

УДК: 532.525

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ТОЛЛМИНА–ШЛИХТИНГА ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ ПОТОКА

© 2024 г. М. В. Устинов^{a, b}

^aЦентральный эрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского (ЦАГИ), Жуковский, Россия

^bМосковский физико-технический институт (МФТИ), Долгопрудный, Россия

e-mail: umax1961@gmail.com

Поступила в редакцию 23.10.2023 г.

После доработки 08.01.2024 г.

Принята к публикации 15.01.2024 г.

Найдены возмущения, порождаемые внешней турбулентностью в сдвиговом слое на плоской пластине, внезапно приведенной в движение. В качестве начальных условий использовалось турбулентное течение, найденное методом прямого численного моделирования развития изотропной однородной турбулентности. Полученное решение моделирует ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на плоской пластине при относительно малой турбулентности набегающего потока, когда он вызван волнами Толлмина–Шлихтинга. Оно позволяет описать процесс генерации различных возмущений – низкочастотных полосчатых структур и волн неустойчивости и их развитие на начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода. На основе обработки полученных результатов предложена простая модель, связывающая спектры волн неустойчивости в пограничном слое и турбулентных пульсаций в набегающем потоке. Также получены зависимости начальной амплитуды волн неустойчивости и их критических коэффициентов усиления (N-факторов) от степени турбулентности потока.

Ключевые слова: гидродинамическая неустойчивость, турбулентность, ламинарно-турбулентный переход, восприимчивость, пограничный слой.

DOI: 10.31857/S1024708424030094, EDN: PFHBNH

В настоящее время активно развиваются амплитудные методы предсказания ламинарно-турбулентного перехода, позволяющие вычислить характеристики возмущений пограничного слоя при различном уровне и природе внешних воздействий. Для перехода на стреловидном крыле иницированного шероховатостью поверхности такой подход реализован в [1], аналогичный метод разработан для перехода в сверхзвуковом пограничном слое вызванного взвешенными в атмосфере микрочастицами в [2]. Однако для наиболее практически важного сценария ламинарно-турбулентного перехода, индуцированного волнами Толлмина–Шлихтинга порождаемыми турбулентностью потока амплитудный метод до сих пор не создан. Причиной этого является отсутствие общепринятой модели, описывающей генерацию волн неустойчивости внешней турбулентностью. В большинстве теоретических исследований, посвященных данной проблеме, турбулентность заменяют периодическими вихревыми возмущениями или вихревыми модами, движущимися со скоростью потока. Вследствие малой амплитуды турбулентных пульсаций их взаимодействие с пограничным слоем описывается линеаризованными уравнениями Навье–Стокса. Продольный период вихревых возмущений во внешнем потоке существенно превышает длину волны Толлмина–Шлихтинга той же частоты, и для ее порождения требуется их взаимодействие со неоднородностью пограничного слоя. Наиболее эффективно волны Толлмина–Шлихтинга генерируются вблизи передней кромки, где толщина пограничного слоя растет быстрее всего. Согласно асимптотической теории [3], коэффициент восприимчивости к вихревым модам, определяемый как отношение амплитуды порождаемой волны неустойчивости вблизи передней кромки к амплитуде пульсаций скорости в набегающем потоке, порядка единицы. Этот вывод подтверждает эксперимент по изучению взаимодействия волн завихренности генерируемых вибрирующей лентой с пограничным слоем на пластине [4,5]: волны Толлмина–Шлихтинга возникают только при попадании входящих из потока возмущений непосредственно на переднюю кромку. С другой стороны, волны неустойчивости, появившиеся вблизи нее, сильно затухают, прежде чем достигнут нейтральной точки, где начинается их рост. По этой причине

большей конечной амплитуды могут достигнуть волны Толлмина–Шлихтинга порожденные на слабой неоднородности пограничного слоя в окрестности нейтральной точки. Такой механизм восприимчивости подробно исследован методом многих масштабов в [5,6]. Для пограничного слоя на плоской пластине эти два механизма обеспечивают близкие коэффициенты восприимчивости ($r_n \sim 10^{-4}$), вычисленные по амплитуде волны неустойчивости в нейтральной точке.

Малый коэффициент восприимчивости к вихревым волнам, полученный в рамках линейной модели, стал поводом к поиску альтернативных сценариев порождения волн Толлмина–Шлихтинга, основанных на нелинейном взаимодействии возмущений турбулентного потока между собой [7]. Косвенным аргументом в пользу нелинейной зависимости начальной амплитуды волн неустойчивости от степени турбулентности потока Tu служит корреляция Мэка [8] для N -фактора перехода. Из нее следует, что амплитуда наиболее усиливающейся волны неустойчивости в нейтральной точке пропорциональна $Tu^{2.4}$. Таким образом имеются как минимум три альтернативных модели описывающих генерацию волн Толлмина–Шлихтинга турбулентностью потока. Какая из них описывает реальный эксперимент до сих пор неясно. С целью ответа на этот вопрос в данной работе выполнено численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода вызванного турбулентностью потока. При этом использована упрощенная модель, описывающая развитие периодических в направлениях параллельных поверхности возмущений по времени. В отличие от выполненного ранее моделирования генерации волн неустойчивости вихревыми модами [9,10] такой подход позволяет учесть влияние на ламинарно-турбулентный переход реального спектра турбулентных пульсаций и оценить роль нелинейных эффектов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Рассмотрим однородное и изотропное турбулентное течение вязкой несжимаемой жидкости с нулевой средней скоростью во всем пространстве. В начальный момент времени $t=0$ в нем появляются две параллельные пластины, расположенные на расстоянии $2D'$ и движущиеся в своей плоскости со скоростью u_∞ . Будем исследовать движение жидкости в образовавшемся плоском канале. Стенки канала увлекают за собой жидкость в слоях, толщина которых увеличивается со временем. До тех пор, пока толщина слоев мала, по сравнению с полувысотой канала D' , течение в них можно рассматривать в качестве модели пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой турбулентным потоком. При этом время играет роль продольной координаты, в направлении которой нарастает пограничный слой. Декартову систему координат x, y, z , движущуюся с каналом, зададим так, чтобы xoy совпадала с его центральной плоскостью, а ось x была направлена против движения. В качестве масштабов для координат, скорости времени примем вязкую длину $l = \nu/u_\infty$, скорость движения стенок u_∞ и время прохождения ими вязкой длины $\tau = \nu / u_\infty^2$. При таком выборе единиц измерения безразмерные координаты равны числам Рейнольдса, вычисленным по ним, а безразмерное время по порядку величины соответствует числу Рейнольдса по продольной координате при развитии пограничного слоя по пространству. Продольную, поперечную и вертикальную (нормальную к стенкам канала) составляющие скорости обозначим u, v, w , а давление – p .

Течение как до, так и после появления канала описывается уравнениями Навье–Стокса. При $t>0$ их решение должно удовлетворять условию прилипания на стенках. Исходное поле скоростей турбулентного течения в момент появления канала, которое обозначим $V_-(x, y, z)$, им не удовлетворяет, поэтому не может служить начальными условиями для решения после его появления. Чтобы сформулировать корректные начальные условия предположим, что завихренность остается неизменной при появлении канала, а скорости меняются так, чтобы обеспечить условие непротекания на стенках. Такое начальное поле скоростей V_+ получается добавлением к исходному потенциального течения с противоположной вертикальной скоростью на стенках канала

$$V_+ = \mathbf{i} + V_- + \nabla\varphi \tag{1.1}$$

$$\Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, y, \pm D) = -w_-(x, y, \pm D)$$

Здесь \mathbf{i} – единичный вектор в направлении оси абсцисс, w_- – вертикальная скорость в исходном турбулентном течении, D – безразмерная полувысота канала. Заметим, что при таком задании граничных

условий тангенциальная составляющая скорости на стенках канала отлична от нуля. Однако тангенциальные разрывы скорости обычны для начальных условий задач о течении вязкой жидкости и не вызывают трудностей при их численном решении. Аналогичный способ задания начальных условий применялся в [11–13] для изучения взаимодействия вихревых мод с пограничным слоем плоской пластины.

