ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2025, № 3, с. 120–134

УДК 533.6.011.5

СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЬЮТОНА ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ И НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

© 2025 г. С. А. Таковицкий*

Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского, Жуковский, Россия

**e-mail: c.a.t@tsagi.ru*

Поступила в редакцию 07.03.2025 г.
После доработки 21.03.2025 г.
Принята к публикации 21.03.2025 г.

Исследовано влияние на аэродинамическое сопротивление тела его усечения на передний торец или кромку. В первом случае форма поперечных сечений (круглая, эллиптическая, ромбовидная) не изменяется, а их площадь определяется степенной зависимостью от продольной координаты. Во втором случае, форма поперечных сечений изменяется от отрезка в начальном сечении до круга в конечном сечении. Построенные тела имеют одинаковую длину и площадь основания. Сопротивление вычислялось с помощью формулы Ньютона для коэффициента давления.

Ключевые слова: тело с торцом и кромкой, сопротивление, формула Ньютона

DOI: 10.31857/S1024708425030112

Решение задачи Ньютона, первоначально сформулированной для осесимметричных тел [1–3], оказалось весьма продуктивным при исследовании пространственных конфигураций. Теоретически обосновано, численно и экспериментально подтверждено уменьшение сопротивления у тел со звездообразной формой поперечного сечения [4–11]. Тела имеют вогнутую поверхность, лучи стыкуются друг с другом непосредственно или через дуги окружности. Исследованы варианты с вогнутыми, плоскими и выпуклыми боковыми гранями лучей.

С целью реализации положительных свойств неосесимметричных тел и обеспечения плавного сопряжения с другими элементами, в формулировку задачи введено дополнительное ограничение, фиксирующее форму основания. Первые результаты в этом направлении, подтвердившие возможность уменьшения сопротивления по сравнению с конусом равного удлинения, были получены для носовых частей, примыкающих к осесимметричному корпусу [12]. В начальном сечении тела представлялись набором отрезков одинаковой длины с началом на продольной оси. Отрезки делят тело на сектора, в каждом из которых боковая поверхность образуется набором отрезков, соединяющих точки отрезка в начальном сечении с точками дуги окружности в конечном сечении. Форма получаемой при этом линейчатой поверхности, а значит и сопротивление тела, зависят от выбранного закона формирования пар точек — концов отрезка. Отметим, что только в простейшем случае, при двух отрезках (которые складываются в один отрезок) в начальном сечении, тело имеет выпуклую поверхность.

Исследования тел, не имеющих вогнутые участки поверхности, показали, что минимальным сопротивлением обладают тела образованные треугольными элементами наклонных плоскостей и линейчатых поверхностей [13–16]. При малых значениях удлинения оптимальные тела имеют передний торец в форме правильного многоугольника. При средних и больших значениях удлинения, тело представляется отрезком в начальном поперечном сечении. Необходимо подчеркнуть, что предложенные в [12] тела обладают основными чертами оптимальных тел: имеют переднюю кромку, треугольную и трапециевидную форму при виде сбоку и сверху. Исследование близких к оптимальным по сопротивлению тел продолжено в [17]. При этом расчет аэродинамических характеристик на основе формулы Ньютона дополнен моделированием формирующегося около тела течения невязкого нетеплопроводного совершенного газа в рамках уравнений Эйлера.

Проведенные исследования демонстрируют пологость минимума, возможность построения множества тел, имеющих близкие значения сопротивления и, при этом, отличающихся по форме. Для подробного

анализа характеристик, в частности, в диапазонах предельно малых и предельно больших значений удлинения, важно построить близкие к оптимальным тела, сопротивление которых представляется аналитической зависимостью от геометрических параметров. В качестве такого тела предлагается рассмотреть конус, усеченный двумя наклонными плоскостями. Поверхность тела разбивается на два плоских и два конических элемента, на которых давления имеет постоянное значение. Второй вариант близкого к оптимальному тела представляет тело с эллиптическими поперечными сечениями, у которого отсутствуют плоские участки поверхности. Учитывая отсутствие торца у тела с передней кромкой и важность его наличия для уменьшения сопротивления тел малого и среднего удлинения, дальнейшее развитие получили исследования осесимметричных и неосесимметричных тел со степенным законом изменения площади поперечных сечений в продольном направлении [18, 19].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью исследования является сопоставление аэродинамического сопротивления тел, имеющих одинаковое удлинение и отличающихся формой поперечных сечений. Тела обтекаются при нулевом угле атаки, т. е. скорость направлена вдоль продольной оси тела. Рассматривается составляющая сопротивления, обусловленная действием сил давления, действие силы трения не учитывается. Без потери общности анализа принято, что длина тела равна единице $L = 1$.

Сопоставление аэродинамических характеристик проводится для пространственных тел, симметричных относительно вертикальной и горизонтальной плоскостей и имеющих основание в виде круга, эллипса, ромба (рис. 1). В начальном поперечном сечении тела представляются либо точкой (вершиной), либо передним торцом, совпадающим по форме с основанием, либо отрезком (передней кромкой).

У тел с вершиной и торцом форма поперечных сечений сохраняется, изменяется только площадь S, для которой принята степенная зависимость от продольной координаты

$$S = S_{\text{мид}} \left\{ \left(\frac{S_0}{S_{\text{мид}}} \right)^{1/(2n)} + \left(1 - \left(\frac{S_0}{S_{\text{мид}}} \right)^{1/(2n)} \right) x \right\}^{2n}, \tag{1.1}$$

где S_0 — площадь торца, $S_{\text{мид}}$ — площадь основания, x — продольная координата, отсчитываемая от вершины (торца), n — показатель степени.

Основной геометрической характеристикой теля является его удлинение λ, которое определяется как отношение длины к диаметру основания эквивалентного по площади поперечного сечения тела вращения:

$$\lambda = \frac{1}{2R}, \quad R = \sqrt{\frac{S_{\text{мид}}}{\pi}}. \tag{1.2}$$

Геометрия тел вращения полностью описывается заданием трех параметров: λ, n и отношения радиуса r_0 переднего торца к радиусу R основания

$$\frac{r_0}{R} = \sqrt{\frac{S_0}{S_{\text{мид}}}}.$$

Для описания формы тел с эллиптическим и ромбовидным основанием вводится дополнительный геометрический параметр: ε — коэффициент сжатия (эллиптичности), который равен отношению габаритных размеров в нормальном и боковом направлениях. Для определенности принято, что сжатие происходит в нормальном направлении. Поэтому большие диагональ ромба и ось эллипса параллельны боковой оси z, а меньшие диагональ и ось параллельны вертикальной оси y. Соответственно, $\varepsilon \leqslant 1$.

