonlinear resonant oscillations of gas in axisymmetric closed tubes // *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. V. 108. № 6. P. 2765–2774.

13. *Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A.* Linear and nonlinear frequency shifts in acoustic resonators with varying cross sections // *J. Acoust. Soc. Am.* 2001. V. 110. № 1. P. 109–119.
14. *Kar T., Munjal M.L.* Analysis and design of conical concentric tube resonators // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 116. № 1. P. 74–83.
15. *Min Q.* Generation of extremely nonlinear standing-wave field using loudspeaker-driven dissonant tube // *J. Acoust. Soc. Am.* 2018. V. 143. № 3. P. 1472–1476.
16. *Feng H., Peng Y., Zhang X., Li X.* Influence of tube geometry on the performance of standing-wave acoustic resonators // *J. Acoust. Soc. Am.* 2018. V. 144. № 3. P. 1443–1453.
17. *Mortell M.P., Seymour B.R.* Nonlinear resonant oscillations in closed tubes of variable cross-section // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 519. P. 183–199.
18. *Mednikov E.P.* Acoustic Coagulation and Precipitation of Aerosols. N.-Y.: Springer, 1965. 180 p.
19. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Осипов П.П., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р.* Волновая динамика газозвзвесей и отдельных частиц при резонансных колебаниях // *ТВТ.* 2021. Т. 59. № 3. С. 443–466.
20. *Yuen W.T., Fu S.C., Kwan J.K. C., Chao C.Y.H.* The use of nonlinear acoustics as an energy-efficient technique for aerosol removal // *Aerosol Sci. Technol.* 2014. V. 48. № 9. P. 907–915.
21. *Amiri M., Sadighzadeh A., Falamaki C.* Experimental parametric study of frequency and sound pressure level on the acoustic coagulation and precipitation of PM_{2.5} // *Aerosol Air Qual. Res.* 2016. V. 16. № 12. P. 3012–3025.
22. *Gubaidullin D.A., Zaripov R.G., Tkachenko L.A., Shaidullin L.R.* Deposition of polydisperse gas suspensions with nonlinear resonance oscillations in a closed tube // *J. Acoust. Soc. Am.* 2019. V. 145. № 1. P. EL30–EL33.
23. *Gubaidullin D.A., Zaripov R.G., Tkachenko L.A., Shaidullin L.R.* Aerosol deposition on resonances at nonlinear oscillations in a closed cross section jump tube // *Continuum Mech. Thermodyn.* 2022.
24. *Argo T.F., Zadler B.J., Meegan G.D.* Size selection of levitated aerosol particulate in an ultrasonic field // *J. Acoust. Soc. Am.* 2020. V. 147. № 2. P. EL93.
25. *Хмелев В.Н., Голых Р.Н., Нестеров В.А., Боченков А.С., Шалунов А.В.* Компьютерное моделирование ультразвуковой агломерации субмикронных частиц с учетом вихревого движения несущей среды // *Южно-Сибирский научный вестник.* 2021. Вып. 5. № 39. С. 165–170.
26. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р.* Экспериментальное исследование осаждения аэрозоля в закрытой трубе с изменяющимся сечением // *ТВТ.* 2022. Т. 60. № 1. С. 146–148.
27. *Ellier S.E., Kdous W., Bailly Y., Girardot L., Ramel D., Nika P.* Acoustic streaming measurements in standing wave resonator using Particle Image Velocimetry // *Wave motion.* 2014. V. 51. № 8. 1288–1297.
28. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А.* Резонансные колебания аэрозоля в трубе с диафрагмой в безударно-волновом режиме // *ТВТ.* 2014. Т. 52. № 6. С. 921–926.
29. *Gubaidullin D.A., Tkachenko L.A., Shaidullin L.R., Fadeev S.A.* Investigation of gas oscillations in the closed tube with a cone tip // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43. № 8. 1116–1121.
30. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Галиуллин Р.Г., Галиуллина Э.Р., Ткаченко Л.А.* Экспериментальное исследование коагуляции аэрозоля в трубе вблизи субгармонического резонанса // *ТВТ.* 2004. Т. 42. № 5. С. 788–795.
31. *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
32. *Гуревич М.М.* Фотометрия (теория, методы и приборы). Л.: Энергоатомиздат, 1983. 272 с.
33. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971. 557 с.
34. *Фукс Н.А.* Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 352 с.
35. *Einstein A.* Investigation on the Theory of Brownian Movement, edited by R. Furth. New York: Dover, 1956.
36. *Desantes J.M., Margot X., Gil A., Fuentes E.* Computational study on the deposition of ultrafine particles from Diesel exhaust aerosol // *J. Aerosol Sci.* 2006 V. 37. P. 1750–1769.
37. *Wu S., Zhu H., Chen Y., Qi C. and Li G.* A 3D Monte Carlo Simulation for Aerosol Deposition onto Horizontal Surfaces by Combined Mechanisms of Brownian Diffusion and Gravity Sedimentation // *Atmosphere.* 2022. V. 13. 1408.
38. *Губайдуллин Д.А., Осипов П.П.* Аэрогидродинамика дисперсной частицы. М.: Физматлит, 2020. 176 с.
39. *Gubaidullin D.A., Tkachenko L.A., Fadeev S.A., Shaidullin L.R.* Resonance oscillations of gas in a closed tube in presence of a heterogeneous temperature profile // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43. № 8. P. 1110–1115.
40. *Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A.* Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113. № 1. P. 153–160.

УДК 532.546

РЕЖИМЫ ВЫТЕСНЕНИЯ ЖИДКОСТИ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО ПЛАСТА В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

© 2023 г. А. А. Чернова^{а,*}, А. А. Афанасьев^{а,**}

^аНаучно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: a.chernova@imec.msu.ru

**E-mail: afanasyev@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 10.04.2023 г.

После доработки 10.06.2023 г.

Принята к публикации 10.07.2023 г.

Рассмотрена задача двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей в анизотропной пористой среде, находящейся в поле силы тяжести. Определены критерии подобия, характеризующие направления течения вытесняющей и вытесняемой жидкостей. В рамках исследования численных решений профильной задачи фильтрации проведена классификация режимов вытеснения из анизотропного пласта. Показано, что существует четыре режима, соответствующих качественно различным течениям. Проведено сравнение их эффективности в терминах коэффициента извлечения жидкости из пласта и коэффициента его охвата вытеснением. Исследовано влияние капиллярного давления на эффективность вытеснения в различных режимах течения. Показано, что в одних случаях увеличение влияния капиллярного давления приводит к повышению коэффициента вытеснения, а в других режимах, наоборот, — к его снижению.

Ключевые слова: фильтрация, анизотропный пласт, гравитационное расслоение, коэффициент вытеснения, коэффициент охвата, повышение нефтеотдачи

DOI: 10.31857/S1024708423600239, **EDN:** UZTSQC

Разработка углеводородных месторождений предполагает закачку в пласт жидкостей и газов с целью поддержания пластового давления и вытеснения нефти от нагнетательных к добывающим скважинам [1, 2]. Однако неоднородное строение пластов, которое в ряде случаев можно охарактеризовать анизотропной проницаемостью, снижает эффективность вытеснения нефти. Часто абсолютная проницаемость в направлении напластования, т.е. в горизонтальном направлении, значительно больше проницаемости в вертикальном направлении. Это приводит к снижению коэффициента охвата пласта вытеснением, т.е. отношения объема породы, охваченной вытеснением, ко всему объему нефтесодержащей породы. Нагнетаемая в пласт жидкость (или газ) может прорываться к добывающим скважинам по отдельным высокопроницаемым пропласткам, оставляя невытесненным значительный объем нефти.

Гравитационное расслоение жидкостей также может уменьшать коэффициент нефтеотдачи [3–7]. Так как вода обычно характеризуется более высоким значением плотности, чем нефть, то при заводнении нефтяного пласта вода может опускаться к его подошве, оставляя невытесненной нефть у кровли пласта. При закачке газа реализуется противоположная ситуация. Как более легкая по сравнению с нефтью фаза, газ поднимается к кровле пласта и вдоль нее прорывается к добывающим скважинам, оставляя неохваченными вытеснением области у подошвы пласта. Отмеченные гидродинамические эффекты в поле силы тяжести осложняются влиянием других механизмов переноса жидкостей, прежде всего связанных с капиллярной проницаемостью пористой среды [8]. Влияние капиллярного давления на эффективность вытеснения неоднозначно. С одной стороны, капиллярное давление может приводить к повышению охвата пласта вытеснением, а с другой стороны, может приводить к нежелательным последствиям, связанным с “размытием” фронтов вытеснения и ускоренным продвижением вытесняющей жидкости к добывающим скважинам.

Отмеченные процессы в анизотропном пласте могут оказывать сложное нелинейное влияние друг на друга, приводя к качественно различным режимам вытеснения. Цель настоящей работы

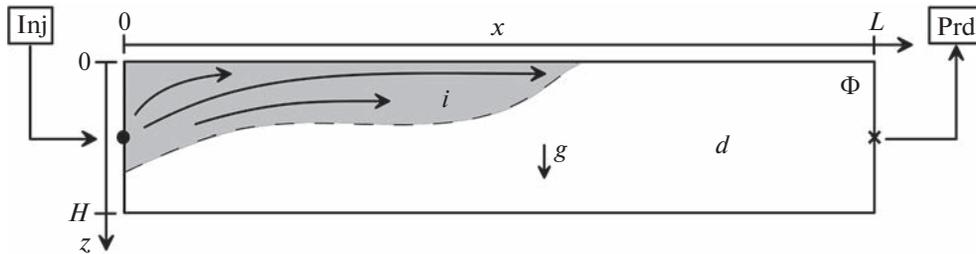


Рис. 1. Схема течения в области Φ при $\rho_i < \rho_d$. Символы i и d показывают зоны, насыщенные вытесняющей и вытесняемой жидкостями соответственно. В области i происходит двухфазное течение обеих жидкостей.

заключается в классификации и описании этих режимов и определении параметров пласта и жидкости, при которых эти режимы реализуются. Несомненно, подробное описание течений, особенно в случае вытеснения нефти газом, — сложная многопараметрическая задача. Помимо описанных эффектов, в ней нужно учитывать компонентный обмен между фазами газа и нефти, их сжимаемость, диффузию компонент в фазах и т.д. [3, 4, 9, 10]. В данной работе эти эффекты пренебрегаются, а рассматривается более простая постановка задачи о вытеснении из анизотропной пористой среды одной несжимаемой жидкости другой также несжимаемой жидкостью. Данное упрощение позволяет провести подробное исследование влияния анизотропии и гравитационного расслоения фаз на эффективность вытеснения, что само по себе уже представляет сложную задачу. Определяемые в данной работе режимы вытеснения и характеризующие их критерии подобия могут в будущем использоваться в более сложных постановках задач, учитывающих фазовые превращения, диффузию и другие эффекты.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается двумерная постановка задачи изотермической фильтрации в области Φ , $(x, z) \in [0, L] \times [0, H]$, описывающей срез проницаемого пласта (рис. 1). Здесь x — горизонтальная координата, направленная вдоль пласта, z — вертикальная координата, направленная вниз, L — протяженность рассматриваемого сектора пласта, а H — его толщина. Область Φ характеризуется однородным распределением пористости ϕ и однородным, но анизотропным распределением проницаемости \mathbf{k} . Пористая среда насыщена несжимаемой жидкостью d , которая имеет плотность ρ_d . В начальный момент времени $t = 0$ пласт находится в условиях гидростатического равновесия, а давление p_d линейно зависит от глубины z

$$p_d = p_0 + \rho_d g z, \quad s_d = 1 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (1.1)$$

где p_0 — давление на уровне $z = 0$, s_d — насыщенность жидкости d , а g — ускорение свободного падения. Условие $s_d = 1$ означает, что поровое пространство полностью насыщено жидкостью d , а другие жидкости отсутствуют. Все границы $x = 0, L$ и $z = 0, H$ области Φ непроницаемые.

При $x = 0, z = H/2$ расположен точечный источник Inj, через который в область Φ закачивается другая вытесняющая жидкость i , тоже предполагающаяся несжимаемой и характеризующаяся плотностью ρ_i (рис. 1). Закачка начинается в момент времени $t = 0$ и происходит с постоянным объемным расходом Q . Одновременно с источником включается сток Prd, расположенный у противоположной границы области Φ при $x = L, z = H/2$. Через Prd из области Φ может отбираться как вытесняемая, так и вытесняющая жидкость. Суммарный расход стока для обеих жидкостей равен Q , т.е. по абсолютной величине он равен расходу источника. Например, источник и сток соответствуют горизонтальным скважинам, пересекающим разрез Φ в направлении оси y , перпендикулярной к x и z .

Если $\rho_i < \rho_d$, то закачиваемая жидкость из-за силы Архимеда стремится подняться к границе $z = 0$. Например, этот случай соответствует закачке газа в нефтяной пласт. Противоположный случай $\rho_i > \rho_d$ соответствует, например, закачке воды. В этом случае более тяжелая вытесняющая жидкость i стремится под действием силы тяжести опуститься к границе $z = H$.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Несмешивающаяся двухфазная фильтрация вытесняющей и вытесняемой жидкостей описывается следующей системой уравнений [7, 11, 12]

$$\phi \partial_t(s_j) + \nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad j = d, i \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}_j = -\mathbf{k} \frac{k_{rj}(s_i)}{\mu_j} (\nabla p_j - \rho_j \mathbf{g}) \quad (2.2)$$

$$s_d + s_i = 1, \quad p_i - p_d = p_c(s_i) \quad (2.3)$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, ϕ – пористость, ρ – плотность, s – насыщенность, \mathbf{u} – скорость фильтрации, $\mathbf{k} = \text{diag}\{k_x, k_z\}$ – тензор абсолютной проницаемости, k_{rj} – относительная проницаемость j -й фазы, μ – динамическая вязкость, p – давление, p_c – капиллярное давление, $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$ – удельная сила тяжести, а индексы i и d обозначают параметры закачиваемой и вытесняемой жидкостей соответственно. Предполагается, что обе жидкости и матрица пористой среды – несжимаемые среды, т.е. $\rho, \phi, \mathbf{k} = \text{const}$. Главные направления тензора проницаемости выровнены по осям x и z , а главные значения равны k_x и k_z соответственно. Вязкости жидкостей также полагаются константами. Уравнения (2.1) – законы сохранения массы каждой из жидкостей, уравнение (2.2) – закон Дарси, а уравнения (2.3) – замыкающие соотношения для насыщенностей фаз и их давлений.

Функции насыщенности, т.е. относительные фазовые проницаемости $k_{ri}(s_i)$ и $k_{rd}(s_i)$ и капиллярное давление $p_c(s_i)$, задаются в виде [13]

$$k_{ri}(s_i) = k_{ri,\max} s_i^2, \quad k_{rd}(s_i) = (1 - s_i)^2, \quad p_c(s_i) = p_{c,\max} s_i \quad (2.4)$$

где $k_{ri,\max}$ – максимальное значение относительной фазовой проницаемости, а $p_{c,\max}$ – максимальное капиллярное давление. Значения этих констант могут меняться в широком диапазоне в зависимости от межмолекулярного взаимодействия между скелетом пористой среды и жидкостями. Типовые значения этих параметров: $k_{ri,\max} < 1$, а $p_{c,\max} \in [0; 100]$ бар.

Начальные условия для системы (2.1)–(2.3), соответствующие гидростатическому равновесию, приводятся в уравнении (1.1). Отметим, что значение опорного давления p_0 несущественно для течения несжимаемых жидкостей, поэтому далее для упрощения изложения положим, что $p_0 = 0$. Все границы области Φ – непроницаемые. Это означает, что всюду на границе области Φ , кроме выколотых точек при $z = H/2$, соответствующих источнику и стоку, нормальная компонента скорости равна нулю, т.е.

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L, \quad z \neq H/2 \quad \text{и} \quad z = 0, H \quad (2.5)$$

где \mathbf{n} – нормальный к границе области Φ вектор.

Учитывая анизотропию абсолютной проницаемости \mathbf{k} , определим расстояния до источника и стока в виде

$$r_i = \sqrt{\frac{x^2}{k_x} + \frac{(z - H/2)^2}{k_z}}, \quad r_d = \sqrt{\frac{(x - L)^2}{k_x} + \frac{(z - H/2)^2}{k_z}}$$

соответственно. Эти расстояния вычисляются в метрике $\text{diag}\{1/\sqrt{k_x}, 1/\sqrt{k_z}\}$, в которой тензор проницаемости становится шаровым, а течение от источника или к стоку в их малой окрестности – осесимметричным. Тогда условие объемного расхода Q для точечного источника записывается в виде

$$\pi \left(\frac{xu_{ix}}{k_x} + \frac{(z - H/2)u_{iz}}{k_z} \right) = \frac{Q}{\sqrt{k_x k_z}} \quad \text{при} \quad r_i \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

$$\pi \left(\frac{xu_{dx}}{k_x} + \frac{(z - H/2)u_{dz}}{k_z} \right) = 0 \quad \text{при} \quad r_i \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

где u_{jx} и u_{jz} – компоненты скорости фильтрации жидкости j в направлении осей x и z , а π – математическая константа. Условия (2.6) и (2.7) означают, что расход жидкостей i и d через источник равны Q и нулю соответственно.

Условие отбора жидкостей через сток формулируется в виде

$$\pi \left(\frac{(x-L)(u_{ix} + u_{dx})}{k_x} + \frac{(z-H/2)(u_{iz} + u_{dz})}{k_z} \right) = -\frac{Q}{\sqrt{k_x k_z}} \quad \text{при } r_d \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

Это уравнение означает, что суммарный объемный расход обеих жидкостей через сток равен $-Q$.

Далее сделаем замену переменных, вычтя из фазовых давлений начальное гидростатическое распределение давления

$$\tilde{p}_j = p_j - \rho_d g z \quad (2.9)$$

Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$\mathbf{u}_d = -\mathbf{k} \frac{k_{rd}}{\mu_d} \nabla \tilde{p}_d, \quad \mathbf{u}_i = -\mathbf{k} \frac{k_{ri}}{\mu_i} (\nabla \tilde{p}_i + \Delta \rho \mathbf{g}) \quad (2.10)$$

где $\Delta \rho = \rho_d - \rho_i$ – разность плотностей. Начальное условие (1.1) для давления примет вид $\tilde{p}_d = 0$ при $t = 0$.

3. ХАРАКТЕРНЫЕ МАСШТАБЫ И КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

3.1. Масштабы длины

Выберем различные масштабы длины в горизонтальном и вертикальном направлениях. За масштаб длины в направлении оси x естественно выбрать длину L области Φ , а за масштаб длины в направлении оси z – высоту H . Используя эти масштабы, введем безразмерные координаты x и z в виде

$$x^* = x/L, \quad z^* = z/H \quad (3.1)$$

где звездой отмечены безразмерные величины. Всюду ниже используются масштабированные координаты (3.1), а символ звезды для простоты изложения опускается. Тогда область Φ имеет вид $(x, z) \in [0, 1] \times [0, 1]$, источник имеет координаты $(0.1/2)$, а сток – $(1.1/2)$.

3.2. Масштабы давления

В сформулированной задаче можно выделить три масштаба давления

$$p_Q = \frac{\mu_d L Q}{k_x H}, \quad p_{grav} = \Delta \rho g H, \quad p_{cap} = p_{c, \max} \quad (3.2)$$

Масштаб p_Q – перепад давления между границами $x = 0$ и $x = L$, требующийся для создания одномерного однофазного течения жидкости d в направлении оси x с расходом Q . Действительно, согласно закону Дарси (2.2), скорость фильтрации в таком течении можно оценить равной $k_x p_Q / \mu_d L$. Умножая эту скорость на высоту области Φ , получим полный расход Q . Согласно (3.2), перепад давления p_Q возрастает при уменьшении проницаемости k_x и увеличении вязкости μ_d . Масштаб p_{grav} равен разности столбов жидкостей d и i при высоте столба H . Этот масштаб характеризует величину силы Архимеда, действующей на жидкость i в пласте, насыщенном жидкостью d . При увеличении $|p_{grav}|$ увеличивается контраст плотностей фаз и, при прочих равных условиях, интенсивность гравитационного расслоения жидкостей. Масштаб p_{cap} характеризует влияние капиллярного давления. При больших p_{cap} можно ожидать развитие интенсивной капиллярной пропитки пористой среды жидкостью i .

Сравнивая масштабы давления в уравнении (3.2), определим следующие критерии подобия

$$\text{Gr} = \frac{p_Q}{p_{grav}} = \frac{\mu_d L Q}{\Delta \rho g k_x H^2}, \quad \text{Ca} = \frac{p_Q}{p_{cap}} = \frac{\mu_d L Q}{p_{c, \max} k_x H}, \quad \Pi = \frac{p_{cap}}{p_{grav}} = \frac{p_{c, \max}}{\Delta \rho g H} \quad (3.3)$$

Критерий подобия Gr характеризует величину перепада давления между границами $x = 0$ и $x = L$ по сравнению с перепадом давления между границами $z = 0$ и $z = H$ в гидростатическом равновесии. При $\text{Gr} \gg 1$ изменением давления в вертикальном направлении можно пренебречь

по сравнению с p_0 . Критерий подобия Ca характеризует протяженность переходной зоны фронта вытеснения, движущегося от $x = 0$ к $x = L$, которая связана с действием капиллярных сил [8, 12]. При $Ca \gg 1$ протяженность фронта мала, в связи с чем его можно рассматривать как поверхность сильного разрыва насыщенности. При уменьшении Ca влияние капиллярного давления увеличивается, а протяженность переходной зоны растет. Число Π характеризует протяженность зоны пропитки в капиллярно-гравитационном равновесии жидкостей d и i . При $\Pi \ll 1$ переходная зона мала, что приводит к четкой границе поверхности раздела фаз в равновесии. Выше этой границы пористая среда насыщена легкой жидкостью, а ниже – тяжелой. При увеличении Π протяженность переходной зоны растет.

Таким образом, капиллярным давлением можно пренебречь при $Ca \gg 1$ и $\Pi \ll 1$. Если даже одно из этих условий не выполняется, то капиллярное давление может оказывать значительное влияние на процесс вытеснения.

3.3. Масштабы скорости и времени

В сформулированной задаче можно выделить два масштаба скорости

$$u_Q = \frac{Q}{H}, \quad u_{grav} = \frac{k_z}{\mu_d} \Delta p g \quad (3.4)$$

Скорость u_Q – эффективная скорость фильтрации жидкости в направлении оси x , связанная с работой источника и стока. Действительно, эта скорость равна расходу Q , отнесенному к высоте области Φ , т.е. к площади поперечного течения. Скорость u_{grav} – характерная скорость в вертикальном направлении, связанная с перемещением частицы жидкости d в пласте, находящемся в гидростатическом равновесии для жидкости i . Под действием силы Архимеда такая частица перемещается вдоль оси z , а согласно (2.2), соответствующая скорость фильтрации пропорциональна отношению k_z/μ_d и градиенту давления p_{grav}/H .

Имея в уравнении (3.4) характерные скорости фильтрации, оценку для истинной скорости жидкости v можно получить делением u на пористость ϕ , т.е. $v = u/\phi$. Таким образом, используя скорости (3.4), оценим характерные времена перемещения жидкостей между противоположными границами области Φ

$$t_Q = \frac{L}{u_Q/\phi} = \frac{\phi LH}{Q}, \quad t_{grav} = \frac{H}{u_{grav}/\phi} = \frac{\phi H \mu_d}{k_z \Delta p g} \quad (3.5)$$

Параметр t_Q – характеризует время, за которое частица жидкости d переместится от границы $x = 0$ до $x = L$ под действием перепада давления p_0 . Параметр t_{grav} – характерное время, за которое частица жидкости переместится между $z = 0$ и $z = H$ под действием силы Архимеда.

Сравнивая масштабы времени (3.5), введем безразмерное число

$$\Gamma = \frac{t_{grav}}{t_Q} = \frac{Q \mu_d}{k_z \Delta p g L}$$

Малые значения этого критерия подобия, $\Gamma \ll 1$, соответствуют режиму вытеснения, в котором при прочих равных условиях преобладает вертикальное направление течения. При $\Gamma \ll 1$ происходит быстрое гравитационное расслоение жидкостей, а затем уже в условиях стратификации (локального гравитационного равновесия) происходит течение в направлении оси x от источника к стоку (рис. 2а). То есть, предполагая, что $\Delta p > 0$, течение жидкости i направлено от Inj к кровле пласта вдоль границы $x = 0$. Далее, при достижении границы $z = 0$ направление течения i резко изменяется и далее происходит вдоль $z = 0$. Большие числа $\Gamma \gg 1$ соответствуют противоположному характеру течения, в котором доминирует фильтрация от источника к стоку (рис. 2в). В этом случае жидкость i распространяется от Inj в горизонтальном направлении, постепенно под малым действием силы Архимеда всплывая к границе $z = 0$. Если $\Gamma \sim 1$, то имеем переходный режим с одинаковым временем течения жидкости между вертикальными и горизонтальными границами области Φ (рис. 2б). Характерное направление течения в этом случае от источника наискосок к точке $(1/2, 0)$.

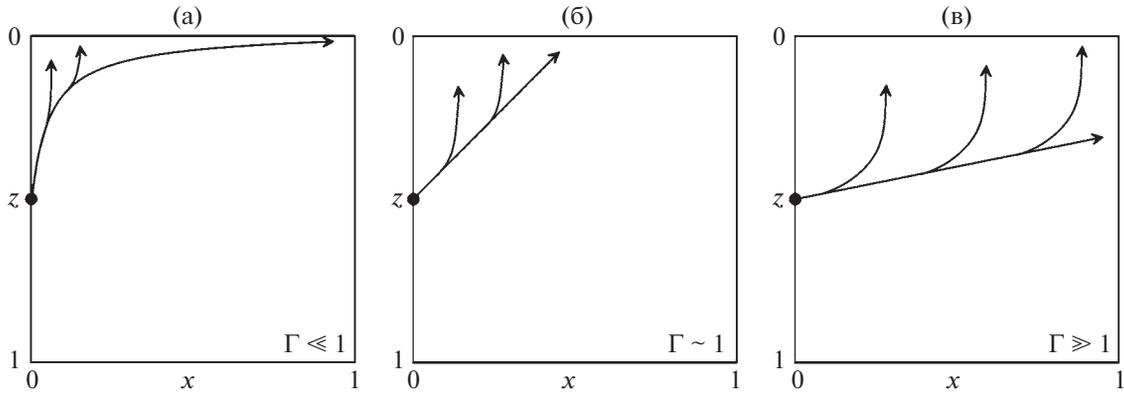


Рис. 2. Схема направлений течения жидкости i при различных Γ . Предполагается, что вытесняющая жидкость легче вытесняемой ($\Delta\rho > 0$).

3.4. Критерий подобия A

В этом разделе обсуждается критерий подобия, характеризующий анизотропное распределение проницаемости. Этот критерий, обозначаемый символом A , выражается через безразмерные числа Gr и Γ в виде [6, 7]

$$A = \sqrt{\frac{Gr}{\Gamma}} = \frac{L}{H} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \quad (3.6)$$

Для объяснения физического смысла параметра A рассмотрим однофазное течение несжимаемой жидкости от точечного источника в однородной анизотропной пористой среде ($k_x \neq k_z$) в отсутствие внешних массовых сил. В этом случае распределение давления описывается следующим уравнением

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + A^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (3.7)$$

Оценим форму изобар вокруг такого источника при различных A , предполагая, что он расположен в неограниченной области. При $A = 1$ уравнение (3.7) сводится к уравнению Лапласа, а изобары – окружности с центром в источнике (рис. 3б). Случай $A \ll 1$ (или $A \gg 1$) соответствует высокой проницаемости в направлении оси x (или z). Следовательно, возмущения давления быстро переносятся в данном направлении, являющимся также предпочтительным направлением течения жидкости i от источника (рис. 3а или 3в). Таким образом, согласно (3.7), при $A \ll 1$ (или $A \gg 1$) изобары имеют вид эллипсов, вытянутых в направлении оси x (или z).

3.5. Критерий подобия M

Следуя решению классической задачи Баклея–Левретта [11, 12], введем критерий подобия

$$M = k_{ri, \max} \mu_d / \mu_i$$

характеризующий отношение подвижностей фаз. Случай $M > 1$, соответствует более подвижной (т.е. менее вязкой) жидкости i по сравнению с d . При $M < 1$, наоборот, вытесняющая жидкость имеет меньшую подвижность $k_{ri, \max} / \mu_i < 1 / \mu_d$.

Всюду далее полагается, что $M = 5$. Такими значениями характеризуется, например, нагнетание углекислого газа в месторождения легкой нефти. Несомненно, при закачке менее вязкой жидкости в пласт, насыщенной более вязкой жидкостью, может развиваться гидродинамическая неустойчивость фронта вытеснения [14–16]. Однако такая неустойчивость возникает при больших M , обычно при $M > 10$. Следовательно, при выбранном значении M и используемых критериях относительной фазовой проницаемости (2.4) неустойчивость развиваться не может.

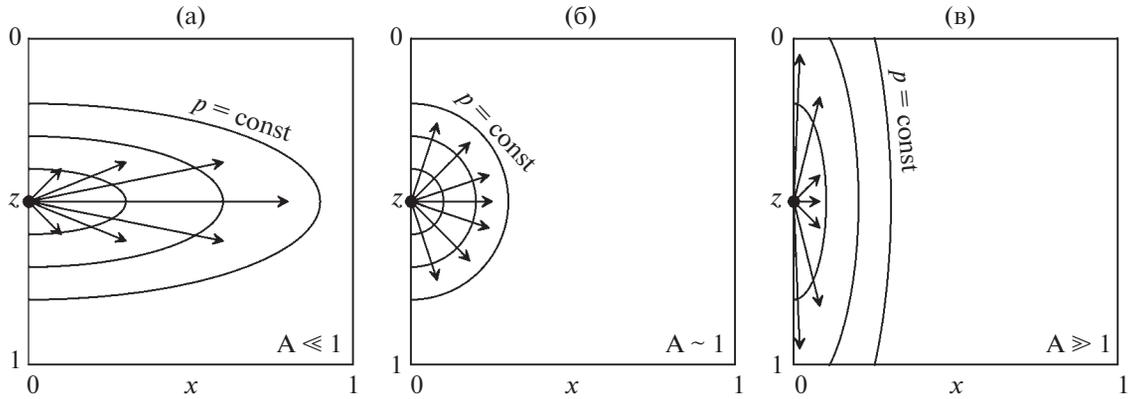


Рис. 3. Формы изобар ($p = \text{const}$) вокруг точечного источника при различных A . Стрелки показывают предпочтительное направление течения жидкости i .

4. УРАВНЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНОМ ВИДЕ

Помимо уже приводившихся в уравнении (3.1) масштабов длины, выберем в качестве характерных масштабов времени, скорости фильтрации и давления их значения, связанные с работой источника и стока и сопутствующим течением между ними, т.е. масштабы t_Q , u_Q и p_Q соответственно

$$t = t_Q t^*, \quad u = u_Q u^*, \quad p = p_Q p^*, \quad p_c = p_{cap} p_c^*, \quad k_{ri} = k_{ri,max} k_{ri}^* \tag{4.1}$$

Здесь, как и ранее, звездой обозначены безразмерные или масштабированные величины. В таких масштабах безразмерное время в точности равно количеству закачанного поровых объемов области Φ .

Подставляя (2.10), (3.1) и (4.1) в уравнения (2.1) и (2.3) и опуская знак звезды у безразмерных переменных, получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{rd} \frac{\partial p_d}{\partial x} \right) + A^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{rd} \frac{\partial p_d}{\partial z} \right) = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial s_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{ri} \frac{\partial p_i}{\partial x} \right) - A^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{ri} \left(\frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{1}{Gr} \right) \right) = 0 \tag{4.3}$$

$$p_i - p_d = Ca^{-1} p_c(s_i) \tag{4.4}$$

Уравнения (4.2)–(4.4) образуют замкнутую систему трех уравнений относительно неизвестных s_i , p_i и p_d , причем p_i и p_d связаны конечным соотношением (4.4).

Учитывая (2.9), начальные условия (1.1) для системы уравнений (4.2)–(4.4) запишутся в виде

$$s_i = 0, \quad p_i = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{4.5}$$

Граничные условия (2.5) в безразмерном виде имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_d}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,1 \quad \text{и} \quad z \neq 1/2 \\ \frac{\partial p_d}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{1}{Gr} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Условия постоянного расхода жидкостей через точечный источник и сток, приводящиеся в уравнениях (2.6)–(2.8), в безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned}
 & -\pi k_{ri} M \left(x \frac{\partial p_i}{\partial x} + (z - 1/2) \left(\frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{1}{Gr} \right) \right) = A, \\
 & -\pi k_{rd} \left(x \frac{\partial p_d}{\partial x} + (z - 1/2) \frac{\partial p_d}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{при } r_i \rightarrow 0 \\
 & \pi(x - 1) \left(M k_{ri} \frac{\partial p_i}{\partial x} + k_{rd} \frac{\partial p_d}{\partial x} \right) + \pi(z - 1/2) \left(M k_{ri} \left(\frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{1}{Gr} \right) + k_{rd} \frac{\partial p_d}{\partial z} \right) = A \quad \text{при } r_d \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Таким образом, безразмерная постановка задачи в уравнениях (4.2)–(4.7) содержит только четыре критерия подобия M , A , Gr и Ca . Кроме этих параметров течение также характеризуется кривыми относительной фазовой проницаемости и капиллярного давления (2.4). Согласно (3.3) и (3.6), безразмерные числа Γ и Π однозначно выражаются через другие критерии подобия с помощью следующих соотношений

$$Gr = \Gamma A^2 = \Pi Ca \tag{4.8}$$

Далее, учитывая (4.8), вместо Gr в качестве одного из независимых критериев подобия используется Γ , т.е. в качестве основных величин, характеризующих режим вытеснения, выбираются M , A , Γ и Ca .

Нефтяные пласты характеризуются различными проницаемостями k_x и k_z , могут иметь разную мощность H , а их разработка может вестись сеткой скважин с различными характерными расстояниями между скважинами L , эксплуатирующихся при различных темпах нагнетания Q . Все эти параметры, также как и другие величины, например ρ_j , μ_j , $j = d, i$, входят в M , A , Γ и Ca , а значит различные пласты характеризуются только четырьмя параметрами подобия M , A , Γ и Ca . Таким образом, введение этих безразмерных величин позволяет уменьшить количество параметров, определяющих режим течения.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

5.1. Классификация режимов вытеснения

В случае общего положения задача (4.2)–(4.7) не допускает аналитического решения. В этой связи рассмотрим ее численные решения, полученные с помощью пакета программ MUFITS [17, 18]. С помощью численного моделирования в первую очередь оценим влияние критериев подобия A и Γ на режимы вытеснения жидкости d . Причем, считаем, что $\Gamma > 0$, т.е. закачивается легкая жидкость. Случай $\Gamma < 0$ получается из случая $\Gamma > 0$ отражением относительно прямой $z = 1/2$ (при фиксированном $|\Gamma|$).

В этом разделе рассмотрим режимы вытеснения при малом влиянии капиллярного давления на фильтрацию, т.е. рассмотрим случаи $Ca \gg 1$, $\Pi \ll 1$. Считаем, что первое условие выполняется при $Ca \geq 10$, а второе – при $\Pi \leq 0.1$. Рассмотрим четыре асимптотических случая, соответствующих большим (~ 10) и малым (~ 0.1) значениям A и Γ при $M = 5$. Результаты расчетов для четырех таких пар A и Γ в моменты времени $t = 0.25$ и 0.75 приводятся на рис. 4 и 5. Эти моменты соответствуют закачке четверти и трех четвертей порового объема соответственно.

В случае $A \gg 1$ и $\Gamma \gg 1$ реализуется режим одномерного течения от источника к стоку, соответствующий вытеснению из пласта малой мощности H (рис. 4а; $A = 10$, $\Gamma = 10$, $Ca = 10^4$ и $\Pi = 0.1$). Далее этот режим обозначаем аббревиатурой 1D. Действительно, во всей области Φ за исключением близких к ее границам зон параметры течения, в частности распределение насыщенности s_i , слабо зависят от глубины z . Из-за высокой проводимости в вертикальном направлении (т.е. при $A \gg 1$), жидкость i распространяется от источника вдоль границы $x = 0$ по всей мощности пласта $z \in [0, 1]$. Затем, при течении жидкостей от $x = 0$ к $x = 1$ не происходит их значительного гравитационного расслоения, так как влияние силы Архимеда при $\Gamma \gg 1$ мало. При достижении границы $x = 1$ жидкости снова резко изменяют направление течения на вертикальное и переносятся к стоку вдоль узкой зоны, расположенной у границы $x = 1$. Таким образом, пренебрегая концевыми эффектами, течение действительно одномерное.

Изменение параметров течения с x в режиме 1D описывается решением Баклея–Леверетта [11, 12]. В этом решении вытеснение происходит в системе волн. Впереди распространяется сильный разрыв насыщенности S , за которым следует присоединенная волна Римана. Эта по-

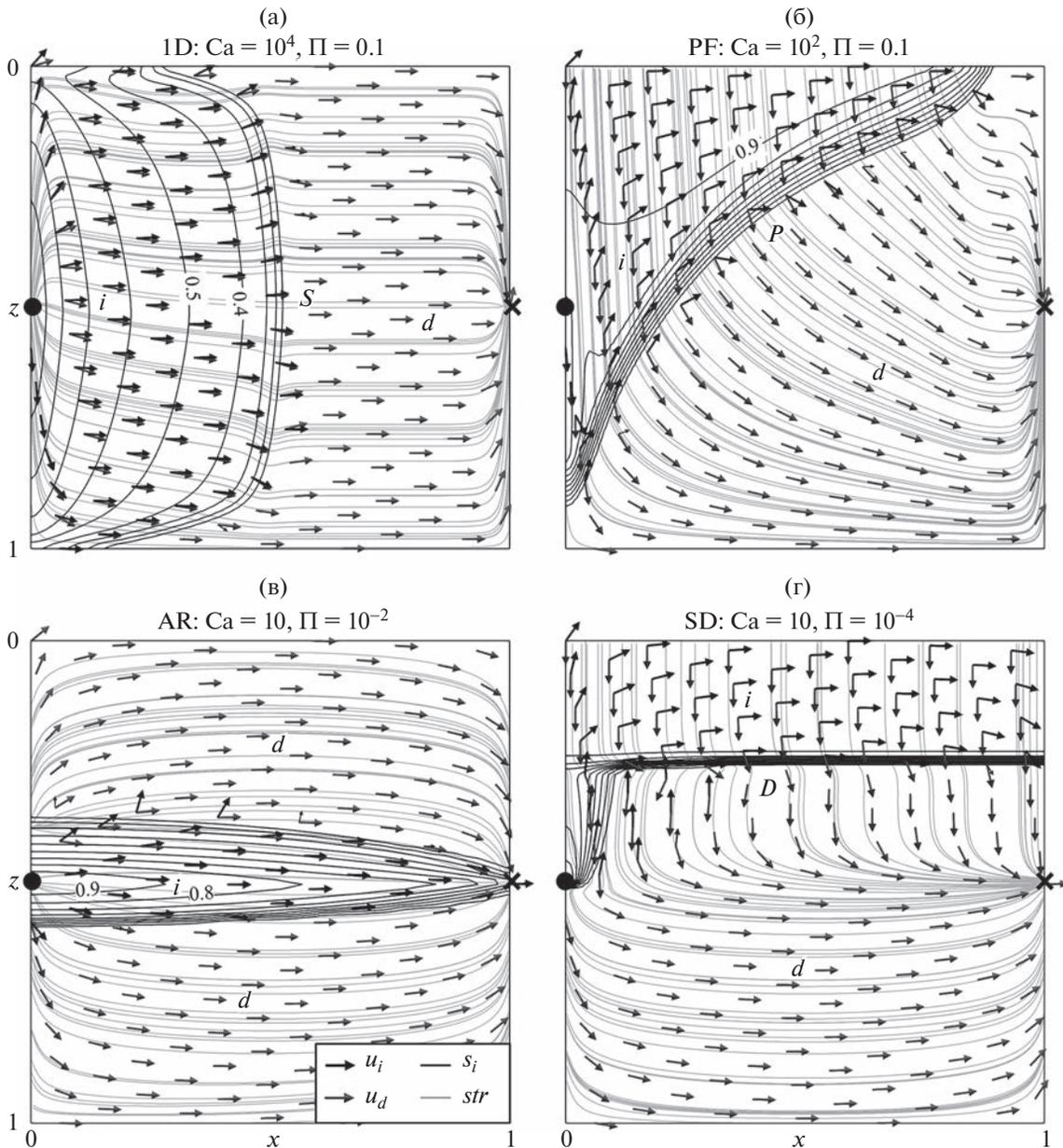


Рис. 4. Линии уровня $s_i = \text{const}$, мгновенные линии тока жидкости d (str) и направления скоростей u_i и u_d в режимах вытеснения 1D, PF, AR и SD при $t = 0.25$ (а–г соответственно). Линии уровня s_i приводятся с шагом 0.1.

следовательность волн наблюдается на рис. 4а. Разрыву соответствует плотное расположение линий уровня $s_i = \text{const}$, ограничивающих со стороны больших значений x область течения жидкости i . Этот разрыв наблюдается в виде узкой переходной зоны, так как капиллярное число Ca имеет большое, но конечное значение и в меньшей степени из-за влияния численной дисперсии. За разрывом расположена область непрерывного изменения насыщенности s_i в волне Римана. Насыщенность убывает с x от границы $x = 0$ до разрыва.

При $A \gg 1$ и $\Gamma \ll 1$ значительно возрастает влияние силы Архимеда. При таких параметрах реализуется режим вытеснения с образованием ярко выраженного шлейфа жидкости i около угла $(0, 0)$ области Φ (рис. 4б; $A = 10$, $\Gamma = 0.1$, $Ca = 10^2$ и $\Pi = 0.1$). Этот режим обозначим аббревиатурой PF (plume formation). Также как и в режиме 1D, при $A \gg 1$ жидкость i распространяется от источника вверх и вниз вдоль границы $x = 0$ по всей мощности пласта. Однако далее при $\Gamma \ll 1$

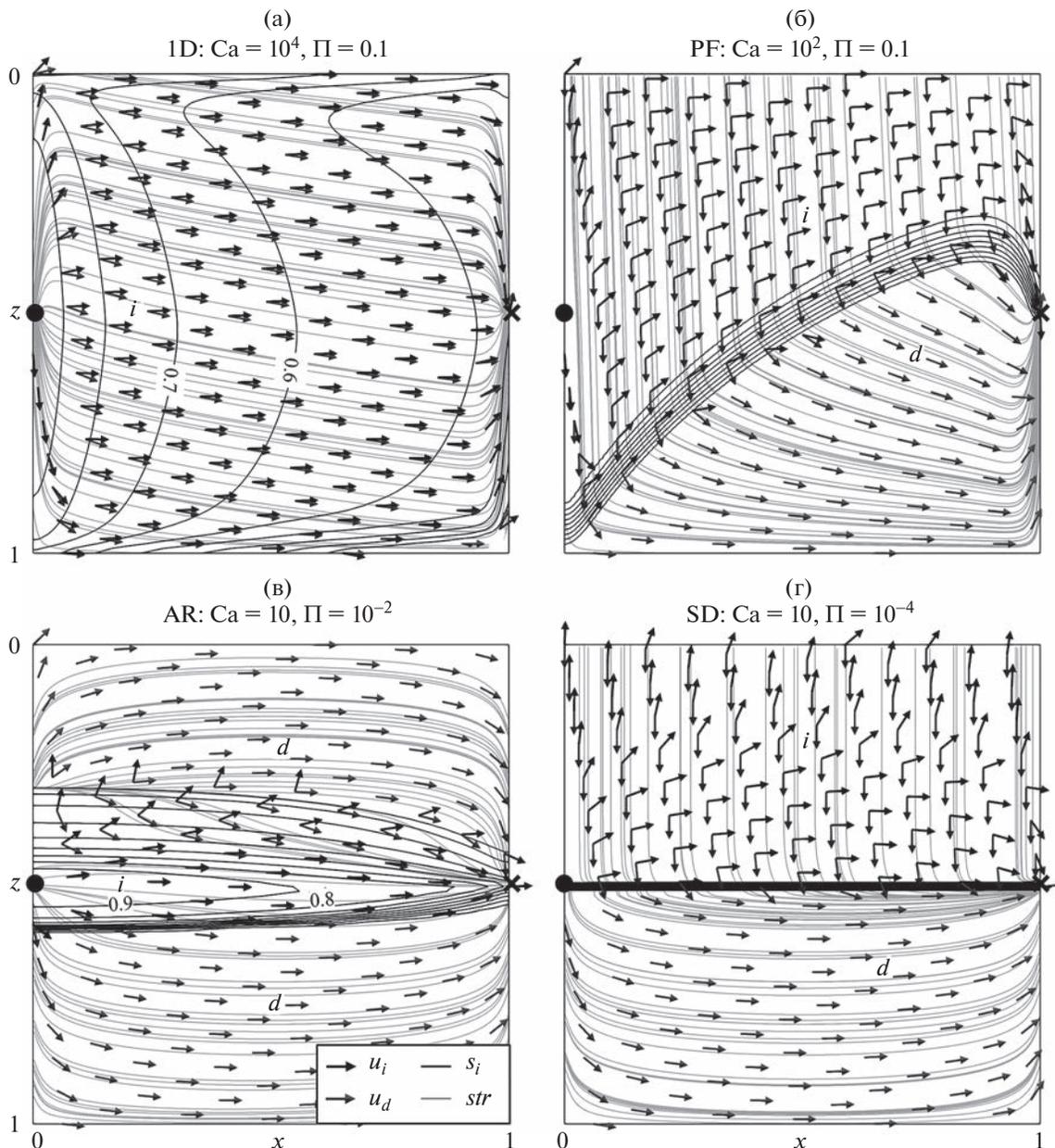


Рис. 5. Режимы вытеснения 1D, PF, AR и SD при $t = 0.75$ (а–г соответственно). Все обозначения идентичны рис. 4.

сила Архимеда значительно влияет на течение от $x = 0$ к $x = 1$. Жидкость i поднимается (всплывает) к верхней границе $z = 0$ и растекается под ней и, таким образом, образуется шлейф из жидкости i . При этом имеется противоток жидкости d , которая опускается к нижней границе шлейфа. Двигаясь вдоль кровли пласта, жидкость i достигает границы $x = 1$, вдоль которой узким конусом опускается к стоку (рис. 5б).

Случай $A \ll 1, \Gamma \gg 1$ соответствует вытеснению из анизотропного пласта, характеризующегося высокой проницаемостью в направлении x и низкой проницаемостью в направлении z , а также малому влиянию силы Архимеда (рис. 4в; $A = 0.1, \Gamma = 10, Ca = 10$ и $\Pi = 10^{-2}$). Этот режим обозначим аббревиатурой AR (anisotropic reservoir). При $A \ll 1, \Gamma \gg 1$ жидкость быстро прорывается от источника к стоку вдоль линии $z = 1/2$. При этом значительные области пласта у границ $z = 0, 1$ остаются не охваченными вытеснением. Это обусловлено тем, что влияние силы Архи-

меда на течение мало при $\Gamma \gg 1$ и эта сила не приводит к значительному перемещению жидкости i вверх от уровня $z = 1/2$. Небольшая асимметрия области $s_i > 0$ связана с тем, что течение рассчитано при большом, но тем не менее конечном $\Gamma = 10$ (рис. 5в). Капиллярные силы также не способствуют увеличению охвата пласта вытеснением, так как в рассмотренном случае число П мало ($\Pi = 10^{-2}$). То есть капиллярная пропитка в вертикальном направлении пренебрежимо мала.

В случае $A \ll 1$, $\Gamma \ll 1$ реализуется режим вытеснения в условиях ярко выраженной стратификации жидкостей (рис. 4г; $A = 0.1$, $\Gamma = 0.1$, $Ca = 10$ и $\Pi = 10^{-4}$). Далее этому режиму присваивается аббревиатура SD (stratified displacement). Малое значение $\Gamma = 0.1$ приводит к быстрому перемещению жидкости i от источника к кровле пласта $z = 0$. А высокая проницаемость k_x при малом $A = 0.1$ способствует накоплению жидкости i у кровли в виде горизонтального слоя, толщина которого растет с t по мере закачки жидкости i . Действительно, когда закачиваемая жидкость достигает слоя, то из-за большого k_x она свободно перемещается по нему в направлении x , а из-за малого k_z не может при $x \sim 1$ прорваться вниз к стоку. Это способствует формированию почти горизонтальной границы раздела между жидкостями D . С ростом t эта граница опускается до уровня $z = 1/2$, а жидкость i начинает отбираться вместе с d из слоя через сток Prd (рис. 5г). В результате при больших t граница D останавливается на уровне $z \approx 1/2$, а область $z > 1/2$ остается не охваченной вытеснением. Эта область остается насыщенной только жидкостью d , которую не удастся извлечь с помощью стока, расположенного при $z = 1/2$.

5.2. Сравнение эффективности режимов

Сравним эффективность вытеснения жидкости d в описанных режимах 1D, PF, AR и SD при пренебрежимо малом капиллярном давлении ($Ca \gg 1$ и $\Pi \ll 1$). С этой целью для каждого рассчитанного течения вычислим интегралы по объему Φ

$$R(t) = \int_{\Phi} s_i dV, \quad E(t) = \int_{\Phi} \alpha dV \quad (5.1)$$

где dV – дифференциал безразмерного объема. Для вычисления величины α при фиксированных x и z сначала рассчитывается максимальное значение s_i в интервале времени от нуля до рассматриваемого момента t

$$s_{\max}(t, x, z) = \max_{t' \leq t} s_i(t', x, z)$$

Величина α полагается равной единице, если $s_{\max} \geq 0.05$. В противном случае при $s_{\max} < 0.05$ величина α полагается равной нулю. Таким образом, область $\alpha = 1$ соответствует зоне пласта, в которую в интервале времени от нуля до t попало значительное количество вытесняющей жидкости i .

Величина R в уравнении (5.1) – коэффициент извлечения жидкости d . Согласно (2.3), R равно отношению объема жидкости d , отобранной из Φ к данному моменту времени, к ее объему при $t = 0$, т.е. согласно (1.1), к поровому объему всей области Φ . При $t = 0$ имеем $R = 0$. По мере того как жидкость d отбирается через Prd, коэффициент R растет с t . Чем больше R , тем больше жидкости d удастся извлечь из пласта.

Величина E – коэффициент охвата пласта вытеснением. Она характеризует долю объема пласта, в который в течение закачки проникала вытесняющая жидкость. При $t = 0$ имеем $E = 0$. Коэффициент E растет с t . Чем больше E , тем больший объем пласта был охвачен вытеснением к данному моменту времени.

Сравним четыре рассчитанных течения, параметры которых приводятся на рис. 4 и 5, в метриках R и E . При малых t имеем $R = t$, так как на начальной стадии закачки жидкость i еще не прорвалась к стоку, а объем отобранной жидкости d равен объему закачанной жидкости i (рис. 6а). В момент времени, когда i прорывается к стоку и позже равенство $R = t$ нарушается. С момента прорыва R растет медленнее, чем t , и при $t \gg 1$ выходит на горизонтальную полку, соответствующую состоянию истощенного пласта.

Максимальное значение R достигается в режиме 1D (рис. 6а). Действительно, в этом случае пласт наиболее равномерно по z охвачен вытеснением (рис. 5а). В метрике R чуть более низкая

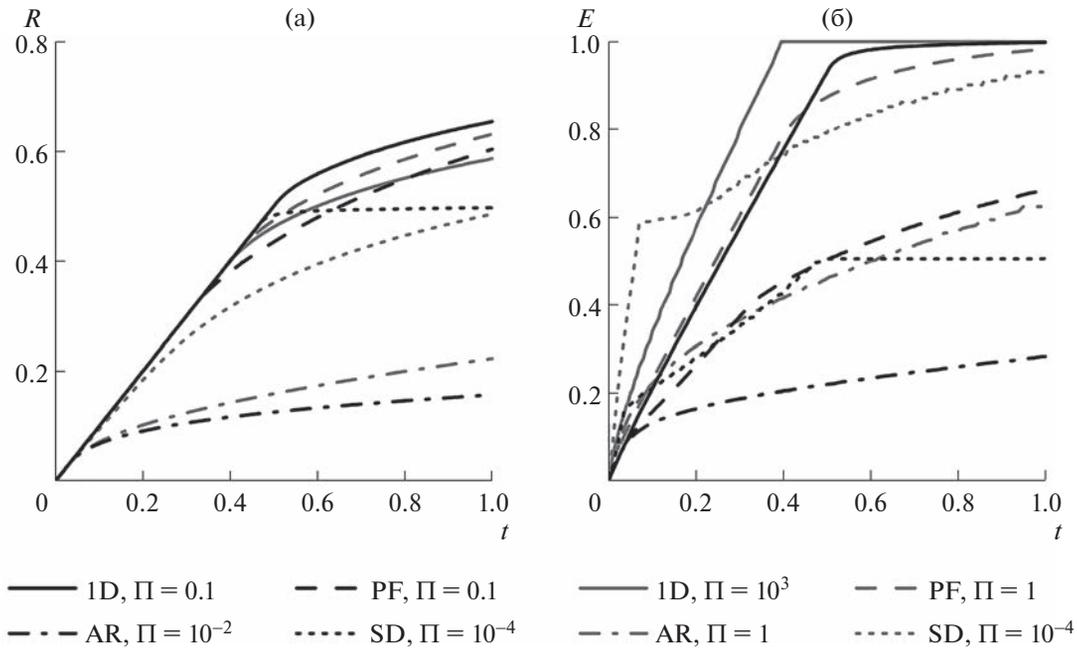


Рис. 6. R и E от t при $M = 5$ в различных режимах вытеснения. Черные и серые кривые соответствуют большому и малому влиянию p_c соответственно.

по сравнению с режимом 1D эффективность достигается в режиме PF. Значительно более низким коэффициентом извлечения $R \approx 1/2$ характеризуется режим вытеснения в условиях гравитационного расслоения фаз SD. В этом случае максимальное значение $R \approx 1/2$ обусловлено тем, что жидкость d почти полностью извлекается из области $z \leq 1/2$, а равная ей область $z > 1/2$ остается не тронутой вытеснением. Наименьшим коэффициентом R характеризуется вытеснение в режиме AR. Очевидно, это обусловлено быстрым прорывом жидкости i к источнику вдоль прямой $z = 1/2$ и вытеснением d только из узкой области, прилегающей к этой прямой.

Так как коэффициент извлечения в значительной мере определяется полнотой охвата пласта вытеснением, то в метрике E режимы имеют тот же рейтинг, что и в метрике R (рис. 6б). Максимальное $E = 1$ достигается в 1D режиме, так как в нем реализуется равномерный охват пласта во всем диапазоне глубин $z \in [0, 1]$. Минимальным E характеризуется режим AR.

Таким образом, в обеих метриках R и E наилучшие режимы вытеснения 1D и PF характеризуются условием $A \gg 1$, т.е. высокой гидродинамической проводимостью в направлении z . Наихудшим является режим AR, который соответствует вытеснению из пласта, характеризующегося низкой гидродинамической проводимостью в направлении z , при большом темпе нагнетания Q , т.е. при малом влиянии силы Архимеда.

5.3. Влияние капиллярного давления

При меньших Ca и больших Π влияния капиллярного давления на процесс вытеснения более значительное. В соответствии с [8, 12], капиллярная пропитка приводит к увеличению толщин переходных зон между областями пласта, насыщенными различными жидкостями. В качестве примера подробно рассмотрим влияние капиллярного давления на режим PF. На рис. 7 приведены результаты расчета вытеснения при $t = 0.25$, $M = 5$, $A = 10$, $\Gamma = 0.1$ и четырех различных значениях $p_{c,max}$. В случае малого капиллярного давления при $Ca = 10^3$ и $\Pi = 10^{-2}$ (рис. 7а) наблюдается четкая граница P между зонами, насыщенными жидкостью i и только жидкостью d . При увеличении $p_{c,max}$ в 10 раз, т.е. при $Ca = 10^2$ и $\Pi = 0.1$, эта граница “размывается” за счет капиллярной пропитки (рис. 7б). Тем не менее условия $Ca \gg 1$ и $\Pi \ll 1$ можно считать выполненными, поэтому размеры насыщенной жидкостью i зоны совпадают в случаях, приводящихся на рис. 7а и б. При увеличении $p_{c,max}$ еще в 10 раз ($Ca = 10$ и $\Pi = 1$) и в 100 раз ($Ca = 1$ и $\Pi = 10$) капилляр-

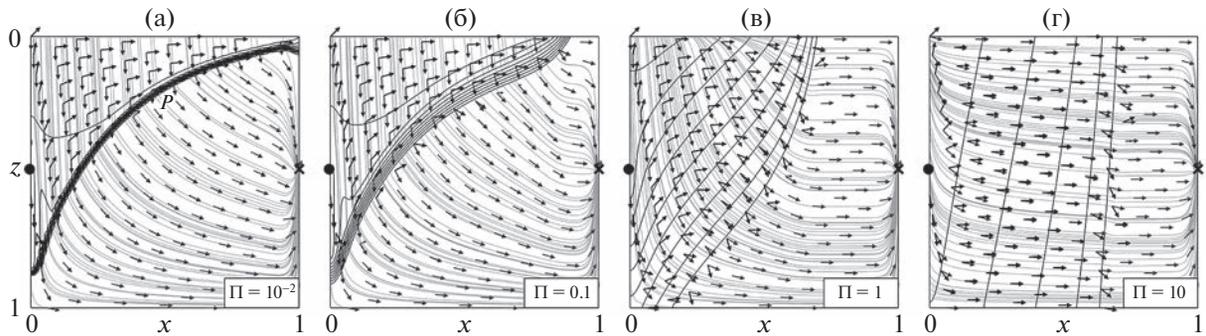


Рис. 7. Параметры течения в режиме PF при $\Pi = 10^{-2}$, 0.1, 1 и 10 (а–г соответственно). Все обозначения идентичны рис. 4.