Исходная турбулентность и течение после появления канала находились с помощью численного решения уравнений Навье–Стокса. Составляющие скорости и давление считались периодическими в направлениях параллельных стенкам канала и искались в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ w \\ p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^N \left[\sum_{m=0}^M \begin{pmatrix} u_{mn} \\ w_{mn} \\ p_{mn} \end{pmatrix} (z, t) e^{i\alpha_m(x-ct)} + (c.c.) \right] \cos \beta_n y \\ v &= \sum_{n=1}^N \left[\sum_{m=1}^M \left(v_{mn} e^{i\alpha_m(x-ct)} + (c.c.) \right) \right] \sin \beta_n y \\ \alpha &= \pi/L_x; \beta = \pi/L_y; \alpha_m = m\alpha; \beta_n = n\beta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $(c.c.)$ означает выражение, комплексно сопряженное первому слагаемому, $U_0(z, t)$ – скорость основного течения, равная нулю до появления канала и соответствующая желаемому профилю скорости при ламинарном течении в канале после его появления, $2L_x$ и $2L_y$ – продольный и поперечный периоды течения. Параметр c , имеет смысл скорости движения системы отсчета, в которой рассматривается развитие возмущений. Чтобы обеспечить наименее быстрое изменение решения он выбирался равным характерной скорости распространения возмущений. При моделировании исходного турбулентного течения она равна нулю и расчет проводился для $c=0$. В пограничном слое скорость возмущений варьируется от 0.3 для волн Толлмина–Шлихтинга до 0.9 для переднего фронта полосчатых структур. Поэтому расчет развития возмущений после появления канала выполнялся для некоторой средней скорости движения системы отсчета $c=0.7$. Для уменьшения объема вычислений u, v, p считались четными, а w – нечетной функцией y . Такое упрощенное представление возмущений часто используется при численном моделировании турбулентных течений и не приводит к заметным ошибкам [14].

При расчете течения до и после появления канала использовались различные способы дискретизации по вертикальной координате. При моделировании исходной турбулентности течение считалось периодическим по z с периодом L_z и амплитуды составляющих скорости и давления в (1.2) искались в виде

$$\begin{pmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ p_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^J \begin{pmatrix} u_{mnj} \\ v_{mnj} \\ p_{mnj} \end{pmatrix} \cos \delta_j z; \quad w_{mn} = \sum_{j=0}^J w_{mnj} \sin \delta_j z; \quad \delta = \pi/L_z; \quad \delta_j = j\delta$$

Чтобы обеспечить возможность изучать влияние скорости нарастания толщины пограничного слоя и инкрементов нарастания волн неустойчивости на процесс их генерации форма профиля скорости $U_0(z, t)$ могла быть задана произвольной. Для этого в уравнение продольного импульса добавлялась объемная сила F_x обеспечивающая выбранную форму профиля осредненной скорости при ламинарном режиме течения

$$F_x(z, t) = \frac{\partial U_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}$$

Представленные далее результаты получены для профиля скорости, соответствующему автомодельному решению Фолкнера–Скэн

$$U_0 = f'(\eta); \quad \eta = \frac{D \pm z}{\sqrt{\delta t}}$$

$$f''' + ff'' + \frac{2m}{m+1}(1-f^2) = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0; f'\left(\frac{D}{2\sqrt{\delta r}}\right) = 1$$

Здесь знаки “+” и “-” в выражении для η соответствуют нижней и верхней половине канала, а граничное условие при $h \rightarrow \infty$ для уравнения Фолкнера–Скэн перенесено на его плоскость симметрии. Параметр δ , определяющий скорость нарастания толщины пограничного слоя выбирался равным 1 или 3. Показатель степени $m = -0.05$, определяющий форму профиля скорости, соответствовал пограничному слою со слабым положительным градиентом давления. Это позволило увеличить скорость роста волн неустойчивости в несколько раз, по сравнению с профилем скорости в слое Стокса, и существенно уменьшило время расчета.

Турбулентность потока порождает в пограничном слое два вида возмущений: вытянутые в направлении потока полосчатые структуры, имеющие длину порядка ста его толщин и волны Толлмина–Шлихтинга с заметно меньшим продольным периодом. Кроме этих масштабов, корректное описание нелинейных процессов требует разрешать, как минимум вторую гармонику волн неустойчивости с продольным периодом в несколько толщин пограничного слоя. Поперечный период нарастающих волн неустойчивости составляет десятки его толщин, а у полосчатых структур он в два-три раза меньше. Учитывая характерную толщину пограничного слоя на стенках канала в конце расчетов $\sim 0.1 \div 0.2D$ и оценки масштабов разных возмущений были выбраны следующие размеры расчетной области: длина $2L_x = 100D$, ширина и высота $2L_y = 2L_z = 10D$. Количество гармоник в продольном и поперечных направлениях подбирались так, чтобы максимальные волновые числа $\alpha_M, \beta_M, \delta_J$, определяющие минимальный размер разрешаемых пульсаций скорости примерно совпадали. Из этих соображений были выбраны на порядок отличающиеся количества гармоник $J=N=17$ и $M=170$ при аппроксимации решения по поперечным и продольной координатам.

Начальные условия при моделировании исходного турбулентного течения соответствовали одномерному спектру пульсаций продольной составляющей скорости $E_1(k)$, заданному эмпирической формулой из [15]

$$E_1(k) = \frac{1}{\pi} \frac{Tu^2}{1 + b(kL)^{5/3}} e^{-5.6kL/R_t^{5/3}}; b = \frac{1.35}{1 + 35R_t^{-5/3}}; R_t = TuL \tag{1.3}$$

Здесь Tu и L – степень и масштаб турбулентности. Для обеспечения изотропности турбулентности амплитуды составляющих скорости отдельных гармоник были одинаковыми, а их фазы выбирались случайными. Более подробно способ задания начальных условий для расчета эволюции однородной изотропной турбулентности описан в [16].

За исходное поле скоростей в момент появления канала V - примем решение задачи об эволюции однородной изотропной турбулентности в некоторый момент времени t , сдвинутое по оси z на расстояние d . Начальное поле скоростей для расчета течения в канале после его появления находилось из (1.1). Уравнение Лапласа для ϕ решалось аналитически. Способ нахождения начального поля скоростей для расчета течения в канале подробно см. в [16].

При расчете течения в канале для аппроксимации решения по z использовался метод коллокаций. В качестве узлов коллокации z_1 использовались нули полинома Якоби $P_Q^{(1,1)}(z)$. Количество узлов Q выбиралось равным 61. Для аппроксимации решения по времени применялась схема Кранка-Николсона. Нелинейные члены находились с помощью быстрого преобразования Фурье. Метод расчета течения в канале аналогичен описанному в [17,18] и отличен от него фиксированными фазовой скоростью возмущений $c=0.7$ и шагом по времени $\tau=0.01$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В качестве начальных условий использовались три состояния турбулентного течения с разной интенсивностью пульсаций продольной компоненты скорости $Tu = 0.1, 0.2, 0.5\%$ и близкими масштабами

Таблица 1. Характеристики исходных турбулентных течений

Tu	ϵ_u	ϵ_v	ϵ_w	L	λ	$R\lambda$
0.1%	1.00×10^{-3}	1.06×10^{-3}	1.02×10^{-3}	24900	14100	14.1
0.2%	2.00×10^{-3}	2.08×10^{-3}	1.99×10^{-3}	20000	10500	21.0
0.5%	5.00×10^{-3}	5.09×10^{-3}	4.95×10^{-3}	24500	5030	25.6

турбулентности $L \sim 20000$. Они были получены в результате расчета однородной изотропной турбулентности с начальными условиями (1.3), соответствующими $Tu=1.5\%$ и разными интегральными масштабами. Каждый из расчетов заканчивался при достижении амплитудой пульсаций продольной компоненты скорости заданного значения $\epsilon_u = 0.001, 0.002, 0.005$ соответственно. Основные характеристики турбулентности – среднеквадратичные амплитуды пульсаций компонент скорости $\epsilon_u, \epsilon_v, \epsilon_w$, интегральный L и диссипативный λ масштабы и турбулентное число Рейнольдса R_λ для этих состояний приведены в таблице. Эти характеристики определялись следующим образом:

$$\{\epsilon_u^2, \epsilon_v^2, \epsilon_w^2\} = \frac{1}{8L_x L_y L_z} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_z}^{L_z} \{u^2, v^2, w^2\} dx dy dz$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{8L_x L_y L_z} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_z}^{L_z} \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}^2| dx dy dz; \quad E = \frac{1}{2} [\epsilon_u^2 + \epsilon_v^2 + \epsilon_w^2]$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{10}{3} \frac{E}{\Omega^2}}; \quad L = \frac{2\pi}{E} F_\alpha [u^2](0); \quad R = \lambda \sqrt{2E}$$

где E и Ω – энергия и энстрофия, $\boldsymbol{\omega}$ – завихренность, $F_\alpha [u^2]$ – спектральная плотность квадрата продольной компоненты скорости по продольному волновому числу. Из таблицы видно, что рассматриваемые течения при существенно разном уровне турбулентности имеют примерно одинаковый ее интегральный масштаб. Все эти турбулентные течения достаточно изотропны по критерию равенства амплитуды всех компонент пульсаций скорости.

