

УДК 532.522

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ ЛАМИНАРНЫХ СТРУЙ

© 2025 г. А. М. Гайфуллин*, А. С. Щеглов**

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, Жуковский, Россия

*e-mail: gaifullin@tsagi.ru

**e-mail: shcheglov@phystech.edu

Поступила в редакцию 10.03.2025 г.

После доработки 21.03.2025 г.

Принята к публикации 23.03.2025 г.

Рассмотрены задачи о ламинарных струях, допускающие автомодельные решения. Предложен способ определения параметра автомодельности, исходя из условия существования решения уравнений в автомодельных переменных при заданных граничных условиях только при одном параметре автомодельности. Параметры автомодельности в задачах о плоских свободной и пристенной струях определены аналитически. Определение параметра автомодельности в задаче о трехмерной пристенной струе осуществляется с помощью нейронной сети.

Ключевые слова: пристенные струи, автомодельность, параметр автомодельности, нейронные сети, ламинарная струя

DOI: 10.31857/S1024708425030034

В классических задачах о распространении плоской и осесимметричной струй, вытекающих из тонкой щели или точечного источника в затопленное пространство, параметр автомодельности для решения уравнений пограничного слоя определяется из анализа инвариантов струйного течения: потока импульса струи [1–3]. В задаче о распространении плоской пристенной струи параметр автомодельности определяется из инварианта Акатнова [4, 5]. Для трехмерной пристенной струи аналогичный инвариант неизвестен, и для определения параметра автомодельности строится численное решение трехмерной задачи [6].

Предположение об автомодельности решения, даже с неизвестным показателем автомодельности, позволяет понизить порядок уравнений. Возможно ли при этом определение параметра автомодельности, исходя из анализа этих автомодельных уравнений? Оказалось, что по крайней мере для упомянутых выше струйных течений это возможно. Такая возможность будет продемонстрирована в статье на примерах ламинарных плоской свободной и плоской пристенной струй, а также для трехмерной ламинарной пристенной струи. Во всех случаях жидкость предполагается несжимаемой.

1. ПЛОСКАЯ ЛАМИНАРНАЯ ЗАТОПЛЕННАЯ СТРУЯ

В рамках уравнений пограничного слоя для плоской свободной струи справедливы уравнения [2]

$$\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = \nu \psi_{yyy} \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$\psi = 0, \quad \psi_{yy} = 0 \quad (y = 0), \quad \psi_y \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \pm\infty). \quad (1.2)$$

Ось x направлена по оси симметрии струи, бьющей из начала координат, ψ — функция тока, ν — кинематический коэффициент вязкости, нижние индексы здесь и в дальнейшем указывают на соответствующие частные производные.

Обычно автомодельный вид решения определяется из условия сохранения в направлении оси x потока импульса $J = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy = \text{const}$, где ρ — плотность, u — продольная компонента скорости. Но возможен и другой путь. Представим решение в автомодельном виде с неизвестным показателем автомодельности k

$$\psi = \nu^{1/2} x^{1-k} f(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\nu^{1/2} x^k}. \quad (1.3)$$

Подстановка (1.3) в (1.1), (1.2) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению (штрих означает дифференцирование по η)

$$f''' + (1 - k)f f'' + (2k - 1)f'^2 = 0 \quad (1.4)$$

с граничными условиями

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad f'(\pm\infty) \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Покажем, что нетривиальное решение задачи (1.4), (1.5) существует только при $k = 2/3$. Порядок уравнения (1.4) можно понизить, если ввести новую функцию $f' = \lambda(f)$

$$\frac{d}{df} \left(\lambda \frac{d\lambda}{df} \right) + (1 - k)f \frac{d\lambda}{df} + (2k - 1)\lambda = 0. \quad (1.6)$$

Проинтегрировав (1.6) по f от нуля до максимальной функции тока, получим

$$\left[\lambda \frac{d\lambda}{df} + (1 - k)f\lambda \right] \Big|_0^{f_{\max}} + (3k - 2) \int_0^{f_{\max}} \lambda df = 0. \quad (1.7)$$

Выражение в квадратных скобках в силу граничных условий равно нулю. Что касается $\int_0^{f_{\max}} \lambda df$, то из физического условия отсутствия в струе отрицательной продольной (вдоль оси x) компоненты скорости подынтегральное выражение является положительным. Единственная возможность удовлетворить условию (1.7) — положить $k = 2/3$.