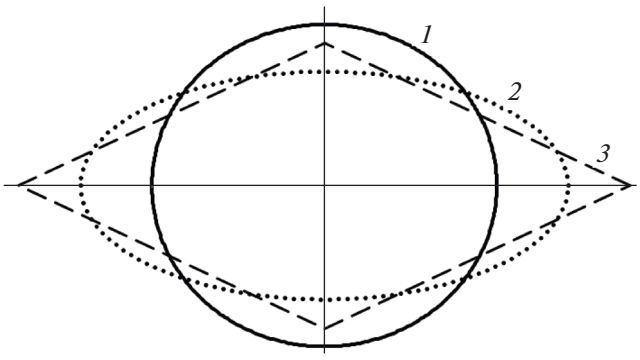

Рис. 1. Основания в виде круга (*1*), эллипса (*2*), ромба (*3*).

В отличие от эллиптических тел, исследование тел с ромбовидным основанием ограничено случаем $n = 1$, что уменьшает число геометрических параметров до трех. В этом случае тела имеют форму заостренной или усеченной пирамиды.

Тела с передней кромкой имеют круглое основание. Соответственно, форма поперечных сечений изменяется в продольном направлении, начинаясь отрезком и заканчиваясь кругом. Рассмотрены два варианта: тело, образованное усечением конуса двумя наклонными плоскостями, и тело с эллиптическими поперечными сечениями. В вертикальной плоскости симметрии тела имеют форму клина, а в горизонтальной плоскости симметрии — форму трапеции

Геометрическими параметрами являются удлинение λ и отношение полуразмаха передней кромки z_0 к радиусу основания R. На рис. 2 показаны характерные поперечные сечения тел с $z_0/R = 0.5$ при $x = 0$, $1/3$, $2/3$, 1 в четверти плоскости, соответствующей $z \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

При вычислении коэффициента сопротивления c_x в качестве характерной площади принята площадь основания $S_{\text{мид}}$. Наряду с простым сопоставлением тел по значениям коэффициента сопротивления, выполнялась также оптимизация по одному или двум геометрическим параметрам. Экстремальные значения параметров, соответствующие минимуму целевой функции (коэффициент сопротивления), определялись методом циклического покоординатного спуска и методом квадратичной интерполяции.

2. МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ

Распределение давления на поверхности тела определялось в рамках модели Ньютона.

Согласно модели Ньютона, коэффициент давления на каждом элементе поверхности тела зависит только от угла δ между вектором скорости набегающего потока и его проекцией на плоскость, касательную к элементу поверхности (если проекцией является точка, то угол равен $\pi/2$):

$$c_p = 2\sin^2\delta. \tag{2.1}$$

Коэффициент давления определяется как отношение разности между статическим давлением в точке обтекаемого тела и статическим давлением в набегающем потоке к скоростному напору.

В случае осесимметричного тела угол δ однозначно связан с производной r' радиуса по продольной координате. Простейшими телами, которые удобно использовать для сопоставления характеристик, являются конус и усеченный на торец конус.

У конуса производная радиуса постоянна и коэффициент сопротивления конуса $c_{x_\text{кон}}$ зависит только от удлинения:

$$c_{x_\text{кон}} = \frac{2}{1 + 4\lambda^2}. \tag{2.2}$$

При малых значениях удлинения можно использовать приближенное соотношение

$$c + x \approx 2 - 8\lambda^2.$$

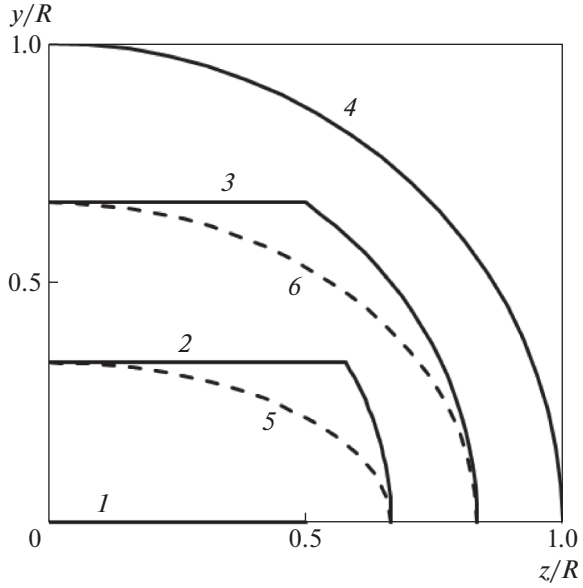

Рис. 2. Поперечные сечения тел с $z_0/R = 0.5$ при $x = 0$ (*1*); $x = 1/3$ (*2*, *5*); $x = 2/3$ (*3*, *6*); $x = 1$ (*4*); *1, 2, 3, 4* — усеченный конус; *1, 4, 5, 6* — эллиптическое тело.

Решение для оптимального усеченного конуса впервые было представлено Ньютоном и проанализировано А.Н. Крыловым [1]. Установлено, что усеченный конус имеет меньшее по сравнению с конусом сопротивление:

$$c_x = 2 + \frac{4\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left(\lambda\left(\sqrt{1+\lambda^2}-\lambda\right)-1\right). \tag{2.3}$$

Геометрические параметры усеченного конуса минимального сопротивления связаны соотношением:

$$\frac{r_0}{R} = \left(\sqrt{1+\lambda^2}-\lambda\right)^2. \tag{2.4}$$

При малых значениях удлинения из (2.3) следует параболическая зависимость:

$$c_x \approx 2 - 4\lambda + 4\lambda^2.$$

В предельном случае $\lambda \gg 1$ коэффициенты сопротивления конуса и усеченного конуса совпадают и убывают обратно пропорционально квадрату удлинения

$$c_x \approx \frac{1}{2\lambda^2}.$$

3. СОПОСТАВЛЕНИЕ ТОЧНОГО И ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

Наряду с точным решением задачи Ньютона, известны два приближенных решения, обоснованные для тел большого удлинения. Первое приближенное решение представляет степенные тела, второе решение — усеченные степенные тела. В обоих случаях показатель степени равен 3/4. Выполненный в [18] анализ показал, что при малых значениях удлинения ($\lambda \approx 0.25 \div 0.45$) степенные тела и усеченные степенные тела имеют сопротивление на 24% и 6% больше, чем оптимальное тело Ньютона.

Вне анализа остался вопрос о реализации важного преимущества приближенных решений над точным решением Ньютона, которое заключается в возможности выделения основных геометрических параметров и подстройки их значений под конкретные условия задачи. В рамках модели Ньютона, не учитывающей влияние числа Маха, таким условием является удлинение тела.

У степенного тела единственным параметром, который можно варьировать, является показатель степени n. При этом радиус связан с продольной координатой следующим выражением:

$$\frac{r}{R} = x^n. \tag{3.1}$$

При усечении степенного тела появляется второй параметр — относительный размер переднего торца r_0/R:

$$\frac{r}{R} = \frac{r_0}{R}\left(1 + \left(\left(\frac{R}{r_0}\right)^{1/n} - 1\right)x\right)^n. \tag{3.2}$$

При необходимости, набор параметров можно изменить. Например, пару параметров, полностью описывающих геометрию тела, образуют производные радиуса, вычисленные в начальном и конечном поперечных сечениях.