Спектры пульсаций скорости в исходных турбулентных течениях показаны на рис. 1. Из-за малого турбулентного числа Рейнольдса $R\lambda$ у них отсутствует линейный участок $S \sim k^{-5/3}$, соответствующий инерционному интервалу. Затухание спектров при увеличении волнового числа заметно усиливается с уменьшением степени турбулентности. Это приводит к тому, что амплитуда пульсаций скорости в интервале длин волн характерных для волн Толлмина-Шлихтинга снижается при уменьшении уровня турбулентности значительно быстрее, чем их интегральная амплитуда. Продольные спектры u по продольному волновому числу α и v по поперечному волновому числу β во всех трех течениях практически совпадают для малых и средних масштабов. В крупных масштабах имеется анизотропность, проявляющаяся в том, что спектры пульсаций поперечной скорости лежат несколько выше, чем продольной. Заметим, что в анизотропность турбулентности в набегающем потоке примерно такого же или даже большего уровня наблюдалась и в экспериментах [19,20]. Она есть следствие выделенного направления потока и влияния стенок рабочей части трубы.

Для каждого режима (комбинации степени турбулентности Tu и скорости нарастания пограничного слоя, задаваемой параметром δ) были выполнены четыре расчета развития возмущений в канале отличающиеся сдвигом его оси $d = (1.25, 2.5, 3.75, 5)D$ относительно исходного турбулентного течения. Если считать, что сдвиговые слои на верхней и нижней стенках канала развиваются независимо, то в результате для каждого режима было получено восемь различных решений задачи о развитии возмущений в пограничном слое. Их анализ показал, что все характеристики порождаемой турбулентностью возмущений сильно зависят от сдвига оси канала d . Это объясняется неоднородностью мгновенного поля турбулентных пульсаций по вертикальной координате, которая приводит к разной начальной амплитуде порождаемых в пограничных слоях возмущений. Сильная зависимость решения от места расположения

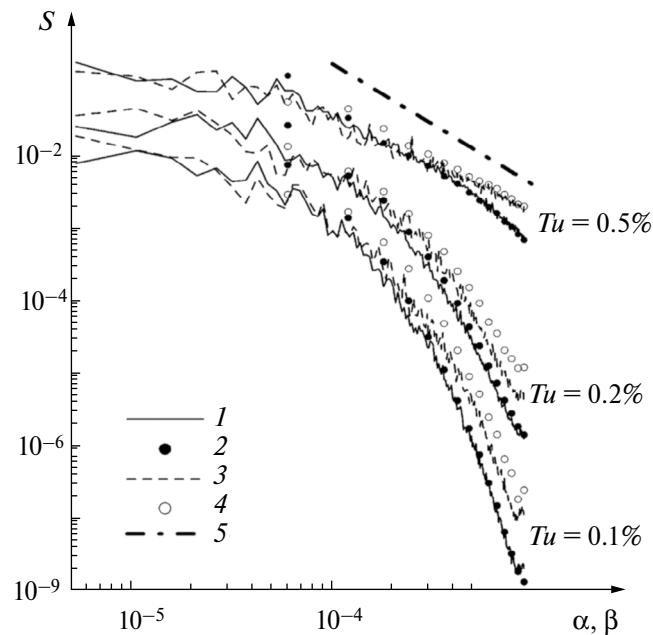


Рис. 1. Спектры пульсаций скорости в исходных турбулентных течениях: 1 – $S_\alpha[u^2]$, 2 – $S_\beta[v^2]$, 3 – $S_\alpha[v^2]$, 4 – $S_\beta[u^2]$, 5 – закон Колмогорова-Обухова, $S \sim k^{-5/3}$.

стенки объясняется малыми поперечными размерами (периодами) расчетной области, которые сравнимы с интегральным масштабом турбулентности. В реальном пограничном слое на пластине, помещенной в турбулентный поток, области с разной интенсивностью пульсаций чередуются по пространству и времени и в эксперименте наблюдается некая осредненная картина развития возмущений. При численном моделировании аналогичный результат может быть получен за счет осреднения решений, соответствующих разным d . Приведенные ниже результаты, если это не оговорено специально, получены с помощью такого осреднения по восьми расчетам пограничного слоя на двух стенках при четырех вышеуказанных смещениях оси канала.

Общий характер развития возмущений в пограничном слое показывают их спектры, приведенные на рис. 2. Эти и последующие данные получены для расстояния от стенки, соответствующего значению автомодельной переменной; $\eta = (D \pm z) / \sqrt{\delta t} = 1.4$. На этой высоте близки к максимуму как полосчатые структуры, так и волны Толлмина–Шлихтинга, развивающиеся в пограничном слое при воздействии внешней турбулентности. Результаты, показанные на остальных рисунках этой статьи (кроме рис. 5), также соответствуют этому расстоянию от стенки. Спектры по продольному волновому числу показывают, что в начале доминируют длинноволновые полосчатые структуры, характерные для перехода при повышенной степени турбулентности потока. На рис. 2б видно, что их спектр по поперечному волновому числу достаточно широкий, что, вероятно, связано со слабой избирательностью механизма алгебраического роста. В дальнейшем в спектрах по продольному волновому числу появляется максимум в диапазоне $\alpha \delta_{\text{пс}} = 0.2 \div 0.4$, где $\delta_{\text{пс}} = 2\sqrt{\delta t}$ – характерная толщина пограничного слоя в момент времени t . Такие волновые числа характерны для волн Толлмина–Шлихтинга в окрестности верхней ветви нейтральной кривой. Эти возмущения быстро нарастают до амплитуды сравнимой с полосчатыми структурами. В конце расчета происходит разрушение ламинарного режима течения вследствие нелинейных процессов, которые начинаются с появлением в спектре по α второй гармоники. В двумерном спектре по продольному и поперечному волновым числам в момент времени $t=8 \times 10^5$, перед началом нелинейной стадии перехода, ясно виден максимум при $\alpha \sim 4 \times 10^{-4}$, $\beta \sim 1 \times 10^{-4}$ соответствующий почти прямым волнам Толлмина–Шлихтинга. Этот максимум довольно широкий вследствие достаточно широкого диапазона, в котором усиливаются эти возмущения в пограничном слое с неблагоприятным градиентом давления, выбранном в качестве основного течения. В целом картина развития возмущений качественно соответствует результатам термоанемометрических измерений при “естественном” ламинарно-турбулентном переходе в пограничном слое на пластине [21].