2. ПЛОСКАЯ ЛАМИНАРНАЯ ПРИСТЕННАЯ СТРУЯ

Для описания плоской ламинарной пристенной струи — струи, бьющей из тонкой щели параллельно бесконечной твердой плоскости, в рамках уравнений пограничного слоя остается справедливым уравнение (1.1), но с другими граничными условиями [4, 8]

$$\psi = 0, \quad \psi_y = 0 \quad (y = 0), \quad \psi_y \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow +\infty). \quad (2.1)$$

Параметр автомодельности для задачи (1.1), (2.1) определяется из условия сохранения инварианта Акатнова $E = \int_0^{+\infty} \psi u^2 dy = \text{const}$. Как и в предыдущем пункте, опишем другой путь.

Для задачи (1.1), (2.1) справедливо уравнение (1.6), но, если проинтегрировать его так же, как это сделано в (1.7), то выражение в квадратных скобках оказывается для данного случая не равным нулю. Поэтому умножим уравнение (1.6) на f

$$f \frac{d}{df} \left(\lambda \frac{d\lambda}{df} \right) + (1 - k)f^2 \frac{d\lambda}{df} + (2k - 1)\lambda f = 0$$

и после этого проинтегрируем его по f от нуля до максимальной функции тока

$$\left[\lambda f \frac{d\lambda}{df} - \frac{\lambda^2}{2} + (1 - k)f^2 \lambda \right] \Big|_0^{f_{\max}} + (4k - 3) \int_0^{f_{\max}} \lambda f df = 0. \quad (2.2)$$

Теперь выражение в квадратных скобках равно нулю, подынтегральное выражение положительно, и единственная возможность выполнить равенство (2.2) — положить $k = 3/4$.

3. ТРЕХМЕРНАЯ ЛАМИНАРНАЯ ПРИСТЕННАЯ СТРУЯ

Будем считать, что трехмерная струя бьет из точки параллельно бесконечной твердой плоскости. Введем декартову систему координат (x, y, z) с осью x , направленной вдоль линии выдува струи и лежащей на твердой плоскости (рис. 1), соответствует точке выдува струи, (u, v, w) — компоненты скорости во введенной системе координат, ρ — плотность, p/ρ — давление.

Характеристики течения в струе подчиняются параболизированным уравнениям Навье—Стокса [6]

$$\begin{aligned} u_x + v_y + w_z &= 0, \\ uu_x + vu_y + wu_z &= \nu(u_{yy} + u_{zz}), \\ uv_x + vv_y + wv_z &= -p_y + \nu(v_{yy} + v_{zz}), \\ uw_x + vw_y + ww_z &= -p_z + \nu(w_{yy} + w_{zz}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

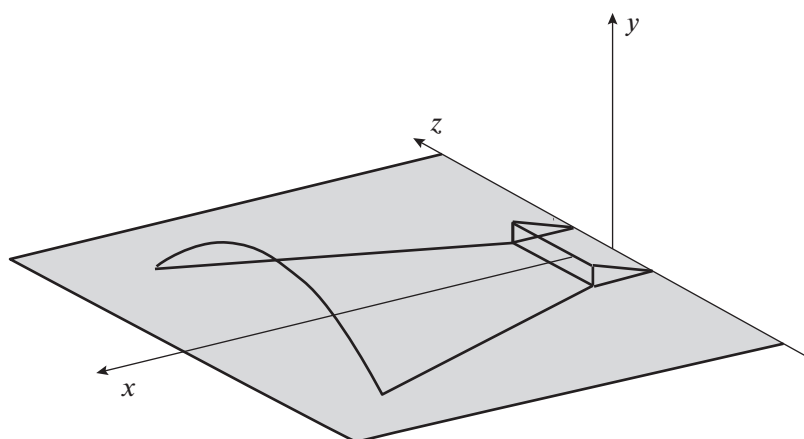


Рис. 1. Система координат и схема задачи.

