

УДК 532.59:551.466.8

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСА ВНУТРЕННИМИ ВОЛНАМИ ПРИ УЧЕТЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

© 2025 г. А. А. Слепышев*

Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, Россия

**e-mail: slep55@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.09.2024 г.

После доработки 18.03.2025 г.

Принята к публикации 21.03.2025 г.

В приближении Буссинеска рассматриваются свободные внутренние волны в однородно стратифицированной жидкости при учете вращения Земли. Показано, что дисперсионное соотношение при учете горизонтальной компоненты угловой скорости вращения Земли при постоянной частоте волны сводится к каноническому уравнению для кривых второго порядка в плоскости горизонтальных волновых чисел. Если частота волны больше инерционной и меньше частоты Брента–Вайсяля, то изолинии частоты — эллипсы. Если частота волны больше частоты плавучести, то изолинии частоты — гиперболы, если частота волны равна частоте Брента–Вайсяля — то изолинии, две прямые, параллельные направлению на восток. Получены вертикальные волновые потоки импульса в зависимости от направления распространения волны. Показано, что потоки максимальны по модулю в том случае, когда волна распространяется на север или на юг. Проведено сопоставление вертикальных потоков импульса у внутренних и субинерционных волн при одной и той же длине, и максимальной амплитуде волны. Показано, что у субинерционных волн вертикальный поток импульса выше, чем у внутренних волн и с ослаблением стратификации ослабевает.

Ключевые слова: внутренние волны, субинерционные волны, вертикальный волновой поток импульса, сила Кориолиса

DOI: 10.31857/S1024708425030082

Суточное вращение Земли влияет на динамику океана. Течения и внутренние волны подвержены действию силы Кориолиса. Обычно учитывается только нормальная к поверхности Земли составляющая угловой скорости ее вращения при определении силы Кориолиса. Такое приближение называется традиционным [1–7]. В нетрадиционном приближении, т. е. при учете еще горизонтальной составляющей угловой скорости вращения Земли, возникает ряд новых эффектов, которые заметно проявляются при слабой стратификации. Применительно к дисперсионным характеристикам внутренних волн этот вопрос достаточно хорошо проработан [1–7]. При сильной стратификации, когда частота плавучести много больше инерционной отказ от традиционного приближения практически не сказывается на дисперсионных кривых. При слабой стратификации при учете горизонтальной составляющей угловой скорости Земли возможно существование внутренних волн с частотой, меньше инерционной, их называют субинерционными внутренними волнами. Частотный диапазон этих волн тем шире, чем меньше частота плавучести. Верхний квазиоднородный и придонный слабостратифицированные слои моря являются волноводами для этих волн. При уменьшении частоты субинерционной волны до предельно низкой масштаб волны стремится к нулю, что указывает на возможность диссипации энергии в малые масштабы, например при распространении субинерционных внутренних волн на горизонтально-неоднородных течениях или вследствие влияния β -эффекта [1, 6, 8]. В настоящей работе будет рассмотрено влияние нетрадиционного приближения на вертикальный перенос импульса внутренними волнами. Ранее этот вопрос рассматривался в традиционном приближении при наличии сдвиговых течений [9–11]. Было показано, что если компонента скорости течения, нормальная направлению распространения волны фиксированной моды, зависит от вертикальной

координаты, то вертикальные волновые потоки импульса отличны от нуля при учете вращения Земли. Внутренние волны распространяются нередко в виде волновых пакетов [12, 13]. Нелинейные эффекты при распространении пакетов внутренних волн проявляются в генерации средних на временном масштабе волны течений [14, 15]. Вертикальная компонента скорости этого индуцированного течения на переднем и заднем фронте пакета имеет разные знаки и в итоге переноса по вертикали не происходит [14]. Зато есть горизонтальный перенос, который может проявлять себя в выносе взвеси и осадочного материала с шельфа в глубоководную часть моря.

По существующим представлениям мелкомасштабная турбулентность ответственна за вертикальный обмен. Внутренние волны и сдвиговые течения являются источником энергоснабжения мелкомасштабной турбулентности в стратифицированной толще океана [16–19]. Но не только мелкомасштабная турбулентность ответственна за вертикальный обмен. При учете турбулентной вязкости и диффузии внутренние волны затухают и вертикальные волновые потоки тепла, соли и импульса отличны от нуля и вносят свой вклад в вертикальный обмен [20, 21]. Однако даже при отсутствии турбулентной вязкости и диффузии вертикальные волновые потоки импульса при учете вращения Земли в традиционном приближении отличны от нуля при наличии течений с вертикальным сдвигом скорости [9–11]. Представляет интерес исследовать влияние отказа от традиционного приближения на вертикальный перенос импульса внутренними волнами для сильной и слабой стратификации, когда субинерционные внутренние волны играют заметную роль.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются свободные внутренние волны в безграничном вертикально стратифицированном бассейне постоянной глубины при учете вклада горизонтальной составляющей угловой скорости Земли в силу Кориолиса. В линейном приближении находится дисперсионное соотношение и решается краевая задача для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн при постоянной частоте плавучести. Во втором порядке по амплитуде волны находятся вертикальные волновые потоки импульса.

Система уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска [4, 22] для волновых возмущений имеет вид:

$$\frac{Du}{Dt} + f_c w - f v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1.1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + f u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (1.2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - f_c u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0, \quad (1.5)$$

$$f = 2\Omega \sin \varphi, \quad f_c = 2\Omega \cos \varphi,$$

где Ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта, f — параметр Кориолиса — инерционная частота; ось x направлена на восток, ось y на север, ось z направлена вертикально вверх; u , v — соответственно две горизонтальные и вертикальная компоненты волновых возмущений скорости течения вдоль указанных осей, P и ρ — волновые возмущения давления и плотности, $\rho_0(z)$ — невозмущенная средняя плотность, $\bar{\rho}_0$ — осредненное по глубине ее значение, постоянная величина в приближении Буссинеска; действие оператора D/D_t раскрывается по формуле $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$.

Граничные условия на поверхности моря ($z = 0$) — условие “твердой крышки”, которое отфильтровывает внутренние волны от поверхностных [4, 22]: $w(0) = 0$. Граничные условия на дне — условие “непротекания”: $w(-H) = 0$, H — глубина моря.

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Решения системы (1.1)–(1.5) в линейном приближении ищется в виде:

$$\begin{aligned} u &= u_{10}(z) A e^{i\theta} + \text{с.с.}, & v &= v_{10}(z) A e^{i\theta} + \text{с.с.}, & w &= w_{10}(z) A e^{i\theta} + \text{с.с.}, \\ P &= P_{10}(z) A e^{i\theta} + \text{с.с.}, & \rho &= \rho_{10}(z) A e^{i\theta} + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где с.с. — комплексно сопряженные слагаемые, A — амплитудный множитель; θ — фаза волны, $\theta = kx + ly - \omega t$; k, l — горизонтальные волновые числа, проекции волнового вектора $\mathbf{k}_h$ на оси x, y , соответственно; ω — частота волны.

Подставляя (2.1) в систему (1.1)–(1.5) находим связь амплитудных функций $u_{10}, v_{10}, \rho_{10}, P_{10}$ с w_{10} и уравнение для w_{10}

$$u_{10} = \frac{\frac{dw_{10}}{dz}(ik\omega - fl) - if_c l^2 w_{10}}{\omega(k^2 + l^2)}, \quad (2.2)$$

$$v_{10} = \frac{\frac{dw_{10}}{dz}(fk + il\omega l) + if_c l k w_{10}}{\omega(k^2 + l^2)}, \quad (2.3)$$

$$\frac{P_{10}}{\bar{\rho}_0} = \frac{i \frac{dw_{10}}{dz}(\omega^2 - f^2) + f_c(ik\omega + fl)w_{10}}{\omega(k^2 + l^2)},$$

$$\rho_{10} = -\frac{i}{\omega} w_{10} \frac{d\rho_0}{dz}.$$

Функция w_{10} удовлетворяет уравнению [3, 4, 6]

$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + a(z) \frac{dw_{10}}{dz} + b(z) w_{10} = 0, \quad (2.4)$$

где $a(z) = -\frac{2ilff}{\omega^2 - f^2}$, $b(z) = \frac{(N^2 - \omega^2)(k^2 + l^2) + f_c^2 l^2}{\omega^2 - f^2}$, $N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}_0} \frac{d\rho_0}{dz}$ — квадрат частоты Брента–Вайсяля.