ным давлением в вертикальном направлении уже нельзя пренебречь, так как условие $\Pi \ll 1$ не выполняется. В этом случае четкой границы между d и i не наблюдается, причем форма зоны, насыщенной жидкостью i , только качественно соответствует ее форме в случае малого капиллярного давления (рис. 7в и 7г). Пропитка приводит к выравниванию линий уровня $s_i = \text{const}$ в направлении оси z и более равномерному охвату пласта вытеснением во всем интервале глубин $z \in [0, 1]$.

Влияние капиллярного давления на все четыре режима вытеснения можно оценить с помощью рис. 8. В случае режима 1D капиллярное давление при $\text{Ca} = 1$ и $\Pi = 10^3$ значительно выравнивает поток от $x = 0$ к $x = 1$, в том числе вблизи кровли $z = 0$ и подошвы $z = 1$ пласта (рис. 8а). В отличие от случая с малым капиллярным давлением (рис. 4а) узкие пограничные зоны вблизи $z = 0, 1$ с более медленным течением отсутствуют. Очевидно, это связано с очень большим значением числа Π , означающим, что толщина переходной зоны в капиллярно-гравитационном равновесии на три порядка больше мощности пласта. Характерный масштаб изменения s_i в направлении z значительно больше H и, следовательно, s_i практически не зависит от z , т.е. течение одномерное. Нарушение условия $\text{Ca} \gg 1$ означает, что капиллярное давление также приводит к увеличению протяженности переходной зоны S – разрыва насыщенности на рис. 4а. Действительно, при $\text{Ca} = 1$ линии $s_i = \text{const}$ у передней границы зоны, насыщенной жидкостью i , расположены менее плотно. В результате при фиксированном t жидкость i проникает дальше в пласт, а коэффициент охвата E быстрее растет со временем (рис. 6). При этом капиллярное давление приводит к снижению R , так как из-за “размывания” фронта S жидкость i раньше прорывается к стоку Prd. Таким образом, в режиме 1D большие значения $p_{c,\text{max}}$ приводят к большим E и меньшим R .

Влияние p_c на распределение насыщенности в режиме PF описано выше (см. рис. 7). Увеличение p_c способствует более равномерному охвату по глубине и более равномерному течению жидкости i от $x = 0$ к $x = 1$. Таким образом, вытеснение в режиме PF с большим $p_{c,\text{max}}$ характеризуется более высокими значениями R и E , чем в случае с малым $p_{c,\text{max}}$.

В режиме AR большое $p_{c,\text{max}}$ при $\text{Ca} = 0.1$ и $\Pi = 1$ тоже приводит к увеличению скорости капиллярной пропитки в направлении z (рис. 8в). В результате жидкость i прорывается к стоку вдоль $z = 1/2$, однако при этом она интенсивно впитывается в области $z < 1/2$ и $z > 1/2$ и за счет противотока жидкостей вытесняет d к уровню $z = 1/2$. То есть, в области двухфазного течения выше уровня $z = 1/2$ жидкость i имеет значительную компоненту скорости вверх, а жидкость d – вниз. За счет капиллярного давления жидкость d выносится на уровень $z = 1/2$, вдоль которого вместе с i переносится к стоку Prd. Таким образом, вытеснение в режиме AR с большим $p_{c,\text{max}}$ способствует увеличению как R , так и E (рис. 6).

В режиме вытеснения SD при $\text{Ca} = 10^{-3}$ и $\Pi = 1$ капиллярное давление приводит к увеличению толщины переходной зоны D в вертикальном равновесии жидкостей (рис. 8г). В отличие от случая с малым $p_{c,\text{max}}$ (см. рис. 4г), насыщенность s_i плавно возрастает при уменьшении z и при

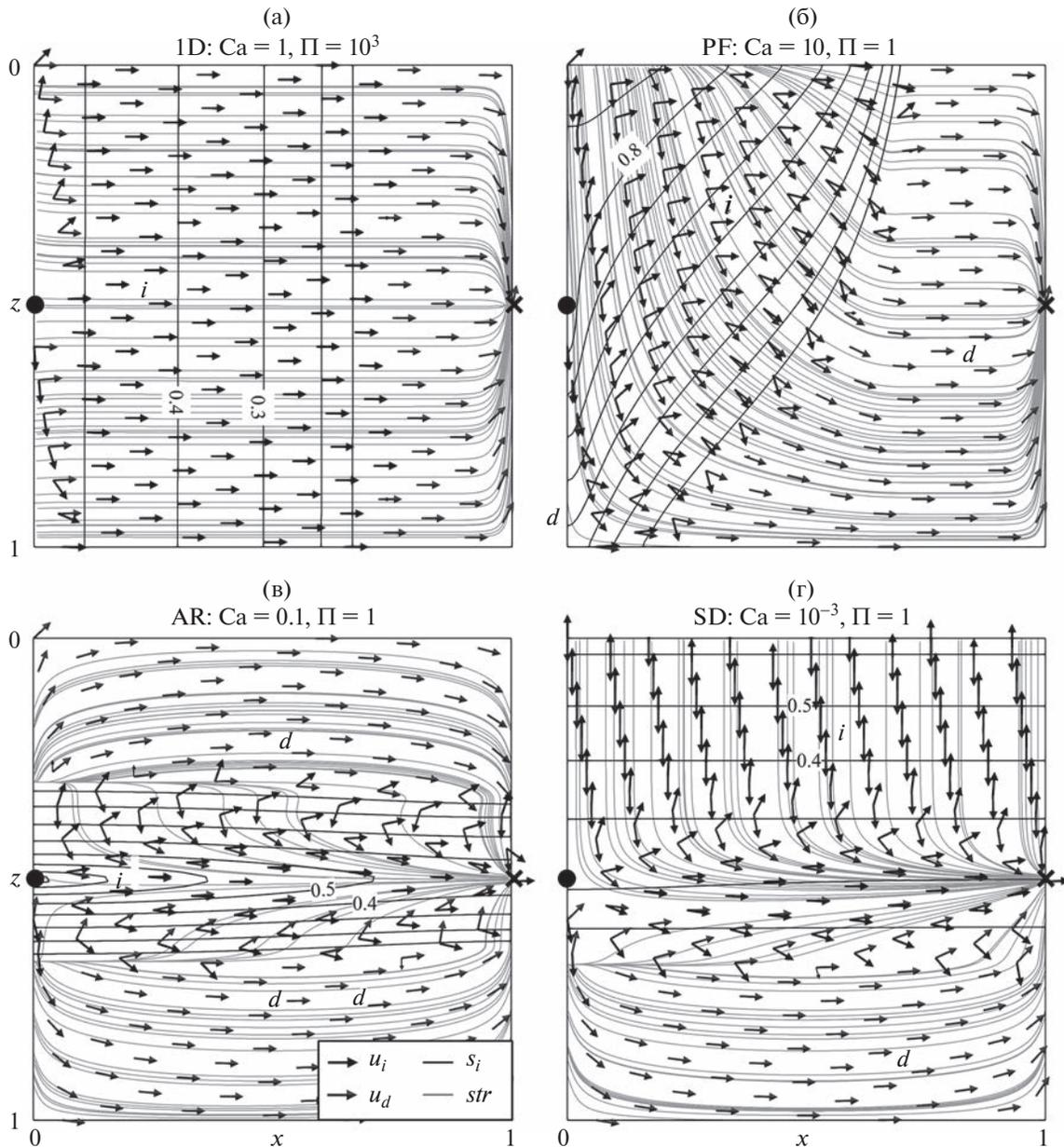


Рис. 8. Режимы вытеснения 1D, PF, AR и SD при $t = 0.25$ и значительном влиянии капиллярного давления (а–г соответственно). Все обозначения идентичны рис. 4.

фиксированном t толщина слоя, насыщенного жидкостью i , у кровли пласта больше. В результате нижняя граница слоя раньше достигает стока, а коэффициент извлечения R снижается по сравнению со случаем малого капиллярного давления (рис. 6). При этом коэффициент охвата E увеличивается, так как толщина слоя больше. Таким образом, вытеснение в режиме SD с большим $p_{c,max}$ характеризуется пониженным R и повышенным E .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При фиксированном положении источника и стока вытеснение несжимаемой жидкости из анизотропного пласта в поле силы тяжести характеризуется четырьмя независимыми критериями подобия и кривыми относительной фазовой проницаемости и капиллярного давления. Возможны четыре предельных режима вытеснения, в которых реализуются различные направления

течения вытесняющей и вытесняемой жидкостей, обусловленные различным относительным влиянием силы Архимеда и анизотропного распределения проницаемости. При малом влиянии капиллярного давления наиболее эффективным является режим одномерного течения от источника к стоку, в котором при $t > 1/4$ коэффициенты вытеснения и охвата достигают максимальных значений. Наименее эффективным является вытеснение из пласта, характеризующегося малой проницаемостью в вертикальном направлении и малым влиянием силы тяжести. В целом вытеснение более эффективно при большом числе A . Показано, что капиллярное давление может существенно изменять параметры режимов и их эффективность. При увеличении влияния капиллярного давления коэффициент охвата пласта вытеснением всегда увеличивается из-за капиллярной пропитки, а коэффициент извлечения жидкости может как вырасти, в режимах PF и AR, так и снизиться, в режимах 1D и SD.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-10051, <https://rscf.ru/project/19-71-10051/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Желтов Ю.П.* Разработка нефтяных месторождений. М.: Недра, 1986. 332 с.
2. *Willhite G.P.* Waterflooding, Vol. 3. Richardson, Texas: Textbook Series, SPE, 1986.
3. *Green D.W., Willhite G.P.* Enhanced Oil Recovery, Second Edition. Textbook Series, SPE, 2018.
4. *Lake L.W.* Enhanced Oil Recovery. Prentice Hall. 1989.
5. *Bermudez L., Johns R.T., Parakh H.* Parametric investigation of WAG floods above the MME // SPE Journal. 2007. V. 12. P. 224–234.
6. *Чернова А.А., Афанасьев А.А.* Влияние гравитационного расслоения фаз на оптимальные режимы водогазового воздействия на нефтяные пласты // Изв. РАН МЖГ 2022 № 5. С. 51–61.
7. *Афанасьев А.А., Султанова Т.В.* Исследование нестационарного двухмерного вытеснения в пористой среде в автомобильной постановке // Изв. РАН МЖГ. 2017. №4. С. 62–72.
8. *Rapoport L.A., Leas W.J.* Properties of Linear Waterfloods // J Pet Technol. 1953. V. 5. P. 139–148.
9. *Afanasyev A., Andreeva A., Chernova A.* Influence of oil field production life on optimal CO₂ flooding strategies: Insight from the microscopic displacement efficiency // Netherlands: Elsevier BV. JPSE. V.205. 108803.
10. *Afanasyev A., Andreeva A., Chernova A.* Numerical optimisation of CO₂ flooding using a hierarchy of reservoir models // Advances in Geosciences. 2021. V. 56. P. 19–31.
11. *Buckley S.E., Leverett M.C.* Mechanism of fluid displacement in sands // Trans. AIME. 1942. V. 146. P. 107–116.
12. *Баренблат Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
13. *Brooks R., Corey A.* Hydraulic properties of porous media // Hydrology Papers, Colorado State University, 1964.
14. *Riaz A., Tehelepi H.A.* Linear stability analysis of immiscible two-phase flow in porous media with capillary dispersion and density variation // Phys. Fluid. 2004. V. 16 (12). P. 4727–4737.
15. *Цыпкин Г.Г., Шаргатов В.А.* Линейная устойчивость фильтрационного течения с поверхностью раздела газ-нефть в рамках подхода Бринкмана // Изв. РАН МЖГ. 2022. № 3. С. 56–64.
16. *Афанасьев А.А., Султанова Т.В.* Исследование гидродинамической неустойчивости фронта вытеснения при закачке углекислого газа в водонасыщенный пласт // Изв. РАН МЖГ. 2016. № 4. С. 85–96.
17. *Afanasyev A.* Hydrodynamic modelling of petroleum reservoirs using simulator MUFITS // Energy Procedia. 2015. V. 76. P. 427–435.
18. MUFITS. Reservoir Simulation Software. [Электронный ресурс]. 2013–2023. URL: <http://www.mufits.org/> (дата обращения: 10.03.2023).

УДК 532.591

ТРАЕКТОРИИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ ТЕМНОГО СОЛИТОНА В ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

© 2023 г. А. Т. Ильичев^{a,*}, А. С. Савин^{b,c}, А. Ю. Шашков^b

^aМатематический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

^bМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

^cИнститут геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского РАН, Москва, Россия

*E-mail: ilichev@mi-ras.ru

Поступила в редакцию 17.08.2023 г.

После доработки 01.09.2023 г.

Принята к публикации 10.09.2023 г.

Рассматривается слой жидкости конечной глубины, описываемый уравнениями Эйлера. Ледяной покров моделируется геометрически нелинейной упругой пластиной Кирхгоффа–Лява. Находятся траектории частиц жидкости под ледяным покровом в поле нелинейной поверхностной бегущей волны, стремящейся к периодической волне на бесконечности: так называемого “темного солитона” (который является нелинейным продуктом боры и периодической волны) малой, но конечной, амплитуды. Присутствие темных солитонов в системе является индикатором модуляционной устойчивости несущей периодической волны (дефокусировки). Приводимый анализ использует явные асимптотические выражения для решений, описывающих волновые структуры на поверхности раздела вода–лед типа темных солитонов, а также асимптотических решений для поля скоростей в толще жидкости, генерируемого этими волнами.

Ключевые слова: ледяной покров, упругая пластина Кирхгоффа–Лява, темный солитон, траектория жидкой частицы

DOI: 10.31857/S1024708423600550, EDN: QYFEAR

Геометрически нелинейная модель льда, основанная на теории пластин Кирхгоффа–Лява, впервые была использована в [1, 2] для некоторой периодической задачи для изгибно-гравитационных волн. Комбинация теории нормальных форм, изложенной в [3], с редукцией на центральное многообразие (см., [4] и [5]) для задачи распространения волн на поверхности воды под ледяным покровом, где ледяной покров моделировался геометрически нелинейной пластиной Кирхгоффа–Лява в напряженном состоянии, для конечной глубины впервые были адаптированы в [6]. Метод [6] был обобщен на случай движущейся нагрузки на ледяном покрове в [7]. Полученные волновые структуры сравнивались с численными решениями. С тех пор появилось значительное количество работ, посвященных изучению изгибно-гравитационных волн на поверхности жидкости под ледяным покровом, который моделировался либо геометрически нелинейной пластиной Кирхгоффа–Лява, либо оболочкой Коссера, для которой существует явное выражение для упругой энергии [8] (см. ссылки в [9]).

В огромном большинстве работ, посвященных гидроупругой системе вода–лед, исследуется поверхность контакта вода–лед и, насколько нам известно, не анализируется волновое поле скоростей в толще жидкости. Движение частиц жидкости в поле поверхностной монохроматической волны в линейной постановке описано, например, в монографиях [10, 11]. Частицы движутся по эллипсам в жидкости конечной глубины и по окружностям в жидкости бесконечной глубины. Если формально учитывать члены второго порядка по крутизне волны в разложении скорости частицы (что в линейной теории некорректно), то траектории частиц оказываются незамкнутыми и, следовательно существует медленный дрейф частиц в направлении распространения волны. В работе [12] впервые показано, что для гравитационных волн в рамках модели идеальной жидкости, при распространении нелинейной волны по поверхности жидкости, материальные частицы в ней медленно (по сравнению с фазовой и групповой скоростью) перемещаются в направлении распространения волны. С тех пор явление дрейфа частиц активно изуча-

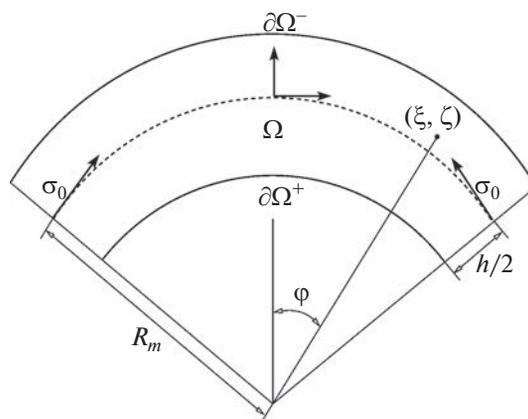


Рис. 1. Фрагмент упругой пластины с локальной координатной системой (ξ, ζ) . Пунктирная линия обозначает серединную поверхность. В результате заданного внешнего растяжения (сжатия) в пластине возникает поле напряжений, приводящее к внутренним силам, поверхностная плотность которых имеет величину σ_0 (на рисунке пластина подвержена начальному сжатию).

лось в большом количестве работ для разных моделей жидкости. Хороший обзор работ на эту тему может быть найден в [13].

Настоящая работа является, в определенном смысле, продолжением недавних работ [9, 14], где исследованы траектории частиц в жидкости под ледяным покровом в поле поверхностной изгибно-гравитационной уединенной волны и изгибного уединенного волнового пакета — бегущих волн солитонного типа, которые описываются быстроубывающими решениями по пространству; эти решения не имеют предела при переходе к линейной формулировке рассматриваемой задачи и являются исключительно продуктом взаимодействия нелинейности и дисперсии в модели. В работе определяется поле траекторий частиц в толще жидкости (слой жидкости описывается полной двумерной системой уравнений Эйлера) под ледяным покровом (который моделируется геометрически нелинейной пластиной Кирхгоффа–Лява) в поле нелинейной поверхностной волны типа “темного солитона”, являющейся нелинейным продуктом взаимодействия боры и периодической волны. Для последующего анализа будут использованы явные асимптотические выражения для решений типа темного солитона малой, но конечной, амплитуды.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Эксперименты показывают, что ледяной покров в естественных условиях ведет себя как тонкая упругая пластина, которая плавает на поверхности жидкости [15]. В связи с этим будем рассматривать его в рамках модели упругой пластины Кирхгоффа–Лява, относительно которой приняты следующие допущения:

- существует нейтральная (серединная) поверхность, деформации растяжения или сжатия которой являются наперед заданными и не изменяются при изгибе;
- каждое волокно упругого слоя, которое ортогонально нейтральной поверхности в недеформированном состоянии, остается прямым и ортогональным этой поверхности после деформации;
- напряженно-деформированное состояние подчиняется закону Гука, т.е. деформации малы и пластина является физически линейной.

Будем предполагать, что пластина находится в предварительно напряженном состоянии, которое характеризуется горизонтальным напряжением σ_0 (см. рис. 1). Это напряжение обусловлено начальным растяжением (или сжатием, как на рисунке) серединной поверхности, которое, в связи с вышеизложенным, остается неизменным при изгибных деформациях.

Математическое описание упругой пластины формулируется в локальной криволинейной системе координат в плоских сечениях (ξ, ζ) , жестко присоединенной к серединной поверхности пластины. В недеформированном состоянии эта система координат (с точностью до сдвига) совпадает с глобальной декартовой системой координат x, z . Координата ξ изменяется вдоль дуг

окружностей, параллельных локальным фрагментам срединной поверхности, а ζ – в ортогональном направлении к срединной поверхности (рис. 1). Упругий слой, в недеформированном состоянии имеющий толщину h , занимает искривленную область

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}; -h < 2\zeta < h\}$$

имеющую границу

$$\partial\Omega = \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^- = \{\xi \in \mathbb{R}; 2\zeta = -h \cup 2\zeta = h\}$$

Далее будем рассматривать изгиб пластины в плоскости x, z (рис. 1).

Уравнение баланса сил, действующих со стороны пластины на жидкость, имеет вид (см., например, [16])

$$p = p_0 + \frac{\sigma_0 h}{R_m} - \partial_{xx}^2 M + \rho_s h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

где p – давление в жидкости, p_0 – атмосферное давление, σ_0 – начальное напряжение в пластине, ρ_s – плотность упругого материала пластины (льда), η – глубина невозмущенного слоя плюс отклонение поверхности воды. Изгибающий момент M выражается в терминах радиуса кривизны R_m нейтральной поверхности пластины как (см., например, [16])

$$M = \frac{J}{R_m}, \quad J = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.2)$$

где E – модуль Юнга, а ν – коэффициент Пуассона пластины (льда).

Рассматриваются плоскопараллельные потенциальные движения идеальной несжимаемой жидкости, имеющей глубину H и плотность ρ . Жидкость занимает область

$$G = \{x \in \mathbb{R}; 0 < z < \eta(x)\}$$

которая имеет границу

$$\partial G = G^+ \cup G^- = \{x \in \mathbb{R}; z = \eta(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R}; z = 0\}$$

Поверхность раздела вода–лед задается уравнением $z(t, x) = \eta(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Из (1.1), (1.2) следует, что уравнения Эйлера для слоя идеальной и несжимаемой жидкости, имеющей конечную глубину, при наличии указанных поверхностных эффектов, имеют вид (буквенные индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным) [17, 18]

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{zz} &= 0, & (x, z) \in G \\ \varphi_z &= 0, & (x, z) \in G^- \\ \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + g(\eta - 1) - \hat{b}\hat{\kappa}_1 + \frac{J}{\rho}\hat{\kappa}_2 + \hat{c}\eta_{tt} &= 0, & (x, z) \in G^+ \\ \eta_t + \eta_x \varphi_x &= \varphi_z, & (x, z) \in G^+ \end{aligned} \quad (1.3)$$

где φ – потенциал скорости жидкости, g – ускорение свободного падения

$$\hat{\kappa}_1 = \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2} - h\eta_{xx}}, \quad \hat{\kappa}_2 = \partial_{xx}^2 \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2} - h\eta_{xx}}, \quad \hat{c} = \rho_s h / \rho, \quad \hat{b} = \frac{h\sigma_0}{\rho}$$

Дисперсионное соотношение для линеаризованной системы уравнений (1.3), выражающее соотношение между частотой ω и волновым числом k , дается выражением

$$\omega^2 = \left[\frac{kth(kH)}{1 + \hat{c}kth(kH)} \right] \left[g + \hat{b}k^2 + \frac{J}{\rho}k^4 \right]$$

В безразмерных переменных (старые обозначения сохранены для безразмерных величин)

$$(x, z) \rightarrow \left(\frac{x}{H}, \frac{z}{H} \right), \quad \eta \rightarrow \frac{\eta}{H}, \quad \mathbf{v} = (u, v)^T \rightarrow \frac{\mathbf{v}}{V}$$

где V – абсолютная величина скорости волны, область G переходит в область D

$$D = \{x \in \mathbb{R}; 0 < z < \eta(t, x)\}$$

$$\partial D = \partial D^+ \cup \partial D^- = \{x \in \mathbb{R}; z = \eta(t, x)\} \cup \{x \in \mathbb{R}; z = 0\}$$

Безразмерные уравнения Эйлера (1.3) для стационарных волн в системе координат, распространяющихся со скоростью V (влево), имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (x, z) \in D \\ \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \lambda \eta - b \kappa_1 + \gamma \kappa_2 + c(\partial_{xx} \eta - \kappa_1) &= \text{const}, \quad (x, z) \in \partial D^+ \\ \partial_x \eta u - v &= 0, \quad (x, z) \in \partial D^+ \\ v &= 0, \quad (x, z) \in \partial D^- \end{aligned} \tag{1.4}$$

Постоянные λ, b, γ, c и κ определяются из формул

$$\lambda = gH/V^2, \quad b = \frac{\hat{b}}{HV^2} - c = \frac{h\sigma_0}{\rho HV^2} - c, \quad \gamma = J\rho V^2 H^3, \quad c = \frac{\hat{c}}{H} = \frac{\rho_s h}{\rho H}, \quad \kappa = \frac{h}{H} \tag{1.5}$$

Функции $\kappa_j, j = 1, 2$ задаются выражениями

$$\kappa_1 = \frac{\partial_{xx} \eta}{(1 + (\partial_x \eta)^2)^{3/2} - \kappa \partial_{xx} \eta}, \quad \kappa_2 = \partial_{xx}^2 \frac{\partial_{xx} \eta}{(1 + (\partial_x \eta)^2)^{3/2} - \kappa \partial_{xx} \eta}$$

Далее мы пренебрегаем инерцией ледяной пластины по сравнению с инерцией жидкого слоя, т.е. полагаем $c = \kappa = 0$.

2. ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ. ПРИВЕДЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕМНЫЕ СОЛИТОНЫ

Для малых безразмерных отклонений $\eta - 1$ поверхности раздела вода–лед можно корректно определить новые “полу-лагранжевы” координаты $(x, y) \in F = \mathbb{R} \times (0, 1)$ (“выпрямляющие” слой D) по формуле $y = \psi(x, z) = z + \Psi$, где $\psi(x, z)$ обозначает функцию тока, нормированную при помощи среднего расхода $Q = VH$.

Это отображение локально обратимо (для малых амплитуд поверхностных возмущений) [5]. Кроме того, произведем отображение поля скоростей $\mathbf{v} = (u, v)$ на векторное поле $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ [5]

$$w_1 = \frac{1}{2} \{u^2 + v^2 - 1\}, \quad w_2 = \frac{v}{u}$$

где $u - 1, v$ предполагаются малыми, а $\partial_z \Psi = u - 1, \partial_x \Psi = -v$.

Отклонение поверхности η дается формулой

$$\eta = 1 - [w_1] + \dots, \quad [f] = \int_0^1 f dy \tag{2.1}$$

Можно показать (см., например, обзор [19]), что уравнения (1.4) для волн малой, но конечной амплитуды можно записать в операторной форме

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{F}(\mu, \mathbf{u}), \quad \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{F}(0, \mathbf{0}) = 0 \tag{2.2}$$

где верхняя точка обозначает дифференцирование по неограниченной координате x . Неограниченный, замкнутый оператор \mathbf{A} ($y \in F$) действует на пятикомпонентную вектор-функцию \mathbf{u} , четвертой и пятой компонентой которой являются модифицированные скорости $w_1(\cdot, y)$ и $w_2(\cdot, y)$ соответственно. Малый параметр μ определяется из равенства

$$\mu = \lambda - \lambda_0 \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \gamma_0 q^4 + \frac{q \operatorname{cth} q}{2} + \frac{q^2 \operatorname{sh}^{-2} q}{2} \\ b_0 &= -2\gamma_0 q^2 + \frac{\operatorname{cth} q}{2q} - \frac{\operatorname{sh}^{-2} q}{2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Величина q определяется ниже.

Параметром бифуркации является скорость волны V . Из (1.5) и (2.3) имеем

$$V^{-2} = V_0^{-2} + \frac{\mu}{gH} \quad \text{или} \quad V = V_0 \left(1 - \frac{V_0^2 \mu}{2gH} \right) + O(\mu^2)$$

и в первом приближении по μ

$$b = b_0 + \omega_1 \mu, \quad \gamma = \gamma_0 + \omega_2 \mu, \quad \mu \ll 1, \quad \omega_1 = \frac{h\sigma_0}{\rho g H^2}, \quad \omega_2 = \frac{J}{\rho g H^4}$$

Параметры b_0 и γ_0 определяются по формулам (1.5) с $V = V_0$.

Рассматриваемые в настоящей статье волновые структуры (темные солитоны) являются нелинейными продуктами 1 : 1 резонанса (2.4), при этом собственные значения iq оператора \mathbf{A} лежат на мнимой оси. Для 1 : 1 резонанса четыре собственных значения \mathbf{A} образуют две пары совпадающих собственных значений $\pm iq$, $q > 0$, приходящие на мнимую ось из комплексной плоскости при изменении параметров $(\lambda, b, \gamma) \rightarrow (\lambda_0, b_0, \gamma_0)$ (когда происходит бифуркация, ведущая к появлению темных солитонов; $q = kH$ – безразмерное волновое число).

Можно показать (см., например, [3–5, 20], а также [16]), что бесконечномерная система уравнений (2.2) локально эквивалентна конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (система уравнений в частных производных для ограниченных решений малых амплитуд эквивалентна системе обыкновенных дифференциальных уравнений)

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{F}_0(\mu, \mathbf{u}_0), \quad \partial_{\mathbf{u}_0} \mathbf{F}_0(0, \mathbf{0}) = 0 \quad (2.5)$$

Система уравнений (2.5) называется приведенной системой.

В рассматриваемом случае 1 : 1 резонанса полагаем

$$\mathbf{u}_0 = A\phi_0 + B\phi_1 + A^*\phi_0^* + B^*\phi_1^* \\ \mathbf{A}\phi_0 = iq\phi_0, \quad \mathbf{A}\phi_1 = iq\phi_1 + \phi_0$$

Тогда приведенная система (2.5) эквивалентна системе

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{a} + \mathbf{g}_0(\mu, \mathbf{a}), \quad \mathbf{g}_0 = \mathbb{O}(\mu|\mathbf{a}| + |\mathbf{a}|^2), \quad \mathbf{a} = (A, B, A^*, B^*)^\top \quad (2.6)$$

где знак * обозначает комплексное сопряжение. Имеем также [21]

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} iq & 1 & 0 & 0 \\ 0 & iq & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iq & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -iq \end{pmatrix}$$

Все ограниченные решения \mathbf{u} системы уравнений (2.2) малой амплитуды записываются в виде [21]

$$\mathbf{u} = A\phi_0 + B\phi_1 + A^*\phi_0^* + B^*\phi_1^* + \Phi(\mu, A, B, A^*, B^*)$$

где

$$\Phi(0, A, B, A^*, B^*) = (A^2 \Phi_{2000} + \text{с.с.}) + |A|^2 \Phi_{1100} + \dots$$

является нелинейной вектор-функцией своих аргументов. Собственный и присоединенный векторы \mathbf{A} , соответствующие центральному спектру, имеют вид

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} iq^{-1} \text{th} q \\ -\text{th} q \\ -iq \text{th} q \\ -\text{ch} q y / (q \text{ch} q) \\ \text{ish} q y / (q \text{ch} q) \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} q^{-1} \\ i + iq^{-1} \text{th} q \\ -q - 2\text{th} q \\ iy \text{sh} q y / (q \text{ch} q) \\ y \text{ch} q y / (q \text{ch} q) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Приведенная система уравнений (2.6) приближается системой уравнений в квази-нормальной форме

$$\begin{aligned} \partial_x A &= iqA + B + iAR \left(AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B) \right) \\ \partial_x B &= iqB + AQ \left(AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B) \right) + iBR \left(AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B) \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

вплоть до произвольного алгебраического порядка по μ [21]. Здесь R и Q – полиномы с вещественными коэффициентами

$$\begin{aligned} R(\mu, u, K_0) &= p_1\mu + p_2u + p_3K_0 + O((|\mu| + |u| + |K_0|)^2) \\ Q(\mu, u, K_0) &= q_1\mu - q_2u + q_3K_0 + O((|\mu| + |u| + |K_0|)^2) \end{aligned}$$

а K_0 и H_0 – постоянные. Заметим, что система (2.8) имеет два интеграла в инволюции

$$K_0 = \frac{i}{2}(AB^* - A^*B), \quad H_0 = |B|^2 - S(\mu, |A|^2, K_0), \quad S = \int_0^{|A|^2} Q(\mu, u, K_0) du$$

и, следовательно, интегрируема по Лиувиллю.

Произведем замену переменных

$$A = \rho_0 \exp i(qx + \theta_0), \quad B = \rho_1 \exp i(qx + \theta_1) \quad (2.9)$$

Тогда система уравнений (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_0 &= \rho_1 \cos \Theta \\ \dot{\rho}_1 &= \rho_0 \cos \Theta Q(\rho_0^2, K_0) \\ \dot{\Theta} &= - \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} Q(\rho_0^2, K_0) + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \sin \Theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\Theta = \theta_1 - \theta_0$. При $K_0 = \rho_0\rho_1 \sin \Theta = 0$, имеем без ограничения общности $\Theta = 0$. Тогда, в первом приближении система уравнений (2.10) примет вид

$$\ddot{\rho}_0 = \mu q_1 \rho_0 - q_2 \rho_0^3 \quad (2.11)$$

При этом

$$q_1 = \frac{1 + \omega_1 q^2 + \omega_2 q^4}{(2b_0 q + 4\gamma_0 q^3) \operatorname{cth} q + 6\gamma_0 q^2 + b_0 - 1} > 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= - \frac{r}{16q^4 (\lambda_0 - 1) \operatorname{ch}^3 q} \left(\lambda_0 - 9\lambda_0^2 + 16q^2 - 12\lambda_0 \operatorname{ch} 2q + 12\lambda_0^2 \operatorname{ch} 2q + \right. \\ &+ 11\lambda_0 \operatorname{ch} 4q - 3\lambda_0^2 \operatorname{ch} 4q + 14q \operatorname{sh} 2q + 16\alpha q \operatorname{sh} 2q + 18\lambda_0 q \operatorname{sh} 2q - \\ &\left. - 16\alpha \lambda_0 q \operatorname{sh} 2q + q \operatorname{sh} 4q + 4\alpha q \operatorname{sh} 4q - \lambda_0 q \operatorname{sh} 4q - 4\alpha \lambda_0 q \operatorname{sh} 4q \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} r(q) &= \frac{q^4 \operatorname{cth} q}{\lambda_0 q \operatorname{ch} q - b_0 q^3 \operatorname{ch} q - 3\gamma_0 q^5 \operatorname{ch} q - \lambda_0 \operatorname{sh} q - 3\gamma_0 q^4 \operatorname{sh} q} \\ \alpha &= \frac{2(2 + \operatorname{ch} 2q)}{-5 - \operatorname{ch} 2q + 6q \operatorname{cth} q - 18\gamma_0 q^3 \operatorname{sh} 2q} \end{aligned}$$

Постоянная q_1 , как следует из (2.12), всегда положительна. График типичной зависимости q_2 от глубины H , определяемой формулой (2.13), приведен на рис. 2. Из рис. 2 видно, что коэффициент q_2 меняет при значениях глубины, превосходящих некоторое критическое значение. Для тех значений глубины, для которых коэффициент q_2 отрицателен, нелинейная несущая

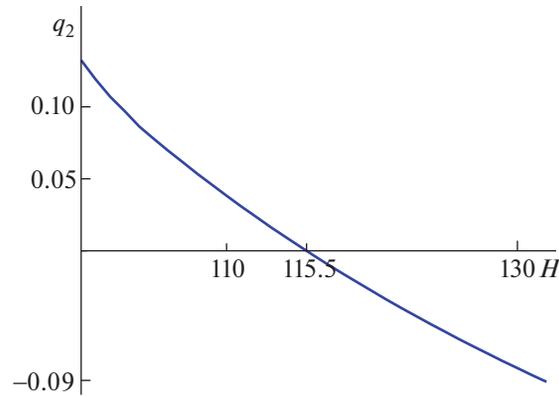


Рис. 2. Зависимость коэффициентов q_2 от глубины жидкости H (в метрах) при толщине льда $h = 1$ м и напряжении $\sigma_0 = 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$; $E = 5 \times 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 1000 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, $g = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$.

периодическая волна малой амплитуды устойчива и, как следствие, система обладает так называемыми “темными солитонами” вместо уединенных волновых пакетов. Свое название эти волны получили из нелинейной оптики из-за свойства, что их интенсивность (в оптике освещение) минимальна в центре волны. Как уже отмечалось, темный солитон является нелинейным продуктом боры и периодической волны. Присутствие таких волн также известно на поверхности слоя жидкости с поверхности раздела двух бесконечных слоев жидкости с капиллярными эффектами [22].

Темный солитон в низшем приближении по μ описывается решением уравнения (2.11) при $q_2 < 0$, $\mu < 0$

$$\rho_0 = \pm \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \text{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} x \quad (2.14)$$

Из (2.9) и (2.14) следует, что для темного солитона

$$A = A_0 = \pm \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \text{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} x \exp(iqx + \theta_0) \quad (2.15)$$

и положим в (2.15) $\theta_0 = \pi/2$. Заметим, что из уравнений (2.10) следует, что $B = O(\mu)$, т.е. является величиной следующего порядка малости, по сравнению с A .

Из (2.1) и (2.15) следует, что поверхностный темный солитон (в первом приближении по μ) описывается формулой

$$\eta = 1 \pm \frac{2\text{th}q}{q^2} \sqrt{\frac{\mu q_1}{q_2}} \text{th} \sqrt{-\frac{\mu q_1}{2}} x \sin qx \quad (2.16)$$

На рис. 3 изображена форма изгибающей поверхностной волны (2.16) – темного солитона – для конкретных значений физических параметров бассейна и ледяного покрова.

3. ПОЛЕ СКОРОСТИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ ДЛЯ ПОВЕХНОСТНОГО ТЕМНОГО СОЛИТОНА

Компоненты актуальной скорости $(u, v)^T$ выражаются через компоненты вспомогательной скорости $(w_1, w_2)^T$ по формулам

$$u = \sqrt{\frac{1+2w_1}{1+w_2}}, \quad v = w_2 \sqrt{\frac{1+2w_1}{1+w_2}} \quad (3.1)$$

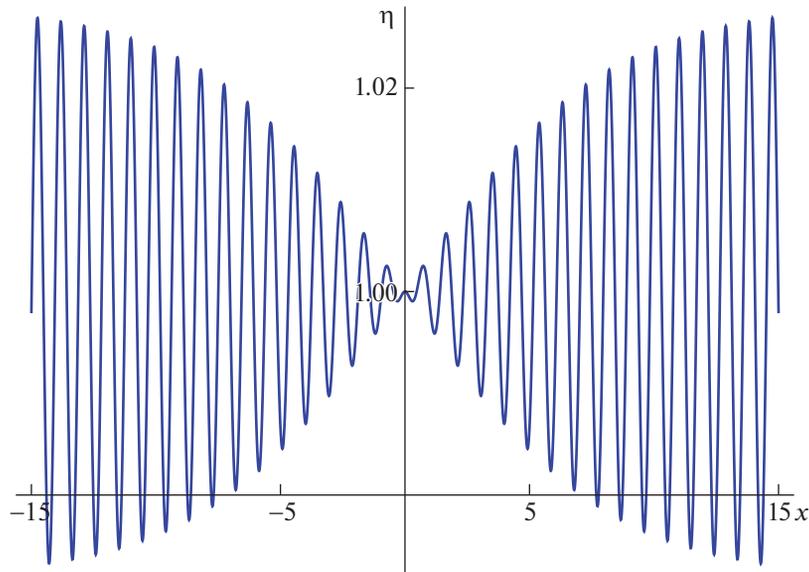


Рис. 3. Форма поверхностного изгибно-гравитационного темного солитона ($q_2 < 0$) повышения уровня; $H = 129$ м, $\mu = -0.005$, остальные параметры такие же, как для рис. 2.

Из (3.1), в младшем порядке по μ имеем

$$u = 1 + w_1 - \frac{w_2}{2}, \quad v = w_2 \tag{3.2}$$

Напомним, что все рассмотрения проводятся в системе отчета, связанной с волной. Чтобы перейти в лабораторную систему отсчета, где жидкость покоится на бесконечности, необходимо сделать преобразование $x \rightarrow x + t$ и $u \rightarrow u - 1$. Таким образом, для темного солитона в соответствии с (2.7) в первом порядке по μ в лабораторной системе отсчета имеем

$$\begin{aligned} w_1 &= -\text{ch}qz / (q\text{ch}q) (A_0 + A_0^*) = \pm 2 \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \frac{\text{ch}qz}{q\text{ch}q} \text{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} (x + t) \sin q(x + t) \\ w_2 &= \text{ish}qz / (q\text{ch}q) (A_0 - A_0^*) = \mp 2 \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \frac{\text{sh}qz}{q\text{ch}q} \text{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} (x + t) \cos q(x + t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Из (2.15), (3.2) и (3.3) в первом порядке по μ получим

$$\begin{aligned} u &= \pm \left[2 \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \frac{\text{ch}qz}{q\text{ch}q} \text{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} (x + t) \sin q(x + t) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \frac{\text{sh}qz}{q\text{ch}q} \text{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} (x + t) \cos q(x + t) \right] \\ v &= \mp 2 \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \frac{\text{sh}qz}{q\text{ch}q} \text{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} (x + t) \cos q(x + t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Знак “–” в правых частях формулы (3.4) соответствует волне понижения уровня в (2.16), а “+” волне повышения уровня.

Для определения траекторий жидких частиц в лабораторной системе отсчета имеем

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dz}{dt} = v \tag{3.5}$$

Скорости u и v в поле поверхностной волны (2.16) с точностью до соответствующих малых по амплитуде волны определяются выражением (3.4).

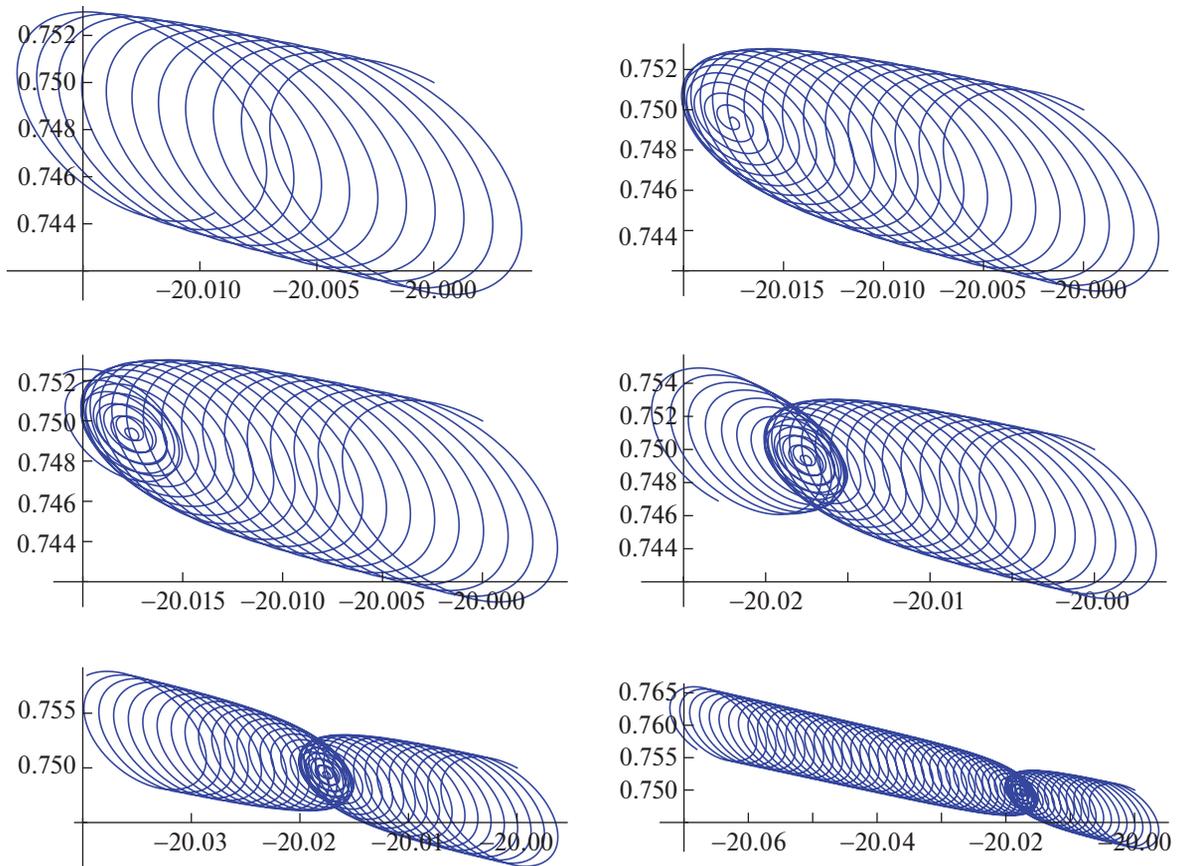


Рис. 4. Траектория частицы жидкости, в начальный момент находящейся в точке $x(0) = -20$, $y(0) = 0.75$ в поле поверхностного темного солитона с параметрами, как на рис. 3, в разные моменты безразмерного времени: слева направо, сверху вниз: $t = 10, 20, 25, 30, 40, 60$.

Для определения коэффициентов в (2.16), при фиксированных h, H, σ_0 и ρ из уравнений (1.5) и первого уравнения (2.4) определялось V_0 . Затем из второго уравнения (2.4) определялось соответствующее значение безразмерного волнового числа q . После этого по формулам (2.12) и (2.13) вычислялись коэффициенты q_1 и q_2 (при этом необходимо убедиться, что $q_2 < 0$). При задании μ все параметры поверхностного темного солитона (2.16) и правая часть динамической системы (3.5) оказываются полностью определенными. Для физических параметров h, H, σ_0 и ρ , а также параметра μ , соответствующих темному солитону, изображенному на рис. 3, имеем $V_0 = 16.18$ м/с, $q = 6.707$, $q_1 = 6.21$, $q_2 = -0.077 < 0$.

Система уравнений (3.5) решалась численно для параметров, приведенных на рис. 2 и различных начальных положений частицы по горизонтали $x(0)$ и по вертикали (глубины, на которой расположена частица) $y(0)$. На рис. 4 и 5 изображен типичный пример формы эволюции траекторий с течением времени t частицы, находящейся в начальный момент времени слева от центра волны понижения уровня на расстоянии, примерно равном расстоянию, когда темный солитон превращается в волну постоянной амплитуды.

Из рис. 4 и 5 видно, что при небольших значениях времени траектория частицы, расположенной в начальной точке, достаточно далеко от центра волны, начинает закручиваться против часовой стрелки, а радиус вращательного движения постепенно уменьшается до нуля. Затем при прохождении центра волны над частицей (с течением времени) радиус вращения траектории начинает снова увеличиваться до постоянного значения, при этом устанавливается стационарная картина эволюции траектории, так как над частицей при значительных временах располагается периодическая (или почти периодическая) волна постоянной амплитуды, к которой асимптотичен рассматриваемый темный солитон при больших временах. Жидкая частица, при этом, дви-

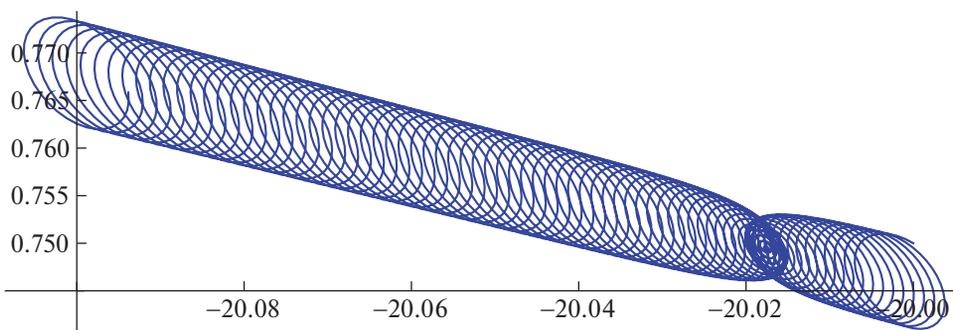


Рис. 5. Траектория частицы жидкости, в начальный момент находящейся в точке $x(0) = -20$, $y(0) = 0.75$ в момент безразмерного времени $t = 80$.

гается по спирали и испытывает слабый дрейф: по горизонтали по направлению распространения волны (влево), а по вертикали — по направлению к поверхности жидкости.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Уравнения для бегущих волн в жидкости под ледяным покровом (которые локально могут быть записаны в операторном виде (2.2); оператор A действует в надлежащем гильбертовом пространстве функций на полосе от нуля до единицы или, точнее, в конкретных замкнутых областях этого пространства) допускают проекцию на центральное многообразие — локальное нелинейное многообразие конечной размерности в бесконечномерном фазовом пространстве основной системы дифференциальных уравнений в частных производных, где находятся ограниченные решения и основные уравнения для бегущих волн записываются в виде конечномерной динамической системы (в виде так называемых приведенных уравнений). Рассматривается случай, когда размерность центрального многообразия равна четырём, соответствующая линейному 1 : 1 резонансу. Волновые структуры, рассмотренные в статье, отвечают от состояния покоя на многообразиях в пространстве физических параметров, где собственные значения, принадлежащие к центральному спектру оператора (собственным значениям на мнимой оси) оператора A являются попарно совпадающими. В случае 1 : 1 резонанса в пространстве обратного квадрата числа Фруда λ , безразмерного начального напряжения в ледовой пластине b и безразмерной жесткости пластин на изгиб γ — это поверхность (2.4). При этом нелинейным продуктом 1 : 1 резонанса является семейство темных солитонов.

Как уже упоминалось, темные солитоны имеют место при отрицательных значениях q_2 (это число, по существу, является коэффициентом при ведущей нелинейности в уравнениях для волн малой амплитуды). При $q > q^* > 0$ коэффициент q_2 становится отрицательным; при $q < q^*$, $q_2 > 0$ и происходит замещение темных солитонов, которые являются нелинейным продуктом боры и периодической волны на так называемые “уединенные волновые пакеты” — монохроматические волны под быстроубывающей огибающей; при этом скорость собственно монохроматической волны равна скорости огибающей. Для волн под ледяным покровом, при фиксированной толщине льда, существует критическая глубина жидкости H_c , выше которой не существует более решений типа уединенных волновых пакетов, а для $\mu < 0$ имеют место темные солитоны [23]. Темный солитон является индикатором модуляционной устойчивости несущей периодической волны. Таким образом, можно говорить, что при переходе через H_c (в сторону возрастания) фокусирующая окрестность безразмерного волнового числа q заменяется на дефокусирующую.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены траектории частиц жидкости в поле ограниченных на бесконечности нелинейных бегущих волн малой (но конечной) амплитуды, асимптотичных к периодической (или почти периодической) волне распространяющихся по поверхности раздела жидкость—лед в слое идеальной несжимаемой жидкости под ледяным покровом. Волновые процессы в жидкости описыва-

ются уравнениями Эйлера с дополнительным поверхностным давлением, вызванным наличием льда, который моделируется свободно плавающей на поверхности упругой геометрически нелинейной пластиной Кирхгоффа–Лява. Получены приближения первого порядка по малой амплитуде для бегущих поверхностных волн типа темного солитона, а также построены соответствующие приближения полей скоростей частиц жидкости, отвечающих этим волнам. Распределение траекторий частиц по глубине слоя жидкости тогда вычисляется путем интегрирования обыкновенной неавтономной динамической системы.

Разделы 1, 2 и 4 статьи выполнены А.Т. Ильичевым, он также принимал участие в выполнении раздела 3 статьи; раздел 3 статьи выполнен А.С. Савиным и А.Ю. Шашковым. Исследование А.Т. Ильичева выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30012, <https://rscf.ru/project/19-71-30012/> в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Forbes L.R.* Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. High order series solution // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 169. P. 409–428.
2. *Forbes L.K.* Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Galerkin solutions // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 188. P. 491–508.
3. *Iooss G., Adelmeyer M.* Topics in bifurcation theory and applications. 2nd edition. Singapore: World Scientific, 1998. 186 p.
4. *Kirchgässner K.* Wave solutions of reversible systems and applications // *J. Diff. Eqns.* 1982. V. 45. P. 113–127.
5. *Mielke A.* Reduction of quasilinear elliptic equations in cylindrical domains with applications // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1988. V. 10. P. 501–566.
6. *Ильичев А. Т.* Уединенные волны в средах с дисперсией и диссипацией (обзор) // *Изв. РАН, МЖГ* 2000. № 2. С. 3–27 = *Il'ichev A.* Solitary waves in media with dispersion and dissipation (a review) *Fluid Dyn.* 2000. V. 35. P. 157–176.
7. *Parau E., Dias F.* Nonlinear effects in the response of a floating ice plate to a moving load // *J. Fluid. Mech.* 2001. V. 437. P. 325–336.
8. *Plotnikov P.I., Toland J.F.* Modelling nonlinear hydroelastic waves // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2011. V. 369. P. 2942–2956.
9. *Ильичев А.Т., Савин А.С., Шашков А.Ю.* Траектории частиц жидкости под ледяным покровом в поле уединенной изгибно-гравитационной волны // *Изв. вузов. Радиофизика*, в печати.
10. *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана, Л: Гидрометеиздат, 1980. 320 с.
11. *Монин А.С.* Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л: Гидрометеиздат, 1988. 424 с.
12. *Stokes G.* On the theory of oscillatory waves // *Trans. Camb. Phil. Soc.* 1847. V. 8. P. 441–455.
13. *Очиров А.А.* Исследование закономерностей формирования массопереноса, инициируемого волновыми движениями жидкости: Дис. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук: 01.02.05. Ярославль, 2020. 142 с.
14. *Ильичев А.Т., Савин А.С., Шашков А.Ю.* Движение частиц в поле нелинейных волновых пакетов в слое жидкости под ледяным покровом // *Теор. мат. физ.*, в печати.
15. *Müller A., Ettema R.* Dynamic response of an icebreaker hull to ice breaking // *In Proc. IAHR Ice Symp., Hamburg.* 1984. V. II. P. 287–296.
16. *Ильичев А.Т.* Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
17. *Марченко А.В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // *ПММ.* 1988. Т. 52. С. 230–235.
18. *Il'ichev A.T., Semenov A.Yu.* Stability of solitary waves in dispersive media described by a fifth-order evolution equation // *Theoret. Comput. Fluid Dyn.* 1992. V. 3. P. 307–326.
19. *Ильичев А.Т.* Солитоноподобные структуры на поверхности раздела вода–лед // *УМН.* 2015. Т. 70. С. 85–138 = *Il'ichev A.T.* Soliton-like structures on a water-ice interface // *Russian Math. Surveys.* 2015. V. 70. P. 1051–1103.
20. *Narasimha M., Iooss G.* Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. 329 p.
21. *Iooss G., Perouéme M.C.* Perturbed homoclinic solutions in reversible 1 : 1 resonance vector fields // *J. Diff. Eqns.* 1993. V. 102. P. 62–88.
22. *Dias F., Iooss G.* Capillary-gravity interfacial waves in infinite depth // *Eur. J. Mech., B/Fluids.* 1996. V. 15. P. 367–393.
23. *Il'ichev A.T., Tomashpolskii V.Ja.* Characteristic parameters of nonlinear surface envelope waves beneath an ice cover under pre-stress // *Wave Motion.* 2019. V. 86. P. 11–20.

УДК 532.592, 556.555.4

ОСОБЕННОСТИ ТРАНСФОРМАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НА ШЕЛЬФЕ И В ГЛУБОКОМ ОЗЕРЕ

© 2023 г. В. В. Кириллов^{a,*}, В. Ю. Ляпидевский^{b,**}, И. А. Суторихин^{a,***},
Ф. Ф. Храпченков^{c,****}

^aИнститут водных и экологических проблем СО РАН, Барнаул, Россия

^bИнститут гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

^cТихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток, Россия

*E-mail: vkirillov@iwep.ru

**E-mail: liapid@hydro.nsc.ru

***E-mail: sia@iwep.ru

****E-mail: fedi@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 13.08.2023 г.

После доработки 12.09.2023 г.

Принята к публикации 15.09.2023 г.

Характерной особенностью стратифицированных течений в больших водоемах является генерация интенсивных короткопериодных внутренних волн на фронте длинноволновых возмущений. Наиболее выражены нелинейные процессы при распространении придонных и приповерхностных возмущений. Эффективным инструментом исследования волновых процессов в океане является теория многослойной мелкой воды с учетом эффектов нелинейности и дисперсии. Показано, что разработанные математические модели пригодны для описания трансформации нелинейных внутренних волн как в шельфовой зоне моря, так и в глубоких пресноводных водоемах. В частности, проведено сравнение структуры придонных внутренних волн в шельфовой зоне Японского моря и недавно обнаруженных приповерхностных внутренних волн в Телецком озере. Обсуждается механизм генерации интенсивных внутренних волн при возбуждении сейшевых колебаний в узких водоемах. Построены бегущие волны в многослойной жидкости и найдены численные решения нестационарной проблемы генерации внутренних волн. Проведено сравнение с лабораторными экспериментами по генерации пакета короткопериодных внутренних волн при сейшевых колебаниях двухслойной жидкости в длинном канале, а также с зарегистрированной приповерхностной внутренней уединенной волной в Телецком озере.

Ключевые слова: внутренние волны, многослойная мелкая вода, волновой бор, натурный эксперимент, шельф, Телецкое озеро

DOI: 10.31857/S1024708423600537, **EDN:** JPN1JA

Наиболее изученным объектом исследований нелинейных волновых процессов в стратифицированных по плотности водоемах являются внутренние волны в океане [1]. Однако внутренние волны являются также характерной особенностью любых больших резервуаров при наличии выраженной стратификации плотности по глубине. Механизмы генерации возмущений в пикноклине (термоклине) существенно различаются для открытых и замкнутых водоемов. В шельфовой зоне морей основным источником внутренних волн являются внутренние приливы, в то время как в вытянутых озерах внутренние волны генерируются сейшевыми колебаниями свободной поверхности, вызванных атмосферными явлениями [2–4].