Для трехмерной ламинарной пристенной струи инварианты неизвестны, поэтому неизвестно и каким условиям должна удовлетворять струя в точке истечения. Во избежание такой неопределенности можно считать, что струя с конечной скоростью выдувается из малого круглого отверстия, находящегося на небольшой высоте от твердой плоскости, и рассматривать характеристики струи в дальнем поле.

Система уравнений (3.1) допускает автомодельное решение, если

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \nu^{1-2\alpha} x^{1-2k} U(\eta, \zeta), & v(x, y, z) &= \nu^{1-\alpha} x^{-k} V(\eta, \zeta), \\ w(x, y, z) &= \nu^{1-\alpha} x^{-k} W(\eta, \zeta), & p(x, y, z) &= \nu^{2-2\alpha} x^{-2k} P(\eta, \zeta). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $\eta = y/\nu^\alpha k^k$, $\zeta = z/\nu^\alpha x^k$, α — неизвестная константа, k — искомый показатель автомодельности. Подстановка представления (3.2) в систему уравнений (3.1) определяет четыре уравнения в частных производных для функций $U(\eta, \zeta)$, $V(\eta, \zeta)$, $W(\eta, \zeta)$, $P(\eta, \zeta)$, которые обозначим через f_i , $1 \leq i \leq 4$

$$\begin{aligned} f_1(\eta, \zeta) &= (1 - 2k)U - k\eta U_\eta - k\zeta U_\zeta + V_\eta + W_\zeta = 0, \\ f_2(\eta, \zeta) &= [(1 - 2k)U - k\eta U_\eta - k\zeta U_\zeta] U + VU_\eta + WU_\zeta - U_{\eta\eta} - U_{\zeta\zeta} = 0, \\ f_3(\eta, \zeta) &= -k[V + \eta V_\eta + \zeta V_\zeta] U + VV_\eta + WV_\zeta + P_\eta - V_{\eta\eta} - V_{\zeta\zeta} = 0, \\ f_4(\eta, \zeta) &= -k[W + \eta W_\eta + \zeta W_\zeta] U + VW_\eta + WW_\zeta + P_\zeta - W_{\eta\eta} - W_{\zeta\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из условия симметрии систему уравнений (3.3) достаточно рассмотреть при $\zeta \geq 0$. Определим граничные условия для (3.3). На твердой поверхности ставится условие прилипания

$$U = V = W = 0 \quad (\eta = 0). \quad (3.4)$$

На линии симметрии

$$U_\zeta = V_\zeta = W = 0 \quad (\zeta = 0). \quad (3.5)$$

На большом радиальном расстоянии ($r = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} \rightarrow \infty$) от оси x справедливо асимптотическое разложение [6], из которого следует, что для осевой компоненты скорости следует ставить условие затухания, а для поперечных компонент скорости из-за подсасывающего действия струи сохраняется величина расхода (в цилиндрической системе координат произведение радиальной компоненты скорости на радиус стремится к постоянной величине, а азимутальная компонента скорости стремится к нулю)

$$U \rightarrow 0, \quad (V\eta + W\zeta)_r \rightarrow 0, \quad \frac{V\zeta - W\eta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow +\infty, \eta \neq 0). \quad (3.6)$$

Параметр автомодельности k должен определяться из совместности уравнения (3.3) с граничными условиями (3.4)–(3.6). Таким образом, константа k будет определяться не из решения трехмерной задачи (3.2), как это сделано в работе [6], а из решения двумерной задачи (3.3)–(3.6).

Аналитически определить параметр k аналогично тому, как это сделано в предыдущих двух пунктах, не удалось, поэтому этот параметр будет определяться численно. Следует отметить, что применение к уравнениям (3.3) стандартных методов расчета уравнений в частных производных, каковыми являются, например, методы конечных разностей или конечных объемов, затруднительно. Дело в том, что все граничные условия нулевые, а система уравнений (3.3) имеет тривиальное решение: $U = V = W = 0$. Кроме того, параметр k неизвестен, а при любом неправильно заданном k система (3.3)–(3.6) не имеет решения.

