

УДК 519.634; 533.6.011.8

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ЧЕРЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ КАНАЛОВ

© 2025 г. И. В. Воронич^{a,b,*}, В. А. Титарев^{a,b,**}, А. В. Кудряшов^{b,***}

^a Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

^b Московский физико-технический институт, Физтех, Долгопрудный, Московская область, Россия

* e-mail: voronich.iv@mipt.ru

** e-mail: vladimir.titarev@frcsc.ru

*** e-mail: kudriashov.av@mipt.ru

Поступила в редакцию 30.12.2024 г.

После доработки 10.03.2025 г.

Принята к публикации 21.03.2025 г.

В работе представлен анализ течения разреженного газа через плоскую периодическую систему прямоугольных каналов (мембрану) в широком диапазоне чисел Кнудсена. Задача исследована на основе численного решения кинетического уравнения с S -модельным интегралом столкновений Е.М. Шахова и уравнений Навье–Стокса сжимаемой среды. Основное внимание уделено расчету массового расхода в зависимости от проницаемости, относительной длины канала и параметра разрежения.

Ключевые слова: мембрана, канал, кинетическое уравнение, S -модель, разреженный газ, вычислительная аэродинамика

DOI: 10.31857/S1024708425030018

Области применения современных мембранных технологий включают фильтрацию (очистку) жидкостей, разделение газовых смесей, системы обнаружения компонент и другие. Современные технологии имеют дело с различными материалами упорядоченной и неупорядоченной структуры [1–5]. Геометрия мембраны характеризуется долей проективной площади и объема пор (геометрическая проницаемость), удлинением пор, формой пор в поперечном сечении и в продольном направлении. Использование современных технологий позволило добиться улучшения характеристик мембраны за счет увеличения количества пор на единицу площади [1]. В некоторых приложениях в качестве высокопроницаемых мембран используются обычные проволочные сетки для создания потока с заданными свойствами [6, 7].

Настоящая работа посвящена численному анализу плоского течения разреженного газа под действием перепада давления через периодическую систему коротких каналов, моделирующую плоскую мембрану. Основная цель — изучить влияние геометрической проницаемости и длины каналов, а также степени разрежения на массовый расход и характер течения. Для диапазона режимов течения от свободномолекулярного до околоконтинуального результаты основаны на численном решении кинетического уравнения с S -модельным интегралом столкновений Е.М. Шахова [8]. Для режимов, соответствующих сплошной среде, решение строится на основе полных уравнений Навье–Стокса сжимаемой среды.

Следует отметить, что рассмотренная постановка задачи существенно отличается от традиционной о течении газа через одиночный канал или трубу, соединяющий входной резервуар высокого давления и выходной резервуар низкого давления [9–15]. В численных исследованиях резервуары заменяются расчетной областью конечной длины, размер которой должен быть достаточно большим, чтобы скорость газа на границах вышележащей части была небольшой. Размер резервуара ниже по течению обычно менее важен, особенно при больших перепадах давления [16]. Однако в настоящей постановке резервуары имеют конечную высоту из-за периодической структуры, и для любого размера расчетной области скорость газа на границах всегда имеет конечное значение вследствие сохранения массы протекающего газа. Это обстоятельство создает определенные трудности при задании граничных условий, которые должны гарантировать фиксированное соотношение статических давлений в резервуарах, а также приводит к тому,

что стационарное решение существует не при любых условиях. Размер расчетной области должен быть достаточно большим в направлении потока.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течение одноатомного разреженного газа через щелевую мембрану, характеризующуюся геометрической проницаемостью

$$K = h/H \quad (1.1)$$

и относительной длиной пор

$$L_h = L/h. \quad (1.2)$$

Здесь h — полуввысота (радиус в цилиндрическом случае) поры, H — полупериод структуры. Введем декартову систему координат (x, y) с центром, расположенным в начале поры $x = y = 0$, и осью Ox , направленной вдоль поры (рис. 1). Газ течет за счет положительной разницы давлений $p_L - p_R$ между входной и выходной границами. Предполагается полная аккомодация импульса и энергии падающих молекул на поверхности поры, которая поддерживается при той же постоянной температуре, что и невозмущенный приток на бесконечности $T_w = T_L$. Вязкость выбрана в рамках модели твердых сфер $\mu \sim \sqrt{T}$.

Схематическое изображение схемы течения для типичных значений $K = 0.5$, $L_h = 2$ представлено на рис. 1. Отметим, что величина K представляет собой открытую часть площади проекции и не связана напрямую с физической проницаемостью. Частный случай $K = 0$ ($H = \infty$) соответствует обычному течению в плоском канале, соединяющем два бесконечно больших резервуара.

При заданных размерах, давлении притока p_L и температуре T_L режим течения можно охарактеризовать так называемым параметром разрежения δ , который определяется как

$$\delta = \frac{h p_L}{\mu_L \beta_L}. \quad (1.3)$$

Здесь $\beta_L = \sqrt{2RT_L}$ — наиболее вероятная тепловая скорость, R — газовая константа, μ_L — значение динамической вязкости газа при температуре $T = T_L$. Для модели твердых сфер

$$\delta = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \frac{1}{\text{Kn}},$$

где Kn — число Кнудсена.

Основной расчетной характеристикой течения является массовый расход \dot{M} (m — масса молекулы):

$$\dot{M}(x) = \int_{-h}^h m n u_x dy. \quad (1.4)$$

Целью нашей работы является изучение зависимости \dot{M} от относительной длины пор L_h , геометрической проницаемости K и параметра разрежения δ для одного выбранного значения перепада давлений $p_L/p_R = 2$.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Численный анализ течения основан на использовании как кинетического, так и континуального подходов. Ввиду специфики процедур численного решения основные уравнения записываются в полной трехмерной форме.

В кинетическом подходе стационарное состояние одноатомного разреженного газа определяется функцией распределения по скоростям $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ — пространственная координата,

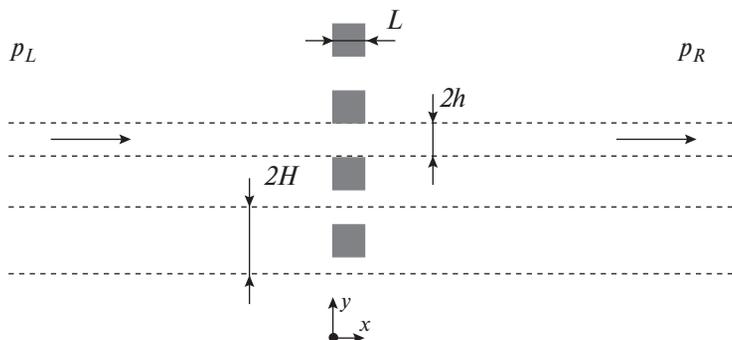


Рис. 1. Схематическое изображение течения для $K = 0.5$, $L_h = 2$.