Проблемам генерации внутреннего прилива на границе шельфовой зоны и его трансформации в пакет интенсивных внутренних волн посвящено большое число натуральных [5–8], лабораторных [9, 10], а также аналитических и численных исследований [11–13]. При определенных условиях длинные внутренние волны порождают цуги нелинейных короткопериодных внутренних волн, структура которых уже не зависит от способа возбуждения длинноволновых колебаний пикноклина. Поэтому математические модели, разработанные для описания внутренних волн в шельфовой зоне моря и верифицированные на основе натуральных наблюдений на специа-

лизированных гидрофизических полигонах [14–16], пригодны и для расчета структуры внутренних волн в озерах.

Целью данной работы является демонстрация возможности использования разработанной модели многослойной мелкой воды для описания придонных внутренних волн большой амплитуды не только в прибрежных водах, но и для определения структуры нелинейных внутренних волн в глубоких озерах. В работе уравнения многослойной мелкой воды, учитывающие негидростатичность вертикального распределения давления, применены для построения пакета внутренних волн на шельфе Японского моря, зафиксированного на гидрофизическом полигоне ТОИ ДВО РАН в октябре 2022 г., а также для описания уединенной внутренней волны в поверхностном слое Телецкого озера, зарегистрированной во время проведения натуральных исследований летом 2022 г.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для описания динамики длинных внутренних волн в океане широко используется теория мелкой воды. При этом основное предположение о малости параметра $\varepsilon = Y/L$, где Y – характерный вертикальный, а L – горизонтальный масштабы волнового движения, справедливо для широкого класса внутренних волн. Выбор масштабов Y , L зависит от постановки задачи. Для внутренних волн, амплитуда которых сравнима с глубиной канала H , принимается $Y = H$. В случае придонных или приповерхностных внутренних волн, распространяющихся в относительно тонком слое, в качестве вертикального масштаба движения выбирается толщина этого слоя.

Переходом к уравнениям многослойной мелкой воды удается понизить размерность задачи и в то же время учесть вертикальную структуру плотности и скорости в волновых движениях стратифицированной жидкости. В классических уравнениях многослойной мелкой воды (первое приближение мелкой воды) используется дополнительная гипотеза о гидростатическом распределении давления в потоке. Учет вертикального ускорения в слоях (второе приближение мелкой воды) позволяет более полно представить внутреннюю структуру нелинейных внутренних волн, но приводит к существенному усложнению математической модели. Разумным компромиссом представляется математическая модель, рассмотренная далее, в которой даже в многослойном течении удастся построить и проанализировать однопараметрическое семейство бегущих внутренних волн (уединенных волн, волновых боров и т.д.).

В работе рассматривается модель многослойного течения стратифицированной жидкости в рамках теории мелкой воды [16], в которой негидростатичность вертикального распределения давления учтена только во внешних слоях. В приближении Буссинеска уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} h_{i,t} + (h_i u_i)_x &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ u_{i,t} + \left(\frac{1}{2} u_i^2 + p_i \right)_x &= f_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u_{1,t} + \left(\frac{1}{2} u_1^2 + p_1 \right)_x + \frac{\beta^+}{3h_1} \left(h_1^2 \frac{d_1^2 h_1}{dt^2} \right)_x &= f_1, \\ u_{n,t} + \left(\frac{1}{2} u_n^2 + p_n \right)_x + \frac{\beta^-}{3h_n} \left(h_n^2 \frac{d_n^2 h_n}{dt^2} \right)_x &= f_n. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь h_i – толщина слоя (нумерация сверху вниз), p_i – модифицированное давление в слое, величина f_i описывает диссипацию, связанную с взаимодействием между слоями, $\frac{d_k h_k}{dt} = h_{k,t} + u_k h_{k,x}$, $k = 1, k = n$. Плотности в слоях постоянны и задают устойчивую стратификацию ($\rho_1 < \dots < \rho_n$). Негидростатическое распределение давления учитывается только во внешних слоях ($i = 1$ и $i = n$) в рамках второго приближения теории мелкой воды.

Величины p_i можно представить в виде

$$p_i = p_1 + \sum_{j=2}^{i-1} b_j h_j + b_i \sum_{j=i}^n (h_j + z), \quad i = 2, \dots, n \quad (1.3)$$

Здесь $b_i = (\rho_i - \rho_1)g/\rho_1$, $i = 1, \dots, n$ – плавучесть в i -ом слое, g – ускорение свободного падения, $z = z(x)$ – рельеф дна. Величина p_1 является неэволюционной и в дальнейшем будет исключена из уравнений.

Модель (1.1), (1.2), (1.3) при $n = 3$ верифицирована в [13] на данных лабораторных и натуральных экспериментов. Для произвольного числа слоев модель была выведена и проанализирована в [16, 17]. Показано, что уравнения (1.1), (1.2), (1.3) применимы для описания внутренних волн большой амплитуды, соответствующих как первой, так и второй модам, а также для численного расчета взаимодействия этих мод. В приближении Буссинеска свободная граница горизонтальна и, следовательно, полный расход определяется граничными условиями, т.е.

$$H + z(x) = H_0 = \text{const}, \quad H = \sum_{i=1}^n h_i, \quad Q(t) = \sum_{i=1}^n h_i u_i. \quad (1.4)$$

Поэтому с учетом (1.4) число искоемых переменных может быть уменьшено на два.

Для численного построения нестационарных решений уравнения (1.2), с учетом (1.1) и (1.3), представляются в следующей эквивалентной форме ([13, 16]):

$$\begin{aligned} K_i + \left(K u_i - \frac{1}{2} u_i^2 + p_i - \frac{1}{2} h_i^2 (u_{ix})^2 \right)_x &= f_i, \\ R_i + \left(R u_n - \frac{1}{2} u_n^2 + p_n - \frac{1}{2} h_n^2 (u_{nx})^2 \right)_x &= f_n, \\ K &= u_1 - \frac{\beta^+}{3h_1} (h_1^3 u_{1x})_x, \quad R = u_n - \frac{\beta^-}{3h_n} (h_n^3 u_{nx})_x. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В данной работе модель (1.1), (1.3), (1.5) будет использована для построения нестационарных решений в двух случаях: а) формирование внутреннего ондулированного бора при сейшевых колебаниях границы раздела двухслойной жидкости ($n = 2, \beta^+ = 1, \beta^- = 0$); б) генерация уединенной волны в узком водоеме локальной деформацией пикноклина в трехслойной жидкости ($n = 3, \beta^+ = \beta^- = 1$). Для произвольного числа слоев будет построено однопараметрическое семейство уединенных волн и проведено сравнение полученного профиля солитонообразной волны с натурными данными для $\beta^+ = 0, \beta^- = 1, z(x) = 0, f_i = 0 (i = 1, \dots, n)$. Заметим, что условие $\beta^+ = 0$ или $\beta^- = 0$ является существенным при построении солитонов, так как в общем случае при $\beta^\pm > 0$ такие решения не существуют.

2. СОЛИТОНЫ В N -СЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается структура уединенных волн в горизонтальном канале ($z(x) = 0$) в рамках однородных уравнений (1.1), (1.2), (1.3) с одним дисперсионным слоем ($\beta^+ = 0, \beta^- = 1, f_i = 0 (i = 1, \dots, n)$). Так как рассматриваемая система допускает преобразование Галилея, то достаточно построить стационарные решения, переходящие в заданное течение со сдвигом скорости

$$h_i(x) \rightarrow h_i^0 = \text{const}, \quad u_i(x) \rightarrow u_i^0 = \text{const}, \quad u'_n(x) \rightarrow 0, \quad u''_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty$$

Имеется следующий набор интегралов уравнений (1.1), (1.2), (1.3)

$$\begin{aligned} Q_i &= h_i u_i = h_i^0 u_i^0, \quad (i = 1, \dots, n), \\ J_i &= \frac{1}{2} u_i^2 + p_i = \frac{1}{2} (u_i^0)^2 + p_i^0, \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ p_i^0 &= \sum_{j=2}^{i-1} b_j h_j^0 + b_i \sum_{j=i}^n h_j^0, \quad (i = 2, \dots, n), \\ J_n &= \frac{1}{2} u_n^2 + p_n + \frac{1}{3} u_n^2 \left(h_n h_n'' - \left(\frac{1}{2} h_n' \right)^2 \right) = \frac{1}{2} (u_n^0)^2 + p_n^0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

(штрих означает дифференцирование по x). Из (2.1) после алгебраических преобразований все искоемые функции выражаются через неизвестную функцию $h_n(x)$ [16] и система уравнений,

описывающих структуру солитона в стратифицированной жидкости со сдвигом скорости, сводится к уравнению второго порядка

$$\frac{1}{6}Q_n^2(h_n^{-1}(h_n')^2)' = \frac{1}{3}\frac{Q_n^2}{h_n^2}\left(h_n h_n'' - \frac{1}{2}(h_n')^2\right)h_n' = \left(J_n - \frac{1}{2}u_n^2 - p_n\right)h_n' = \Phi(h_n)h_n', \quad (2.2)$$

которое может быть проинтегрировано:

$$\frac{1}{6}Q_n^2(h_n')^2 = h_n\Psi(h_n), \quad \Psi(h_n) = \int_{h_n^0}^{h_n} \Phi(s)ds. \quad (2.3)$$

Таким образом, построение профиля уединенной волны сводится к квадратурам. Для определения скорости волны D достаточно перейти в исходную систему координат. Если солитон распространяется по покоящейся жидкости, то скорость волны связана с глобальным числом Фруда $Fr = \frac{D}{\sqrt{bH}}$. Наличие сдвига скорости в невозмущенном потоке существенно влияет на скорость распространения солитона.

3. ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ДЛИННОМ КАНАЛЕ

Одним из механизмов возбуждения интенсивных внутренних волн в больших озерах являются внутренние сейши [18]. Формирование внутренних гидравлических прыжков, ондулированных боров и пакетов короткопериодных внутренних волн на гребне существенно более длинных волн определяется совместным действием эффектов нелинейности, дисперсии и турбулентного перемешивания. В рамках модели (1.1), (1.2), (1.3) и ее подмоделей могут быть воспроизведены генерация и распространение волновых боров и уединенных волн без их обрушения. В следующих разделах будут рассмотрены два примера формирования и распространения внутренних волн: а) численный анализ развития волнового пакета при сейшевом колебании внутренней границы раздела в двухслойной жидкости и сравнение численного решения с лабораторным экспериментом; б) генерация уединенной волны первой моды в трехслойном течении и сравнение параметров солитона с натурными данными, полученными в 2022 г. в Телецком озере.

4. ВОЛНОВОЙ БОР В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В работе [19] была проведена серия лабораторных экспериментов по генерации интенсивных коротких волн на внутренней границе раздела при сейшевых колебаниях двухслойной жидкости в длинном канале. Результаты эксперимента объясняют механизм формирования пакетов уединенных волн при возбуждении внутренних сейш в узких озерах и фьордах. Лабораторный эксперимент проводился в лотке под крышкой длиной 600 см, глубиной 29 см и шириной 30 см, который мог отклоняться на заданный угол от горизонтального положения. В лотке создавалась устойчивая двухслойная стратификация с заданной плавучестью $b = (\rho_2 - \rho_1)g/\rho_1 > 0$, $b = 20 \pm 2$ см/с². Толщина прослойки между слоями в ходе последовательного проведения нескольких экспериментов возрастала от 1 до 2 см, что немного уменьшало среднюю плавучесть стратифицированной жидкости. Для численного расчета течения в указанном канале применим модель (1.1), (1.2), (1.3) при $n = 2$. При этом нижний дисперсионный слой отсутствует ($\beta^- = 0$) и негидростатичность распределения давления учитывается только в верхнем слое.

На рис. 1 показаны в результате сравнения численного расчета эволюции волн с экспериментальными данными (сплошная линия – эксперимент, пунктирная – расчет) при начальном наклоне границы раздела слоев $\Theta = 0.5^\circ$ и различной относительной толщине нижнего слоя (рис. 1а: $h_2^0/H = 0.4$, $b = 20$ см/с²; рис. 1б: $h_2^0/H = 0.2$, $b = 18.5$ см/с²). Отклонение положения границы раздела от среднего значения толщины нижнего слоя ζ измерялось в центре канала (данные в [19, Fig. 6b] соответствуют рис. 1а, а данные, приведенные в [19, Fig. 6d], использованы на рис. 1б). Начальное положение границы раздела (пунктирная линия) и рассчитанный на момент времени $t = 400$ с профиль волны, соответствующий второму эксперименту (рис. 1б), изображены на рис. 2.

Заметим, что по сравнению с первым случаем (рис. 1а), значение плавучести несколько уменьшено, так как толщина прослойки в приведенной серии экспериментов возросла и сред-

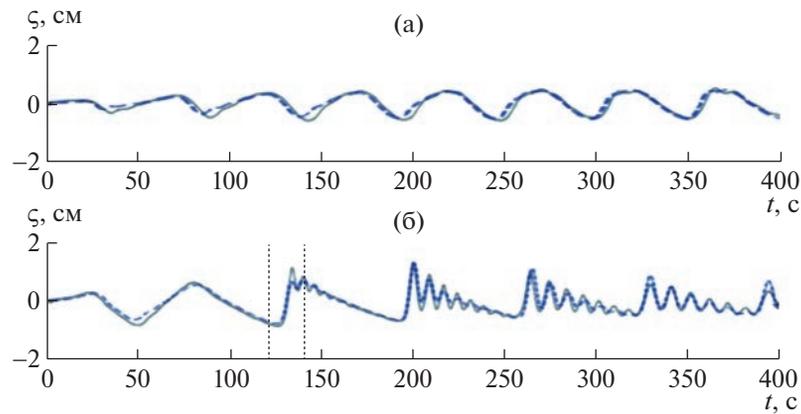


Рис. 1. Сравнение численного решения (1.1), (1.2), (1.3) с лабораторным экспериментом [19] при $\Theta = 0.5^\circ$: сплошная линия – эксперимент, пунктирная линия – расчет; а – $h_2^0/H = 0.4$, $b = 20 \text{ см}/\text{с}^2$; б – $h_2^0/H = 0.2$, $b = 18.5 \text{ см}/\text{с}^2$.

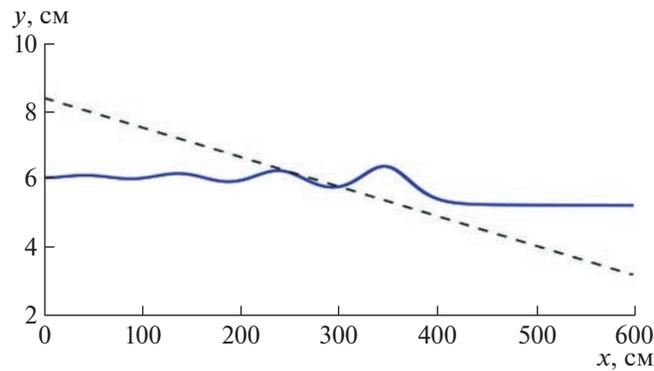


Рис. 2. Профиль внутренней волны: сплошная линия – численный расчет по модели (1.1), (1.2), (1.3), пунктирная линия – начальное положение пикноклина, $n = 2$, $t = 400 \text{ с}$.

няя плавучесть уменьшилась. Из рис. 1 можно заключить, что численная модель адекватно передает фазовые и амплитудные характеристики нестационарного волнового процесса, наблюдаемого в эксперименте. Кроме того, из экспериментальных наблюдений и численных расчетов следует, что при сейшевых колебаниях в двухслойной жидкости в длинном канале формирование короткопериодного пакета внутренних волн на гребне более длинной волны существенно зависит от относительной толщины одного из слоев. Заметим также, что в приближении Буссинеска модель (1.1), (1.2) допускает преобразование границы раздела и параметров течения, симметричное относительно средней линии горизонтального канала. Поэтому картину волн, аналогичную изображенной на рис. 1б, можно получить и для приповерхностного слоя заменой направления оси ординат на противоположное (и соответствующую замену знака плавучести). Таким образом, приведенные численные расчеты показывают, что в глубоких узких озерах при наличии выраженного приповерхностного пикноклина внутренние сейши могут приводить к генерации интенсивных внутренних волн.

5. ГЕНЕРАЦИЯ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Другим способом генерации пакетов нелинейных внутренних волн является взаимодействие течений с топографией. При этом резкая деформация пикноклина приводит к задаче о распаде разрыва и генерации цуга уединенных волн.

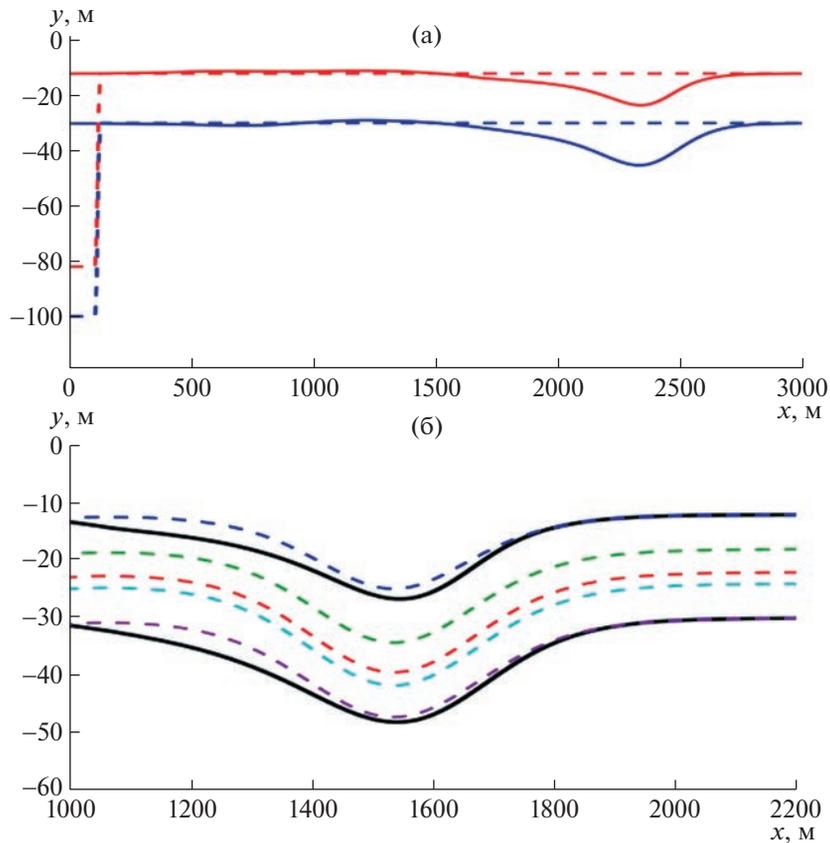


Рис. 3. а – профиль внутренней волны (сплошная линия – численный расчет по модели (1.1), (1.2), (1.3), пунктирная линия – начальное положение пикноклина, $n = 3$, $t = 24$ мин); б – уединенная внутренняя волна, сравнение нестационарного расчета задачи (1.1), (1.2), (1.3), (5.1) (жирные линии) со стационарным решением (1.1), (1.2), (1.3), (5.2) (пунктирные линии).

На рис. 3а представлено численное решение задачи о распаде произвольного разрыва (задачи о водообмене в шлюзе) для геометрии и стратификации, характерной для Телецкого озера в летний период. В рамках трехслойной модели (1.1), (1.2) внутренние границы раздела определяют положение основного термоклина ($H = 300$ м, $h_1^0 = 12$ м, $h_2^0 = 18$ м, $b_1 = 0$, $b_2 = 0.007$ м/с², $b_3 = 0.014$ м/с², $u_i^0 = 0$, $i = 1, 2, 3$).

В качестве начального возмущения рассматривается деформация термоклина ($h_1^- = 82$ м, $h_2^- = 100$ м, $b_i^- = b_i^0$, $u_i^- = u_i^0$, $i = 1, 2, 3$) на участке $0 \leq x \leq L_1$, $L_1 = 63$ м (рис. 3а, пунктирная линия). Численное решение задачи о распаде произвольного разрыва в бассейне, ограниченном вертикальными стенками ($0 \leq x \leq L_0$, $L_0 = 3000$ м) со следующими начальными данными

$$(h_i(0, x), u_i(0, x)) = \begin{cases} h_i^-(x), u_i^-(x), & 0 < x < L_1 \\ h_i^0(x), u_i^0(x), & L_1 < x < L_0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

представлено на рис. 3а сплошными линиями на момент времени $t_1 = 24$ мин. Данные (5.1) выбраны так, чтобы сформировавшаяся при $t = t_1$ уединенная волна соответствовала внешним границам термоклина, зафиксированных в натурных наблюдениях на Телецком озере и описанных ниже. На рис. 3б пунктирными линиями представлена структура уединенной волны, построенной по формуле (2.3). Каждая линия изображает соответствующую изотерму в волне. Движение волны рассчитано при следующих фоновых параметрах

$$H = 300 \text{ м}, \quad h_1^0 = 12 \text{ м}, \quad h_2^0 = 2 \text{ м}, \quad h_3^0 = 6 \text{ м}, \quad h_4^0 = 4 \text{ м}, \quad h_5^0 = 6 \text{ м}, \quad b = 0.014 \text{ м/с}^2, \quad (5.2)$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 0.002 \text{ м/с}^2, \quad b_3 = 0.008 \text{ м/с}^2, \quad b_4 = 0.01 \text{ м/с}^2, \quad b_5 = 0.012 \text{ м/с}^2.$$

Начальные скорости в слоях распределены линейно от 0.125 м/с^2 в верхнем слое до нулевого значения в нижнем. Для выбранного значения параметров имеем $Fr = 0.305$ и скорость волны $D = 0.625 \text{ м/с}$. Сплошными линиями обозначено решение нестационарной задачи о распаде произвольного разрыва в рамках трехслойной модели, приведенное на рис. За при $t_1 = 24 \text{ мин}$. Из рисунка видно, что нестационарное трехслойное решение хорошо аппроксимирует внешние границы на переднем фронте уединенной волны. Более медленное затухание возмущения на подветренном склоне волны в нестационарном расчете является характерным признаком взаимодействия волны с неустановившимся течением за его фронтом.

6. НАТУРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В этом разделе приведены данные наблюдений внутренних волн, зарегистрированных в 2022 г. во время проведения полевых исследований в шельфовой зоне Японского моря и в акватории Телецкого озера. Условия проведения натуральных экспериментов, анализ полученных результатов и характеристика источников внутренних волн будут представлены в других работах. Здесь только приведены два фрагмента измерений и дано краткое описание места и сроков их проведения. Данные представлены для сравнения параметров приповерхностных и придонных внутренних волн в различных водоемах, а также для оценки возможности их математического описания в рамках одной и той же модели многослойной мелкой воды.

6.1. Внутренние волны на шельфе Японского моря

Исследования внутренних волн в шельфовой зоне Японского моря проводятся на гидрофизическом полигоне ТОИ ДВО РАН в течение ряда лет. Сроки и методика натуральных измерений параметров придонных внутренних волн, обусловленных температурной стратификацией поверхностного слоя в летний и осенний периоды, описаны в [15, 16, 20]. Основой измерительного комплекса является распределенная система донных станций, предназначенных для непрерывного измерения вертикального профиля температуры и расположенных на глубинах от 20 до 60 м. Автономные станции снабжены цепочками термисторов, расположенных вертикально с шагом 1–1.5 м от дна до поверхности и передающих в станцию цифровую информацию о температуре на фиксированных горизонтах с частотой, позволяющей зафиксировать короткопериодные внутренние волны. Пример измерений волнового пакета в октябре 2022 г., зафиксированного на станции, расположенной на глубине 40 м, представлен на рис. 4а. Тонкие линии показывают температуру (в °C) на фиксированных горизонтах, расположенных через 1 м от дна (36 датчиков температуры). Указанное время в часах отсчитывается с момента синхронизации всей системы донных станций. Представленная информация удобна для обнаружения и классификации проходящих в окрестности станции внутренних волн. Однако для сравнения с результатами математического моделирования требуется представить волновой процесс в виде возмущения фиксированного набора изотерм.

На рис. 4б пунктирными линиями представлены соответствующие изотермы с шагом 2°C . Сплошные линии – расчет стационарного волнового пакета по модели (1.1), (1.2). Для бегущих волн эти уравнения сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных [14, 16]. Поэтому изображенная на рис. 4б структура волнового бора находится как решение задачи Коши с начальными данными, определяемыми положением изотерм на левой границе рисунка (перепад плавучести в соседних слоях постоянный, $b_n = 0.016 \text{ м/с}$, $n = 5$). В качестве начального распределения скорости используется небольшой сдвиг скорости во внешних слоях (0.1 м/с), распределенный линейно по внутренним слоям. Заметим, что наличие начального градиента скорости существенно влияет на скорость бегущей волны, но при этом волновая структура меняется незначительно по сравнению с волной, бегущей по покою. Сравнение положения расчетных и зарегистрированных изотерм на рис. 4б показывает соответствие амплитудно-фазовых характеристик волновых пакетов. Таким образом, стационарные решения многослойной модели (1.1), (1.2) могут быть использованы для определения структуры придонных волновых пакетов внутренних волн большой интенсивности.

6.2. Приповерхностные внутренние волны на Телецком озере

В августе 2022 г. на Телецком озере была проведена комплексная экспедиция ИВЭП СО РАН. В перечень ее научных задач входило исследование стратификации температуры до глубин 60 м

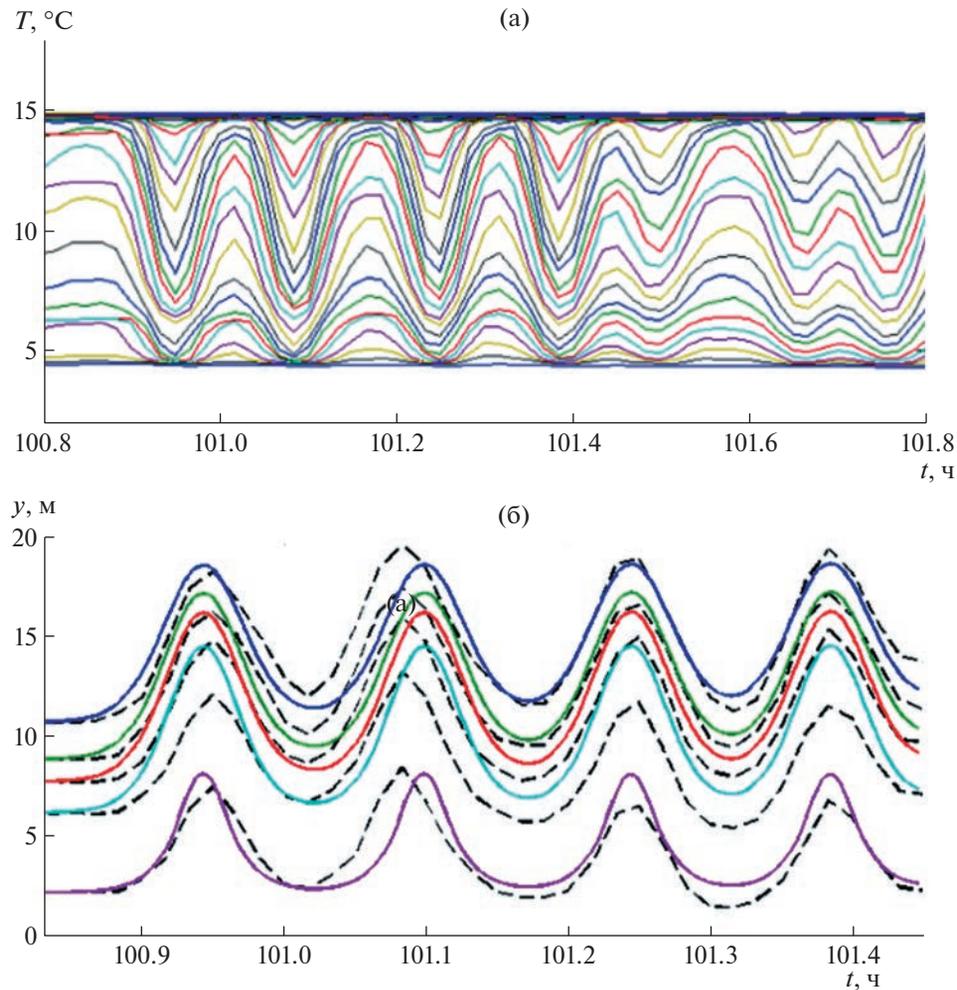


Рис. 4. Структура пакета внутренних волн: а – зависимость температуры на различных горизонтах от времени, зафиксированная на шельфе Японского моря (глубина 40 м) в октябре 2022 г.; б – сплошные линии – расчет пакета бегущих волн по модели (1.1), (1.2), пунктир – изотермы с шагом 2°C , рассчитанные по экспериментальным данным.

и фиксация ее временной динамики на отдельных участках акватории. Экспедиция проводилась на теплоходе-лаборатории ИВЭП СО РАН. Температурные измерения проводились с борта судна в центральной части основной акватории озера, а также в заливах Кыгинский и Камгинский. Для измерения вертикального распределения температуры в приповерхностном слое использован многодатчиковый цифровой измеритель температуры типа ДИТЦ-60-1 с длиной шлейфа 60 м и интервалом расположения цифровых датчиков 1 м. Тип датчиков – DS1840 – соответствует датчикам, использовавшимся в термококсах при проведении натуральных экспериментов в шельфовой зоне Японского моря. Измерения проводились в течение часа в глубоководных частях озера (200–300 м) с дрейфующего судна.

Временной интервал считывания информации со всех датчиков устанавливался программно и был равен 30 с. Таким образом, для каждой станции был получен массив данных порядка 120 реализаций, что позволило фиксировать не только изменение температуры по глубине, но и определить параметры внутренних волн на этом участке.

По результатам обработки данных для станций № 5, 6 и 8 с координатами: $51^{\circ}34'13''$ с.ш., $87^{\circ}39'57''$ в.д.; $51^{\circ}38'07''$ с.ш., $87^{\circ}39'47''$ в.д.; и $51^{\circ}47'09''$ с.ш., $87^{\circ}41'52''$ в.д., соответственно, на горизонтах от 15 до 50 м были зафиксированы наибольшие изменения температуры (от 4 до 6°C) при прохождении нелинейных внутренних волн с периодом от 15 до 35 мин.

На рис. 5а показан фрагмент измерений вертикального распределения температуры на станции № 6 (глубина 300 м), зафиксировавший уединенную волну понижения в верхнем 30-ти мет-

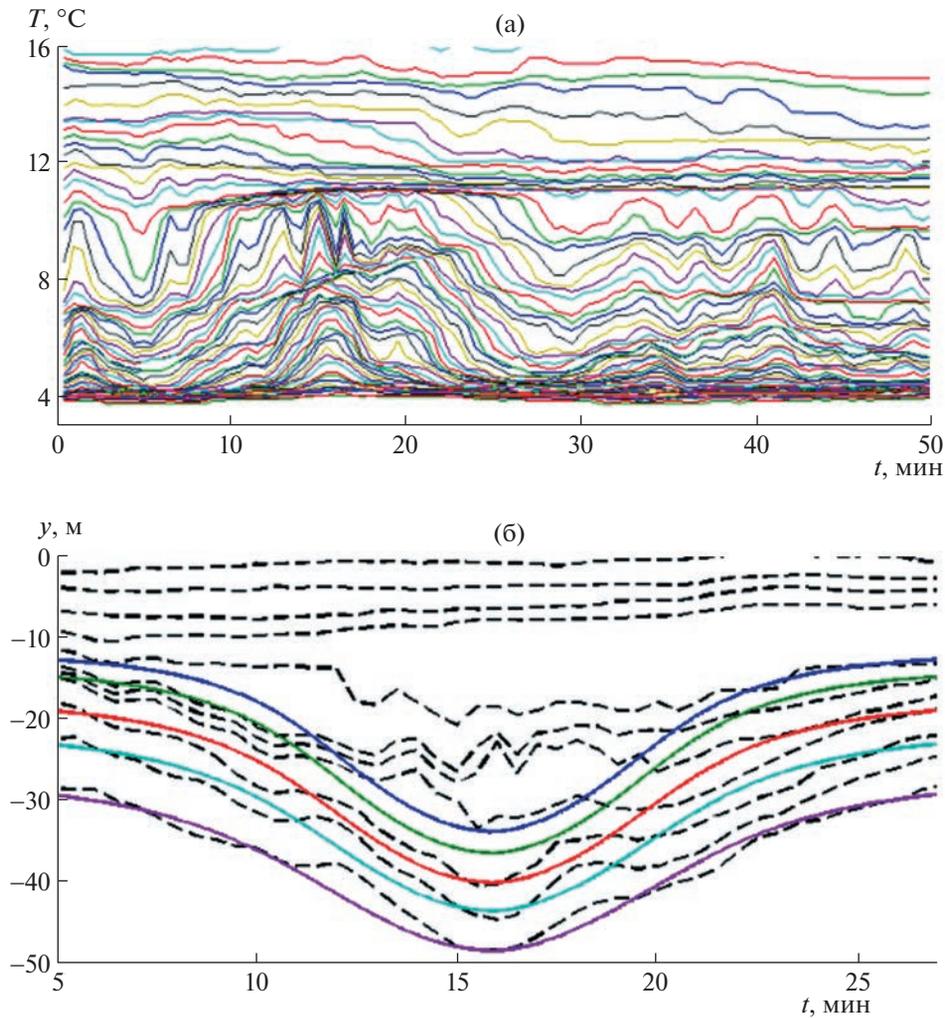


Рис. 5. Структура уединенной внутренней волны, зарегистрированной на станции № 6: а) – зависимость температуры на различных горизонтах от времени, полученная на станции; б) – сплошные линии – расчет уединенной волны по модели (2.1), (2.2), (2.3), (5.2), пунктир – поведение изотерм, построенное по экспериментальным данным.

ровом слое. Здесь тонкими линиями представлена зависимость температуры от времени на фиксированном расстоянии от поверхности озера.

На рис. 5б приведено сравнение решения (2.1), (2.2), (2.3), (5.2), описывающего уединенную волну в многослойной жидкости, с натурными данными. Для заданной скорости волны $D = 0.625$ м/с деформация рассчитанных изотерм может быть представлена как функция времени (пунктирные линии). Тонкими сплошными линиями изображено положение изотерм (с шагом 1°C), зарегистрированных с помощью термокосы. Из рисунка видно, что возмущение этих изотерм в основном термоклине соответствует численному решению. Заметим, что в построенной уединенной волне имеется однозначная связь между скоростью распространения волны и ее амплитудой. Если начальное положение изотерм в невозмущенном течении может быть найдено из полученных натуральных данных, то скорость жидкости в слоях в невозмущенном состоянии неизвестна, так как измерение горизонтальных компонент скорости не проводилось. Как было отмечено выше, при небольшом сдвиге скорости в слоях профиль уединенной волны слабо отличается от волны, распространяющейся по покою, однако скорость волны существенно зависит от разности скоростей в слоях фонового течения. Поэтому сравнение скорости распространения зарегистрированной волны со скоростью распространения солитона по покою дает дополнительную (неявную) информацию о наличии сдвигового течения в реальных условиях. Так, выбор

начального сдвига скорости, приведенный в (5.2), позволяет согласовать положение изотерм и время прохождения волны в расчете и натурных данных.

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как отмечено выше, в приближении Буссинеска эволюция придонных и приповерхностных волн описывается одними и теми же уравнениями движения. Поэтому математические модели, разработанные для описания внутренних волн в шельфовой зоне моря, могут применяться и для расчета структуры приповерхностных внутренних волн в глубоких озерах. Однако класс уравнений, пригодных для моделирования распространения бегущих волн большой амплитуды в глубоких озерах и, следовательно, в придонных слоях малой толщины, существенно ограничен (под волнами большой амплитуды подразумевается волновое движение, амплитуда которого многократно превышает начальную толщину слоя, по которому волна распространяется). В тонком “активном” слое негидростатическими эффектами можно пренебречь, так как скорость частиц в этом слое близка к скорости фронта волны. Во внешнем же слое, толщина которого существенно превышает толщину “активного” слоя, длина волны может оказаться сравнимой с толщиной этого слоя и длинноволновое приближение перестает быть эффективным. Одним из аспектов данного исследования является апробация многослойной модели мелкой воды на конкретных волновых пакетах большой амплитуды, зафиксированных в различных водоемах. Подробная информация о структуре вертикального распределения температуры в поверхностном слое при прохождении внутренней волны, полученная в натурном эксперименте, и возможность учета в модели (1.1), (1.2) начального сдвига скорости в невозмущенных слоях позволили оценить скорость волны и сравнить поведение изотерм с соответствующим решением стационарной и нестационарной моделей уединенной волны.

Проблема генерации короткопериодных внутренних волн на фронте длинноволнового возмущения рассмотрена в рамках двухслойной и трехслойной моделей. Двухслойная модель иллюстрирует механизм генерации коротких волн в сейшевых колебаниях внутренней границы раздела в длинном канале. Сравнение с данными лабораторного эксперимента [19] демонстрирует процесс возрастания амплитуды волнового пакета на фронте длинной волны при уменьшении относительной толщины “активного” слоя (рис. 1б). Другой механизм генерации внутренней уединенной волны в результате взаимодействия нелинейных возмущений проиллюстрирован на рис. 3 для данных, характерных для Телецкого озера.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-71-20039), в рамках проекта ИВЭП СО РАН 0306-2021-0001 и в рамках государственного задания ТОИ ДВО РАН АААА-А20-120021990003-3. Авторы выражают благодарность к.г.н. И.М. Фроленкову, инженеру-электроннику В.А. Соловьеву и ведущему инженеру А.А. Коломейцеву за содействие и помощь в проведении экспедиционных работ и в обработке данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Helfrich K.R., Melville W.K.* Long nonlinear internal waves // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 38. P. 395–425. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.38.050304.092129>
2. *Arneborg L., Liljebladh B.* The Internal Seiches in Gullmar Fjord. Part I: Dynamics // *J. Phys. Oceanogr.* 2001. V. 31. P. 2549–2566. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(2001\)031<2549:TISIGF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(2001)031<2549:TISIGF>2.0.CO;2)
3. *Hutter C., Yongqi Wang, Chubarenko I.* Observation and Analysis of Internal Seiches in the Southern Basin of Lake of Lugano. In book: *Physics of Lakes. V. 2. Lakes as Oscillators. Chapter 18.* Springer-Verlag. 2011. https://doi.org/10.1007/978-3-642-19112-1_18
4. *Lemmin U., Mortimer C.H., Bauerle E.* Internal Seiche dynamics in Lake Geneva // *Limnol. Oceanogr.* 2005. V. 50. № 1. P. 207–216. <https://doi.org/10.4319/lo.2005.50.1.0207>
5. *Bourgault D., Kelley D.E., Galbraith P.S.* Interfacial solitary wave run-up in the St. Lawrence Estuary // *J. Marine Res.* 2005. V. 63. P. 1001–1015. <https://doi.org/10.1357/002224005775247599>
6. *Klymak M., Moum J.N.* Internal solitary waves of elevation advancing on a shoaling shelf // *Geophys. Res. Lett.* 2003. V. 30. № 20. P. 2045. <https://doi.org/10.1029/2003GL017706>

7. *Серебряный А.Н.* Проявление свойств солитонов во внутренних волнах на шельфе // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 2. С. 244–252.
8. *Scotti A., Pineda J.* Observation of the very large and steep internal waves of elevation near the Massachusetts coast // Geophys. Res. Lett. 2004. V. 31. L22307. <https://doi.org/10.1029/2004GL021052>
9. *Wallace B.C., Wilkinson D.L.* Run-up of internal waves on a gentle slope, // J. Fluid Mech. 1988. V. 191. P. 419–442. <https://doi.org/10.1017/S0022112088001636>
10. *Sutherland B.R., Barrett K.J., Ivey G.N.* Shoaling internal solitary waves // J. Geoph. Res. Oceans. 2013. V. 118. P. 4111–4124. <https://doi.org/10.1002/jgrc.20291>
11. *Grimshaw R., Talipova T., Pelinovsky E., Kurkina O.* Internal solitary waves: propagation, deformation and disintegration // Nonlin. Proces. Geoph. 2010. V. 17. Is. 6. P. 633–649. <https://doi.org/10.5194/npg-17-633-2010>
12. *Lamb K.* Shoaling solitary internal waves: on a criterion for the formation of waves with trapped cores // J. Fluid Mech. 2003. V. 478. P. 81–100. <https://doi.org/10.1017/S0022112002003269>
13. *Ляпидевский В.Ю., Гаврилов Н.В.* Large Internal Solitary Waves in Shallow Waters. 2018. P. 87–108. In book: The Ocean in Motion: Circulation, Waves, Polar Oceanography. Editors: M.G. Velarde, R.Yu. Tarakanov, A.V. Marchenko. Springer Oceanography. https://doi.org/10.1007/978-3-319-71934-4_9
14. *Кукарин В.Ф., Ляпидевский В.Ю., Храпченков Ф.Ф., Ярощук И.О.* Нелинейные внутренние волны в шельфовой зоне моря // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 3. С. 38–47. <https://doi.org/10.1134/S0568528119030083>
15. *Ляпидевский В.Ю., Храпченков Ф.Ф., Чесноков А.А., Ярощук И.О.* Моделирование нестационарных гидрофизических процессов на шельфе Японского моря // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 1. С. 57–68. <https://doi.org/10.31857/S0568528122010066>
16. *Ляпидевский В.Ю., Турбин М.В., Храпченков Ф.Ф., Кукарин В.Ф.* Нелинейные внутренние волны в многослойной мелкой воде // ПМТФ. 2020. Т. 61. № 1. С. 53–62. <https://doi.org/10.15372/PMTF20200105>
17. *Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А., Ермишина В.Е.* Квазилинейные уравнения динамики уединенных внутренних волн в многослойной мелкой воде // ПМТФ. 2021. Т. 62. № 4. С. 34–45. <https://doi.org/10.15372/PMTF20210404>
18. *Dorostkar A., Boegman L.* Internal hydraulic jumps in a long narrow lake // Limnology and oceanography. 2013. V. 58. № 1. P. 153–172. <https://doi.org/10.4319/lo.2013.58.1.0153>
19. *Horn D.A., Imberger J., Ivey G.N.* The degeneration of large-scale interfacial gravity waves in lakes // J. Fluid Mech. 2001. V. 434. P. 181–207. <https://doi.org/10.1017/S0022112001003536>
20. *Леонтьев А.П., Ярощук И.О., Смирнов С.В., Кошелева А.В., Пивоваров А.А., Самченко А.Н., Швырев А.Н.* Пространственно-распределенный измерительный комплекс для мониторинга гидрофизических процессов на океаническом шельфе // Приборы и техника эксперимента. 2017. № 1. С. 128–135. <https://doi.org/10.7868/S0032816216060227>

УДК 533.6

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ЧИСЛА ШМИДТА И ПРАНДТЛЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА СТЕНКЕ С ЗАВЕСНЫМ ОХЛАЖДЕНИЕМ ПРИ ВДУВЕ ИНОРОДНОГО ГАЗА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ ВСТАВКУ

© 2023 г. В. Г. Лущик^{a,*}, М. С. Макарова^{a,**}, С. С. Попович^{a,***}

^aМГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*E-mail: vgl_41@mail.ru

**E-mail: april27_86@mail.ru

***E-mail: pss@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 24.05.2023 г.

После доработки 04.07.2023 г.

Принята к публикации 01.08.2023 г.

С использованием трехпараметрической RANS-модели турбулентности, дополненной уравнениями переноса для турбулентных потоков тепла и массы, проведено численное исследование изменения турбулентных чисел Шмидта и Прандтля в пограничном слое на стенке с завесным охлаждением при вдуве гелия в поток ксенона через пористую вставку. Проведено сравнение полученных результатов с расчетными данными для постоянных значений турбулентных чисел Шмидта и Прандтля.

Ключевые слова: RANS-модель турбулентности, уравнения переноса для турбулентных потоков тепла и массы, вдув газа, турбулентное число Прандтля, турбулентное число Шмидта

DOI: 10.31857/S1024708423600501, **EDN:** CQYHLE

Экспериментальные данные по турбулентному числу Прандтля Pr_t проанализированы в обзоре [1] для развитого течения в круглой трубе, плоском канале и для двумерного пограничного слоя с постоянными физическими свойствами. В [1] показано, что в общем случае турбулентное число Прандтля является функцией молекулярного числа Прандтля Pr , числа Рейнольдса Re и расстояния от стенки y^+ .

Для газовых смесей водорода, гелия, аргона, ксенона с молекулярным числом Прандтля $0.18 < Pr < 0.7$ при числах Рейнольдса $3 \times 10^4 < Re < 1 \times 10^5$ в [2] рассмотрен ряд моделей для установления зависимости $Pr_t(y^+, Pr, Re)$. Анализ результатов расчетных исследований величины Pr_t показывает, что они носят противоречивый характер, особенно в пристеночной области при $y^+ < 10$. Путем прямого численного моделирования (DNS), проведенного для турбулентного течения в канале и трубе с непроницаемыми стенками в работах [3–5], установлено, что величина турбулентного числа Прандтля при низких числах Рейнольдса для $Pr \geq 0.2$ практически не зависит от значения молекулярного числа Прандтля. В [6] также путем DNS проведено численное моделирование турбулентного пограничного слоя на плоской пластине с транспирационным охлаждением.

Большой разброс значений Pr_t в экспериментах, приведенных в [7], по-видимому, объясняется невысокой точностью измерения входящих в выражение для турбулентного числа Прандтля (см. ниже) величин $\langle u'v' \rangle$ и $\langle v'T' \rangle$ и большой погрешностью при дифференцировании измеренных профилей скорости $\partial u/\partial y$ и температуры $\partial T/\partial y$ в широком диапазоне расстояний от стенки до оси трубы.

В [8] был проведен анализ более 20 измеренных профилей температуры в пристенных турбулентных течениях различных жидкостей (при $0.02 \leq Pr \leq 100$) при условии, что профили температуры имели достаточно широкий участок, хорошо описываемый логарифмической форму-

лой. Определенные в [8] по логарифмическому участку значения Pr_t , практически не зависят от Pr_t и группируются около среднего значения $Pr_t = 0.85$.

В [9, 10] с использованием дифференциальной RANS-модели турбулентности [11], дополненной уравнением переноса для турбулентного потока тепла [12], проведено численное исследование зависимости турбулентного числа Прандтля от молекулярного числа Прандтля, интенсивности вдува (отсоса) газа через проницаемую стенку и параметра ускорения (торможения) набегающего потока. В качестве газовых теплоносителей рассмотрены воздух и смеси гелия с ксеноном и с аргоном, а в качестве жидкостных – ртуть, вода и трансформаторное масло. Полученные результаты расчетов согласуются с имеющимися экспериментальными данными для турбулентного числа Прандтля и величинами, входящими в его определение.

В ряде работ (см., например, [13–15]) выполнены расчеты в предположении постоянства турбулентных чисел Прандтля и Шмидта. Так, в [14] для сверхзвуковой пристеночной струи в спутном сверхзвуковом потоке удовлетворительное согласие расчета с экспериментом [16] получено для значений турбулентных чисел Прандтля $Pr_t = 0.85$ и Шмидта $Sc_t = 0.7$.

Следует отметить, что экспериментальные данные для турбулентного числа Шмидта, ввиду трудностей измерения корреляций $\langle v' C' \rangle$, практически отсутствуют. Расчетных исследований величины Sc_t , немного (см., например, обзор в [17]). В [17] также путем прямого численного моделирования (DNS), проведенного для турбулентного пограничного слоя на стенке с щелевым завесным охлаждением, получено распределение турбулентных чисел Прандтля и Шмидта в области завесы. Показано, что турбулентные числа Прандтля и Шмидта примерно равны в области смещения щелевой завесы с набегающим сверхзвуковым потоком, оба не являются постоянными и уменьшаются от значений ~ 1.2 на входе до ~ 0.8 дальше по течению. Поведение Pr_t и Sc_t сопоставимо в основной части области смещения, а значительные градиенты чисел Pr_t и Sc_t имеют место вблизи стенки и внешней границы набегающего потока. Численное исследование [13] установило, что для точного прогнозирования характеристик завесного охлаждения предположение о постоянных турбулентных числах Прандтля или Шмидта является недостаточным.

В работе [18] оценены адекватность и точность предположения о постоянном числе Шмидта при прогнозировании турбулентных скалярных полей в поперечных потоках струй. Круглая струя, впрыскиваемая в замкнутый поперечный поток в прямоугольном канале, была смоделирована с использованием усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса со стандартной $k-\epsilon$ моделью турбулентности. Установлено, что для наилучшего согласования расчетов с экспериментальными данными рекомендуется использовать значение турбулентного числа Шмидта $Sc_t = 0.2$.

Как отмечено в [19], применение RANS-модели к турбулентным течениям с переносом массы обычно предполагает использование гипотезы градиентной диффузии, которая требует определения турбулентного числа Шмидта Sc_t . Однако универсальное значение Sc_t не установлено, и в различных исследованиях использовались эмпирические значения. В [19] рассматриваются исследования, связанные с применением оптимальных значений Sc_t , имеющих отношение к атмосферному массообмену. Оптимальные значения Sc_t широко распространены в диапазоне 0.2–1.3, и конкретное выбранное значение оказывает существенное влияние на результаты прогнозирования. На основании результатов проведенного в [19] исследования, поскольку оптимальные значения Sc_t в значительной степени зависят от местных характеристик потока, рекомендуется определять Sc_t с учетом доминирующей структуры потока в каждом случае.

Таким образом, из рассмотрения упомянутых выше публикаций следует, что при проведении расчетов с использованием предположения о постоянстве турбулентных чисел Прандтля и Шмидта выбор их значений зависит от конкретной задачи, для которой проводится расчет.

Целью настоящей работы является демонстрация эволюции турбулентных чисел Прандтля и Шмидта в пограничном слое на стенке на примере переменных по длине граничных условий – с завесным охлаждением через пористую вставку при вдуве гелия в поток ксенона и сравнение полученных результатов с расчетными данными для постоянных значений турбулентных чисел Шмидта и Прандтля.

Отметим, что выбор задачи численного исследования обусловлен актуальностью тематики использования газовых смесей с низким значением молекулярного числа Прандтля при завесном охлаждении в эффективных теплообменных устройствах наземного и космического базирования.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ЧИСЕЛ ПРАНДТЛЯ И ШМИДТА

Уравнения неразрывности, движения, энергии и бинарной диффузии, описывающие дозвуковое безградиентное течение в пограничном слое на плоской пластине имеют вид [20]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \tau \right] \quad (1.2)$$

$$c_p \left(\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\eta}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} + \rho q_t \right) \quad (1.3)$$

$$\rho u \frac{\partial c}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\eta}{Sc} \frac{\partial c}{\partial y} + \rho j_i \right) \quad (1.4)$$

Здесь x – направление вдоль пластины, y – координата, отсчитываемая по нормали к пластине, u и v – компоненты скорости вдоль осей x и y , соответственно, T – термодинамическая температура газа, c – относительная массовая концентрация газа завесы (концентрация газа основного потока равна $1-c$), $\rho \tau = -\rho \langle u' v' \rangle$ – турбулентное трение, $\rho q_t = -\rho c_p \langle v' T' \rangle$ – турбулентный поток тепла, $\rho j_i = -\rho \langle v' c' \rangle$ – турбулентный поток массы, $Pr = \eta c_p / \lambda$, $Sc = \eta / \rho D$ – молекулярные числа Прандтля и Шмидта, соответственно, ρ – плотность, η – динамическая вязкость, c_p – изобарная теплоемкость, λ – теплопроводность, D – коэффициент бинарной диффузии газа.

Для величин $\rho \tau$, ρq_t и ρj_i обычно используются гипотезы вида

$$\rho \tau = -\rho \langle u' v' \rangle = \rho \varepsilon_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.5)$$

$$\rho q_t = c_p \frac{\rho \varepsilon_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.6)$$

$$\rho j_i = \frac{\rho \varepsilon_t}{Sc_t} \frac{\partial c}{\partial y} \quad (1.7)$$

Здесь ε_t – коэффициент турбулентного переноса количества движения (турбулентная вязкость), Pr_t и Sc_t – турбулентные числа Прандтля и Шмидта, соответственно, которые обычно принимаются равными и постоянными по толщине пограничного слоя.

Для определения величины турбулентной вязкости ε_t в инженерной практике широко используется гипотеза пути смешения Прандтля $\varepsilon_t = l^2 |\partial u / \partial y|$. Для пути смешения l в литературе (см., например в [21]) предложено большое количество эмпирических функций расстояния до стенки, подобранных для каждого конкретного эксперимента, расчет которого требуется провести.

В случае использования уравнений переноса для турбулентных потоков импульса $\rho \tau = -\rho \langle u' v' \rangle$, тепла $\rho q_t = -\rho c_p \langle v' T' \rangle$ и массы $\rho j_i = -\rho \langle v' c' \rangle$ турбулентные числа Прандтля и Шмидта могут быть рассчитаны по соотношениям вида

$$Pr_t = c_p \frac{\rho \tau \partial T / \partial y}{\rho q_t \partial u / \partial y} \quad (1.8)$$

$$Sc_t = \frac{\rho \tau \partial c / \partial y}{\rho j_i \partial u / \partial y} \quad (1.9)$$

2. МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ ТЕПЛА И МАССЫ

Для вычисления величины напряжения сдвига τ , входящей в определение турбулентных чисел Прандтля (1.8) и Шмидта (1.9), использована трехпараметрическая RANS-модель турбулентности [11], обобщенная на течение с теплообменом, в которой уравнения переноса записываются

ся для энергии турбулентности $E = 0.5 \sum \langle u_i'^2 \rangle$, величины напряжения сдвига $\tau = -\langle u'v' \rangle$ и предложенного А.Н. Колмогоровым параметра – квадрата частоты турбулентности $\omega = E/L^2$ ($L = \sqrt{E/\omega}$ – поперечный интегральный масштаб турбулентности)

$$\rho u \frac{\partial E}{\partial x} + \rho v \frac{\partial E}{\partial y} = -(c_0 \rho \sqrt{EL} + c_1 \eta) \frac{E}{L^2} + \rho \tau \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_E \frac{\partial E}{\partial y} \right) \quad (2.1)$$

$$\rho u \frac{\partial \tau}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \tau}{\partial y} = -(3c_0 \rho \sqrt{EL} + 9c_1 \eta) \frac{\tau}{L^2} + c_2 \rho E \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_\tau \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

$$\rho u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \omega}{\partial y} = -(2c_0 \rho \sqrt{EL} + 1.4c_1 \eta f_\omega) \frac{\omega}{L^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \left[\frac{\tau}{E} - 2c_3 \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \rho \omega \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.3)$$

Для вычисления величины q_t , входящей в определение турбулентного числа Прандтля (1.8), в [12] получено уравнение переноса для величины $q_t = -c_p \langle v' T' \rangle$

$$\rho u \frac{\partial q_t}{\partial x} + \rho v \frac{\partial q_t}{\partial y} = -[3c_0 \rho \sqrt{EL} + 9c_1 \eta f(\operatorname{Pr})] \frac{q_t}{L^2} + c_4 c_p \rho E \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_q \frac{\partial q_t}{\partial y} \right) \quad (2.4)$$

Полагая, согласно [22, 23], концентрацию, как и температуру, пассивной примесью, что весьма точно выполняется в случае массопереноса, для величины $j_t = -\langle v' c' \rangle$, входящей в определение турбулентного числа Шмидта (1.9), уравнение переноса может быть получено аналогично уравнению переноса для величины $q_t = -c_p \langle v' T' \rangle$ [12] и будет иметь вид

$$\rho u \frac{\partial j_t}{\partial x} + \rho v \frac{\partial j_t}{\partial y} = -[3c_0 \rho \sqrt{EL} + 9c_1 \eta f(\operatorname{Sc})] \frac{j_t}{L^2} + c_4 c_p \rho E \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_j \frac{\partial j_t}{\partial y} \right) \quad (2.5)$$

Значения констант в уравнениях (2.1)–(2.5) [9–12]

$$\begin{aligned} c_0 = 0.3; \quad c_1 = 5\pi/4; \quad c_2 = 0.2; \quad c_3 = 0.04; \quad c_4 = 0.222; \quad c_5 = 0.25; \quad a_E = a_\omega = 0.06 \\ a_\tau = a_q = a_j = 3a_E = 0.18; \quad \alpha_E = \alpha_\tau = 1; \quad \alpha_\omega = 1.4; \quad \alpha_q = f(\operatorname{Pr}); \quad \alpha_j = f(\operatorname{Sc}) \\ D_\varphi = a_\varphi \rho \sqrt{EL} + \alpha_\varphi \eta \quad (\varphi = E, \tau, \omega, q, j) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$f_\omega = 1 - \frac{1}{2c_1} \left(\frac{L \partial E}{E \partial y} \right)^2, \quad f(\operatorname{Pr}) = \frac{1 + c_5 \sqrt{\operatorname{Pr}} + 1/\sqrt{\operatorname{Pr}}}{2 \quad 1 + c_5 \sqrt{\operatorname{Pr}}}, \quad f(\operatorname{Sc}) = \frac{1 + c_5 \sqrt{\operatorname{Sc}} + 1/\sqrt{\operatorname{Sc}}}{2 \quad 1 + c_5 \sqrt{\operatorname{Sc}}}$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЕТА. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Расчет пограничного слоя на стенке с завесным охлаждением через пористую вставку при вдуве инородного газа выполнен с использованием уравнений (1.1)–(1.4) и (2.1)–(2.5) с константами (2.6) и граничными условиями на непроницаемой теплоизолированной стенке (3.1) и стенке со вдувом (3.2) [13]

$$y = 0: \quad u = 0, \quad E = \frac{\partial E}{\partial y} = \tau = q_t = j_t = 0$$

$$v_w = 0, \quad c_w = 0, \quad q_w = \left(c_p \frac{\eta}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = 0 \quad (3.1)$$

$$j_w = (\rho v)_w, \quad j_w(c_w - 1) = \left(\frac{\eta}{\operatorname{Sc}} \frac{\partial c}{\partial y} \right)_w, \quad j_w^o = j_w / (\rho u)_e \quad (3.2)$$

Здесь $j_w = (\rho v)_w$ – массовая скорость вдуваемого газа, T_w – температура стенки, T_j – температура вдуваемого газа, c_w – концентрация вдуваемого газа на стенке, q_w – тепловой поток в стенку. Граничное условие $\partial E / \partial y = 0$ позволяет определить величину $\omega_w(x)$, которая заранее неизвестна.

