

УДК 532.5:551.5

# ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ И СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ. ФОРМИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2025 г. М. В. Калашник\*

*Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, Москва, Россия  
Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия*

\*e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

Поступила в редакцию 23.02.2025 г.

После доработки 16.03.2025 г.

Принята к публикации 21.03.2025 г.

Исследована устойчивость пространственно периодических течений однородной и стратифицированной жидкости с учетом придонного трения. Для решения задачи устойчивости использован метод Галеркина с тремя базисными фурье-гармониками. Сформулирована система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд фурье-гармоник. Получено решение линеаризованного варианта системы, найдено выражение для инкремента нарастания возмущений. Установлено, что экспоненциальный рост линейных возмущений на нелинейной стадии развития сменяется режимом установления стационарных периодических возмущений в форме замкнутых ячеек. Эти возмущения уменьшают осредненную горизонтальную скорость течения. Получены аналитические выражения для пространственного периода и амплитуды стационарных возмущений.

*Ключевые слова:* гидродинамическая неустойчивость, придонное трение инкремент нарастания, вихревые ячейки

DOI: 10.31857/S1024708425030066

Исследованию гидродинамической неустойчивости геофизических течений посвящена обширная литература (большой список публикаций в [1–3]). С развитием неустойчивости связывают образование атмосферных циклонов, синоптических вихрей в океане, упорядоченных вихревых дорожек, и т. д.

В настоящей работе исследована устойчивость пространственно периодических течений однородной и стратифицированной жидкости с учетом придонного трения. Для решения задачи устойчивости использован метод Галеркина с тремя базисными фурье-гармониками. Сформулирована система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд фурье-гармоник. На основе численного решения этой системы в предшествующих работах было показано, что в модели без трения развитие неустойчивости течений приводит к установлению режима нестационарных колебаний или васцилляций. В настоящей работе показано, что ситуация принципиально меняется при учете трения. Экспоненциальный рост линейных возмущений на нелинейной стадии развития сменяется режимом установления стационарных периодических по пространству возмущений. Эти возмущения уменьшают осредненную горизонтальную скорость течения. Получены аналитические выражения для пространственного периода и амплитуды возмущений.

## 1. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В МОДЕЛИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматриваются двумерные движения однородной несжимаемой вязкой жидкости с характерным горизонтальным масштабом  $D$  и скоростью  $U_0$  в присутствии внешней силы  $f$ . В безразмерные переменные движения описываются уравнением

$$(\Delta\psi)_t + \psi_x(\Delta\psi)_y - \psi_y(\Delta\psi)_x = \text{Re}^{-1}(\Delta^2\psi + f). \quad (1.1)$$

Здесь  $\psi$  — функция тока,  $u = -\psi_y, v = \psi_x$  — компоненты скорости,  $Re = U_0 D/\nu$  — число Рейнольдса,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\Delta$  — оператор Лапласа. В качестве масштабов координат, времени и функции тока приняты соответственно  $D, D/U_0, U_0 D$ , амплитуда внешней силы  $f_0 = \nu U_0/D^2$ .

Система уравнение (1.1) имеет точное решение

$$\psi = \Psi(y) = \sin y, \quad u = U(y) = -\cos y, \tag{1.2}$$

описывающее стационарное пространственно-периодическое течение, возбуждаемое внешней периодической силой  $f = -\sin y$ . Данное течение получило название “течение Колмогорова”. Течение (1.2) является точным решением (1.1) и в отсутствии вязкости  $Re^{-1} = 0$  (невязкое течение Колмогорова).

Течение (1.2) достаточно хорошо воспроизводится магнитогидродинамическим методом в лабораторных экспериментах с проводящей жидкостью [4–7]. Аналоги таких течений могут создаваться и в природных условиях, например, под действием периодического распределения касательного напряжения ветра в океане или внешних притоков тепла в атмосфере.

Задача об устойчивости течения (1.2) в вязкой жидкости была впервые поставлена А.Н. Колмогоровым в 1960 г. Уже через год линейный вариант задачи получил решение в известной работе [7]. Для исследования линейной устойчивости в этой работе использовался аппарат теории цепных дробей, позволяющий определить минимальное критическое значение числа Рейнольдса и длину волны наиболее опасного возмущения. Высокая степень симметрии и возможность лабораторного моделирования течения Колмогорова (1.2) стимулировали многочисленные теоретические исследования его устойчивости в присутствии ряда осложняющих факторов (трение, бета эффект, стратификация) [8–15]. Длинноволновой подход к исследованию нелинейной устойчивости течения Колмогорова, использующий интегральные условия разрешимости для периодических возмущений, был предложен в работах [16, 17]. С использованием такого подхода была развита слабо нелинейная теория устойчивости, справедливая при небольших отклонениях числа Рейнольдса  $Re$  от критического значения. Обзор публикаций, посвященных исследованию устойчивости течения Колмогорова, представлен в работе [4] и статье [22].

Линейная динамика возмущений при больших значениях числа Рейнольдса исследовалась в упомянутой статье [7], а также работе [15]. Нелинейная динамика возмущений течения Колмогорова в отсутствие трения ( $Re = \infty$ ) изучалась в недавних работах [15, 17]. В настоящей работе рассмотрен подход, позволяющий описать нелинейную динамику возмущений при конечных значениях числа Рейнольдса. В этом подходе используется метод Галеркина с тремя базисными тригонометрическими функциями и амплитудами возмущений, зависящими от времени. Показано, что поведение амплитуд возмущений во времени описывается системой из трех нелинейных дифференциальных уравнений. Установлено, что в модели с трением экспоненциальный рост линейных возмущений течения Колмогорова сменяется режимом установления стационарных периодических возмущений в форме замкнутых ячеек. Эти возмущения приводят к меандрированию течения и уменьшают его среднюю скорость. Получены аналитические выражения для пространственного периода и амплитуды возмущений.

## 2. МЕТОД ГАЛЕРКИНА И ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Представляя в (1.1)  $\psi = \Psi(y) + \psi'$ , для описания динамики малых возмущений  $\psi'$  стационарного невязкого течения (1.2) получим уравнение

$$(\Delta\psi')_t - (\Delta\psi' + \psi')_x \cos y = Re^{-1} \Delta^2 \psi'. \tag{2.1}$$

В [7] отыскивались экспоненциально нарастающие со временем и периодические по координате у решения уравнения (2.1), представимые рядом по системе тригонометрических функций  $\cos(ny), \sin(ny)$ . Нахождение инкремента нарастания при этом сводилось к анализу достаточно громоздкого алгебраического уравнения, содержащего бесконечную цепную дробь.