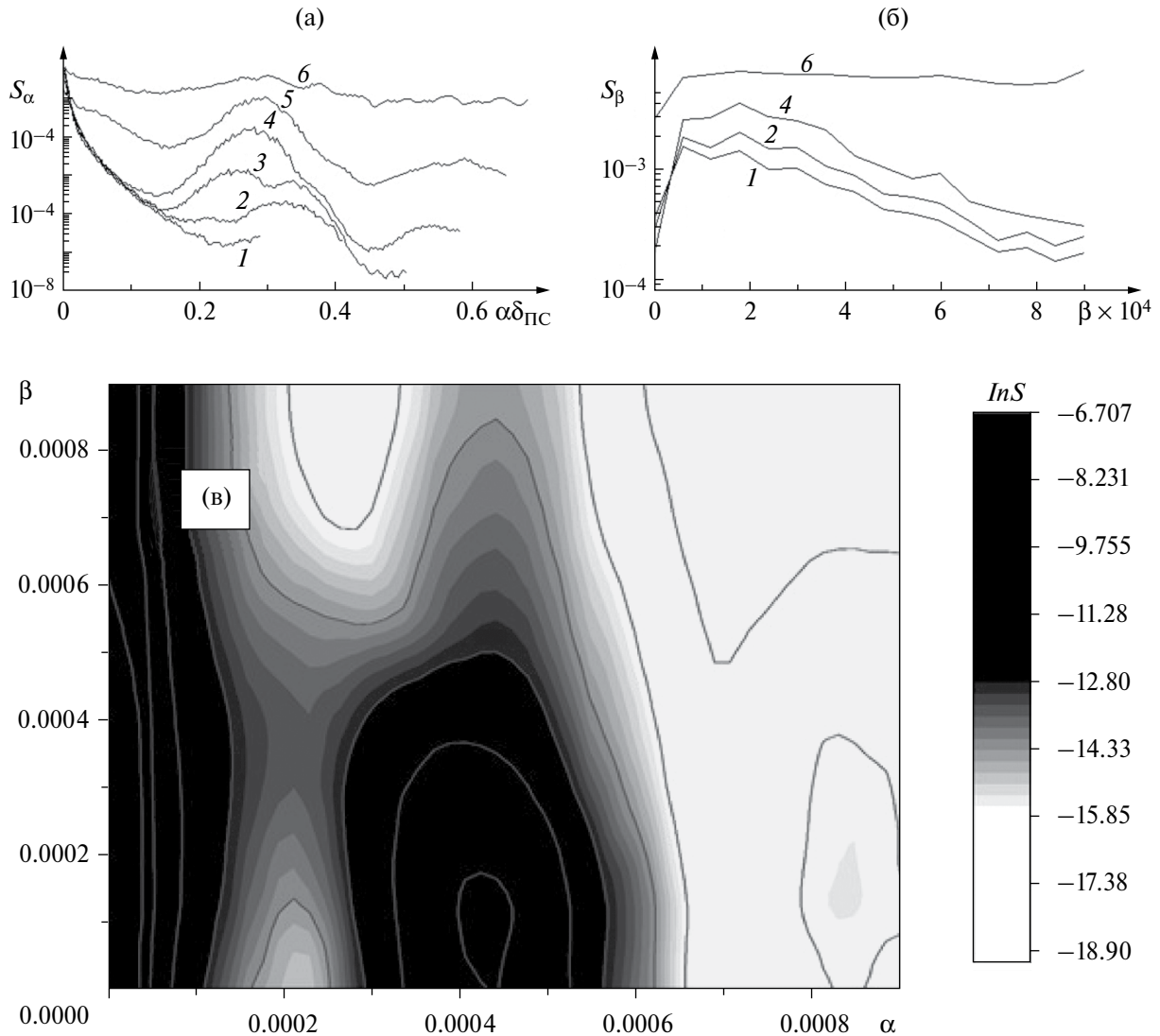


Рис. 2 Спектры пульсаций продольной составляющей скорости в сдвиговом слое по продольному (а), поперечному (б) и двумерный спектр при $t=8.4 \times 10^5$ (в). Цифры (1–6) соответствуют $t=(2,4,6,8, 10) \times 10^5$.

Рост амплитуды основных видов возмущений волн Толлмина–Шлихтинга и полосчатых структур показывает рис. 3. На ней для режимов с $\delta = 1$ и различной степенью начальной турбулентности построены зависимости от времени среднеквадратичной амплитуды суммарных возмущений продольной компоненты скорости в пограничном слое а также их короткопериодической и длиннопериодической части. Длиннопериодическими условно считались возмущения с $\alpha < 2.1 \times 10^{-5}$ заведомо меньшем нижней границы усиления волн Толлмина–Шлихтинга. Короткопериодические возмущения соответствовали диапазону $\alpha > 1.5 \times 10^{-4}$ заведомо включающему неустойчивые моды. Из рис. 3 видно, что рост длиннопериодических возмущений начинается почти сразу после появления канала, однако он происходит достаточно медленно и описывается степенной зависимостью $a \sim t^n$. Это иллюстрируют зависимости от времени амплитуды таких возмущений построенные на рис. 3б в двойном логарифмическом масштабе. Они хорошо аппроксимируются прямыми практически на протяжении всей линейной стадии перехода.

Амплитуда короткопериодических возмущений меняется по более сложному закону. Вначале она затухает, а потом начинает расти, причем как затухание, так и рост происходят по близкому к экспоненциальному закону. Затухание соответствует эффекту вытеснения высокочастотных пульсаций из

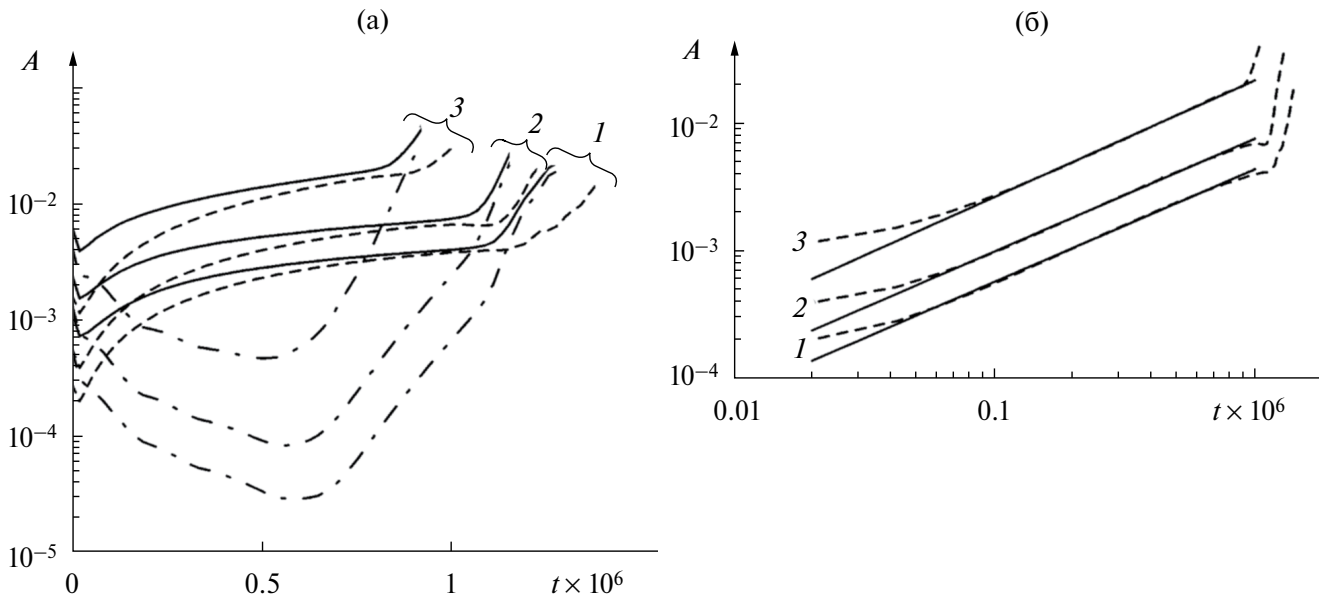


Рис. 3. Зависимости среднеквадратичных амплитуд суммарных (линии сплошные), длиннопериодических (штриховые) и короткопериодических (штрихпунктирные) возмущений в сдвиговом слое от времени (а). Аналогичные зависимости для длиннопериодических возмущений в двойном логарифмическом масштабе (б). (1–3) соответствуют $Tu = 0.1, 0.2$ и 0.5% .

пограничного слоя, которое наблюдается при переходе, вызванном повышенной степенью турбулентности потока, отмеченному, например в эксперименте [15]. В это время, как будет показано далее, среди короткопериодических возмущений доминируют волны с фазовой скоростью равной скорости потока и соответствующие модам непрерывного спектра. На участке роста основной вклад в амплитуду короткопериодических пульсаций вносят волны Толлмина–Шлихтинга, что и объясняет закон их роста. В начале процесса ламинарно-турбулентного перехода основной вклад в суммарную амплитуду пульсаций вносят длиннопериодические, а в конце – короткопериодические возмущения.