$\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ — вектор скорости молекулы. Макроскопические величины, такие как плотность n , скорость $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, температура T и давление p определяются как интегралы от функции распределения по молекулярной скорости:

$$n = \int f d\xi, \quad n\mathbf{u} = \int f \xi d\xi, \quad \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}mnu^2 = \frac{1}{2} \int m\xi^2 f d\xi. \quad (2.1)$$

Здесь m — масса молекулы. Предполагается, что функция распределения f удовлетворяет S -модельному кинетическому уравнению [8]:

$$\xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \nu (f^{(S)} - f), \quad \nu = \frac{p}{\mu},$$

$$f^{(S)} = f_M \left(1 + \frac{4}{5}(1 - \text{Pr}) S_\alpha c_\alpha \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) \right), \quad f_M = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp(-c^2), \quad (2.2)$$

$$S_i = \frac{1}{n} \int c_i c^2 f d\xi, \quad c_i = \frac{u_i}{\sqrt{2RT}}, \quad c^2 = c_\alpha c_\alpha.$$

Здесь $\text{Pr} = 2/3$ — число Прандтля; предполагается суммирование по повторяющимся греческим индексам. Кинетическая S -модель широко использовалась при расчетах потоков разреженного газа в каналах и трубах и показала надежные результаты, см., например, обзорные работы [9, 17].

Кинетическое уравнение (2.2) необходимо дополнить граничными условиями на поверхности поры. Предполагается условие диффузного молекулярного рассеяния с полной тепловой аккомодацией к заданной температуре поверхности T_w . При этом плотность отраженных молекул n_w находится из условия непроницаемости.

В сплошнородном подходе течение газа описывается уравнениями Навье—Стокса сжимаемой среды, которые имеют вид законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \nabla \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{F}^v) = 0, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3), \quad \mathbf{F}^v = (\mathbf{F}_1^v, \mathbf{F}_2^v, \mathbf{F}_3^v), \quad (2.3)$$

где векторы независимых переменных \mathbf{U} , конвективных \mathbf{F} и вязких \mathbf{F}^v потоков имеют вид:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + \delta_{1k} p \\ \rho u_2 u_k + \delta_{2k} p \\ \rho u_3 u_k + \delta_{3k} p \\ (E + p) u_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_k^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{1k} \\ \tau_{2k} \\ \tau_{3k} \\ u_\alpha \tau_{\alpha k} - q_k \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера. Замыкающими соотношениями являются уравнение состояния совершенного газа, выражения для внутренней энергии, выражения для вектора теплового потока Фурье и напряжений:

$$p = \rho RT, \quad \rho = mn, \quad e = \frac{RT}{\gamma - 1}, \quad E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2,$$

$$\tau_{ik} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \text{div} \mathbf{u} \right), \quad q_k = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k},$$

где γ — коэффициент удельной теплоемкости. Коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ связаны между собой следующей формулой:

$$\lambda = \frac{c_p \mu}{\text{Pr}}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.$$

Наконец, на поверхность поры накладывается граничное условие прилипания и заданной температуры T_w .

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В расчетах бесконечная периодическая структура заменяется половиной одиночной поры с использованием свойств симметрии потока. Расчеты, проведенные для пакетов каналов, показали идентичность расхода и картины течения вблизи центрального канала по сравнению со случаем строго периодической постановки. Более подробно этот вопрос исследован в нашей работе [18]. Структура расчетной области и маркировка граничных условий показаны на рис. 2. Отрезок AH — граница притока (входа), FG — граница оттока (выхода), AB , EF и HG — линии симметрии, сегмент $BCDE$ представляет поверхность поры. Тогда линейные размеры равны соответственно $|AH| = |FG| = H$, $|CD| = L$, $|AH| - |BC| = h$.

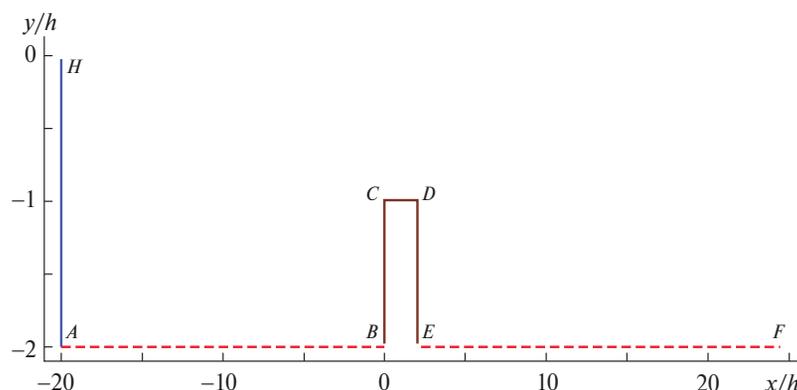


Рис. 2. Схематическое изображение типичной вычислительной постановки. Синяя линия (AH) — входная граница, зеленая линия (FG) — выходная граница, красные пунктирные линии (AB , EF) — линии симметрии, коричневая линия — поверхность поры.

Общая процедура расчета, применимая к обоим подходам, состоит из нескольких существенных элементов. Начальное поле течения задается постоянными значениями температуры, нулевой скорости и давления p_L для $x < 0$, p_R для $x > L$ с линейным распределением внутри поры. При расчете эволюции к стационарному состоянию граничные условия притока и оттока обновляются на каждом временном шаге следующим образом. Скорость и температура газа экстраполируются изнутри области потока, тогда как плотность рассчитывается с использованием заданного граничного давления и экстраполированной температуры. Решение считается сошедшимся при установлении расхода массы и падении нормы производной по времени от вектора неизвестных ниже заданного малого значения $\approx 10^{-5}$.

При получении решения кинетического уравнения в направлениях координаты x расчетная область имеет следующие размеры: $|AB| = (50 \dots 100)h$, $EF = (100 \dots 200)h$, что достаточно для расчета течения внутри поры и в следе. Относительно длинная ниже по потоку часть области за каналом необходима для обеспечения корректного функционирования граничного условия фиксированного давления. Это также гарантирует отсутствие нефизических краевых эффектов [19]. Количество ячеек поперек поры $-h \leq y \leq 0$ равнялось 25, размер первой ячейки по нормали к поверхности поры — $\Delta y = 0.01h$. Количество ячеек вдоль поры варьировалось от 50 при $L_h = 1$ до 400 для $L_h = 10$, размер ячейки в окрестности краев канала $\Delta x = 0.02h$. Количество узлов сетки в продольном направлении при $x < 0$ и $x > L$ составляло 200...300 ячеек.