Упрощенный подход к построению решений уравнения (2.1) основан на методе Галеркина с тремя базисными функциями  $f_1(y) = 1, f_2(y) = \cos y, f_3(y) = \sin y$  (первыми тремя членами тригонометрического ряда). Обозначим угловыми скобками  $\langle \phi \rangle = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \phi dy$  операцию осреднения по периоду  $2\pi$  фонового течения и запишем уравнение (2.1) в символическом виде  $L(\psi') = 0$ . В соответствии с методом Галеркина приближенное решение уравнения (2.1) ищем в виде (штрих у возмущений опускаем)

$$\psi = A(x, t) \cos y + B(x, t) \sin y + C(x, t). \tag{2.2}$$

Коэффициенты разложения находим из условий ортогональности  $\langle f_i(y)L(\psi) \rangle = 0, i = 1, 2, 3$ . Таким образом, получим систему уравнений для коэффициентов разложения

$$(A_{xx} - A)_t - (C_{xx} + C)_x = Re^{-1}(A_{xxxx} - 2A_{xx} + A), \quad C_t - (1/2)A_x = R^{-1}C_{xx}. \tag{2.3}$$

К этим уравнениям присоединяется изолированное уравнение

$$(B_{xx} - B)_t = \text{Re}^{-1}(B_{xxxx} - 2B_{xx} + B), \quad (2.4)$$

имеющее только затухающие со временем решения, в частности  $B = 0$ .

Нахождение решений уравнений (2.3) вида  $A = a_0 e^{\lambda t} \cos(kx)$ ,  $C = c_0 e^{\lambda t} \sin(kx)$  приводит к уравнению для квадрата для инкремента нарастания  $\lambda$

$$(k^2 + 1)\lambda^2 + \text{Re}^{-1}(k^2 + 1)(2k^2 + 1)\lambda + \text{Re}^{-2}k^2(k^2 + 1)^2 + (1/2)k^2(k^2 - 1) = 0. \quad (2.5)$$

Приравнявая свободный член уравнения (2.5) к нулю, получим уравнение кривой нейтральной устойчивости на плоскости параметров  $(k, \text{Re})$ . Эта кривая отделяет растущие решения ( $\lambda > 0$ ) от затухающих решений ( $\lambda < 0$ ) и описывается уравнением

$$\text{Re} = \text{Re}_{cr}(k) = \sqrt{2} \frac{k^2 + 1}{\sqrt{1 - k^2}}. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) дает прекрасную аппроксимацию уравнения нейтральной кривой, полученной методом теории цепных дробей в работе [7]. Согласно этой формуле, неустойчивость существует, если  $\text{Re} > \sqrt{2}$ , причем интервал волновых чисел неустойчивых мод лежит внутри интервала  $0 < k < 1$ .

Отметим, что согласно (2.5), в отсутствии трения ( $\text{Re}^{-1} = C$ ) квадрат инкремента нарастания  $\lambda^2 = (1/2)k^2(1 - k^2)/(1 + k^2)$ . Согласно этому выражению, длинноволновые возмущения с  $0 < k^2 < 1$  экспоненциально нарастают. Наиболее опасному возмущению с максимумом инкремента отвечает волновое число  $k = k_m = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \approx 0.64$ . Динамика линейных и нелинейных возмущений в отсутствии трения подробно исследовалась в наших недавних работах [18, 20].

### 3. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Результаты линейного анализа позволяют предположить, что метод Галеркина будет давать хорошую аппроксимацию решений и в нелинейном случае. Для течения (1.2) нелинейная динамика возмущений описывается уравнением

$$(\Delta\psi')_t - (\Delta\psi' + \psi')_x \cos y + \psi'_x (\Delta\psi')_y - \psi'_y (\Delta\psi')_x = \text{Re}^{-1} \Delta^2 \psi'. \quad (3.1)$$

Будем искать приближенное решение (3.1) в форме (2.2). Подставляя (2.2) в (3.1) и используя условия ортогональности системе функций  $f_i(y)$ , получим следующую нелинейную систему уравнений в частных производных для определения коэффициентов разложения

$$\begin{aligned} (A - A_{xx})_t + (C_{xx} + C)_x + (B - B_{xx})C_x + BC_{xx} &= -\text{Re}^{-1}(A_{xxxx} - 2A_{xx} + A), \\ (B - B_{xx})_t - (A - A_{xx})C_x - AC_{xx} &= -\text{Re}^{-1}(B_{xxxx} - 2B_{xx} + B), \\ C_t - (1/2)A_x - (1/2)(BA_x - AB_x) &= \text{Re}^{-1}C_{xx}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь первые два уравнения (3.2) для простоты умножены на “-1”. Линейный вариант системы (3.2) сводится к (2.3), (2.4). Отметим, что для переменной  $C$  метод Галеркина дает уравнение  $C_{xxt} - (1/2)((B + 1)A_x - A(B + 1)_x)_{xx} = \text{Re}^{-1}C_{xxxx}$ . Третье уравнение (3.2) получается из этого уравнения понижением порядка.

Полагая  $B = B_1 - 1$  и считая, что  $B_1 = B_1(t)$  зависит только от времени, запишем систему (3.2) в виде

$$\begin{aligned} (A - A_{xx})_t + B_1(C_{xx} + C)_x &= -\text{Re}^{-1}(A_{xxxx} - 2A_{xx} + A), \\ (B_1)_t - (A - A_{xx})C_x - AC_{xx} &= -\text{Re}^{-1}(B_1 - 1), \\ C_t - (1/2)B_1(t)A_x &= \text{Re}^{-1}C_{xx}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Теперь полагаем

$$A = a(t) \cos(kx), \quad C = c(t) \sin(kx), \quad B_1 = b(t).$$

Подстановка этих выражений в (3.3) приводит к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд  $a = a(t)$ ,  $c = c(t)$ ,  $b = b(t)$

$$\begin{aligned} a_t(t) (1 + k^2) + bc(t)k(1 + k^2) &= \text{Re}^{-1} (k^2 + 1)^2 a, \\ b_t - (1/2)kac &= -\text{Re}^{-1}(b - 1), \quad c_t + (1/2)kab(t) = -\text{Re}^{-1}k^2 c. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь нижними буквенными индексами обозначены частные производные по времени. Среднее уравнение (3.4) следует из уравнения  $(b_1)_t - (1 + k^2)kac \cos^2 x + ack^3 \cos^2 x = 0$ , после применения формул понижения степени. Остальные уравнения точные.

