

## О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ В ФОРМЕ ПАРАБОЛОИДА

© 2024 г. А. Г. Петров<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*e-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 28.06.2024 г.

После доработки 11.11.2024 г.

Принята к публикации 11.11.2024 г.

Рассматриваются уравнения колебания жидкости во вращающемся с постоянной скоростью параболоиде в длинноволновом приближении. Построено точное решение уравнений колебания жидкости.

**Ключевые слова:** теория мелкой воды, нелинейные колебания, вращающийся сосуд, параболоид, точное решение

**DOI:** 10.31857/S1024708424060059, **EDN:** FELDXF

Задача колебаний жидкости в сосудах (бассейнах) имеют много приложений как в технике, так и в геофизике. Наиболее популярны исследования в рамках теории длинных волн (теории мелкой воды), позволяющие учесть изменения донной поверхности бассейна. Линейная теория свободных колебаний жидкости в параболоиде вращения и параболическом канале изложена в монографиях [1, 2]. В них в линейном приближении полученных явные формулы для различных мод свободных колебаний и их периодов. Нелинейные колебания жидкости в параболоиде вращения изучались в [3–6]. В этих работах приводятся примеры частных точных решений осесимметричных уравнений мелкой воды. В [7] предложен способ построения широкого класса решений с помощью лагранжевых переменных, обобщающий решения [36]. Это исследование продолжено в работе [8]. В ней показано, что нелинейные колебания жидкости, описываемые данным классом решений, оказываются изохронными, т.е. их период определяется только параметрами параболоида и не зависит от амплитуды колебаний. В [9] с помощью группового анализа получен класс периодических по времени решений, описывающий нелинейные колебания жидкости в круговом параболоиде с замкнутыми или квазизамкнутыми траекториями движения жидких частиц.

В данной работе методом лагранжевых координат [7, 8] построено семейство точных решений уравнений осесимметричных колебаний жидкости во вращающемся сосуде. Семейство зависит от угловой скорости вращения жидкости и амплитудного параметра. Такие решения имеют интересный приложения для описания волн в северных озерах и морях с учетом вращения Земли, а также для тестирования различных асимптотических решений, обзор которых представлен в [10].

### 1. РАВНОВЕСНЫЕ ФОРМЫ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ

Форма свободной поверхности  $h(r)$  тяжелой жидкости, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , удовлетворяет уравнениям гидростатики во вращающейся системе координат [1, 2]:

$$-\omega^2 r = -g \frac{\partial h}{\partial r}. \quad (1.1)$$

Донная поверхность сосуда имеет форму параболоида и определяется уравнением:

$$\varsigma(r) = kr^2 = H \frac{r^2}{a^2},$$

где  $a$  — радиус смоченной поверхности в покое в сосуде, а  $H$  — уровень поверхности покоящейся жидкости.

Тогда семейство форм поверхности  $h_\omega(r)$ , удовлетворяющего уравнению (1.1) и условию сохранения объема жидкости

$$\frac{V}{2\pi} = \int_0^{a_\omega} (h_\omega(r) - \zeta(r)) r dr = \text{const}$$

имеет следующий компактный вид:

$$\frac{h_\omega(r) - \zeta(r)}{H} = (1 - q)^{1/2} - (1 - q) \frac{r^2}{a^2}, \quad q = \frac{a^2 \omega^2}{2g}.$$

На рис. 1 изображена свободная поверхность в жидкости с параметром вращения  $q = 0.5$ . Жирная линия — поверхность дна, сплошная тонкая линия — поверхность жидкости, штриховая горизонтальная линия — уровень покоящейся жидкости, вертикальные линии определяют радиусы смоченных поверхностей и  $R$  покоящейся и вращающейся жидкостей соответственно. Из решения видно, что радиус смоченной поверхности  $R$  зависит от параметра  $q$  следующим образом:

$$R/a = (1 - q)^{-1/4}. \quad (1.2)$$

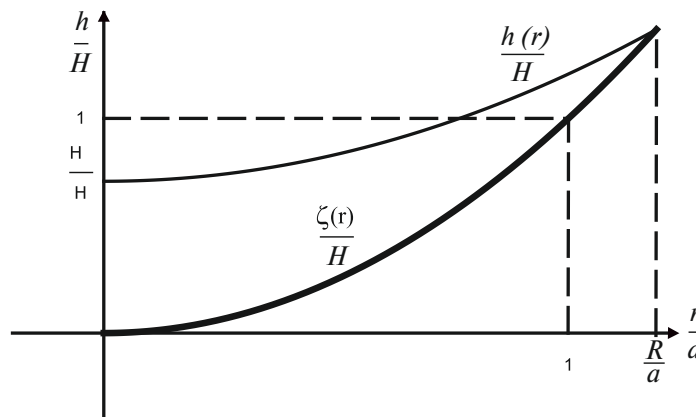


Рис. 1. Равновесная поверхность в бассейне в форме параболоида.