Оптимальные значения n и r_0/R, соответствующие $c_x = \min$, изменяются при изменении удлинения тела. В диапазоне больших удлинений показатель степени равен $n = 3/4$, а радиус переднего торца определяется решением уравнения четвертой степени [18]

$$\left(\frac{r_0}{R}\right)^{4/3} + \frac{8\lambda}{3\sqrt{3}}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{1/3} - 1 = 0.$$

При уменьшении удлинения оптимальные значения изменятся, поскольку в диапазоне малых и умеренных значений удлинения нарушается корректность допущений, положенных в основу приближенный постановок задачи. Поэтому можно подстроить значения геометрических параметров для любого значения удлинения и таким образом уменьшить сопротивление степенного и усеченного степенного тел.

Следуя (2.1), запишем коэффициент сопротивления тела в виде суммы слагаемых, соответствующих переднему торцу и боковой поверхности:

$$c_x = 8\lambda^2\left[r_0^2 + \int_0^1 \frac{2r'^3}{1+r'^2}\,dx\right]. \tag{3.3}$$

На образующей степенного тела радиус и его производная зависят от x следующим образом:

$$r = \frac{1}{2\lambda}x^n, \qquad r' = \frac{n}{2\lambda}x^{n-1}.$$

Полагая в (3.3) $r_0 = 0$, представляем коэффициент сопротивления степенного тела интегралом, который преобразуется посредством замены переменной:

$$c_x = \frac{n^3}{\lambda^2}\int\limits_0^1 \frac{x^{4n-3}}{1+\left(\frac{n}{2\lambda}x^{n-1}\right)^2}\,dx = 2 - 2n\left(\frac{n}{2\lambda}\right)^{\frac{2n}{1-n}} \int\limits_0^{\left(\frac{2\lambda}{n}\right)^{\frac{2}{1-n}}} \frac{dz}{1+z^{1-n}}. \tag{3.4}$$

Интеграл (3.4) выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса

$$c_x = 2 - \frac{2n}{1+\left(\frac{n}{2\lambda}\right)^2}\,{}_2F_1\left(1, 1, \frac{2-n}{1-n}, \frac{1}{1+\left(\frac{n}{2\lambda}\right)^2}\right). \tag{3.5}$$

Найденное решение согласуется с известными результатами. При $n = 1$ интеграл (3.5) упрощается и приводит к (2.2).

При малых значениях удлинения ($\lambda \ll 1$) для коэффициента сопротивления справедлива оценка

$$c_x \approx 2 - \frac{8\lambda^2}{n},$$

которая позволяет сделать заключение о предельном уменьшении до нуля оптимального значения показателя степени при уменьшении удлинения.

Решение (3.5) для степенного тела позволяет найти решение для усеченного степенного тела. Рассмотрим продольное сечение усеченного степенного тела (рис. 3). Продолжим степенную образующую до пересечения с продольной осью в точке $x = -x_0$. Таким образом, получаются два степенных тела, длина первого из которых равна $1 + x_0$, а второе тело имеет длину x_0.

Удлинения первого (λ_1) и второго (λ_2) степенных тел связаны с удлинением λ усеченного тела следующими соотношениями:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{1-x_0}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda}{1-x_0}x_0^{1-n}, \quad x_0 = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{1/n}. \tag{3.6}$$

Сопротивление усеченного степенного тела определяется как разность сопротивлений первого и второго степенных тел с добавлением сопротивления переднего торца. Учитывая отличие площадей оснований тел, получаем окончательное выражение для коэффициента сопротивления усеченного степенного тела

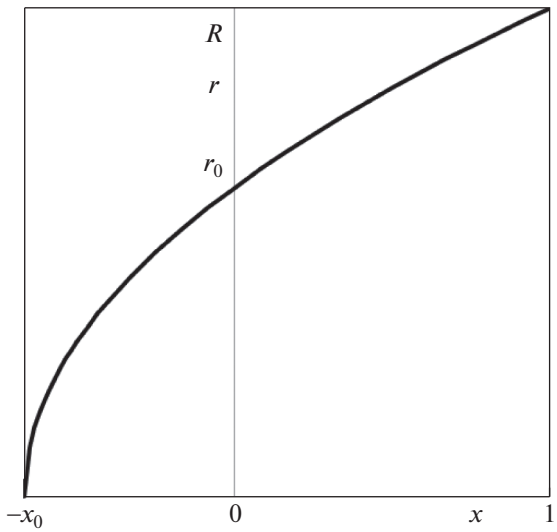

Рис. 3. Продольное сечение тела.

$$\begin{cases} c_x = c_{x_1} + \left(2 - c_{x_2}\right)\left(\dfrac{r_0}{R}\right)^2, \\ c_{x_i} = 2 - \dfrac{2n}{1 + \left(\dfrac{n}{2\lambda_i}\right)^2}\,{}_2F_1\left(1, 1, \dfrac{2-n}{1-n}, \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{n}{2\lambda_i}\right)^2}\right), \\ i = 1, 2. \end{cases} \tag{3.7}$$

Здесь коэффициенты c_{x_1} и c_{x_2} вычисляются в соответствии с (3.5) для соответствующих значений удлинения.

Корректность предложенного приема подтверждается на примере усеченного конуса. На основании (2.2), (3.6) и (3.7), с учетом $n = 1$, получено:

$$c_x = \frac{2}{1 + \left(\dfrac{2\lambda}{\left(1 - \dfrac{r_0}{R}\right)^2}\right)}\left(1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right) + 2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2. \tag{3.8}$$

Минимальное значение коэффициента сопротивления достигается при относительном размере переднего торца, определяемом (2.4). При этом (3.8) сводится к (2.3).

Рассмотрим результаты оптимизации степенных и усеченных степенных тел с целью минимизации коэффициентов сопротивления, определяемых соотношениями (3.5) и (3.7).

На рис. 4 показаны зависимости отношения коэффициентов сопротивления степенного и усеченного степенного тел к коэффициенту сопротивления носовой части Ньютона c_{x_N} от удлинения. Сплошные линии соответствуют приближенным решениям [18], а штриховые — оптимальным телам. Усеченные степенные тела с оптимальными значениями показателя степени и радиуса торца практически не уступают носовой части Ньютона по значениям коэффициента сопротивления во всем диапазоне удлинений. Отличие не превышает 0.1%. В результате оптимизации показателя степени, сопротивление степенных тел также уменьшается. По значениям сопротивления они приближаются к усеченным степенным телам, полученным в приближенном решении [18].

Рис. 5 представляет сопоставление зависимостей относительного радиуса переднего торца от удлинения для носовой части Ньютона, усеченного степенного тела и усеченного конуса.