Предлагается следующий способ решения уравнений (3.3)–(3.6). Они будут решаться при различных k с помощью физически-информированной нейронной сети (PINN) [9]. Будут использоваться полносвязные сети, имеющие N внутренних слоев и по 20 элементов (нейронов) в каждом слое (рис. 2). Для всех внутренних слоев применяется функция активации $\sigma(x) = \text{th}(x)$, y_0 — входной вектор, $y_1, \dots, y_N$ — векторы внутреннего состояния, y_{N+1} — выходной вектор, $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_{N+1}$ — неизвестные матрицы весов, $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{N+1}$ — неизвестные векторы смещений. Эти параметры должны быть найдены в процессе обучения нейронной сети.

Целевая функция $R = R_1 + R_2$ состоит из двух частей: R_1 — функция потерь для управляющих уравнений по всем внутренним точкам области, R_2 — функция потерь по граничным точкам. Процесс обучения представляет следующую задачу минимизации:

$$\min_{\mathbf{W}, \mathbf{b}} R(\mathbf{W}, \mathbf{b}). \quad (3.7)$$

Минимизация проводится с помощью алгоритма LBFGS, реализованного в библиотеке pytorch.

Для решения поставленной задачи будем использовать выборку точек, состоящую из $n = (n_r - 1) \times n_\varphi + 1 = 57421$ точек (рис. 3). Распределение по углу равномерное в количестве $n_\varphi = 90$ точек, а по радиусу для $0 \leq r \leq 10$ также равномерное ($n_{r_1} = 500$ точек), а для $10 < r \leq r_{\max}$ интервал между радиусами растет с коэффициентом 1.03 ($n_{r_2} = 139$ точек), $n_1 = n_{r_1} + n_{r_2} = 639$, $r_{\max} = 50$.

Для получения нетривиального решения поставим дополнительное условие

$$U(\eta_*, \zeta_*) = U_*, \quad (3.8)$$

где $\eta_* = 0.4$, $\zeta_* = 0$, $U_* = 1$. Ни координаты точки η_* , ζ_* , ни величина навязанной скорости U_* в последнем условии не имеют значения, так как масштабированием функций и координат в (3.3) можно перевести данное условие в аналогичное другое.

Конкретизируем нейронную сеть. Примем $N = 4$, $y_0 = (\eta, \zeta)$, $y_{N+1} = (U, V, W, P)$, общее число параметров — 1824 (без учета k).

Первый член целевой функции

$$R_1 = \frac{1}{n_{in}} \sum_{i=1}^{n_{in}} (f_1^4(\eta_i, \zeta_i) + f_2^2(\eta_i, \zeta_i) + f_3^3(\eta_i, \zeta_i) + f_4^2(\eta_i, \zeta_i)).$$

Второй член

$$R_2 = \frac{1}{n_r} \sum_{i=1}^{n_r} [U^2(0, \zeta_i) + L^{-2}V^2(0, \zeta_i) + L^{-2}W^2(0, \zeta_i)] + \frac{1}{n_\varphi - 2} \sum_{i=2}^{n_\varphi-1} [U^2(\eta_i, \zeta_i) + L^{-2}V^2(\eta_i, \zeta_i) + L^{-2}W^2(\eta_i, \zeta_i)] \Big|_{r=r_{\max}} + \frac{1}{n_r - 1} \sum_{i=2}^{n_r} [L^2U^2(\eta_i, 0) + V_\zeta^2(\eta_i, 0) + L^{-2}W^2(\eta_i, 0)] + [U(\eta_*, \zeta_*) - U_*]^2.$$

Здесь $L = 1$ — единичный размер, введенный для соблюдения размерностей.