Граничные условия для w_{10}

$$w_{10}(0) = w_{10}(-H) = 0. \quad (2.5)$$

3. ВОЛНОВЫЕ ПОТОКИ ИМПУЛЬСА

Представляет интерес найти проекции волновых возмущений скорости течения на направления вдоль и поперек горизонтального волнового вектора $\mathbf{k}_h$. Очевидно, что $k_h^2 = (k^2 + l^2)$. Пусть α — угол волнового вектора $(k)_h$ с осью x . Положительному значению угла α соответствует поворот оси x к вектору $\mathbf{k}_h$ против часовой стрелки. Введем повернутую в горизонтальной плоскости на этот угол α систему координат x', y' . Ось x' направлена вдоль вектора $\mathbf{k}_h$, ось y' ей перпендикулярна. Тогда проекции волновых возмущений скорости течения на оси x', y' имеют вид:

$$u' = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad v' = v \cos \alpha - u \sin \alpha.$$

Из представления решений для u, v в виде (2.1), следует, что u', v' можно представить как

$$u' = u'_1(z) A e^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad v' = v'_1(z) A e^{i\theta} + \text{с.с.}, \quad (3.1)$$

где u'_1, v'_1 определяются по формулам:

$$u'_1 = u_{10} \cos \alpha + v_{10} \sin \alpha, \quad v'_1 = v_{10} \cos \alpha - u_{10} \sin \alpha. \quad (3.2)$$

Из соотношений (3.1), (3.2) и (2.2), (2.3) находятся вертикальные волновые потоки импульса

$$\overline{u'w} = \frac{i}{k_h} |A|^2 \left(w_{10}^* \frac{dw_{10}}{dz} - w_{10} \frac{dw_{10}^*}{dz} \right), \quad (3.3)$$

$$\overline{v'w} = \frac{f}{\omega k_h} |A|^2 \frac{d(w_{10} w_{10}^*)}{dz}. \quad (3.4)$$

Здесь черта сверху означает осреднение по периоду волны. Вертикальный волновой поток импульса $\overline{v'w}$ отличен от нуля при учете вращения Земли. Краевая задача (2.4), (2.5) имеет комплексные коэффициенты при $l \neq 0$ и комплексные решения. Поэтому поток $\overline{u'w}$ (3.3) не нулевой при учете горизонтальной составляющей угловой скорости Земли. В традиционном приближении этот поток равен нулю, т. к. уравнение (2.4) при $f_c = 0$ имеет действительные коэффициенты и решение краевой задачи (2.4), (2.5) — действительная функция. При $\alpha = 0; \pi$ волновое число $l = 0$ и вертикальный волновой поток импульса $\overline{u'w}$ равен нулю в нетрадиционном приближении, т. к. уравнение (2.4) имеет действительные коэффициенты и действительные решения и совпадает с уравнением традиционного приближения.

Нормирующий множитель A находится по известной величине максимальной амплитуды вертикальных смещений $\zeta_{\max}$. Для этого выразим вертикальное смещение ζ , используя соотношение $d\zeta/dt = w$:

$$\zeta = \frac{iw_{10}}{\omega} A \exp(ily - i\omega t) + \text{c.c.}$$

Отсюда следует

$$A = \frac{\zeta_{\max}}{2 \max |w_{10}/\omega|}. \quad (3.5)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Уравнение (2.4) допускает точное аналитическое решение при постоянной частоте Брента–Вайсяля. Тогда уравнение (2.4) упрощается к виду:

$$\frac{d^2 w_{10}}{dz^2} + 2ia_0 \frac{dw_{10}}{dz} + b_0 w_{10} = 0, \quad (4.1)$$

где

$$a_0 = -\frac{lf f_c}{\omega^2 - f^2}, \quad b_0 = \frac{h_h^2}{\omega^2 - f^2} (N^2 - \omega^2 + f_c^2 \sin^2 \alpha). \quad (4.2)$$

Решение краевой задачи (4.1), (2.5) имеет вид:

$$w_{10}(z) = e^{-ia_0 z} \sin \left(z \sqrt{a_0^2 + b_0} \right). \quad (4.3)$$

При этом справедливо дисперсионное уравнение, вытекающее из граничного условия (2.5) при $z = -H$:

$$H \sqrt{a_0^2 + b_0} = \pi n,$$

где n — целое положительное число.

Отсюда

$$a_0^2 + b_0 = \left(\frac{\pi n}{H} \right)^2. \quad (4.4)$$

После подстановки выражений (4.2) для a_0 , b_0 в (4.4) получаем

$$\frac{f^2 f_c^2 k_h^2 \sin^2 \alpha}{(\omega^2 - f^2)^2} + \frac{k_h^2}{\omega^2 - f^2} [N^2 - \omega^2 + f_c^2 \sin^2 \alpha] = \left(\frac{\pi n}{H} \right)^2. \quad (4.5)$$

Отсюда следует дисперсионное соотношение [3, 4, 6]:

$$k_h^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H} \right)^2 (\omega^2 - f^2)^2}{(N^2 - \omega^2)(\omega^2 - f^2) + \omega^2 f_c^2 \sin^2 \alpha}. \quad (4.6)$$

Здесь n — номер моды. Нетрудно видеть, что в традиционном приближении при $f_c = 0$ дисперсионное соотношение (4.6) переходит в известное соотношение при постоянной частоте Брента–Вайсяля [4, 5, 22]:

$$\omega^2 = \frac{N^2 k_h^2 + f^2 \left(\frac{\pi n}{H} \right)^2}{k_h^2 + \left(\frac{\pi n}{H} \right)^2}, \quad k_h^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H} \right)^2 (\omega^2 - f^2)}{(N^2 - \omega^2)}. \quad (4.7)$$

Из условия положительности k_h^2 (4.7) следует неравенство при $f^2 < \omega^2 < N^2$, т. е. у внутренних волн в традиционном приближении частота волны удовлетворяет неравенству $f < \omega < N$.

При учете горизонтальной составляющей угловой скорости Земли условие положительности k_h^2 (4.6) приводит к неравенству для частоты ω [3, 4, 6]:

$$\omega_2^2 < \omega^2 < \omega_1^2, \quad (4.8)$$

где ω_1 , ω_2 определяются по формулам [3, 4, 6]:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[N^2 + f^2 + f_c^2 \sin^2 \alpha \pm \sqrt{(N^2 - f^2)^2 + f_c^4 \sin^3 \alpha + 2f_c^2 \sin^2 \alpha (N^2 + f^2)} \right]. \quad (4.9)$$

Следует отметить справедливость следующих неравенств [3]:

$$\omega_1^2 > \max(N^2, f^2), \quad \omega_2^2 < \min(N^2, f^2). \quad (4.10)$$

Нетрудно видеть, что дисперсионное уравнение (4.6) при фиксированной частоте волны ω эквивалентно каноническому уравнению (4.11) для кривых второго порядка на плоскости горизонтальных волновых чисел k, l (соответствующее доказательство приведено в Приложении):

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = 1, \quad (4.11)$$

где

$$a^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 (\omega^2 - f^2)}{(N^2 - \omega^2)}; \quad b^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 (\omega^2 - f^2)^2}{(N^2 - \omega^2) (\omega^2 - f^2) + \omega^2 f_c^2}. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.11) при $a^2 > 0$ является уравнением эллипса, т. к. при этом и $b^2 > 0$, a — большая полуось эллипса, b — малая полуось. При $a^2 < 0$ и $b^2 > 0$ уравнение (4.11) — уравнение гиперболы. Если $1/a^2 = 0$ (при $\omega = N$ уравнение (4.11) превращается в уравнение двух прямых, параллельных оси k):

$$l = \pm \frac{\pi n (N^2 - f^2)}{HN f_c}. \quad (4.13)$$

Рассмотрим случай $N > 1$, $\omega > f$, соответствующий внутренним волнам. При $f < \omega < N$ уравнение (4.11) — уравнение эллипса, при $\omega > N$ и $b^2 > 0$ уравнение (4.11) — уравнение гиперболы. Решение неравенства $b^2 > 0$ имеет вид:

$$\omega_{2*}^2 < \omega^2 < \omega_{1*}^2, \quad (4.14)$$

где $\omega_{2*}^2, \omega_{1*}^2$ определяются по формулам:

$$\omega_{1,2*}^2 = \frac{1}{2} \left[N^2 + f^2 + f_c^2 \pm \sqrt{(N^2 - f^2)^2 + f_c^4 + 2f_c^2 (N^2 + f^2)} \right]. \quad (4.15)$$

Нетрудно видеть, что неравенство (4.14) совпадает с неравенством (4.8) при $\sin^2 \alpha = 1$, при этом $\omega_{2*}^2, \omega_{1*}^2$ удовлетворяют условиям (4.10), т. е. выполнены условия:

$$\omega_{1*}^2 > N^2, \quad \omega_{2*}^2 < f^2. \quad (4.16)$$

Отсюда неравенство $b^2 > 0$ выполнено при

$$N^2 < \omega^2 < \omega_{1*}^2. \quad (4.17)$$

Таким образом, при выполнении неравенства (4.17) изолинии частоты в плоскости горизонтальных волновых чисел — гиперболы.