Оптимальные усеченные степенные тела и носовая часть Ньютона имеют практически одинаковые размеры торца. С ростом удлинения усеченный конус удаляется от оптимальных тел по данному геометрическому параметру. Наоборот, усеченное степенное тело, соответствующее приближенному решению, приближается к оптимальным телам при больших значениях удлинения.

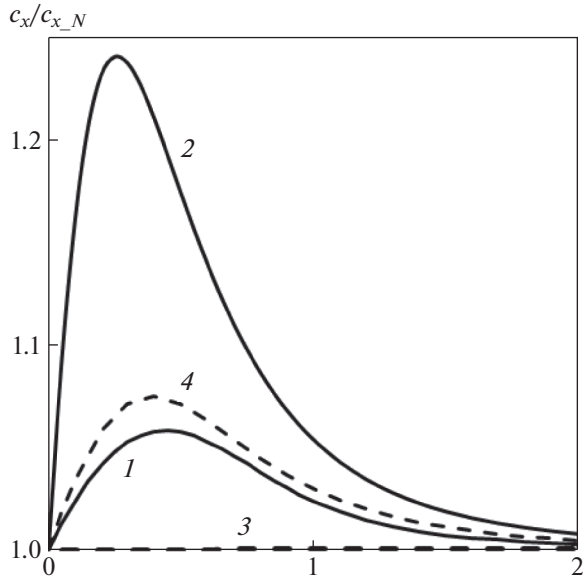

Рис. 4. Сопротивление усеченного степенного тела (*1, 3*), степенного тела (*2, 4*) по отношению к сопротивлению носовой части Ньютона c_{x_N}: *1* и *2* — тела с теоретическими значениями геометрических параметров, *3* и *4* — тела с оптимальными значениями геометрических параметров.

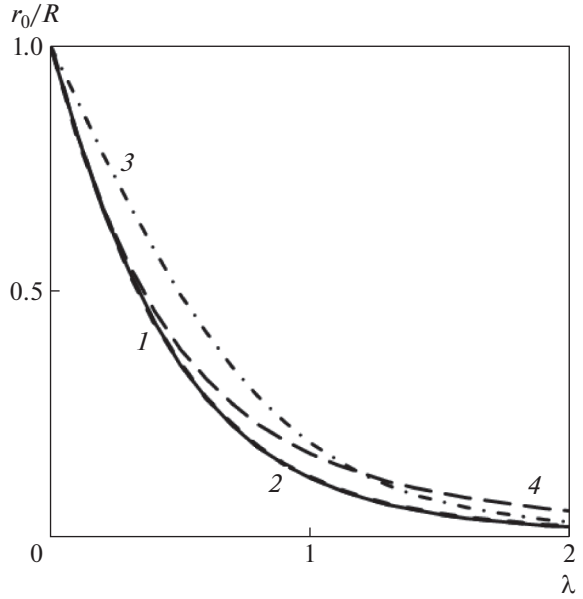

Рис. 5. Отношение радиусов торца и основания в зависимости от удлинения: *1* — носовая часть Ньютона, *2* — оптимальное усеченное степенное тело, *3* — усеченное степенное тело (приближенное решение), *4* — усеченный конус.

Отмеченная особенность объясняется тем, что в диапазоне больших значений удлинения относительный размер торца оптимальных тел убывает пропорционально λ^{-3}. В свою очередь, на основании (2.4) для геометрических параметров усеченного конуса при $\lambda \gg 1$ справедлива оценка

$$\frac{r_0}{R} = \frac{1}{4\lambda^2}.$$

По значениям показателя степени степенные тела сопоставлены на рис. 6. При предельном увеличении удлинения оптимальные значения показателя степени стремятся к результату приближенного решения — $n = 0.75$. Для тел, не имеющих торца, в диапазоне малых значений удлинения получена близкая к линейной зависимость n от λ, указывающая на стремление к $n = 0$ при $\lambda = 0$. Показатель степени усеченного тела также монотонно возрастает с ростом удлинения. При этом, в диапазоне малых значений λ отмечено ослабление зависимости коэффициента сопротивления от n, что обусловлено увеличением радиуса торца и, следовательно, увеличением его вклада в суммарное сопротивление. На рис. 6 штриховыми линиями ограничен диапазон изменения показателя степени, в котором относительное изменение коэффициента сопротивления не превышает 0.01%. При приближении удлинения к нулю этот диапазон резко расширяется.

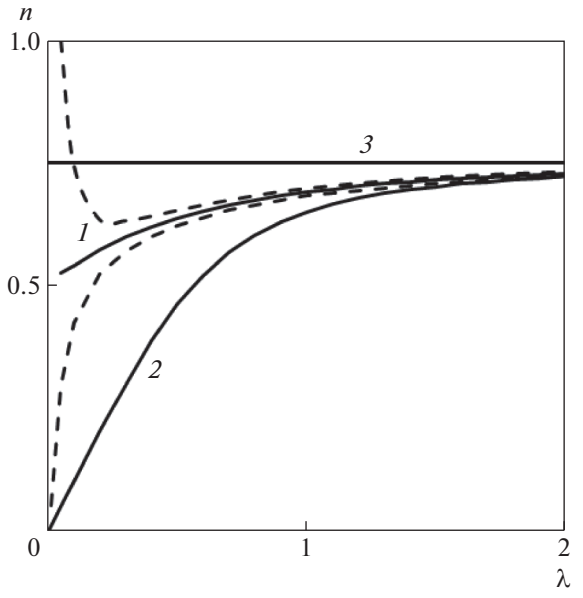

Рис. 6. Показатель степени в зависимости от удлинения: *1* — усеченное степенное тело, *2* — степенное тело, *3* — приближенное решение, *4* — граница, соответствующая увеличению коэффициента сопротивления на 0.01%.

Полученные результаты полностью согласуются с результатами исследования усеченных степенных тел в рамках модели Эйлера [20], что подтверждает близость этих тел к оптимальным телам, как по геометрическим характеристикам, так и по значениям коэффициента сопротивления, в диапазоне сверхзвуковых и больших сверхзвуковых скоростей.

4. УСЕЧЕННЫЕ ТЕЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ И РОМБОВИДНОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Следуя приему, реализованному при определении коэффициента сопротивления усеченного степенного тела с круглым основанием, получим соотношения для расчета коэффициентов сопротивления неосесимметричных тел, затупленных по торцу. В качестве исходного материала будем использовать результаты исследования тел, не имеющих переднего торца [19].

Сопротивление усеченного тела разбивается на составляющие, обусловленные обтеканием торца и боковой поверхности, вклад которой определяется как разность сопротивлений двух тел без торца. Удлинения достраиваемых тел зависят от удлинения усеченного тела, показателя степени, относительного размера переднего торца.