Граничные условия на внешней границе расчетной области ($y = h$), которая превосходит перемешивающую по длине толщину пограничного слоя $\delta(x)$, где $u = 0.99u_e$, имеют вид

$$u = u_e, \quad T = T_e, \quad c = 0, \quad E = E_e(x), \quad \omega = \omega_e, \quad \tau = q_t = j_t = 0 \quad (3.3)$$

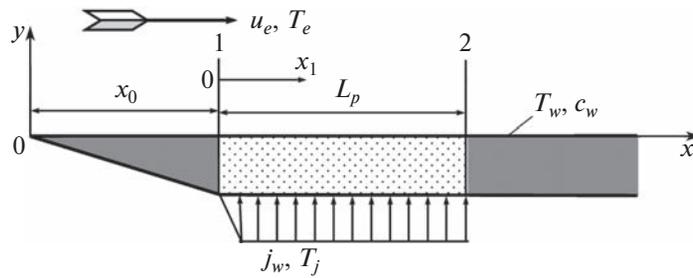


Рис. 1. Расчетная схема.

В (3.3) u_e, T_e – величины скорости, температуры для течения в набегающем потоке, а функции $E_e(x)$ и ω_e описывают вырождение турбулентности в этом течении. Индексы “w” и “e” в граничных условиях и далее относятся, соответственно, к условиям на стенке и в набегающем потоке.

В начальном ($x = 0$) сечении профиль скорости $u(y)$ определялся из автомодельного решения Блазиуса, профиль температуры $T(y)$ принимался подобным профилю скорости, профили функций $E(y), \tau(y), \omega(y)$, задавались как в [13].

Начальный масштаб турбулентности L_0 принимался таким ($Re_L = L_0(\rho u/\eta)_1 = 0.2 \times 10^5$), чтобы интенсивность турбулентности набегающего потока $e = \sqrt{E}/u_e$, уменьшающаяся вследствие вырождения ее на расчетной длине, не более, чем в два раза отличалась от начальной величины $e_0 = \sqrt{E_0}/u_1 = 0.03$.

Теплофизические свойства и числа Pr и Sc задавались в табличном виде в зависимости от давления, температуры и концентрации. Для смеси газов теплофизические свойства рассчитывались по полуэмпирическим формулам для многокомпонентной смеси газов, приведенным в [24], а плотность – по уравнению состояния идеального газа.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты проводились в следующей постановке (см. рис. 1). Пластина обтекалась набегающим потоком газа с постоянной скоростью $u_e = 20$ м/с при давлении $p_e = 2$ МПа. Параметрами задачи являются числа Рейнольдса по длине (рис. 1), отсчитываемые от входа $Re_x = x(\rho u/\eta)_e$, либо от начала участка со вдувом $Re_{x1} = x_1(\rho u/\eta)_e$ при значениях теплофизических параметров, определенных по температуре и давлению в набегающем потоке.

Участок пластины длиной $x_0 = 100$ мм полагался непроницаемым и теплоизолированным. Далее по потоку между сечениями 1 и 2 на длине $L_p = 50$ мм осуществлялся вдув, интенсивность которого $j_w^0 = j_w/(\rho u)_e$ линейно нарастала на небольшой длине и далее оставалась постоянной по длине проницаемой пластины и равной величине $j_w^0 = 0.001$. Область газовой завесы находилась за сечением 2 ($Re_x > 1.5 \times 10^6$), где пластина полагалась непроницаемой и теплоизолированной.

Длина входного участка x_0 (рис. 1) была выбрана так, что начало вдува находилось за областью перехода в пограничном слое от ламинарного режима течения к турбулентному ($Re_x > 10^6$).

В качестве газа набегающего потока рассматривались ксенон (Xe) при температуре $T_e = 1000$ К, а вдуваемого газа – гелий (He) при температуре $T_j = 300$ К. Молекулярные числа Шмидта Sc и Прандтля Pr для смеси гелий-ксенон в зависимости от массовой концентрации гелия s приведены на рис. 2.

Характер изменения режима течения по длине пластины иллюстрирует рис. 3, где представлена расчетная зависимость коэффициента трения c_f от числа Рейнольдса Re_x .

Как видно из рис. 3, расчетная зависимость (линия 1) при $Re_x < 10^5$ близка к закону Блазиуса [25] $c_f = 0.664 \cdot Re_x^{-1/2}$ (линия 2) для ламинарного режима течения, а при $Re_x > 2 \times 10^5$ (за исключением области вдува $10^6 < Re_x < 1.5 \times 10^6$), где коэффициент трения существенно снижается, близка к зависимости [26] $c_f = 0.0567 \cdot Re_x^{-1/5}$ (линия 3) для турбулентного режима течения. Точ-

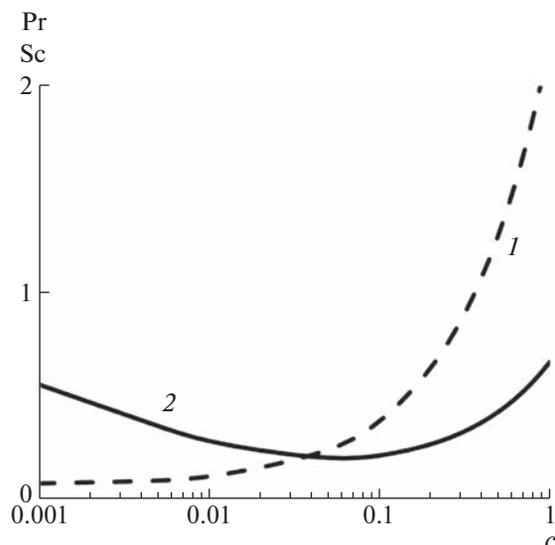


Рис. 2. Молекулярные числа Шмидта Sc (1) и Прандтля Pr (2) в зависимости от массовой концентрации гелия c в смеси гелий-ксенон.

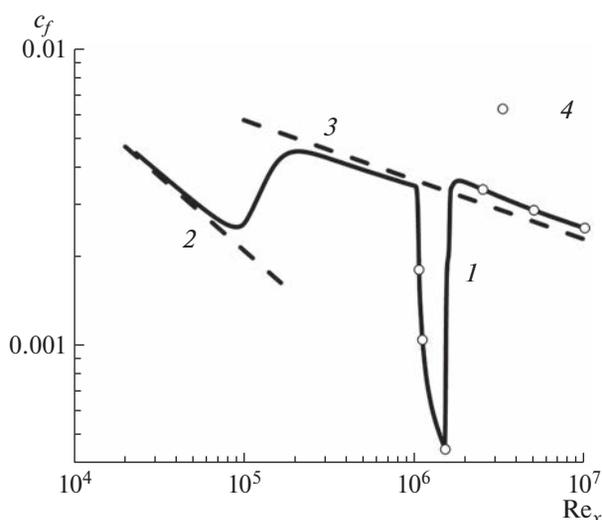


Рис. 3. Изменение коэффициента трения c_f по длине пластины Re_x ; 1 – результаты расчета; 2 – ламинарный режим течения; 3 – турбулентный режим течения; 4 – сечения, для которых приведены данные на рис. 4–7.

ками 4 на рис. 3 отмечены сечения, в которых на рис. 4–7 приведены профили скорости, концентрации, температуры и характеристик турбулентности.

Система уравнений (1.1)–(1.4) и (2.1)–(2.5) с граничными условиями (3.1)–(3.3) позволяет определить поля скоростей u , температур T , концентраций вдуваемого газа c и характеристик турбулентности: τ, q_n, j_i и с использованием соотношений (1.8), (1.9) найти распределение турбулентных чисел Шмидта и Прандтля по толщине пограничного слоя y/δ .

На рис. 4 приведены профили относительных величин скорости u/u_e (а), массовой концентрации c (б) вдуваемого газа (гелия) в смеси с газом основного потока (ксенона) и температуры T/T_e (в) в ряде сечений по длине пластины x .

Как видно из рис. 4, профиль относительной скорости u/u_e (рис. 4а) слабо изменяется по длине пластины от менее заполненного в области вдува ($x = 100–150$ мм) до более заполненного в области завесы ($x > 150$ мм).

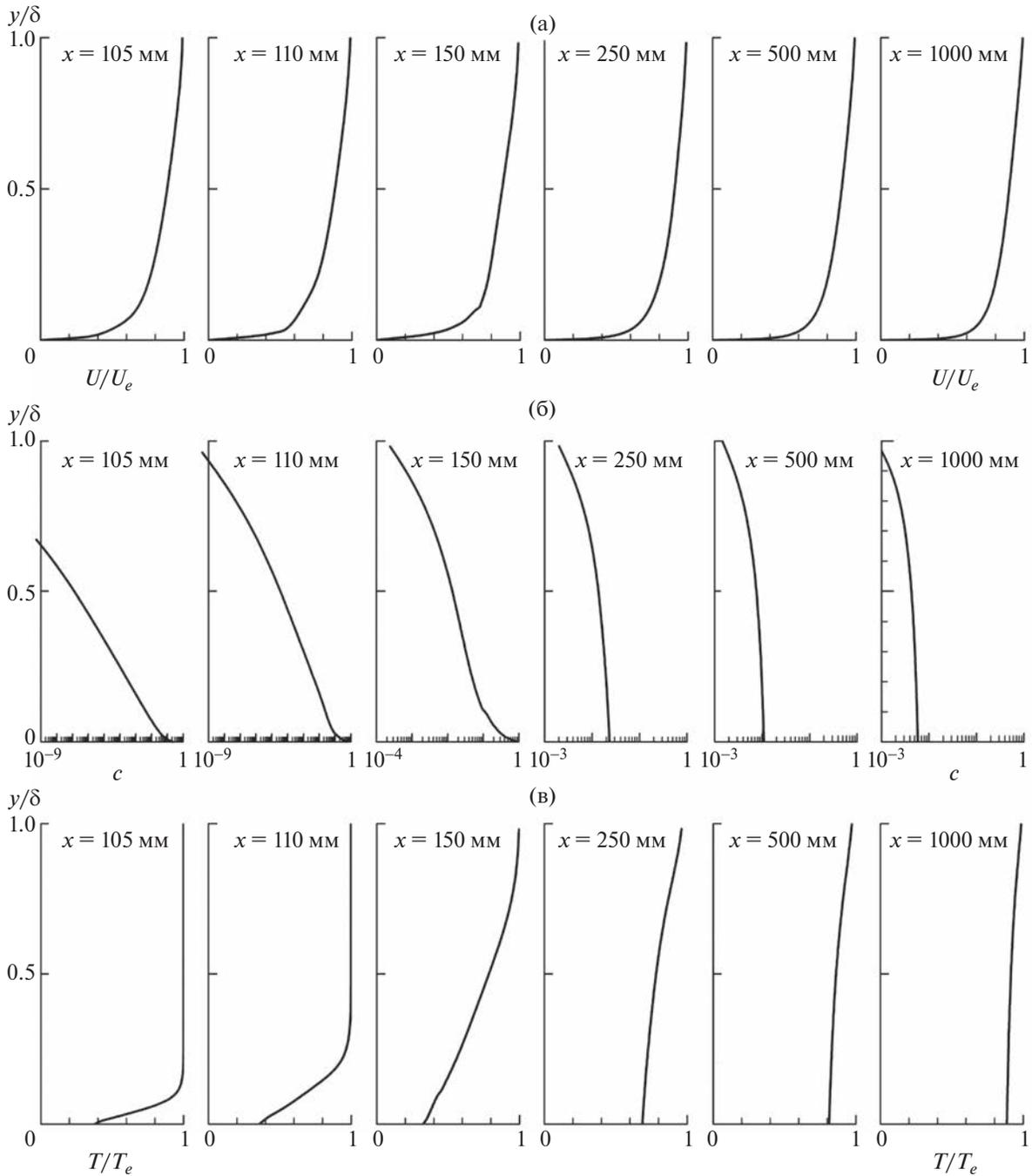


Рис. 4. Профили скорости (а), массовой концентрации (б) вдуваемого газа (гелия) в смеси с газом основного потока (ксенона) и температуры (в) в ряде сечений по длине пластины x .

Массовая концентрация вдуваемого газа (гелия) c (рис. 4б) в области вдува возрастает до величины $c = 0.85$, при которой относительный коэффициент трения $c_f/c_{f0} \approx 0.14$ (см. рис. 3), что близко к величине критического вдува. В области завесы ($x > 150$ мм) величина c существенно уменьшается. Профили относительной температуры T/T_e (рис. 4в) в области вдува также существенно изменяются по толщине пограничного слоя y/δ и слабо изменяются в области завесы.

На рис. 5 представлено распределение в пограничном слое безразмерных величин и турбулентного трения $\tau^o = -\langle u'v' \rangle / u_e^2$ (а), турбулентного потока массы $j_t^o = -\langle v'c' \rangle / u_e(c_w - c_e)$ (б) и турбулентного потока тепла $q_t^o = -\langle v'T' \rangle / u_e(T_e - T_w)$ (в).

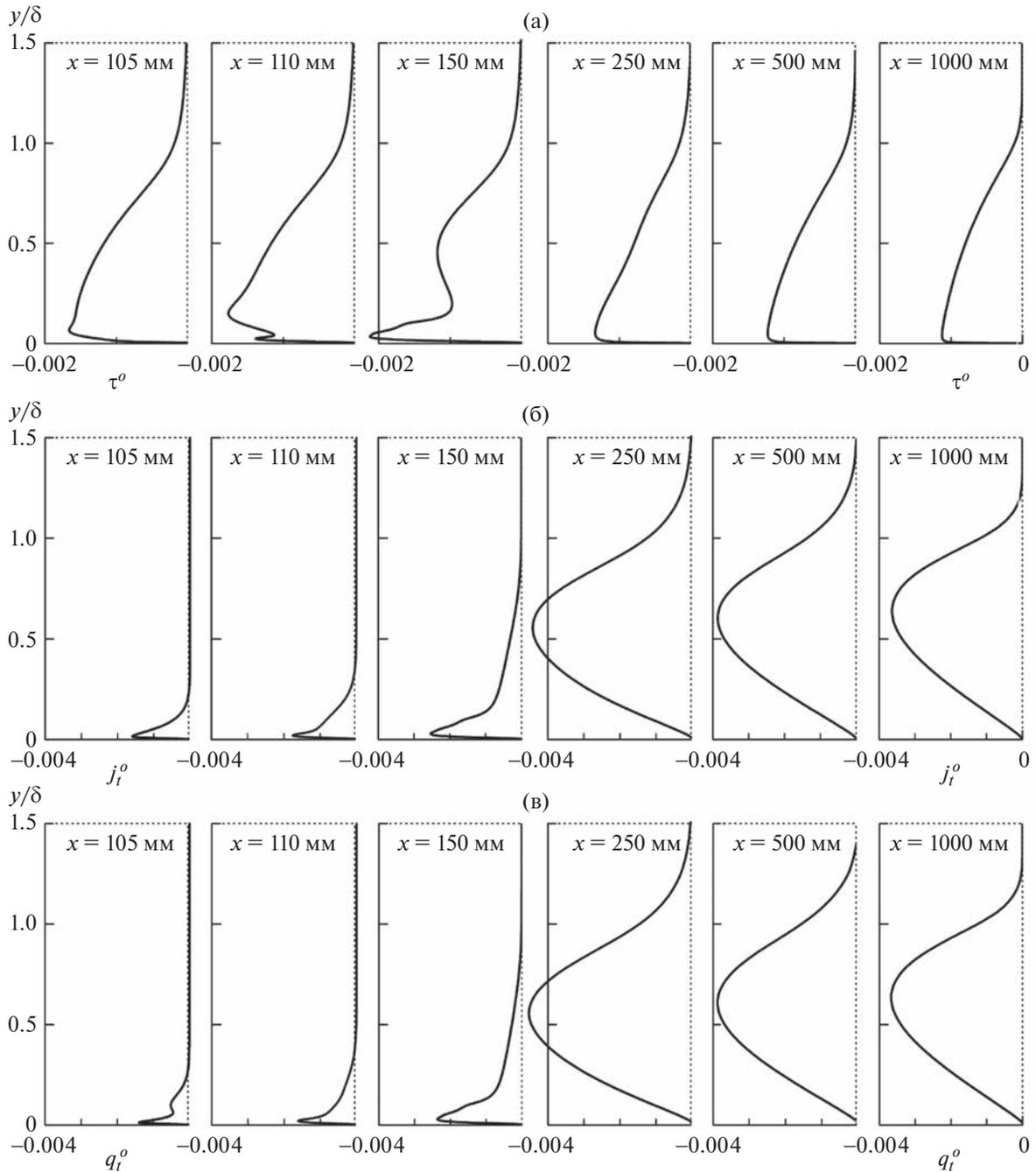


Рис. 5. Профили турбулентных характеристик τ° (а), j_i° (б), q_i° (в) в ряде сечений по длине пластины x .

Как видно из рис. 5, характер зависимостей турбулентных потоков массы j_i° (б) и тепла q_i° (в) в пограничном слое существенно меняется при переходе из области вдува ($x = 100\text{--}150$ мм) в область завесы ($x > 150$ мм) при менее существенном изменении турбулентного трения τ° (а).

Профили молекулярных чисел Шмидта Sc и Прандтля Pg в смеси гелия с ксеноном для значений массовой концентрации гелия (рис. 4в) в ряде сечений по длине пластины x приведены на рис. 6. Как видно, профили молекулярных чисел Шмидта и Прандтля, как и профили массовой концентрации гелия (рис. 4в), существенно меняются при переходе из области вдува ($x = 100\text{--}150$ мм) в область завесы ($x > 150$ мм).

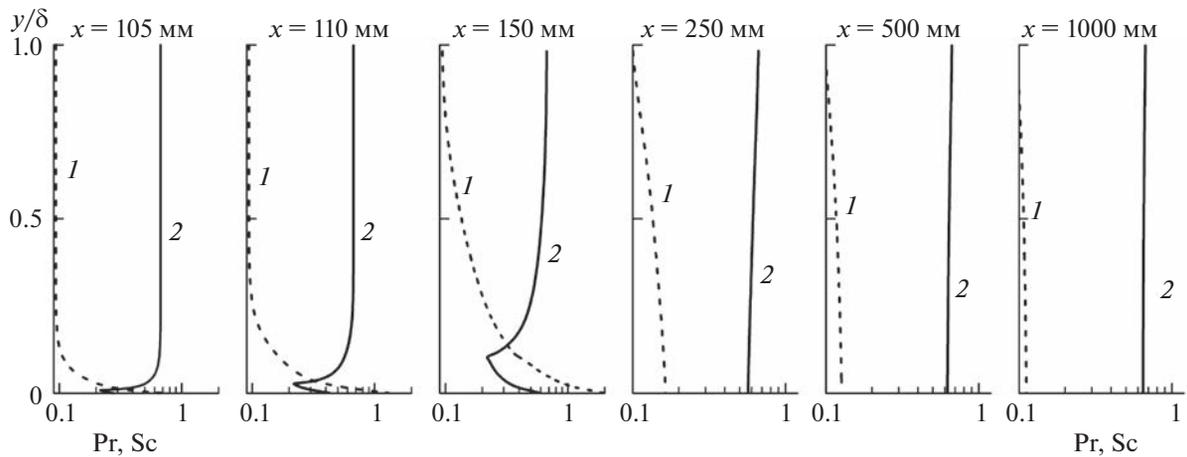


Рис. 6. Профили молекулярных чисел Шмидта Sc (1) и Прандтля Pr (2) в смеси гелия с ксеноном в ряде сечений по длине пластины x .

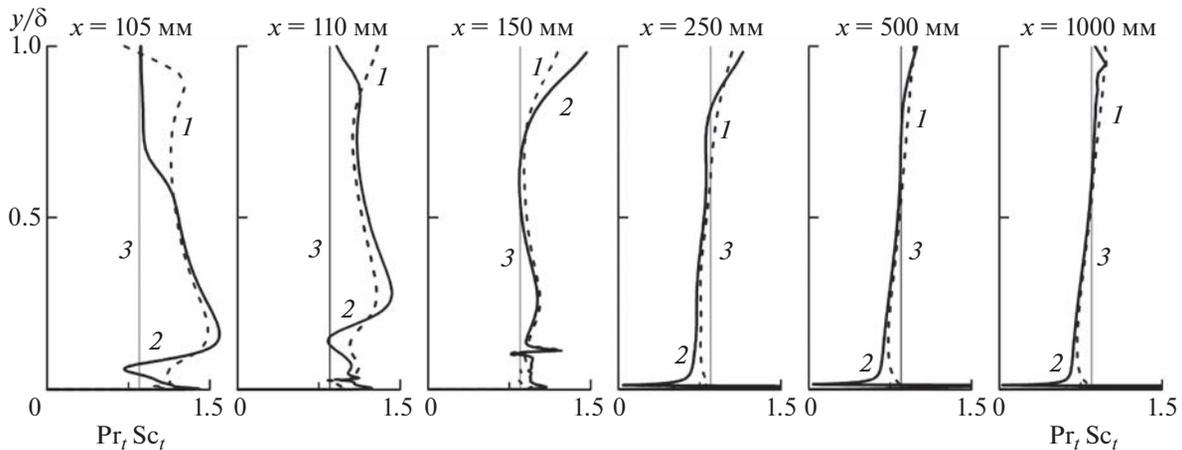


Рис. 7. Профили турбулентных чисел Шмидта Sc_t (1) и Прандтля Pr_t (2) в ряде сечений по длине пластины x : 3 – $Sc_t = Pr_t = 0.85$.

На рис. 7 представлено изменение по толщине пограничного слоя y/δ турбулентных чисел Шмидта Sc_t и Прандтля Pr_t , определенных по соотношениям (1.8), (1.9), с использованием расчетных профилей скорости, массовой концентрации вдуваемого газа и температуры (рис. 4), а также характеристик турбулентности τ , j_t и q_t (рис. 5).

Как видно из рис. 7, зависимости $Sc_t(y/\delta)$ и $Pr_t(y/\delta)$ в области вдува ($x = 100\text{--}150$ мм) далеки от постоянных значений $Sc_t = Pr_t = 0.85$ (штриховые линии) и лишь в области завесы ($x > 150$ мм) при $y/\delta > 0.1$ близки к упомянутому постоянному значению. В пристеночной области зависимости $Sc_t(y/\delta)$ и $Pr_t(y/\delta)$ в особенности очень сильно меняются.

На рис. 8 приведены изменения от числа Рейнольдса, $Re_{x1} = x_1(\rho u/\eta)_e$, определенного по длине x_1 от начала вдува (см. рис. 1) массовой концентрации гелия c_w (а) и температуры стенки T_w (б) для двух вариантов расчета: 1 – с использованием модели турбулентности (2.1)–(2.3) с уравнениями переноса для турбулентных потоков тепла (2.4) и массы (2.5) и 2 – без уравнений (2.4), (2.5) и с соотношениями для турбулентных потоков тепла (1.6) и массы (1.7) для постоянных турбулентных чисел Шмидта и Прандтля $Sc_t = Pr_t = 0.85$.

Как видно из рис. 8, в области вдува ($Re_{x1} < 5 \times 10^5$) переменность турбулентного числа Шмидта слабо сказывается на изменении по длине массовой концентрации гелия на стенке C_{HeW} (рис. 8а), в то время как переменность турбулентного числа Прандтля заметно сказывается на изменении

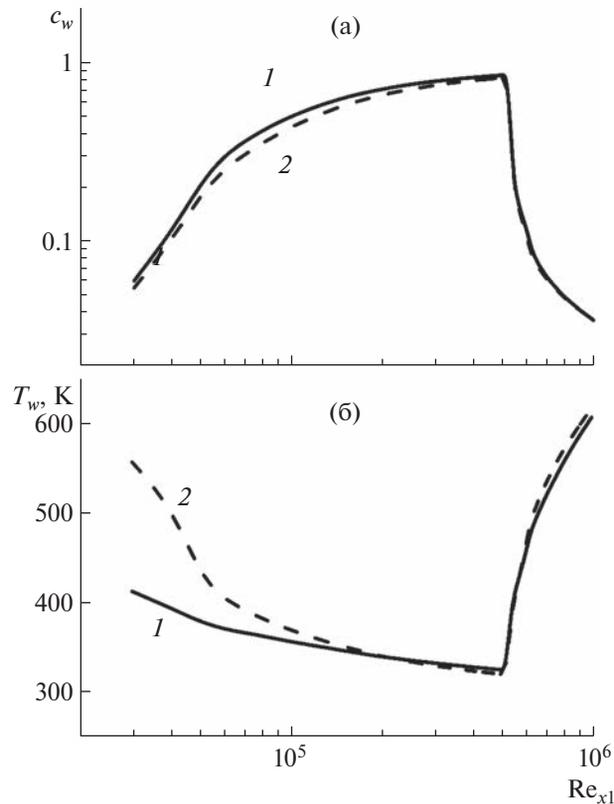


Рис. 8. Сравнение расчетного изменения по длине Re_{x1} (а) массовой концентрации гелия c_w на стенке и (б) температуры стенки T_w : 1 – использование уравнений переноса для турбулентных потоков массы и тепла; 2 – расчет для постоянных турбулентных чисел Шмидта и Прандтля $Sc_t = Pr_t = 0.85$.

по длине температуры стенки T_w (рис. 8б). В области завесы ($Re_{x1} > 10^5$), где турбулентные числа Шмидта и Прандтля близки к постоянным (см. рис. 7), значения величин c_w и T_w для двух вариантов расчета практически совпадают.

В результате проведенного численного исследования установлено, что величина турбулентного числа Шмидта более консервативна по сравнению с величиной турбулентного числа Прандтля, изменение которого, как показано в [9, 10] для пограничного слоя со ддувом, заметно влияет на тепловые характеристики пограничного слоя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием трехпараметрической RANS-модели турбулентности, дополненной уравнениями переноса для турбулентных потоков тепла и массы, проведено численное исследование пограничного слоя на стенке с завесным охлаждением через пористую вставку при вдуве гелия в поток ксенона.

Получены расчетные значения полей скорости, температуры, массовой концентрации вдуваемого газа, турбулентного трения и турбулентных потоков тепла и массы, с использованием которых рассчитано распределение турбулентных чисел Шмидта и Прандтля по толщине пограничного слоя в сравнении с постоянными значениями турбулентных чисел Шмидта и Прандтля.

Показано, что профиль скорости слабо изменяется по длине пластины от менее заполненного в области вдува до более заполненного в области завесы. Массовая концентрация вдуваемого газа (гелия) в области вдува возрастает до величины, при которой относительный коэффициент трения близок к величине, соответствующей критическому вдуву. Профили температуры в области вдува также существенно изменяются по толщине пограничного слоя и слабо изменяются в области завесы. Характер зависимостей турбулентных потоков массы и тепла в пограничном

слое существенно меняется при переходе из области вдува в область завесы при менее существенном изменении турбулентного трения.

Показано, что зависимости турбулентных чисел Прандтля и Шмидта по толщине пограничного слоя y/δ в области вдува далеки от постоянных значений $Sc_t = Pr_t = 0.85$ и лишь в области завесы при $y/\delta > 0.1$ близки к упомянутому постоянному значению. В пристеночной области зависимости $Sc_t(y/\delta)$ и $Pr_t(y/\delta)$ (в особенности) очень сильно меняются, что связано с немонотонным изменением в области вдува характеристик турбулентности и молекулярных чисел Прандтля и Шмидта.

Проведено исследование влияния переменности турбулентных чисел Прандтля и Шмидта на характеристики тепло- и массообмена, в частности, на температуру стенки и массовую концентрацию вдуваемого газа (гелия) на стенке по длине пластины. Показано, что в области вдува переменность турбулентного числа Шмидта слабо сказывается на изменении по длине массовой концентрации гелия на стенке, в то время как переменность турбулентного числа Прандтля заметно сказывается на изменении по длине температуры стенки. В области завесы турбулентные числа Шмидта и Прандтля близки к постоянной величине ~ 0.85 .

Таким образом, предположение о постоянстве турбулентных чисел Шмидта и Прандтля (в особенности) во всей области течения нельзя считать оправданным, если требуется высокая точность определения характеристик тепло- и массообмена.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-19-00234).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kays W.M.* Turbulent Prandtl number – where are we? // *Trans. ASME. J. Heat Transf.* 1994. V. 116. P. 284–295.
2. *McEligot D.M., Taylor M.F.* The turbulent Prandtl number in the near-wall region for low-Prandtl-number gas mixture // *Int. J. Heat Mass Transf.* 1996. V. 39. P. 1287–1295.
3. *Redjem-Saad L., Ould-Rouiss M., Lauriat G.* Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in pipe flows: Effect of Prandtl number // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2007. V. 28. № 5. P. 847–861.
4. *Kawamura H., Ohsaka K., Abe H., Yamamoto K.* DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 1998. V. 19. № 5. P. 482–491.
5. *Kawamura H., Abe H., Matsuo Y.* DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 1999. V. 20. № 3. P. 196–207.
6. *Christopher N., Peter J.M.F., Kloker M.J., Hickey J.P.* DNS of turbulent flat-plate flow with transpiration cooling // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2020. V. 157. 119972.
7. *Moffat R.J., Kays W.M.* A Review of Turbulent–Boundary–Layer Heat Transfer Research at Stanford, 1958–1983 // *Adv. Heat Transf.* 1984. V. 16. P. 241–365.
8. *Kader B.A., Yaglom A.M.* Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows // *Int. J. Heat Mass Transf.* 1972. V. 15. P. 2329–2351.
9. *Лущик В.Г., Макарова М.С.* Турбулентное число Прандтля в пограничном слое на пластине: влияние молекулярного числа Прандтля, вдува (отсоса) и продольного градиента давления // *Теплофизика и аэромеханика.* 2018. Т. 25. № 2. С. 177–190.
10. *Leontiev A.I., Lushchik V.G., Makarova M.S.* Study of effect of molecular prandtl number, transpiration, and longitudinal pressure gradient on flow and heat transfer characteristics in boundary layers // *Comput. Therm. Sci.* 2019. V. 11. P. 41–49.
11. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1978. № 3. С. 13–25.
12. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Расчет теплообмена в трубе // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1988. № 6. С. 42–50.
13. *Леонтьев А.И., Лущик В.Г., Якубенко А.Е.* Особенности теплообмена в области газовой завесы при вдуве инородного газа // *Изв. РАН. МЖГ.* 2010. № 4. С. 52–59.
14. *Лущик В.Г., Якубенко А.Е.* Пристенная щелевая завеса на пластине в сверхзвуковом потоке. Сравнение расчета с экспериментом // *Изв. РАН. МЖГ.* 2001. № 6. С. 83–91.
15. *Лущик В.Г., Макарова М.С.* Особенности теплообмена на проницаемой поверхности в сверхзвуковом потоке при вдуве инородного газа // *Изв. РАН. МЖГ.* 2020. № 5. С. 61–64.
16. *Абрамович Г.Н., Кузьмич В.Б., Секундов А.Н., Смирнова И.П.* Экспериментальное и расчетное исследование сверхзвуковой пристеночной струи в спутном сверхзвуковом потоке // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1972. № 4. С. 25–32.

17. *Peter J.M.F., Kloker M.J.* Direct numerical simulation of supersonic turbulent flow with film cooling by wall-parallel blowing // *Phys. Fluids*. 2022. V. 34. 025125.
18. *He G., Guo Ya., Hsu A.T.* The effect of Schmidt number on turbulent scalar mixing in a jet-in-crossflow // *Int. J. Heat Mass Transf.* 1999. V. 42. P. 3727–3738.
19. *Tominaga Yo, Stathopoulos T.* Turbulent Schmidt numbers for CFD analysis with various types of flow field // *Atmos. Environ.* 2007. V. 41. P. 8091–8099.
20. *Иевлев В.М.* Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
21. *Kays W.M.* Convective Heat and Mass Transfer. McGraw-Hill Education; 4th edition, 2004. 512 с.
22. *Кадер Б.А., Яглом А.М.* Законы подобия для пристенных турбулентных течений // *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа*. М.: ВИНТИ. 1980. Т. 15. С. 81–155.
23. *Шервуд Т., Пигфорд Р., Уилки Ч.* Массопередача. М.: Химия, 1982. 696 с.
24. *Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия, 1982. 593 с.
25. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М: Наука, 1974. 711 с.
26. *Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И.* Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергоатомиздат, 1985. 319 с.

УДК 533.6.011

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАОСТРЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОВЕРХНОСТНЫМ АНОМАЛЬНЫМ ТЛЕЮЩИМ РАЗРЯДОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2023 г. С. Т. Суржиков^{a,*}

^aИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: surg@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 09.09.2023 г.

После доработки 10.09.2023 г.

Принята к публикации 12.09.2023 г.

С использованием модифицированной амбиполярной модели квазинейтральной электро-разрядной плазмы численно исследована электродинамическая структура аномального тлеющего разряда между двумя плоскими электродами, расположенными на поверхности заостренной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком молекулярного азота в широком диапазоне чисел Маха. Выполнена модификация коэффициента амбиполярной диффузии и эффективной скорости ионизации при учете внешнего магнитного поля. Задача решается в двухмерной x – y постановке, в которой вектор индукции внешнего магнитного поля направлен в положительном или отрицательном направлении оси z . Численно исследованы параметры аномального тлеющего разряда в диапазоне давлений $p = 0.14$ – 5 Торр и падений напряжения на квазинейтральном токовом столбе разрядной плазмы $V = 30$ – 320 В. Определены основные параметры задачи, позволяющие получить разумное согласие с имеющимися экспериментальными данными.

Ключевые слова: сверхзвуковое обтекание заостренной пластины, аномальный тлеющий разряд

DOI: 10.31857/S1024708423600598, EDN: UXTNQH

ВВЕДЕНИЕ

На классическом схематическом изображении вольтамперной характеристики электрических разрядов (от несамостоятельного до дугowego) [1–5] область существования аномального тлеющего разряда характеризуется токами $I \sim 10^{-2}$ – 1 А и напряжениями на электродах $V \sim 10^2$ – 10^3 В. Указаны приближенные границы области существования, которые в значительной степени определяются многими параметрами и условиями горения стационарных аномальных разрядов. Среди важных характерных признаков аномальных тлеющих разрядов, представляющих интерес для данной работы, отметим полное заполнение газоразрядной плазмой поверхностей электродов и формирование на их границах локальных областей повышенных значений напряженности электрического поля и концентраций заряженных частиц, которые, в конечном счете, являются одной из причин электрического пробоя и/или перехода аномального тлеющего разряда в дуговой.

Повышенное внимание к изучению структуры и закономерностей существования аномальных тлеющих разрядов в прошедшие десятилетия было обусловлено многими физико-техническими приложениями, связанными с созданием магнитогазодинамических генераторов, электро-разрядных лазеров, развитием плазмохимии и поисками эффективных технологий плазменной аэродинамики. Отметим, что аномальные тлеющие разряды занимают весьма скромное место в ряду широкого спектра изучаемых в фундаментальных и прикладных исследованиях разрядов постоянного тока, импульсных, высокочастотных и сверхвысокочастотных разрядов. Тем не менее несомненным преимуществом этого типа разрядов является то, что это относительно простые объекты физики газowego разряда, часто не требующие для своего описания многообразия процессов физико-химической кинетики. Несомненным достоинством аномальных тлеющих разрядов является возможность их исследования в лабораторных условиях и в таких конфигурациях, которые позволяют построение соответствующих расчетно-теоретических моделей, пред-

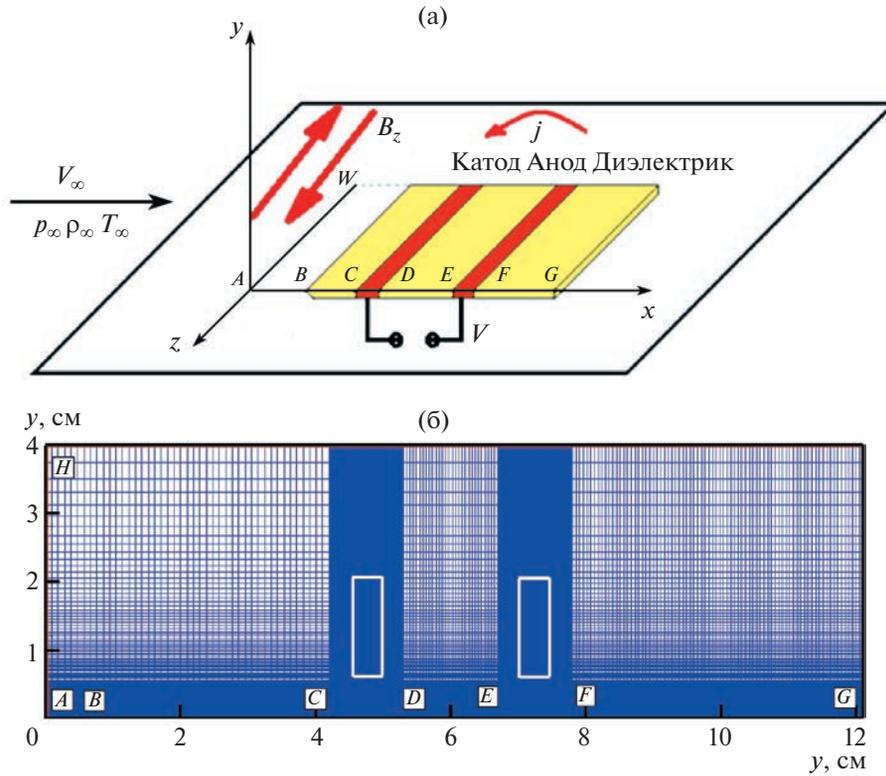


Рис. 1. Расчетная схема задачи (а) и типичная конфигурация расчетной сетки (б) для одного из вариантов расположения электродов на поверхности.

назначенных для изучения закономерностей их существования. В качестве одного из таких примеров можно привести эксперименты [6, 7], где аномальный тлеющий разряд изучался в простейшей конфигурации обтекания заостренной пластины, на поверхности которой располагались заподлицо два электрода, генерирующие приповерхностный тлеющий разряд постоянного тока. Получены важные для задач плазменной аэродинамики опытные данные по характерным вольтамперным характеристикам и влиянию поперечного к потоку магнитного поля с индукцией до 1 Тл на параметры пограничных слоев. Схематическое изображение этих экспериментов показано на рис. 1а. Серия подобных экспериментов послужила мотивацией для развития компьютерных моделей аномальных тлеющих разрядов [8, 9].

1. ФОРМУЛИРОВКА МОДИФИЦИРОВАННОЙ АМБИПОЛЯРНОЙ МОДЕЛИ

При расчетном исследовании структуры газоразрядной плазмы, включая аномальные тлеющие разряды, большое распространение получила диффузионно-дрейфовая модель [9–11], которая позволила изучить структуру тлеющих разрядов в одномерной, двумерной и трехмерных постановках, в том числе в газовых потоках [12]. Указанная модель получена в результате упрощения уравнений движения многожидкостной частично ионизованной смеси газов, получаемых, в свою очередь, из уравнений Больцмана с использованием моментной процедуры [13–15]. Для двухжидкостной и двухтемпературной модели тлеющего разряда, которая наиболее широко используется в компьютерной физике газового разряда, диффузионно-дрейфовая модель имеет вид [5, 9]

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div} \Gamma_e = \alpha |\Gamma_e| - \beta n_e n_i, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div} \Gamma_i = \alpha |\Gamma_e| - \beta n_e n_i, \tag{1.2}$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi e (n_i - n_e), \tag{1.3}$$

где n_e, n_i – концентрации электронов и ионов в 1 см^3 ; α, β – коэффициент ударной ионизации молекул электронами (первый коэффициент Таунсенда) и ион-электронной рекомбинации; Γ_e, Γ_i – векторы плотности потоков электронов и ионов,

$$\Gamma_e = -D_e \text{grad} n_e - n_e \mu_e \mathbf{E},$$

$$\Gamma_i = -D_i \text{grad} n_i + n_i \mu_i \mathbf{E},$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi,$$

\mathbf{E} и ϕ – вектор напряженности электрического поля и его потенциал; D_e, D_i – коэффициенты диффузии электронов и ионов; μ_e, μ_i – подвижности электронов и ионов.

Правые части уравнений (1.1) и (1.2) содержат два слагаемых: $\alpha |\Gamma_e|$ – объемная скорость ионизации и $\beta n_e n_i$ – объемная скорость рекомбинации (в $1/(\text{см}^3 \cdot \text{с})$), так что сумма этих двух слагаемых определяет суммарную скорость рождения/рекомбинации заряженных частиц в газоразрядной плазме. Использование коэффициента Таунсенда здесь требует некоторых пояснений. При анализе элементарных процессов в газоразрядной плазме типа тлеющего разряда Ю.П. Райзер [5] определяет частоту ионизации ν_i и скорость дрейфа электронов в электрическом поле $v_{e,dr}$ как “первичные” величины, непосредственно вычисляемые на основе рассмотрения микроскопического процесса. И если частота ионизации ν_i позволяет определить константу скорости ионизации (объемную скорость ионизационных процессов)

$$k_i = \frac{\nu_i}{N}$$

где N – концентрация нейтральных частиц, на фоне которых развивается процесс ионизации, то скорость дрейфа электронов

$$v_{e,dr} = \mu_e E$$

характеризует ту среднюю скорость электронов, приобретаемую во внешнем электрическом поле, которая в конечном счете также определяет эффективность ионизационных процессов. Подвижность электронов определяется через частоту столкновения электронов с нейтральными частицами ν_n

$$\mu_e = \frac{e}{m_e \nu_n}.$$

Как уже отмечалось, частота ионизации ν_i может быть определена из решения кинетического уравнения для электронов, в котором учитывается многообразие элементарных кинетических процессов, включая процессы электронного, колебательного и вращательного возбуждения внутренних степеней свободы атомов и молекул. В принципе, вместо слагаемого $\alpha |\Gamma_e|$ в (1.1) и (1.2), можно использовать непосредственно константу скорости ионизации k_i . Однако это означает, что при решении уравнений диффузионно-дрейфовой модели (а это фактически феноменологическая модель определения усредненных характеристик газоразрядной плазмы) придется дополнительно решать кинетическое уравнение для электронов, что является самостоятельной задачей, требующей корректного анализа вероятностей учитываемых элементарных процессов, или использовать аппроксимации ранее полученных решений (если они имеются для условий, близких к рассматриваемым). Поэтому при решении задач физики газоразрядной плазмы в рамках диффузионно-дрейфовых моделей более удобно использовать именно первый ионизационный коэффициент Таунсенда α , достаточно надежно определяемый в эксперименте [3, 5], и связанный с “первичными” функциями следующим образом

$$\alpha = \nu_i / v_{e,dr}.$$

Еще одним немаловажным преимуществом формулировки уравнений переноса заряженных частиц в виде (1.1) и (1.2) является удобство численного интегрирования данной системы, когда в правой части уравнений находятся в явном виде концентрации заряженных частиц и компоненты напряженности электрического поля. В таком виде интегрируемая система уравнений приобретает ясный феноменологический смысл: скорость ионизационных процессов пропорциональна плотности потоков электронов, где коэффициент пропорциональности α определяет число пар заряженных частиц, рождаемых электроном на единице длины в постоянном приве-

денном поле E/p , где E – модуль напряженности электрического поля и p – давление в газе (в физике газоразрядной плазмы часто используется близкий по смыслу параметр E/N , где N – концентрация нейтральных частиц). Этот эмпирический коэффициент включает в себя все многообразие кинетических процессов, рассмотрение которых остается за рамками рассматриваемой модели.

Эта система уравнений использовалась в работах [10, 11, 16] при исследовании структуры нормального и аномального тлеющего разряда в двухмерной осесимметричной постановке. Итогом этих исследований было установление физического механизма, определяющего природу закона нормальной плотности тока [17].

В работе [18] дана формулировка диффузионно-дрейфовой модели в плоской двухмерной постановке для описания динамики нормального тлеющего разряда между двумя бесконечными электродами, расположенными напротив друг друга, между которыми движется газ с дозвуковой или сверхзвуковой скоростью.

Особенностью данной модели явился учет внешнего магнитного поля, поэтому векторы плотностей потоков электронов и ионов задавались в виде

$$\begin{aligned}\Gamma_e &= n_e \mathbf{V} - D_e \text{grad} n_e - n_e \mu_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{B}), \\ \Gamma_i &= n_i \mathbf{V} - D_i \text{grad} n_i + n_i \mu_i (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{B}),\end{aligned}$$

где $\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i$ – векторы усредненных скоростей электронов и ионов; \mathbf{B} – вектор индукции внешнего магнитного поля; $\mathbf{V} = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y$ – вектор скорости движения нейтрального газа, в котором горит тлеющий разряд; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ – единичные орты прямоугольной декартовой системы координат.

В двухмерной x – y геометрии при учете только одной компоненты вектора индукции магнитного поля B_z вдоль оси z , уравнения указанной модели в проекциях на оси x и y имеют вид

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_e}{1+b_e^2} n_e E_{e,x} - \frac{D_e}{1+b_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_e}{1+b_e^2} n_e E_{e,y} - \frac{D_e}{1+b_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial y} \right) = \alpha |\Gamma_e| - \beta n_e n_i, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_i}{1+b_i^2} n_i E_{i,x} - \frac{D_i}{1+b_i^2} \frac{\partial n_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_i}{1+b_i^2} n_i E_{i,y} - \frac{D_i}{1+b_i^2} \frac{\partial n_i}{\partial y} \right) = \alpha |\Gamma_e| - \beta n_e n_i \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 4\pi e (n_e - n_i), \quad (1.6)$$

где компоненты эффективного электрического поля выражаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}E_{e,x} &= b_e E_y - E_x, & E_{e,y} &= -b_e E_x - E_y, \\ E_{i,x} &= E_x + b_i E_y, & E_{i,y} &= E_y - b_i E_x.\end{aligned} \quad (1.7)$$

В указанные соотношения входят параметры Холла электронов и ионов

$$b_e = \frac{\mu_e B_z}{c} = \frac{\omega_e}{v_e}, \quad b_i = \frac{\mu_i B_z}{c} = \frac{\omega_i}{v_i},$$

и частота Лармора электронов и ионов

$$\omega_e = \frac{e B_z}{m_e c}, \quad \omega_i = \frac{e B_z}{m_i c},$$

частоты столкновения электронов и ионов с нейтральными частицами, а также заряд электрона, массы электрона и иона, и скорость света. Предполагается, что тлеющий разряд не искажает внешнее магнитное поле.

Замыкающие теплофизические и электрофизические соотношения задаются для молекулярного азота [3, 5]

$$\begin{aligned}\mu_e(p^*) &= \frac{4.2 \times 10^5}{p^*}, \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}, & \mu_i(p^*) &= \frac{2280}{p^*}, \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}, \\ p^* &= p \frac{293}{T}, \text{ Торр}, & D_e &= \mu_e(p^*) T_e, & D_i &= \mu_i(p^*) T_i,\end{aligned} \quad (1.8)$$

где T – температура газа. Температура электронов принята постоянной $T_e = 1 \text{ эВ} = 11610 \text{ К}$, а температура ионов принята равной температуре нейтральных частиц $T_i = T$. Коэффициент рекомбинации β считается постоянным: $\beta = 2 \times 10^{-7} \text{ см}^3/\text{с}$.

Коэффициент ионизации α , определяемый аппроксимацией экспериментальных данных для условий горения тлеющего разряда в азоте при условиях, близких к рассматриваемым, задается в виде [3, 5]

$$\alpha(E) = p^* A \exp\left[-\frac{B}{(E/p^*)}\right], \quad \frac{1}{\text{см}}, \quad (1.9)$$

где $A = 12, \frac{1}{\text{см} \cdot \text{Торр}}$, $B = 342, \frac{\text{В}}{\text{см} \cdot \text{Торр}}$, $E = |\mathbf{E}|$.

Изложенная логическая схема хорошо себя зарекомендовала при решении широкого класса задач газоразрядной плазмы. Однако при учете внешнего магнитного поля такой подход требует корректировки. В идеале было бы хорошо иметь зависимость α от магнитного поля. В принципе такая возможность имеется, если воспользоваться аппроксимациями решения кинетического уравнения для электронов относительно коэффициента ионизации. В данной работе применяется существенно более простой подход. Первый ионизационный коэффициент Таунсенда оставляется при учете магнитного поля без изменения, как характеристика ионизационных процессов при заданной плотности потока электронов и локального значения приведенного электрического поля E/p . Модификации в правой части (1.4) и (1.5) подвергается плотность дрейфового потока электронов

$$\Gamma_e \sim \mu_{e,B} \mathbf{E}_{eff}$$

где

$$\mu_{e,B} = \frac{\mu_e}{1 + b_e^2},$$

а компоненты эффективного электрического поля определяются формулами (1.7). Очевидно, что при $b_e < 1$, т.е. в случае слабых магнитных полей, степень модификации объемной скорости ионизации оказывается не слишком заметной. Но при $b_e \gg 1$ получается заметное снижение скорости ионизации, что качественно верно отражает тенденцию снижения эффективности ионизационных процессов при учете магнитного поля.

Диффузионно-дрейфовая модель позволяет приближенно описать области пространственного заряда между электродами и рассчитать суммарный ток, протекающий через токовый столб разряда, что в свою очередь позволяет учесть внешнюю электрическую цепь. При необходимости [10, 11] удастся учесть нестационарные процессы накопления зарядов на электродах. При учете внешней электрической цепи задается дополнительное уравнение

$$\varepsilon = V + IR_0,$$

где V – падение напряжения на электродах; I – разрядный ток; ε – э.д.с. источника питания; R_0 – внешнее балластное сопротивление. Полный ток через разряд рассчитывается по формуле

$$I = \int_0^L (\mathbf{j}\mathbf{n})_k dx = \int_0^L (\mathbf{j}\mathbf{n})_a dx,$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности катода (к) и анода (а); \mathbf{j} – плотность тока, $\mathbf{j} = e(\Gamma_i - \Gamma_e)$.

Выделение тепла в частично ионизованном газе за счет протекания тока рассчитывается по формуле

$$Q_J = \eta(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) = 1.6 \times 10^{-19} \eta \left[nE^2(\mu_i + \mu_e) + (D_e - D_i)\mathbf{E} \text{grad} n \right],$$

где $\eta \sim 0.1-0.9$ – эффективность преобразования энергии электрического поля в нагрев газа. Представленные в данной работе результаты получены при $\eta = 0.5$. Очевидно, и это было подтверждено многочисленными расчетами в рамках феноменологических моделей рассматриваемого класса, что величина этого коэффициента оказывает весьма сильное влияние на прогнози-

руемые результаты. Однако поиски наиболее подходящего параметра η имеют смысл при более детальном изучении конкретных расчетных случаев.

Для расчета параметров поверхностного тлеющего разряда в плоской геометрии все интегральные параметры (например, полный ток) должны быть отнесены к единице длины в направлении оси z .

Из приведенных соотношений видно, что в присутствии поперечного магнитного поля (B_z) усредненное по ларморовскому вращению заряженных частиц движение электронной и ионной жидкостей можно рассматривать в эффективном электрическом поле. Заметим, что в общем виде соотношения для динамики плазменных потоков при произвольной ориентации векторов напряженности электрического и магнитного полей приведены и подробно обсуждаются в [19–21].

Указанная постановка задачи оказалась также очень удобной для анализа аномального тлеющего разряда между электродами конечной ширины, расположенными на одной или противоположных поверхностях [22]. Однако при численном моделировании структуры аномальных тлеющих разрядов обнаружилось, что диффузионно-дрейфовая модель становится чрезвычайно и неоправданно трудоемкой вследствие необходимости интегрирования уравнения Пуассона (1.3), (1.6) для нахождения электрического потенциала во всей расчетной области, включая протяженную область положительного столба (область квазинейтральной плазмы) и, в особенности, в областях приэлектродных границ, где наблюдаются большие градиенты электрического потенциала. Наличие в правой части уравнений (1.1), (1.2) и (1.4), (1.5) источниковых слагаемых для скорости ионизации с экспоненциальной зависимостью от напряженности электрического поля приводит к быстро развивающейся численной неустойчивости (физический аналог – ионизационно-перегревная неустойчивость). Эти два главных фактора делают неэффективной расчетную методику, основанную на решении уравнения Пуассона. Следует принять во внимание также тот факт, что, как правило, области пространственного заряда располагаются близко к электродам и занимают малую часть токового канала.

Исходя из сказанного, в работе [23] было предложено для решения подобных задач использовать амбиполярную модель аномального тлеющего разряда. Если учесть только квазинейтральную область разряда, т.е. сделать следующие допущения

$$n_e \approx n_i = n, \quad |\Gamma_e| \approx |\Gamma_i|,$$

обычно используемые для положительного столба тлеющего разряда [5], то из системы уравнений (4)–(6) можно получить следующие два уравнения так называемой амбиполярной модели:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial un}{\partial x} + \frac{\partial vn}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{e,B}^* D_{a,B} \frac{\partial n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{e,B}^* D_{a,B} \frac{\partial n}{\partial y} \right) + \dot{\omega}_e^*, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(n \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(n \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.11)$$

$$\text{где } D_{a,B} = \frac{\mu_{e,B} D_i + \mu_i D_{e,B}}{\mu_{e,B} + \mu_i}, \quad \mu_{e,B} = \frac{\mu_e}{1 + b_e^2}, \quad D_{e,B} = \frac{D_e}{1 + b_e^2}, \quad \mu_{e,B}^* = \frac{\mu_e}{(1 + b_e^2) \mu_i + \mu_e},$$

$$\dot{\omega}_e^* = \alpha(E) p^* n \mu_{e,B} E - \beta n^2, \quad (1.12)$$

$\mu_{e,B}$, $D_{e,B}$ – эффективные подвижность и коэффициент диффузии электронов в магнитном поле. Здесь первое уравнение описывает перенос заряженных частиц, а второе уравнение позволяет получить распределение электрического потенциала в квазинейтральном положительном столбе тлеющего разряда.

Объемная мощность джоулева тепловыделения и силы, действующей на токовый канал в магнитном поле, определяются по общим соотношениям электродинамики [19]

$$Q_J = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}), \quad \mathbf{F}_B = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}].$$

В рассматриваемом двухмерном случае

$$Q_J = \eta e n \mu_e \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right],$$

$$F_{b,x} = j_y B_z = -B_z \mu_e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad F_{B,y} = -j_x B_z = +B_z \mu_e \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Приведем оценки физических параметров, характеризующих рассматриваемый класс тлеющих разрядов и применяемую амбиполярную модель.

Применение амбиполярной модели является вполне оправданным, поскольку типичная величина радиуса экранирования Дебая

$$r_D = 4.6 \sqrt{\frac{T_e}{n_e}},$$

составляет величину порядка $r_D \sim 10^{-3}$ см (приняты для оценки характерные значения $n_e \sim 10^{11}$ см $^{-3}$, $T_e \sim 11610$ К).

В данной работе рассматривается диапазон индукции магнитного поля $B_z < 0.5$ Тл, что позволяет оценить ларморовские частоты электронов и ионов (например, N_2^+) $\omega_e = 8.7 \times 10^{10}$ с $^{-1}$, $\omega_i = 1.56 \times 10^6$ с $^{-1}$ и параметры Холла при самых низких из исследованных давлений $p \sim 0.1$ Торр, $b_e \sim 100$, $b_i \sim 0.5$. Именно столь экстремально высокие значения b_e представляют значительный интерес для исследуемой модели, поскольку получаемые с ее использованием вольтамперные характеристики и эффекты воздействия магнитного поля на газодинамическую структуру пограничного слоя дают, в известном смысле, на удивление хорошее качественное и даже количественное согласие с экспериментом [7]. Вместе с этим заметим, что в пограничном слое у обтекаемой поверхности формируется давление в несколько раз выше, чем отмеченное, и фактически указанные параметры Холла оказываются также в несколько раз ниже, к тому же значительная часть расчетов будет выполнена при параметрах Холла электронов меньше единицы.

Оценим для $p = 1$ Торр характерные значения подвижностей и коэффициентов диффузии (здесь T_e и T_i измеряются в эВ)

$$\begin{aligned} \mu_e(p^*) &= 4.2 \times 10^5 \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}, & \mu_i(p^*) &= 2280 \frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}, \\ D_e &= \mu_e T_e = 4.5 \times 10^5 \text{ см}^2/\text{с}, & D_i &= \mu_i T_i = 1.45 \times 10^3 \text{ см}^2/\text{с}, \\ D_a &= \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_e + \mu_i} = 2.28 \times 10^3 \text{ см}^2/\text{с}. \end{aligned}$$

Оценим характерные значения скоростей движения заряженных частиц:

– тепловая скорость движения электронов

$$v_{e,T} = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \approx 6.69 \times 10^7 \text{ см/с}, \quad \text{при } T_e = 11610 \text{ К};$$

– дрейфовые скорости электронов и ионов в электрическом поле напряженностью $E_{nc} \sim 300$ см/с, характерной для положительного столба тлеющего разряда нормальной плотности

$$v_{e,dr} = \mu_e E_{nc} = 2.52 \times 10^7 \text{ см/с}, \quad v_{e,i} = \mu_i E_{nc} = 8.64 \times 10^4 \text{ см/с}.$$

Отсюда следует, что дрейфовые скорости ионов оказываются соизмеримыми со скоростью нейтрального газа $v_n \sim 10^5 - 10^6$ см/с. При этом следует иметь в виду, что при обтекании поверхности, на которой расположены электроды, приповерхностный тлеющий разряд частично располагается внутри пограничного слоя, на внешней границе которого скорости нейтральных частиц могут превосходить дрейфовые скорости ионов, а внутри пограничного слоя – быть заметно ниже.