Стационарное решение кинетического уравнения строится расчетом на установление с использованием неявного метода дискретных скоростей второго порядка аппроксимации, реализованного в параллельном коде “Несветай”. Актуальное описание кода и численного метода решения стационарных задач можно найти в [18, 20]. Величина шага по времени соответствует числу Куранта, равного 100. Сходимость требует примерно 10 000 шагов для больших и умеренных значений δ и до 250 000 шагов по времени для $\delta = 100$ и $L_h = 10$. Вычисления проводились на серверах, установленных в ЦКП “Информатика” ФИЦ ИУ РАН, с использованием от 64 до 512 физических ядер x86.

Для решения уравнений сплошной среды (2.4) использовался коммерческий пакет Ansys CFX [21], лицензия на который имеется в ФИЦ ИУ РАН. Решение задачи в силу специфики программного обеспечения строилось в размерных переменных. В расчетах граничные условия на внешних границах левого резервуара — источника задавались как условие входа с фиксацией полного давления p_0 и температуры T_0 , соответствующих статическим значениям p_L и T_L при текущей скорости потока, при этом величина и направление вектора скорости потока не ограничиваются. Граничные условия на внешних границах правого резервуара-стока заданы с фиксацией среднего по площади статического давления p_R , также без ограничений на вектор скорости. Размеры расчетной области аналогичны описанным выше для кинетического уравнения. Расчетные сетки построены таким образом, чтобы обеспечить хорошее разрешение пограничных слоев для всего диапазона условий. Количество ячеек поперек поры $0 \leq y \leq h$ составляло 150, вдоль поры варьировалось от 100 для $L_h = 1$ до 500 для $L_h = 10$. Размер ячейки вблизи вертикальной стенки $\Delta x = 0.01h$, по нормали к стенке поры $\Delta y = 0.001h$. Количество узлов сетки в продольном направлении при $x < 0$ и $x > L$ составляло 250...300 ячеек.

В качестве численного метода используется противопоточная схема номинально 2-го порядка аппроксимации [21–23]. Дискретизация по времени производится с помощью неявной схемы 1-го порядка аппроксимации и ограничением на шаг по времени через число Куранта на уровне ≈ 100 . Критерием сходимости расчета является достижение среднеквадратичной невязкой нормированных производных по времени от полей всех переменных уровня 10^{-5} и ниже в совокупности с установлением расхода массы. Вычисления проводились на одном сервере ЦКП “Информатика” ФИЦ ИУ РАН с использованием 32 физических ядер архитектуры x86.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В качестве газа рассмотрим гелий с молекулярной массой $m = 6.65 \cdot 10^{-27}$ кг, значением газовой постоянной $R = 2077.1$ Дж/(кг·К). Для простоты принимаем $\gamma = 5/3$, $Pr = 2/3$. Значение коэффициента динамической вязкости μ определим в соответствии с законом твердых сфер:

$$\mu = \mu_{ref} \sqrt{\frac{T}{T_{ref}}},$$

где принимаются следующие значения констант: $T_{ref} = 273.15$ К, $\mu_{ref} = 0.000018$ Па·с.

Поскольку мы изучаем массовый расход и характер течения в зависимости от параметра разрежения δ , полагаем $T_L = T_{ref}$, $\mu_L = \mu_{ref}$ и определяем давление слева p_L по формуле (1.3). Получаем следующее выражение зависимости p_L от δ и полувысоты поры h :

$$p_L = 0.0192 \frac{\delta}{h}. \tag{4.1}$$

В расчетах полагаем $h = 0.1$ мм, так что для $\delta = 1$ входное давление $p_L = 192$ Па.

Расчеты проводились для соотношения давлений $p_L/p_R = 2$, проницаемости $K = 0.0, 0.5$ и 0.7 и относительной длины пор $L_h = 1, 2, 5$ и 10 . Кинетическое решение вычисляется для диапазона значений параметра разрежения $\delta = 0 \dots 100$. Континуальное решение Навье–Стокса рассчитывается для $\delta \geq 10$. Максимальное значение δ , до которого ведется расчет на основе уравнений сплошной среды, ограничивается условием существования дозвукового режима течения в выходном сечении, которое позволяет задать давление p_R на выходной границе. Это не исключает возникновения течения с ударными волнами в окрестности канала.

При анализе результатов удобно использовать безразмерный приведенный массовый расход Q , определяемый как отношение расхода \dot{M} к расходу при истечении в вакуум через щель в свободномолекулярном режиме \dot{M}_{∞}^{vac} :

$$Q(x) = \frac{\dot{M}(x)}{\dot{M}_{\infty}^{vac}}, \quad \dot{M}_{\infty}^{vac} = \frac{hp_L}{\sqrt{\pi}\beta_L}. \tag{4.2}$$

Строго говоря, значение расхода не должно зависеть от положения x . В практических расчетах оно может незначительно меняться, что позволяет контролировать точность расчетов. В таблицах ниже указано значение расхода, вычисленное в середине поры $x = L/2$.

Расчитанные значения приведенных массовых расходов приведены в таб. 1–4. На рис. 3 показаны соответствующие графики для всех относительных длин L_h . Видно, что влияние геометрической проницаемости K на массовый расход наиболее выражено для коротких пор ($L_h = 1, 2$). С ростом значения L_h кривые расхода становятся весьма близкими при умеренных значениях δ . Согласие с континуальным решением

Таблица 1. Приведенный расход Q как функция параметра разреженности δ для $L_h = 1$, Н.С. — уравнения Навье–Стокса (2.4)

K	0		0.5		0.7	
	S-модель	Н.С.	S-модель	Н.С.	S-модель	Н.С.
0.01	0.418		0.659		0.864	
0.1	0.440		0.667		0.867	
0.3	0.484		0.691		0.889	
1	0.612		0.778		0.959	
3	0.879		0.988		1.124	
5	1.038		1.132		1.238	
10	1.201	1.028	1.307	1.101	1.389	1.159
20	1.309	1.205	1.421	1.311	1.492	1.390
30	1.355	1.279	1.468	1.394	1.547	1.485
50	1.407	1.354	1.516	1.475	1.605	1.574
100	1.459	1.425	1.594	1.551		
200	1.478	1.467	1.623	1.600		
300	1.486	1.475		1.616		
500	1.469	1.464		1.631		
700		1.443		1.631		
1000		1.418				
2000		1.383				

Таблица 2. Приведенный расход Q как функция параметра разреженности δ для $L_h = 2$