Коэффициент сопротивления пирамиды с ромбовидным основанием определяется соотношением [19]

$$c_x = \frac{2}{1 + 8\lambda^2 \dfrac{\varepsilon + 1/\varepsilon}{\pi}}. \tag{4.1}$$

Следуя (3.6) и (3.7) с использованием (4.1), получаем выражение для коэффициента усеченной пирамиды

$$c_x = \frac{2}{1 + 8\lambda^2 \dfrac{\varepsilon + 1/\varepsilon}{\pi\left(1 - \dfrac{r_0}{R}\right)^2}} \left(1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right) + 2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2. \tag{4.2}$$

Соотношения (3.8) и (4.2) совпадают при введении для усеченной пирамиды условного удлинения

$$\lambda_{усл} = \lambda\sqrt{\frac{2\,(\varepsilon + 1/\varepsilon)}{\pi}}. \tag{4.3}$$

Эта особенность позволяет установить экстремальное значение для относительного размера торца и соответствующее минимальное значение коэффициента сопротивления усеченной ромбовидной пирамиды, используя ранее полученные результаты (2.3) и (2.4) для усеченного конуса

$$\begin{cases} \dfrac{r_0}{R} = \left(\sqrt{1 + \lambda_{усл}^2} - \lambda_{усл}\right)^2, \\ c_x = 2 - 4\lambda_{усл}\left(\sqrt{1 + \lambda_{усл}^2} - \lambda_{усл}\right). \end{cases} \tag{4.4}$$

Аналогично определяются оптимальный относительный размер торца и минимальное сопротивление усеченной правильной пирамиды с многоугольным основанием. Для пирамиды с острой вершиной и k-угольным основанием выполняется соотношение [19]

$$c_x = \frac{2}{1 + 4\lambda^2 \dfrac{k}{\pi}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{k}}.$$

Отсюда, например, для усеченного тетраэдра получается

$$\begin{cases} \lambda_{усл} = \lambda\sqrt{\dfrac{3}{\pi}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}}, \\ \dfrac{r_0}{R} = \left(\sqrt{1 + \lambda_{усл}^2} - \lambda_{усл}\right)^2, \\ c_x = 2 - 4\lambda_{усл}\left(\sqrt{1 + \lambda_{усл}^2} - \lambda_{усл}\right). \end{cases}$$

В [19] установлено, что коэффициент сопротивления эллиптического конуса монотонно уменьшается при уменьшении коэффициента сжатия

$$c_x = \frac{2}{\sqrt{1+4\lambda^2\varepsilon}\sqrt{1+\dfrac{4\lambda^2}{\varepsilon}}}.$$

Соответственно коэффициент сопротивления усеченного эллиптического конуса определяется соотношением

$$c_x = \frac{2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2\lambda}{1-r_0/R}\right)^2\varepsilon}\sqrt{1+\dfrac{\left(\dfrac{2\lambda}{(1-r_0/R)}\right)^2}{\varepsilon}}}\left(1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right)+2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2. \tag{4.5}$$

В этом случае минимальное значение коэффициента сопротивления и соответствующий размер торца определяются численно прямой минимизацией функции одного переменного.

Численная оптимизация выполнена и при построении усеченных степенных эллиптических тел, имеющих минимальное сопротивление. При этом варьировались два геометрических параметра: показатель степени и относительный размер торца.

В [19] для степенного эллиптического тела получено выражение с использованием гипергеометрической функции Аппеля

$$c_x = \frac{2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2\lambda}{n}\right)^2\varepsilon}\sqrt{1+\dfrac{\left(\dfrac{2\lambda}{n}\right)^2}{\varepsilon}}}F_1\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{1-n},\frac{1}{1+\left(\dfrac{n}{2\lambda}\right)^2\varepsilon},\frac{1}{1+\dfrac{\left(\dfrac{n}{2\lambda}\right)^2}{\varepsilon}}\right). \tag{4.6}$$

На основании (4.6), для определения коэффициента сопротивления усеченного степенного эллиптического тела устанавливаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} c_x = c_{x_1} + \left(2 - c_{x_2}\right)\left(\dfrac{r_0}{R}\right)^2, \\ c_x = \dfrac{2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2\lambda_i}{n}\right)^2\varepsilon}\sqrt{1+\dfrac{\left(\dfrac{2\lambda_i}{n}\right)^2}{\varepsilon}}}F_1\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{1-n},\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{n}{2\lambda_i}\right)^2\varepsilon},\dfrac{1}{1+\dfrac{\left(\dfrac{n}{2\lambda_i}\right)^2}{\varepsilon}}\right). \\ \lambda_1 = \dfrac{\lambda}{1-\left(\dfrac{r_0}{R}\right)^{1/n}}, \quad \lambda_2 = \dfrac{\lambda}{1-\left(\dfrac{r_0}{R}\right)^{1/n}}\left(\dfrac{r_0}{R}\right)^{\frac{1-n}{n}}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Результаты оптимизации на основании (4.7) при заданных значениях удлинения и коэффициента эллиптичности представлены в табл.1. Для каждой пары λ и ε даны соответствующие экстремальные значения показателя степени n, относительного размера торца r_0/R и коэффициента сопротивления c_x. При $\varepsilon = 1$ для вычисления коэффициента сопротивления вместо (4.7) можно использовать (3.7).

На рис. 7 для $\lambda = 0.5$ показаны зависимости $c_x/c_{x_\text{кон}}$ от ε для усеченного эллиптического конуса (4.5), степенного эллиптического тела (4.6), усеченного степенного эллиптического тела (4.7), усеченной пирамиды с ромбовидным основанием (4.4). Отметим, что пирамидальные тела обеспечивают достижение меньших значений сопротивления по сравнению с эллиптическими телами. При $\varepsilon > 0.3$ коэффициенты сопротивления усеченных конуса и степенного тела близки, что обусловлено существенным вкладом торца в суммарное сопротивление и ослаблением влияния показателя степени в диапазоне малых значений удлинения. Характеристики степенных тел с торцом и без торца сближаются при уменьшении коэффициента эллиптичности. Это объясняется тем, что согласно (3.6) при уменьшении относительного радиуса торца

Таблица 1. Результаты оптимизации усеченных степенных эллиптических тел

λλ	ε = 1	ε = 2/3	ε = 1/2	ε = 1/3	ε = 1/4
	n r_0/R c_x	n r_0/R c_x	n r_0/R c_x	n r_0/R c_x	n r_0/R c_x
0.5	0.637 0.352 0.750	0.632 0.342 0.741	0.625 0.323 0.724	0.615 0.280 0.685	0.611 0.242 0.647
1.0	0.690 0.123 0.321	0.688 0.119 0.318	0.682 0.111 0.311	0.672 0.0946 0.297	0.665 0.0804 0.283
2.0	0.727 0.0239 0.0982	0.726 0.0233 0.0978	0.723 0.0222 0.0969	0.717 0.0199 0.0948	0.711 0.0176 0.0927
4.0	0.743 0.00344 0.0259	0.742 0.00341 0.0259	0.741 0.00334 0.0258	0.739 0.00312 0.0256	0.736 0.00289 0.0254