Случай с отсутствием трения рассматривался в наших предшествующих работах [18, 20]. Система (3.4) при этом сводится к нелинейной системе

$$a_t(t) (1 + k^2) + bc(t)k (1 - k^2) = 0, \quad b_t - (1/2)kac = 0, \quad c_t + (1/2)kab(t) = 0.$$

Из этой системы следуют законы сохранения

$$\frac{d}{dt} (b^2 + c^2) = 0 \quad \frac{d}{dt} (g(k)a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

где  $g(k) = (1 + k^2) / (1 - k^2)$ . Использование этих законов позволяет представить решение системы в терминах эллиптических функций. Это решение описывает нелинейные колебания или васциляции. Пример численного решения системы (3.4) в случае  $Re^{-1} = 0$  для значения  $k = 0.5$  представлен на рис. 1. Как показывают расчеты, при значениях  $Re$ , близких к нулю, имеют место затухающие со временем колебания. Совершенно другое поведение наблюдается в модели с трением при малых, но конечных значениях числа Рейнольдса  $Re$ . В этом случае взамен колебаний реализуется режим установления стационарных пространственно периодических течений. Остановимся на этом режиме подробнее.

Нетрудно видеть, что стационарный вариант системы (3.4) в модели с трением

$$\begin{aligned} bck (1 - k^2) + Re^{-1} (k^2 + 1)^2 a &= 0, \\ -(1/2)kac + Re^{-1} (b - 1) &= 0, \quad (1/2)kab + Re^{-1} k^2 c = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

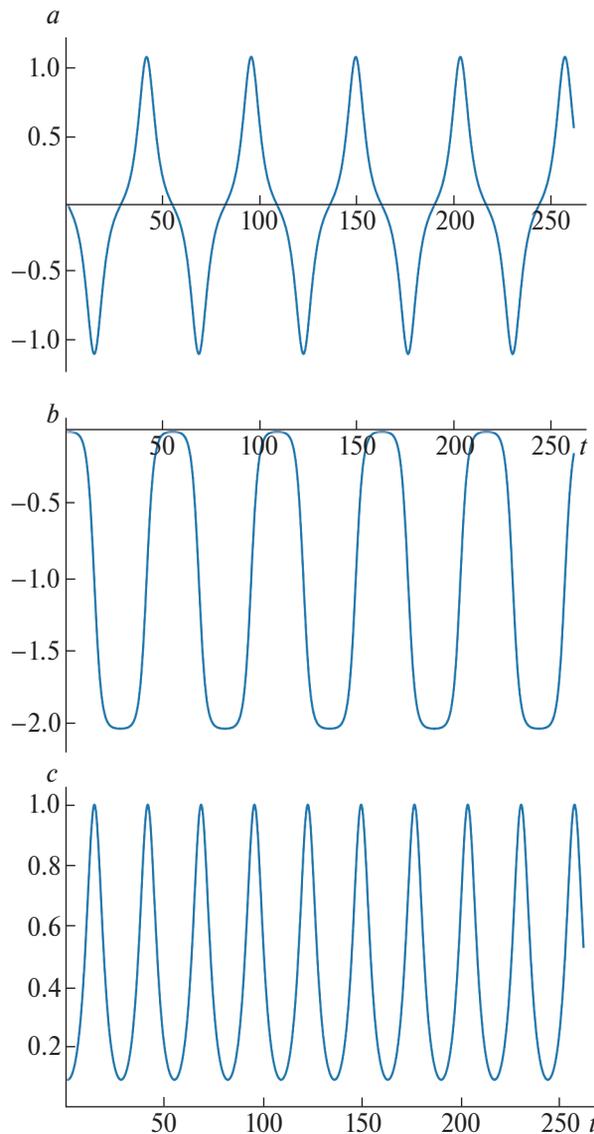


Рис. 1. Нелинейные васциляции возмущений (функции  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ) в модели без трения.

имеет точное стационарное решение. Действительно, из последнего уравнения (3.5) следует

$$c = -\frac{(1/2)kab}{\text{Re}^{-1}k^2}. \quad (3.6)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (3.5) после сокращения на  $a$  и простых преобразований, получим  $b^2 = \frac{\text{Re}^{-2}(k^2 + 1)^2}{(1 - k^2)}$ , или

$$b = \pm\sqrt{2}\frac{\text{Re}^{-1}(k^2 + 1)}{\sqrt{1 - k^2}}. \quad (3.7)$$

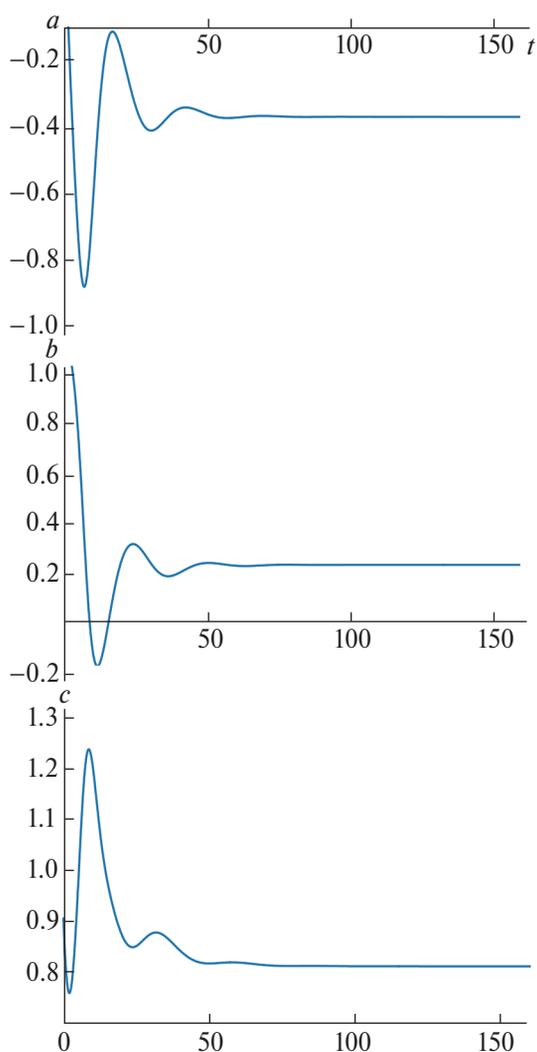
Подставляя (3.7) во второе уравнение (3.5) получим

$$a = \pm\text{Re}^{-1}\sqrt{b^{-1} - 1}. \quad (3.8)$$

Выражения (3.6)–(3.8) однозначно определяют две неподвижные стационарные точки системы (3.4).

Численные расчеты показывают, что данные неподвижные точки являются устойчивыми. Независимо от выбора начальных условий все решения стремятся к одной из двух неподвижных точек. Пример численного решения нелинейной системы (3.4) представлен на рис. 2.

Координаты неподвижных точек хорошо согласуются с выражениями (3.6)–(3.8). В частности при  $k = 0.5$ ,  $\text{Re}^{-1} = 0.1$  предельные теоретические значения (3.6)–(3.8):  $b = 0.2054$ ,  $a = -0.39$ ,  $c = 0.806$ . Эти значения практически совпадают со значениями в численном расчете.