K	0		0.5		0.7	
	S-модель	Н.С.	S-модель	Н.С.	S-модель	Н.С.
δ						
0.01	0.351		0.516		0.646	
0.1	0.367		0.524		0.646	
0.3	0.401		0.541		0.663	
1	0.496		0.606		0.721	
3	0.707		0.780		0.873	
5	0.858		0.920		0.994	
10	1.050	0.866	1.130	0.914	1.187	0.954
20	1.194	1.088	1.289	1.171	1.350	1.230
30	1.263	1.182	1.358	1.279	1.422	1.350
50	1.336	1.280	1.434	1.386	1.504	1.469
100	1.416	1.381	1.498	1.494	1.610	1.592
200	1.474	1.446		1.567		
300		1.471		1.593		
500		1.485		1.611		
700		1.478		1.616		
1000		1.460		1.616		
2000		1.418				

Таблица 3. Приведенный расход Q как функция параметра разреженности δ для $L_h = 5$

K	0		0.5		0.7	
	S-модель	Н.С.	S-модель	Н.С.	S-модель	Н.С.
δ						
0.01	0.245		0.323		0.372	
0.1	0.255		0.324		0.373	
0.3	0.271		0.331		0.379	
1	0.320		0.365		0.408	
3	0.440		0.470		0.509	
5	0.550		0.576		0.609	
10	0.754	0.579	0.790	0.597	0.816	0.613
20	0.957	0.850	1.025	0.901	1.057	0.932
30	1.061	0.983	1.140	1.052	1.180	1.095
50	1.173	1.120	1.260	1.207	1.299	1.264
100	1.299	1.270	1.388	1.367	1.444	1.441
200	1.392	1.379	1.490	1.486		
300	1.428	1.425		1.535		
500		1.464		1.583		
1000		1.489		1.613		
2000		1.466		1.613		

сильно зависит не только от значения параметра разрежения, но и от относительной длины L_h . При $\delta = 100$ имеется согласие континуального и кинетического решений в пределах 2% для всех значений L_h .

Рисунки 4–5 иллюстрируют характер поля течения для $L_h = 1$, $K = 0.5$ и $\delta = 100$, полученные решением кинетического уравнения. Видно, что с ростом значения δ течение становится сверхзвуковым и образуется несколько прямых скачков Маха. При этом за порой образуется большая зона рециркуляции. В случае более длинной поры $L_h = 10$ (см. рис. 6–7) интенсивность потока становится меньше. При этом распределение давления потока внутри поры становится квазиодномерным, что аналогично течению в длинном изолированном канале [12, 16]. Скачки Маха за порой становятся слабее.

На рисунках 8–10 приведены линии тока и поля числа Маха для $L_h = 1$ и $\delta = 100, 500, 1000$, полученные решением уравнений Навье–Стокса. При больших значениях δ на кривых расхода массы, приведенных на рис. 3, виден максимум, достигающийся при $\delta = 300$ для $L_h = 1$ и $\delta = 1000$ для $L_h = 5$. Данное явление было отмечено для случая истечения через щель в вакуум, но не объяснено в работе [11], и объясняется образованием отрыва внутри поверхности канала и возвратной зоны течения, см. рис. 9–11. Отрыв начина-

Таблица 4. Приведенный расход Q как функция параметра разреженности δ для $L_h = 10$

K	0		0.5		0.7	
	S-модель	Н.С.	S-модель	Н.С.	S-модель	Н.С.
0.01	0.165		0.199		0.221	
0.1	0.170		0.199		0.222	
0.3	0.178		0.202		0.222	
1	0.200		0.218		0.235	
3	0.268		0.279		0.295	
5	0.336		0.346		0.360	
10	0.493	0.361	0.505	0.367	0.518	0.373
20	0.780	0.615	0.744	0.638	0.759	0.651
30	0.841	0.768	0.894	0.811	0.916	0.833
50	0.992	0.942	1.062	1.008	1.096	1.046
100	1.159	1.135	1.243	1.220	1.290	1.276
200	1.297	1.283	1.380	1.379		1.451
300	1.357	1.350		1.453		
500		1.414		1.523		
700		1.446		1.560		
1000		1.470		1.585		
2000		1.489		1.610		
3000		1.492		1.610		

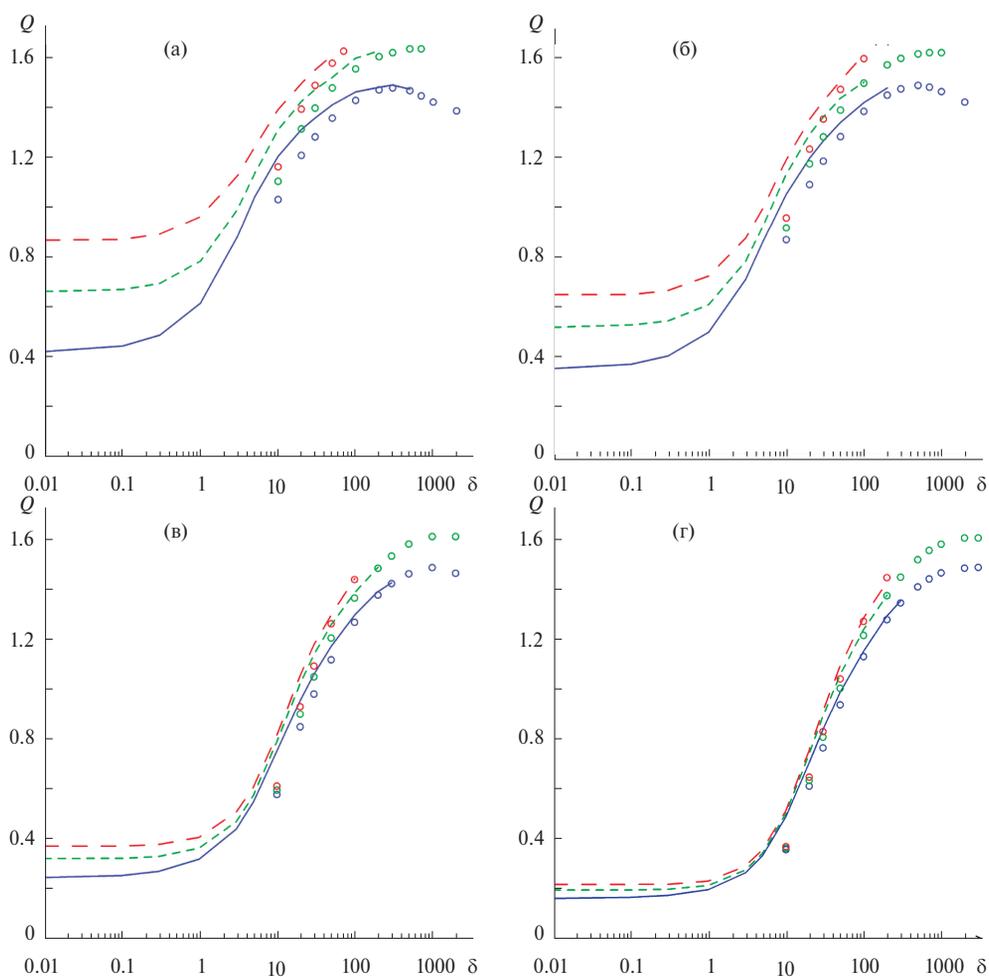


Рис. 3. Приведенный расход массы Q для различных значений относительной длины. Красный, зеленый и синий цвета соответствуют значениям проницаемости $K = 0, 0.5$ и 0.7 , соответственно. Сплошные линии — кинетическое решение, символы — решение Навье–Стокса; $L_h = 1$ (а), 2 (б), 5 (в), 10 (г).