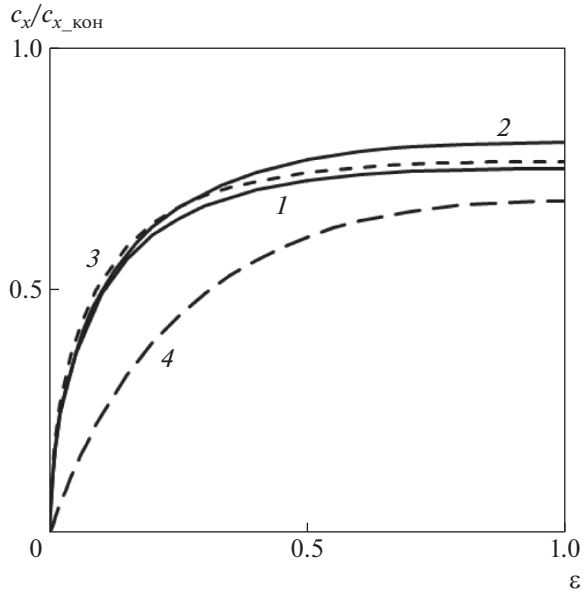

Рис. 7. Отношение коэффициентов сопротивления усеченного степенного эллиптического тела *1*, степенного эллиптического тела *2*, усеченного эллиптического конуса *3*, усеченной пирамиды с ромбовидным основанием *4* к коэффициенту сопротивления кругового конуса в зависимости от коэффициента сжатия при λ = 0.5.

удлинения достраиваемых тел стремятся к предельным значениям $\lambda_1 \to \lambda$ и $\lambda_2 \to 0$. Соответственно, из (3.7) следует, что $c_{x_2} \to 2$ и $c_x \to c_{x_1}$.

Геометрические параметры построенных тел сопоставлены на рис. 8. Показатель степени у усеченного тела больше, чем у тела без торца, и слабее зависит от коэффициента сжатия. При малых значениях ε показатели степени сближаются и стремятся к предельному значению $n = 2/3$, установленному в [19].

При увеличении вытянутости основания радиус переднего торца монотонно уменьшается. Нулевому значению ε соответствует нулевое значение радиуса торца. Для усеченной ромбовидной пирамиды на основании (4.3), (4.4) установлено, что при $\varepsilon \ll 1$ относительный радиус торца линейно зависит от ε:

$$\frac{r_0}{R} \approx \frac{\pi}{8\lambda^2}\varepsilon.$$

Сопоставление тел, имеющих и не имеющих передний торец, по значениям сопротивления в разрезе ε = 1 представлено на рис. 9. Для полного охвата диапазона изменения удлинения на оси абсцисс используются две шкалы: при λ < 1 откладывается значение λ, при λ > 1 откладывается значение $2-1/\lambda$. Для всех тел, кроме пирамиды с квадратным основанием, в окрестности λ = 0.4 ÷ 0.5 получено наибольшее относительное

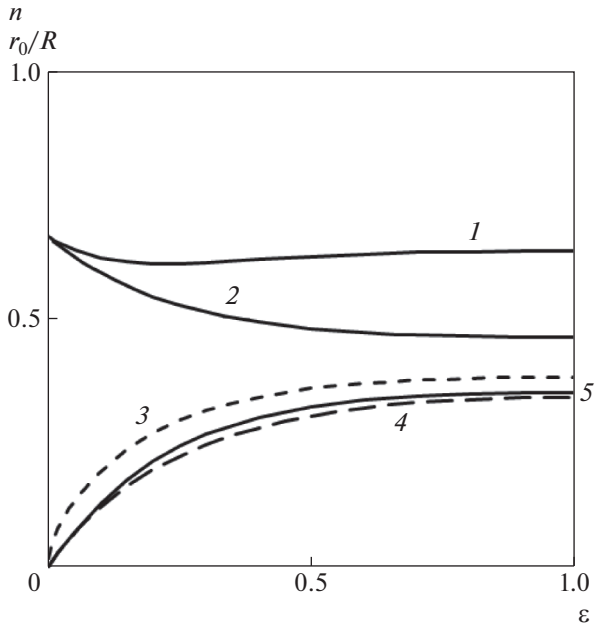

Рис. 8. Изменение показателя степени и относительного радиуса торца усеченного степенного эллиптического тела *1* и *5*, степенного эллиптического тела *2*, усеченного эллиптического конуса *3*, усеченной пирамиды с ромбовидным основанием *4* в зависимости от коэффициента сжатия при $\lambda = 0.5$: показатель степени — *1*, *2*; относительный радиус торца — *3*, *4*, *5*.

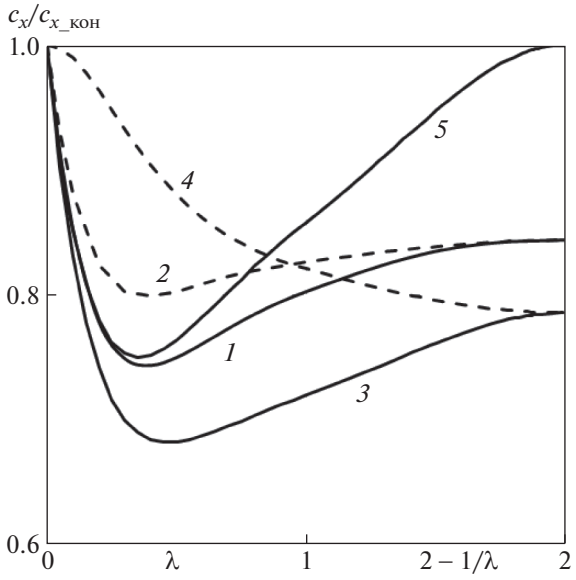

Рис. 9. Отношение коэффициентов сопротивления усеченного степенного тела *1*, степенного тела *2*, усеченной пирамиды с квадратным основанием *3*, пирамиды с квадратным основанием *4*, усеченного конуса *5*, к коэффициенту сопротивления конуса в зависимости от удлинения.

снижение сопротивления. Уменьшение сопротивления, получаемое посредством затупления тела, наиболее заметно проявляется у конуса и пирамиды. Напомним, что при $\varepsilon = 1$ наименьшее сопротивление среди рассмотренных тел имеет усеченный тетраэдр [19].

5. ТЕЛА С ПЕРЕДНЕЙ КРОМКОЙ И КРУГЛЫМ ОСНОВАНИЕМ

Оптимизационные исследования неосесимметричных выпуклых тел с круглым основанием выделили ряд геометрических особенностей, подробно изложенных в [17]. В широком диапазоне удлинений ($\lambda > 0.59$) оптимальные тела имеют две плоскости симметрии, в проекциях на которые представляются клином и трапецией, и в начальном поперечном сечении сводятся к передней кромке, которая служит основанием для двух треугольных по форме плоских элементов поверхности, касающихся круглого основания. При меньших значениях удлинения оптимальные тела затуплены по торцу.