**Рис. 2.** Пример численного решения системы (3.4) при  $k = 0.5$ ,  $\text{Re}^{-1} = 0.1$  с начальными условиями  $a(0) = 0.5$ ,  $b(0) = 1$ ,  $c(0) = 0.9$ .

Доказательство устойчивости неподвижных точек можно выполнить, используя систему для линейного приближения. Обозначим координаты неподвижных точек (3.6)–(3.8) как  $b = b_0, c = c_0, a = a_0$ . Положим  $a(t) = a_0 + a, b(t) = b_0 + b, c(t) = c_0 + c$ . Тогда для возмущений из (3.4) будем иметь линеаризованную систему

$$\begin{aligned} a_t(t) (1 + k^2) + (b_0 c(t) + c_0 b) k (1 - k^2) &= -\text{Re}^{-1} (k^2 + 1)^2 a, \\ b_t - (1/2)k(a_0 c + c_0 a) &= -\text{Re}^{-1} b, \quad c_t + (1/2)k(a_0 b + b_0 a) = -\text{Re}^{-1} k^2 c. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для доказательства линейной устойчивости можно использовать различные аналитические критерии относительно поведения возмущений. Проще, однако, провести прямой численный расчет решений системы (3.9). Пример такого расчета представлен на рис. 3. Как видно, все решения линеаризованной системы стремятся к нулю, что свидетельствует о линейной устойчивости.

Таким образом, результаты расчетов показывают, что в присутствии трения развитие нелинейной неустойчивости приводит к формированию в периодическом зональном потоке системы стационарных замкнутых вихревых ячеек. При наличии зонального потока полная функция тока течения определяется выражением  $\psi = a(x, t) \cos y + b(x, t) \sin y + c(x, t)$ , или, в предельном случае, для значений  $k = 0.5, \text{Re}^{-1} = 0.1$

$$\psi = -0.39 \cos kx \cos y + 0.204 \sin y + 0.806 \sin kx. \tag{3.10}$$

Изолинии функции тока (3.10) показаны на рис. 4. Как видно, все изолинии данной функции наклонены по потоку.

Важный результат состоит в том, что модуль осредненной по горизонтальной координате скорости меньше модуля скорости основного течения. Если обозначит угловыми скобками осредненную по гори-

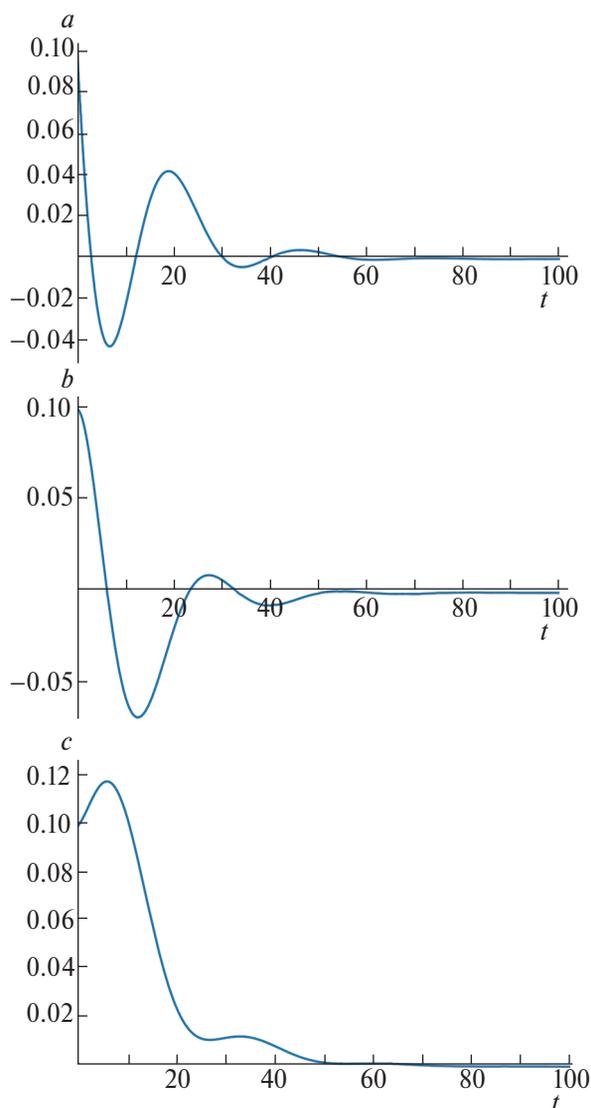
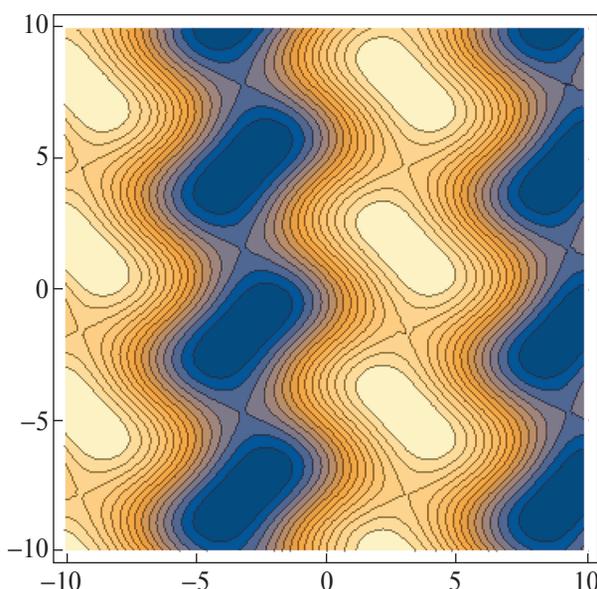


Рис. 3. Пример численного решения линеаризованной системы.



**Рис. 4.** Изолинии функции тока (3.10), устанавливающиеся в результате неустойчивости. По горизонтальной и вертикальной осям отложены координаты  $x$  и  $y$ .

зонтальной скорости то для основного течения  $\langle U \rangle = -1$ , а для течения с ячейками, согласно (18),  $\langle U \rangle = -0.204$ . Формирование вихревых ячеек, таким образом, приводит к уменьшению модуля средней скорости течения. Как показано ниже эта особенность сохраняется и модели стратифицированной жидкости.

Описанное выше поведение с установлением стационарных ячеек принципиально отличается от осциллирующего поведения в отсутствие трения.