Зависимость амплитуды разных видов возмущений в пограничном слое от интенсивности начальной турбулентности показывает рис. 4. На части “а” этой рисунки построены кривые нарастания нормированных на Tu длиннопериодических, короткопериодических и суммарных возмущений для всех режимов при $\delta = 1$. Из них видно, что на линейной стадии перехода нормированные амплитуды длиннопериодических возмущений не зависят от Tu . Это означает их линейную зависимость от степени турбулентности потока. Тот же вывод справедлив и для суммарной амплитуды возмущений на начальном участке их развития. Однако кривые нарастания нормированных короткопериодических возмущений не только не совпадают, но даже не параллельны. Это означает, что начальная амплитуда волн Толлмина–Шлихтинга в пограничном слое нелинейно зависит от интенсивности исходной турбулентности. Кроме того, от нее, хотя и в меньшей мере, зависит и скорость роста этих возмущений. Последняя зависимость слаба для малых Tu , однако становится заметной при увеличении степени турбулентности от 0.2 до 0.5%. Это, по-видимому, связано с нелинейным взаимодействием волн Толлмина–Шлихтинга с полосчатыми структурами, имеющими амплитуду превышающую 1% скорости потока.

Более точно оценить роль нелинейных эффектов на разных стадиях перехода позволяет сравнение результатов расчетов развития возмущений для $Tu = 0.2\%$ и $\delta = 1$, выполненных на основе решения полных и линеаризованных уравнений Навье–Стокса. Его результаты, показанные на рис. 4б наглядно демонстрируют, что нелинейность проявляется только на заключительной стадии перехода при $t > 10^6$ когда суммарная амплитуда возмущений превышает 1%. Процесс же генерации исходных длиннопериодических и короткопериодических возмущений является линейным с высокой степенью точности. Нелинейная зависимость начальной амплитуды короткопериодических возмущений от степени турбулентности потока, следующая из рис. 4а, по всей видимости, объясняется нелинейной зависимостью амплитуды турбулентных пульсаций в соответствующем диапазоне волновых чисел от этого параметра.

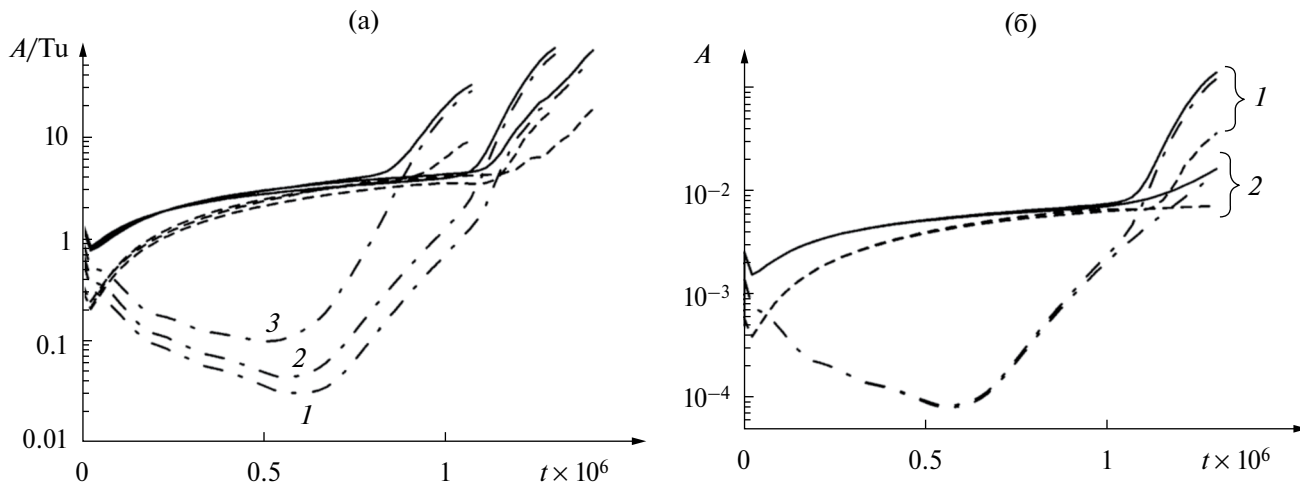


Рис. 4. Зависимости нормированных на Tu амплитуд длиннопериодических, короткопериодических и суммарных возмущений скорости в сдвиговом слое от времени (а). Обозначения аналогичны рис. 3. Сравнение амплитуд этих видов возмущений, полученных при решении полных (1) и линеаризованных (2) уравнений Навье–Стокса для режима $\delta=1, Tu=0.2\%$ (б).

Это, по сути дела, связано с ускорением затухания спектра турбулентности при высоких волновых числах при уменьшении турбулентного числа Рейнольдса.

Основная цель работы – нахождение начальной амплитуды волн Толлмина–Шлихтинга порождаемых турбулентностью потока. Однако задача выделения из набора пульсаций скорости в пограничном слое волны неустойчивости оказалась не простой. Это демонстрирует профиль пульсаций скорости для гармоники с $m=55, n=4$ ($\alpha = 5,8 \times 10^{-4}, \beta = 1.8 \times 10^{-4}$) соответствующей максимуму спектра пульсаций скорости для режима с $\delta = 3, Tu = 0.2\%$ в момент времени $t=4 \times 10^5$ в конце линейной стадии перехода, построенный на рис. 5. Несмотря на осреднение по ансамблю реализаций с разными положениями оси канала и осреднению по набору гармоник в диапазоне $m=50 \div 60$ и $n = 3 \div 5$ полученный профиль пульсаций лишь качественно соответствует собственной функции для волны Толлмина–Шлихтинга. Расхождение, вероятно, вызвано заметным вкладом шума, связанного с некоррелированными с волной неустойчивости вынужденными возмущениями, порождаемыми распространяющимися по центру канала турбулентными вихрями. Вследствие этого, оценка амплитуды волны Толлмина–Шлихтинга по профилю пульсаций отдельных гармоник скорости дает большую погрешность. Более точный результат можно получить с помощью проецирования амплитуды гармоники вертикальной скорости w_{mn} , найденной из численного моделирования, на собственную функцию оператора Орра–Зоммерфельда

$$a_{||}(t) = \frac{\Psi_{mn}^+ w_{mn}(t)}{\Psi_{mn}^+ \Psi_{mn}} \tag{2.1}$$

Здесь Ψ_{mn} и Ψ_{mn}^+ собственные функции обычного и сопряженного операторов Орра–Зоммерфельда для волновых чисел α_m, β_n , а угловые скобки означают скалярное произведение определяемое следующим образом:

$$\phi, \Psi = \sum_{l=1}^Q \Phi^*(z_l) \Psi(z_l) \tag{2.2}$$

Здесь “*” обозначает комплексное сопряжение.

Найденные таким способом зависимости амплитуд проекций возмущений скорости на собственные функции наиболее усиливающихся волн Толлмина–Шлихтинга от времени для всех расчетных случаев построены на рис. 6. Из них видно, что процедура проецирования возмущений на собственную функцию с последующим осреднением по сдвигам оси канала d позволяет избавиться от посторонних

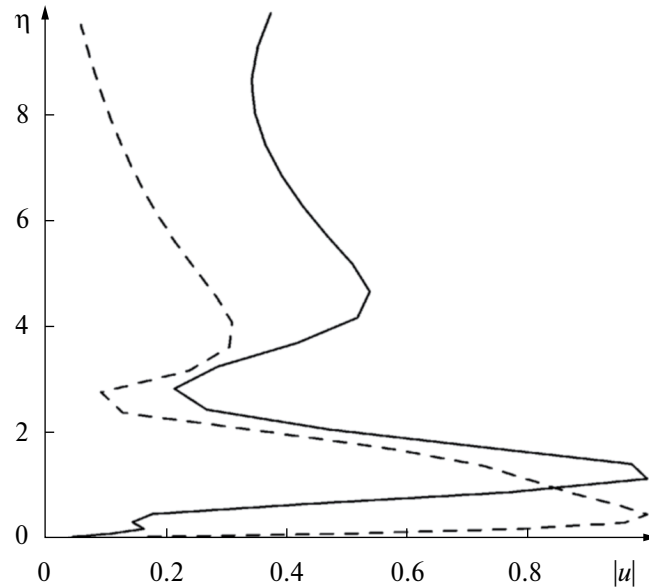


Рис. 5. Сравнение профиля возмущений скорости для гармоники с $m=55$, $n=4$ при $t=6.3 \times 10^5$ (линии сплошные), с собственной функцией уравнения Орра–Зоммерфельда (штриховые).