## 2. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО СТОЯЧИХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Уравнений мелкой воды в неинерциальной системе координат, скрепленной с вращающимся сосудом имеют вид [1, 2]:

$$\mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c = -g \text{grad } h, \quad \frac{d(h - \zeta)}{dt} + (h - \zeta) \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $h$  и  $Z$  — отметки свободной поверхности и дна соответственно,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}_r$ ,  $\mathbf{w}_e$ ,  $\mathbf{w}_c$  — векторных скорости, относительного, переносного и кориолисова ускорений, со следующими компонентами в полярных координатах  $r$ ,  $\theta$ :

$$\mathbf{v}(v_r, v_\theta), \quad \mathbf{w}_r \left( \left( \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right), \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dt} \right), \\ \mathbf{w}_e(-\omega^2 r, 0), \quad \mathbf{w}_c(-2\omega^2 v_\theta, 2\omega v_r).$$

Компоненты векторного уравнения и уравнение неразрывности принимают вид:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega v_\theta = -g \frac{\partial h}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dt} + 2\omega v_r = 0, \\ \frac{d}{dt}(h - \zeta) + (h - \zeta) \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} \right) = 0.$$

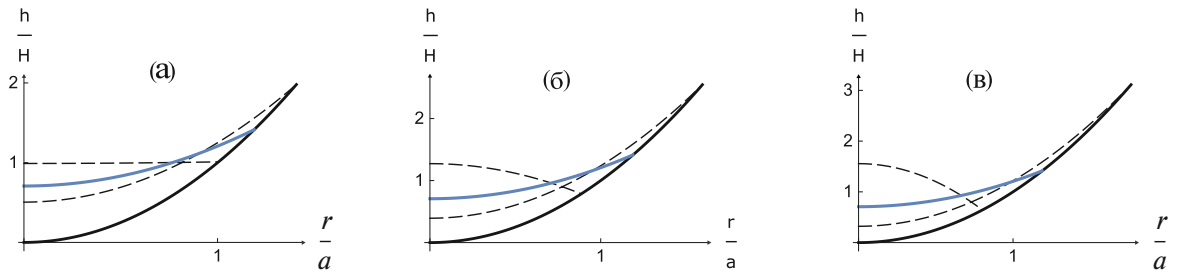


Рис. 2. Поверхности максимального развития для амплитудных параметров  $e = 1.4$  — (а),  $1.8$  — (б),  $2.2$  — (в).

Нелинейные уравнения (2.1) имеют семейство точных решений

$$\frac{h - \zeta}{H} = \frac{(1 - q)^{1/2}}{f(\xi, t)} - \frac{(1 - q) r^2}{f^2(\xi, t) a^2}, \quad q = \frac{a^2 \omega^2}{2g}; \quad (2.1)$$

$$f(\xi, t) = \frac{1}{2} \left( \xi + 1/\xi + (\xi - 1/\xi) \cos(2t\sqrt{gk}) \right), \quad \xi \geq 1. \quad (2.2)$$

Решение имеет 2 параметра: параметр угловой скорости  $q \in (0, 1)$  и амплитудном параметре  $1 \leq \xi < \infty$ . Решение получено с помощью лагранжевых координат. Соответствующая подстановка приведена в [7, 8]. Компактный вывод решения (2.2), (2.3) приведен в разд. 4 и 5.

### 3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Полученное решение (2.2) можно назвать стоячей волной. При амплитудном параметре  $\xi = 1 \Rightarrow f = 1$  формула (2.2) описывает равновесную форму (I-2). При  $\xi > 1$  форма волны меняется. Из уравнения  $h - \zeta = 0$  находим радиус смоченной поверхности  $R$  и соответствующую высоту  $h(R)$

$$\frac{h(R)}{H} = \frac{R^2}{a^2} = f(\xi, t) (1 - q)^{-1/2}. \quad (3.1)$$

Форма стоячей волны максимального развития и максимальный радиус смоченной поверхности  $R_{\max}$  получается подстановкой  $f(\xi, t) = \xi$  в (2.2) и (3.1) соответственно

$$\frac{h - \zeta}{H} = \frac{(1 - q)^{1/2}}{\xi} - \frac{(1 - q) r^2}{\xi^2 a^2}, \quad \frac{h(R_{\max})}{H} = \frac{R_{\max}^2}{a^2} = \xi(1 - q)^{-1/2}.$$