С другой стороны, были построены тела, которые незначительно уступают оптимальным телам по значениям сопротивления. На примере тел, исследованных в [12], установлено, что отсутствие плоских элементов не оказывает существенного влияния на сопротивление. Это позволяет сделать предположение о пологости минимума и существовании тел, отличающихся по форме от оптимальных тел (и друг от друга) и близких к ним по сопротивлению. В частности, можно построить тела, форма которых образована элементами простейших тел и сопротивление которых представляется аналитической зависимостью от геометрических параметров.

Таким телом является усеченный двумя плоскостями конус (рис. 2). Усекающие плоскости перпендикулярны вертикальной плоскости симметрии и симметрично расположены под углом $\delta = \operatorname{arctg}(1/2\lambda)$ к горизонтальной плоскости симметрии. Передняя кромка тела принадлежит прямой, вдоль которой пересекаются плоскости.

Отношение удлинения $\lambda_к$ исходного конуса к удлинению λ тела тем больше, чем больше отношение полуразмаха передней кромки z_0 к радиусу основания R:

$$\lambda_к = \frac{\lambda}{1 - \dfrac{z_0}{R}}. \tag{5.1}$$

Поверхность тела состоит из двух плоских элементов и двух конических элементов. Граница между плоским и коническим элементами описывается соотношением, связывающим боковую и нормальную координаты в четверти пространства, соответствующей их положительным значениям:

$$\frac{z}{R} = \frac{z_0}{R} = \sqrt{1 + 2\left(\frac{R}{z_0} - 1\right)\frac{y}{R} - \left(2\frac{R}{z_0} - 1\right)\left(\frac{y}{R}\right)^2}. \tag{5.2}$$

На основе (5.2) устанавливаем долю площади проекции плоских элементов $S_{пл}$ в площади основания тела:

$$\frac{S_{пл}}{S_{мид}} = \frac{2}{\pi\left(2 - \dfrac{z_0}{R}\right)^{1.5}}\sqrt{\frac{z_0}{R}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{z_0}{R}\right) + \sqrt{\frac{z_0}{R}\left(2 - \frac{z_0}{R}\right)}\left(1 - \frac{z_0}{R}\right)\right). \tag{5.3}$$

При увеличении z_0/R от 0 до 1 доля плоских элементов в сопротивлении тела также увеличивается от 0 до 1.

Коэффициенты давления на плоских и конических элементах определяются удлинениями тела и исходного конуса, соответственно. Используя соотношения (5.1) и (5.3), находим зависимость коэффициента сопротивления от относительного размера полуразмаха передней кромки:

$$c_x = \frac{2}{1 + 4\lambda^2}\frac{S_{пл}}{S_{мид}} + \frac{2}{1 + 4\lambda_к^2}\left(1 - \frac{S_{пл}}{S_{мид}}\right). \tag{5.4}$$

У конуса, соответствующего $z_0/R = 0$, и у усеченного цилиндра, соответствующего $z_0/R = 1$, коэффициенты сопротивления совпадают. Оптимальная длина передней кромки, при которой достигается минимальное значение коэффициента сопротивления, находится численно.

Для сопоставления с конусом следует преобразовать (5.4):

$$c_x = \frac{2}{1 + 4\lambda^2}\left[1 - \frac{\dfrac{z_0}{R}\left(2 - \dfrac{z_0}{R}\right)\left(1 - \dfrac{S_{пл}}{S_{мид}}\right)}{1 + \left(\dfrac{1 - \dfrac{z_0}{R}}{2\lambda}\right)^2}\right]. \tag{5.5}$$

Из (5.5) можно предложить приближенную зависимость коэффициента сопротивления от удлинения для усеченного на кромку конуса:

$$c_x \approx c_{x_кон}\left(1 - \frac{A}{1 + B/\lambda^2}\right), \quad A = 0.297, \quad B = 0.0844. \tag{5.6}$$

При $\lambda > 1$ относительная погрешность определения коэффициента сопротивления на основе (5.6) не превышает 0.05%.

При построении второго тела сохранились линейные законы возрастания габаритов в плоскостях симметрии по продольной координате. В каждом поперечном сечении тело представлялось эллипсом

(рис. 2). Степень сжатия изменялась от $\varepsilon = 0$ в начальном сечении до $\varepsilon = 1$ в плоскости основания. Плоские элементы на поверхности отсутствуют.

Коэффициент сопротивления эллиптического тела в рамках модели Ньютона определялся численным суммированием нагрузки по треугольным элементам, аппроксимирующим омываемую поверхность. Как и в случае усеченного конуса, для нахождения оптимальной длины передней кромки применялся метод квадратичной аппроксимации целевой функции.

По результатам исследования получена аналогичная (5.6) приближенная зависимость коэффициента сопротивления от удлинения для эллиптического тела

$$c_x \approx c_{x_\text{кон}}\left(1 - \frac{A}{1 + B/\lambda^2}\right), \quad A = 0.321, \quad B = 0.0965.$$

Результаты исследования представлены на рис. 10 в виде зависимостей отношений коэффициентов сопротивления построенных тел к коэффициенту сопротивления конуса, и соответствующих оптимальных z_0/R от удлинения. На оси абсцисс используются две шкалы: при $\lambda < 1$ откладывается значение λ, при $\lambda > 1$ откладывается значение $2 - 1/\lambda$. Для сопоставления на фигуру добавлены результаты построения неосесимметричных тел из [12] и [17], и результаты оптимизации усеченного степенного тела на основании (3.7).

По значениям коэффициента сопротивления усеченный на кромку конус близок к телу с линейчатой поверхностью [12]. Эллиптические тела имеют лучшие характеристики и сопоставимы по сопротивлению с телами, построенными в [17]. Например, при $\lambda = 1$ отличие по сопротивлению между эллиптическим телом и усеченным конусом составляет 2.7%. Причина недостаточного снижения сопротивления усеченного конуса, возможно, заключается в наличии конических участков поверхности, которые, согласно [16], неоптимальны.

При этом все тела сильно отличаются по основному геометрическому параметру. Наименьшую относительную длину передней кромки имеют усеченные конуса: $z_0/R < 0.5$ при $\lambda > 0.5$. У тел, рассмотренных в [17], и эллиптических тел отношение z_0/R изменяется в окрестности 0.57 и 0.74, соответственно, при $\lambda > 1$. В [12] представлены результаты для тел с максимальным $z_0/R = 1$.

Отметим, что переход к неосесимметричным формам дает наибольшее снижение сопротивления (до ~20%) в диапазоне больших значений удлинения. При $\lambda < 0.6$ оптимальные осесимметричные тела имеют сопротивление, меньшее по сравнению с построенными неосесимметричными телами. Это согласуется с отмеченным ранее результатом, констатирующим наличие торца у оптимальных неосесимметричных тел при малых значениях удлинения.