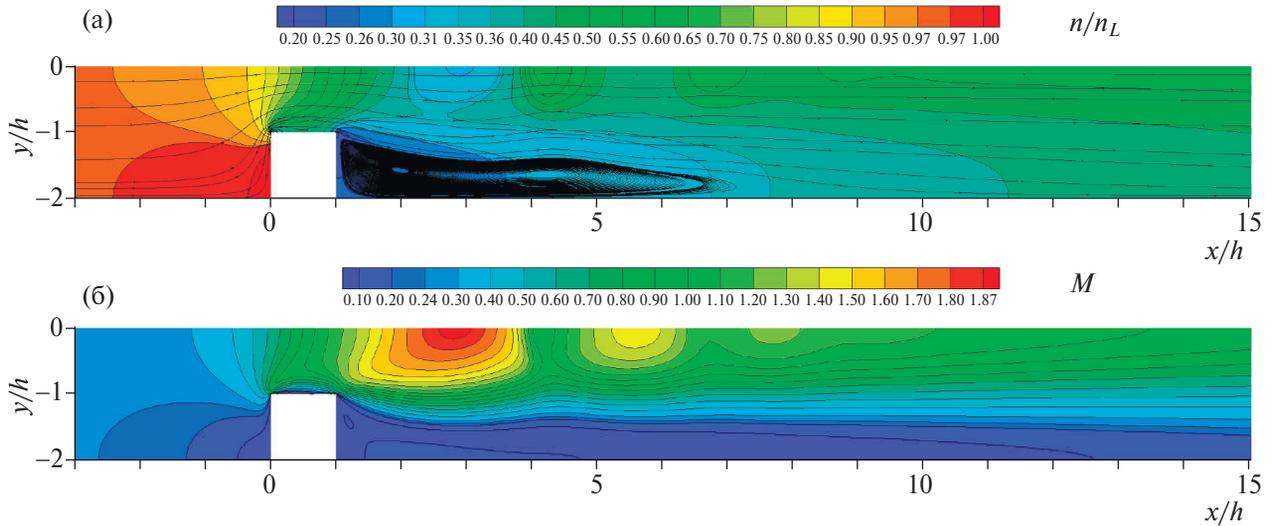


Рис. 4. Линии уровня безразмерной плотности и линии тока (а), числа Маха (б) для $K = 0.5$, $L_h = 1$ и $\delta = 100$, полученные решением кинетического уравнения.

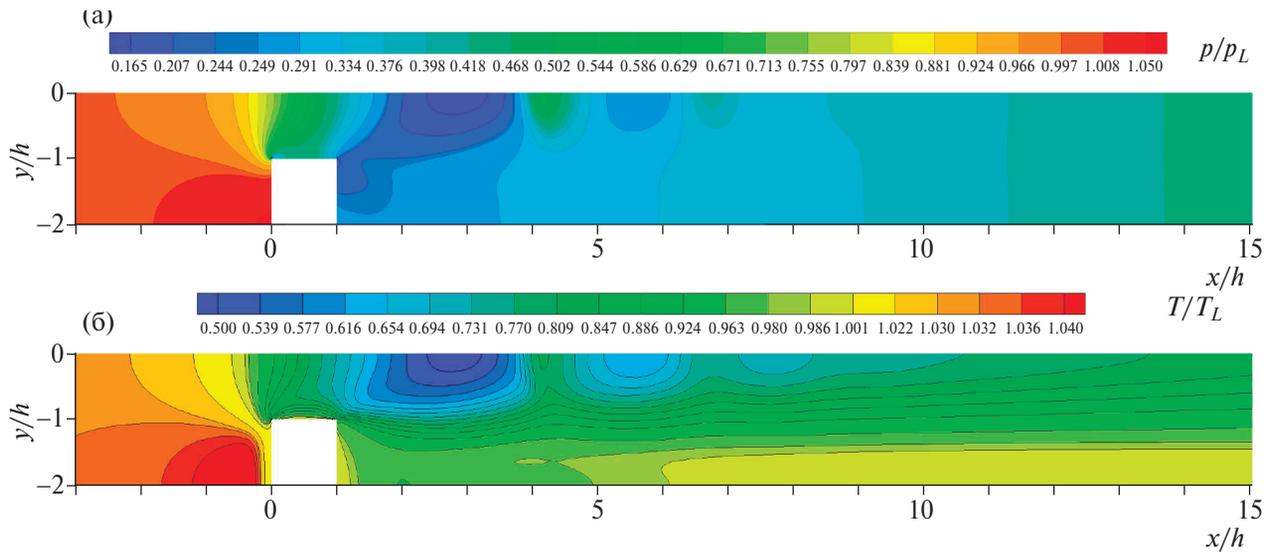


Рис. 5. Безразмерные изобары (а) и изотермы (б) для $K = 0.5$, $L_h = 1$ и $\delta = 100$, полученные решением кинетического уравнения.

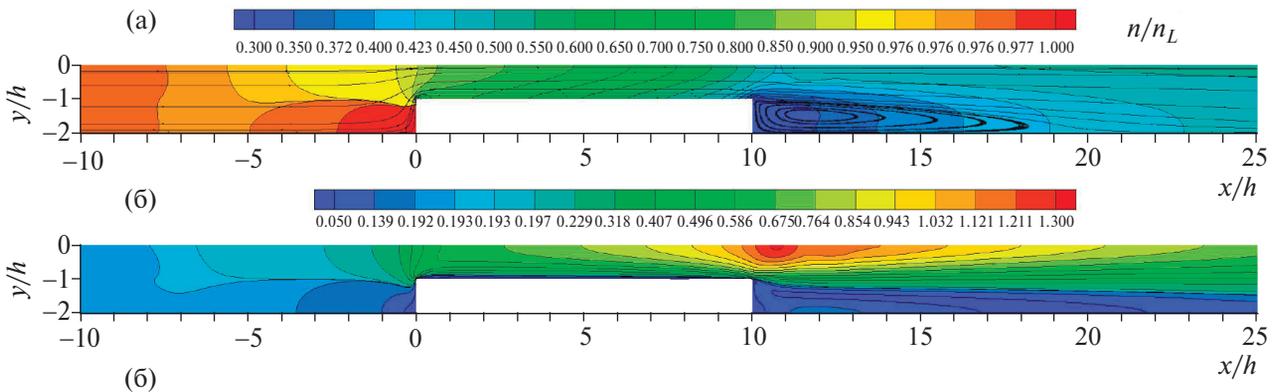


Рис. 6. Линии уровня безразмерной плотности и линии тока (а), числа Маха (б) для $K = 0.5$, $L_h = 10$ и $\delta = 100$, полученные решением кинетического уравнения.