Форма стоячей волны минимального развития и минимальный радиус смоченной поверхности  $R_{\min}$  получается подстановкой  $f(\xi, t) = \xi$  в (2.2) и (3.1) соответственно

$$\frac{h - \zeta}{H} = \xi(1 - q)^{1/2} - \xi^2(1 - q) \frac{r^2}{a^2}, \quad \frac{h(R_{\min})}{H} = \frac{R_{\min}^2}{a^2} = \frac{(1 - q)^{-1/2}}{\xi}.$$

Стоячие волны максимального и минимального развития изображены на рис. 2 штриховыми линиями при амплитудных параметрах  $\xi = 1.4$ ,  $\xi = 1.8$  и  $\xi = 2.2$  и параметре вращения  $q = 0.5$ . Тонкая синяя линия — статическая поверхность жидкости, черная жирная линия — донная поверхность. Амплитудный параметр меняется в пределах  $1 \leq \xi \leq \infty$ , при  $\xi \rightarrow \infty$  максимальный смоченный радиус (величина заплеска) стремится к бесконечности.

### 4. ВЫВОД РЕШЕНИЯ

Решение (2.1), следуя [7], ищем в лагранжевых координатах в виде

$$\begin{aligned} r &= \rho(t) r_0, \quad h = \zeta + \frac{h_0(r_0)}{\rho^2(t)}, \\ v_r &= \dot{\rho}(t) r_0, \quad v_\theta = \omega \left( \frac{r_0}{\rho} - r_0 \rho \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $h_0(r_0)$  — функция лагранжевой координаты  $r_0$ ,  $a$ ,  $\rho(t)$  — функция времени.

Более общий вид подстановки приведен в [7, 8].

Решение (4.1) можно выразить в эйлеровых координатах

$$v_r = \frac{\dot{\rho}}{\rho} r, \quad v_\theta = \omega \left( \frac{r}{\rho^2} - r \right), \quad h = \zeta + \frac{h_0(r/\rho(t))}{\rho^2(t)}. \quad (4.2)$$

Для производных по времени от функций (4.1) имеем

$$\frac{dv_r}{dt} = \ddot{\rho} r_0, \quad \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dt} = -2\omega r_0 \dot{\rho}, \quad \frac{d}{dt}(h - \zeta) = -\frac{2\dot{\rho}}{\rho}(h - \zeta).$$

а для производных по координате (4.2) —

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{h'_0(r_0)}{\rho^3(t)}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 2\frac{\dot{\rho}}{\rho}.$$

Отсюда видно, что второе и третье уравнения системы (2.1) удовлетворяются тождественно, а подстановка приведённых выражений в первое уравнение системы (2.1) приводит его к следующему виду:

$$r_0 \ddot{\rho} - \omega^2 \left( \frac{1}{\rho r_0} \left( \frac{r_0}{\rho} - r_0 \rho \right)^2 + r_0 \rho + 2 \left( \frac{r_0}{\rho} - r_0 \rho \right) \right) = -g \left( \frac{h'_0}{\rho^3} + k \rho r_0 \right).$$

Переменные  $t$  и  $r_0$  в этом уравнении можно разделить

$$\rho^3(t) \left( \ddot{\rho} + g k \rho - \frac{\omega^2}{\rho^3} \right) = -\frac{g h'_0(r_0)}{r_0} = g n. \quad (4.3)$$

Функции от  $t$  и  $r_0$  тождественно равных и следовательно постоянны. Постоянная величина обозначена через  $gn$ , где  $n$ -произвольное действительное число. Таким образом, соотношения (4.3) расщепляются на два уравнения

$$\ddot{\rho} + g k \rho = (\omega^2 + g n) \rho(t)^{-3}, \quad -\frac{g h'_0(r_0)}{r_0} = g n. \quad (4.4)$$

Решение первого уравнения (4.4) можно построить проще, чем в [7, 8], если воспользоваться аналогией с двумерным линейным осциллятором (см. раздел 6). При  $k > 0$ ,  $n > 0$  решение имеет вид

$$\rho(t)^2 = \left( \frac{\omega^2 + g n}{k g} \right)^{1/2} f(\xi, t). \quad (4.5)$$

$$f(\xi, t) = \frac{1}{2} \left( \xi + 1/\xi + (\xi - 1/\xi) \cos(2t\sqrt{gk}) \right).$$