Отметим некоторые свойства сформулированной амбиполярной модели.

1. В данной работе рассматривается частный двухмерный случай горения тлеющего разряда в поперечном магнитном поле. В общем случае введенные коэффициенты с учетом магнитного поля составляют компоненты тензора подвижности и диффузии.

2. Следует иметь в виду важное ограничение использования амбиполярных моделей для расчета параметров аномального тлеющего разряда у обтекаемой газом поверхности. Используемую

в физике газового разряда аппроксимацию коэффициента ионизации в форме 1-го коэффициента Таунсенда (1.9) рекомендуется применять в ограниченном диапазоне приведенного поля

$$\frac{E}{p} < 600 \text{ В}/(\text{см} \cdot \text{Торр}).$$

В работе [5] показано, что при понижении давления $p \leq 0.1$ Торр типичные значения приведенных полей становятся настолько большими, что для определения скорости ионизационных процессов необходимо учитывать иной механизм ионизации. При низких давлениях необходимо также применять другие, чем (1.8), соотношения для расчета подвижностей электронов и ионов.

Учитывая сказанное, анализируемую в данной работе расчетную модель рекомендуется использовать при $1 \leq p \leq 10$ Торр. При меньших давлениях необходимо дальнейшее исследование обоснованности использования приведенной амбиполярной модели в сильном магнитном поле. При больших давлениях требуется выполнить дополнительный анализ замыкающих электрофизических параметров, а также роли амбиполярного дрейфа [5].

3. К сожалению, упрощение математической постановки задачи об аномальном тлеющем разряде у поверхности при использовании амбиполярной модели делает плохо реализуемым алгоритм учета внешней электрической цепи. В амбиполярной модели, по определению, исключаются приэлектродные области пространственного заряда. Здесь фигурирует лишь падение потенциала между приэлектродными слоями (аналог – положительный столб, в котором известно только падение потенциала между катодным и анодным слоями). Таким образом, при решении задачи в амбиполярном приближении в качестве определяющего параметра приходится задавать падение потенциала между границами токового слоя у электродов. В результате решения задачи находится лишь полный ток через электроразрядный промежуток. Использование в предыдущих работах [22, 23] условий полной электрической цепи для амбиполярной модели следует рассматривать как математический прием демпфирования переходного режима формирования установившегося (стационарного) решения. Без использования такого демпфирования поиск установившегося решения может быть затруднительным. В самом деле, задание фиксированного значения падения напряжения на токовом столбе квазинейтральной плазмы часто приводит либо к численному погасанию разряда, либо к неограниченному возрастанию концентраций электронов.

4. Уравнения амбиполярной модели (в рассматриваемой двумерной постановке с поперечным магнитным полем) не содержат информации по направлению вектора индукции магнитного поля. То есть наличие магнитного поля не вносит в задачу какой-либо анизотропии. Однако при решении сопряженной электрофизической и газодинамической задачи такая информация содержится в направлении объемной магнитной силы, порождаемой взаимодействием вектора индукции магнитного поля с токовым каналом.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ О ТЛЕЮЩЕМ РАЗРЯДЕ В ПОТОКЕ ГАЗА

Система уравнений амбиполярной модели тлеющего разряда (1.10), (1.11) численно решается совместно с уравнениями Навье–Стокса и уравнением сохранения энергии, определяющими распределение скорости, давления и температуры в газе

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \text{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F_{B,x}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \text{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F_{B,y}, \quad (2.3)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{V} \text{grad} T = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \text{grad} p + \text{div}(\lambda \text{grad} T) + Q_J, \quad (2.4)$$

где ρ , p – плотность и давление; μ – динамический коэффициент вязкости; c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; T – температура; λ – коэффициент теплопроводности. Уравнение сохранения энергии здесь записано в форме уравнения Фурье–Кирхгофа.

Система уравнений (2.1)–(2.3) интегрируется совместно с термическим и калорическим уравнениями состояния идеального совершенного газа

$$p = \rho \frac{R_0}{M_\Sigma} T, \quad e = c_v T \quad (2.5)$$

где $R_0 = 8.314 \times 10^7$ эрг/(моль · К) – универсальная газовая постоянная; $M_\Sigma = 28$ г/моль – молекулярный вес газа; e, c_v – внутренняя энергия совершенного газа и удельная теплоемкость при постоянном объеме; $c_p = \gamma c_v$; $\gamma = 1.4$.

Граничные условия задают невозмущенный набегающий поток

$$x = x_B: \quad u = u_\infty, \quad v = 0, \quad T = T_\infty, \quad p = p_\infty, \quad \rho = \rho_\infty$$

и условия второго рода для изменения функций вдоль потоковой координаты x на выходе из расчетной области, где газовый поток считается сверхзвуковым (тонкая дозвуковая область в пограничном слое у поверхности не приводит к нарушению устойчивости решения)

$$x = x_G: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

На поверхности обтекаемого тела задаются условия прилипания и температура поверхности

$$y = 0: \quad u = v = 0, \quad T = T_w, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

где y – нормальная к поверхности координатная линия.

В правой части уравнений, выражающих закон сохранения импульса в проекциях на координатные оси (2.2), (2.3) входят компоненты магнитной силы $\mathbf{F}_B = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$, а в правой части уравнения сохранения энергии (2.4) – слагаемое Q_j , отвечающее джоулеву тепловыделению в газе, $Q_j = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$. Именно эти слагаемые математически связывают газодинамические процессы с электродинамическими процессами, протекающими в электрическом разряде.

При решении системы уравнений амбиполярной модели задаются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} x = x_B, x_G: \quad \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)_{i,j=NI} &= 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{i,j=NI} = 0, \quad i = 1, \dots, NI \\ y = 0, \quad x_{1,j} < x_{C_1}, \quad x_{C_2} < x_{1,j} < x_{A_1}, \quad x_{1,j} > x_{A_2}: \quad n_{1,j} &= n_{\min}, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{1,j} = 0; \quad j = 1, \dots, NJ \\ y = 0, \quad x_{C_1} < x_{1,j} < x_{C_2}: \quad \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right)_{1,j} &= 0, \quad \varphi_{1,j} = 0; \quad j = 1, \dots, NJ \\ y = 0, \quad x_{A_1} < x_{1,j} < x_{A_2}: \quad \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right)_{1,j} &= 0, \quad \varphi_{1,j} = V; \quad j = 1, \dots, NJ \\ y = L_y, \quad \left(\frac{\partial n}{\partial y} \right)_{i=NI,j} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{i=NI,j} = 0; \quad j = 1, \dots, NJ \end{aligned}$$

Здесь x_{C_1} , x_{C_2} , x_{A_1} , x_{A_2} – координаты точек С, D, E, F на рис. 1а; NI , NJ – число точек конечно-разностной сетки вдоль осей y и x соответственно; L_y – высота расчетной области.

При численном интегрировании системы сопряженных уравнений (1.10), (1.11), (2.1)–(2.4) необходимо весьма тщательно подготавливать конечно-разностную сетку, обеспечивая сгущение узлов вблизи поверхности и в окрестности электродов. Пример такой расчетной сетки приведен на рис. 1б. Видно сильное сгущение конечно-разностной сетки вблизи поверхно-

Таблица 1. Исходные данные и интегральные результаты расчетных вариантов

Вар.	p , Торр	M	V , В	B_z , Тл	I , А	U_i , max
1	0.14	0	120	0	550.	70628
1	0.14	0	60	0	14.0	15200
1	0.14	0	30	0	0.00014	0.211
1	0.14	20	120	0	0.00022	0.194
1	0.14	20	120	0.3	0.00023	0.196
1	0.14	20	120	+0.3	0.00021	0.226
2	0.14	12	60	0	0.0168	12.6
2	0.14	12	60	-0.5	0.017	11.0
2	0.14	12	60	+0.2	0.016	16.8
3	0.5	0	60	0	5.97E-05	0.156
3	0.5	0	120	0	2.56	11163
3	0.5	12	120	0	0.00018	0.225
3	0.5	12	120	-0.3	0.00016	0.216
3	0.5	12	120	+0.3	0.00017	0.239
4	5.0	0	320	0	0.00013	0.248
4	5.0	6	320	0	0.024	191
4	5.0	6	320	-0.5	0.024	192
4	5.0	6	320	+0.5	0.027	215

сти и в окрестности электродов. Местоположение электродов показано прямоугольниками на рисунках.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделируемый в данной работе аномальный тлеющий разряд между двумя плоскими электродами, расположенными на обтекаемой сверхзвуковым потоком молекулярного азота поверхности (рис. 1а), является весьма сложной физически согласованной системой, структура которой в первую очередь определяется следующими параметрами:

- давление и температура в газе,
- напряжение на межэлектродном промежутке,
- скорость газового потока,
- направление вектора индукции магнитного поля.

Перечислены только основные определяющие параметры данной задачи, влияние которых на структуру аномального тлеющего разряда будет обсуждаться ниже.

Значительное влияние оказывают также тип газа, геометрия и взаимное расположение электродов, а также степень их нагрева.

Давление в газе и напряженность электрического поля в межэлектродном пространстве являются основными параметрами, определяющими эффективность процессов ионизации и рекомбинации, подвижность электронов и ионов, а также коэффициенты их диффузии. В покоящемся газе при разумном задании этих параметров можно получить численные решения системы уравнений диффузионно-дрейфовой или амбиполярной модели, которые достаточно хорошо описывают экспериментальные данные, в том числе с учетом магнитного поля [6–8].

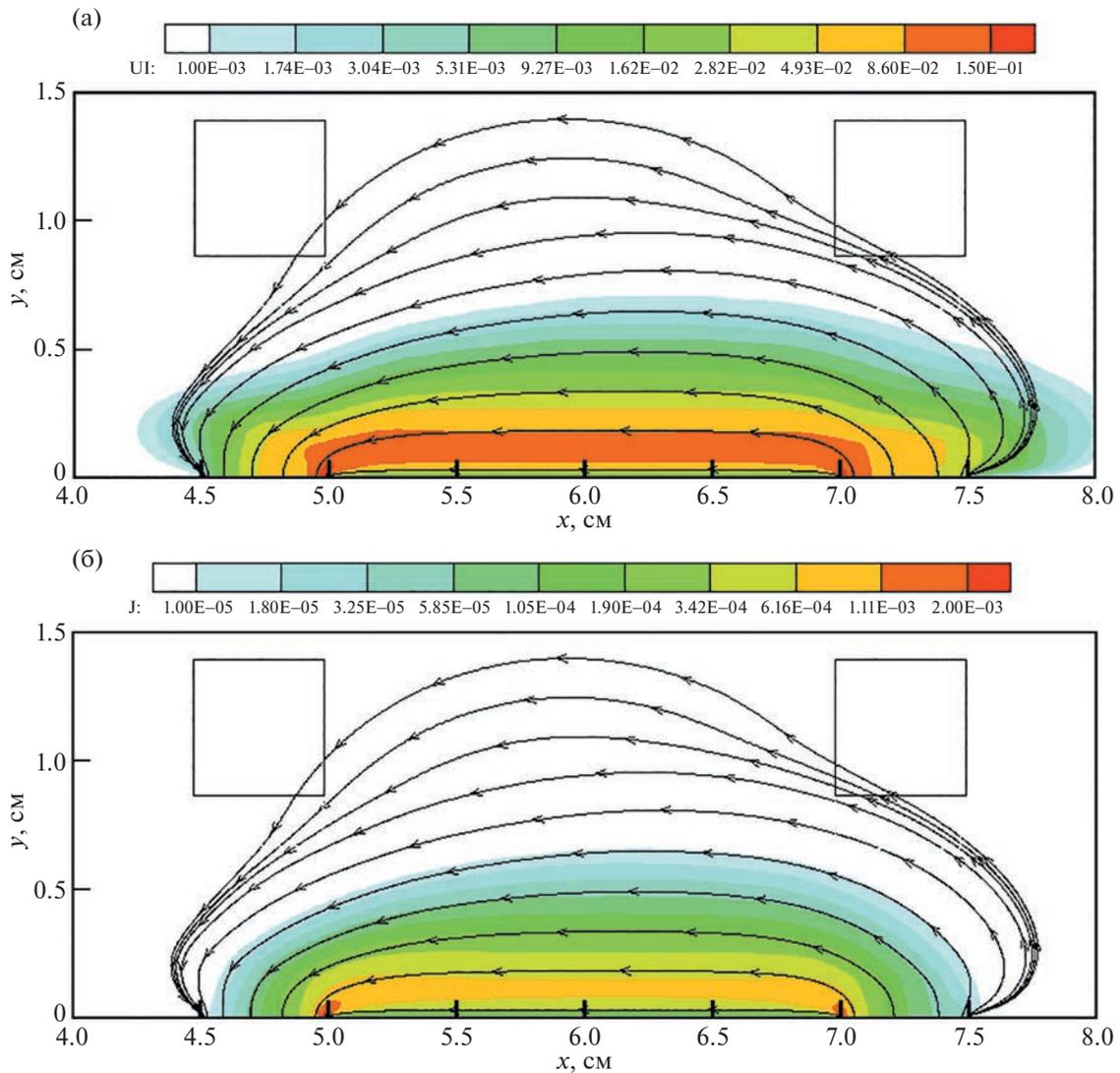


Рис. 2. Концентрация ($U_i = n/n_0$) заряженных частиц (а) и плотность электрического тока (в А/см^2) (б) в покоящемся газе без магнитного поля при $p = 0.14$ Торр, $V = 30$ В.

При изучении структуры разряда в потоке газа задача сильно усложняется, поскольку вблизи поверхности, где горит тлеющий разряд, формируется пограничный слой с неоднородным распределением температуры и давления [9, 12, 23]. При этом масштаб изменения газодинамических параметров оказывается соизмеримым с характерными размерами токового столба.

Учитывая сказанное, для численного моделирования структуры аномального тлеющего разряда были определены четыре расчетные серии. Исходные данные для расчетов и некоторые интегральные результаты (полный ток и максимальная концентрация заряженных частиц $U_{i, \max}$ в 10^9 см^{-3}) приведены в табл. 1. Указанные исходные данные выбраны близкими к исследованным в экспериментах [6, 7].

В одном из вариантов первой расчетной серии рассматривался разряд при внешнем давлении $p = 0.14$ Торр и предельно большим напряжением на межэлектродном промежутке $V = 120$ В, при котором приведенное поле достигает максимальной величины $E/p \sim 1000$ В/(см · Торр). Такая напряженность поля наблюдалась только в очень малой области у границы катода и анода. Практически во всем токовом столбе приведенное поле не превосходило $E/p \sim 450$ В/см. Как видно из табл. 1, в этом случае отмечались чрезмерно большие величины полного тока $I_c \sim 550$ А и кон-

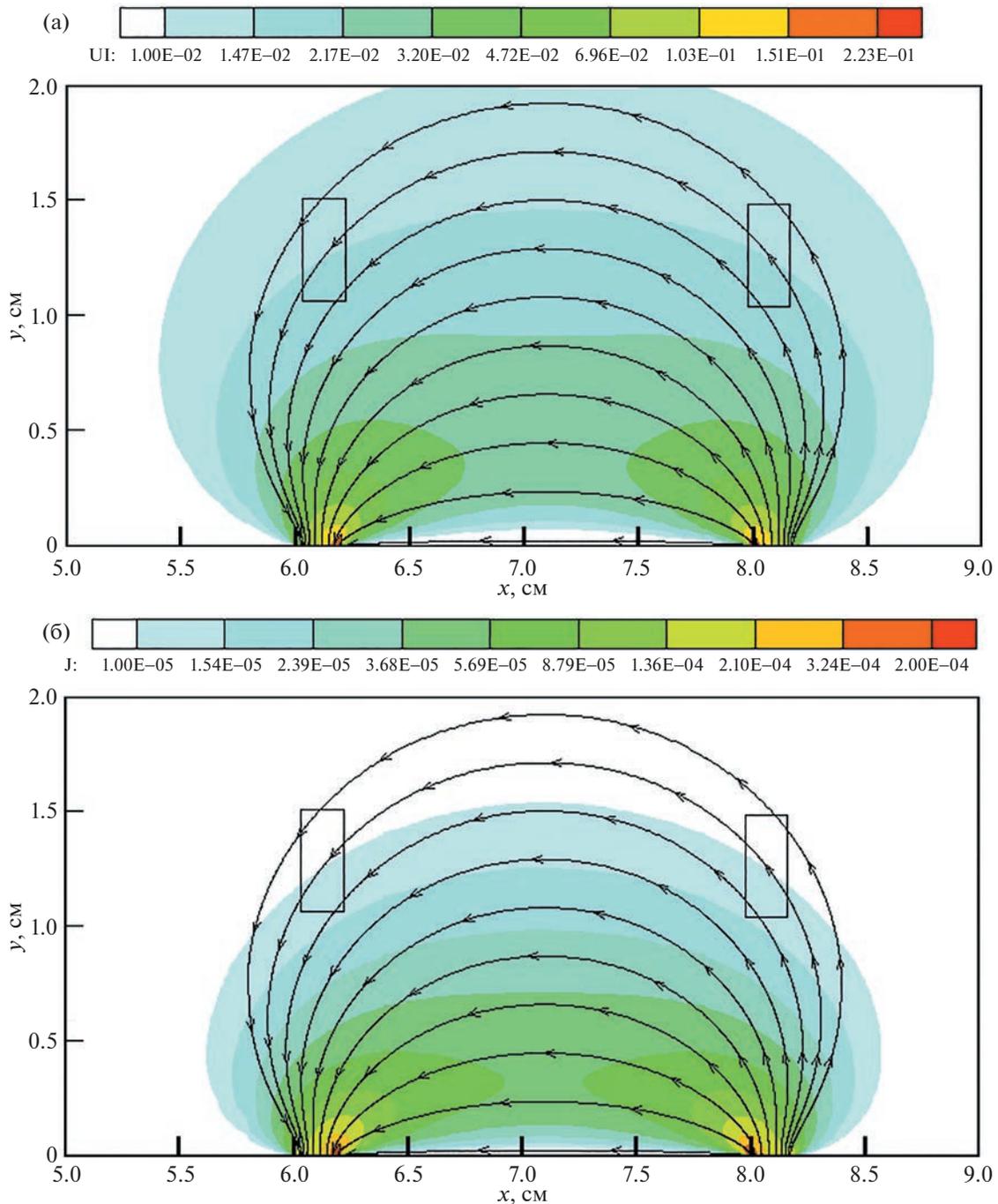


Рис. 3. Концентрация ($U_i = n/n_0$) заряженных частиц (а) и плотность электрического тока (в A/cm^2) (б) в покоящемся газе без магнитного поля $p = 5$ Торр, $V = 320$ В.

центрации заряженных частиц $n \sim 7.1 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. Подчеркнем, что в данном случае (разряд без газового потока) нагрев газа не учитывался, поэтому данный расчетный вариант следует рассматривать как оценочный, поскольку в реальных условиях при таких параметрах происходит переход аномального разряда в дуговой.

Разряд без потока рассматривался также при $V = 60$ и 30 В. В последнем случае были получены более реалистичные параметры (см. табл. 1). На рис. 2 показаны распределения концентрации электронов (здесь и далее $n_0 = 10^9 \text{ cm}^{-3}$) и плотности тока в аномальном тлеющем разряде при

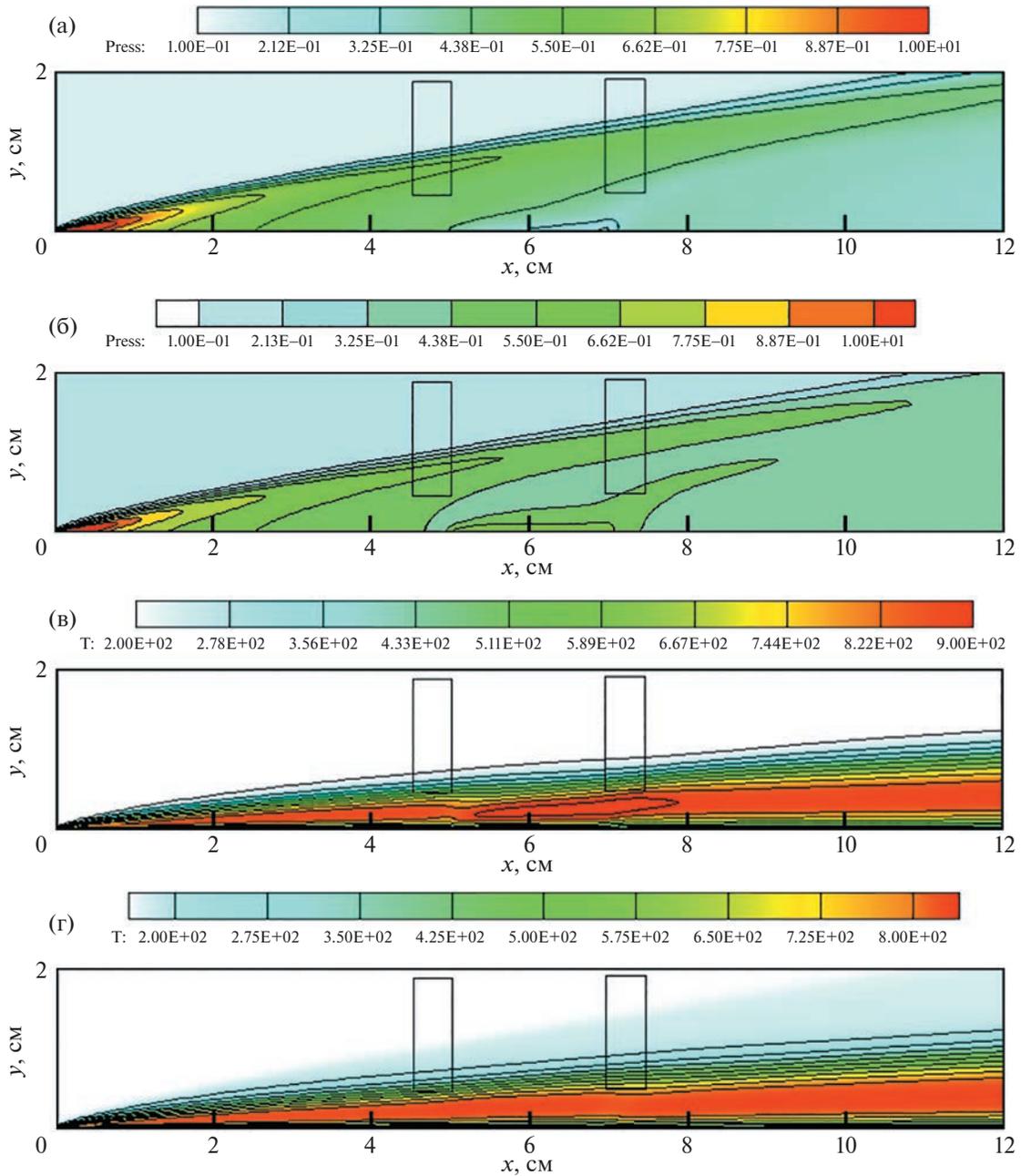


Рис. 4. Газодинамические параметры аномального тлеющего разряда при $p = 0.14$ Торр, $V = 60$ В, $M = 12$: а) давление (в Торр) при $B_z = -0.5$ Тл (а) и $B_z = +0.2$ Тл (б); б) температурное поле (в К) при $B_z = -0.5$ Тл (в) и $B_z = +0.2$ Тл (г); в) скорость V_y (v/V_∞) при $B_z = -0.5$ Тл (д) и $B_z = +0.2$ Тл (е).

$p = 0.14$ Торр и $V = 30$ В. Видно, что наибольших значений указанные функции достигают около близлежащих границ катода и анода. Толщина токового канала не превосходит 0.5 см. А наибольшие концентрации заряженных частиц в центральной части токового канала составляют $n \sim 10^8$ см $^{-3}$. Здесь и далее на распределениях электродинамических функций приводятся изолинии напряженности электрического поля, а также прямоугольниками на полях рисунков показано расположение электродов.

Оценить степень влияния давления в газе на структуру аномального газового разряда позволяет сравнение распределений концентраций электронов и плотности тока при $p = 0.14$ и 5 Торр. Данные для повышенного давления (расчетная серия № 4) приведены на рис. 3. Обратим внима-

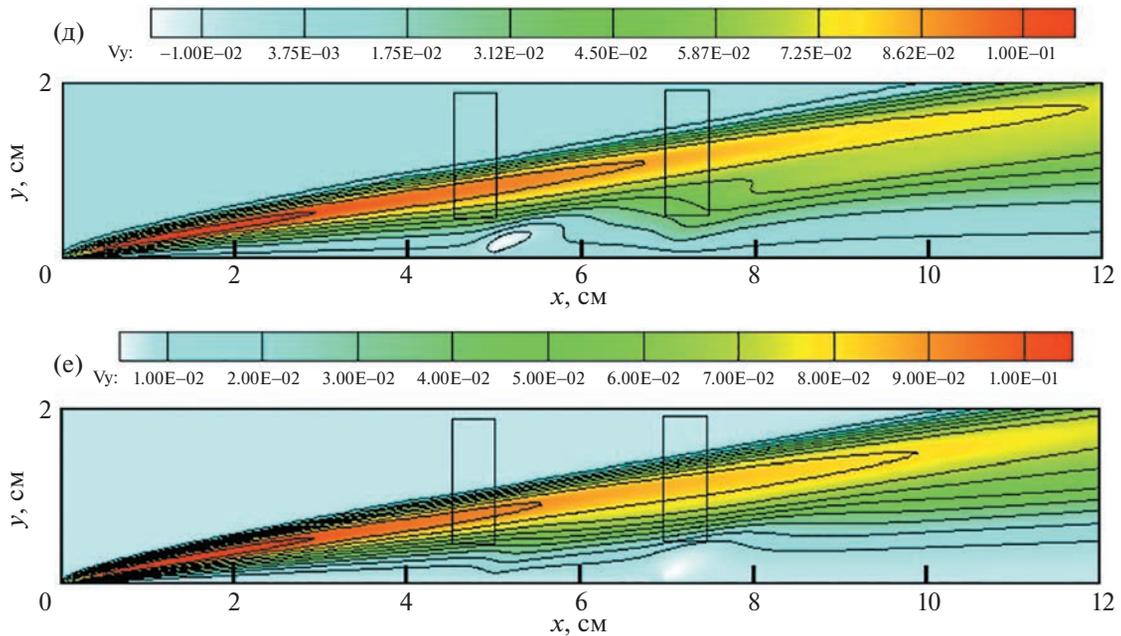


Рис. 4. Окончание

ние, что для двух указанных расчетных случаев, $p = 0.14$ Торр, $V = 30$ В и $p = 5$ Торр, $V = 320$ В, получены примерно одинаковые уровни концентраций заряженных частиц и плотности тока в разряде.

При рассмотрении обтекания поверхности с тлеющим разрядом при $p = 0.14$ Торр падения напряжения $V = 30$ В не хватило для поддержания разряда. Близкие электродинамические параметры удалось получить при числе Маха скорости потока $M = 20$, $V = 120$ В и при $M = 12$, $V = 60$ В (см. табл. 1, расчетные серии № 1 и 2).

На рис. 4 показана газодинамическая структура поля течения над заостренной пластиной, на поверхности которой горит аномальный тлеющий разряд при $V = 60$ В. Здесь показаны поля давления (рис. 4а,б), температуры (рис. 4в,г) и нормальной к поверхности компоненты скорости потока (рис. 4д,е). Рисунки 4а,в,д отвечают внешнему магнитному полю с индукцией $B_z = -0.5$ Тл, а рис. 4б,г,е – $B_z = +0.2$ Тл. Отметим важные особенности поля течения, которые оказывают сильное влияние на структуру тлеющего разряда.

Во-первых, при обтекании поверхности сверхзвуковым потоком газа давление вблизи электродов возрастает более, чем в 3 раза. Это происходит из-за образования сжатого слоя между поверхностью и отходящей от кромки ударной волны. В рассматриваемом случае давление в набегающем потоке $p = 0.14$ Торр, а над поверхностью электродов давление составляет $p = 0.47$ Торр.

Внутри пограничного слоя на расстоянии примерно 0.2 см над электродами наблюдается область с максимальной температурой $T \sim 800$ К, обусловленная диссипативными процессами в газе за фронтом ударной волны.

Представленные на рис. 4д,е распределения компоненты скорости $V_y = v/V_\infty$ наиболее наглядно иллюстрируют возмущение поля течения за счет тлеющего разряда.

На рис. 4 видны различия в формируемой газодинамической структуре течения, обусловленные разной поляризацией магнитного поля $B_z = -0.5$ Тл и $B_z = +0.2$ Тл. В случае $B_z = -0.5$ Тл объемная магнитная сила направлена к поверхности, т.е. прижимает к ней токовый канал тлеющего разряда. При $B_z = +0.2$ Тл магнитная сила отжимает от поверхности токовый канал и газовый поток. Проявление этого можно видеть на всех рис. 4.

Распределение коэффициента давления

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5\rho_\infty V_\infty^2}$$

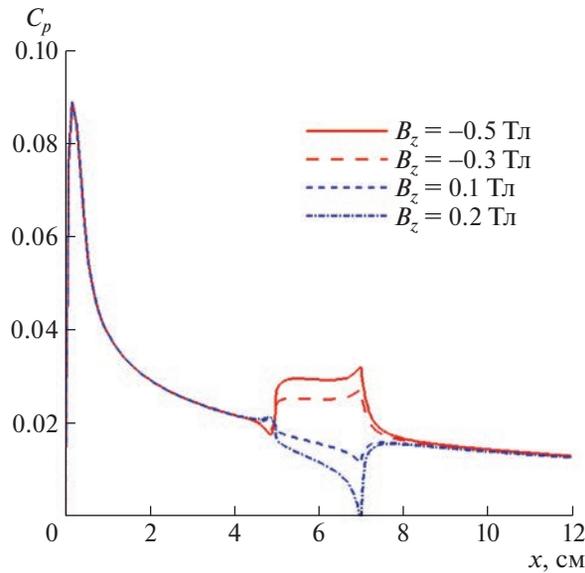


Рис. 5. Распределение коэффициентов давления C_p вдоль поверхности при $p = 0.14$ Торр, $V = 60$ В, $M = 12$.

вдоль поверхности показано на рис. 5. Видно, что при $B_z < 0$ давление газа на поверхность возрастает, а при $B_z > 0$ — наблюдается локальное разрежение. Примечательно, что при $B_z < +0.2$ Тл, в потоке, отгесняемом от поверхности, возникают газодинамические неустойчивости, и обтекание становится неустановившимся.

Электродинамическая структура аномального тлеющего разряда при $p = 0.14$ Торр, $M = 12$, $V = 60$ В и $B_z = +0.2$ Тл показана на рис. 6. Максимум концентраций заряженных частиц и плотности тока в токовом канале между электродами наблюдается на расстоянии примерно 0.15 см от поверхности. Над близлежащими границами электродов мощность джоулева тепловыделения превосходит примерно на порядок соответствующую величину в токовом канале.

На рис. 7 показаны распределения вдоль поверхности концентраций заряженных частиц и напряженности электрического поля. Отметим локальные максимумы напряженности поля у границ электродов, что, как уже отмечалось, представляет значительные трудности при численном моделировании аномальных тлеющих разрядов. Вблизи левой границы анода концентрация заряженных частиц отличается для двух поляризаций магнитного поля более, чем на порядок. Так, в локальной области проявляется падение давления в газе вследствие небольшого отгеснения токового канала от поверхности.

На рис. 8 показаны для этих же условий поля нормальной к поверхности компоненты объемной магнитной силы, действующей на токовый канал в поперечном магнитном поле. Хорошо видна противоположная направленность для двух противоположных поляризаций магнитного поля.

Эволюция напряженности электрического поля в квазинейтральной плазме при изменении условий горения электрического разряда показана на рис. 9. Наибольшие значения модуля напряженности электрического поля $|E| \sim 20-30$ В/см при отсутствии газового потока и магнитного поля достигаются у близлежащих границ электродов (рис. 9а,б). При этом значения приведенного поля $E/p \sim 200-300$ В/(см · Торр).

Ближние значения приведенного поля формируются в потоке $M = 12$ и $M = 20$, поскольку давление в пограничном слое у поверхности возрастает в несколько раз, поэтому, несмотря на увеличение абсолютных значений напряженности до $|E| \sim 40$ и 80 В/см (рис. 9в и 9г), приведенное поле изменяется незначительно. Примечательно также, что наибольшие значения напряженности электрического поля наблюдаются теперь у внешней границы пограничного слоя, а напряжение на газоразрядном промежутке необходимо задать в два раза больше при почти двухкратном увеличении скорости потока.

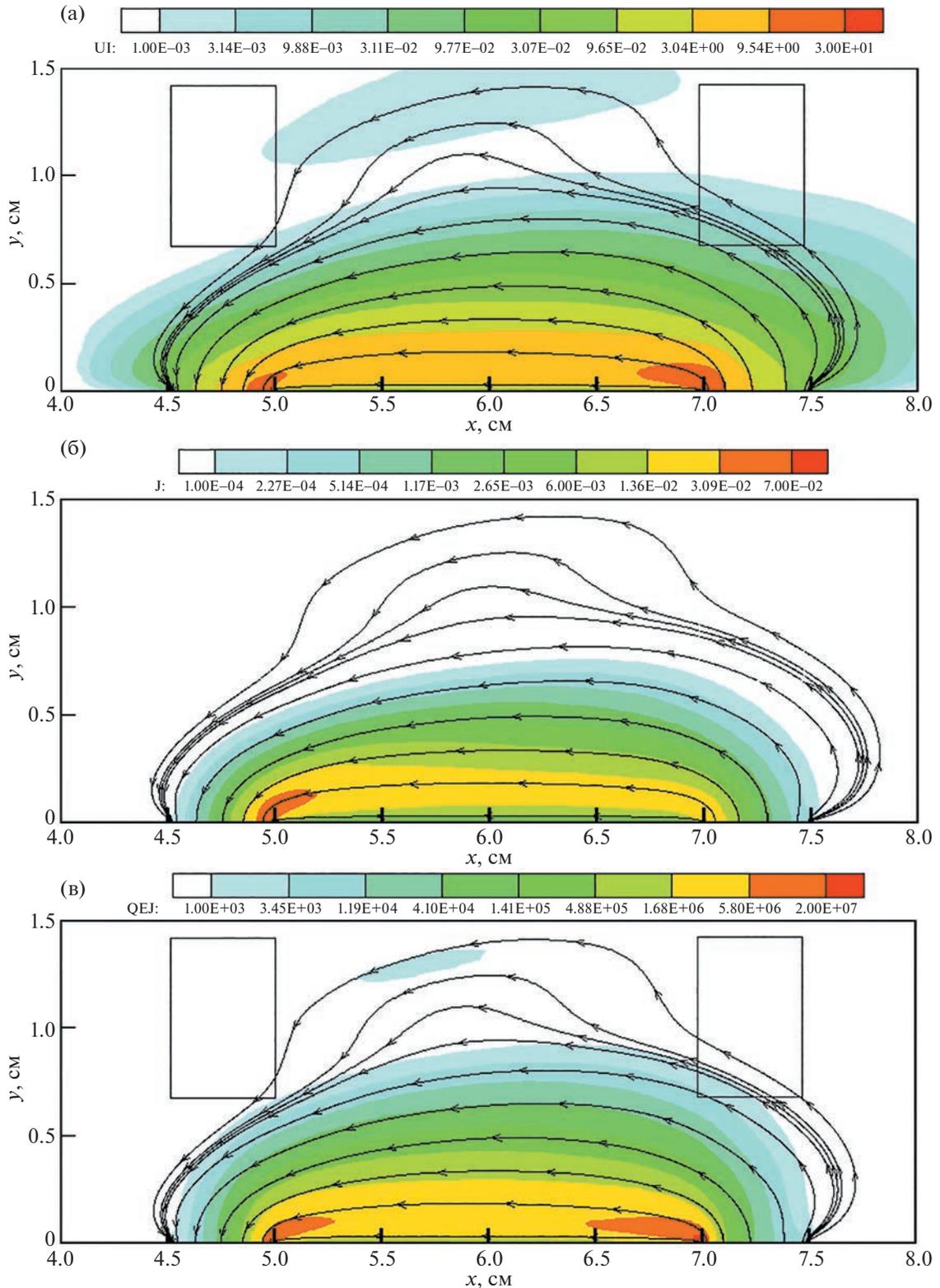


Рис. 6. Электродинамические параметры аномального тлеющего разряда при $p = 0.14$ Торр, $V = 60$ В, $M = 12$: (а) – концентрация заряженных частиц (в 10^9 см^{-3}) при $B_z = +0.2$ Тл; (б) – плотность электрического тока (в А/см^2) при $B_z = +0.2$ Тл; (в) – мощность джоулева тепловыделения (в эрг/см^3) при $B_z = +0.2$ Тл.

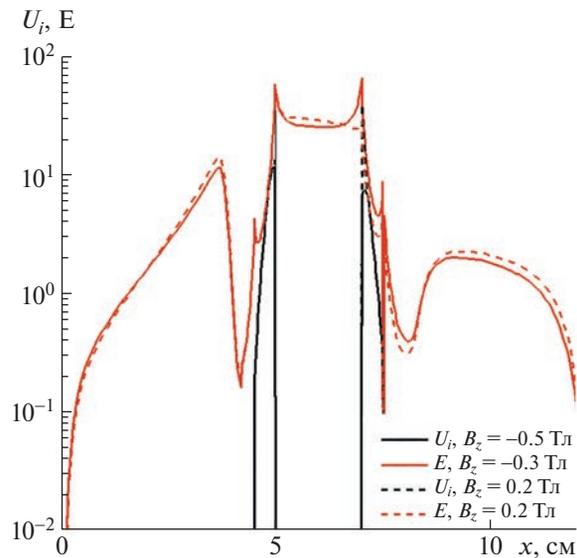


Рис. 7. Распределение концентраций заряженных частиц (в 10^9 см^{-3}) и напряженности электрического поля E_y (В/см) вдоль поверхности при $p_\infty = 0.14$ Торр, $V = 60$ В и $M = 12$ для двух значений индукции магнитного поля $B_z = -0.5$ Тл и $+0.2$ Тл.

Для этих же двух расчетных вариантов ($V = 60$ В, $M = 12$ и $V = 120$ В, $M = 20$), на рис. 10а,б соответственно, показаны объемные мощности джоулева тепловыделения Q_J (в эрг/см³). Обращает на себя внимание факт возрастания Q_J примерно на два порядка при большей скорости потока. Здесь также следует обратить внимание на то, что при изменении поляризации приложенного магнитного поля область максимального джоулева тепловыделения смещается к правому электроду (сравните рис. 10а и бб). Важно также, что при увеличении скорости потока вблизи внешней границы пограничного слоя образуется вторая область повышенного энерговыделения (рис. 10б).

На рис. 11 показаны поля объемной скорости ионизационных процессов в потоке $M = 12$ при $p = 0.14$ Торр в отсутствие магнитного поля и при $B_z = -0.5$ Тл. Фактически здесь дается иллюстрация влияния магнитного поля на скорость ионизационных процессов в изучаемой модели. Как уже отмечалось, расчетный случай $p = 0.14$ Торр отличается очень большими значениями параметров Холла электронов и ионов. Из рис. 11 видно, что учет магнитного поля с индукцией $B_z = -0.5$ Тл приводит в данной модели к падению скорости ионизации более, чем на 4 порядка.

Как уже отмечалось, давление в газе оказывает одно из определяющих влияний на структуру тлеющего разряда. Поэтому представляет интерес рассмотреть эволюцию аномального тлеющего разряда в потоке газа при заметном увеличении давления набегающего газового потока. В 3-й и 4-й расчетных сериях это давление составляет $p = 0.5$ и 5 Торр. Интегральные параметры тлеющего разряда при $p = 0.5$ Торр в табл. 1 показывают, что при отсутствии газового потока изменение задаваемого падения напряжения на электродах от $V = 60$ В до 120 В приводит к очень сильному изменению концентраций заряженных частиц и плотности тока. В частности, при $V = 120$ В значение концентрации достигает $n = 1.12 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Однако учет газового потока, обтекающего разряд со скоростью $M = 12$, позволяет получить вполне разумные величины концентраций на уровне $n \sim 0.2 \times 10^9 \text{ см}^{-3}$ и полного тока $I \sim 0.16$ мА. Качественно повторяется закономерность, отмеченная для $p = 0.14$ Торр и скорости потока $M = 20$.

При давлении $p = 5$ Торр без учета газового потока при падении напряжения $V = 320$ В ток через разрядный промежуток достигает величины $I \sim 0.13 \times 10^{-3}$ А, а концентрация зарядов $n \sim 0.25 \times 10^9 \text{ см}^{-3}$. В газовом потоке со скоростью $M = 6$ концентрация зарядов возрастает примерно в 10^3 раз, а плотность тока — в 10^2 раз. Распределение газодинамических параметров при двух поляризациях индукции магнитного поля показано на рис. 12. В данном случае температурный пограничный слой значительно ближе прижат к поверхности, но при изменении направления ин-

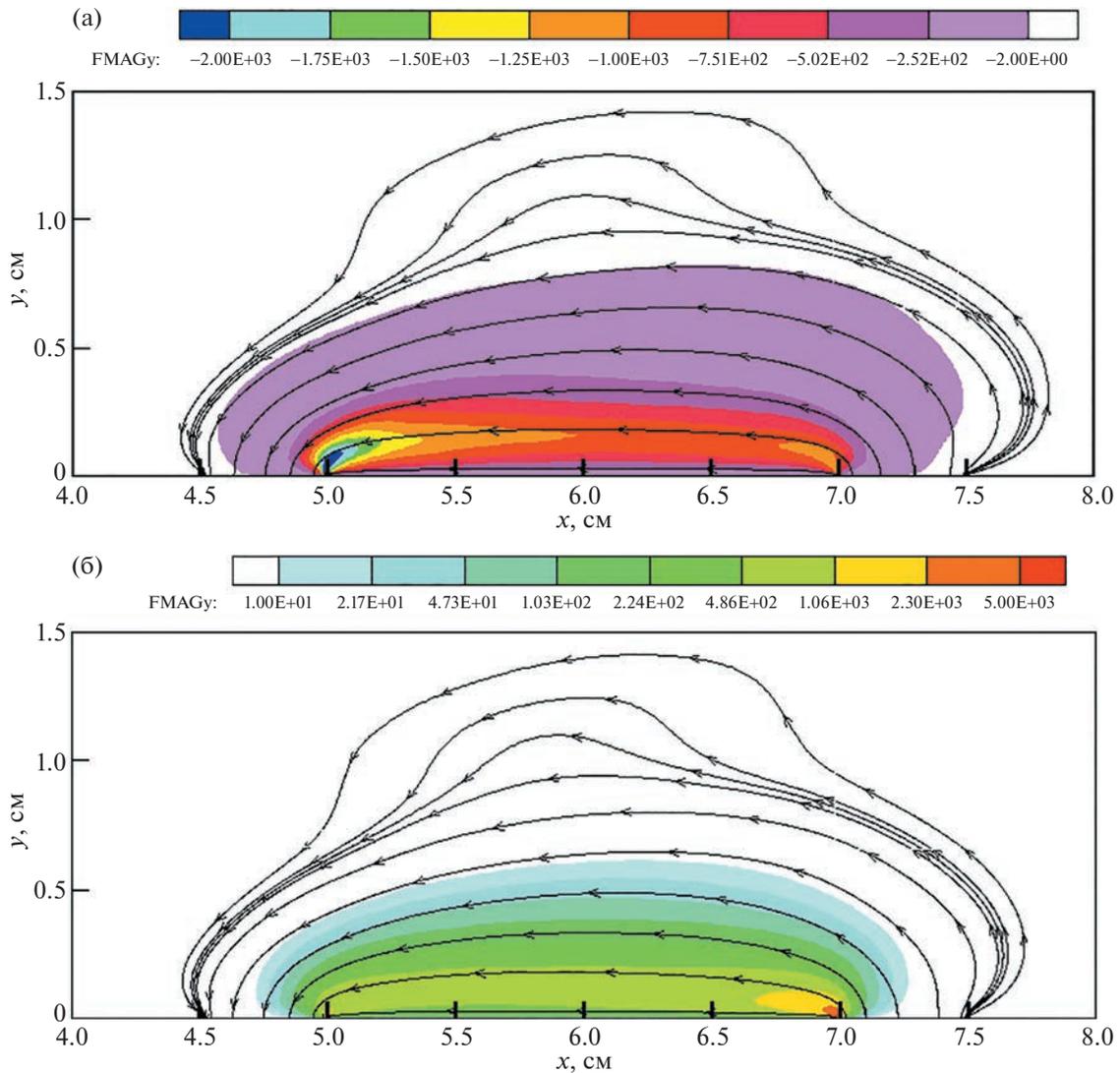


Рис. 8. Распределение y -компоненты магнитной силы в токовом столбе (в $\text{дин}/\text{см}^2$) при $p_\infty = 0.14$ Торр, $V = 60$ В, $M = 12$, $B_z = -0.5$ Тл (а) и $B_z = +0.2$ Тл (б).

дукции магнитного поля виден эффект изменения давления газа у поверхности (рис. 12а,б). Сравнение распределений концентраций заряженных частиц без газового потока (рис. 3) и с потоком при $M = 6$ (рис. 13) показывает сильную локализацию токового канала у поверхности.

На рис. 14 показано распределение коэффициентов давления вдоль обтекаемой поверхности, что свидетельствует о сильном влиянии поляризации индукции магнитного поля на интегральные характеристики обтекания.

Завершая анализ интегральных параметров аномальных тлеющих разрядов (табл. 1), а также данных по их электродинамической и газодинамической структуре (рис. 2–14) отметим, что разработанная сопряженная модель, включающая систему уравнений Навье–Стокса и уравнения амбиполярной модели, позволяют получить удовлетворительное качественное, а по некоторым параметрам – количественное согласие с серией экспериментальных данных [6–8], например по вольтамперным характеристикам и по распределению давления над поверхностью обтекаемой пластины с аномальным тлеющим разрядом, в том числе в поперечном магнитном поле.

Одним из дальнейших шагов по описанию структуры аномальных тлеющих разрядов в газовых потоках, связанный с учетом приэлектродных слоев пространственного заряда, может быть

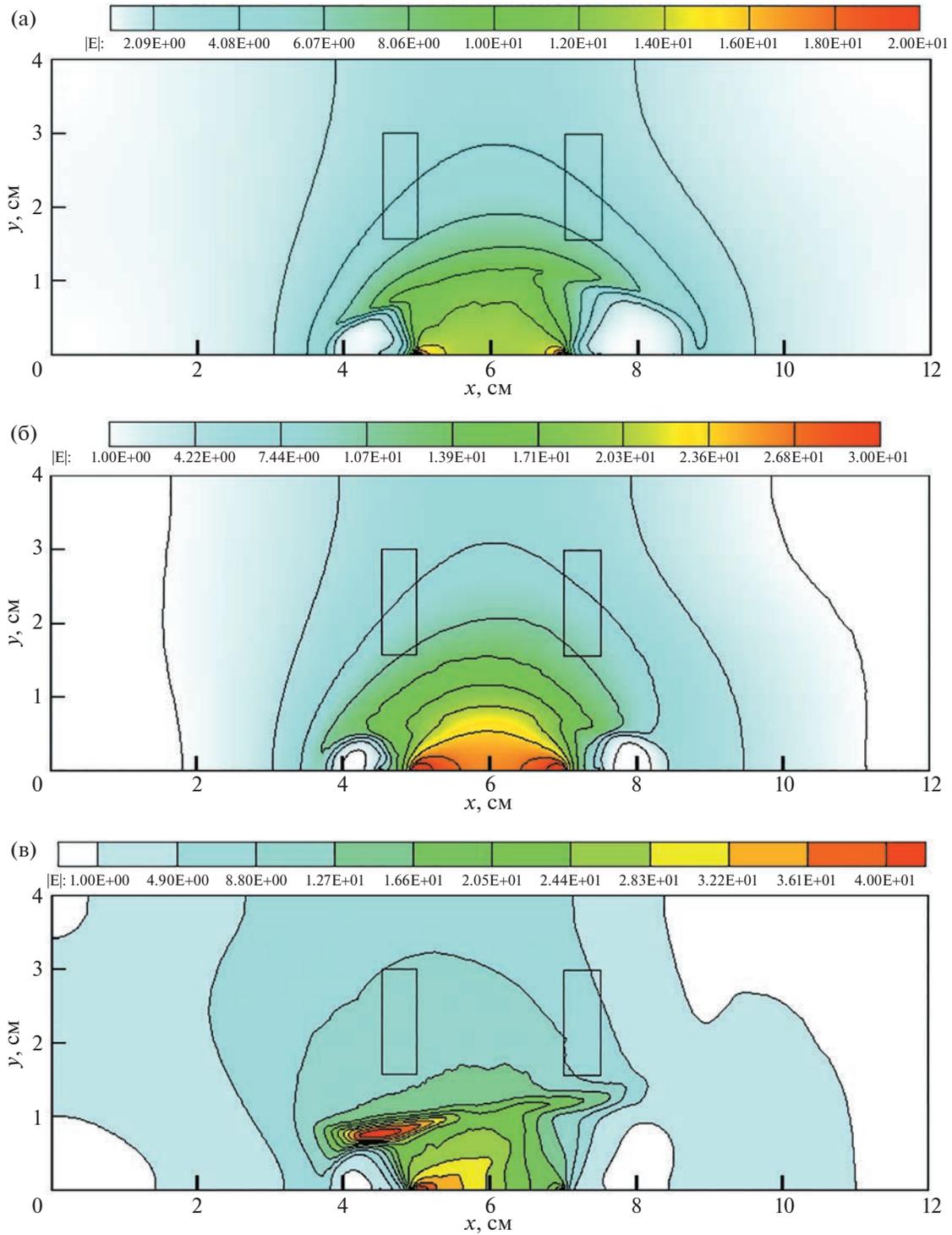


Рис. 9. Напряженность электрического поля при $p_\infty = 0.14$ Торр: а) $-V = 30$ В, $M = 0$, $B_z = 0$; б) $-V = 60$ В, $M = 0$, $B_z = 0$; в) $-V = 60$ В, $M = 12$, $B_z = -0.3$ Тл г) $-V = 120$ В, $M = 20$, $B_z = -0.3$ Тл.

использование существенно более трудоемкой диффузионно-дрейфовой модели. Требуют также дальнейшего развития феноменологические модели газоразрядной плазмы, в первую очередь учет усредненных транспортных свойств частиц газоразрядной плазмы в магнитном поле, эффективности ионизационных процессов и преобразования джоулева энерговыделения в тепло.

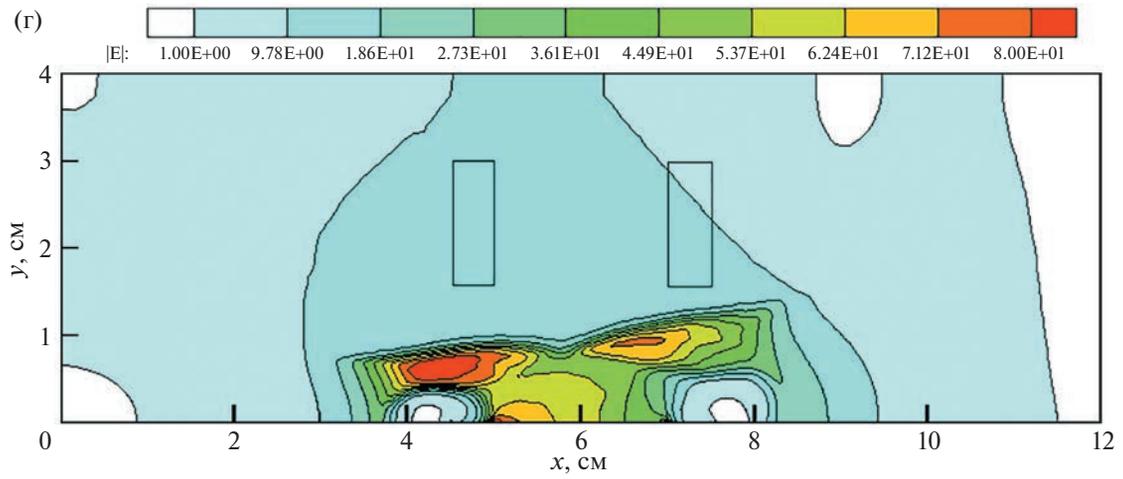


Рис. 9. Окончание

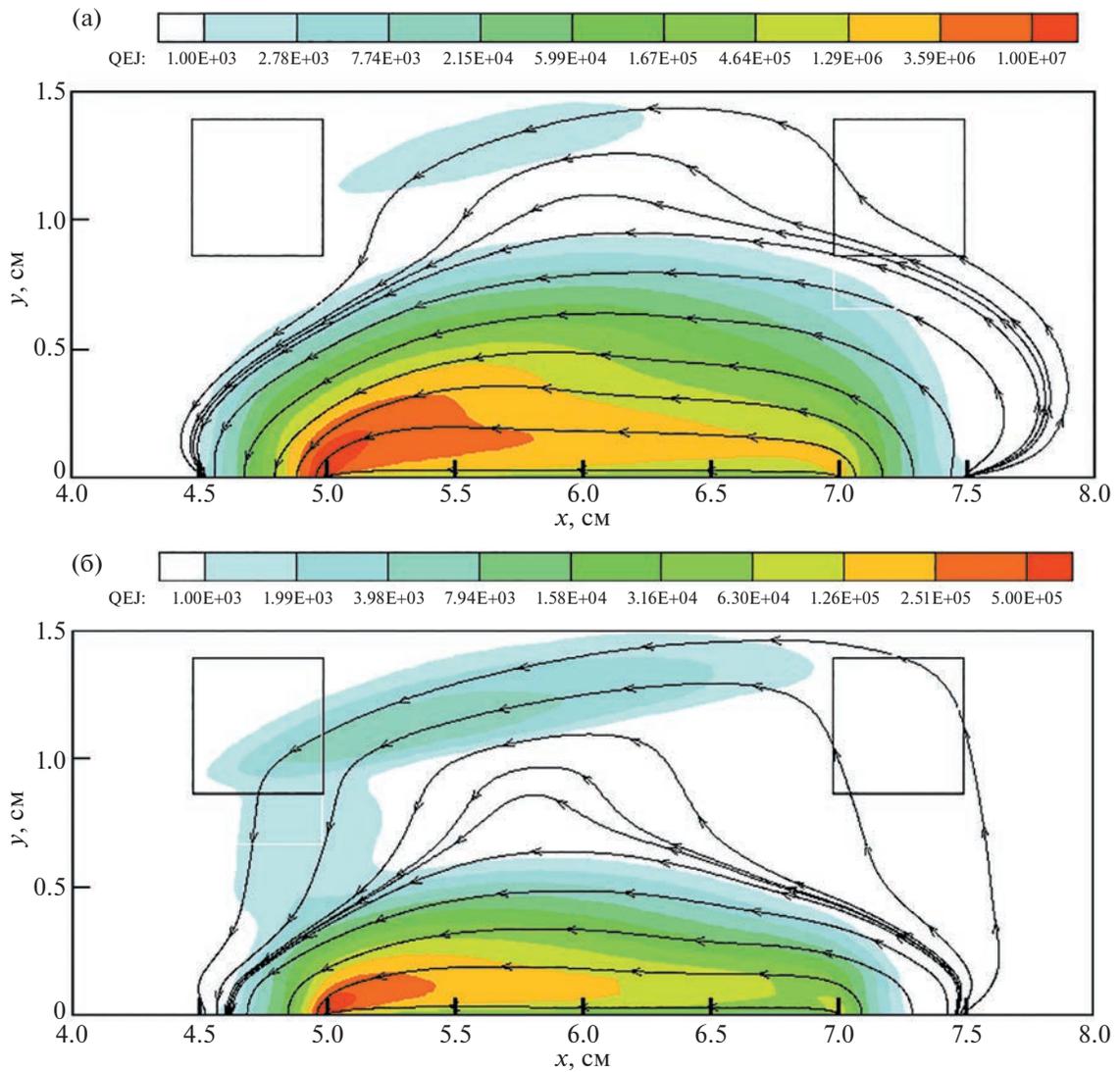


Рис. 10. Объемная мощность джоулева тепловыделения (эрг/см³) при $p_\infty = 0.14$ Торр: а) – $V = 60$ В, $M = 12$, $B_z = -0.3$ Тл; б) – $V = 120$ В, $M = 20$, $B_z = -0.3$ Тл.