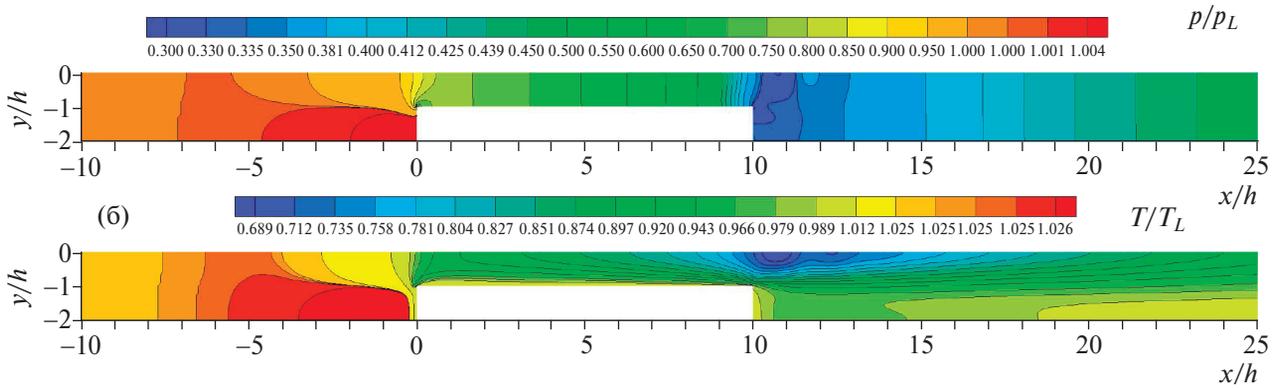


Рис. 7. Безразмерные изобары (а) и изотермы (б) для $K = 0.5$, $L_h = 10$ и $\delta = 100$, полученные решением кинетического уравнения.

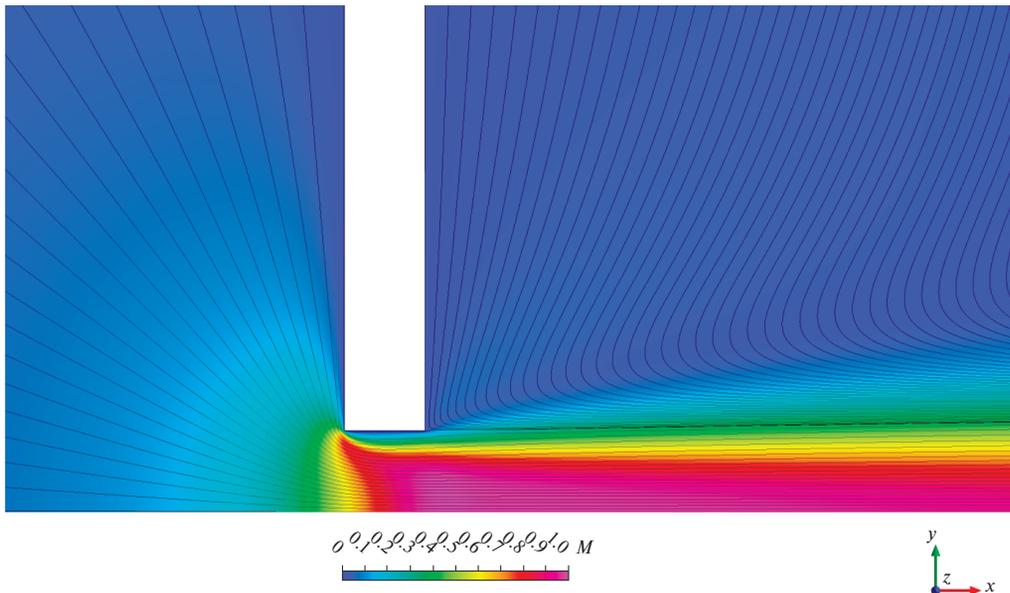


Рис. 8. Линии тока и поле числа Маха для $K = 0$, $L_h = 1$ и $\delta = 100$, полученные решением уравнений Навье–Стокса.

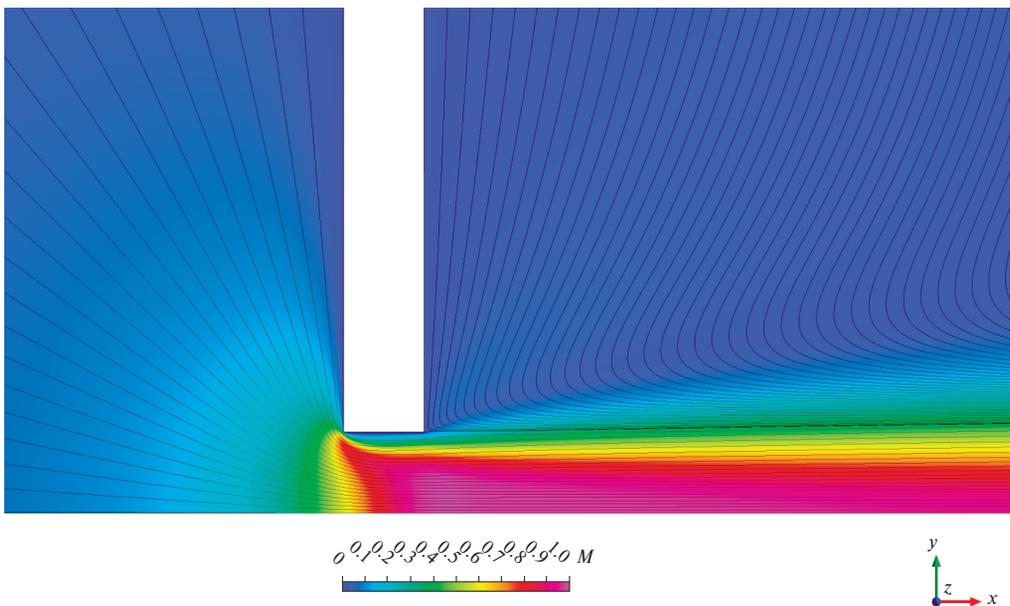


Рис. 9. Линии тока и поле числа Маха для $K = 0$, $L_h = 1$ и $\delta = 500$, полученные решением уравнений Навье–Стокса.