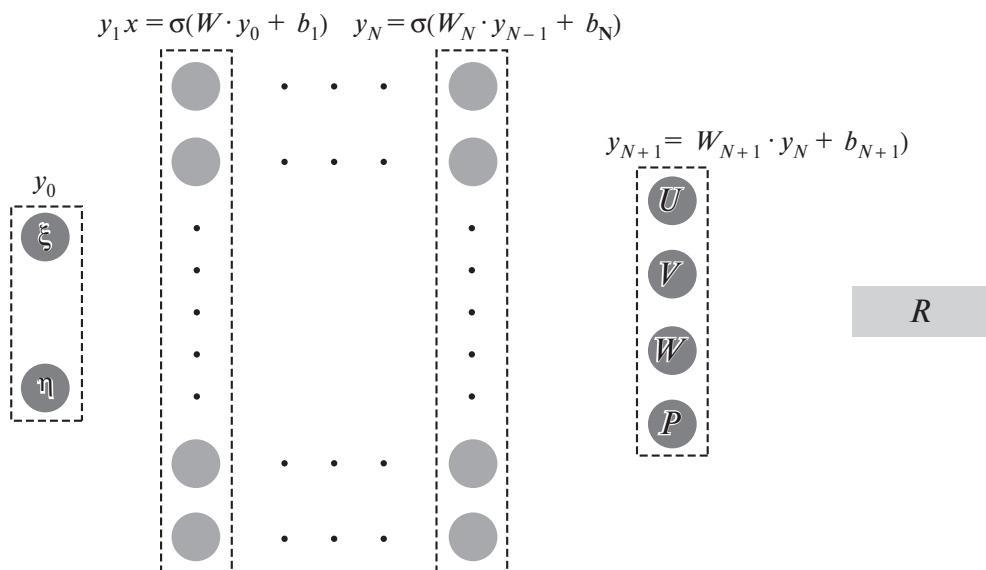


Рис. 2. Архитектура нейронной сети.

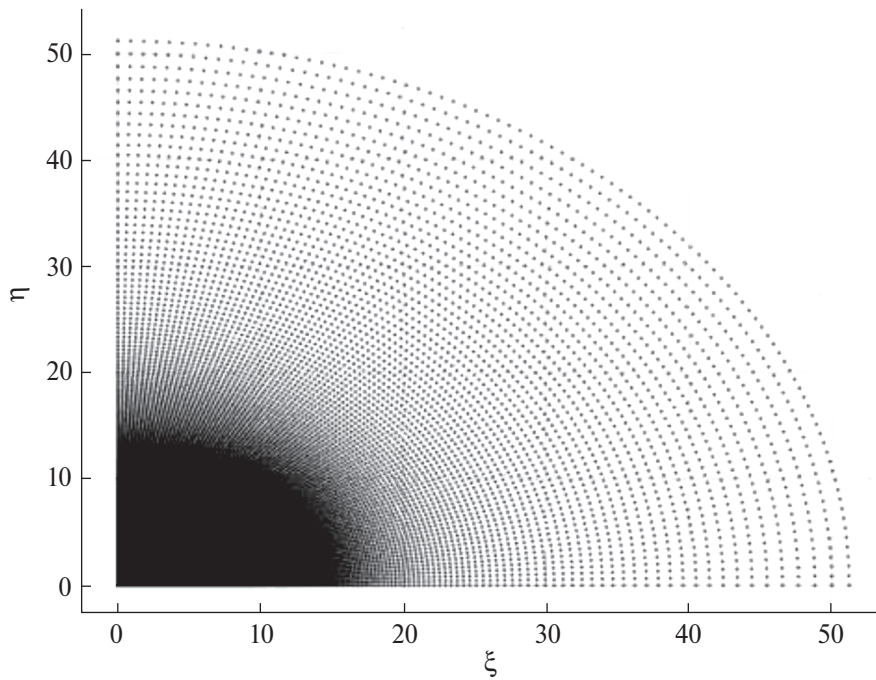


Рис. 3. Выборка точек, в которых проводится вычисление целевой функции R .

В последних формулах количество граничных точек вдоль оси ζ , как уже отмечалось, равно n_r , вдоль оси η также равно n_r , но точка $\zeta = \eta = 0$ уже была учтена в суммировании вдоль оси ζ ; вдоль окружности $r = r_{\max}$ количество граничных точек n_ϕ , при этом две точки уже были учтены при суммировании вдоль осей ζ и η , $n_{in} = n - (2n_r + n_\phi - 3) = 56056$ — количество внутренних точек.

В отличие от задачи (3.3)–(3.6), задача (3.3), (3.7), (3.8) будет иметь решение при любом параметре k . При этом решения при разных k будут отличаться значениями R . Выбор из всех значений R минимального позволяет определить искомый параметр k . Минимум достигается при $k \approx 1.363$, когда величина $R \approx 3 \cdot 10^{-6}$ близка к нулю. Отличие от нуля объясняется погрешностями численного решения.