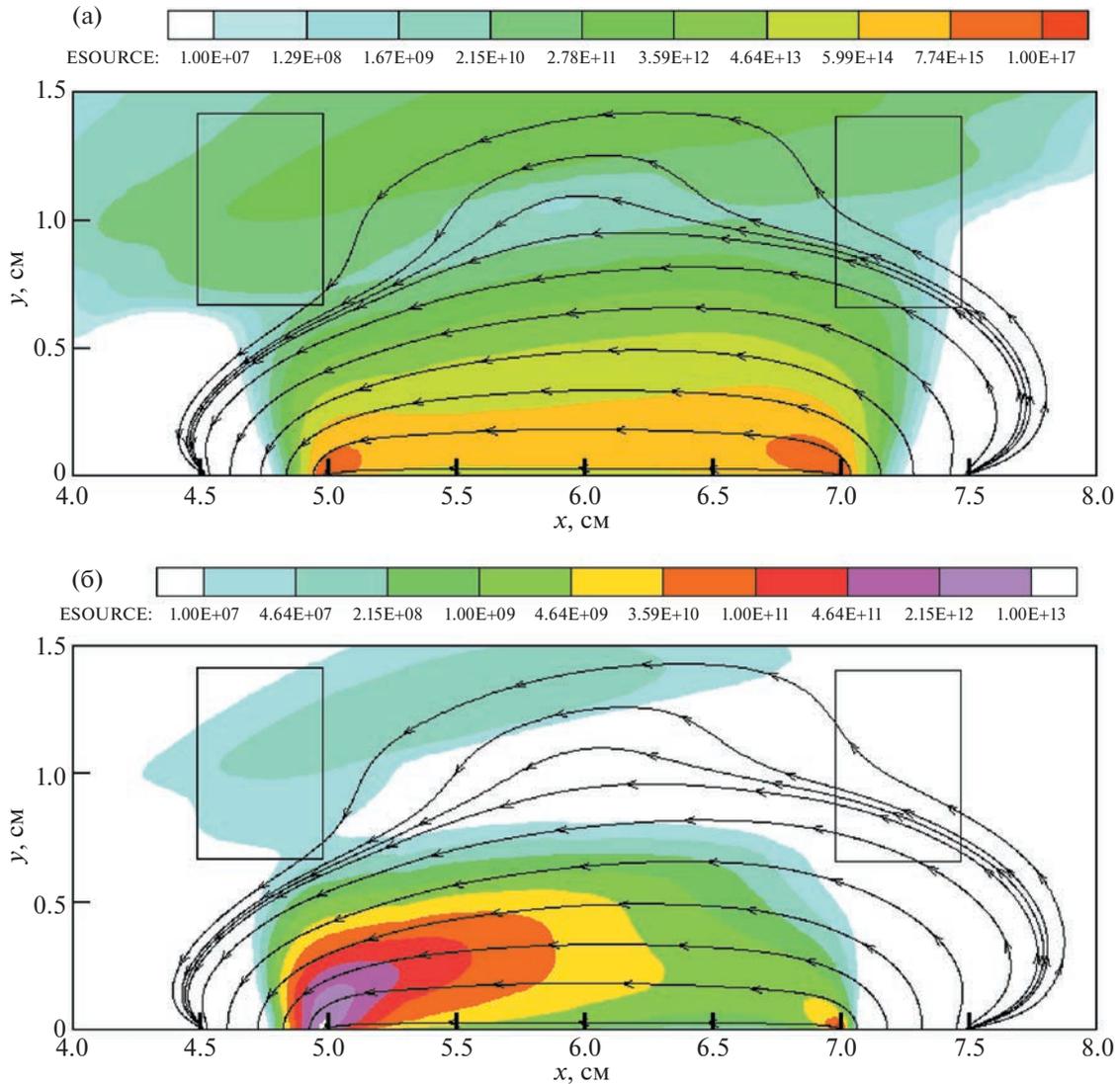


Рис. 11. Объемная скорость ионизационных процессов ($1/(\text{см}^3 \cdot \text{с}) p_\infty = 0.14$ Торр): а) $V = 60$ В, $M = 12$, $B_z = 0$; б) $V = 60$ В, $M = 12$, $B_z = -0.5$ Тл.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате развития амбиполярной модели квазинейтральной разрядной плазмы в части учета внешнего магнитного поля и ее применения к анализу сопряженной задачи о структуре аномального тлеющего разряда, горящего между двумя плоскими электродами вблизи поверхности, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа установлено следующее:

- при использовании амбиполярной модели в качестве граничных условий следует задавать падение потенциала между границами токового столба в квазинейтральной плазме (аналог положительного столба), в результате чего удастся рассчитать полный ток через токовый канал. В силу того, что приэлектродные слои пространственного заряда в данной модели не учитываются и полное падение напряжения между электродами не определяется, в данной постановке не удастся моделировать внешнюю электрическую цепь и задавать необходимую э.д.с. для поддержания тлеющего разряда, как это делается при использовании диффузионно-дрейфовой модели;

- учет магнитного поля в амбиполярной модели приводит к модификации коэффициента амбиполярной диффузии и подвижностей заряженных частиц;

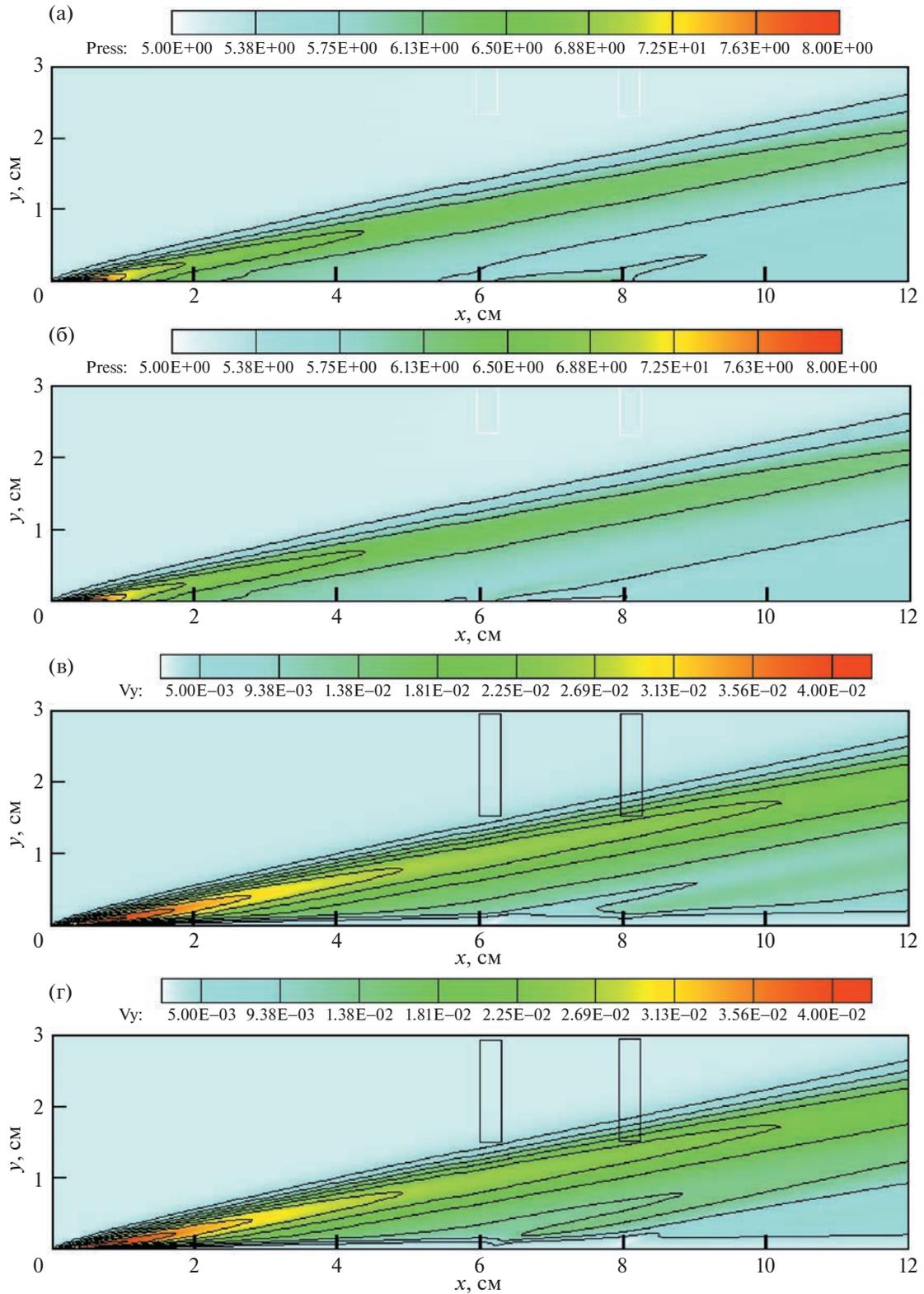


Рис. 12. Газодинамические параметры аномального тлеющего разряда при $p_\infty = 5$ Торр, $V = 320$ В, $M = 6$: давление (в Торр) при $B_z = -0.5$ Тл (а) и $B_z = +0.5$ Тл (б); скорость V_y (v/V_∞) при $B_z = -0.5$ Тл (в) и $B_z = +0.5$ Тл (г).

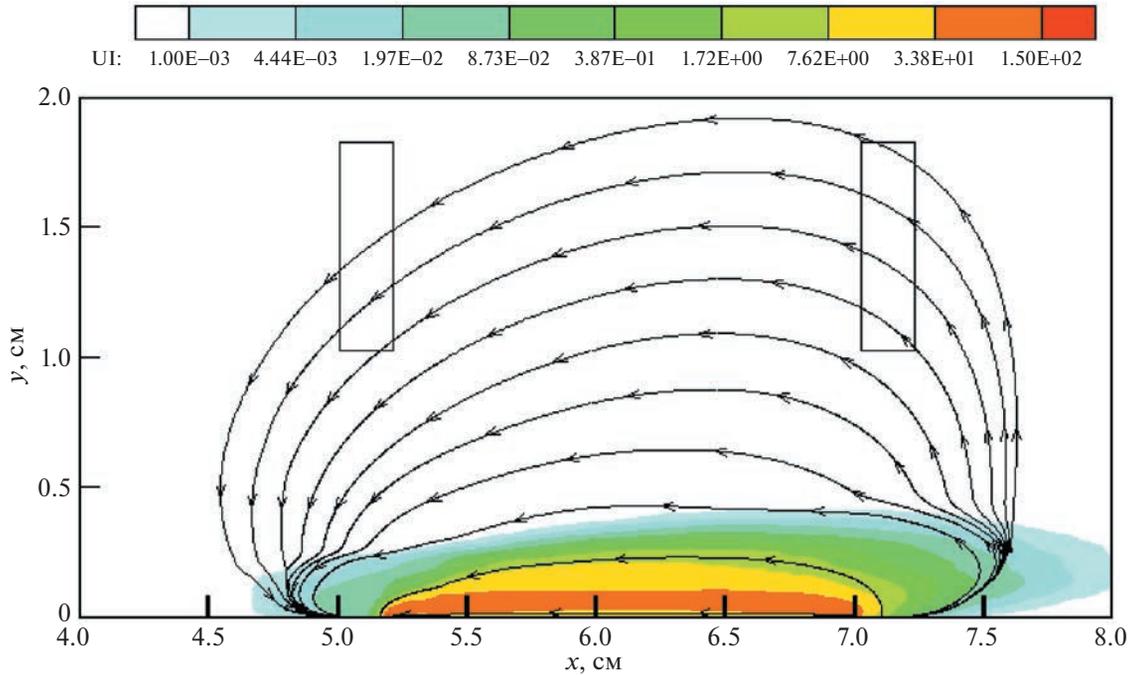


Рис. 13. Концентрация заряженных частиц (в 10^9 см^{-3}) при $p_\infty = 5$ Торр, $V = 320$ В, $M = 6$ и $B_z = -0.5$ Тл.

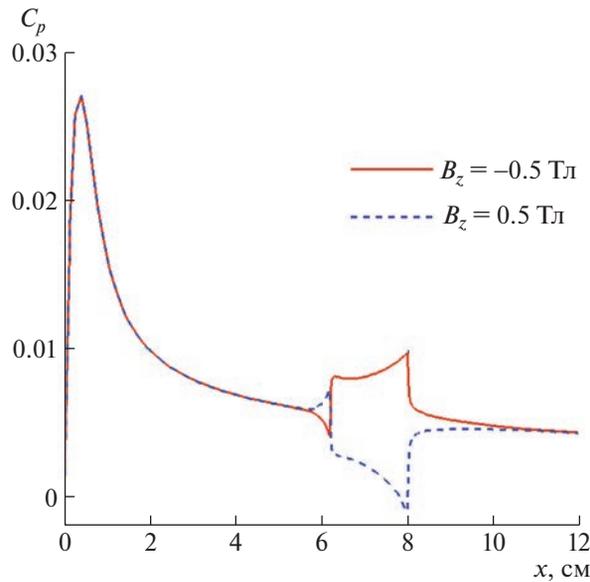


Рис. 14. Распределение коэффициентов давления C_p на поверхности обтекаемой пластины при $p_\infty = 5$ Торр, $V = 320$ В, $M = 6$.

— при решении задачи о структуре аномального тлеющего разряда в потоке газа необходимо следить за соблюдением ограничений, накладываемых на используемые замыкающие электрофизические функции (коэффициент ионизации, подвижности электронов и ионов), поскольку образующийся при обтекании поверхности пограничный слой весьма сильно изменяет условия горения разряда;

— использование внешнего магнитного поля с разной поляризацией вектора магнитной индукции позволяет модифицировать условия горения разряда, создавая вблизи электродов области повышенного и пониженного давления;

– вблизи границ электродов образуются области повышенной напряженности электрического поля, зарядовых концентраций, и, как следствие, повышенной мощности джоулевого тепловыделения.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-11-00062).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Энгель А., Штеенбек М.* Физика и техника электрического разряда в газах. Т. 2. М.—Л.: Объединенное научно-техн. изд-во НКТП СССР, 1936. 382 с.
2. *Капцов Н.А.* Электрические явления в газах и вакууме. М.: Гостехиздат, 1950. 808 с.
3. *Браун С.* Элементарные процессы в плазме газового разряда. М.: 1961. Гос. Изд-во литературы в области атомной науки и техники. 323 с. (Brown S.C. Basic Data of Plasma Physics. Technology Press of M.I.T. and Wiley, 1966).
4. *Грановский В.Л.* Электрический ток в газе. Установившийся ток. М.: Наука, 1971. 543 с.
5. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 591 с.
6. *Kimmel R.L., Hayes J.R., Menart J.A., Shang J.* Effect of surface plasma discharge on boundary layers at Mach 5 // AIAA Paper 2004–509. 2004. 10 p.
7. *Menart J., Shang J.S., Kimmel R., and Hayes J.* Effects of Magnetic Fields on Plasmas Generated in a Mach 5 Wind Tunnel // AIAA Paper 2003-4165. 2003. 13 p.
8. *Shang J.S., Surzhikov S.T., Kimmel R., Gaitonde D., Menart J., Hayes J.* Mechanisms of plasma actuators for hypersonic flow control // Progress in Aerospace Sciences. 2005. V. 41. P. 642.
9. *Суржиков С.Т.* Физическая механика газовых разрядов. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2006. 640 с.
10. *Гладуш Г.Г., Самохин А.А.* Численное исследование шнуrowания тока на электродах в тлеющем разряде // Прикладная механика и техническая физика. 1981. № 5. С. 15–23.
11. *Райзер Ю.П., Суржиков С.Т.* Двумерная структура нормального тлеющего разряда и роль диффузии в формировании катодного и анодного пятен // Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 25. № 3. С. 428–435.
12. *Битюрин В.А., Бочаров А.Н., Попов Н.А.* Численное моделирование электрического разряда в сверхзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 4. С. 160–172.
13. *Баранов В.Б., Краснобаев К.В.* Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука. 1977. 333 с.
14. *Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я.* Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984. 392 с.
15. *Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М.* Кинетика частиц плазмы. М.: Атомиздат, 1969. 396 с.
16. *Суржиков С.Т.* Двухмерная электродинамическая структура нормального тлеющего разряда в продольном магнитном поле // Физика плазмы. 2017. Т. 43. № 3. С. 303–313.
17. *Райзер Ю.П., Суржиков С.Т.* Еще раз о природе эффекта нормальной плотности тока на катоде тлеющего разряда // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. № 8. С. 452–456.
18. *Surzhikov S.T., Shang J.S.* Two-component plasma model for two-dimensional glow discharge in magnetic field // Journal of Computational Physics. 2004. V. 199. P. 437–464.
19. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1966. 624 с.
20. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988. 304 с.
21. *Трубников Б.А.* Теория плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1996. 463 с.
22. *Суржиков С.Т.* Гиперзвуковое обтекание разреженным газом поверхностного тлеющего разряда с внешним магнитным полем. М.: Изд-во ИПМех РАН, 2011. 273 с.
23. *Суржиков С.Т., Шэнг Дж.С.* Вязкое взаимодействие на плоской пластине с поверхностным разрядом в магнитном поле // Теплофизика высоких температур. 2005. Т. 43. № 1. С. 21–31.

УДК 533.6.011.35:534-13

ИССЛЕДОВАНИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕЖДУ ВОЗВРАЩАЕМЫМ АППАРАТОМ И ДВИГАТЕЛЬНЫМ ОТСЕКОВ ПИЛОТИРУЕМОГО КОСМИЧЕСКОГО КОРАБЛЯ ПРИ ИХ РАЗДЕЛЕНИИ В СЛУЧАЕ АВАРИИ

© 2023 г. А. В. Гарбарук^а, Б. Н. Даньков^б, А. А. Дядькин^с, А. П. Косенко^б, М. В. Михайлов^с, С. П. Рыбак^{с,*,**}, М. Х. Стрелец^а, М. Л. Шур^а

^аСанкт-Петербургский политехнический университет (ФГАОУ ВО «СПбПУ»),
Санкт-Петербург, Россия

^бЦентральный научно-исследовательский институт машиностроения (ЦНИИмаш),
Королев, Московская обл., Россия

^сРакетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королева, Королев, Московская обл., Россия

*E-mail: rybak_53@bk.ru

**E-mail: Sergey.Rybak@rsce.ru

Поступила в редакцию 13.07.2023 г.

После доработки 20.08.2023 г.

Принята к публикации 01.09.2023 г.

Представлены результаты анализа исследований течения в зазоре между возвращаемым аппаратом пилотируемого космического корабля и расположенным за ним двигательным отсеком при их разделении в случае аварии ракеты на активном участке траектории. Особое внимание уделено автоколебательным процессам различной природы, возникающим при определенных расстояниях разделения на трансзвуковых режимах полета. Предложен подход к оценке режимов существования и частот автоколебаний на основе геометрии задачи и условий обтекания.

Ключевые слова: автоколебательные процессы, волновые возмущения, стоячая звуковая волна, слой смешения, крупномасштабные вихревые структуры, численное моделирование, двухэтапный RANS-LES подход, методы экспериментальных исследований

DOI: 10.31857/S102470842360046X, EDN: QXWMCZ

Экспериментальные и численные исследования течения в зазоре между возвращаемым аппаратом (ВА) пилотируемого транспортного корабля и расположенным за ним двигательным отсеком (ДО), защищенным обтекателем (ОДО), при их разделении в случае аварии ракеты на активном участке траектории, выполненные авторами, выявили возникновение автоколебательных процессов на определенных режимах полета ракеты и расстояниях разделения объектов.

Анализ результатов расчетов и измерений, часть из которых опубликована в [1, 2], позволил предположить аналогию этих процессов с процессами автоколебаний, возникающими при обтекании каверн. Поэтому при анализе процессов в кольцевом зазоре между ВА и ДО авторы опирались, в том числе, на опубликованные данные по обтеканию каверн, обзор которых приведен в начале статьи.

В настоящей работе приводятся результаты анализа природы и механизмов автоколебательных процессов на основе комплексных численных и экспериментальных исследований течения воздуха в зазоре между ВА и ДО.

Также предложен и верифицирован (на основе расчетных и экспериментальных данных) подход к оценке режимов существования автоколебаний и их частот с использованием геометрии задачи и условий обтекания.

Рассмотрим некоторые опубликованные данные по автоколебательным процессам в каверне с открытым и переходным типом течения [3–24]. Согласно работам [3–9] нестационарный процесс в каверне имеет, прежде всего, гидродинамическую природу (по терминологии Д. Рокуелла [12]) и связан с потерей устойчивости слоя смешения отрыва, возникающего при обтекании

каверны. В этом случае в слое образуются крупномасштабные вихревые структуры, которые, смещаясь вниз по потоку, при взаимодействии с задней стенкой деформируются. Задняя стенка при этом становится источником волновых возмущений, которые, распространяясь вверх по потоку через зону отрыва, приводят к росту неустойчивости слоя смешения в его чувствительной зоне (вблизи угловой кромки передней стенки). Вследствие установления обратной связи между колебаниями в области взаимодействия слоя смешения с задней стенкой и около передней стенки возникает упорядоченная в среднем амплитудная и частотная модуляция пульсаций давления в каверне.

Исследования [13–15] показали, что необходимыми условиями для возникновения неустойчивости взаимодействующего с препятствием сдвигового слоя являются нахождение слоя в неравномерном поле течения и наличие поперечной возмущающей силы определенной величины.

В работах [8, 16, 19] было показано, что вторая и третья моды автоколебаний, обусловленных потерей устойчивости сдвигового слоя, соответствуют наиболее интенсивным тонам в спектрах пульсаций давления.

Хеллер и Блисс, изучая особенности сверхзвукового обтекания каверны, установили [5], что неустойчивость сдвигового слоя приводит к периодическому подводу в каверну и отводу из нее массы газа и, как следствие этого, к колебанию давления на задней стенке. При росте давления генерируются волны сжатия, которые распространяются вверх по потоку со сверхзвуковой абсолютной скоростью. Внутри зоны отрыва волна является прямой, а в области идеального течения – наклонной. В процессе взаимодействия с передней стенкой отражается лишь внутренняя (прямая) часть этой волны. При ее смещении вниз по потоку происходит выпучивание сдвигового слоя. Когда волна достигает задней стенки, масса газа, находящаяся в наружной части отрывного течения, вытесняется из каверны. Далее процесс повторяется. Таким образом, было установлено существование помимо нестационарного процесса гидродинамической природы еще и расходно-волнового процесса. Позднее было показано, что к образованию крупномасштабных вихрей в рассмотренном случае приводят, прежде всего, волны, отраженные от передней стенки каверны [7, 20].

В связи с возникновением при сверхзвуковой скорости набегающего потока волновой системы Хэнки и Шенг предложили [8] определять частоту вышеописанного автоколебательного процесса из условия, отражающего чисто волной процесс. При этом скорость перемещения отраженной волны принималась равной конвективной скорости сноса вихря вниз по потоку.

Этими же авторами было обращено внимание на возможность возникновения в каверне резонансного (акустического) процесса при условии равенства частот прямой и обратной бегущих волн [8].

Дальнейшее развитие понимания природы нестационарного течения в каверне было достигнуто при проведении комплексных экспериментально-теоретических исследований особенностей течения в переходной (по терминологии [25]) каверне, когда оторвавшийся поток присоединялся ко дну [10]. В исследованиях, проведенных при $M_\infty = 0.9$, было установлено, что крупномасштабные вихревые структуры, определяющие автоколебательный процесс гидродинамической природы, возникают не на передней угловой кромке, как полагал Росситер, а ниже по течению – в первом по потоку гребне волны неустойчивости. При этом происходит вовлечение в вихревую структуру массы газа из прилегающих областей отрывного течения.

Распространение волны давления вверх по потоку от задней стенки происходит вначале через область дозвукового течения, располагающуюся в задней части каверны. Затем волна огибает вихрь, который выделяется из кормового отрыва и движется к задней стенке вблизи дна каверны. После этого часть волны распространяется внутри, а другая ее часть снаружи отрывной зоны.

При подходе к задней стенке выделившихся вихревых структур происходит их деформация, вихри дробятся, налезает друг на друга, нарастающая масса газа выдавливается наружу.

Вместе с тем было показано, что источником волновых возмущений является не только задняя стенка каверны, но и области повышенного давления в слое смешения, возникающие перед и за крупномасштабными вихрями в момент их образования, выделения и взаимодействия с дном каверны. Расположение эти новых источников волновых возмущений зависит, прежде всего, от газодинамических и физических свойств слоя смешения в каверне.

Выявлено согласование моментов образования областей повышенного давления в слое смешения с приходом волн давления, распространяющихся от задней стенки с частотой определенных гармоник колебаний. Установлено, что усиление колебаний на модах, отличных от первой, обуславливается интерференцией указанных волн давления и волновых возмущений. Нестаци-

онарный процесс в этом случае представляется как совокупность синхронных взаимозависимых автоколебаний, характерное время которых определяется положением источника волновых возмущений.

Было подтверждено, что в каверне при некоторых режимах обтекания реализуются одновременно несколько нестационарных процессов: гидродинамической, расходно-волновой и резонансной природы, причем волна давления, генерируемая задней стенкой, участвует во всех этих процессах, но в разных гармониках колебаний [10].

Автоколебания резонансной природы порождаются чисто волновым (акустическим) процессом и возникают в случае взаимодействия двух звуковых волн, распространяющихся на рассматриваемой частоте навстречу друг к другу. Следовательно, передвижение отраженной волны, участвующей в резонансном процессе, не может быть ограничено перемещением в слое смещения вихревых структур. Остается допустить, что вместе с указанными структурами смещается лишь периферийная часть отраженной волны, а ее внутренняя часть распространяется в глубине зоны отрыва с большей скоростью, близкой к местной скорости звука [23].

Возникновение автоколебательных процессов приводит к появлению на характеризующих их частотах узкополосных составляющих в функциях спектральной плотности и когерентности взаимного спектра пульсаций давления, а в функциях фазы $\theta_{sw}(f)$ участков, где $d\theta_{sw}/df = 0$ ($s(t)$ и $w(t)$ – сигналы, характеризующие пульсации давления в рассматриваемых точках). Для выявления механизмов автоколебательных процессов, возникающих при обтекании каверны, требуется знание расположения источников и псевдоисточников пульсаций давления, определяющих анализируемый процесс, и корреляционных характеристик пульсаций для пар точек, находящихся вблизи этих источников. Если рассматриваемые колебания происходят между абсолютно жесткими стенками и $\theta_{sw}(f) = \pi$, то процесс, скорее всего, имеет резонансную природу. Подтверждением этого служит образование стоячей звуковой волны с пучностями на стенках каверны. При этом между стенками располагается половина длины стоячей звуковой волны первой моды, причем колебания давления во всех точках от первой пучности до узла должны происходить синхронно, но в противофазе с колебаниями после узла до второй пучности [26].

Возникающие в каверне автоколебательные процессы различной природы не являются альтернативой друг другу, а взаимосвязаны, протекают одновременно, поддерживают друг друга, что не дает им затухнуть под воздействием диссипативных потерь [24].

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Испытываемая модель масштаба М1 : 70 состояла из двух частей: модели отделяемого головного блока (ОГБ) с моделью возвращаемого аппарата (ВА) и имитатором системы аварийного спасения (САС) и модели двигательного отсека (ДО), защищенного обтекателем (ОДО). На обеих частях производилось измерение давления и пульсаций давления. Общий вид модели и положение датчиков пульсаций давления (обозначены – П1 и П2) показаны на рис. 1.

Испытания модели проводились в трансзвуковой аэродинамической трубе (АДТ) со сниженным уровнем фонового шума в рабочей части.

Модель ДО устанавливалась на хвостовой державке, которая крепилась в центральном узле подвески механизма задания углов атаки, скольжения и передвижения модели. Модель ОГБ с помощью боковой державки и фланца крепилась в оптическом окне рабочей части АДТ.

Эксперименты проводились при различных фиксированных значениях числа Маха набегающего потока (в диапазоне от 0.6 до 1.6) и относительного расстояния dX/D между моделями ОГБ и ДО (от 0.05 до 5.0). Расстояние dX отсчитывалось от центральной точки сегментальной поверхности днища ВА до верхнего торца ДО (D – диаметр мишеля модели ВА, $D = 63.9$ мм). Числа Рейнольдса, рассчитанные по параметрам набегающего потока и по длине модели ОГБ, составляли $Re > 4.5 \times 10^6$, что обеспечивает турбулентный режим течения в исследуемой области течения между моделями ВА и ДО.

Измерения нестационарных давлений на поверхности модели проводились посредством малогабаритных преобразователей давления с собственной частотой более 200 кГц. Один датчик пульсаций давления (точка П1) располагался на периферии днища ВА, другой – точка П2 – на верхнем торце ДО напротив П1. Для повышения точности определения характеристик пульсаций давления, включая корреляционные, длительность эксперимента при постоянных условиях составляла не менее 10 с.

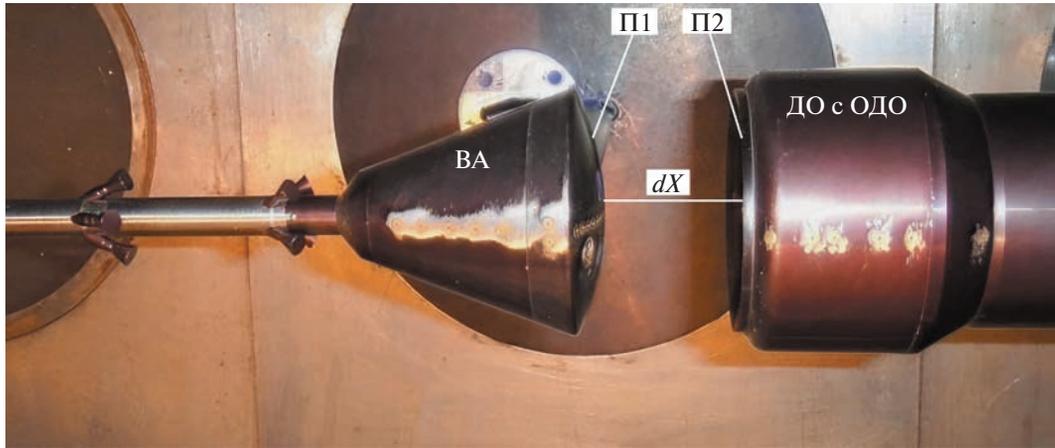


Рис. 1. Общий вид модели, расположение датчиков пульсаций давления П1 (на днище ВА) и П2 (на верхнем экране ДО). ВА – возвращаемый аппарат, ОДО – обтекатель двигательного отсека, dX – расстояние разделения ВА и ОДО.

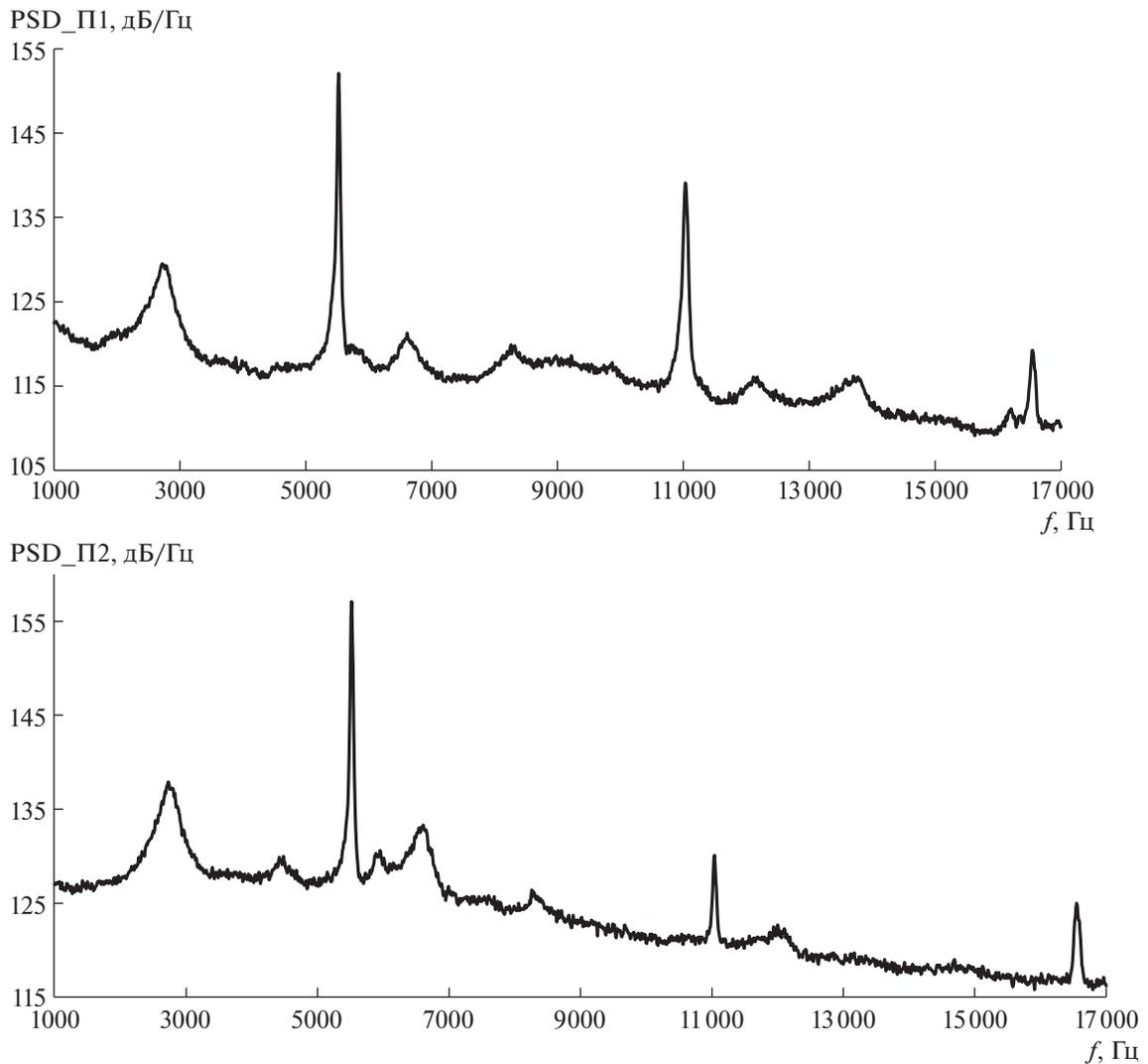


Рис. 2. Функции спектральной плотности мощности пульсаций давления в точках П1 и П2: $M_\infty = 0.9$, $dX/D = 0.5$.

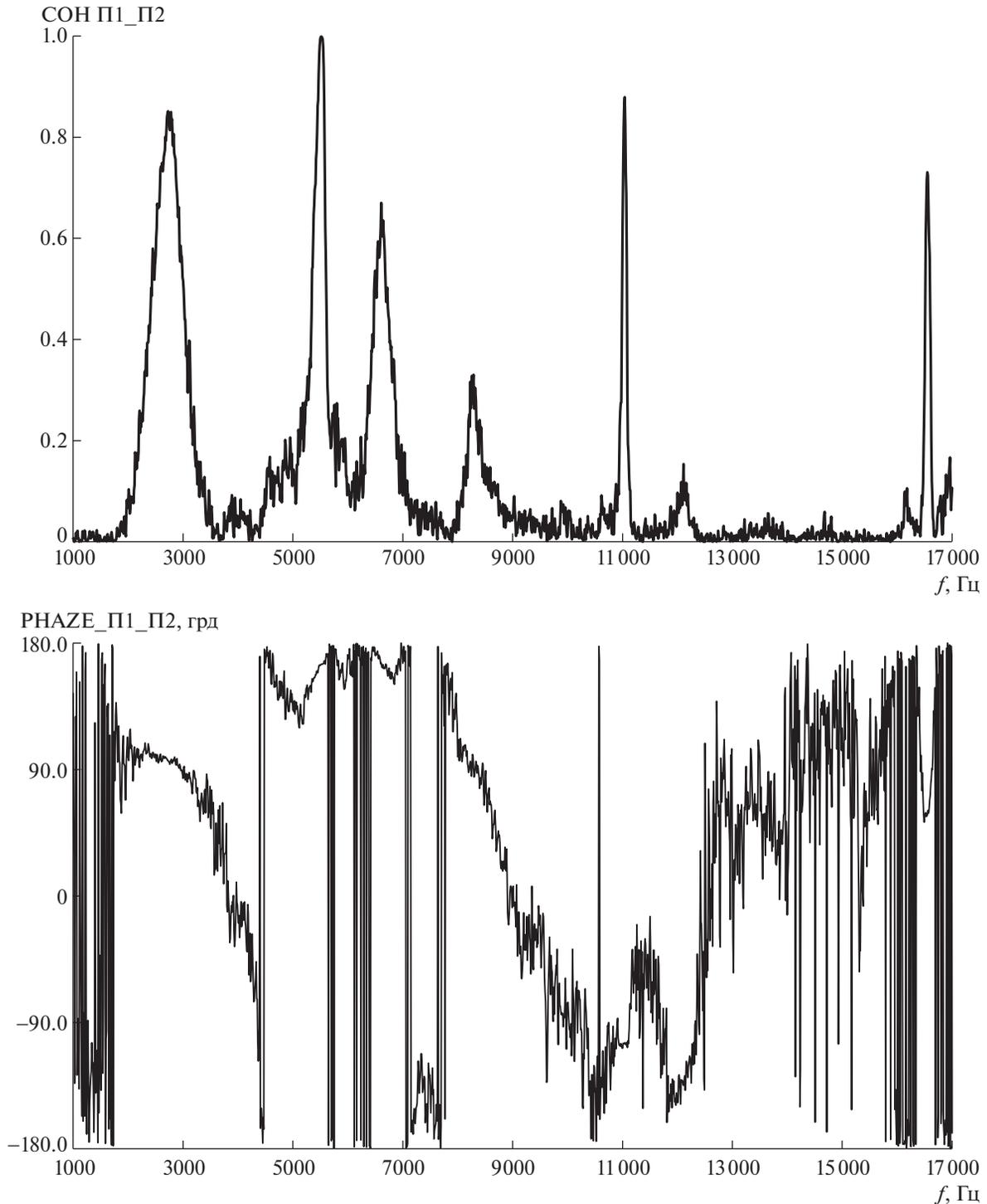


Рис. 3. Функции когерентности и фазы взаимного спектра пульсаций давления в точках П1 и П2: $M_\infty = 0.9$, $dX/D = 0.5$.

На рис. 2 и 3 приводятся результаты обработки измерений, полученных при испытаниях модели на режиме с параметрами: число Маха $M_\infty = 0.9$, расстояние разделения $dX/D = 0.5$. Представлены данные по функциям спектральной плотности мощности, PSD (Power Spectral Density), когерентности (COH) и фазы (PHASE) взаимного спектра пульсаций давления для точек П1 и П2 (разрешение по частоте: 10 Гц).

Детальные описания методики и результатов экспериментальных исследований представлены в [1].

2. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Поскольку характерное время разведения существенно превышает характерное время формирования статистически установившейся турбулентности, в расчете предполагается, что турбулентное течение, формирующееся в зазоре между ОГБ от ДО, является квазистационарным. Это позволяет воспроизвести данный процесс с помощью серии расчетов статистически стационарных течений при фиксированных (шаг за шагом увеличивающихся) значениях расстояния dX между ВА и ДО. Поэтому численное моделирование турбулентного обтекания разделяющихся ОГБ и ДО и течения, формирующегося в зазоре между ними, осуществлялось путем серии расчетов при фиксированных значениях числа Маха и расстояний разделения.

Для этого использовался разработанный авторами из СПбПУ подход двухэтапных RANS-LES расчетов, суть которого состоит в следующем.

На первом (вспомогательном) этапе проводится расчет обтекания полной конфигурации ОГБ – ДО с ОДО и с фрагментом ракеты-носителя путем решения уравнений Рейнольдса (RANS). Для их замыкания использована полуэмпирическая модель турбулентности Ментера $k-\omega$ SST [27] с поправкой на кривизну линий тока и вращение [28].

На втором этапе проводится вихреразрешающий расчет течения в ограниченной части потока, включающей только нижнюю по потоку часть ВА, ДО с ОДО, зазор между ними и фрагмент РН. При этом использовался вихреразрешающий гибридный метод Delayed Detached-Eddy Simulation (DDES) [29] в сочетании с определением подсеточного линейного масштаба, адаптированного к слоям смешения [30]. Использование этого масштаба обеспечивает быстрый переход от полностью моделируемых рейнольдсовых напряжений в RANS подобласти DDES к практически полностью разрешенным напряжениям в его LES- подобласти.

Граничные условия для RANS-расчетов ставятся следующим образом.

На твердых стенках используются условия прилипания для скорости и условия адиабатичности для температуры. Кинетическая энергия турбулентности k полагается равной нулю, а удельная скорость диссипации энергии определяется по формуле [27]: $\omega_w = 60\nu/(\beta_1(\Delta y_1)^2)$, где ν – молекулярная вязкость, $\beta_1 = 0.075$ – эмпирическая константа модели Ментера, а Δy_1 – величина первого пристенного шага расчетной сетки.

На входных и выходных границах для газодинамических уравнений используются характеристические граничные условия, в которых инварианты Римана рассчитываются по известным параметрам невозмущенного потока. Турбулентные характеристики на левой входной границе задаются таким образом, чтобы обеспечить быстрое формирование развитого турбулентного пограничного слоя на поверхности ОГБ, что является оправданным при рассматриваемых высоких значениях числа Рейнольдса. В частности, турбулентная вязкость полагается равной молекулярной ($\nu_t = \nu$), а кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации определяются по формулам $k = \nu_t \cdot \omega$, $\omega = 10U_\infty/L_0$, где U_∞ – скорость набегающего потока, L_0 – характерный линейный размер. Те же значения k и ω задаются на внешней границе области, а на выходной границе турбулентные характеристики определяются путем линейной экстраполяции из внутренних точек области. Наконец, на плоскостях симметрии $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$ используются условия симметрии.

Граничные условия на DDES-этапе в целом аналогичны описанным выше условиям, используемым на RANS-этапе. Основное различие состоит в том, что на левой входной границе DDES подобласти характеристические граничные условия используются только вне пограничного слоя и формулируются относительно инвариантов Римана, вычисляемых по локальным параметрам потока на этой границе, которые известны из RANS-решения, полученного на первом этапе. На части входной границы, находящейся внутри пограничного слоя, используются граничные условия первого рода, т.е. задаются профили скорости, температуры и турбулентных характеристик из RANS-решения. Кроме того, в том случае, если входная граница является сверхзвуковой, то на ней задается также давление из RANS-решения, а в случае дозвуковой границы оно определяется путем линейной экстраполяции из внутренних точек области. Наконец, в азимутальном направлении для всех переменных используются условия периодичности.

Расчеты проводились с использованием многоблочных структурированных сеток типа “Химера”, шаги которых сгущались в областях высоких градиентов параметров потока. В частности, в пристеночных пограничных слоях эта сетка сгущалась в направлении нормали к стенке таким образом, чтобы ближайший к стенке шаг в единицах закона стенки был меньше 1.0 ($\Delta y_1^+ < 1.0$) и отношение соседних шагов не превышало 1.3. Сетка измельчалась также в окрестности сопел ДУ

САС и слоя смешения, отрывающегося от поверхности ВА. Общий размер сетки зависел от протяженности зазора dX/D и составлял от 13 до 16 млн ячеек для 3D RANS и от 27 до 38 млн для DDES. Детальное описание сеток приведено в [2].

Численные расчеты в рамках описанного выше подхода выполнены с использованием собственного CFD кода авторов из СПбПУ “Numerical Turbulence Simulation” (NTS) [31], представляющего собой конечно-объемный код, работающий на многоблочных структурированных сетках типа “Химера”.

Для численного решения уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа в коде используется неявный метод расщепления разностей векторов потоков типа Роу [32]. Вязкие составляющие потоков во всех уравнениях аппроксимируются с использованием симметричной схемы второго порядка, а аппроксимация их невязких составляющих зависит от используемого подхода к моделированию турбулентности. В частности, в рамках RANS они аппроксимируются с использованием противопоточной схемы третьего порядка точности, а в рамках DDES – с помощью гибридной схемы, представляющей собой взесь противопоточной схемы третьего порядка и симметричной схемы четвертого порядка [33].

Для интегрирования уравнений по времени в коде используется неявная трехслойная схема второго порядка точности с внутренними итерациями по псевдовремени. На каждой итерации система линейных алгебраических уравнений решается с использованием релаксации Гаусса–Зейделя по плоскостям.

Расчеты проводились для натуральных условий полета РКН и для условий испытаний модели при различных фиксированных значениях числа Маха (в диапазоне от 0.8 до 1.5) и относительного расстояния dX/D между ВА и ДО (от 0.5 до 2.5). Временной интервал, в течение которого производилось накопление данных по колебаниям газодинамических параметров на квазистационарных режимах обтекания натуральных ВА и ДО для последующей статистической обработки, составлял около 1.12 с.

Некоторые результаты численных расчетов приведены в разделе 3.

Детальные описания алгоритмов и методик численного моделирования, а также результаты численных исследований представлены в [2].

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В экспериментальных исследованиях автоколебательные процессы выявлены на режимах по числу Маха (в диапазоне от 0.8 до 1.2) и относительному расстоянию dX/D между ВА и ДО (от 0.5 до 1.5). При этом на ряде частот в спектрах измеренных пульсаций давления выделяются интенсивные узкополосные составляющие. Практически на всех этих частотах значения функции когерентности пульсаций давления в точках П1 и П2 превышали 0.3 (см. рис. 3).

Для выявления природы вышеуказанных узкополосных составляющих, характеризующих автоколебательные процессы в зазоре между ВА и ДО, проведен анализ полученных в численных исследованиях полей различных параметров течения в зазоре между моделями ВА и ДО. Поскольку природа и механизмы автоколебательных процессов идентичны для всех режимов, на которых они проявляются, то детальный анализ выполнен только для режима $M = 0.9$ и $dX/D = 0.5$, на котором возникают наиболее интенсивные автоколебания пульсаций давления в зазоре между днищем ВА и лобовым экраном ДО.

На рис. 4 представлено поле осредненного числа Маха, полученное на первом (RANS) этапе расчета (здесь: $L_0 = (1/70)$ м). Видно, что пограничный слой, оторвавшийся с угловой кромки ВА, примыкает к лобовой поверхности ДО. То есть, течение между ВА и ДО относится к так называемому открытому типу [25]. Скорость течения за угловой кромкой ВА над границей слоя смешения является сверхзвуковой и лишь в области примыкания под воздействием располагающегося здесь замыкающего скачка уплотнения (1) опять становится дозвуковой. Таким образом, при рассматриваемых условиях реализуется заключительная стадия трансзвуковой перестройки течения [24].

Анализ механизмов автоколебательных процессов в зазоре между моделями ВА и ДО выполнен с использованием кадров цифровых мультфильмов с мгновенными значениями полей различных параметров течения в зазоре, полученных с шагом относительного времени $t = 0.1$ (что для расчетов модели соответствует шагу по времени $t \sim 5$ микросекунд). В статье такие кадры приведены для режима $M = 0.9$, $dX/D = 0.5$.

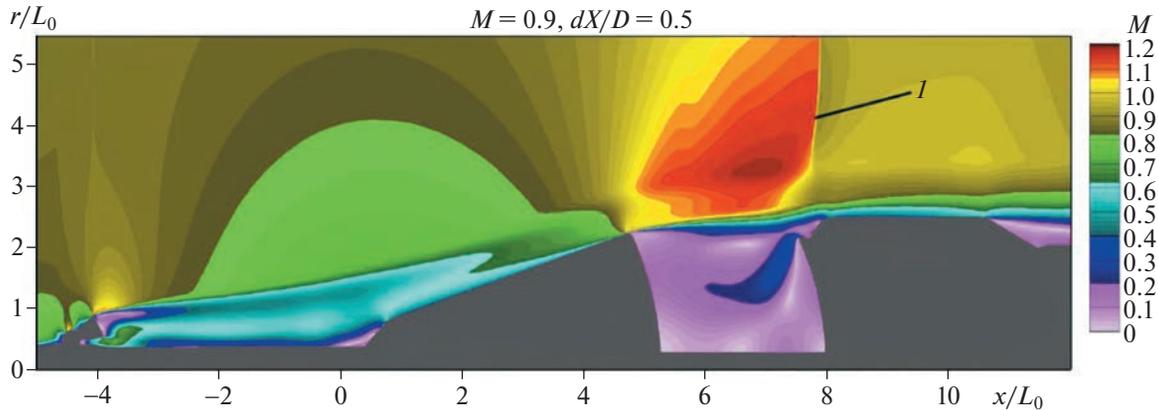


Рис. 4. Поле осредненного числа Маха, полученное в численных исследованиях при использовании уравнений Рейнольдса: $M_\infty = 0.9$, $dX/D = 0.5$. *1* – замыкающий скачок уплотнения.

На рис. 5–7 представлены полученные в DDES-расчетах модели поля мгновенных значений коэффициента давления и безразмерного модуля завихренности, соответствующие различным моментам относительного времени рассматриваемых процессов, t ($t = t/(L_0/U_\infty)$). Течение в зоне отрыва нестационарное. В момент относительного времени $t = 1.0$ давление на лобовой поверхности ДО начинает возрастать. Вначале это отмечается на периферийной части ДО, что обусловлено началом слива массы газа из слоя смешения. Из наиболее важных особенностей течения следует выделить (см. рис. 5): волновое возмущение *1*, смещающееся от ВА к ДО; возникновение в слое смешения первого по потоку гребня волны неустойчивости со сформировавшимся вихрем *2*; развитие вихрей в крупномасштабные вихревые структуры *3*; их смещение вниз по потоку и деформация при взаимодействии с лобовой поверхностью ДО *4*. На развитие вихревых структур оказывает влияние затекание *5* в указанные структуры массы газа из возвратного течения в зоне отрыва.

С приходом волны *1* к лобовой поверхности ДО здесь происходит дальнейшее повышение давления и при $t = 1.8$ оно достигает максимального значения (см. рис. 5). Слив массы газа из слоя смешения возрастает. Далее на периферийную часть ДО начинают набегать смещающиеся сюда новые вихревые структуры. При этом давление на лобовой поверхности ДО снижается. К моменту времени $t = 3.2$ сюда подходит вихревая структура *2*, зародившаяся при $t = 1.0$ в первом по потоку гребне волны неустойчивости (см. рис. 7).

Рост давления на лобовой поверхности ДО при $t = 1.0$ – 1.8 приводит к генерации волновых возмущений *6*, распространяющихся к ВА (рис. 7). Под воздействием этих возмущений, в свою очередь, повышается давление на поверхности днища ВА. Возникает отраженная волна, отмеченная на рис. 5 цифрой *1*.

Интенсивность волновых возмущений, распространяющихся к ВА, а также отраженной волны меняется во времени в зависимости от изменения величины давления на ДО. Соответственно, изменяется и скорость распространения волновых возмущений (от скорости распространения звуковых волн до скорости распространения волн сжатия). Анализ полей полученных газодинамических параметров течения показал, что средняя скорость распространения волновых возмущений *6* внутри зоны отрыва близка к местной скорости звука. В соответствии с этим, рост давления на ДО при $t = 1.0$ – 1.8 сказывается на величине давления на поверхности ВА при $t = 2.8$ – 3.7 (см. рис. 6, 7).

Изменение давления на ДО и ВА происходит противоположным образом: когда давление на ДО повышается, на ВА оно снижается, и наоборот. При снижении давления на ВА слой смешения за его угловой кромкой разворачивается по направлению вглубь зоны отрыва, а при повышении – выпучивается (см. рис. 6 ($t = 2.3$) и 7 ($t = 3.7$)).

Выявленные детали изменения характера течения находятся в согласии с вышеизложенными особенностями автоколебательных процессов в кавернах. Отмеченная особенность в изменении давления на ДО и ВА, а также распространение части отраженной волны *1* в глубине отрывного течения (см. рис. 5) свидетельствуют о существовании в рассматриваемой области резонансного процесса. Обращает на себя внимание определяющая роль волнового возмущения, генерируе-

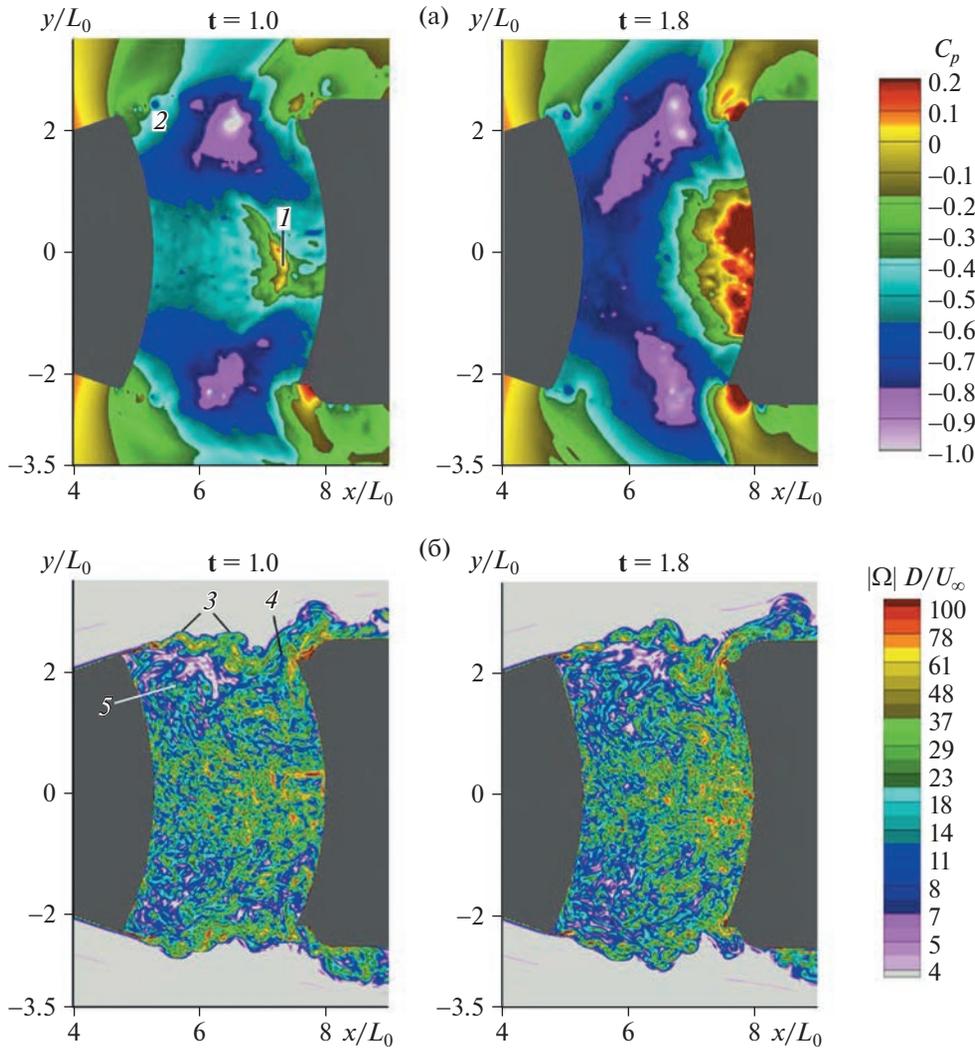


Рис. 5. Поля мгновенных значений коэффициента давления, C_p (а) и относительного модуля завихренности, $|\Omega| D/U_\infty$ (б) для безразмерного момента времени $t = 1.0$ (слева) и $t = 1.8$ (справа): $M_\infty = 0.9$, $dX/D = 0.5$.

мого областью присоединения потока на ДО, для развития нестационарных процессов в рассматриваемом зазоре.

На рис. 8 приводится сопоставление функций спектральной плотности мощности пульсаций давления, полученных при испытаниях модели и при численном моделировании течения при условиях испытаний. Видно, что спектры численных расчетов, в целом, согласуются с экспериментальными данными (за исключением спектральной составляющей в окрестности частоты 2750 Гц).

На основе анализа данных численных и экспериментальных исследований разработан подход и проведена оценка характерных частот автоколебаний различной природы в зазоре между ВА и ДО и соответствующих им чисел Струхала $Sh = f \cdot dX/U_\infty$.