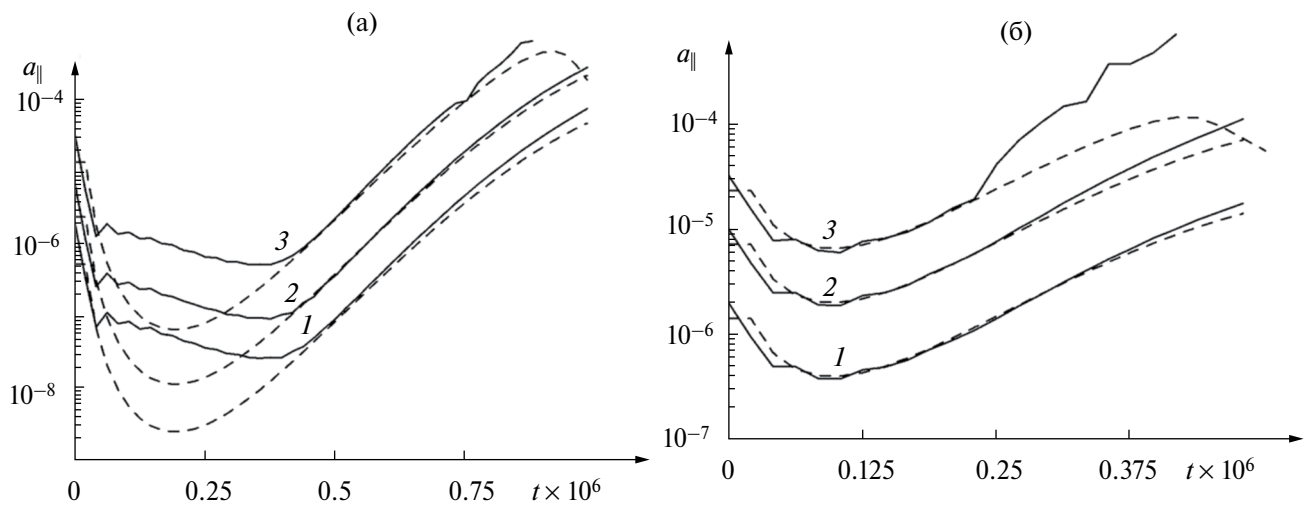


Рис. 6. Зависимости среднеквадратичной амплитуды проекции гармоники возмущений скорости на собственную функцию уравнения О–З для режимов с $\delta=1$ (а) и $\delta=3$ (б) (линии сплошные). Кривые нарастания волны Т–Ш (штриховые). (1–3) соответствуют $Tu=0.1, 0.2$ и 0.5% .

возмущений и дает гладкие зависимости амплитуд проекций от времени на линейной стадии перехода, где возмущения не сильно влияют на профиль скорости в пограничном слое. Для случая $\delta=3$ на этом участке зависимости $a_{||}(t)$ с хорошей точностью совпадают с кривыми нарастания волн Толлмина–Шлихтинга. При $\delta=1$, когда пограничный слой нарастает медленнее, проекция амплитуд пульсаций в окрестности нейтральной точки волны неустойчивости заметно превышает кривую, нарастания с которой она хорошо совпадает как при больших, так и при меньших значениях t . Это объясняется тем, что при взаимодействии вихревых мод турбулентного потока с пограничным слоем появляются два типа возмущений, имеющих одинаковый вертикальный профиль пульсаций: волны Толлмина–Шлихтинга с фазовой скоростью $c \approx 0.3 \div 0.4$ и промежуточная волна, распространяющаяся со скоростью внешних возмущений $c=1$. Появления этих видов возмущений в рамках метода многих масштабов

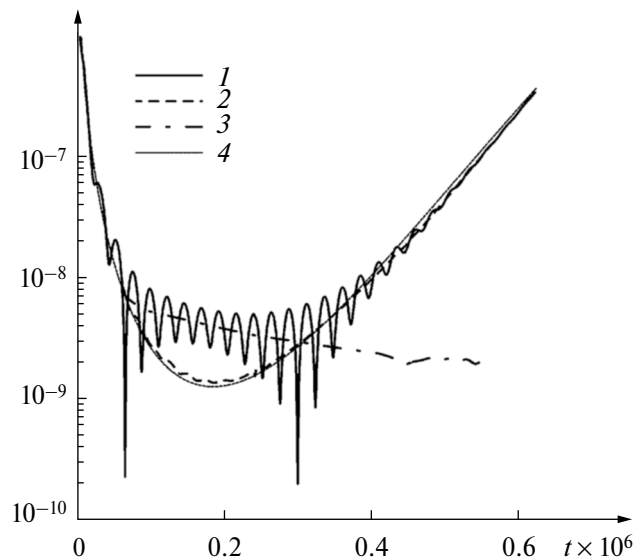


Рис. 7. Зависимости среднеквадратичной амплитуды проекции гармоники возмущений скорости на собственную функцию уравнения О–З (1), волны Т–Ш (2) и промежуточной волны (3) от времени для решения при $\delta=1$, $Tu=0.2\%$, $d=0.375D$. (4) – теоретическая кривая нарастания волны Т–Ш.

обосновано в [5]. Осреднение по ансамблю реализаций, результаты которого приведены на рис. 6, приводит к потере информации о фазе амплитуды $a_{\parallel}(t)$. По этой причине разделение проекции пульсаций скорости на волну неустойчивости и промежуточную волну может быть выполнено только для одной из реализаций задачи о взаимодействии турбулентности с сдвиговым слоем на стенке канала. Результаты такой операции в виде зависимостей амплитуд проекции $a_{\parallel}(t)$, волны Толлмина–Шлихтинга и промежуточной волны от времени показаны на рис. 7 для случая сдвигового слоя на нижней стенке при $d=3.75D$. В полном соответствии с выводами теории [5, 6], основанной на методе многих масштабов, в зависимости суммарной амплитуды проекции от времени наблюдаются биения возникающие при суперпозиции волны Толлмина–Шлихтинга и промежуточной волны с разными периодами по времени. Эти биения наиболее сильно проявляются в два момента времени до и после критической точки, где обе составляющие возмущений имеют близкие амплитуды и уменьшаются, когда одна из них явно доминирует.

Зависимость амплитуды волны Толлмина–Шлихтинга, выделенной из проекции на собственную функцию, с хорошей точностью совпадает с теоретической кривой ее нарастания. Это свидетельствует о том, что генерация волны неустойчивости исходной турбулентностью происходит, главным образом, на сильной неоднородности пограничного в самом начале его эволюции (примерно до $t \sim 4 \times 10^4$). В этот интервал времени соответствующая волне неустойчивости мода появляется из непрерывного спектра, описывающего взаимодействие вихревых возмущений с пограничным слоем. Распределенная генерация на неоднородности пограничного слоя в более поздние моменты времени относительно слаба и изменяет результирующую амплитуду волны Толлмина–Шлихтинга не больше чем на 50%. Аналогичный вывод может быть сделан и из осредненных по ансамблю реализаций данных, показанных на рис. 6.