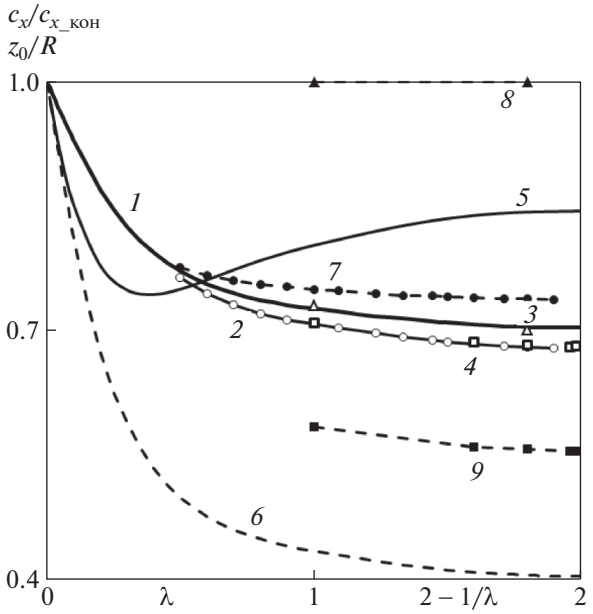

Рис. 10. Отношение коэффициентов сопротивления усеченного на кромку конуса *1*, эллиптического тела (*2*, ○), тела из [12] (*3*, △), тела из [17] (*4*, □) усеченного степенного тела *5* к коэффициенту сопротивления конуса и отношение z_0/R усеченного на кромку конуса *6*, эллиптического тела (*7*, ●) тела из [12] (*8*, ▲) тела из [17] (*9*, ■) в зависимости от удлинения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для случая степенной зависимости площади поперечного сечения от продольной координаты предложена процедура определения в рамках модели Ньютона коэффициента сопротивления усеченного по торцу тела, основанная на пересчете соотношений, представляющих коэффициент сопротивления тела, имеющего вершину.

Получены аналитические выражения, в том числе использующие гипергеометрические функции Аппеля и Гаусса, для коэффициента сопротивления затупленных по торцу тел.

Для осесимметричных тел показано, что усеченные степенные тела практически не уступают точному решению задачи Ньютона по значениям коэффициента сопротивления.

Построены близкие к оптимальным неосесимметричные тела, имеющие переднюю кромку и круглое основание. По результатам расчета выполнен анализ зависимости коэффициента сопротивления от удлинения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ньютон Ис.* Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского и комментарии А.Н. Крылова. М.: Наука, 1989.
2. *Крайко А.Н.* Задача Ньютона о построении оптимальной головной части обтекаемого тела. История решения // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 5–6. С. 734–748.
3. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2010.
4. *Гонор А.Л., Черный Г.Г.* Поперечный контур тела минимального волнового сопротивления / Теория оптимальных аэродинамических форм. Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 292–305.
5. *Гонор А.Л.* О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. Т. 27. Вып. 1. 1963. С. 185–189.
6. *Гонор А.Л.* Конические тела наименьшего сопротивления в гиперзвуковом потоке газа / ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 383–386.
7. *Гонор А.Л., Крайко А.Н.* Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях / Теория оптимальных аэродинамических форм. Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 456–492.
8. *Миеле А., Саарис Дж.* Поперечный контур тела минимального полного сопротивления / Теория оптимальных аэродинамических форм. Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 306–324.
9. *Ведерников Ю.А., Гонор А.Л., Зубин М.А., Остапенко Н.А.* Аэродинамические характеристики звездообразных тел при числах M = 3–5 // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. № 4. 1981. С. 88–93.
10. *Зубин М.А., Лапыгин В.И., Остапенко Н.А.* Теоретическое и экспериментальное исследование структуры сверхзвукового обтекания тел звездообразной формы и их аэродинамических характеристик // Изв. АН СССР, МЖГ. 1982. № 3. С. 34–40.
11. *Таковицкий С.А.* Конические тела с волнообразным поперечным контуром, имеющие минимальное волновое сопротивление // Изв. РАН. МЖГ. 2024. № 1. С. 123–130.
12. *Гусаров А.А., Дворецкий В.М., Иванов М.Я., Левин В.А., Черный Г.Г.* Теоретическое и экспериментальное исследование аэродинамических характеристик пространственных тел // Изв. АН СССР, МЖГ. 1979. № 3. С. 97–102.
13. *Lachand-Robert T. and Peletier M.A.* Newton's problem of the body of minimal resistance in the class of convex developable functions // Math. Nachr. 2001. V. 226. P. 153–176.
14. *Buttazzo G. and Frediani A.* A survey on the Newton problem of optimal profiles. Variational Analysis and Aerospace Engineering. Springer, 2009. Chap. 3. P. 33–48.
15. *Lokutsievskiy L.V. and Zelikin M.I.* The analytical solution of Newton's aerodynamic problem in the class of bodies with vertical plane of symmetry and developable side boundary // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2020. 26. 36 p.
16. *Lokutsievskiy L., Wachsmuth G., and Zelikin M.* Non-optimality of conical parts for Newton's problem of minimal resistance in the class of convex bodies and the limiting case of infinite height // arXiv:2009.12128v2 [math.OC]. 2021. 20 p.
17. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Браилко И.А.* Построение пространственной головной части минимального волнового сопротивления при заданных длине и круговом основании // Изв. РАН. МЖГ. 2025. № 1. С. 150–167. В печати.
18. *Таковицкий С.А.* Усеченные степенные тела как результат приближенного решения задачи Ньютона о теле с минимальным сопротивлением // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 5. С. 113–118.
19. *Таковицкий С.А.* Степенные эллиптические тела минимального сопротивления в приближении формулы Ньютона для коэффициента давления // ПММ. 2025. В печати.

20. *Таковицкий С.А.* Аналитическое решение в задаче построения осесимметричных носовых частей минимального волнового сопротивления // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 157–162.

Comparison of Newton's Problem Solutions for Axisymmetric and Non-Axisymmetric Bodies

© 2025 S. A. Takovitskii

Central aerohydrodynamic institute named after prof. N. E. Zhukovsky, Zhukovsky, Russia

**e-mail: c.a.t@tsagi.ru*

The effect of truncation of a body at the front face or edge on its aerodynamic drag is investigated. In the first case, the shape of the cross sections (circular, elliptical, diamond-shaped) does not change, and their area is determined by a power law dependence on the longitudinal coordinate. In the second case, the shape of the cross sections changes from a segment in the initial section to a circle in the closing section. The constructed bodies have the same length and base area. The drag was calculated using Newton's formula for the pressure coefficient.

Keywords: body with face and edge, drag, Newton pressure law