Дальнейший анализ изолиний частоты волны в плоскости горизонтальных волновых чисел проведем для внутренних волн первой моды ($n = 1$) с частотой ω , удовлетворяющей условию $f < \omega < \omega_{1*}$ для трех типов стратификации: $N_1 = 3$ цикл/ч — сильная стратификация; $N_2 = 2.5f$ — слабая стратификация; $N_3 = 1.5f$ — очень слабая стратификация. Глубина моря $H = 200$ м, широта $\varphi = 44.8^\circ$ с.ш. В традиционном приближении изолинии частоты волны в плоскости горизонтальных волновых чисел — окружности, квадрат радиуса которых определяется по формуле (4.7). На рис. 1 показаны изолинии частоты волны в плоскости горизонтальных волновых чисел при сильной стратификации, когда учитывается горизонтальная составляющая угловой скорости вращения Земли. В случае сильной стратификации при $f < \omega < 0.98N_1$ на рис. 1 эллипсы превращаются в окружности, практически совпадающими с окружностями в традиционном приближении. Частоте $\omega = 0.98N_1$ соответствует длина волны 57.6 м, для более длинных волн изолинии частоты — окружности. В интервале частот $0.98N_1 \leq \omega < N_1$ изолинии частоты — эллипсы.

При $\omega = N_1$ изолиниями на рис. 1 являются прямые $l = \pm \frac{\pi (N_1^2 - f^2)}{HN_1 f_c}$, при $N_1 < \omega < \omega_{1*}$ изолиниями являются гиперболы.

На рис. 2 показаны изолинии частоты волны в плоскости горизонтальных волновых чисел при слабой стратификации, когда $N_2 = 2.5f$.

Замкнутые линии на рис. 2 — эллипсы. На этих частотах при сильной стратификации изолинии частоты — окружности. При $\omega = N_2$ изолиниями на рис. 2 являются прямые (4.13), при $\omega = N_2$ изолиниями являются гиперболы.

На рис. 3 показаны изолинии частоты волны в плоскости горизонтальных волновых чисел при очень слабой стратификации, когда $N_3 = 1.5f$.

В целом, картина изолиний частоты при очень слабой стратификации похожа на аналогичную картину для слабой стратификации, но в окрестности начала координат эллипсы при очень слабой стратификации

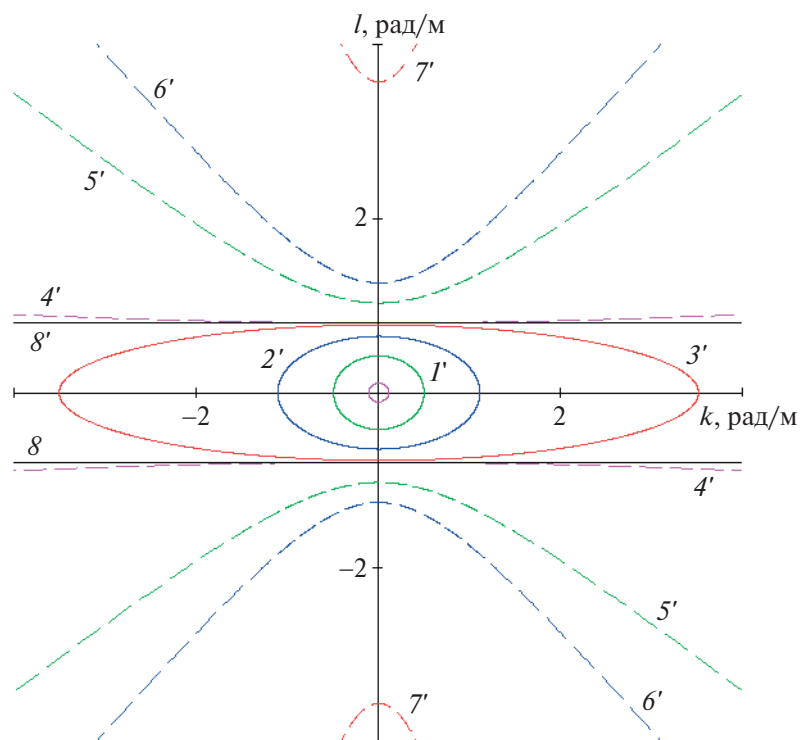


Рис. 1. Изолинии частоты при сильной стратификации: $1'-8'$: $\omega = 0.9995N_1, 0.9999N_1, 0.99999N_1, 1.000001943N_1, 1.000007721N_1, 1.00001166N_1, 1.0001846N_1, \omega = N_1$.

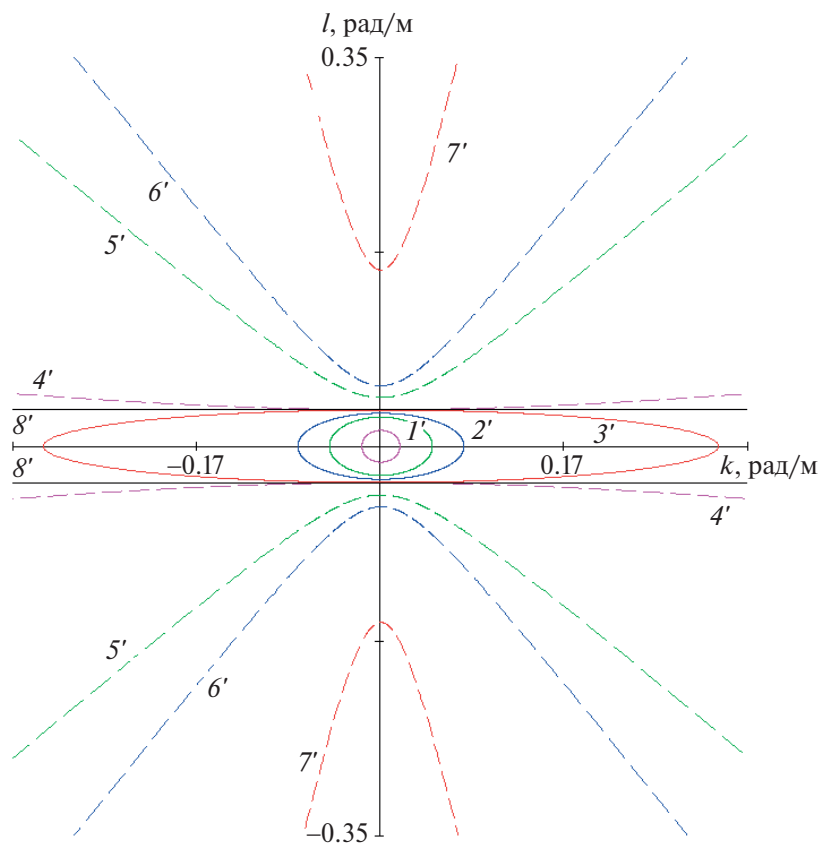


Рис. 2. Изолинии частоты при слабой стратификации: $1'-8'$: $\omega = 2.4f, 2.46f, 0.999N_2, 1.001N_2, 1.036N_2, 1.54N_2, 1.085N_2, N_2$.