Зависимости амплитуды наиболее усиливающейся волны неустойчивости в нейтральной точке от степени турбулентности потока, найденные на основе аппроксимации зависимостей $a_{\parallel}(t)$ теоретическими кривыми нарастания для двух видов основного течения с $\delta=1$ и 3, построены на рис. 8а. Аналогичные результаты для N-факторов, определенным по критерию достижения суммарной амплитудой возмущений уровня 5%, показаны на рис. 8 б. Эти результаты хорошо аппроксимируются степенными зависимостями амплитуды волны Толлмина–Шлихтинга в нейтральной точке A_{TS0} от степени турбулентности

$$A_{TS0} \sim Tu^{1.86}; \delta=1 \quad (2.3)$$

$$A_{TS0} \sim Tu^{1.51}; \delta=3$$

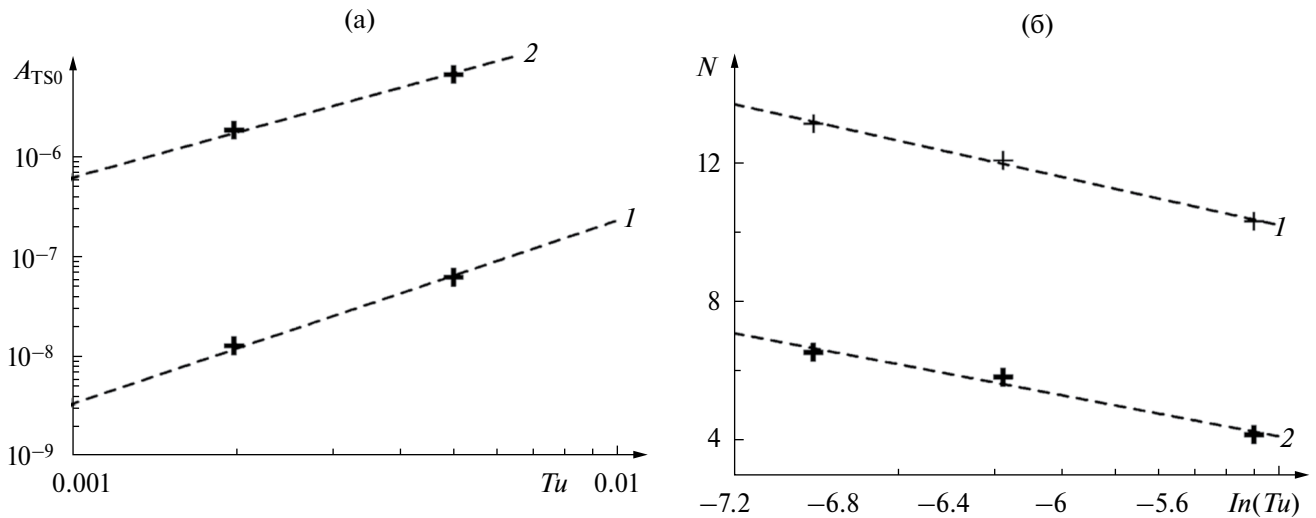


Рис. 8. Зависимости амплитуды волны Т–Ш в нейтральной точке (а) и N-фактора перехода (б) от степени исходной турбулентности. (1, 2) соответствуют $\delta=1$ и 3.

и линейными зависимостями от $\ln(Tu)$ для N-факторов, аналогичными корреляции Мэка

$$N = -1.75\ln(Tu) + 1.08; \quad \delta = 1$$

$$N = -1.49\ln(Tu) - 3.65; \quad \delta = 3$$

Эти корреляции показывают, что амплитуда волн неустойчивости действительно нелинейно зависит от степени турбулентности потока. Однако показатель степени в этой зависимости существенно меньше значения 2.4, следующего из корреляции Мэка и не постоянен, а зависит от скорости нарастания пограничного слоя. Нелинейная зависимость A_{Ts0} от Tu связана не с нелинейностью процесса генерации волн неустойчивости турбулентностью потока, а вызвана изменением спектра турбулентности в диапазоне волновых чисел характерных для вызывающих ламинарно-турбулентный переход возмущений. При уменьшении характерной толщины пограничного слоя в точке перехода, определяемой параметром δ , эти волновые числа увеличиваются и спектр турбулентности для них более сильно затухает с уменьшением Tu . Это объясняет увеличение показателя степени в (2.3) при уменьшении δ .

Рисунок 8 также показывает, что при одинаковой степени турбулентности, амплитуды волн неустойчивости в нейтральной точке и соответствующие им N-факторы не универсальны, а сильно зависят от скорости нарастания пограничного слоя. Более универсальной величиной является амплитуда волны неустойчивости в точке появления соответствующей моды из непрерывного спектра. Однако даже эта начальная амплитуда также сильно и нелинейно зависит от степени, и, вероятно, масштаба турбулентности из-за изменения ее спектра в диапазоне волновых чисел, ответственных за переход. Наиболее консервативной величиной, учитывающей этот фактор, должен быть коэффициент восприимчивости $r_b(\alpha, \beta)$, определяемый как отношение амплитуд спектров пульсаций продольной составляющей скорости в исходном турбулентном течении и волн Толлмина–Шлихтинга при достаточно малом времени t_b с момента появления канала

$$r_b = \left[\frac{S_{\alpha\beta}(A_{Ts}^2)(t_b)}{S_{\alpha\beta}(u_{Tu}^2)} \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

Распределения этого коэффициента восприимчивости в плоскости α, β для режимов с наибольшей и наименьшей степенью турбулентности и двух параметров δ показаны на рис. 9. Вместо амплитуд волн Толлмина–Шлихтинга при их вычислении использовались практически равные им проекции

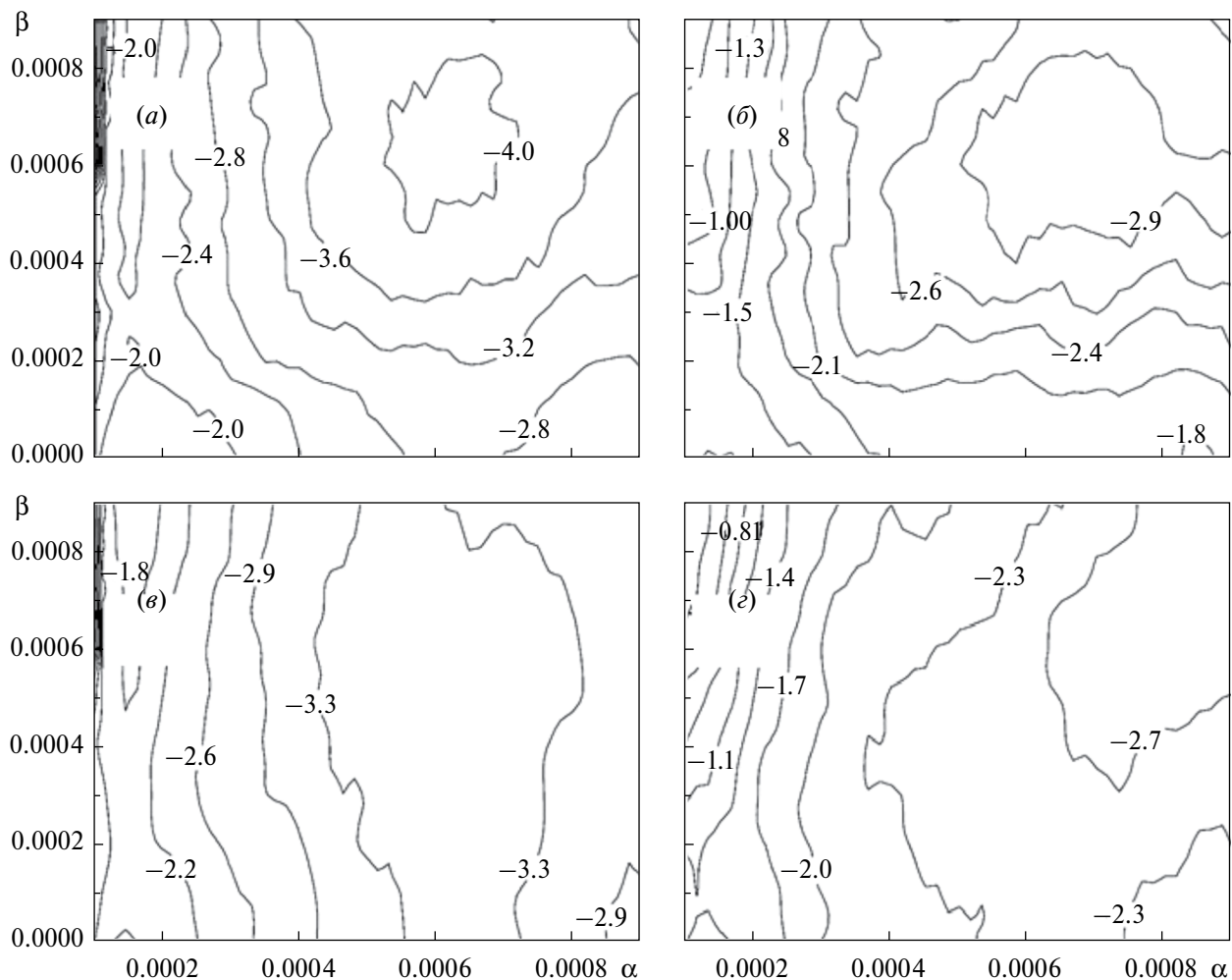


Рис. 9. Изолинии $\ln(r_b)$ в плоскости (α, β) , рассчитанные по (2.4) для режимов $\delta=1, Tu=0.1\%$ (а), $\delta=1, Tu=0.5\%$ (б), $\delta=3, Tu=0.1\%$ (в), $\delta=3, Tu=0.5\%$ (г).