Покажем, что при $k \approx 1.363$ решение задачи (3.3), (3.7), (3.8) близко к решению, полученному в [6].

На рис. 4 приведены линии тока поперечного течения, полученные в настоящей работе и определяемые уравнением

$$\frac{d\zeta}{W(\zeta, \eta)} = \frac{d\eta}{V(\zeta, \eta)}.$$

Эти линии наглядно характеризуют структуру течения в струе. Как и в работе [6], присутствует предельная линия тока, отделяющая область внутреннего течения (в которой линии тока направлены от центра

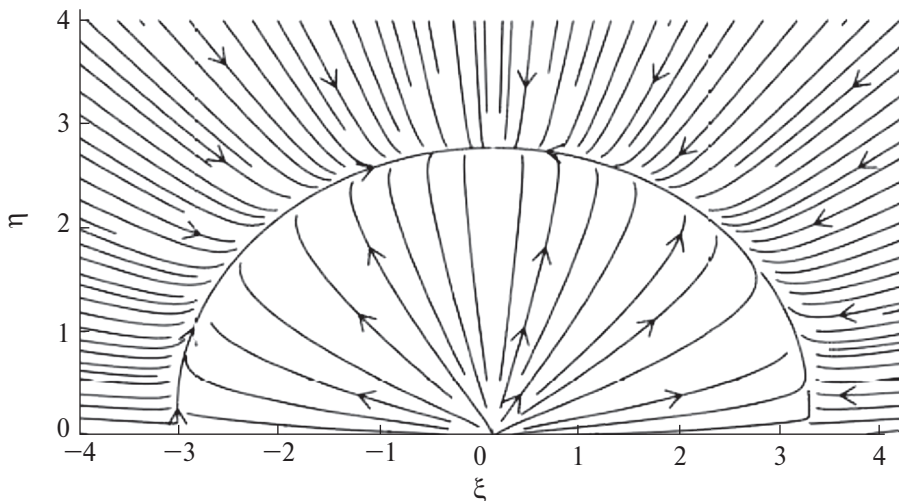


Рис. 4. Линии тока поперечного течения.

струи вследствие ее торможения) от области внешнего течения (в которой линии тока направлены к центру струи). Всюду за исключением окрестности предельной линии тока азимутальная компонента скорости много меньше радиальной.

На рис. 5 слева приведены профили скорости $U(\eta)$, построенные в плоскости симметрии $\zeta = 0$. Для того, чтобы профили данной работы можно было сравнивать с профилями работы [6], их необходимо построить в одних и тех же безразмерных переменных. В качестве безразмерной координаты выбрана $\eta/\eta_{1/2}$, где $\eta_{1/2}$ — значение координаты, при котором скорость достигает половины максимального значения, а в качестве безразмерной скорости — $U/U_{\max}$. На рис. 5 справа приведены аналогичные профили для вертикальной компоненты скорости V . Профили, полученные с помощью нейронной сети в настоящей работе (сплошные линии), находятся в близком соответствии с автомодельными профилями работы [6], полученными для $Re = 200$ (круглые маркеры).