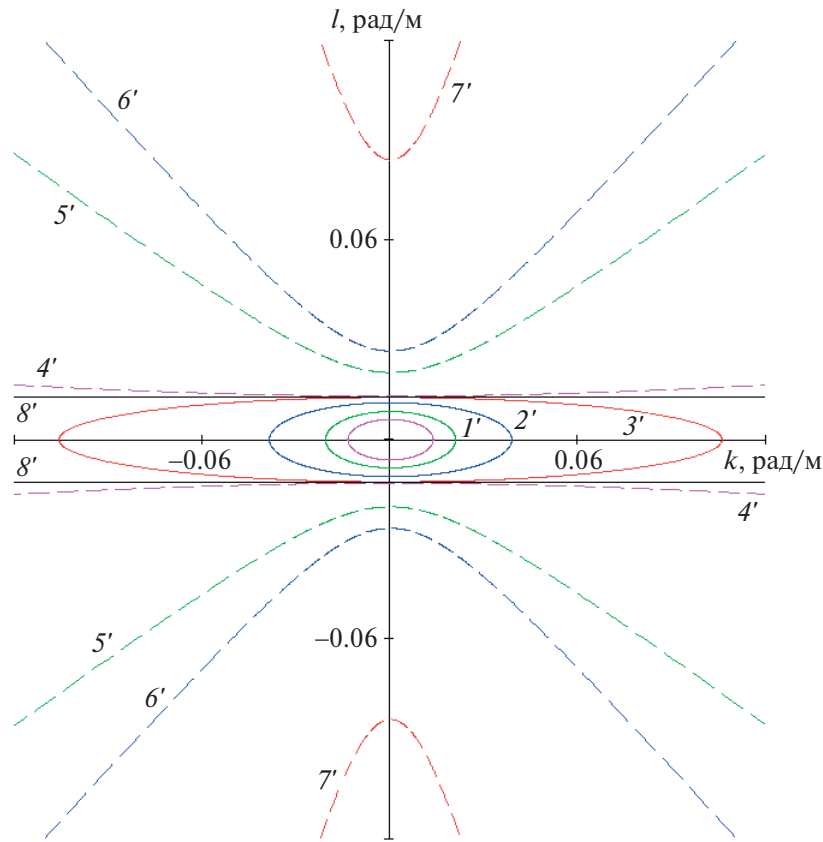


Рис. 3. Изолинии частоты при очень слабой стратификации: $1'-8'$: $\omega = 1.34f, 1.44f, 0.994N_3, 1.003N_3, 1.109N_3, 1.116N_3, 1.126N_3, N_3$.

более сплюснуты к оси абсцисс, чем при слабой стратификации, т. е. с ослаблением стратификации анизотропия замкнутых изолиний частоты усиливается. Отметим, что при $\sin \alpha = 0$ дисперсионное соотношение (4.6) переходит в соотношение (4.7) при традиционном приближении, а большая полуось эллипса a в (4.12) равна радиусу t окружности изолинии частоты в традиционном приближении, т. е. волны, бегущие на восток или на запад никакого влияния на дисперсию от учета горизонтальной составляющей угловой скорости Земли не испытывают. Но влияние максимально для волн, бегущих на север или юг.

Следует отметить, что решение (4.3) краевой задачи (4.1), (2.5) используя (4.4) можно представить в виде:

$$w_{10}(z) = e^{-ia_0 z} \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right). \quad (4.18)$$

Отсюда вертикальные волновые потоки импульса (3.3), (3.4) имеют вид:

$$\overline{u'w} = -2|A^2| \frac{f \cdot f_c}{\omega^2 - f^2} \sin \alpha \sin^2\left(\frac{\pi n z}{H}\right). \quad (4.19)$$

$$\overline{v'w} = \frac{|A^2| f}{\omega k_h} \frac{\pi n}{H} \sin\left(\frac{2\pi n z}{H}\right). \quad (4.20)$$

Расчеты вертикальных волновых потоков импульса (4.19) и (4.20) у внутренних волн первой моды с максимальной амплитудой $\zeta_{\max} = 2$ м производятся для трех рассматриваемых типов стратификации. На рис. 4а представлены профили вертикального потока импульса (4.19) при сильной стратификации для внутренних волн первой моды с частотой $0.8N_1$ для четырех значений угла α : $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pi/6$; $\alpha_3 = \pi/3$; $\alpha_4 = \pi/4$. С ростом угла α поток импульса нарастает по модулю и при $\alpha_4 = \pi/2$ достигает максимального значения. Поток импульса при $\alpha = \pi - \alpha_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) совпадают с потоками импульса при $\alpha = \alpha_i$. При отрицательных углах $\alpha = -\alpha_i$ знак потока импульса $\overline{u'w}$ меняется на противоположный.

В традиционном приближении поток импульса $\overline{u'w}$ (4.19) нулевой, т. к. $f_c = 0$.

Вертикальный волновой поток импульса $\overline{v'w}$ (4.20) на рис. 4б для волны частотой $0.8N_1$ при сильной стратификации от угла α практически не зависит и совпадает с потоком традиционного приближения.

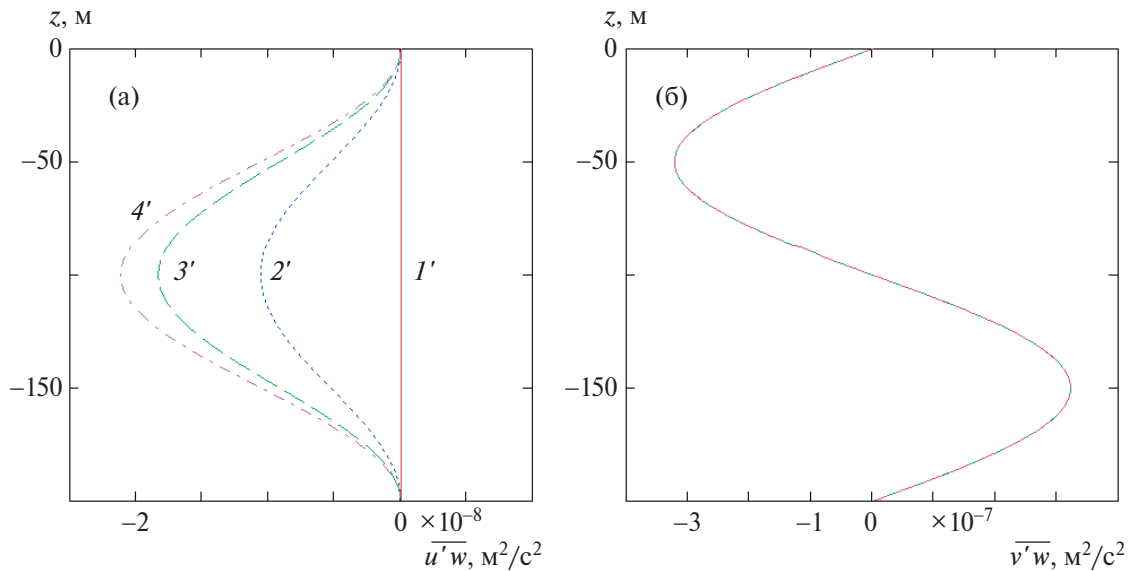


Рис. 4. Профили вертикальных волновых потоков импульса $\overline{u'w}$ (а) и $\overline{v'w}$ (б) при различных значениях угла α для сильной стратификации: $\alpha_1 = 0(1')$; $\alpha_2 = \pi/3(2')$; $\alpha_3 = \pi/3(3')$; $\alpha_4 = \pi/2(4')$.

На рис. 5 представлены профили вертикальных волновых потоков импульса при слабой стратификации ($N_2 = 2.5f$) для волны первой моды с частотой $\omega = 1.4f$ с максимальной амплитудой $\zeta_{\max} = 2$ м.

Зависимость вертикальных волновых потоков импульса от угла α на рис. 5а, по сути, повторяет ту же зависимость, что и на рис. 4а, только величины потоков по модулю выше при той же амплитуде волны. Вертикальный волновой поток импульса $\overline{v'w}$ на рис. 5б при слабой стратификации уже зависит от угла, достигает максимального по модулю значения при $\alpha_4 = \pm\pi/2$ и совпадает с потоком традиционного приближения при $\alpha = 0, \pi$. Поток импульса при $\alpha = \pi - \alpha_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) совпадают с потоком импульса при $\alpha = \alpha_i$. При изменении знака угла α поток импульса $\overline{v'w}$ не меняется. Поток импульса $\overline{v'w}$ при слабой стратификации слабее потока при сильной стратификации.