#### 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ АТМОСФЕРЫ

Для изучения устойчивости периодических течений используем уравнения поверхностной геострофической модели (SQG-модель), описывающей движения стратифицированной вращающейся жидкости с нулевой потенциальной завихренностью [21, 22]. В модели рассматривается стратифицированная, вращающаяся и полубесконечная атмосфера ( $z > 0$ ) с постоянной частотой плавучести  $N$  и инерционной частотой  $f$ . Рассматриваются движения атмосферы с характерной скоростью  $U_0$ , горизонтальным масштабом  $D$  и числом Россби  $Ro = U_0/fD = 1$ . В безразмерных переменных уравнения SQG-модели включают уравнение Лапласа для функции тока  $\psi$  во внутренней области

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = 0. \quad (4.1)$$

Здесь в качестве горизонтального и вертикального масштаба приняты соответственно  $D$  и  $H = Df/N$ , масштаба времени и функции тока соответственно  $T = D/U_0$  и  $\psi_0 = U_0D$ . Безразмерные горизонтальные компоненты скорости  $u, v$  и возмущение плавучести  $\sigma$  (потенциальной температуры) связаны с функцией тока соотношениями  $u = -\psi_y, v = \psi_x, \sigma = \psi_z$ .

К уравнению (4.1) присоединяется важное краевое условие

$$z = 0: \quad \psi_{zt} + [\psi, \psi_z] = -r\Delta_2\psi + F. \quad (4.2)$$

Здесь квадратными скобками обозначен двумерный якобиан по переменным  $x, y$ ,  $[m, n] = m_x n_y - m_y n_x$ . Также обозначено  $r = E^{1/2}/2Ro$  — коэффициент придонного трения,  $E = (h_E/H)^2$  — число Экмана,  $h_E = (2\nu/f)^{1/2}$  — толщина экмановского пограничного слоя с эффективным коэффициентом турбулентной вязкости  $\nu$ . Подробный вывод условия (4.2) представлен в монографии [23]. Отметим, что коэффициент трения может быть представлен в виде  $r = \left(\frac{2\nu f}{U_*^2}\right)^{1/2} \frac{D}{H}$ . Также отметим, что для приведенных значений параметров и  $h_E = 0.5$  км, коэффициент трения  $r = 4$ .

В условии (4.2) присутствует действующая на границе внешняя периодическая сила  $F$ . Далее считаем эту силу стационарной и пространственно периодической  $F = -r \cos y$ . В отсутствие трения и внешней силы, условие (4.2) есть уравнения переноса плавучести на горизонтальной границе.

Непосредственно из (4.1), (4.2) вытекает уравнение баланса полной энергии

$$E_t = -r \left. \langle \psi_x^2 + \psi_y^2 \rangle \right|_{z=0}, \quad E = \int_0^1 \langle (\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) \rangle dz, \quad (4.3)$$

отражающее диссипативный характер придонного трения. Здесь угловыми скобками обозначена операция осреднения по горизонтальным координатам.

Подчеркнем, что для решений уравнения Лапласа (4.1) (гармонических функций) значения функции тока  $\psi$  на границах выражаются через граничное значение нормальной производной  $\sigma = \psi_z$  (посредством нелокального оператора типа Гильберта). Описание трехмерной динамики течений с нулевой потенциальной завихренностью, таким образом, сводится к решению двумерного уравнения (4.2) на границе. Этим объясняется термин поверхностная геострофическая модель (SQG model). Подробное описание модели содержится в работах [22, 24–26].

Система (4.1), (4.2) при наличии внешней силы  $F = -r \cos y$  на границе имеет точное решение

$$\Psi = e^{-z} \cos y, \quad (4.4)$$

описывающее зональное пространственно периодическое течение со скоростью  $U = -\Psi_y = e^{-z} \sin y$ , плавучестью  $\sigma = \Psi_z = -e^{-z} \cos y$ , локализованное вблизи подстилающей поверхности. Размерная форма профиля скорости  $U = U_0 e^{-z/H} \sin(y/D)$ ,  $H = Df/N$ . Представляя  $\psi = \Psi + \psi'$  и опуская штрих, для описания возмущений получим уравнение Лапласа (4.1) с краевым условием

$$z = 0: \quad \psi_{zt} + \sin y (\psi_{xz} + \psi_x) + [\psi, \psi_z] = -r \Delta_2 \psi \quad (4.5)$$

и условием затухания при  $z \rightarrow \infty$ .

В рамках задачи (4.1), (4.5) далее будет изучена линейная и нелинейная динамика возмущений периодического течения (4.4). Подчеркнем, что нелинейный член задачи содержится только в граничном условии и описывает нелинейную адвекцию приземного поля плавучести.

### 5. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Как и ранее, для описания линейной динамики возмущений используем метод Галеркина с тремя базисными функциями  $f_1 = \sin y$ ,  $f_2 = \cos y$ ,  $f_3 = 1$  по поперечной координате  $y$ . Согласно этому методу, приближенное решение для возмущений ищется в форме разложения по базисным функциям

$$\psi = A(x, z, t) \sin y + B(x, z, t) \cos y + C(x, z, t). \quad (5.1)$$

В силу уравнения Лапласа (4.1), коэффициенты разложения удовлетворяют уравнениям

$$A_{xx} + A_{zz} - A = 0, \quad B_{xx} + B_{zz} - B = 0, \quad C_{xx} + C_{zz} = 0. \quad (5.2)$$

Из линеаризованной формы условия (4.5) следуют также уравнения, связывающие распределения  $A$ ,  $B$ ,  $C$  на границе. Для получения этих уравнений запишем условие (4.5) в виде  $z = 0$ :  $L(\psi) = \psi_{zt} + \sin y (\psi_{xz} + \psi_x) + r \Delta_w \psi = 0$  и используем условия ортогональности  $\langle f_i(x) L(\psi) \rangle = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Здесь и далее угловыми скобками обозначена операция осреднения по периоду  $2\pi$ :  $\langle \phi \rangle = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \phi dy$ .

Учитывая (4.5), получим

$$L(\psi) = A_{zt} \sin y + B_{zt} \cos y + C_{zt} + \sin y (A_{xz} + A_x) \sin y + (B_{xz} + B_x) \cos y + (C_{xz} + C_x) + r((A_{xx} - A) \sin y + (B_{xx} - B) \cos y + C_{xx}). \quad (5.3)$$

Отсюда из условий ортогональности следуют уравнения

$$A_{zt} + (C_{xz} + C_x) + r(A_{xx} - A) = 0, \quad C_{zt} + (1/2)(A_{xz} + A_x) + rC_{xx} = 0. \quad (5.4)$$

К этим уравнениям присоединяется изолированное уравнение

$$B_{zt} = r(B_{xx} - B) = 0, \quad (5.5)$$

имеющее только затухающие со временем решения, в частности  $B = 0$ . Условия (5.4) рассматриваются при  $z = 0$ .