## 5. АНАЛОГИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ

В [11] обратили внимание, что уравнение (4.4) следует из систем уравнений для линейного осциллятора

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \Omega^2 y = 0. \quad (5.1)$$

Для этого запишем эту систему в полярных координатах  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$  и примем во внимание сохранение кинетического момента  $M = \rho^2 \dot{\theta}$

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2 + \Omega^2 \rho = 0 \Rightarrow \ddot{\rho} + \Omega^2 \rho = M^2 / \rho^3. \quad (5.2)$$

При замене уравнение (5.2) совпадает с уравнением (4.4), что и требовалось показать.

$$\Omega^2 = gk, \quad M^2 = \omega^2 + gn. \quad (5.3)$$

Подставив решение линейных уравнений (5.1) (с кинетическим моментом  $M = x\dot{y} - y\dot{x}$ ):  $x = A \cos \Omega t$ ,  $y = \frac{M}{A\Omega} \sin \Omega t$  в полярную координату  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , после несложных преобразований получим

$$\rho^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{\Omega} \left( \xi + \frac{1}{\xi} + \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) \cos 2\Omega t \right), \quad \xi = \frac{A^2 \Omega}{M}. \quad (5.4)$$

Подставив в (5.4) формулы (5.3), получим требуемое решение (2.3).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследуется достаточно популярная постановка задачи [3–10]. Для нее получена двухпараметрическая серия точных решений (2.2) нелинейных уравнений колебаний свободной поверхности тяжелой жидкости во вращающемся сосуде, имеющего форму параболоида. Первый параметр определяет угловую скорость вращения сосуда, второй параметр — амплитуду колебаний около равновесной поверхности. Все известные решения [3–9] записываются в более общем виде и выражаются через произвольную функцию начального распределения толщины слоя  $h_0$  и функцию  $M_0$  распределения углового момента. Приведенная в явном виде двухпараметрическая серия точных решений (2.2) представляет собой наиболее интересный, реализуемый в эксперименте, частный случай. Это оригинальный результат, позволяющий легко определять формы волн наибольшего развития и проводить сравнение с экспериментом. Кроме того, впервые в гидродинамической задаче замечена аналогия с линейным двумерным осциллятором. Она значительно упрощает вывод решения уравнения (4.3) по сравнению с выводом, который представлен в [7].

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500443-0).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 535 с.
3. Miles J.W., Ball F.K. On free-surface oscillations in a rotating paraboloid // J. Fluid Mech. 1963. V. 17. Pt 2. P. 257–266.
4. Thacker W.C. Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations // J. Fluid Mech. 1981. V. 107. P. 499–508.
5. Мигель Л.Х. Класс точных нестационарных решений уравнений мелкой воды с вращением // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30. № 5. С. 718–720.
6. Доценко С.Ф., Рубино А. Точные аналитические решения нелинейных уравнений длинных волн в случае осесимметричных колебаний жидкости во вращающемся параболическом бассейне // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 158–164.
7. Свиркунов П.Н. Неустановившиеся осесимметричные течения в приближении теории мелкой воды // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 520–522.
8. Калашник М. В., Кахиани В. О., Ломинадзе Д. Г., Патарашвили К. И., Свиркунов П. Н., Цакадзе С. Д. Нелинейные изохронные колебания жидкости в параболоиде: теория и эксперимент // Изв. РАН. МЖГ. 2004. А5 5. С. 131–142.
9. Чесноков А.А. Свойства и точные решения уравнений движения мелкой воды во вращающемся параболоиде // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 3. С. 496–504.
10. Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Асимптотики волновых и вихревых локализованных решений линеаризованных уравнений мелкой воды // В сб. “Актуальные проблемы механики”, посв. 50-летию Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, М.: Наука, 2015. С. 98–139.
11. Chalykh O.A., Veselov A.P. A Remark on Rational Isochronous Potentials // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2005. V. 12, Suppl. 1, 179–183.

## ON FLUID OSCILLATIONS A ROTATING PARABOLOIDAL VESSEL

A. G. Petrov<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: petrovipmech@gmail.com*

**Abstract**—The equations of fluid oscillations in a paraboloid rotating at a constant velocity are considered in the longwave approximation. An exact solution to the equations of fluid oscillations is constructed.

**Keywords:** shallow water theory, nonlinear oscillations, rotating vessel, paraboloid, exact solution