На рис. 6 представлены профили вертикальных волновых потоков импульса при очень слабой стратификации ($N_3 = 1.5f$) для волны первой моды с частотой $\omega = 1.4f$ с максимальной амплитудой $\zeta_{\max} = 2$ м.

Потоки импульса на рис. 6 качественно повторяют потоки на рис. 5, только зависимость от угла более сильная. Поток импульса на рис. 6б меньше по модулю потоков на рис. 5б, в то время как потоки импульса $\overline{u'w}$ на рис. 5а идентичны потокам на рис. 6а. Это объясняется тем, что в выражение (4.19) для потока

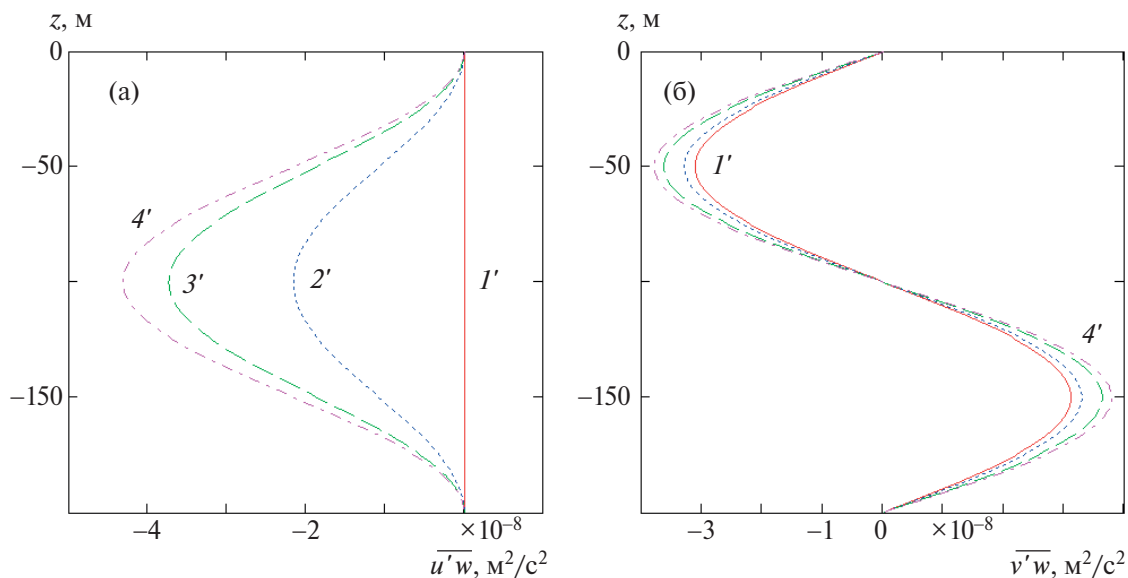


Рис. 5. Профили вертикальных волновых потоков импульса $\overline{u'w}$ (а) и $\overline{v'w}$ (б) при различных значениях угла α для слабой стратификации: $\alpha_1 = 0(1')$; $\alpha_2 = \pi/6(2')$; $\alpha_3 = \pi/3(3')$; $\alpha_4 = \pi/2(4')$.

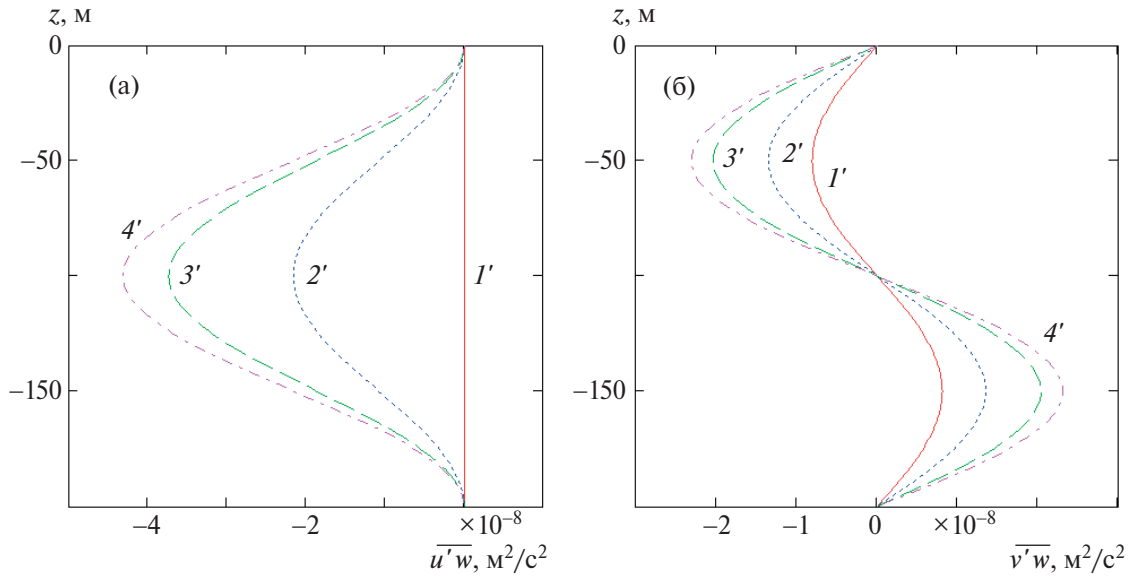


Рис. 6. Профили вертикальных волновых потоков импульса $\overline{u'w}$ (а) и $\overline{v'w}$ (б) при различных значениях угла α для очень слабой стратификации: $\alpha_1 = 0(1')$; $\alpha_2 = \pi/6(2')$; $\alpha_3 = \pi/3(3')$; $\alpha_4 = \pi/2(4')$.

импульса $\overline{u'w}$ не входит горизонтальное волновое число k_i , только частота, а она одна и та же для слабой и очень слабой стратификации, $\omega = 1.4f$, нормирующий множитель (3.5) тоже один и тот же. Следует отметить, что максимальное по модулю значение вертикальных волновых потоков импульса на замкнутой изолинии частоты достигается при $\alpha = \pm\pi/2$, т.е. когда волна распространяется на север или юг. В традиционном приближении потоки импульса не зависят от направления распространения волны.

Для решения дисперсионного уравнения (4.6) относительно частоты волны используем уравнение (4.5):

$$\frac{f^2 f_c^2 k_h^2 \sin^2 \alpha}{(\omega^2 - f^2)^2} + \frac{k_h^2}{\omega^2 - f^2} [N^2 - f^2 - \omega^2 + f^2 + f_c^2 \sin^2 \alpha] = \left(\frac{\pi n}{H} \right)^2.$$

Отсюда

$$\frac{f^2 f_c^2 k_h^2 \sin^2 \alpha}{(\omega^2 - f^2)^2} - k_h^2 + \frac{k_h^2}{\omega^2 - f^2} [N^2 - f^2 + f_c^2 + \sin^2 \alpha] = \left(\frac{\pi n}{H} \right)^2. \quad (4.21)$$

В уравнении (4.21) удобно сделать замену:

$$R = \frac{1}{\omega^2 - f^2}.$$

Из уравнения (4.21) следует квадратное уравнение для R :

$$f^2 f_c^2 \sin^2 \alpha \cdot R^2 + R (N^2 - f^2 + f_c^2 \sin^2 \alpha) - 1 - \left(\frac{\pi n}{k_h H} \right)^2 = 0. \quad (4.22)$$

После решения квадратного уравнения (4.22) находится ω^2 :

$$\omega^2 = f^2 + \frac{2f^2 f_c^2 \sin^2 \alpha}{-(N^2 - f^2 + f_c^2 \sin^2 \alpha) \pm \sqrt{(N^2 - f^2 + f_c^2 \sin^2 \alpha)^2 + 4f^2 f_c^2 \sin^2 \alpha \left(1 + \left(\frac{\pi n}{k_h H} \right)^2 \right)}}. \quad (4.23)$$

Положительный знак перед квадратным корнем в (4.23) соответствует внутренним волнам, у которых $f < \omega < \omega_1$, отрицательный знак соответствует субинерционным волнам, у которых $\omega_2 < \omega < f$ [1, 3, 4, 6].