Гармонические по координате  $x$  решения уравнений (25) можно записать в виде

$$A = a(t) e^{-k_1 z} \sin(kx), \quad C = c(t) e^{-kz} \cos kx, \quad B = 0, \quad (5.6)$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 + 1}$ . Подстановка (5.6) в условия (5.4) при  $z = 0$  приводит к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_t(t) + k_1^{-1} k(1 - k)c(t) + rk_1^{-1} (k^2 + 1) a = 0, \quad (5.7)$$

$$c_t(t) + (1/2)(k_1 - 1)a(t) + rkc = 0.$$

Эта система имеет экспоненциально нарастающие со временем решения. Полагая  $a = Ae^{\lambda t}$ ,  $c = Ce^{\lambda t}$  из (5.7) получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda + rk_1^{-1}(k^2 + 1))A + k_1^{-1}k(1 - k)C &= 0, \\ (1/2)(k_1 - 1)A + (\lambda + rk)C &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, для инкремента нарастания получим квадратное уравнение

$$\lambda^2 + rk_1^{-1}((k^2 + 1) + rk)\lambda + r^2k_1^{-1}(k^2 + 1)k - (1/2)k_1^{-1}k(1 - k)(k_1 - 1) = 0. \tag{5.8}$$

Условие равенства нулю свободного члена этого уравнения дает граничное значение  $r$ , определяющее возникновение неустойчивости

$$r^{-2} = r_c^{-2}(k) = \frac{2(k^2 + 1)}{(1 - k)(k_1 - 1)}.$$

Неустойчивость существует если  $r^{-2} > r_c^{-2}(k)$ , или, что эквивалентно,  $(1 - k)(k_1 - 1)/2(k^2 + 1) < r_c$ . График зависимости  $r^{-2} = r_c^{-2}(k)$ , представлен на рис. 5. Неустойчивости отвечают значения  $k$ , лежащие выше этой кривой, имеющей форму потенциальной ямы.

### 6. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ

Опишем теперь нелинейную динамику возмущений в присутствии трения. Для описания также используем метод Галеркина с тремя базисными функциями. Преимущество этого метода состоит в том, что с его помощью можно относительно легко построить приближенное решение этой нелинейной задачи.

Как и ранее, будем искать приближенное решение в форме разложения (5.1), где коэффициенты разложения удовлетворяют линейным уравнениям (5.2), следующим из уравнения Лапласа (4.1). Для получения нелинейных уравнений на границе  $z = 0$  преобразуем условие (4.5). Линейная часть  $L(\psi)$  этого условия дается выражением (5.1). Прямое вычисление нелинейного члена дает

$$[\psi, \psi_z] = (1/2)(BA_z - AB_z)_x + (BC_{xz} - C_xB_z) \sin y + (C_xA_z - AC_{xz}) \cos y + F(\sin 2y, \cos 2y),$$

где через  $F(\sin 2y, \cos 2y)$  обозначена линейная комбинация тригонометрических функций двойного аргумента. Подстановка этого выражения и  $L(\psi)$  (5.3) в (4.5), с последующим использованием условий ортогональности, приводит к нелинейной системе уравнений на границе

$z = 0$ :

$$\begin{aligned} A_{zt} + (B + 1)C_{xz} + (1 - B_z)C_x - r(A_{xx} - A) &= 0, \\ C_{zt} + (1/2)((B + 1)A_z + (1 - B_z)A)_x + rC_{xx} &= 0, \\ B_{zt} + C_xA_z - AC_{xz} + r(B_x x - B) &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Линеаризованный вариант (6.1), очевидно, сводится к граничным уравнениям (5.4).

Будем искать приближенные решения уравнений (4.1), (6.1) вида

$$A = a(t)e^{-k_1 z} \sin(kx), \quad C = c(t)e^{-kz} \cos(kx), \quad B = b(t)e^{-2}, \tag{6.2}$$

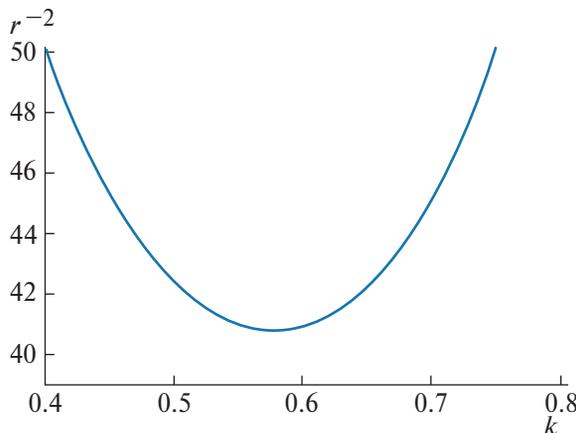


Рис. 5. Кривая нейтральной устойчивости.

где  $k_1 = \sqrt{k^2 + 1}$ . Для выбранной формы решений уравнение (4.1) точно удовлетворяются, а граничные уравнения (6.1) сводятся к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям без всяких аппроксимаций. Как и ранее, введем операцию осреднения по горизонтальной координате  $\langle \phi \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \phi dx$ ,

$L = \frac{2\pi}{k}$  и для выбранной формы решения вычислим осредненный нелинейный член последнего уравнения (6.1):  $\langle (C_x A_z - AC_{xz}) \rangle = (1/2)k(k_1 - k)ac$ . Из последнего выражения следует, что приближенное решение для коэффициента  $B$  должно зависеть только от времени и вертикальной координаты, что учтено в (6.2). Обозначая для краткости  $b = b + 1$ , таким образом, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для описания нелинейной динамики возмущений

$$a_t + abc + rk_1^{-1}(k^2 + 1)a = 0, \quad c_t + \gamma ba + rkc = 0, \quad b_t - \beta ac + r(b - 1) = 0. \quad (6.3)$$

Здесь обозначено

$$\alpha = \frac{k(1 - k)}{k_1}, \quad \gamma = \frac{k_1 - 1}{2}, \quad \beta = \frac{k(k_1 - k)}{2}. \quad (6.4)$$

Отметим, что в отсутствие трения нелинейная система (6.3) аналогична системе, описывающей движение симметричного волчка в механике (или движение жидкости в эллипсоидальной полости). Вытекающие из (6.3) законы сохранения

$$\frac{d}{dt}(\gamma a^2 - \alpha c^2) = 0, \quad \frac{d}{dt}(\beta a^2 - \alpha b^2) = 0,$$

позволяют аналитически проинтегрировать систему [27–29]. Соответствующее решение описывает нелинейные колебания, аналогичные колебаниям, описанным ранее для баротропной модели.