Если пренебречь средним значением скорости возвратного потока в зазоре между телами и учесть установленные выше особенности распространения волновых возмущений в этой области, то в случае возникновения акустического резонанса и, следовательно, образования стоячей звуковой волны между ВА и ДО его частота определяется формулой: $f = n \cdot C_0 / (2dX)$, где C_0 – скорость звука, а n – частотный номер моды ($n = 1, 2, 3, \dots$). Скорость звука C_0 , определяемая температурой заторможенного потока T_0 , равна 344.3 м/с. Следовательно, частота первой гармоники резонансного процесса согласно оценкам составляет 5387 Гц, что близко к измеренной частоте 5500 Гц. Резонансную природу автоколебательного процесса на частоте 5500 Гц подтверждает

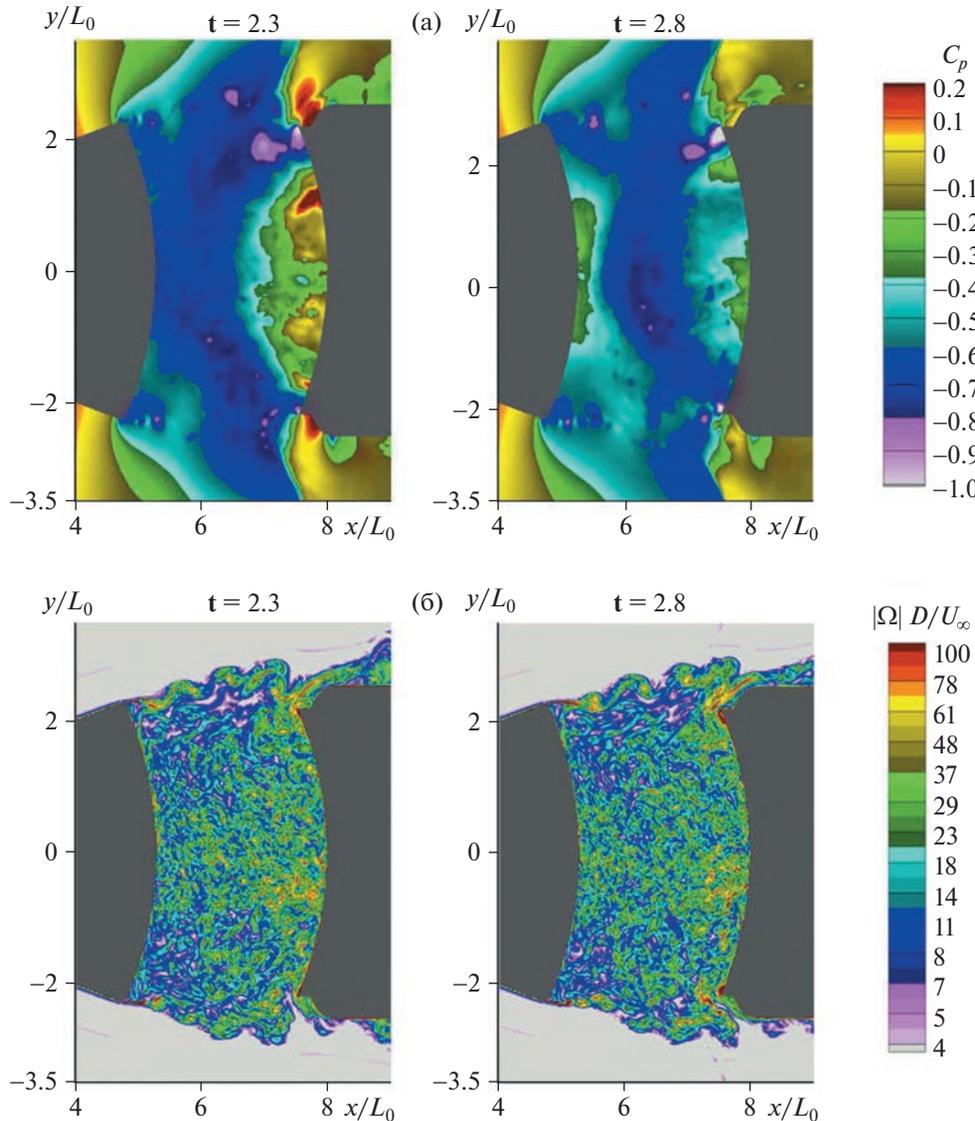


Рис. 6. Поля мгновенных значений коэффициента давления (а) и относительного модуля завихренности (б): $M_\infty = 0.9$, $dX/D = 0.5$; $t = 2.3$ (слева) и $t = 2.8$ (справа).

близость значения угла функции фазы на этой частоте к π (см. рис. 3). Таким образом, выявленные в экспериментах и расчетах частоты 11 000, 16 500, 22 000 и 27 500 Гц соответствуют частотам второй, третьей, четвертой и пятой гармоники этого процесса. Обращает на себя внимание то, что резонансные колебания имеют большую добротность (рис. 8).

Рассмотрим далее, какие из измеренных частот могут быть отнесены к автоколебательному процессу гидродинамической природы. В этом случае частота колебаний первой моды определяется суммой времен формирования в области смещения отрыва крупномасштабной вихревой структуры – t_1 , сноса ее вниз по потоку до взаимодействия с периферийной частью лобовой поверхности модели ДО и последующего слива – t_2 и перемещения волны давления от ДО к ВА – t_3 . Частоты колебаний определяются при этом формулой: $f = n/(t_1 + t_2 + t_3)$.

Из анализа расчетных полей течения около модели следует, что длина слоя смещения отрывного течения составляет 0.0433 м, а расстояние от точки отрыва до места образования первого по потоку гребня волны неустойчивости со сформировавшимся вихрем – 0.0074 м. В долях общей протяженности слоя смещения это соответствует 0.17 (что близко к данным, полученным при изучении каверны с открытым типом течения [11, 23]). Протяженность области деформации вихревых структур перед ДО в среднем оказалась равной 0.0165 м.

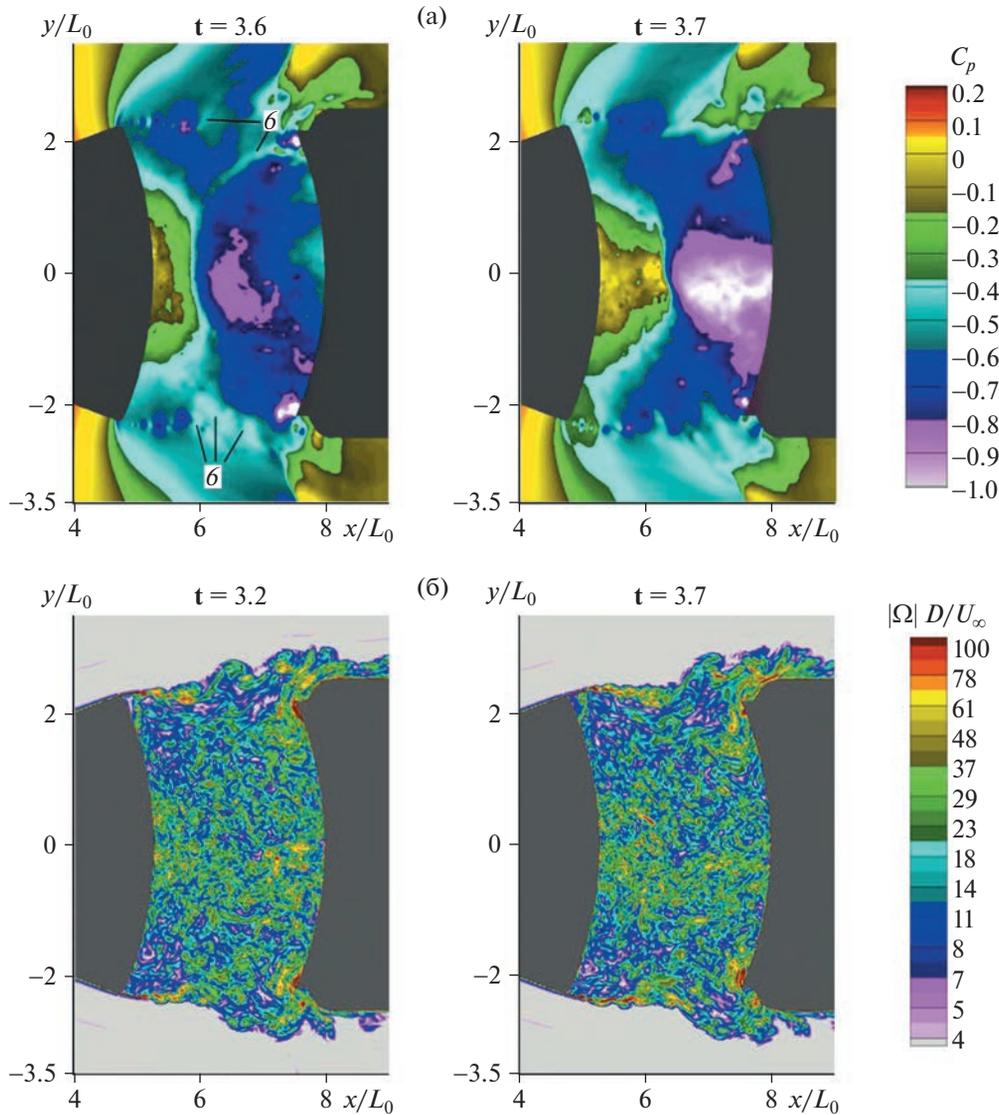


Рис. 7. Поля мгновенных значений коэффициента давления (а) и относительного модуля завихренности (б): $M_\infty = 0.9$, $dX/D = 0.5$; $t = 3.2$ (слева) и $t = 3.7$ (справа).

Из численных расчетов следует также, что время t_1 , определенное по интервалу времени между последовательным появлением в слое смешения сформировавшихся крупномасштабных вихрей, составляет 0.00004 с. Определение абсолютного значения времени для условий эксперимента осуществляется по формуле $t = t \cdot L_0/U_\infty$.

Среднее значение параметра t_2 находится с учетом не только времени смещения вихревой структуры от места образования до ДО, но и времени, затрачиваемого на слив массы газа, т.е. до момента наибольшего изменения величины давления на периферийной части ДО и, следовательно, возрастания генерации волнового возмущения. Завершение слива в рассматриваемом цикле автоколебательного процесса гидродинамической природы происходит при относительном времени $t = 4.3$. Таким образом, относительное время от возникновения вихря (2), (см. рис. 5), до завершения слива составит 3.3, а абсолютное значение этого времени равно 0.000164 с.

Время t_3 можно оценить, используя ранее принятое допущение о том, что волновые возмущения внутри зоны отрыва распространяются с местной скоростью звука, соответствующей температуре T_0 . Путь, пройденный волной от места генерации (периферийной части ДО) до точки отрыва (чувствительной области слоя смешения), составляет 0.0433 м. Тогда время t_3 составит 0.000126 с. В итоге, суммарное время оказывается равным 0.00033 с, что соответствует частоте

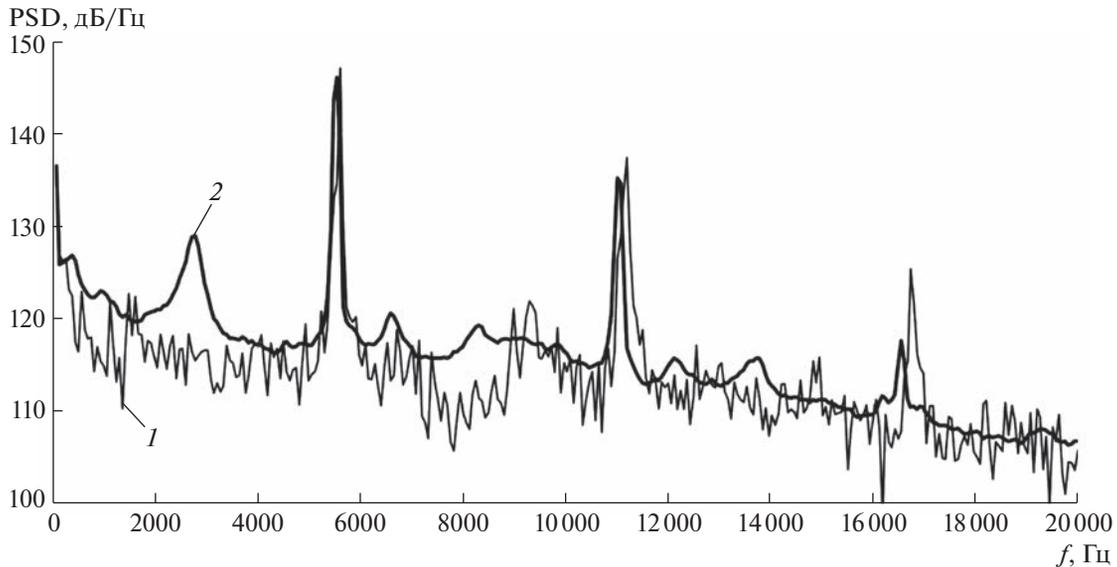


Рис. 8. Сравнение функций спектральной плотности мощности пульсаций давления на днище ВА ($r/D \sim 0.33$), полученных при испытаниях и численных расчетах модели: $M_\infty = 0.9$, $dX/D = 0.5$; 1 — расчет (выборка 3.55×10^4), 2 — испытание (выборка 1.02×10^6).

первой гармонике колебаний — 3030 Гц. Из экспериментальных данных близкой частотой оказывается частота 2750 Гц (отличие не превосходит 10%).

Проведенная фильтрация измеренных на модели сигналов пульсаций давления и определение в различные моменты эксперимента функций спектральной плотности при осреднении в малых временных интервалах выявили нестабильность колебаний давления на частоте 2750 Гц (в отличие от колебаний на резонансной частоте 5500 Гц). Нестабильный характер автоколебательного процесса гидродинамической природы отмечался и ранее, например, при трансзвуковой перестройке течения за задней угловой кромкой надкалиберного конусно-цилиндрического тела [24]. Нестабильность процесса на частоте 2750 Гц в рассматриваемом случае, скорее всего, возрастает из-за заднего расположения замыкающего скачка уплотнения (см. рис. 4), при котором колебания скачка, степень проникновения повышенного давления в отрывную зону, а следовательно, устойчивость слоя смещения, могут меняться в течение эксперимента. В связи с этим, отмеченное выше отсутствие указанной узкополосной составляющей в численных расчетах вполне может быть обусловлено малой (~ 0.02 с) протяженностью временного интервала накопления необходимых статистических данных для выявления узкополосной составляющей спектров в этой области частот.

Таким образом, в условиях эксперимента частоты, характеризующие автоколебательный процесс гидродинамической природы, с учетом гармоник, составят 2750, 5500, 8250, 11000 Гц. Как видно, некоторые частоты совпадают с частотами резонансного процесса (только других гармоник). Близость частоты второй гармонике автоколебательного процесса гидродинамической природы к частоте первой гармонике резонансного процесса свидетельствует о том, что резонансный процесс оказывает влияние на возникновение и поддержку автоколебательного процесса гидродинамической природы через цикл своих колебаний. Это влияние осуществляется через выпучивание слоя смещения у угловой кромки ВА под воздействием волновых возмущений, интенсивность которых возрастает в результате взаимодействия с ДО волны 1, участвующей в резонансном процессе. Действительно, положение вихря 2 во втором цикле колебаний в момент $t = 3.7$ свидетельствует о том, что в конце автоколебательного процесса гидродинамической природы происходит интенсивный рост давления, близкий к тому, что отмечался при $t = 1.8$.

Проведем, наконец, оценку частоты первой гармонике, соответствующей автоколебательному процессу расходно-волновой природы. Предположим, что расходно-волновой процесс определяется волновыми возмущениями, генерируемыми периферийной частью ДО в начале слива, то есть в момент прихода вихря 2 к ДО (в момент $t = 3.2$). В этом случае частота колебаний первой моды определяется суммой времен распространения волнового возмущения от периферийной части ДО до точки отрыва пограничного слоя на ВА — t_3 , перемещения отраженной волны дав-

Таблица 1. Численные и экспериментальные данные по частотам автоколебаний, возникающих в зазоре между ВА и ДО при $M_\infty = 0.9$, $dX/D = 0.5$. Оценки соответствующих чисел Струхала

По расчетным данным [2] для природы, f , Гц/Sh		74.5 0.51	86.3* 0.6	148 1.02	175.7 1.21	214 1.48	266.4 1.84
По экспериментальным данным [1] для модели (масштаб M1 : 70), f , Гц/Sh	2750 0.31	4400 0.49	5500* 0.61	8250 0.92	11000 1.22	13750 1.53	16500 1.83
Оценки по подходу настоящей работы для модели:							
– автоколебания гидродинамической природы, Sh / (№ гармоники)	0.34 (1)		0.67 (2)	1.01 (3)	1.34 (4)		
– автоколебания расходно-волновой природы, Sh/(№ гармоники)		0.43 (1)		0.87 (2)		1.3 (3)	
– автоколебания резонансной природы, Sh/(№ гармоники)			0.6 (1)		1.19 (2)		1.78 (3)

* – частоты, соответствующие максимальным уровням в узкополосных спектрах.

ления от точки отрыва на ВА до места образования вихря 2 – t_4 и времени смещения вихря 2 до ДО – t_5 . Частоты колебаний определяются формулой: $f = n / (t_3 + t_4 + t_5)$. Время t_3 найдено ранее. Значение времени t_4 оценивается, исходя из того, что волновое возмущение распространяется здесь с местной скоростью звука: $t_4 = 0.0000215$ с. Время t_5 находится по расчетным данным как время между моментом $t = 1.0$ (возникновение вихря 2) и $t = 3.2$ (приход вихря 2 к ДО). Тогда $\Delta t = 2.2$ и $t_5 = \Delta t \cdot (L_0 / U_\infty) = 0.000109$ с. В итоге суммарное время оказывается равным 0.000257 с, что соответствует частоте первой гармоники колебаний – 3899 Гц. Из экспериментальных данных близкой частотой оказывается частота 4400 Гц (отличие не превосходит 13%).

Таким образом, к частотам автоколебательного процесса расходно-волновой природы из экспериментальных данных следует отнести 4400, 8250 и 11000 Гц. Некоторые частоты узкополосных составляющих совпадают с частотами других процессов (только других гармоник). Обращает на себя внимание низкий уровень узкополосного спектра на частоте первой гармоники этого процесса, что подтверждает косвенным образом слабое волновое возмущение, генерируемое периферийной частью ДО в момент прихода вихря 2 к ДО.

Частоты автоколебательных процессов, выявленных при экспериментальных и численных исследованиях, и оценки этих частот, проведенных на основе анализа природы и механизмов автоколебательных процессов, приведены в табл. 1.

Видно, что числа Струхала, $Sh = f \cdot dX / U_\infty$, соответствующие характерным частотам автоколебательных процессов, полученным в экспериментах и в численных расчетах, в целом, согласуются между собой. Результаты оценочных расчетов по предложенному подходу также вполне удовлетворительны. Приведенные оценки основаны на выявленных в численных исследованиях особенностях течения, что, безусловно, повысило их надежность, но, главное, позволило уточнить механизм взаимодействия автоколебательных процессов различной природы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе анализ нестационарных процессов, возникающих в зазоре между двумя телами с тандемным расположением проведен на основе данных, полученных непосредственно из проведенных численных расчетов. Подтверждено, что место образования крупномасштабной вихревой структуры находится в слое смещения ниже по потоку от угловой кромки впереди расположенного тела, участие в формировании этой структуры возвратного течения в зоне отрыва.

В численных расчетах удалось визуализировать не только перемещение вихревых структур, но и волновых возмущений внутри зоны отрыва.

Благодаря использованию комплексного численно-экспериментального подхода показано, что автоколебания резонансной природы являются наиболее стабильными и могут служить механизмом для запуска неустойчивых автоколебательных процессов гидродинамической и расходно-волновой природы.

Анализ результатов расчетных и экспериментальных исследований автоколебаний на режимах по числам Маха (в диапазоне от 0.8 до 1.2) и по относительным расстояниям разделения dX/D (от 0.5 до 1.5) показал, что приведенные в табл. 1 оценки чисел Струхала применимы на вышеуказанных режимах. При этом погрешность оценок не превысит 13%. На различных рассмотренных режимах могут проявиться как все вышеописанные, так и отдельные механизмы автоколебательных процессов.

Полученные числа Струхала могут использоваться для оценок характеристик автоколебательных процессов и для других аналогичных конфигураций тандемно расположенных объектов на трансзвуковых режимах турбулентного обтекания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arkhireeva E. Yu., Dankov B.N., Dyadkin A.A., Kosenko A.P. and Rybak S.P.* Experimental studies of fluctuating pressure during separation of two tandem objects in flight // AIP Conference Proceedings. 2018. 2027, 030083.
<https://doi.org/10.1063/1.5065177>
2. *Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л., Дядькин А.А., Михайлов М.В., Рыбак С.П., Даньков Б.Н., Косенко А.П.* Двухэтапная RANS-DDES модель и результаты расчета нестационарных воздействий на возвращаемый аппарат и двигательный отсек космического корабля при их аварийном разделении // Математическое моделирование. 2021. V. 33: 7. P. 121–138.
3. *Rossiter J.E.* Wind Tunnel Experiments on the Flow Over Rectangular Cavities at Subsonic and Transonic Speeds // Royal Aircraft Establishment Technical Rept. 64037, 1964 and R&M 3438, Oct. 1964.
4. *Heller H.H., Holmes D.G. and Covert E.E.* Flow Induced Pressure Oscillations in Shallow Cavities // Journal of Sound and Vibration. 1971. V. 18. № 4. P. 545–553.
5. *Heller H.H. and Bliss D.B.* The Physical Mechanism of Flow Induced Pressure Fluctuations in Cavities and Concepts for their Suppression // AIAA Paper. 1975. 75–491.
6. *Block P.J.W.* Noise response of cavity of varying dimensions at subsonic speeds // NASA TN. 1976. N D- 8351. P. 1–67.
7. *Tam C.K.W. and Block P.T.W.* On the Tones and Pressure Oscillations Induced by Flow over Rectangular Cavities // Journal of Fluid Mechanics. 1978. V. 89. Part 2. P. 373–399.
8. *Hankey W.L. and Shang J.S.* Analyses of Pressure Oscillations in an Open Cavity // AIAA Journal. 1980. V. 18. № 8. P. 892–898.
9. *Антонов А.Н., Вишняков А.Н., Шалаев С.П.* Экспериментальное исследование пульсаций давления в выемке, обтекаемой дозвуковым или сверхзвуковым потоком газа // Прикладная механика и техническая физика. 1981. № 2. С. 89–97.
10. *Абдрашитов Р.Г., Архиреева Е.Ю., Даньков Б.Н., Меньшов И.С., Северин А.В., Семенов И.В., Требунских Т.В., Чучкалов И.Б.* Механизмы нестационарных процессов в протяженной каверне // Ученые записки ЦАГИ. 2012. Т. XLIII. № 4. С. 39–56.
11. *Даньков Б.Н., Дубень А.П., Козубская Т.К.* Численное моделирование возникновения автоколебательного процесса возле трехмерного обратного уступа при трансзвуковом режиме обтекания // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 4. С. 108–119.
12. *Рокуэлл Д.* Колебания сдвиговых слоев, взаимодействующих с препятствиями // Аэрокосмическая техника. 1984. Т. 2. № 2.
13. *Morkovin M.V. and Paranjape S.V.* On Acoustic Excitation of Shear Layers // Zeitschrift für Flugwissenschaften, 1971. V. 19. Heft 8/9. P. 328–335.
14. *Tam C.K.W.* Excitation of Instability Waves in a Two-Dimensional Shear Layer by Sound // Journal of Fluid Mechanics. 1978. V. 89. Part 2. P. 357–371.
15. *Tam C.K.W.* The Effects of Upstream Tones on the Large-Scale Instability Waves and Noise of Jets in Mechanics of Sound Generation in Flows IUTAM, ICA, AIAA-Symposium / Ed by E. Mueller. New York.: Springer-Verlag, 1979. P. 41–47.
16. *Ahuja K., Mendoza J.* Effects of cavity dimensions, boundary layer, and temperature on cavity noise with emphasis on benchmark data to validate computational aeroacoustik codes // NASA CR, N 4653. 1995. P. 1–284.
17. *Blake W.K.* Mechanics of flow-induced sound and vibration. V. 1: General concepts and elementary sources. Ch. 3. Academic Press, Inc. P. 130–149.
18. *Sarno R.L., Franke M.E.* Suppression of Flow-Induced Pressure Oscillations in Cavities // Journal of Aircraft. 1994. V. 31. № 1. P. 90–96.
19. *Rubio G., De Roeck W., Baelmans M., Desmet W.* Numerical study of noise generation mechanisms in rectangular cavities”, Europ. Colloquium 467: Turbulent Flow and Noise Generation, Marseille, France, 2005. P. 1–4.
20. *Keller J.J. and Escudier M.P.* Periodic Flow Aspects of Throttles, Cavities, and Diffusers, Brown Boveri Research Center Rept. KCR-79-144B, Nov. 1979.

21. *Larcheveque L., Sagaut P., Le T-H., Comte P.* Large-eddy simulation of a compressible flow in a three-dimensional open cavity at high Reynolds number // *Fluid Mech.* 2004. V. 516. P. 265–301.
22. *Даньков Б.Н., Дубень А.П., Жданова Н.С., Козубская Т.К.* Численное моделирование турбулентного течения возле каверны для фундаментальных и прикладных исследований // Тез. докл. на шестой всероссийской конф. “Вычислительный эксперимент в аэроакустике”, Светлогорск, Калининградской области, 19–24 сентября 2016 г., С. 124–127.
23. *Даньков Б.Н., Дубень А.П., Козубская Т.К.* Исследование автоколебательных процессов в открытой каверне с привлечением данных вычислительных экспериментов // *Изв. РАН. МЖГ (в печати).*
24. *Архиреева Е.Ю., Даньков Б.Н., Дубень А.П., Козубская Т.К., Коляда Е.О., Косенко А.П., Кудряшов И.Ю., Липницкий Ю.М., Луцкий А.Е., Меньшов И.С., Панасенко А.В., Северин А.В.* Автоколебательные процессы при обтекании тел с изломами образующей. Монография. ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016, С. 100.
25. *Plentovich E.B., Tracy M.B., Stallings R.L.* “Experimental cavity pressure measurements at subsonic and transonic speeds” NASA Technical Paper 3358, 1993.
26. *Скучик Е.* Основы акустики. Т.1 М.: Мир, 1976. С. 520.
27. *Menter F.R.* Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // *AIAA Journal.* 1994. V. 32. № 8. P. 1598–1605.
28. *Stabnikov A.S., Garbaruk A.V.* Testing of modified curvature-rotation correction for $k-\omega$ SST model // *Journal of Physics: Conf. Ser.* 2016. V. 769. 012087.
29. *Spalart P.R., Deck S., Shur M.L., Squires K.D., Strelets M.Kh., Travin A.K.* A New Version of Detached-Eddy Simulation, Resistant to Ambiguous Grid Densities // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics.* 2006. V. 2. № 3. P. 181–195.
30. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.Kh., Travin A.K.* An enhanced version of DES with rapid transition from RANS to LES in separated flows // *Flow, Turbulence and Combustion.* 2015. V. 95. P. 709–737.
31. *Shur M., Strelets M., Travin A.* High-Order Implicit Multi-Block Navier–Stokes Code: Ten-Year Experience of Application to RANS/DES/LES/DNS of Turbulence. In: 7th Symp. on overset composite grids and solution technology, Huntington Beach, CA, 2004. https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/NTS_code.pdf.
32. *Roe P.L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // *Journal of Computational Physics.* 1981. V. 43. P. 357–372.
33. *Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart P.R.* Physical and numerical upgrades in the detached-eddy simulation of complex turbulent flows // *Advances in LES of complex flows /Ed. by R. Friedrich and W. Rodi. Fluid Mechanics and its Applications series.* 2002. V. 65. P. 239–254.

УДК 533.9

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСШИРЕНИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ В ПЛОСКОМ ВАКУУМНОМ ДИОДЕ

© 2023 г. В. Ю. Кожевников^{а,*}, А. В. Козырев^а, В. С. Игумнов^а, Н. С. Семенюк^а,
А. О. Коковин^а

^аИнститут сильноточной электроники СО РАН, Томск, Россия

*E-mail: Vasily.Y.Kozhevnikov@iee.org

Поступила в редакцию 03.07.2023 г.

После доработки 20.08.2023 г.

Принята к публикации 25.08.2023 г.

Представлены результаты исследования начальной стадии расширения бесстолкновительной плазмы с током в плоский вакуумный промежуток на базе кинетических уравнений для электронов и ионов и уравнения Пуассона для электрического поля. Теоретически смоделирована самосогласованная динамика двухкомпонентной плазмы и электрического поля, подробно описан фундаментальный механизм установления сверхтепловых скоростей заряженных частиц и рассчитаны параметры анодонаправленных потоков положительных ионов в плазме катодного факела. Наблюдаемые в вакуумных дугах скорости расширения плазмы катодного факела на уровне $(1-5) \times 10^6$ см/с могут быть объяснены в рамках предложенного бесстолкновительного механизма.

Ключевые слова: вычислительная физическая кинетика, вакуумный пробой, аномальное ускорение ионов

DOI: 10.31857/S1024708423600446, EDN: VAMУНА

Расширение плазмы катодного факела в вакуумный промежуток является предметом многих экспериментальных и теоретических исследований в связи с широким применением данного явления [1]. Оно представляет собой неотъемлемую часть вакуумного пробоя как первой стадии разряда в вакууме [2]. Эксперименты убедительно показывают, что характерные величины скоростей разлета прикатодной плазмы и переноса ионов от катода к аноду в вакуумном разряде существенно превосходят тепловые значения скоростей компонентов плазмы. Типичные значения скоростей объемного разлета плазмы находятся в диапазоне $1-5 \times 10^6$ см/с [3], что соответствует кинетической энергии ионов вещества катода на уровне десятков и сотен эВ. Потоки ионов с такими энергиями реально наблюдаются в вакуумных дугах, чему свидетельствует обширная экспериментальная база вакуумной и плазменной эмиссионной электроники [2]. Поскольку кинетическая энергия ионов (>100 эВ) может в несколько раз превышать рабочее напряжение вакуумного дугового разряда (<80 В), то о таких ионах говорят как об ионах с “аномально высокими” энергиями. В вакуумных дугах ионы переносят на анод 8–12% полного заряда, протекающего через промежуток [4]. Имеется большое количество гипотез, направленных на объяснение феномена “аномального” токопереноса ионов как на стадии пробоя, так и в последующих стадиях вакуумного разряда. Все гипотезы условно можно разделить на три группы – взрывные, столкновительные и электродинамические [5], но они все в той или иной мере отводят ключевую роль столкновительным процессам. Большинство работ, в которых высказываются точки зрения в пользу той или иной гипотезы, основывается на моделировании плазмы в приближении жидкостного континуума (МГД), либо в терминах “крупных частиц” (PIC).

Использование жидкостного (МГД) приближения для описания движения плазмы вакуумного разряда, на наш взгляд, обусловлено скорее историческими, чем физическими причинами. Даже предварительный анализ показывает, что длины свободного пробега плазменных частиц во много раз превышают характерные размеры вакуумного диода. Так, при средних концентрациях объемной плазмы на уровне $n_0 = 10^{20}$ м⁻³ длины свободного пробега частиц $\lambda = (\sigma n_0)^{-1}$ имеют порядок 10 см (при характерных сечениях столкновений $\sigma = 10^{-19}$ м²), что обычно превышает длину

вакуумного промежутка, не говоря уже о длине его прикатодных слоев. Последние имеют порядок дебаевской длины $L_D = \sqrt{\epsilon_0 W / q^2 n_0}$ (здесь и ниже $q = 1.6 \times 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная), которая при тепловых энергиях частиц $W = 2-5$ эВ имеет микрометровые масштабы. Поэтому уравнения жидкостной модели плазмы, описывающие эволюцию первых моментов статистических распределения (концентрацию, эйлерову скорость, среднюю энергию), не позволяют, в принципе, выявить проявление эффектов, обусловленных сильной неравновесностью статистических ансамблей заряженных частиц.

В данной работе развит подход, основанный на фундаментальной физической кинетике двухкомпонентной бесстолкновительной плазмы с минимальным набором начальных предположений о поведении катодной плазмы. На основании представленной кинетической теории выявлены принципиальные особенности процесса разлета плазмы, формирования спектров электронов и ионов, а также механизм биполярного токопереноса в бесстолкновительной плазме на начальной стадии ее расширения в условиях приложенного к диоду напряжения.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим планарный вакуумный диод в одномерной геометрии. Будем считать, что межэлектродное расстояние равно D , внешняя электрическая цепь отсутствует, а напряжение с амплитудой U_0 подается на анод ($x = D$) с коротким фронтом (~ 0.1 нс). Эмиттер заряженных частиц на катоде моделируется поддержанием постоянного значения концентрации квазинейтральной плазмы n_0 в катодном сечении (координата $x = 0$). Специально упрощая задачу, полагаем, что катодная плазма состоит только из электронов и однозарядных ионов $n_{e0} = n_{i0} = n_0$. Заметим, что такое упрощение актуально для катодов, например, из лития, углерода, сурьмы и некоторых других материалов, которые генерируют почти полностью однозарядный ионный состав плазмы вакуумной дуги [6].

Основываясь на фундаментальных принципах физической кинетики, динамика плазмы будет описываться замкнутой системой уравнений Власова–Пуассона [7], которые в одномерной постановке имеют следующий вид

$$\begin{cases} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{p_x}{m_e} \frac{\partial f_e}{\partial x} - qE_x \frac{\partial f_e}{\partial p_x} = 0 \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{p_x}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} + qE_x \frac{\partial f_i}{\partial p_x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{q}{\epsilon_0} (n_e - n_i), \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $f_e(x, p_x, t)$ и $f_i(x, p_x, t)$ – нестационарные функции распределения электронов (ФРЭ) и ионов (ФРИ) соответственно, определенные в одномерном фазовом пространстве (координата x и импульс p_x), $E_x(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ – распределения напряженности электрического поля и электростатического потенциала, m_e и m_i – массы электрона и иона, соответственно, t – текущее время.

Уравнение Пуассона в (1.1) содержит концентрации частиц как нулевые моменты функций распределения

$$n_{e,i}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{e,i}(x, p_x, t) dp_x$$

Математическая модель представляет собой сравнительно простую для анализа систему уравнений, которая в то же время позволяет описывать с позиций физической кинетики достаточно сложную совокупность физических процессов в одномерной системе электронного и ионного ансамблей, взаимодействующих друг с другом исключительно посредством самосогласованного электрического поля. Простота системы (1.1), в частности, позволяет получить точное аналитическое выражение для решения уравнения Пуассона, записанного в явном виде через квадратурные формулы [8]

$$\begin{aligned}
 E_x(x, t) &= -\frac{U(t)}{D} + \frac{q}{\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{D} \int_0^D dx' \int_0^x [n_e(x', t) - n_i(x', t)] dx' - \int_0^x [n_e(x', t) - n_i(x', t)] dx' \right\} \\
 \varphi(x, t) &= \frac{q}{\epsilon_0} \int_0^x \int_0^{x'} [n_e(x'', t) - n_i(x'', t)] dx'' + \left\{ U(t) - \frac{q}{\epsilon_0} \int_0^D \int_0^x [n_e(x', t) - n_i(x', t)] dx' dx \right\} \frac{x}{D}
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

где приняты граничные условия типа Дирихле: $\varphi(x = 0) = 0$, $\varphi(x = D) = U(t)$. Как будет показано ниже, пренебрежение влиянием электрической цепи не является препятствием для описания начальной стадии развития пробоя.

Для получения численного решения уравнений Власова (1.1) в задаче о разлете плазмы были использованы нулевые начальные $f_e(x, p_x, 0) = f_i(x, p_x, 0) = 0$ и стационарные граничные условия на катодной плоскости в виде распределений Максвелла по импульсам для каждой компоненты катодной плазмы

$$f_{e,i}(x = 0, p_x, t) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi m_{e,i} W_{e,i}}} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m_{e,i} W_{e,i}}\right),
 \tag{1.4}$$

где W_e и W_i – термодинамические температуры электронов и ионов соответственно. Как будет видно ниже, граничные условия (1.4) создают высокий градиент концентрации плазмы на левой границе расчетной области, что в условиях физического эксперимента имеет место при взрыво-эмиссионном механизме генерации катодной плазмы.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для получения численного решения уравнений Власова (1.1) использовалась обратная полулагранжевая схема Ченга-Кнорра, реализующая кубическую сплайновую интерполяцию решения уравнений сдвига, получаемых предварительным операторным разложением Странга исходных уравнений Власова (аналогичная [8]). В качестве альтернативных методов для верификации результатов нами также использовалась схема SL-WENO пятого порядка точности [9] и операторные методы разложения, реализующие более высокие порядки точности решения по временной переменной [10], однако, кубические сплайны оказались наилучшим выбором с точки зрения соотношения времени работы алгоритма и получаемой точности решения. Дополнительно расчеты начальной фазы процесса пробоя проверялись методом PIC в одномерной пространственной электростатической реализации. Сравнение не выявило противоречий в результатах, полученных всеми используемыми нами методами.

Ниже, в качестве типичной иллюстрации приводятся основные результаты численного моделирования начальной стадии вакуумного пробоя в рамках предложенной модели (1.1)–(1.4) для следующих параметров планарного вакуумного диода: $D = 1$ см, $U_0 = 2$ кВ (длительность фронта нарастания напряжения до амплитудного значения был равен 0.1 нс), $W_e = 5$ эВ, $W_i = 1$ эВ. В качестве материала катода был выбран углерод ($m_i = 12$ а.е.м.), для которого характерен именно двухкомпонентный состав плазмы из электронов и однозарядных ионов углерода C^+ [6]. Моделирование проводилось для конечной, но достаточно высокой эмиссионной способности плазмы в катодном сечении. В приведенном ниже расчете при плотности катодной плазмы $n_0 = 10^{21}$ м⁻³ тепловой ток электронной эмиссии $j_{em} = qn_0\sqrt{W_e/2\pi m_e} \approx 2.4 \times 10^6$ мА/см² на несколько порядков превышал ток Чайлда-Ленгмюра $j_{CL} = (4\epsilon_0/9)\sqrt{2q/m_e}(U_0^{3/2}/D^2) \approx 209$ мА/см² вакуумного диода.

На рис. 1 показана временная динамика ФРЭ/ФРИ, а также приведены пространственные распределения электрического потенциала (1.3) и локальных средних кинетических энергий ионов в промежутке, вычисленных по формуле

$$\bar{\epsilon}(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_x^2}{2m_i} f_i(x, p_x, t) dp_x}{\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x, p_x, t) dp_x}
 \tag{2.1}$$

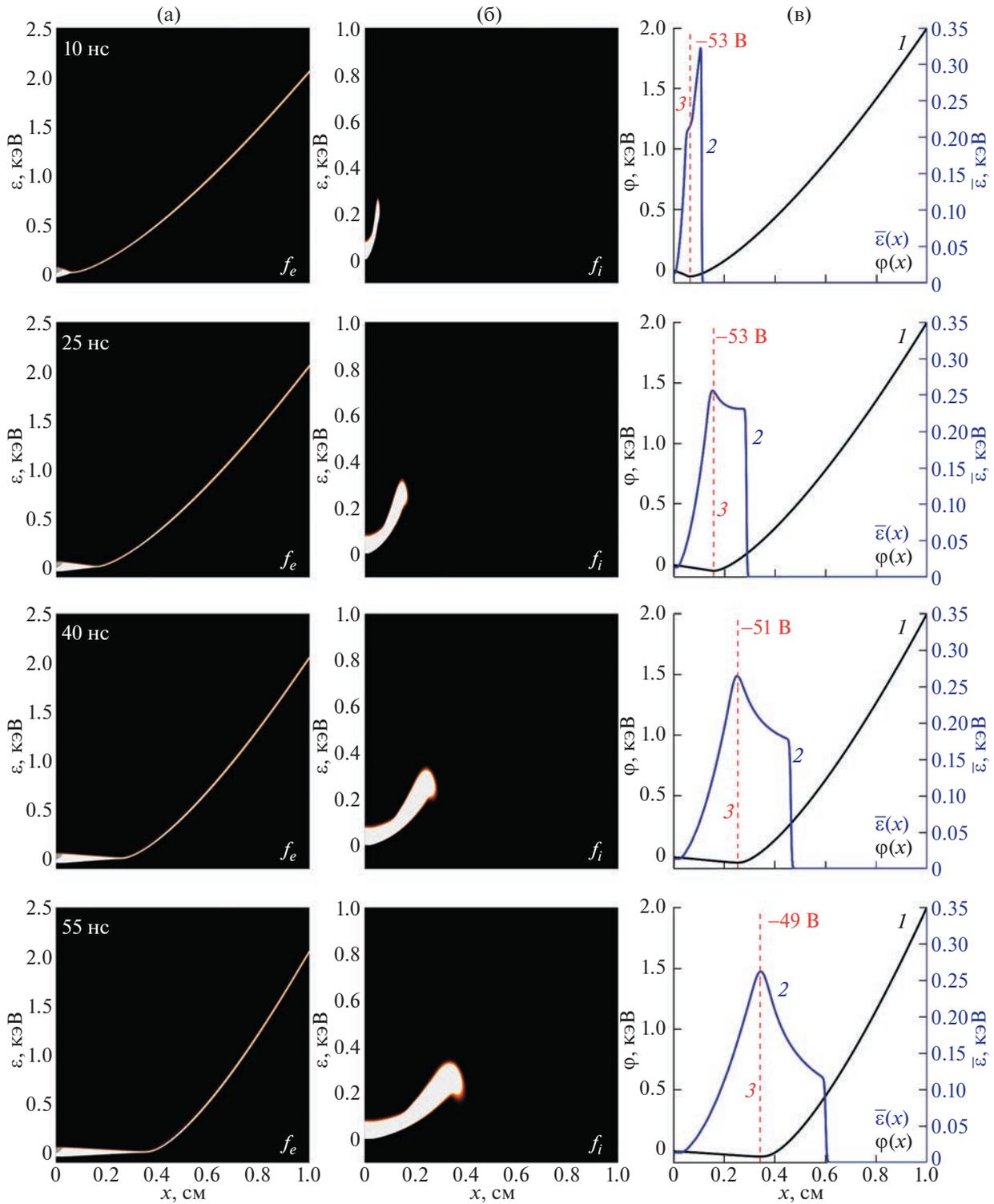


Рис. 1. Графики плотности ФРЭ (столбец А), ФРИ (столбец Б) и пространственные распределения электрического потенциала (кривая 1, столбец В) и средней энергии ионов (кривая 2), в моменты времени $t = 10, 25, 40$ и 55 нс. Штриховая линия 3 указывает мгновенное положение минимума потенциала и его глубину.

Начиная с 3 нс с момента подачи анодного напряжения, в вакуумном диоде устанавливается квазистационарный режим протекания электронного тока (см. фазовый портрет ФРЭ на рис. 1), в результате которого электроны ускоряются до энергий, равных значению анодного напряжения (умноженного на заряд электрона).

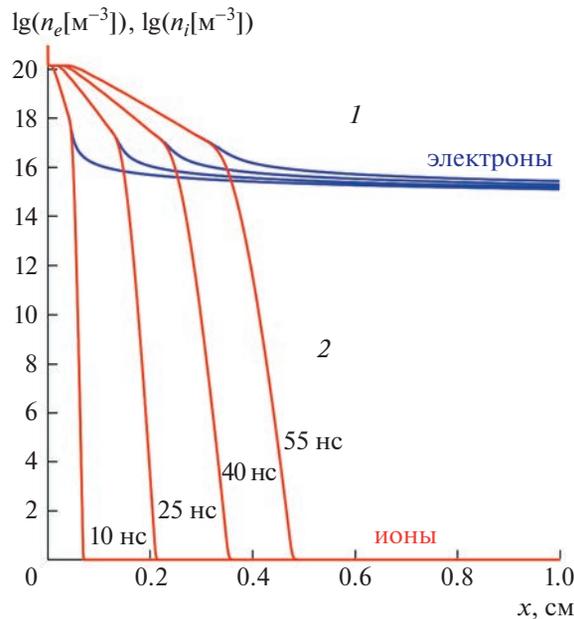


Рис. 2. Пространственно-временная картина изменения электронной (кривые 1) и ионной (кривые 2) концентрации в логарифмическом масштабе в моменты времени $t = 10, 25, 40$ и 55 нс.

Сразу после установления электронного тока начинается движение ионов в сторону анода. Данному процессу на начальном этапе способствует специфическое распределение электрического потенциала в окрестности катода (рис. 1). Распределение представляет собой ступенчатый спад потенциала от нуля у катода до значений порядка -25 В в малой окрестности катода, имеющей характерные размеры длины Дебая. Этот резкий спад сохраняется на протяжении всего времени протекания процесса. Существование данной области объясняется тем, что электроны, как более легкие частицы плазмы, быстро смещаются относительно малоподвижных ионов, создавая на периферической части прикатодной плазмы избыточный отрицательный объемный заряд. Для верификации данного наблюдения было проведено исследование сеточной сходимости численного решения в зависимости от точности разбиения пространственной области $x \in [0, D]$, а именно для квазиравномерной сетки со сгущением вблизи границ расчетной области [11] общее число узлов варьировалось от 1000 до 5000.

Отрицательный скачок потенциала в окрестности катода создает необходимые и достаточные условия для начала движения ионов к аноду. Движение плазмы сопровождается экстракцией электронов сильным электрическим полем с эмиссионной кромки катодного факела и их непрерывным переносом на анод. Отбор электронов из плазмы вызывает согласованное продвижение ионной компоненты на спадающем участке профиля потенциала в зазоре. Положение виртуального катода (сечение локального минимума потенциала) на рис. 1 обозначено пунктирной линией 1. Глубина виртуального катода составляет примерно -50 В. Вариация приложенного напряжения в пределах $0.5-5.0$ кВ показала, что это значение не зависит от напряжения, а определяется только концентрацией плазмы на катоде.

Кинетика частиц и поля расширяющейся в плоский промежуток катодной плазмы, которая показана на рис. 1 и 2, представляет далеко не очевидный процесс. Начнем анализ с графических данных, показанных в столбце В рис. 1, где представлены пространственные профили локального значения средней энергии ионов в потоке (формула (2.1)) на фоне распределения электрического потенциала и на рис. 2, где приведены пространственные профили концентраций электронов и ионов в четыре равноотстоящих момента времени.

Сразу заметен нетривиальный характер графика кинетической энергии ионов: в каждый момент времени он резко снижается до нуля в некотором сечении, которое будем условно называть “сечением срыва”. Из сравнения рис. 1 и 2 видно, что в этом сечении концентрация ионов падает практически до нуля, поэтому в “сечении срыва” не удастся корректно посчитать среднюю энер-

гию по формуле (2.1) из-за обращения знаменателя в нуль. Но вплоть до этого сечения энергия ионов остается довольно высокой.

Квазинейтральность в расширяющейся плазме реализуется на фоне электронного и ионного анодонаправленных потоков. На рис. 2 видно, что координата, где начинает нарушаться нейтральность, лежит заметно ближе к катоду, чем сечение срыва энергии. Это сечение, где начинают расходиться графики концентраций электронов и ионов, может быть ассоциировано с понятием эмиссионной границы плазмы (или эмиссионной кромки). Интересно, что наличие и движение эмиссионной кромки квазинейтральной плазмы никак не отражаются на графике электрического потенциала и фазовом портрете электронного ансамбля. В приведенном на рис. 2 расчете средняя скорость продвижения эмиссионной кромки (границы квазинейтральной плазмы) составила $3 \text{ мм}/45 \text{ нс} \sim 7 \times 10^6 \text{ см/с}$. Эта скорость отвечает кинетической энергии ионов углерода $\sim 300 \text{ эВ}$.

Также видно, что средняя кинетическая энергия ионов непосредственно перед “сечением срыва” может быть как выше (в моменты 10 и 25 нс), так и ниже (в момент 55 нс) локального потенциала в этом сечении. В последнем случае нет никакого противоречия в том, как ионы с меньшей энергией попали в область высокого потенциального барьера? Ионный ансамбль имеет широкий разброс по энергиям, и средняя энергия ансамбля может быть ниже локального потенциала, но ионы из высокоэнергетического хвоста распределения (он не виден на фазовом портрете ионов в силу его экспоненциально малой концентрации) все равно доходят до этой точки. Этот эффект четко виден в кинетическом расчете, но не может быть замечен, если бы мы использовали жидкостное описание плазмы.

На фазовых портретах для ионов (столбец Б на рис. 1) показан только основной массив ионного ансамбля, правая граница которого при 40 и 55 нс уже реагирует на тормозящее ионы электрическое поле (формируется нисходящий язык справа от точки минимума потенциала). Видно, что локальные распределения ионов по энергиям в потоке очень широкие (от 100 до 150 эВ). Этот же эффект разогрева (правда, не столь большого, разброс в пределах всего 10–15 эВ) заметен на фазовых портретах электронного ансамбля (столбец А на рис. 1) в области квазинейтральной плазмы. При этом электронный пучок справа от эмиссионной кромки остается практически моноэнергетичным. Возникает естественный вопрос о механизме столь сильного разогрева ионного ансамбля.

3. МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ВЫСОКИХ СКОРОСТЕЙ ИОНОВ

Наиболее важным аспектом предложенной теории является тот факт, что движение плазмы приводит к расширению распределения энергетического спектра ионов вплоть до энергий 300 эВ (столбец Б рис. 1) несмотря на то, что потенциальная яма имеет глубину, не превышающую -50 В (см. столбец В рис. 1). Такая ситуация возникает из-за того, что ансамбль ионов движется почти синхронно с границей области высокой напряженности поля, отчего ионы непрерывно находятся под действием большой ускоряющей силы. Синхронное движение этих взаимодействующих агентов может приводить к генерации ионов с так называемыми “аномально высокими” (по отношению к мгновенному значению минимума потенциала виртуального катода) энергиями. Аналогичное появление “аномально высоких энергий” характерно, например, для убегающих электронов в области усиленного поля вида бегущей волны, которое имеет место в газовых разрядах высокого давления [12, 13]. В данном случае суть механизма ускорения примерно та же — непрерывное воздействие ускоряющей электрической (электродинамической) силы, только у нас ускоряются не электроны, а ионы. Указанный результат является ключевым, так как предлагает принципиально новый механизм генерации ионов, движущихся к аноду вакуумного диода с высокой скоростью.

Для лучшего понимания действия электрического поля вида “бегущей волны” (аналогия [12]) рассмотрим модельную задачу о движении положительно заряженной частицы в поле с нестационарной потенциальной функцией $U(x, t)$. Положительно заряженная частица (масса m , заряд q) стартует с нулевой скорости из начала координат и ускоряется под действием однородного электрического поля $E = U_0/d$ в области, правая граница d которой перемещается вправо с постоянной скоростью u (рис. 3). Для ясности результата глубина спада U_0 принимается неизменной. Какую скорость наберет частица к моменту, когда она догонит правую границу области, занятой полем?

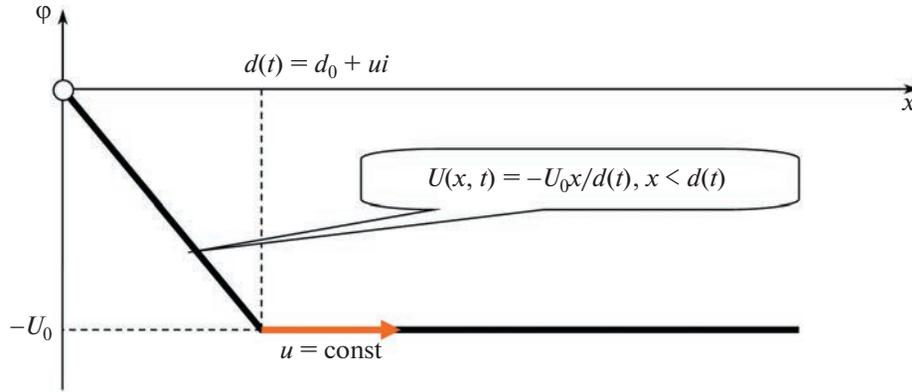


Рис. 3. Схематическое изображение движения положительно заряженной частицы в потенциальной яме, перемещающейся с постоянной скоростью.

Ускорение частицы в поле такой конфигурации описывается уравнением движения, интегрирование которого не представляет больших трудностей

$$m \frac{dv}{dt} = qE(t) = \frac{qU_0}{d_0 + ut} \rightarrow v(t) = \frac{qU_0}{m} \int_0^t \frac{dt}{d_0 + ut} = \frac{qU_0}{mu} \ln \left(1 + \frac{ut}{d_0} \right), \tag{3.1}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{qU_0 d_0}{mu^2} \int_1^{1+ut/d_0} \ln(y) dy = \frac{qU_0 d_0}{mu^2} \left(1 + \frac{ut}{d_0} \right) \left[\ln \left(1 + \frac{ut}{d_0} \right) - 1 \right].$$

Частица догонит правую границу области ненулевого поля в момент t^* , когда выполнится следующее равенство

$$d_0 + ut^* = x(t^*) \rightarrow 1 + \frac{ut^*}{d_0} = \frac{qU_0}{mu^2} \left(1 + \frac{ut^*}{d_0} \right) \left[\ln \left(1 + \frac{ut^*}{d_0} \right) - 1 \right], \tag{3.2}$$

$$\frac{qU_0}{mu^2} \left[\ln \left(1 + \frac{ut^*}{d_0} \right) - 1 \right] = 1 \rightarrow \ln \left(1 + \frac{ut^*}{d_0} \right) = 1 + \frac{mu^2}{qU_0}.$$

Причем к этому моменту времени скорость частицы будет равна

$$v(t^*) = \frac{qU_0}{mu} \ln \left(1 + \frac{ut^*}{d_0} \right) = \frac{qU_0}{mu} \left(1 + \frac{mu^2}{qU_0} \right) = u \left(1 + \frac{qU_0}{mu^2} \right) > u. \tag{3.3}$$

По условию задачи скорость u может быть любой, в том числе и такой, что $1/2mu^2 \gg qU_0$, следовательно, заряженная частица в поле переменной потенциальной функции типа “яма”, имеющей монотонный уклон к стационарному значению, может приобрести скорости, которые многократно больше значения, соответствующего глубине потенциальной ямы.

Приведенные выводы отчасти согласуются с концепцией, полученной в рамках приближенно-аналитической модели “глубокой потенциальной ямы” [14] в той части, где показывается принципиальная возможность образования нестационарной области пониженного электрического потенциала у катода. Однако в исследуемых режимах глубина области “виртуального катода” существенно меньше амплитудного значения анодного потенциала. Причина такого расхождения заключается в том, что в [14] авторы использовали слишком сильные упрощения (жидкостное описание, полубесконечную геометрию прикатодной области диода и пр.), которые нарушают внутреннюю согласованность модели (см. [2], замечания о проблеме Г.А. Месяца в гл. 9). Таких упрощений лишено предложенное здесь кинетическое описание.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведено моделирование процесса расширения плазмы катодного факела в планарном вакуумном диоде с непрерывной эмиссией плазмы с поверхности катода. Предложенная теория заслуживает особого внимания ввиду того, что, по сути дела, является “минимальной” трактов-

кой процесса формирования пробоя в вакууме в терминах физической кинетики. С методологических позиций “минимальность” модели позволяет исключить ряд второстепенных факторов, номинальное влияние которых на процесс аномального ускорения (транспорта) ионов малозначительно.

В данной теории намеренно исключено влияние всех столкновительных взаимодействий для того, чтобы изучить вопрос: может ли происходить расширение разреженной плазмы только под действием электрических сил, создаваемых локальным перераспределением электрического поля? Дополнительным аргументом для обоснования применимости “бесстолкновительной теории” является тот факт, что изначально высокая (граничная) концентрация катодной плазмы существенно (на несколько порядков) снижается вблизи ее эмиссионной границы. Таким образом, в вакуумном промежутке вклады электрон-ионных и ион-ионных рассеивающих кулоновских столкновений действительно оказываются пренебрежимо малыми.

Результаты данной работы можно сформулировать в виде следующих положений.

1. В рамках кинетической теории показано, что ускорение ионов к аноду из области катодной эмиссии, приводящее к расширению плазмы катодного факела, имеет сугубо электродинамическую природу, не связанную ни со спецификой геометрической неоднородности промежутка, ни с влиянием упругих рассеивающих электрон-ионных и ион-ионных столкновений.

2. В основе электродинамического механизма расширения катодной плазмы лежит фундаментальная тенденция нарушения квазинейтральности на границах плотного плазменного образования, в результате чего периферические области приобретают отрицательный объемный заряд, который формирует вблизи катода область отрицательного потенциала (виртуального катода).

3. Благодаря возникновению области пониженного электрического потенциала, происходит ускорение ионов в зазоре между физическим и виртуальным катодами с последующим заполнением этой области квазинейтральной катодной плазмой.

4. Приложение внешнего электрического поля, с одной стороны, приводит к транспорту электронов к аноду, а с другой стороны, перемещает в сторону анода виртуальный катод, что, в свою очередь, ведет к дальнейшему продвижению катодного факела. (Мы в этой работе намеренно не обсуждаем прибытие плазмы на анод, так как эта стадия может иметь множество сценариев, обусловленных вариациями электрической цепи питания разряда, что значительно снизило бы общность излагаемого физического механизма).

5. Нестационарность поля в прикатодной плазме приводит к заметному разогреву ансамбля электронов и неравновесности ФРЭ в области локализации виртуального катода.

6. Примечательно, что наличие потока электронов относительно медленных ионов в расширяющейся плазме не приводит в наших расчетах к развитию двухпоточковых плазменных неустойчивостей, например, типа неустойчивости Бунемана [15]. Это может быть объяснено широким энергетическим спектром ионного и электронного ансамблей в нашем расчете, а неустойчивость Бунемана была теоретически описана в [15] в рамках МГД модели холодной плазмы (с нулевыми температурами частиц).

Расчетная бесстолкновительная кинетика разлета электронно-ионной плазмы демонстрирует реалистичные тенденции поведения, характеризующиеся значениями скорости плазменного факела и корректным энергетическим спектром ионов. Это означает, что принципы физической кинетики позволяют дать наиболее минималистичное теоретическое объяснение наблюдаемого эффекта в вакуумном разряде. Тем не менее авторы не исключают некоторого влияния на параметры потока ионов и других механизмов, с которыми связывают явление аномального ускорения ионов. В частности, такими как возникновение “горба потенциала” или столкновительными эффектами типа “электронного ветра” и градиента давления в струях неидеальной плазмы взрывоэмиссионного центра.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по темам № FWRM-2021-0007, FWRM-2021-0014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Voxman R.L., Sanders D., Martin P.* Vacuum Arc Science and Technology. Noyes, Park Ridge, NJ. 1995. 539 p.
2. *Месяц Г.А.* Взрывная электронная эмиссия. М.: Физматлит. 2011. 280 с.
3. *Hantzsche E.* Mysteries of the arc cathode spot: A retrospective glance // IEEE Trans. on Plasma Science. 2003. V. 31. № 531. P. 799–808.