На рис. 7 представлены дисперсионные кривые первых двух мод внутренних волн и субинерционных волн, распространяющиеся на север для трех рассматриваемых типов стратификации. На рис. 7а при сильной стратификации дисперсионные кривые субинерционных волн вырождаются в прямую линию, соответствующую частоте, меньшей инерционной на величину $2 \cdot 10^{-8}$ рад/с. Детальное поведение дисперсионных кривых субинерционных волн в этом случае в окрестности инерционной частоты при малых волновых числах раскрывает рис. 7б, на котором показана зависимость разности $\omega - f$ от волнового числа. При $l \rightarrow 0$ разность $\omega - f \rightarrow 0$, оставаясь отрицательной. При слабой стратификации на рис. 7 в вырождение

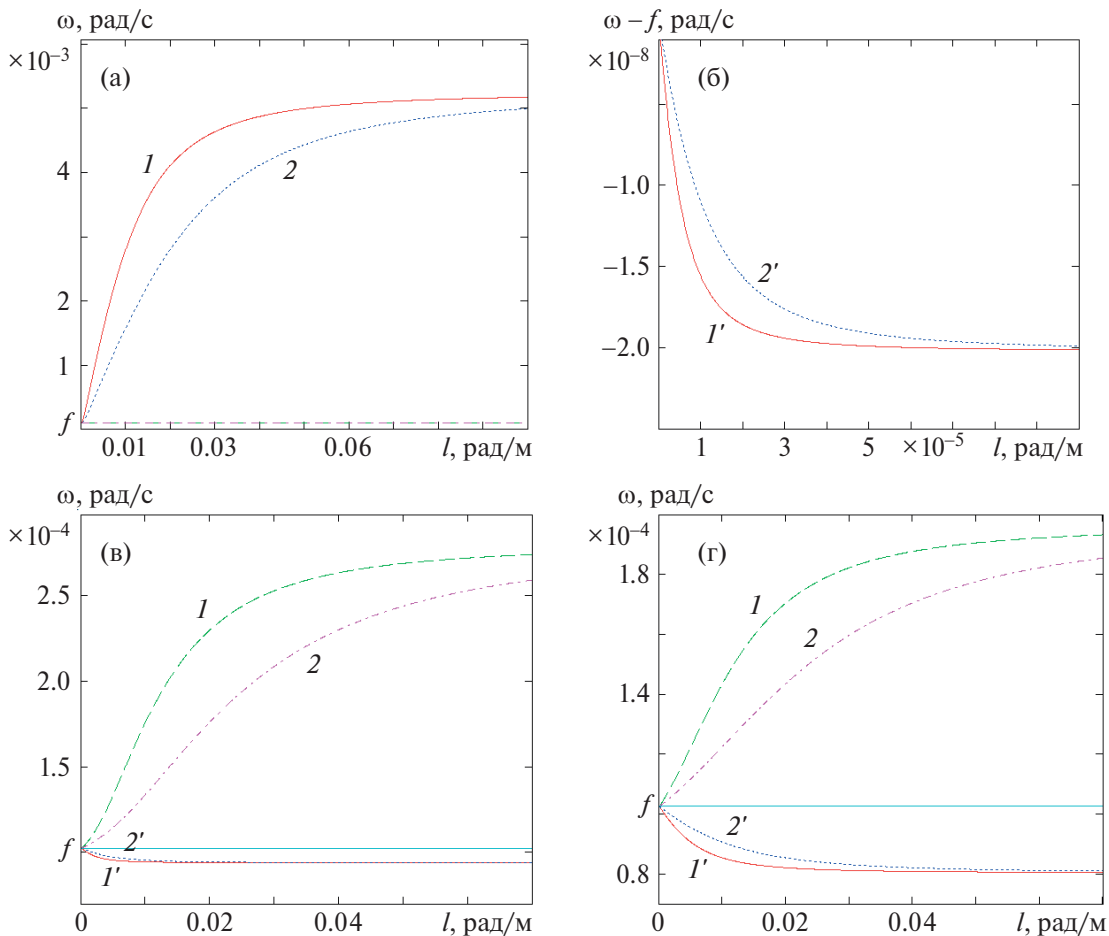


Рис. 7. Дисперсионные кривые первых двух мод внутренних и субинерционных волн при сильной (а, б), слабой (в) и очень слабой (г) стратификации. Штрихом помечены номера мод субинерционных волн.

снимается и дисперсионные кривые первой и второй мод субинерционных волн уже различимы. Еще лучше они различимы при очень слабой стратификации на рис. 7г.

Представляет интерес сравнить вертикальные волновые потоки импульса у внутренних и субинерционных волн первой моды, распространяющихся на север, одной и той же длины $\lambda = 200$ м и максимальной амплитудой $\zeta_{\max} = 2$ м для рассматриваемых трех типов стратификации. На рис. 8 показаны профили вертикального потока импульса $\overline{u'w}$ для внутренней (1) и субинерционной (2) волны для сильной (а), слабой (б) и очень слабой стратификации (в).

Обращает на себя внимание очень высокий вертикальный поток импульса у субинерционной волны при сильной стратификации на рис. 8а, по порядку величины он сравним или выше типичного турбулентного вертикального потока импульса. У внутренней волны на рис. 8а напротив, поток слабый. При слабой стратификации на рис. 8б вертикальный поток импульса у субинерционной волны существенно слабее, а у внутренней волны, наоборот усиливается. Тем не менее поток у субинерционной волны по модулю выше потока у внутренней волны. Та же тенденция сохраняется и при очень слабой стратификации на рис. 8в. Происходит дальнейшее ослабление потока импульса у субинерционной волны, в то время как у внутренней волны поток усиливается (рис. 8г). Линии 1, 2 и 3 на рис. 8г соответствуют сильной, слабой и очень слабой стратификации.

Сравнение вертикального волнового импульса $\overline{v'w}$ у внутренней и субинерционной волны первой моды с длиной волны $\lambda = 200$ м и максимальной амплитудой $\zeta_{\max} = 2$ м для сильной (а), слабой (б) и очень слабой (в) стратификации приведено на рис. 9. Всюду вертикальный поток импульса у внутренней волны превосходит по модулю соответствующий поток у субинерционной волны, причем при сильной стратификации на рис. 9а это различие наиболее сильное. Присутствует общая тенденция уменьшения потока импульса $\overline{v'w}$ с ослаблением стратификации. На рис. 9г показаны профили вертикального волнового потока импульса $\overline{v'w}$ у субинерционной волны для трех рассматриваемых типов стратификации. Линии 1, 2 и 3 на рис. 9г соответствуют сильной, слабой и очень слабой стратификации. Стратификация на этот поток импульса у субинерционной волны влияет слабее, чем на тот же поток у внутренней волны.