Важная особенность нелинейной системы (6.3) в модели с трением состоит в том, что стационарный вариант системы

$$abc + rk_1^{-1}(k^2 + 1)a = 0, \quad \gamma ba + rkc = 0, \quad -\beta ac + r(b - 1) = 0 \quad (6.5)$$

имеет точное стационарное решение. Действительно, из второго уравнения (6.3) следует  $c = -\gamma ba/rk$ . Подставляя это выражение в первое уравнение, после сокращения на  $a$  получим  $b^2 = r^2 k_1^{-1} k (k^2 + 1) / \alpha \gamma$ , или  $b = \pm r \sqrt{k_1^{-1} k (k^2 + 1) / \alpha \gamma}$ . Теперь подставим значение  $v$  в последнее уравнение. Получим  $a^2 = r^2 k \times (b^{-1} - 1) / \beta \gamma$ , или  $a = \pm r \sqrt{k (b^{-1} - 1) / \beta \gamma}$ . Приведенные выражения однозначно определяют координаты двух неподвижных стационарных точек системы (6.3). Для значений  $r = 0.115$ ,  $k = 0.6$  вычисления дают  $b = \pm 0.736$ ,  $a = \pm 0.45$ ,  $c = \pm 0.40$ .

Как показывают расчеты при малых, но конечных значениях  $r$  взамен колебаний реализуется режим установления стационарных периодических решений с амплитудами (неподвижными точками), следующими из системы (6.4). Пример численного решения нелинейной системы (6.3) для значений  $r = 0.115$ ,  $k = 0.6$  и начальных условий  $a(0) = 0.5$ ,  $c(0) = 0.5$ ,  $b(0) = 1$  показан на рис. 6.

Результаты расчетов показывает, что указанные неподвижные точки являются устойчивыми. Независимо от выбора начальных условий все решения системы стремятся к одной из двух неподвижных точек. Это свидетельствует об устойчивости неподвижных точек без привлечения аналитических критериев устойчивости.

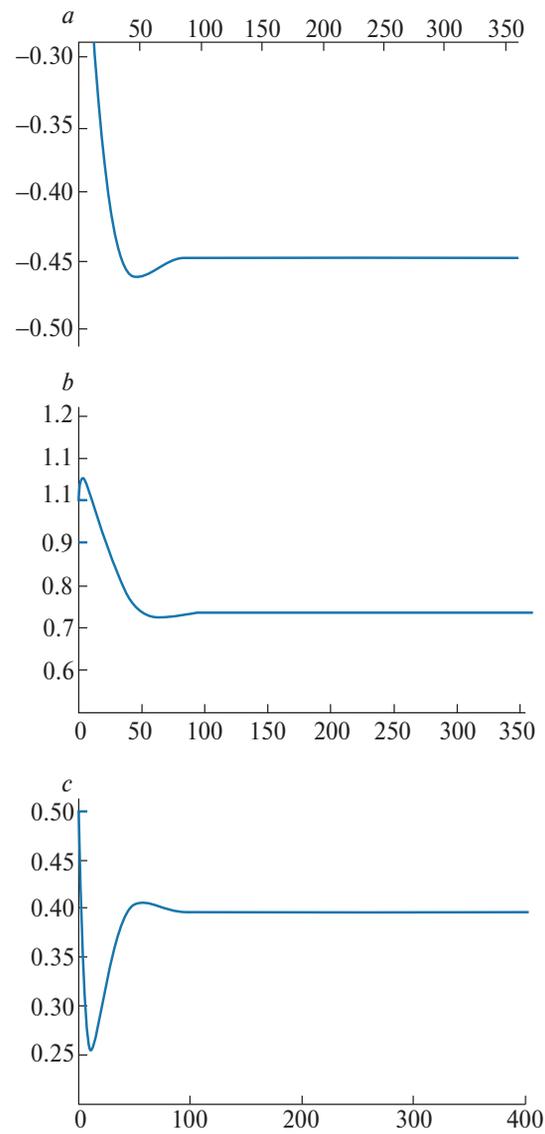
Таким образом, развитие нелинейной неустойчивости приводит к формированию в периодическом зональном потоке системы замкнутых стационарных вихревых ячеек. При наличии ячеек, функция тока течения определяется выражением  $\psi = a(t)e^{-kz} \sin(kx) \sin y + b(t)e^{-z} \cos y + c(t)e^{-kz} \cos(kx)$  или, в предельном случае, на нижней границе  $z = 0$  для значений параметров  $r = 0.115$ ,  $k = 0.6$

$$\psi = -0.45 \sin(kx) \sin y + 0.736 \cos y + 0.4 \cos(kx). \quad (6.6)$$

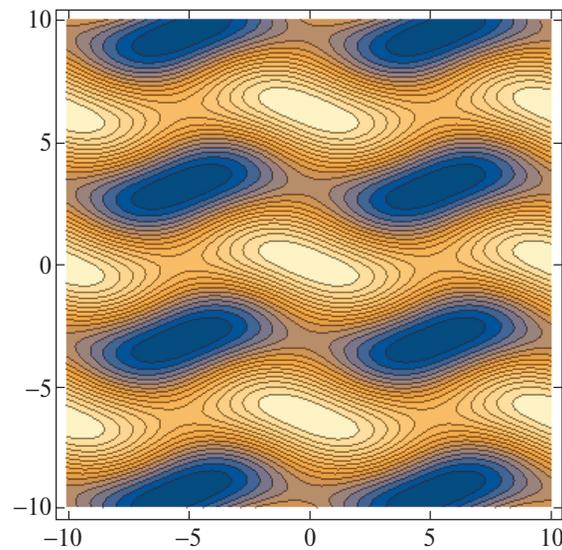
Изолинии функции тока (6.6) показаны на рис. 7. Как и в модели с отсутствием стратификации изолинии данной функции наклонены по потоку. Стратификация приводит к уменьшению длины предельной волны в поперечном направлении.

Как и ранее, модуль осредненной по горизонтальной координате скорости течения в присутствии ячеек меньше модуля скорости основного течения. Если обозначит угловыми скобками осредненную по горизонтали скорость, то для основного течения  $\langle U \rangle = 1$ , а для течения с ячейками, согласно (6.6),  $\langle U \rangle = 0.736$ . Формирование вихревых ячеек, опять, приводит к уменьшению модуля средней скорости течения.

Подчеркнем, что для описания нелинейной динамики возмущений мы использовали модель Галеркина с тремя модами. Как показано в работе [27], увеличение числа мод не приводит к качественно новым ре-



**Рис. 6.** Пример численного решения системы (6.3) для значений  $r = 0.115$ ,  $k = 0.6$  и начальных условий  $a(0) = 0.5$ ,  $c(0) = 0.5$ ,  $b(0) = 1$ .



**Рис. 7.** Изолинии функции тока (6.6), устанавливающиеся в результате неустойчивости.

зультатам. Модель с тремя модами также дает хорошее приближение для численных значений критических параметров.