4. *Oks E.M., Savkin K.P., Yushkov G.Y., Nikolaev A.G., Anders A. and Brown I.G.* Measurement of total ion current from vacuum arc plasma sources // *Rev. Sci. Instr.* 2006. V. 77. № 3. P. 03B504.
5. *Окс Е.М., Юшков Г.Ю., Бугаев А.С., Кринберг И.А.* О механизме ускорения ионов в плазме вакуумного дугового разряда // *ДАН.* 2001. Т. 378. № 1. С. 41–43.
6. *Anders A.* Ion charge state distributions of vacuum arc plasmas: The origin of species // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 55. № 1. P. 969–981.
7. *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // *УФН.* 1967. Т. 93. № 3. С. 444–470.
8. *Kozhevnikov V.Yu., Kozyrev A.V., Semeniuk N.S.* Modeling of Space Charge Effects in Intense Electron Beams: Kinetic Equation Method Versus PIC Method // *IEEE Trans. on Plasma Science.* 2017. V. 45. № 10. P. 2762–2766.
9. *Xiong T., Qiu J.M., Xu Z., Christlieb A.* High order maximum principle preserving semi-Lagrangian finite difference WENO schemes for the Vlasov equation // *J. Comp. Phys.* 2014. V. 273. P. 618–639.
10. *Yoshida H.* Construction of higher order symplectic integrators // *Phys. Lett. A.* 1990. V. 150. № 5. P. 262–268.
11. *Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит. 2005. 224 с.
12. *Kozyrev A., Kozhevnikov V., Semeniuk N.* Why do Electrons with “Anomalous Energies” appear in High-Pressure Gas Discharges? // *EPJ Web of Conferences.* 2018. V. 167. P. 01005.
13. *Zubarev N.M., Kozhevnikov V.Y., Kozyrev A.V., Mesyats G.A., Semeniuk N.S., Sharyпов К.А.* Mechanism and dynamics of picosecond radial breakdown of a gas-filled coaxial line // *Plasma Sour. Sci. Tech.* 2020. V. 29. № 12. P. 125008.
14. *Баренгольц С.А., Казаринов Н.Ю., Месяц Г.А., Перельштейн Э.А., Шевцов В.Ф.* Моделирование процесса формирования глубокой потенциальной ямы в вакуумном диоде // *Письма в ЖТФ.* 2005. Т. 31. № 4. С. 64–70.
15. *Михайловский А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей: Т. 1 // М.: Атомиздат, 1970. 294 с.

УДК 533.92:533.93

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В УДАРНО-НАГРЕТОЙ СМЕСИ CO_2 И N_2 МЕТОДОМ ПРЯМОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

© 2023 г. А. Л. Кусов^а, Н. Г. Быкова^а, Г. Я. Герасимов^а, И. Е. Забелинский^а, П. В. Козлов^а, В. Ю. Левашов^{а,*,**}

^аМГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*E-mail: vyl69@mail.ru

**E-mail: levashovvy@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 03.05.2023 г.

После доработки 25.06.2023 г.

Принята к публикации 01.08.2023 г.

Предложена модель для численного исследования излучения за фронтом сильной ударной волны в газовой смеси CO_2 – N_2 . Модель основана на методе прямого статистического моделирования Монте-Карло и учитывает физико-химические свойства атомов и молекул, поступательно-вращательный и поступательно-колебательный обмен энергией, кинетику химических реакций, возбуждение электронных уровней атомов и молекул, а также процессы переноса радиационной энергии. Проведена серия расчетов спектральных характеристик ударно нагретой смеси. Полученные результаты сравниваются с имеющимися экспериментальными данными.

Ключевые слова: ударные волны, излучение, смесь CO_2 – N_2 , метод прямого статистического моделирования Монте-Карло, спектральные характеристики

DOI: 10.31857/S1024708423600252, EDN: QOXVJC

Обеспечение надежной тепловой защиты перспективных космических аппаратов (десантных модулей), входящих в атмосферу Земли и других планет Солнечной системы с супер-орбитальными скоростями, зависит от правильной оценки конвективных и радиационных тепловых нагрузок на их поверхность [1]. Это, в частности, относится к атмосферам Марса и Венеры, которые состоят из CO_2 и небольшой примеси N_2 [2, 3], а также к спутнику Сатурна Титану, обладающего плотной атмосферой, состоящей преимущественно из CO_2 с небольшой примесью углеводородов. При этом, как показывают результаты численного моделирования, радиационная составляющая теплового потока на отдельных участках траектории движения космического аппарата в атмосфере может превышать конвективную составляющую [4].

Основным источником информации по излучению ударно нагретых газовых смесей, содержащих CO_2 , являются результаты обработки экспериментальных данных, полученных на ударных трубах [5]. Эта информация используется как для оценки тепловых потоков к поверхности космического аппарата, так и для тестирования различного рода физико-математических моделей, способных предсказать поведение высокотемпературной газовой среды за фронтом отошедшей ударной волны. Эксперименты по измерению радиационных характеристик смеси CO_2 – N_2 за фронтом сильной ударной волны проводились на различного типа ударных установках. К ним относятся электро-разрядные установки EAST (Исследовательский центр NASA Ames) [6–13] и ADST (ЦАГИ) [14], поршневая ударная труба HVST (JAXA, Японское агентство космических исследований) [15], а также детонационные ударные трубы, эксплуатируемые в МИФИ [16] и Институте механики МГУ [17, 18].

Методы численного моделирования позволяют получить информацию по тем параметрам течения, которые трудно поддаются измерению. Основы расчета спектральных характеристик ударно нагретого газа заложены в пионерских работах отечественных и зарубежных авторов [19–28]. При моделировании излучения обычно используются спектральные [29–32] и столкновительно-радиационные (CR) [33–37] модели. Среди спектральных моделей наибольшей популяр-

ностью пользуется вычислительная процедура NEQAIR [29], которая выполняет полинейный (line-by-line) расчет спектров излучения и поглощения атомов и молекул, входящих в состав исследуемой газовой смеси. Данная модель часто используется в качестве радиационного блока в компьютерных программах, описывающих газодинамику течения [38, 39]. Более сложные CR модели включают кинетический блок, который содержит уравнения для определения газодинамических параметров газа за ударной волной, а также систему кинетических уравнений, позволяющих вычислять состав химически реагирующей смеси и заселенность возбужденных уровней атомов и молекул [34]. Результаты расчета кинетического блока являются исходной информацией для определения спектральных и энергетических характеристик излучения.

Метод прямого статистического моделирования Монте-Карло (DSMC, direct simulation Monte Carlo), разработанный Бёрдом [40], является кинетическим подходом к моделированию течения разреженных газов. Он основан на построении процесса, который имитирует движение частиц газа, а также их столкновения между собой с химическими реакциями, возбуждением внутренних степеней свободы и излучением фотонов [41]. Ранее с помощью DSMC метода проведено моделирование различных кинетических процессов в ударно нагретом воздухе, включая вращательно-поступательный энергообмен [42], кинетику химических реакций [43, 44] и перенос радиационной энергии [45, 46]. В настоящей работе DSMC процедура применена для расчета спектральных характеристик высокотемпературной смеси $\text{CO}_2\text{-N}_2$, моделирующей атмосферу Марса и Венеры. В предлагаемом алгоритме процессы столкновения молекул и излучения фотонов проводятся одновременно: фотоны рождаются непосредственно при переходах возбужденных молекул на низколежащие уровни. При этом газ теряет часть энергии на излучение, что моделирует влияние излучения на течение газа.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В методе DSMC большое количество реальных частиц газа (молекул, атомов, ионов и фотонов) заменяется гораздо меньшим набором модельных частиц. Эти модельные частицы движутся в физическом пространстве, сталкиваются с другими частицами и с твердыми границами области течения аналогично элементарным процессам, протекающим в реальной газовой динамике [41]. Столкновения частиц моделируются как мгновенный случайный переход системы из одного состояния в другое, что отличает метод DSMC от метода молекулярной динамики, в котором столкновения рассматриваются как детерминированный процесс.

Следует отметить, что в отличие от стандартных кинетических моделей, в которых газодинамические параметры течения и концентрации возбужденных частиц определяются в результате решения системы дифференциальных уравнений (см., например, [47]), метод DSMC оперирует только с вероятностями соответствующих столкновительных и излучательных процессов. В предлагаемом алгоритме расчета ударная волна в исследуемом неподвижном газе генерируется движением твердого поршня. Скорость поршня подбирается таким образом, чтобы скорость образующейся перед ним ударной волны равнялась заданному значению. Кинетические процессы, протекающие за ударной волной, определяют состояние системы сталкивающихся частиц в каждый момент времени. Это состояние позволяет вычислить макроскопические свойства системы, включая концентрации возбужденных частиц, ответственных за излучательные характеристики газа.

Существует большое количество упрощенных моделей взаимодействия частиц газа при их столкновении. Наиболее простой является модель VHS (variable hard spheres), в которой сталкивающиеся частицы рассматриваются как твердые шарики, диаметр которых зависит от их относительной скорости [40]. Данная модель позволяет правильно описать экспериментально наблюдаемую степенную зависимость вязкости газа от температуры с показателем степени ω . При этом диаметр d_{ij} сталкивающихся частиц сортов i и j должен зависеть от их относительной скорости g следующим образом:

$$d_{ij} = d_{ij}^{ref} \sqrt{(2kT_{ref}m_{ij}^{-1}g^{-2})^{\omega_{ij}-1/2} \Gamma^{-1}\left(\frac{5}{2} - \omega_{ij}\right)} \quad (1)$$

где d_{ij}^{ref} и ω_{ij} – постоянные величины для частиц сортов i и j ; $T_{ref} = 273$ К; m_{ij} – приведенная масса сталкивающихся частиц; $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Рассеяние в VHS модели предполагается изотропным, т.е. дифференциальное сечение σ и угол рассеяния χ равны:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d^2}{4}, \quad \chi = 2 \arccos\left(\frac{b}{d}\right) \quad (2)$$

где b – прицельное расстояние, $d\Omega = \sin(\chi)d\chi d\phi$ – элемент телесного угла. Принятые в настоящей работе параметры VHS модели для компонентов смеси $\text{CO}_2\text{--N}_2$, которые используются в выражениях (1) и (2), приведены в [47] и равны примерно 4.0 \AA для d_{ij} и 0.75 для ω_{ij} .

Моделирование поступательно-вращательного обмена энергией осуществлялось с помощью алгоритма, в котором лишь доля столкновений молекул, равная вероятности изменения вращательной энергии P_{RT} , приводит к изменению вращательной энергии молекул. Величина P_{RT} зависит от полной энергии столкновения E_C , равной сумме поступательной и вращательной энергии сталкивающихся частиц, и определяется зависимостью вида [41]

$$P_{RT} = Z_R^{-1} = Z_{R\infty}^{-1} \left(1 + \frac{\Gamma(2-\eta)}{\Gamma(1.5-\eta)} \sqrt{\frac{kT_*}{E_C}} \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} + (1-\eta) \frac{kT_*}{E_C} \left(\frac{\pi^2}{4} + \pi \right) \right) \quad (3)$$

где Z_R – среднее число столкновений, необходимое для релаксации вращательной температуры к поступательной; $Z_{R\infty}$ и T_* – константы; $\eta_{ij} = \omega_{ij} - (1 + \xi_i + \xi_j)/2$; ξ_i – количество степеней свободы i -й частицы. Входящие в (3) параметры модели $Z_{R\infty}$ и T_* , рекомендованные в данной работе исходя из данных различных авторов по вращательно-поступательной релаксации, приведены в [47].

Моделирование поступательно-колебательного обмена проводится аналогичным образом. Вероятность изменения колебательной энергии P_{VT} , которая определяется как отношение времени свободного пробега молекул τ_c ко времени поступательно-колебательной релаксации τ_{VT} , вычисляется по формуле [41]

$$P_{VT} = \min \left\{ Z_0^{-1} g^{3+2(\omega_{ij}-1/2)} \exp\left(-\frac{g^*}{g}\right), Z_2^{-1} g^{2\omega_{ij}} \right\} \quad (4)$$

где второй член представляет собой высокотемпературную коррекцию Парка [48]. Параметры модели, входящие в выражение (4) для вероятности P_{VT} , приведены в [47].

Для описания кинетики химических реакций в методе DSMC наиболее часто используется модель полной энергии столкновения TCE (total collision energy) Бёрда [40], в которой константа скорости бинарной реакции k_d представляется в модифицированной форме Аррениуса:

$$k_d = AT^n \exp\left(-\frac{E_d}{kT}\right) \quad (5)$$

где A и n – константы, E_d – энергия активации реакции, k – постоянная Больцмана. Интегрирование в TCE модели по равновесной функции распределения при фиксированной полной энергии столкновения E_C и константе скорости реакции вида (5) приводит к следующему выражению для вероятности P_{TCE} бинарной реакции [40]:

$$P_{TCE} = B \left(1 - \frac{E_d}{E_C} \right)^{n+\xi/2+1/2} E_C^{\omega_{ij}+n-1} \theta(E_C - E_d) \quad (6)$$

$$B = \frac{A\Gamma(\xi/2 + 5/2 - \omega_{ij})}{\Gamma(n + \xi/2 + 3/2) \pi (d_{ij}^{ref})^2 k^n} \sqrt{\frac{m_{ij}}{8\pi}} (kT_{ref})^{1/2-\omega_{ij}}$$

Здесь E_C – суммарная энергия столкновения двух частиц с учетом всех внутренних степеней свободы; ξ – суммарное количество степеней свободы; θ – функция Хэвисайда. Если столкновение привело к диссоциации в соответствии с вероятностью P_{TCE} , описываемой выражением (6), производится столкновение молекулы с частицей по обычным правилам с перераспределением энергии в соответствии с методом Боргнакке–Ларсена [49]. При этом из полной энергии столкновения вычитается энергия реакции. После столкновения проводится процедура разделения молекулы на два атома в случае диссоциации или изменение сортов сталкивающихся частиц в случае обменной реакции. Рекомбинация моделируется двумя последовательными бинарными столкновениями с образованием промежуточной возбужденной молекулы.

Кинетический механизм химических реакций, использованный в настоящей работе для расчета спектральных характеристик высокотемпературной смеси CO₂–N₂, разработан на основании рекомендаций [48] с дополнениями и уточнениями, предложенными в обзоре [50]. Полная схема механизма с соответствующими параметрами констант скоростей реакций приведена в [47]. Рассматриваются реакции с участием как нейтральных, так и заряженных частиц. Константы скоростей реакций получены для основного уровня атомов и молекул, однако они применяются также и для возбужденных уровней. При этом энергия реакции поправляется на энергию возбуждения участвующих частиц. Образование заряженных частиц описывается набором реакций ассоциативной и ударной ионизации. При этом электроны являются единственной отрицательно заряженной частицей. Следует отметить, что заметный вклад в концентрацию электронов в области за фронтом ударной волны могут вносить электроны, образовавшиеся перед ударной волной за счет фотоионизации молекул газа жестким излучением ударно нагретого газа [51]. Данный процесс до настоящего времени плохо изучен и в расчетах не учитывается.

При высокой температуре газовой среды начинают возбуждаться электронные уровни атомов и молекул. При электронных переходах меняются параметры молекул, поэтому возбужденная и невозбужденная молекулы рассматриваются как разные частицы. Возбуждение атомов и молекул за счет их столкновений с электронами является доминирующим механизмом в значительной части ионизационного процесса. Вероятность изменения электронного состояния m при этом можно оценить с помощью выражения $P_m = \sum_n \sigma_{m \rightarrow n}(E)/\sigma(E)$, где $\sigma_{m \rightarrow n}$ – сечение перехода с уровня m на уровень n , E – кинетическая энергия налетающего электрона или поступательная энергия относительного движения тяжелых частиц, σ – сечение упругого столкновения. В приближении Борна аппроксимация сечения $\sigma_{m \rightarrow n}$ при $n > m$ (возбуждение) имеет вид [25]:

$$\sigma_{m \rightarrow n}(E) = \frac{\pi a_0^2}{4} \left(\frac{d}{a_0}\right)^2 f \frac{(E_n - E_m)}{(E + E_m)} \ln \left(\frac{(E + E_m)}{(E_n - E_m)} \right) \frac{(E + E_m - E_n)}{E} \frac{g_n}{g_m} \theta(E + E_m - E_n) \quad (7)$$

Здесь d – параметр модели ($d \sim a_0$, где $a_0 = 0.529 \text{ \AA}$ – радиус первой боровской орбиты); $f = \max(f_{mn}, 10^{-4})$ – сила осциллятора возбуждения в переходе $m \rightarrow n$; E_n и E_m – энергии электронных уровней n и m ; θ – функция Хэвисайда, g_n и g_m – кратности вырождения уровней n и m . При $n < m$ (тушение) соответствующее выражение для $\sigma_{m \rightarrow n}$ записывается в виде:

$$\sigma_{m \rightarrow n}(E) = \frac{\pi a_0^2}{4} \left(\frac{d}{a_0}\right)^2 f \frac{(E_m - E_n)}{(E + E_m)} \ln \left(\frac{(E + E_m)}{(E_m - E_n)} \right) \frac{(E + E_m - E_n)}{E} \frac{g_n}{g_m}$$

На рис. 1 в качестве примера приведено сравнение сечения возбуждения молекулы CO электронным ударом из основного состояния X¹Σ⁺ в электронно-возбужденное состояние A¹Π, вычисленного по выражению (7), с имеющимися теоретическими оценками [52, 53] и данными измерений [54, 55]. Видно, что приближение Борна вполне адекватно описывает зависимость сечения возбуждения от энергии электрона E .

Моделирование излучения, возникающего за счет дискретного перехода возбужденной частицы с верхнего уровня n на нижний уровень m , проводится с использованием коэффициентов Эйнштейна. В общем случае рассматриваются процессы спонтанного излучения, индуцированного излучения и поглощения. Ввиду большого времени работы программы при моделировании излучения в ударных волнах индуцированное излучение и поглощение не учитывались, т.е. использовалось приближение высвечивания.

Объемная мощность излучения, испускаемого частицами определенного сорта при переходе $n \rightarrow m$, в общем случае определяется выражением [23]

$$dE_{nm}/dt = \int_{4\pi} [x_n A_{nm} + I_{v,nm}(x_n B_{nm} - x_m B_{mn})] h\nu_{nm} d\Omega \quad (8)$$

где x_n и x_m – заселенности соответствующих уровней; A_{nm} – вероятность перехода (коэффициент Эйнштейна) для спонтанного излучения; $I_{v,nm}$ – спектральная интенсивность излучения с частотой ν_{nm} ; B_{nm} – вероятность перехода для индуцированного излучения; B_{mn} – коэффициент Эйн-

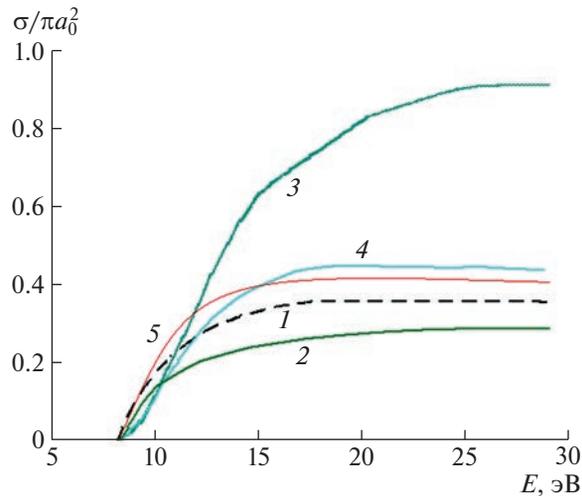


Рис. 1. Сечение возбуждения молекулы CO электронным ударом при переходе $X^1\Sigma^+ \rightarrow A^1\Pi$: 1 – расчет по формуле (7); 2 – расчет методом функции подобия [52]; 3 – расчет вариационным методом Швингера [53]; 4 и 5 – экспериментальные данные [54] и [55] соответственно.

штейна для поглощения; h – постоянная Планка; $d\Omega$ – элемент телесного угла. Коэффициенты Эйнштейна, входящие в выражение (8), связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$A_{nm} = \frac{g_m}{g_n} B_{mn} \frac{8\pi h \nu_{nm}^3}{c^3}, \quad g_n B_{nm} = g_m B_{mn}$$

Здесь g_n – статистический вес n -го уровня; c – скорость света.

Наряду с вероятностями переходов A_{nm} , B_{nm} и B_{mn} часто используются безразмерные величины – силы осцилляторов f_{nm} , которые пропорциональны вероятностям переходов. В частности, имеет место соотношение

$$f_{nm} = \frac{m_e c^3}{8\pi^2 e^2 \nu_{nm}^2} A_{nm}$$

Здесь m_e и e – масса и заряд электрона. При расчете радиационных характеристик ударно нагретого газа силы осцилляторов f_{nm} для атомов взяты из базы данных NIST [56]. Уширение отдельных линий оценивалось с помощью теории уширения атомарных линий [28].

Параметрами, характеризующими двухатомную молекулу, являются номер ее колебательного уровня V , вращательное квантовое число J , проекция момента количества движения на межъядерную ось молекулы Λ и полный спин электронов молекулы S . Отдельная линия молекулы представляет собой переход между двумя состояниями, в каждом из которых фиксированы S , Λ , V и J . Многочисленные молекулярные линии перекрывают друг друга, образуя полосы.

Переходы в двухатомных молекулах, которые учитывались в расчетах, приведены в табл. 1. В предположении независимости электронного, колебательного и вращательного движения молекулы, силы осцилляторов молекул можно представить в виде

$$f(S_n, \Lambda_n, V_n, J_n \rightarrow S_m, \Lambda_m, V_m, J_m) = f_0(S_n, \Lambda_n, V_n \rightarrow S_m, \Lambda_m, V_m) S_{J_n J_m}$$

Здесь $S_{J_n J_m}$ – факторы Хёнля–Лондона, формулы, для вычисления которых можно найти в [57]. Для вращательного перехода $J_n \rightarrow J_m$ новый уровень J_m выбирается случайным образом в соответствии с общей концепцией метода Монте-Карло и с учетом правил отбора. Число учитываемых вращательных уровней зависит от типа и электронного состояния молекулы и меняется в интервале от 20 до 300 [58].

Силы осцилляторов f_0 для системы полос основных молекулярных компонентов взяты из [24]. На рис. 2 в качестве примера показаны величины f_0 для третьей и четвертой положительной системы полос молекулы CO, которые характеризуют интенсивность и спектральный диапазон излучения данных полос. Фоновое излучение включает в себя тормозное излучение, которое оце-

Таблица 1. Системы полос молекулярных компонентов, учитываемые в вычислениях

Молекула	Система полос	Переход	Спектральный диапазон, нм
N ₂	1-я положительная	$B^3\Pi_g \rightarrow A^3\Sigma_u^+$	500–1100
	2-я положительная	$C^3\Pi_u \rightarrow B^3\Pi_g$	250–450
	Birge-Hopfield I	$b^1\Pi_u \rightarrow X^1\Sigma_g^+$	98–132
	Birge-Hopfield II	$b^1\Sigma_u^+ \rightarrow X^1\Sigma_g^+$	83–180
N ₂ ⁺	1-я отрицательная	$B^1\Sigma_u^- \rightarrow X^2\Sigma_g^+$	250–600
NO	ε	$D^2\Sigma^+ \rightarrow X^2\Pi$	166–350
	δ	$C^2\Pi_r \rightarrow X^2\Pi$	160–570
	β	$B^2\Pi_r \rightarrow X^2\Pi$	170–450
	γ	$A^2\Sigma^+ \rightarrow X^2\Pi$	160–500
O ₂	Schumann-Runge	$B^3\Sigma_u^- \rightarrow X^3\Sigma_g^-$	200–400
C ₂	Swan	$d^3\Pi_g \rightarrow a^3\Pi_u$	400–600
CN	Фиолетовая	$B^2\Sigma^+ \rightarrow X^2\Sigma^+$	340–450
	Красная	$A^2\Pi_i \rightarrow X^2\Sigma^+$	580–1450
	Le Blanc	$B^2\Sigma^+ \rightarrow A^2\Pi_i$	400–600
CO	3-я положительная	$b^3\Sigma^+ \rightarrow a^3\Pi$	200–400
	4-я положительная	$A^1\Pi \rightarrow X^1\Sigma^+$	125–240

нивалось по формуле Крамера [59] и фото-рекомбинационное излучение электронов, сечения для которого взяты из базы данных TOPbase [60].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Моделирование радиационных характеристик смеси CO₂-N₂ за фронтом сильной ударной волны выполнялось для двух вариантов состава смеси: 70%CO₂ + 30%N₂ и 96%CO₂ + 4%N₂. Они были использованы при приведении экспериментов на детонационной ударной трубе DDST-M

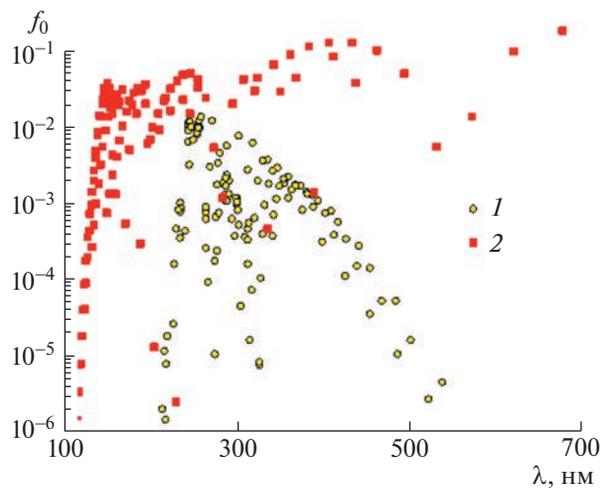


Рис. 2. Силы осцилляторов для систем полос: 1 – CO(3+) и 2 – CO(4+).

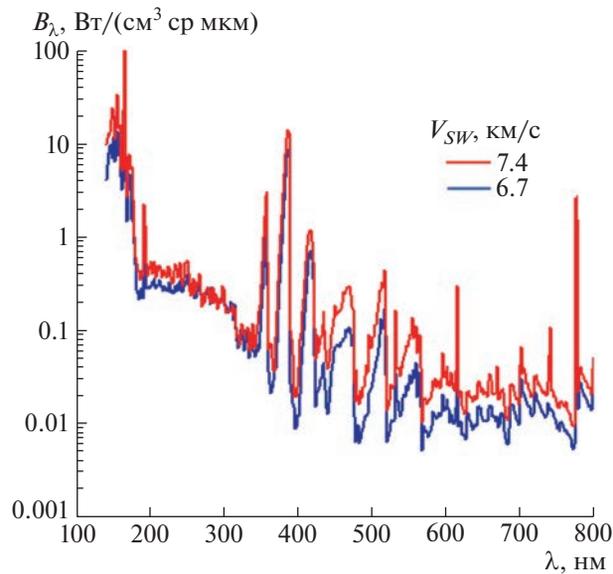


Рис. 3. Вычисленные спектрограммы излучения смеси 70%CO₂+30%N₂ при начальном давлении $p_0 = 0.33$ Торр и скоростях ударной волны $V_{SW} = 6.7$ и 7.4 км/с.

Института механики МГУ [18] и электро-разрядной ударной установке EAST Исследовательского центра NASA Ames [8] соответственно. Первый состав отличается от состава атмосфер Марса и Венеры большим содержанием молекулярного азота и полученные на его основе расчеты могут служить лишь для оценки интенсивности излучения, возникающего при спуске космического аппарата в атмосферах этих планет. Расчеты проведены при различных скоростях V_{SW} ударной волны и давлениях p_0 в невозмущенном потоке перед ударной волной.

На рис. 3 приведены спектрограммы объемной мощности излучения B_λ (панорамные спектры), рассчитанные для первого варианта состава смеси при скоростях ударной волны $V_{SW} = 6.7$ и 7.4 км/с и начальном давлении $p_0 = 0.33$ Торр. Исследованный диапазон длин волн излучения включает вакуумно-ультрафиолетовую (VUV), ультрафиолетовую (UV) и видимую (VIS) спектральные области. Видно, что при увеличении скорости V_{SW} мощность излучения растет. Этот рост особенно заметен в VUV области, где при $V_{SW} = 7.4$ км/с появляются интенсивные линии атома углерода на длинах волн $\lambda = 156.1$, 165.8 и 195.5 нм, а также в VIS области, где наблюдается резкий всплеск излучения мультиплетов атома кислорода на длинах волн $\lambda = 616$ и 777 нм.

Парциальный вклад молекулярных полос и атомарных линий в спектрограмму излучения смеси 70%CO₂ + 30%N₂ при скорости ударной волны $V_{SW} = 6.7$ км/с и давлении перед ударной волной $p_0 = 0.33$ Торр приведен на рис. 4. Видно, что в VUV спектральном диапазоне ($\lambda = 120$ –200 нм) наряду с линиями атома углерода наблюдается интенсивное излучение третьей положительной системы полос молекулы CO. В спектральном диапазоне $\lambda = 190$ –300 нм, относящемся к UV области излучения, регистрируется в основном система полос Шумана-Рунге молекулярного кислорода, которая возникает за счет электронного перехода $B^3\Sigma_u^- \rightarrow X^3\Sigma_g^-$. Значительный вклад в излучение в этом диапазоне вносит также система полос β , γ и δ молекулы NO, а также четвертая положительная система молекулы CO. Молекулярные полосы излучения играют основную роль и в VIS спектральной области. В первую очередь это относится к фиолетовой и красной системе полос цианистого радикала CN и системе полос Свана молекулы C₂. Следует отметить, что ионы при рассматриваемых скоростях ударной волны не вносят заметного вклада в излучение.

На рис. 5 проводится сравнение спектрограммы объемной мощности излучения B_λ , вычисленной в настоящей работе с помощью метода DSMC, с соответствующей спектрограммой, измеренной на ударной трубе DDST-M [18] и спектрограммой, вычисленной с помощью CR модели [61]. Все спектральные кривые получены для смеси 70%CO₂ + 30%N₂ при $V_{SW} = 6.7$ км/с и $p_0 = 0.33$ Торр. Видно, что в общих чертах спектрограммы повторяют друг друга. Данные расчета

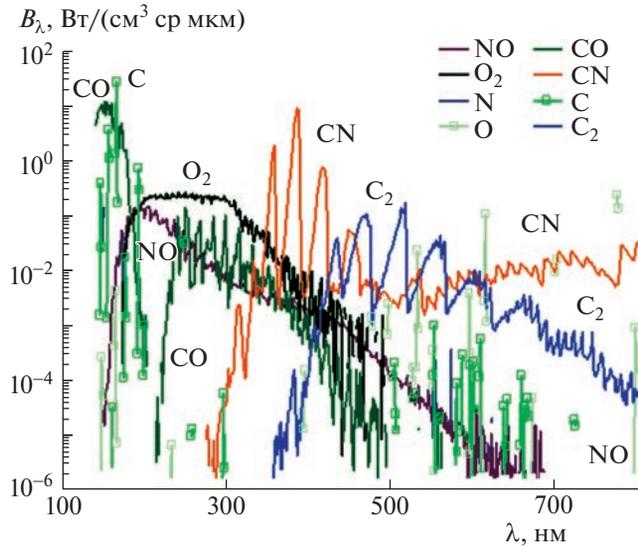


Рис. 4. Вклад различных компонентов в излучение ударно нагретой смеси 70%CO₂+30%N₂ при $V_{SW} = 6.7$ км/с и $p_0 = 0.33$ Торр.

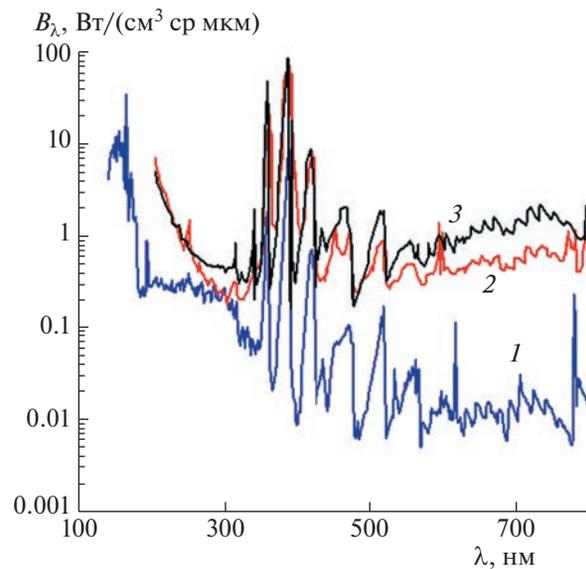


Рис. 5. Сравнение спектрограмм излучения смеси 70%CO₂ + 30%N₂ при $V_{SW} = 6.7$ км/с и $p_0 = 0.33$ Торр, полученных с помощью: 1 –расчета методом DSMC (настоящая работа); 2 – измерений на ударной трубе DDST-M [18]; 3 – расчета по CR модели [49].

объемной мощности излучения, полученные в настоящей работе, лежат значительно ниже экспериментальных данных, особенно в VIS спектральной области. Расчет по CR модели более точно воспроизводит экспериментальную спектрограмму.

На рис. 6 спектрограмма объемной мощности излучения B_λ вычислена в настоящей работе при $V_{SW} = 5.2$ км/с и $p_0 = 1$ Торр. Она сравнивается с экспериментально измеренной спектральной кривой [18] и результатами расчета по CR модели [61] при той же скорости ударной волны и начальном давлении. Видно, что результаты DSMC моделирования в UV области излучения не сильно отличаются от приведенных экспериментальных данных. С другой стороны, в VIS спектральном диапазоне расчетная кривая лежит значительно ниже экспериментальной. Сравнение с результатами, приведенными на рис. 5, показывает, что наблюдается резкое уменьшение мощ-

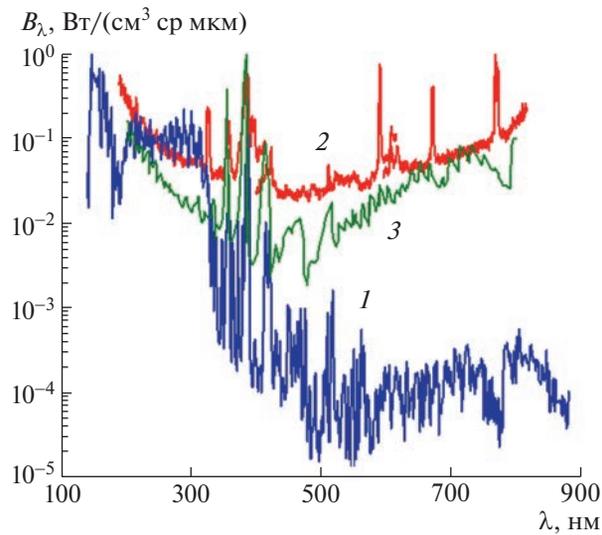


Рис. 6. Сравнение спектрограмм излучения смеси 70%CO₂ + 30%N₂ при $V_{sw} = 5.2$ км/с и $p_0 = 1$ Торр, полученных с помощью: 1 – расчета методом DSMC (настоящая работа); 2 – измерений на ударной трубе DDST-M [18]; 3 – расчета по CR модели [49].

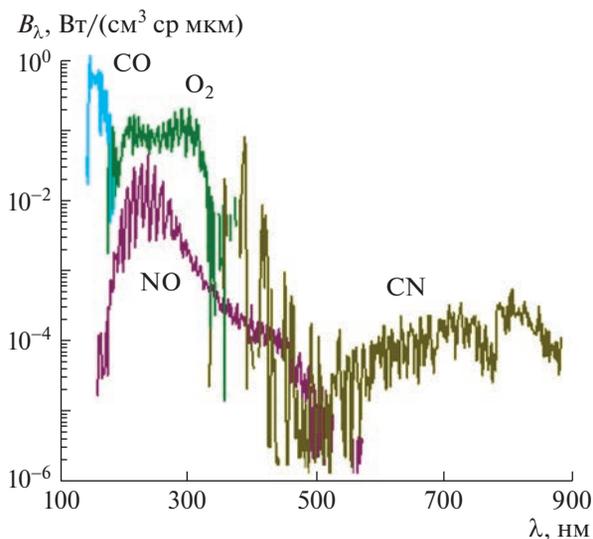


Рис. 7. Вклад различных компонентов в излучение в ударно нагретой смеси 70%CO₂ + 30%N₂ при $V_{sw} = 5.2$ км/с и $p_0 = 1$ Торр.

ности излучения B_λ во всем спектральном диапазоне при уменьшении скорости ударной волны с 6.7 до 5.2 км/с. При этом начальное давление увеличивается с 0.33 до 1 Торр.

Следует отметить, что на экспериментальной спектральной кривой в VIS диапазоне ($\lambda = 450\text{--}850$ нм) наблюдаются только фоновое излучение и линии излучения щелочных металлов, таких как Na ($\lambda = 589$ нм), Li ($\lambda = 671$ нм) и K ($\lambda = 766.589$ нм) [18]. Появление атомарных линий Na, Li, и K вызвано присутствием этих элементов в кварцевом стекле, из которого сделаны окна наблюдения. Именно в этом диапазоне, как видно из рис. 6, вычисленная спектрограмма сильно отличается от экспериментальной. Парциальный вклад молекулярных полос и атомарных линий в спектрограмму излучения рассматриваемой смеси при $V_{sw} = 5.2$ км/с и $p_0 = 1$ Торр показан на рис. 7. Видно, что интенсивность излучения молекулярных полос в рассматриваемом диапазоне очень низкая. Отсюда можно сделать вывод, что при DSMC моделировании недостаточно корректно учитывается фоновое излучение. Это является причиной большого различия между вы-

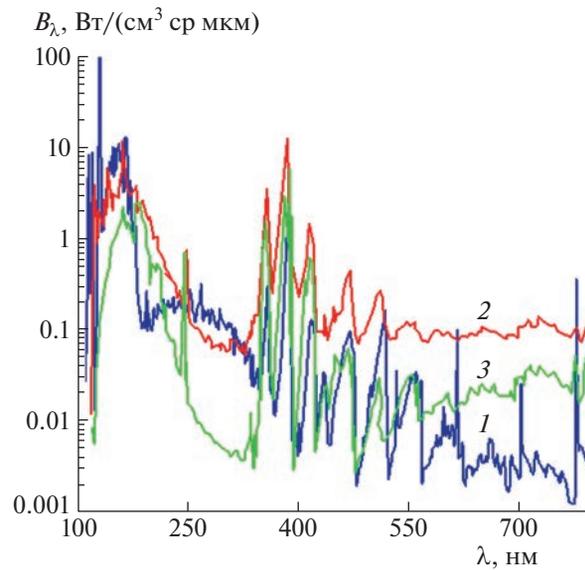


Рис. 8. Сравнение спектрограмм излучения смеси 96%CO₂ + 4%N₂ при $V_{SW} = 6.8$ км/с и $p_0 = 0.25$ Торр, полученных с помощью: 1 – расчета методом DSMC (настоящая работа); 2 – измерений на ударной трубе EAST [8]; 3 – расчета по модели NEQAIR [29].

численной и измеренной спектральными кривыми. Похожая проблема существует при описании результатов измерения на ударной трубе EAST. Здесь фоновое излучение, наблюдаемое в эксперименте, также значительно превосходит расчетные значения, полученные с помощью вычислительной процедуры NEQAIR [62].

Эксперименты на электро-разрядной ударной установке EAST Исследовательского центра NASA Ames [8] проводились для смеси, имеющей состав 96%CO₂+4%N₂, который совпадает с составом атмосфер Марса и Венеры. На рис. 8 проводится сравнение спектральной кривой, вычисленной в настоящей работе при $V_{SW} = 6.8$ км/с и $p_0=0.25$ Торр для данного состава смеси, с соответствующей спектральной кривой, полученной на EAST, а также вычисленной с помощью спектральной модели NEQAIR [29]. Видно, что в VUV спектральной области, которая вносит значительный вклад в суммарную интенсивность излучения. Данные DSMC расчета достаточно хорошо согласуются с экспериментальной кривой и лежат несколько выше расчета по NEQAIR модели. В спектральном диапазоне длин волн $\lambda > 250$ нм расчетная спектральная кривая в общих чертах повторяет экспериментальную кривую, но лучше согласуется со спектральной кривой, полученной с помощью расчета по NEQAIR модели. Как и в предыдущем случае, более высокие экспериментальные значения величины B_λ могут свидетельствовать о недостаточно корректном учете фонового излучения в расчетных моделях.

Как уже отмечалось выше, фотоионизация молекул газа перед фронтом ударной волны жестким излучением ударно нагретого газа может заметно увеличить начальную электронную концентрацию за ударным фронтом [51]. Это, в свою очередь, ведет к увеличению скорости возбуждения электронных уровней атомов и молекул электронным ударом и, соответственно, к повышению их излучательной способности. Так как данный процесс не учитывался в рассматриваемой модели, расчетная спектрограмма должна быть несколько ниже экспериментальной.

Значительное влияние на рассчитываемую величину излучательной способности ударно нагретого газа могут оказывать погрешности при определении кинетических и спектроскопических параметров газа. В первую очередь это относится к значениям констант скоростей химических реакций, которые могут иметь разброс в несколько порядков. Как показано в [61], варьирование параметров констант скоростей некоторых ключевых химических реакций может заметно улучшить согласие между расчетными и экспериментальными спектральными кривыми. Аналогичная ситуация наблюдается при определении сечений возбуждения электронных уровней молекул газа. Имеющаяся информация относится, как правило, к переходам из основного электронного состояния молекул при их столкновениях с электронами. С другой стороны, база данных по силам осцилляторов также является далеко не полной [63]. Отсутствие же в вычислительной мо-

дели полного набора спектроскопических параметров ведет к снижению расчетной эффективности излучения по сравнению с экспериментальной.

Следует также отметить, что методики регистрации излучения на ударных установках DDST-M и EAST отличаются друг от друга. На первой установке измеряется объемная плотность энергии излучения I_λ в определенном измерительном сечении, которая затем пересчитывается на объемную мощность излучения B_λ с использованием значений эффективного времени излучения Δt , зависящих от длины волны излучения [64]. На второй установке используется так называемая 3D спектроскопия изображения, которая позволяет сразу измерять величину B_λ [65]. Сравнение результатов измерения объемной мощности излучения с помощью этих методик показывает, что данные, полученные на ударной трубе DDST-M, как правило, превышают данные, полученные на установке EAST. Этим можно объяснить тот факт, что результаты настоящего расчета лучше согласуются с экспериментальными данными EAST, чем с данными измерений, проведенных на ударной трубе DDST-M. Это хорошо видно при сопоставлении спектральных кривых, приведенных на рис. 5 и 8.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена математическая модель для численного исследования излучения за фронтом сильной ударной волны в газовой смеси $\text{CO}_2\text{--N}_2$, которая основана на методе прямого статистического моделирования Монте-Карло. Моделирование радиационных характеристик смеси $\text{CO}_2\text{--N}_2$ за фронтом сильной ударной волны выполнено для двух вариантов состава смеси: $70\%\text{CO}_2 + 30\%\text{N}_2$ и $96\%\text{CO}_2 + 4\%\text{N}_2$, которые были использованы при приведении экспериментов на детонационной ударной трубе DDST-M Института механики МГУ и электро-разрядной ударной установке EAST Исследовательского центра NASA Ames соответственно.

Показано, что при увеличении скорости ударной волны V_{SW} мощность излучения растет. Этот рост особенно заметен в вакуумно-ультрафиолетовой области, где при $V_{SW} = 7.4$ км/с появляются интенсивные линии атома углерода на длинах волн $\lambda = 156.1, 165.8$ и 195.5 нм. Схожий эффект просматривается также в видимой области, где наблюдается резкий всплеск излучения мультиметов атома кислорода на длинах волн $\lambda = 616$ и 777 нм.

Проведено сравнение рассчитанных спектрограмм объемной мощности излучения B_λ с соответствующими спектрограммами, измеренными на ударных трубах, а также вычисленными с помощью столкновительно-радиационной модели и спектральной модели NEQAIR. Показано, что в общих чертах все спектрограммы повторяют друг друга. Тем не менее данные расчета, полученные в настоящей работе, лежат значительно ниже экспериментальных данных. Обсуждаются причины данного разногласия.

Из анализа полученных результатов ясно, что необходима дальнейшая работа по модернизации предложенной модели как с точки зрения усовершенствования ее составляющих, так и с точки зрения расширения и уточнения используемых баз данных.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации “Экспериментальное и теоретическое исследование кинетических процессов в газах” (номер гос. регистрации АААА-А19-119012990112-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Braun M., Bruce P., Levis E. Strategies to utilize advanced heat shield technology for high-payload Mars atmospheric entry missions // Acta Astronaut. 2017. V. 136. P. 22–33.
2. Суржиков С.Т., Якушно Д.С. // Анализ летных данных по конвективному и радиационному нагреву поверхности спускаемого марсианского космического аппарата SCHIAPARELLI // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 6. С. 73–84.
3. Суржиков С.Т. Радиационно-конвективный теплообмен космического аппарата сферической формы // ТВТ. 2011. Т. 49. № 1. С. 92–107.
4. Reyner P. Survey of CO_2 radiation experimental data in relation with planetary entry // Galaxies. 2021. V. 9. № 15. 41 p.
5. Gu S., Olivier H. Capabilities and limitations of existing hypersonic facilities // Prog. Aerospace Sci. 2020. V. 113. № 100607. 27 p.
6. Bose D., Grinstead J.H., Bogdanoff D.W., Wright M.J. Shock layer radiation measurements and analysis for Mars entry // Proc. 3rd Int. Workshop on Radiation of High Temperature Gases in Atmospheric Entry. 2008. ESA SP-667. Heraklion, Greece.

7. *Grinstead J.H., Wright M.J., Bogdanoff D.W., Allen G.A.* Shock radiation measurements for mars aerocapture radiative heating analysis // *J. Thermophys. Heat Transfer*. 2009. V. 23. P. 249–255.
8. *Cruden B.A., Prabhu D., Martinez R., Le H., Bose D., Grinstead J.H.* Absolute radiation measurement in Venus and Mars entry conditions // *AIAA Paper* 2010–4508. 15 p.
9. *Cruden B.A., Prabhu D., Martinez R.* Absolute radiation measurement in Venus and Mars entry conditions // *J. Spacecr. Rockets*. 2012. V. 49. 1069–1079.
10. *Brandis A.M., Johnston C.O., Cruden B.A., Prabhu D.* Investigation of nonequilibrium radiation for Mars entry // *AIAA Paper* 2013–1055. 36 p.
11. *Brandis A.M., Johnston C.O., Cruden B.A.* Validation of CO 4th positive radiation for Mars entry // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. 2013. V. 121. P. 91–104.
12. *Cruden B.A.* Absolute radiation measurement in Earth and Mars entry conditions // *Von Karman Inst. Lecture Ser.* 2014. № STO-AVT-218-VKI.
13. *Johnston C.O., Brandis A.M.* Modeling of nonequilibrium CO Fourth-Positive and CN Violet emission in CO₂–N₂ gases // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. 2014. V. 149. P. 303–317.
14. *Горелов В.А., Киреев А.Ю., Шиленков С.В.* Неравновесное молекулярное излучение за фронтом сильной ударной волны в смеси CO₂–N₂–O₂ // *ПМТФ*. 2005. Т. 46. № 2. С. 13–22.
15. *Takayanagi H., Lemal A., Nomura S., Fujita K.* Measurements of carbon dioxide nonequilibrium infrared radiation in shocked and expanded flows // *J. Thermophys. Heat Transfer*. 2018. V. 32. P. 483.
16. *Анохин Е.М., Иванова Т.Ю., Кудрявцев Н.Н., Стариковский А.Ю.* Динамика излучения в смеси CO–N₂ за сильными ударными волнами // *ТВТ*. 2007. Т. 45. № 6. С. 807–813.
17. *Залогин Г.Н., Козлов П.В., Кузнецова Л.А., Лосев С.А., Макаров В.Н., Романенко Ю.В., Суржиков С.Т.* Излучение смеси CO₂–N₂–Ag в ударных волнах: эксперимент и теория // *ЖТФ*. 2001. Т. 71. № 6. С. 10–16.
18. *Козлов П.В., Забелинский И.Е., Быкова Н.Г., Герасимов Г.Я., Левашов В.Ю.* Экспериментальное исследование радиационных характеристик смеси CO₂–N₂ за фронтом сильной ударной волны // *Хим. физика*. 2021. Т. 40. № 12. С. 23–28.
19. *Ступоченко Е.В., Лосев С.А., Осипов А.И.* Релаксационные процессы в ударных волнах. М.: Наука, 1965. 484 с.
20. *Грим Г.* Спектроскопия плазмы. М.: Атомиздат, 1969. 452 с.
21. *Авилова И.В., Биберман Л.М., Воробьев В.С. и др.* Оптические свойства горячего воздуха. М.: Наука, 1970. 320 с.
22. *Каменщиков В.А., Пластинин Ю.А., Николаев В.М. и др.* Радиационные свойства газов при высоких температурах. М.: Машиностроение, 1971. 440 с.
23. *Лохте-Хольтгревен В.* Методы исследования плазмы. Спектроскопия, лазеры, зонды. М.: Мир, 1971. 126 с.
24. *Кузнецова Л.А., Кузьменко Н.Е., Кузяков Ю.Я., Пластинин Ю.А.* Вероятности оптических переходов двухатомных молекул. М.: Наука, 1980. 320 с.
25. *Park C.* Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics. New York: Wiley, 1990. 358 p.
26. *Уэйн Р.* Основы и применения фотохимии. М.: Мир, 1991. 304 с.
27. *Ельяшевич М.А.* Атомная и молекулярная спектроскопия. М.: УРСС. 2001. 894 с.
28. *Суржиков С.Т.* Оптические свойства газов и плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 575 с.
29. *Whiting E., Park C., Yen L., Arnold J., Paterson J.* NEQAIR96, Nonequilibrium and equilibrium radiative transport and spectra program: user's manual // *Tech. Rep. NASA RP-1389*. Moffett Field: Ames Research Center, 1996.
30. *Кузнецова Л.А., Суржиков С.Т.* Информационно-вычислительный комплекс MSRT-RADEN. I. Основная модель коэффициентов поглощения // *Мат. моделирование*. 1998. Т. 36. № 3. С. 15–28.
31. *Johnston C.O., Hollis B.R., Sutton K.* Spectrum modeling for air shock-layer radiation at lunar-return conditions // *J. Spacecr. Rockets*. 2008. V. 45. P. 865–878.
32. *Kumar N., Bansal A.* Flow and radiation modeling over a Martian entry vehicle // *Acta Astronaut.* 2023. V. 205. P. 172–184.
33. *Johnston C.O., Hollis B.R., Sutton K.* Non-Boltzmann modeling for air shock-layer radiation at lunar-return conditions // *J. Spacecr. Rockets*. 2008. V. 45. P. 879–890.
34. *Суржиков С.Т.* Применение квазистационарных eRC-моделей для расчета неравновесного излучения ударных волн при скорости порядка 10 км/с // *Физ.-хим. кинет. газ динам.* 2022. Т. 23. № 4. 39 с.
35. *Lemal A., Jacobs C.M., Perrin M.-Y., Laux C.O., Tran P., Raynaud E.* Prediction of nonequilibrium air plasma radiation behind a shock wave // *J. Thermophys. Heat Trans.* 2016. V. 30. P. 197–210.
36. *Karpuzcu I.T., Jouffray M.P., Levin D.A.* Collisional radiative modeling of electronically excited states in a hypersonic flow // *J. Thermophys. Heat Transfer*. 2022. V. 36. P. 982–1002.
37. *Du Y.W., Sun S.R., Tan M.J., Zhou Y., Chen X., Meng X., Wang H.X.* Non-equilibrium simulation of energy relaxation for earth reentry utilizing a collisional-radiative model // *Acta Astronaut.* 2022. V. 193. P. 521–537.

38. Zhu T., Li Z., Levin D.A. Modeling of unsteady shock tube flows using direct simulation Monte Carlo // *J. Thermophys. Heat Transfer*. 2014. V. 28. P. 623–634.
39. Gimelshein S.F., Wysong I.J., Fangman A.J. et al. Kinetic and continuum modeling of high-temperature air relaxation // *J. Thermophys. Heat Transfer*. 2022. V. 36. P. 870–893.
40. Bird G.A. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Oxford: Clarendon Press, 1994. 458 p.
41. Boyd I.D. Computation of hypersonic flows using the direct simulation Monte Carlo method // *AIAA Paper* 2013–2557. 33 p.
42. Кусов А.Л. О релаксации вращательной энергии молекул в методе прямого статистического моделирования Монте-Карло // *Мат. моделирование*. 2017. Т. 29. № 8. С. 95–109.
43. Grover M.S., Schwartzentruber T.E. Internal energy relaxation and dissociation of molecular oxygen using direct molecular simulation // *AIAA Paper* 2017–3488. 16 p.
44. Wysong I., Gimelshein S. Modeling hypersonic reacting flows using DSMC with the Bias reaction model // *AIAA Paper* 2017–4025. 15 p.
45. Beyer J., Pfeiffer M., Fasoulas S. Non-equilibrium radiation modeling in a gas kinetic simulation code // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. 2022. V. 280. № 108083. 13 p.
46. Tibère-Inglesse A., Cruden B.A. Analysis of nonequilibrium atomic and molecular nitrogen radiation in pure N₂ shockwaves // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. 2022. V. 280. № 108302. 16 p.
47. Кусов А.Л., Быкова Н.Г., Герасимов Г.Я., Забелинский И.Е., Козлов П.В., Левашов В.Ю. Прямое статистическое моделирование излучения за фронтом ударной волны в смеси CO₂ и N₂ // *Физ.-хим. кинет. газ. динам*. 2023. Т. 24. № 2. 63 с.
48. Park C., Howe J.T., Jaffe R.L., Candler G.V. Review of chemical-kinetic problems of future NASA missions, II: Mars entries // *J. Thermophys. Heat Transfer*. 1994. V. 8. P. 9–23.
49. Borgnakke C., Larsen P.S. Statistical collision model for Monte Carlo simulation of polyatomic gas mixture // *J. Comput. Phys*. 1975. V. 18. P. 405–420.
50. Ibragimova L.B., Shatalov O.P. Non-equilibrium kinetics behind shock waves experimental aspects // *High Temperature Phenomena in Shock Waves*. Berlin: Springer, 2012. P. 99–147.
51. Nomura S., Kawakami T., Fujita K. Nonequilibrium effects in precursor electrons ahead of shock waves // *J. Thermophys. Heat Transfer*. 2021. V. 35. P. 518–523.
52. Adamson S., Astapenko V., Deminskii M., Eletsii A., Potapkin B., Sukhanov L., Zaitsevskii A. Electron impact excitation of molecules: Calculation of the cross section using the similarity function method and ab initio data for electronic structure // *Chem. Phys. Lett*. 2007. V. 436. P. 308–313.
53. Sun Q., Winstead C., McKoy V. Electronic excitation of carbon monoxide by low-energy electron impact // *Phys. Rev. A*. 1992. V. 46. P. 6987–6994.
54. Mumma M.J., Stone E.J., Zipf E.C. Excitation of the CO Fourth Positive Band System by Electron Impact on Carbon Monoxide and Carbon Dioxide // *J. Chem. Phys*. 1971. V. 54. P. 2627–2634.
55. Ajello J.M. Emission Cross Sections of CO by Electron Impact in the Interval 1260–5000 Å // *J. Chem. Phys*. 1971. V. 55. P. 3158–3168.
56. NIST Atomic Spectra Database, Version 5.9. Gaithersburg: NIST, 2021.
57. Кусов А.Л., Быкова Н.Г. Теоретические основы расчета факторов Хёня-Лондона двухатомных молекул // *Физ.-хим. кинет. газ. динам*. 2022. Т. 23. № 1. 21 с.
58. Гурвич Л.В., Вейц И.В., Медведев В.А и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Т. I. Кн. 1. М.: Наука, 1978. 496 с.
59. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 2008. 656 с.
60. Badnell N.R., Bautista M.A., Butler K., Delahaye F., Mendoza C., Palmeri P., Zeppen C.J., Seaton M.J. Updated opacities from the Opacity Project // *Mon. Not. R. Astron. Soc*. 2005. V. 360. P. 458–464.
61. Дикалюк А.С., Суржиков С.Т. Расчетное исследование модели неравновесного излучения за фронтом ударных волн в марсианской атмосфере // *Изв. РАН. МЖГ*. 2013. № 1. С. 141–160.
62. Collen P.L., Doherty L.J., McGilvray M. Measurements of radiating hypervelocity air shock layers in the T6 free-piston driven shock tube // *Intern. Conf. FAR–2019*. 2019. № 1053360.
63. Qin Z., Zhao J.M., Liu L.H. Radiative transition probabilities for the main diatomic electronic systems of N₂, N₂⁺, NO, O₂, CO, CO⁺, CN, C₂ and H₂ produced in plasma of atmospheric entry // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. 2017. V. 202. P. 286–301.
64. Козлов П.В., Забелинский И.Е., Быкова Н.Г., Герасимов Г.Я., Левашов В.Ю. Экспериментальное исследование излучательных характеристик ударно-нагретого воздуха в ультрафиолетовой и видимой областях спектра // *Изв. РАН. МЖГ*. 2022. № 6. С. 85–93.
65. Greenberg R.B., Cruden B.A., Grinstead J.H., Yeung D. Collection optics for imaging spectroscopy of an electric arc shock tube // *Proc. SPIE 7429, Novel Optical Systems Design and Optimization XII*. 2009. № 74290H.