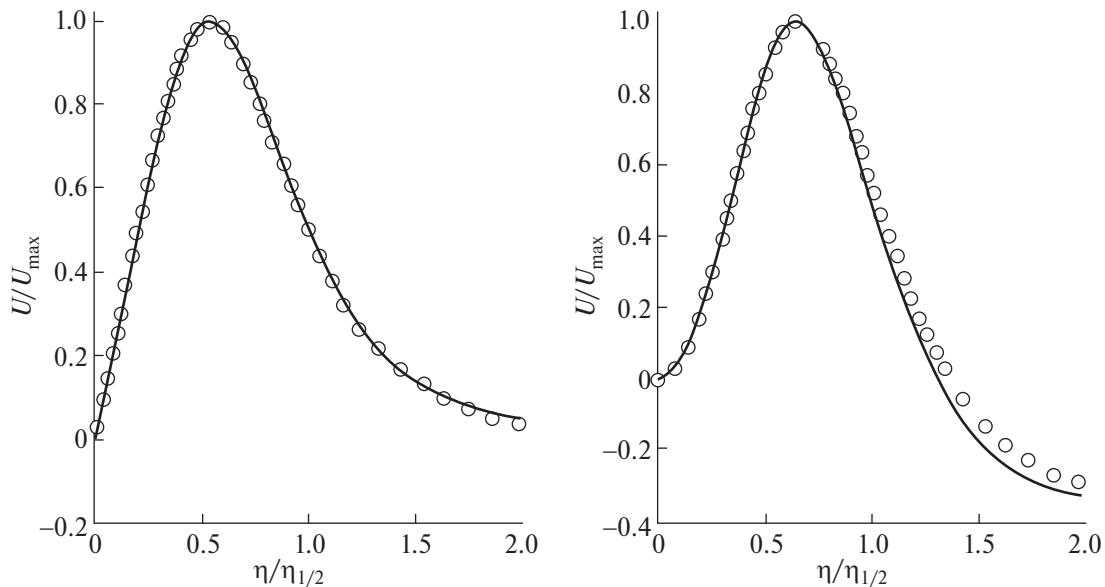


Рис. 5. Профили скорости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Течение в дальнем поле трехмерной пристенной струи выходит на автомодельный режим. Так как в отличие от свободных струй и от плоской пристенной струи, для трехмерной пристенной струи неизвестен инвариант, сохраняющийся в процессе ее эволюции, одной из возможностей определения показателя автомодельности является численное решение полной трехмерной задачи [6]. Вместе с тем имеется и вторая возможность: исходя из предположения, что решение задачи в автомодельных переменных существует только при одном значении показателя автомодельности, найти это решение. Такое решение трудно найти традиционными методами конечных разностей или конечных объемов, так как оно существует только при одном показателе автомодельности, который изначально неизвестен.

С помощью искусственных нейронных сетей возможно построение решения при любом показателе автомодельности, поскольку при этом не требуется точного удовлетворения всех уравнений и граничных условий, а требуется только, чтобы при заданном показателе автомодельности целевая функция ошибок была минимальной. Естественно, что при показателе автомодельности, равном показателю, при котором система с заданными граничными условиями имеет решение, целевая функция будет близка к нулю. Таким образом, физически реализуемый показатель автомодельности определяется исходя из минимума целевой функции.

Следует заметить, что определенный в данной работе показатель автомодельности для трехмерной пристенной струи $k \approx 1.363$ близок к полученному в работе [6] значению $4/3$, а также к полученному в [7] диапазону значений $1.32-1.33$.

Научное исследование выполнено за счет гранта российского научного фонда № 23-11-00210, <https://rscf.ru/project/23-11-00210/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schlichting H.* Laminare Strahlausbreitung // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1933. Jg. 13. No. 4. S. 260–263.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
3. *Bickley W.G.* LXXIII. The plane jet // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1937. V. 23. No. 156. P. 727–731.
4. *Акатнов Н.И.* Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твердой стенки // Тр. Ленинградского политех. ин-та. 1953. № 5. С. 24–31.
5. *Glauert M.B.* The wall jet // Journal of Fluid Mechanics. 1956. V. 1. No. 6. P. 625–643.
6. *Бут И.И., Гайфуллин А.М., Жвик В.В.* Дальнее поле трехмерной пристенной ламинарной струи // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 6. С. 51–61.
7. *Gaifullin A.M., Shcheglov A.S.* Self-Similarity of a Wall Jet with Swirl // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. V. 43. No. 5. P. 1098–1103.
8. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
9. *Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.* Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019. V. 378. P. 686–707.

On Self-Similarity of Laminar Jets

© 2025 A. M. Gaifullin* and A. S. Shcheglov**

*Zhukovski Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Moscow oblast, Russia**e-mail: gaifullin@tsagi.ru**e-mail: shcheglov@phystech.edu

The problems of laminar jets that admit self-similar solutions are considered. A method for determining the self-similarity parameter is proposed based on the condition of existence of a solution to equations in self-similar variables under given boundary conditions with only a single self-similarity parameter. In problems of plane free and wall jets the self-similarity parameters are determined analytically. In the problem of a three-dimensional wall jet, the self-similarity parameter is determined using a neural network.

Keywords: wall jets, self-similarity, self-similarity parameter, neural networks, laminar jet