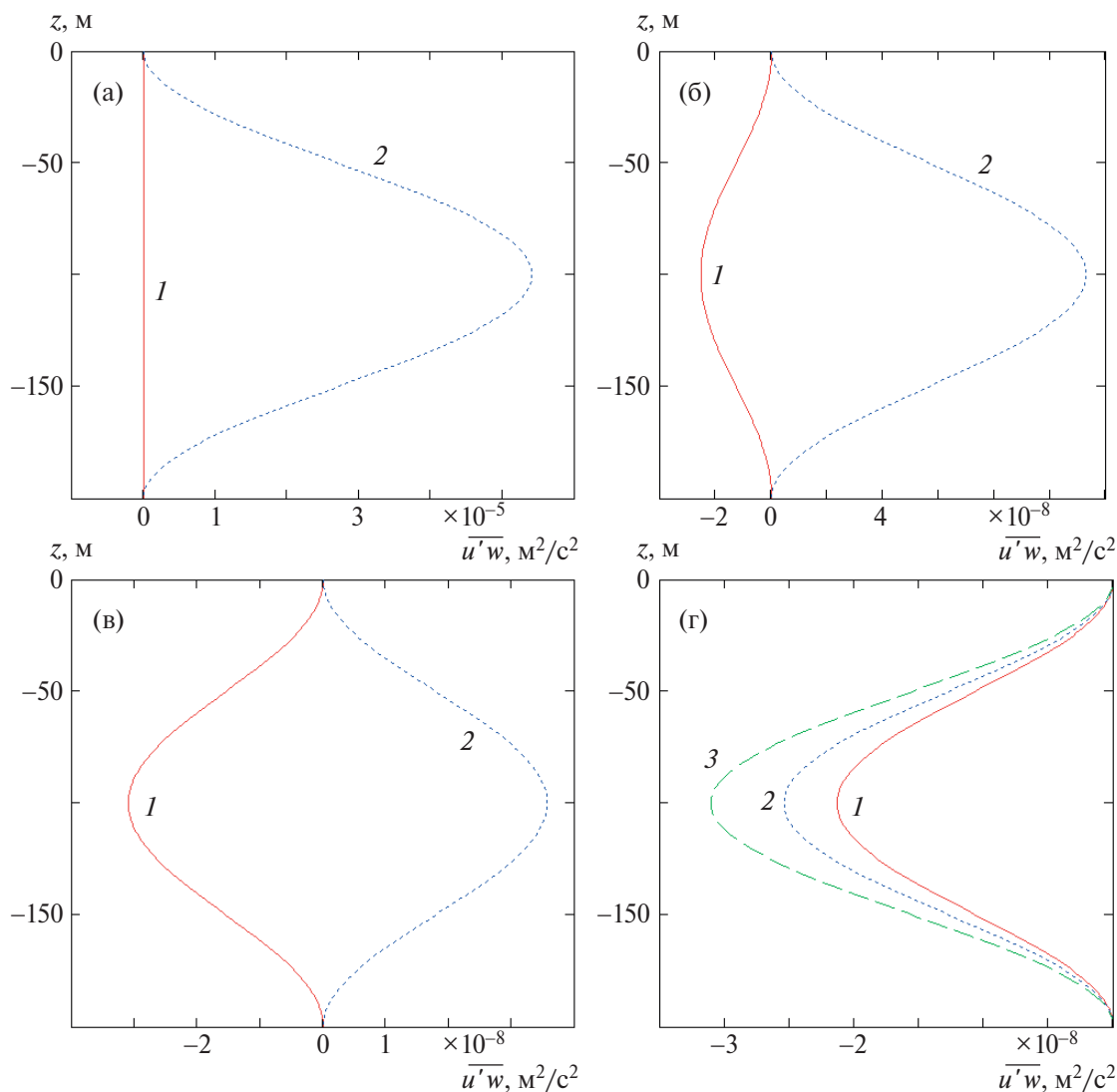


Рис. 8. Профили вертикального волнового потока импульса $\overline{u'w}$ у внутренних (1) и субинерционных волн (2) для сильной (а), слабой (б) и очень слабой (в) стратификации; эти же потоки только у внутренней волны для трех типов стратификации (г).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнение для амплитуды вертикальной скорости внутренних волн при учете горизонтальной составляющей угловой скорости Земли имеет комплексный коэффициент при первой производной, в традиционном приближении он равен нулю. Собственная функция внутренних волн в нетрадиционном приближении — комплексная, хотя частота волны — действительная. Показано, что дисперсионное соотношение при постоянной частоте волны сводится к каноническому уравнению для кривых второго порядка в плоскости горизонтальных волновых чисел. Если частота внутренней волны больше инерционной, но меньше частоты плавучести, то изолинии частоты — эллипсы, если частота больше частоты плавучести, но меньше максимально возможной частоты, то изолинии частоты — гиперболы. Если частота волны равна частоте плавучести, то изолинии частоты — прямые линии, параллельные направлению на восток. В традиционном приближении эллипсы превращаются в окружности с радиусом, равным большой полуоси эллипса, а прямых и гипербол нет. Влияние нетрадиционного приближения на дисперсионные кривые тем сильнее, чем слабее стратификация.

Вертикальный волновой поток импульса по абсолютной величине в традиционном приближении не зависит от направления распространения волны. Получено, что в нетрадиционном приближении он зависит от направления распространения волны, причем эффект максимален, когда волна распространяется на север или юг. Тогда присутствует вертикальный перенос импульса для двух компонент волновых возмущений скорости течения вдоль и поперек направления распространения волны. В то время как в традиционном приближении вертикальный перенос импульса присутствует только для компоненты скорости, поперечной

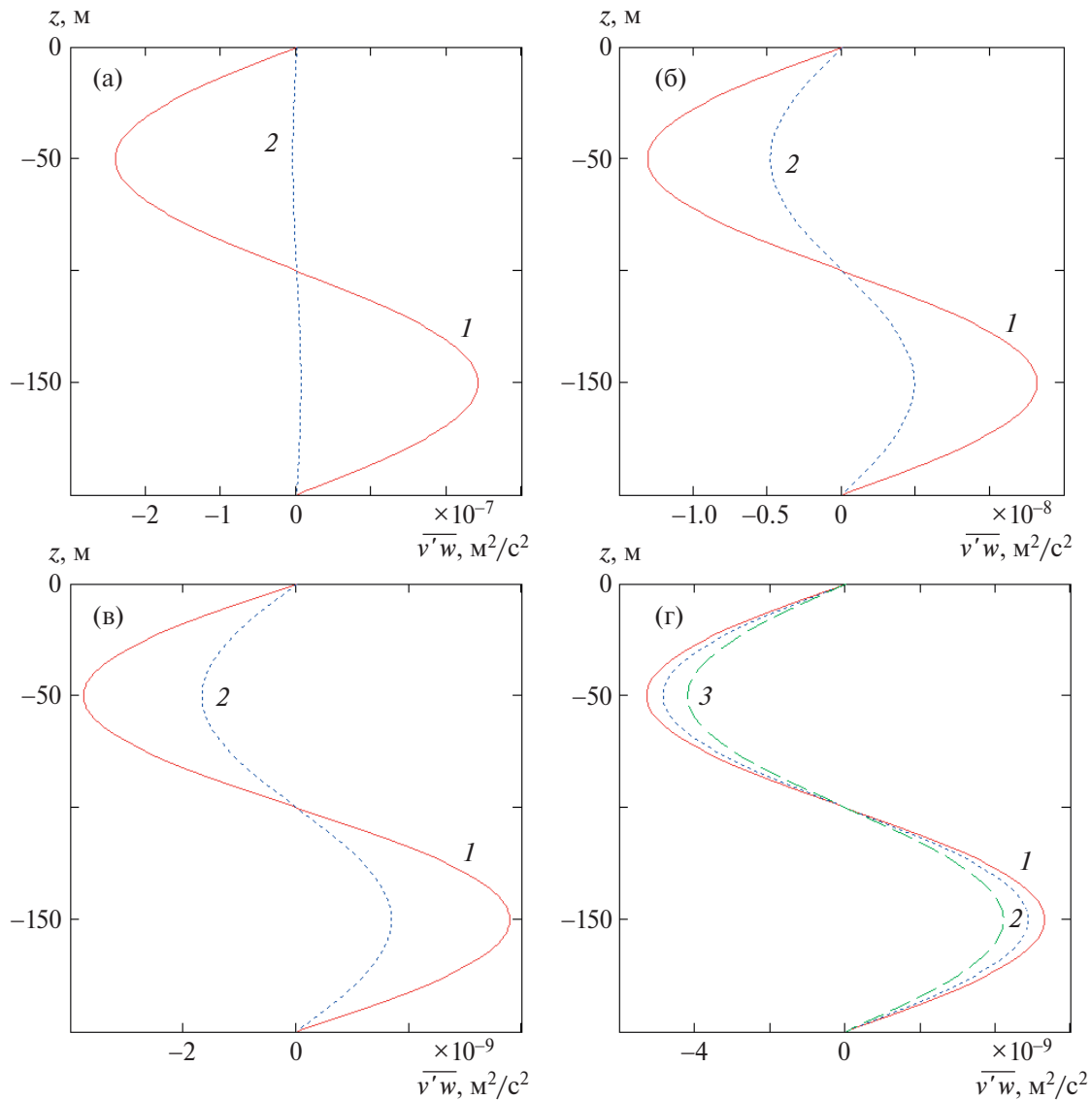


Рис. 9. Профили вертикального волнового потока импульса $\overline{v'w}$ у внутренних (1) и субинерционных волн (2) для сильной (а), слабой (б) и очень слабой (в) стратификации; эти же потоки только у субинерционной волны для трех типов стратификации (г).

к направлению распространения волны. Показано для слабой и очень слабой стратификации, что в нетрадиционном приближении этот поток импульса с возрастанием угла волнового вектора с направлением на восток возрастает по модулю и достигает максимального значения при распространении волны на север (или юг). При распространении на запад или восток он равен потоку традиционного приближения. Эффект усиливается с ослаблением стратификации, но для сильной стратификации он отсутствует и этот поток импульса равен потоку традиционного приближения.