пульсаций скорости на собственные функции $a_{||}(t)$, квадраты модулей которых усреднялись по реализациям. Данные, приведенные на рис. 9, свидетельствуют о том, что определенные по (2.4) коэффициенты восприимчивости достаточно слабо зависят от Tu и δ . В области волновых чисел, ответственных за ламинарно-турбулентный переход, их величина примерно постоянна и близка к 0.1. Это значение коэффициента восприимчивости в начальной точке можно, в качестве первого приближения, использовать в амплитудном методе предсказания перехода и при развитии пограничного слоя и возмущений по пространству.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью численного моделирования развития возмущений, созданных исходным турбулентным течением в пограничном слое, нарастающем по времени, получены следующие результаты.

– Ламинарно-турбулентный переход вызван усилением волн Толлмина–Шлихтинга.

– Начальная амплитуда этих волн нелинейно зависит от степени турбулентности исходного течения. Однако процесс генерации и последующего развития возмущений в пограничном слое описывается линейными уравнениями вплоть до достижения ими амплитуды порядка 1%. Нелинейная зависимость амплитуды волн неустойчивости от Tu обусловлена зависимостью формы спектра турбулентности от турбулентного числа Рейнольдса.

– Зависимость N-фактора перехода от степени исходной турбулентности описывается эмпирической формулой аналогичной корреляции Мэка, но с другим меньшим коэффициентом при $\ln(Tu)$.

– Генерация волн неустойчивости происходит на сильной неоднородности пограничного слоя в интервале времени, включающем момент появления соответствующей моды из непрерывного спектра. Вклад механизма ее распределенной генерации на слабой неоднородности в окрестности нейтральной точки в конечную амплитуду волны неустойчивости относительно мал.

– Универсальной величиной, описывающей генерацию волн неустойчивости турбулентностью, является отношение амплитуд спектров волн Толлмина–Шлихтинга в начальной точке и турбулентных пульсаций.

Данные выводы получены для развития пограничного слоя и волн неустойчивости по времени. Их справедливость для случая пространственной эволюции течения требуют дополнительных исследований.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 21-09-00307).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ustinov M.V., Kachanov Y.S.* Comparison of amplitude method of roughness-induced swept-wing transition prediction with experiment // *Physics of Fluids*. 2021. V. 33 (9). 094105.
2. *Чухахов П.В., Федоров А.В.* Статистическая модель начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода, вызванного атмосферными микрочастицами// Тез.докл. 13 Всероссийский съезд по проблемам теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г.
3. *Goldstein M.E.* The evolution of Tollmien–Schlichting waves near the leading edge//*J. Fluid Mech.* 1983. V.127. P. 59–81.
4. *Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я.* Возникновение волны Толлмина–Шлихтинга в пограничном слое при воздействии внешних возмущений//Иzv. АН СССР. МЖГ. 1978. С. 85–94.
5. *Жигулев В.Н., Федоров А.В.* Исследование возбуждения волн Толлмина–Шлихтинга. Препринт СО АН СССР, 1982. С 27–33.
6. *Жигулев В.Н., Тумин А.М.* Возникновение турбулентности. Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивостей в пограничных слоях. Новосибирск: Наука, 1987. 280 с.
7. *Устинов М.В.* Генерация волн Толлмина–Шлихтинга турбулентностью потока// Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 4. С. 58–72
8. *Mack L.M.* Transition prediction and linear stability theory // *AGARD Conf. proc.* CP-224. 1977. P. 1/1–22.
9. *Parekh D.E., Pulin P., Wlezin R.W.* Boundary layer receptivity to convected gusts and sound // *Boundary Layer Stability and Transition to Turbulence FED-114/ Ed. C.L. Reda et al. N.Y.: ASME, 1991. P. 69–76.*
10. *Buter T.A., Reed H.L.* Numerical investigations of receptivity to freestream vorticity // *AIAA Paper.*1993. № 93–0073.
11. *Leib S.J., Wundrow D.W., Goldstein M.E.* Effects of free-stream turbulence and other vortical disturbances on a laminar boundary layer // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 380. P. 169–203.
12. *Устинов М.В.* Восприимчивость пограничного слоя на плоской пластине к турбулентности набегающего потока//Иzv. РАН МЖГ. 2003. № 3. С. 56–68
13. *Устинов М.В.* Численное моделирование развития полосчатой структуры в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока//Иzv. РАН МЖГ. 2004. № 2. С. 103–119
14. *Rozhdestvensky B.L., Simakin I.N.* Secondary flows in a plane channel: their relationship and comparison with turbulent flows// *J. Fluid Mech.*1987. P. 261–289.
15. *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Кузнецов В.Р.* Проникновение трехмерных низкочастотных пульсаций скорости внешнего потока в ламинарный пограничный слой на плоской пластине// Труды ЦИАМ.1991. № 1287.С. 197–236.
16. *Устинов М.В.* Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока//Иzv. РАН МЖГ. 2006. № 6. С. 77–93
17. *Рождественский Б.Л., Стойнов М.И.* Алгоритмы интегрирования уравнений Навье–Стокса, имеющие аналоги законам сохранения массы, импульса и энергии. Препринт № 119 ИПМ им. М.В. Келдыша. 1987. 28 с.

18. Устинов М.В. Исследование субгармонического перехода в плоском канале методом прямого численного моделирования// Изв. АН СССР МЖГ. 1993. № 3. С. 46–53
19. Westin K.J.A., Boiko A.V., Klingmann B.G., Kozlov V.V., Alfredsson P.H. Experiments in a boundary layer subjected to freestream turbulence. Pt I: Boundary layer structure and receptivity// J. Fluid Mech. 1994. V. 281. P. 193–218.
20. Matsubara M., Alfredsson P.H. Disturbance growth in boundary layers subjected to free-stream turbulence// J. Fluid Mech. 2001. V. 430. P. 149–168.
21. Филиппов В.М. Экспериментальное исследование влияния градиента давления на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный// Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 6. С. 114–118.

Numerical Simulation of Tollmien-Schlichting Wave Generation by Flow Turbulence

M. V. Ustinov^{a, b}

^a*Zhukovski Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Moscow oblast, Russia*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology (MPhTI), Dolgoprudny, Moscow oblast, Russia*

e-mail: umax1961@gmail.com

The disturbances generated by external turbulence in the shear layer on a flat plate suddenly set in motion are found. As the initial conditions, turbulent flow found using direct numerical simulation of the development of isotropic homogeneous turbulence is used. The solution obtained models laminar-turbulent transition in the boundary layer on a flat plate under relatively low free-stream turbulence when the transition is caused by Tollmien-Schlichting waves. The solution makes it possible to describe the process of generating various disturbances, namely, low-frequency streaky structures and instability waves and also their development in the initial stage of laminar-turbulent transition. Based on the processing of the obtained results, a simple model is proposed that relates the spectra of instability waves in the boundary layer and turbulent pulsations in free-stream flow. The dependences of the initial amplitude of instability waves and their critical amplification factors (N -factors) on the degree of flow turbulence are also obtained.

Keywords: hydrodynamic instability, turbulence, laminar-turbulent transition, receptivity, boundary layer.