Следует также отметить, что течения стратифицированной среды периодической или квазипериодической структуры достаточно часто наблюдаются в атмосферах планет. Так, по данным наблюдений распределение скорости зональных течений по широте в атмосфере Юпитера носит практически периодический характер.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована устойчивость пространственно периодических течений однородной и стратифицированной жидкости с учетом придонного трения. Для решения задачи устойчивости использован метод Галеркина с тремя базисными фурье-гармониками. Сформулирована система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд фурье-гармоник. На основе численного решения этой системы в предшествующих работах авторов было показано, что в модели без трения развитие неустойчивости течений приводит к режиму установления колебаний или васцилляций. В настоящей работе показано, что ситуация принципиально меняется при учете трения. Экспоненциальный рост линейных возмущений на нелинейной стадии развития сменяется режимом установления стационарных периодических возмущений. Эти возмущения уменьшают осредненную горизонтальную скорость течения. Получены аналитические выражения для пространственного периода и амплитуды возмущений.

Полученные теоретические результаты для течения Колмогорова согласуются с описанием результатов экспериментов, представленных в [16], после прохождения критического значения числа Рейнольдса  $Re$  однонаправленное течение становится неустойчивым, и возникает вторичное течение в виде регулярной системы стационарных вихрей. С ростом  $Re$  стационарное течение становится неустойчивым и возникают периодические колебания. Таким образом, результаты достаточно простой теоретической модели с тремя модами хорошо согласуются с экспериментом.

Автор благодарит О.Г. Чхетиани за полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 23-17-00273).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
2. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 2. 415 с.
3. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоздат, 1988. 433 с.
4. Обухов А.М. Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование // УМН. 1983. Т. 38. Вып. 4 (232). С. 101–111.
5. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука. 1981. 366 с.
6. Thess A. Instabilities in two-dimensional spatial periodic flows. Part I: Kolmogorov flow // Phys. Fluids A. 1992. V. 4 (7). P. 1385–1395.
7. Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // ПММ. 1961. Т. 25. № 6. С. 1700–1705.
8. Gotoh K., Yamada M., Mizushima Y. The theory of stability of spatially periodic flows // J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 45–58.
9. Beaumont D. The stability of spatially periodic flows // J. Fluid Mech. 1981. V. 108. P. 461–474.
10. Батчаев А.М., Курганский М.В. О неустойчивости периодического сдвигового течения слабостратифицированной жидкости // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. № 1. С. 3–9.
11. Balmforth N.J., Young Y.N. Stratified Kolmogorov flow // J. Fluid Mech. 2002. V. 450. P. 131–167.
12. Manfroi A, Young W. Stability of  $\beta$ -plane Kolmogorov flow // Phys. D. 2002. V. 162. P. 208–232.
13. Matsuda M. Stability of the basic solution of Kolmogorov flow with a bottom friction // Tokyo J. Math. 2010. V. 33. P. 65–72.
14. Lucas D., Kerswell R. Spatiotemporal dynamics in two dimensional Kolmogorov flow over large domains // J. Fluid. Mech. 2014. V. 750. P. 518–554.
15. Kim S., Okamoto H. Unimodal patterns appearing in the Kolmogorov flows at large Reynolds numbers // Nonlinearity. 2015. V. 28. P. 3219–3242.
16. Sivashinsky G. Weak turbulence in periodic flows // Phys. D. 1985. No. 17. P. 243–255.
17. Sivashinsky G., Yakhot V. Negative viscosity effect in large scale flows // Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 1040–1042.
18. Kalashnik M., Kurgansky M. Nonlinear dynamics of long-wave perturbations of the Kolmogorov flow for large Reynolds numbers // Ocean Dyn. 2018. V. 68. P. 1001–1012.

19. *Boffetta G., Celani A., Mazzino A.* Drag reduction in the turbulent Kolmogorov flow // *Phys Rev. E*. V. 71. 2005. 036307.
20. *Kalashnik M.V., Kurgansky M.V.* Nonlinear Oscillations in a Two-Dimensional Spatially Periodic Flow // *Eur. Phys. J. Plus*. 2024. V. 139. No. 2. P. 1–11.
21. *Blumen W.* Uniform potential vorticity flow: part I. Theory of wave interactions and two dimensional turbulence // *J. Atmos. Sci.* 1978. V. 35. P. 774–783.
22. *Held I.M., Pierrehumbert R.T., Garner S.T., Swanson K.L.* Surface quasi-geostrophic dynamics // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 282. P. 1–20.
23. *Pedlosky J.* *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag. Berlin. New York. 1987. 710 p.
24. *Lapeyre G., Klein P.* Dynamics of the upper oceanic layers in terms of surface quasigeostrophy theory // *J. Phys. Oceanogr.* 2006. V. 36. P. 165–176.
25. *Badin G.* Surface semi-geostrophic dynamics in the ocean // *J. Fluid Dyn.* 2013. 107. P. 526–540.
26. *Harvey B., Ambaum M.* Instability of surface temperature filaments in strain and shear // *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 2010. V. 136. P. 1506–1513.
27. *Kalashnik M.V., Kurgansky M.V., Kostykin S.V.* Instability of surface quasigeostrophic spatially periodic flows // *J. Atmos. Sci.* 2020. V. 77. P. 239–255.
28. *Kalashnik M.V., Chkhetiani O.G., Kurgansky M.V.* Discrete SQG models with two boundaries and baroclinic instability of jet flows // *Phys. Fluids*. 2021. V. 33. 076608.
29. *Калашник М.В., Курганский М.В., Чхетиани О.Г.* Бароклиническая неустойчивость в геофизической гидродинамике // *УФН*. 2022. Т. 192. № 10. С. 1110–1144.

## Hydrodynamic Instability of Spatially Periodic Flows of Homogeneous and Stratified Fluid with Regard for Friction. Formation of Steady-State Vortex Disturbances

© 2025 M. V. Kalashnik\*

*Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

\*e-mail: kalashnik-obn@mail.ru

The stability of spatially periodic flows of homogeneous and stratified fluid is investigated with regard for bottom friction. The Galerkin method with three basis Fourier harmonics is used to solve the stability problem. A system of ordinary differential equations for the amplitudes of the Fourier harmonics is formulated. A solution to the linearized version of the system is obtained and an expression for the increment of disturbance growth is found. It is established that at the nonlinear stage of development the exponential growth of linear disturbances is replaced by the regime of establishing steady-state periodic disturbances in form of closed cells. These disturbances reduce the averaged horizontal velocity of the flow. Analytical expressions for the spatial period and amplitude of steady-state disturbances are obtained.

*Keywords:* hydrodynamic instability, bottom friction, growth rate, vortex cells