Автор благодарен Г.С. Кондрашину за помощь при численных расчетах.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме FNNN-2021-0004 “Фундаментальные исследования процессов, определяющих потоки вещества и энергии в морской среде и на ее границах, состояние и эволюцию физической и биогеохимической структуры морских систем в современных условиях” (шифр “Океанологические процессы”).

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

Дисперсионное соотношение (4.6) имеет вид

$$h_h^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)(\omega^2 - f^2)^2}{(N^2 - \omega^2)(\omega^2 - f^2) + \omega^2 f_c^2 \sin^2 \alpha}. \quad (\text{A.1})$$

Нетрудно показать, что уравнение (A.1) при постоянной частоте волны эквивалентно каноническому уравнению для кривых второго порядка в плоскости горизонтальных волновых k , j чисел вида

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} = 1, \quad (\text{A.2})$$

где

$$a^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 (\omega^2 - f^2)}{(N^2 - \omega^2)}; \quad b^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 (\omega^2 - f^2)^2}{(N^2 - \omega^2) (\omega^2 - f^2) + \omega^2 f_c^2}. \quad (\text{A.3})$$

Действительно, после подстановки a^2 и b^2 (A.3) в (A.2) получаем

$$\frac{k^2 (N^2 - \omega^2)}{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 (\omega^2 - f^2)} + \frac{l^2 [(N^2 - \omega^2) (\omega^2 - f^2) + \omega^2 f_c^2]}{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 (\omega^2 - f^2)} = 1. \quad (\text{A.4})$$

Умножим обе части (A.4) на знаменатель второго слагаемого в левой части уравнения

$$k^2 (N^2 - \omega^2) (\omega^2 - f^2) + l^2 [(N^2 - \omega^2) (\omega^2 - f^2) + \omega^2 f_c^2] = \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 (\omega^2 - f^2).$$

Отсюда

$$(k^2 + l^2) (N^2 - \omega^2) (\omega^2 - f^2) + l^2 \omega^2 f_c^2 = \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 (\omega^2 - f^2). \quad (\text{A.5})$$

Учитывая, что $k_h^2 = (k^2 + l^2)$, $l^2 = k_h^2 \sin^2 \alpha$, уравнение (A.5) преобразуется к виду

$$k_h^2 [(N^2 - \omega^2) (\omega^2 - f^2) + \omega^2 f_c^2 \sin^2 \alpha] = \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 (\omega^2 - f^2).$$

Отсюда

$$k_h^2 = \frac{\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2 (\omega^2 - f^2)^2}{(N^2 - \omega^2) (\omega^2 - f^2) + \omega^2 f_c^2 \sin^2 \alpha}. \quad (\text{A.6})$$

Уравнение (A.6) совпадает с уравнением (A.1). Таким образом, уравнение (A.2) эквивалентно дисперсионному уравнению (A.1), (A.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бадулин С.И., Василенко В.М., Яремчук М.И. Об особенности интерпретации квазиинерционных движений на примере данных эксперимента Мегаполигон // Изв. АН СССР. ФАО. 1991. Т. 27. № 6. С. 638–647.
2. Saint-Guilly B. On internal waves: Effects of the horizontal component of the Earth's rotation and of a uniform current // Dtsch. Hydrogr. Z. 1970. V. 23. P. 16–23.
3. Каменкович В.М., Кулаков А.В. К вопросу о влиянии вращения на волны в стратифицированном океане // Океанология. 1977. № 3. С. 400–410.
4. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 337 с.
5. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. М.: Мир, 1981. Ч. 1. 480 с. Ч. 2. 363 с.
6. Gerkema T., Shrira V.I. Near-inertial waves in the ocean: beyond the traditional approximation // J. Fluid. Mech. 2005. V. 52. P. 195–219.
7. Резник Г.М. Волновые движения в устойчиво-нейтрально стратифицированном океане // Океанология. 2015. Т. 55. № 6. С. 875–882.
8. Gerkema T., Shrira V.I. Near-inertial waves on the “nontraditional” b-plane // J. Geophys. Res. 2005. V. 110. C01003.
<https://doi.org/10.1029/2004JC002519>
9. Слепышев А.А., Лактионова Н.В. Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в сдвиговом потоке // Изв. РАН. ФАО. 2019. Т. 55. № 6. С. 194–200.
10. Воротников Д.И., Слепышев А.А. Вертикальные потоки импульса, обусловленные слабонелинейными внутренними волнами на шельфе // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 1. С. 23–35.
11. Анкудинов Н.О., Слепышев А.А. Вертикальный перенос импульса внутренними волнами в двумерном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 3. С. 39–47.
12. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.

13. Иванов В.А., Шульга Т.Я., Багаев А.В., Медведева А.В., Пластун Т.В., Вржевская Л.В., Свищева И.А. Внутренние волны в р-не Гераклейского полуострова: моделирование и наблюдение // Изв. РАН. МГЖ. 2019. Т. 35. № 4. С. 322–340.
<https://doi.org/10.22449/0233-7584-2019-4-322-340>
14. Борисенко Ю.Д., Воронович А.Г., Леонов А.И., Миропольский Ю.З. К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1976. Т. 12. № 3. С. 293–301.
15. Grimshaw R. The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion // Stud. In Appl. Math. 1977. V. 56. P. 241–266.
<https://doi.org/10.1002/sapm1977563241>
16. Самодуров А.С., Любичкий А.А., Пантелеев Н.А. Вклад опрокидывающихся внутренних волн в структурообразование, диссипацию энергии и вертикальную диффузию в океане // Изв. РАН. МГЖ. 1994. № 3. С. 14–27.
17. Подымов О.И., Зацепин А.Г., Островский А.Г. Вертикальный турбулентный обмен в черноморском пикноклине и его связь с динамикой вод // Океанология. 2017. Т. 57. № 4. С. 546–559.
<https://doi.org/10.7868/S0030157417040049>
18. Ivanov A.V., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Thimring L.Sh. Interaction of internal waves and turbulence in the upper layer of the ocean // Dyn. Atm. and Ocean. 1984. V. 3. No. 7. P. 221–232.
19. Соустова И.А., Троицкая Ю.И. и др. Простое описание турбулентного переноса в стратифицированном сдвиговом потоке применительно к описанию термогидродинамики внутренних водоемов // Изв. РАН. ФАО. 2020. Т. 56. № 6. С. 689–699.
20. Nosova A.V., Slepyshev A.A. Vertical fluxes induced by weakly nonlinear internal waves on a shelf // Fluid. Dyn. 2015. V. 50. No. 1. P. 12–21.
<https://doi.org/10.1134/S0015462815010020>
21. Слепышев А.А. Вертикальный перенос импульса внутренними волнами при учете турбулентной вязкости и диффузии // Изв. РАН. ФАО. 2016. Т. 52. № 3. С. 342–349.
22. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.

Vertical Momentum Transfer by Internal Waves with Regard for the Horizontal Component of Angular Velocity of the Earth's Rotation

© 2025 A. A. Slepyshev*

Marine Hydrophysical Institute of the Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia

*e-mail: slep55@mail.ru

Free internal waves in a uniformly stratified fluid are considered in the Boussinesq approximation with regard for the Earth's rotation. It is shown that the dispersion relation, derived with taking into account the horizontal component of the angular velocity of the Earth's rotation at constant wave frequency, is reduced to the canonical equation for second-order curves in the plane of horizontal wave numbers. If the wave frequency is higher than the inertial frequency and less than the Brunt-Väisälä frequency, the frequency isolines are ellipses. If the wave frequency is higher than the buoyancy frequency, then the frequency isolines are hyperbolas; and if the wave frequency is equal to the Brunt-Väisälä frequency, then the isolines are two straight lines parallel the direction to the east. The vertical wave momentum fluxes are obtained as functions of the direction of wave propagation. It is shown that the fluxes are maximum in absolute value when the wave propagates to the north or to the south. A comparison of the vertical momentum fluxes of internal and sub-inertial waves at the same length and the maximum wave amplitude is carried out. It is shown that the vertical momentum flux of sub-inertial waves is higher than that of internal waves and weakens with weakening of stratification.

Keywords: internal waves, sub-inertial waves, vertical wave momentum flux, Coriolis force