ется сразу на входе в канал, рис. 10–12, и в рассматриваемом случае истечения в среду с противодавлением для $L_h = 1$ и $L_h = 2$ незамкнут, будучи соединен с правым резервуаром. С ростом относительной длины канала высота отрывной зоны уменьшается, приводя к уменьшению эффекта падения расхода, см. рис. 11, 12. Для $L_h = 10$ и $\delta \leq 1000$ кривая расхода не обнаруживает немонотонности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано течение разреженного газа через периодическую систему плоских каналов (пор), имитирующую течение газа через мембрану. Рассматривались режимы течения от свободномолекулярного до сплошнородного с помощью численного решения как кинетического S -модельного уравнения, так и уравнений Навье–Стокса сжимаемой среды. Рассчитанные значения массового расхода существенно отличаются от данных для достаточно длинных плоских каналов, особенно для коротких пор. Новой особенностью течения является падение расхода в достаточно коротких каналах при уменьшении числа Кнудсена, что объясняется возникновением отрыва потока. Разумное согласие с континуальным решением наблюдается для достаточно малых чисел Кнудсена $Kn \approx 0.01$. Помимо этого, полученные результаты

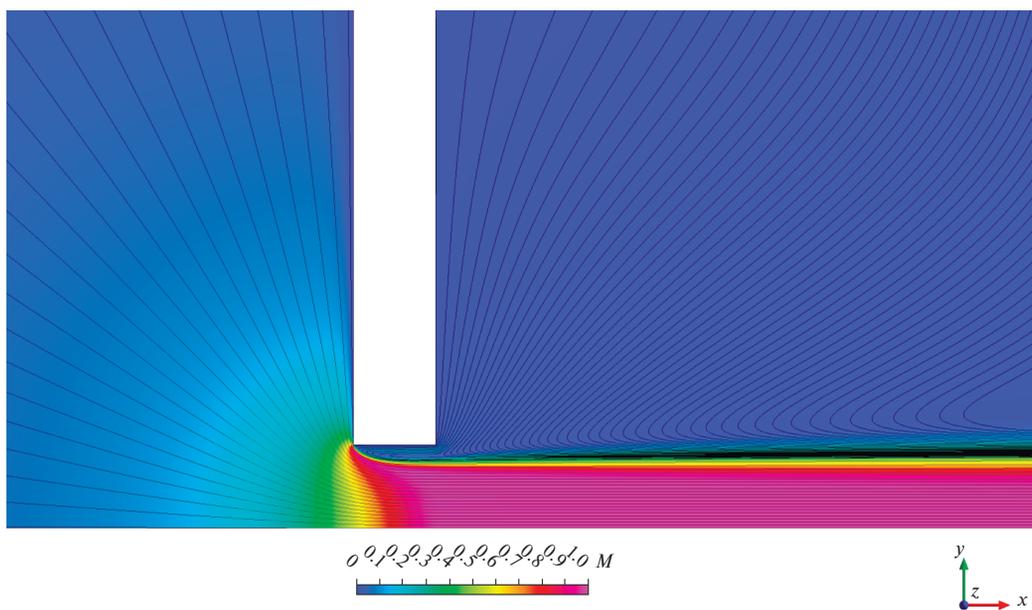


Рис. 10. Линии тока и поле числа Маха для $K = 0$, $L_h = 1$ и $\delta = 1000$, полученные решением уравнений Навье–Стокса.

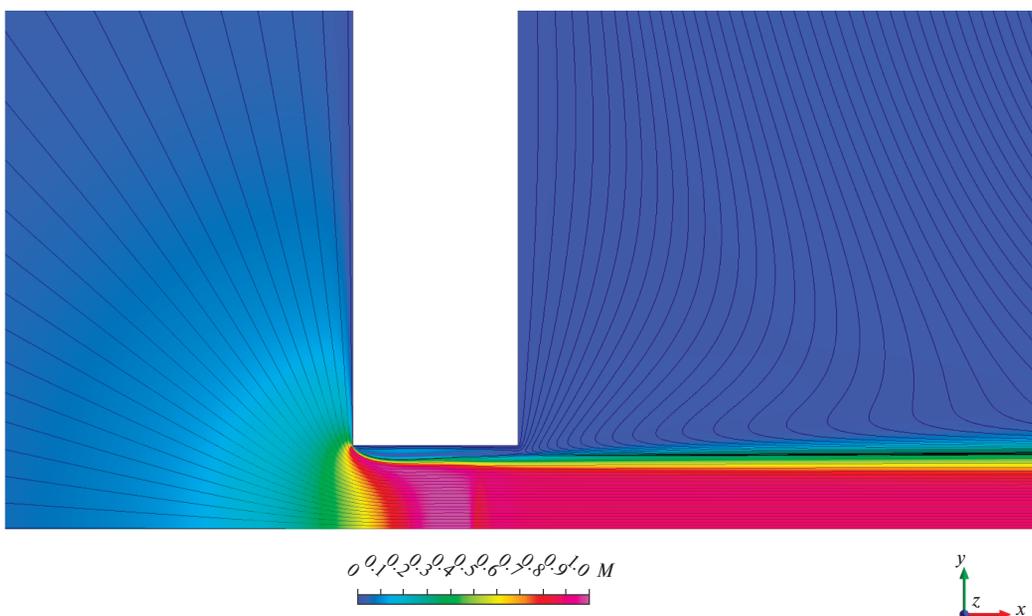


Рис. 11. Линии тока и поле числа Маха для $K = 0$, $L_h = 2$ и $\delta = 1000$, полученные решением уравнений Навье–Стокса.

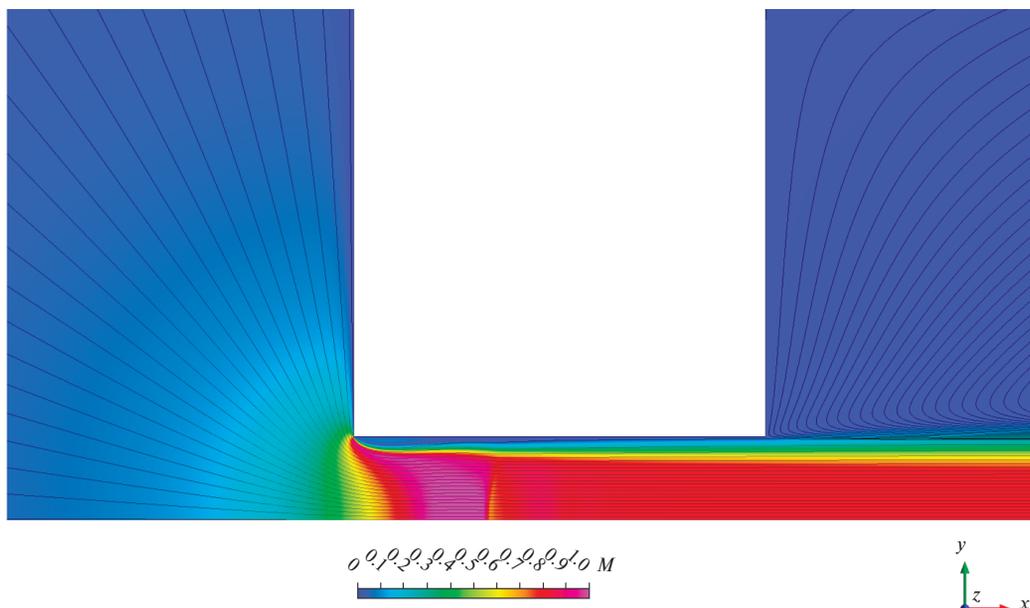


Рис. 12. Линии тока и поле числа Маха для $K = 0$, $L_h = 5$ и $\delta = 1000$, полученные решением уравнений Навье–Стокса.

демонстрируют сложную ударно-волновую структуру течения за коротким каналом внутри периодической системы с высокой проницаемостью для режимов, близких к континууму.

Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика”) ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dou H., Xu M., Wang B., Zhang Z., Wen G., Zheng Y., Luo D., Zhao L., Yu A., Zhang L., Jiang Z., Chen Z.* Microporous framework membranes for precise molecule/ion separations // *Chemical Society Reviews*. 2021. V. 50. P. 986–1029.
2. *Taassob A., Bordbar A., Kheirandish S., Zarnaghsh A., Kamali R., Rana A.S.* A review of rarefied gas flow in irregular micro/nanochannels // *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2021. V. 31. P. 113002.
3. *Wu L., Ho M., Germanou L., Gu X., Liu C., Xu K., Zhang Y.* On the apparent permeability of porous media in rarefied gas flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 2017. V. 822. P. 398–417.
4. *Memisoglu G., Gulbahar B., Fernandez Bello R.* Preparation and characterization of freely-suspended graphene nanomechanical membrane devices with quantum dots for point-of-care applications // *Micromachines*. 2020. V. 11. No. 1. P. 104.
5. *Tina B.S., Rohith S., Seena V.* Fabrication and electromechanical characterization of silicon nanomechanical membrane flexure mems sensor for gas sensing applications // *IEEE Sensors Journal*. 2024. V. 24. No. 5. P. 5440–5447.
6. *Popov S.P., Tcheremissine F.G.* Subsonic rarefied gas flow over a rack of flat transverse plates // *Journal of applied mechanics and technical physics*. 2008. V. 49. No. 1. P. 46–52.
7. *Plotnikov M.Yu.* Hydrogen dissociation in rarefied gas flow through a wire obstacle // *J. Appl. Mech. and Technical Physics*. 2018. V. 59. No. 5. P. 794–800.
8. *Шахов Е.М.* Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука // *Изв. АН СССР. МЖТ*. 1968. № 5. С. 142–145.
9. *Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д.* Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург. УРО РАН, 2008.
10. *Varoutis S., Valougeorgis D., Sharipov F.* Simulation of gas flow through tubes of finite length over the whole range of rarefaction for various pressure drop ratios // *J. Vac. Sci. Technol. A*. 2009. V. 27. No. 6. P. 1377–1391.
11. *Sharipov F., Kozak D.V.* Rarefied gas flow through a thin slit into vacuum simulated by the Monte Carlo method over the whole range of the Knudsen number // *J. Vac. Sci. Technol. A*. 2009. V. 27. P. 479.
12. *Titarev V.A., Shakhov E.M.* // Computational study of a rarefied gas flow through a long circular pipe into vacuum // *Vacuum, Special Issue “Vacuum Gas Dynamics: Theory, experiments and practical applications”*. 2012. V. 86. No. 11. P. 1709–1716.
13. *Titarev V.A.* Rarefied gas flow in a planar channel caused by arbitrary pressure and temperature drops // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2012. V. 55. No. 21–22. P. 5916–5930.

14. *Pantazis S., Valougeorgis D.* Rarefied gas flow through a cylindrical tube due to a small pressure difference // *Eur. J. Mech.-B/Fluids*. 2013. V. 38. P. 114–127.
15. *Valougeorgis D., Vasileiadis N., Titarev V.* Validity range of linear kinetic modeling in rarefied pressure driven single gas flows through circular capillaries // *European Journal of Mechanics / B Fluids, Special Issue on Non-equilibrium Gas Flows*. 2017. V. 64. P. 2–7.
16. *Титарев В.А., Шахов Е.М.* Концевые эффекты при истечении разреженного газа через длинную трубу в вакуум // *Известия РАН. МЖГ*. 2013. № 5. С. 146–158.
17. *Sharipov F., Seleznev V.* Data on internal rarefied gas flows // *J. Phys. Chem. Ref. Data*. 1998. V. 27. No. 3. P. 657–706.
18. *Воронич И.В., Титарев В.А.* Численный анализ течения разреженного газа через систему коротких каналов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023. Т. 63. № 12. С. 1942–1959.
19. *Gavasane A., Agrawal A., Pradeep A.M., Bhandarkar U.* Simulation of a temperature drop for the flow of rarefied gases in microchannels // *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 2017. V. 71. No. 10. P. 1066–1079.
20. *Титарев В.А.* Применение кода Несветай к решению трехмерных задач высотной аэродинамики // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ., спец выпуск по случаю 90-летия академика С.К. Годунова*. 2020. Т. 60. № 4. С. 752–764.
21. Ansys CFX, version 2021 R2.
<https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-cfx>
22. *Barth T., Jespersen D.C.* The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // *AIAA paper 89-0366*. 1989.
23. *Rao S.S.* *The Finite Element Method in Engineering*. 6th ed. Elsevier, 2018.

Numerical Analysis of Rarefied Gas Flow through a Periodic System of Channels

© 2025 I. V. Voronich^{a,b,*}, V. A. Titarev^{a,b,**}, and A. V. Kudriashov^{b,***}

^a *Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^b *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

* *e-mail: voronich.iv@mipt.ru*

** *e-mail: vladimir.titarev@frcsc.ru*

*** *e-mail: kudriashov.av@mipt.ru*

Rarefied gas flows through a planar periodic system of rectangular channels (membrane) are analyzed in a wide range of Knudsen numbers. The problem is studied based on the numerical solution of the kinetic equation with the Shakhov *S*-model collision integral and the Navier-Stokes equations of the compressible medium. The main attention is paid to the calculation of the mass flow rate as a function of the permeability, the relative channel length, and the rarefaction parameter.

Keywords: membrane, channel, kinetic equation, *S*-model, rarefied gas, computational aerodynamics