

УДК 532.5:539.3

ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2024 г. Ж. В. Маленко^{a, b, *}, А. А. Ярошенко^{a, b, **}

^aМорской институт им. вице-адмирала В. А. Корнилова – филиал «ГМУ им. адмирала Ф. Ф. Ушакова», Севастополь, Россия

^bСевастопольский государственный университет, Севастополь, Россия

*e-mail: zhvla17@mail.ru

**e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.12.2023 г.

После доработки 30.01.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

Проводится исследование колебаний плавающего ледяного покрова под действием движущихся возмущений переменной интенсивности. В основу модели колебаний плавающего ледяного покрова положены линеаризованные уравнения гидромеханики и линейная классическая теория колебаний пластин. Ледяной покров рассматривается как тонкая упругая изотропная пластинка. Определены значения критических скоростей, при которых меняется характер волнового возмущения, как впереди источника возмущений, так и за ним. Исследована зависимость критических скоростей от частоты колебаний источника; получено шесть значений критических скоростей. Показано, что в зависимости от скорости перемещения источника и частоты его колебаний образуется от одной до семи систем волн. Определены угловые зоны, в которых образуются эти волны. Исследовано влияние сил сжатия и растяжения на значения критических скоростей и угловых зон, в которых распространяются волны.

Ключевые слова: изгибно-гравитационные волны, ледяной покров, критическая скорость, упругая пластина.

DOI: 10.31857/S1024708424030042, **EDN:** PGCWOD

Исследование изгибно-гравитационных волн, возникающих в плавающем ледяном покрове при движении по нему различного рода нагрузок, имеет длинную историю. Развитие этих исследований было обусловлено использованием ледяного покрова в качестве ледовых переправ, обустройством на реках и озерах ледовых дорог, а также в некоторых случаях и для построения на льду взлетно-посадочных полос и аэродромов.

Одной и первых фундаментальных работ, посвященных распространению волн в ледяном покрове, в том числе и от движущихся возмущений, является монография [1], в которой в основном рассматриваются плоские (двухмерные) задачи. Исследуется реакция бесконечных пластин, плавающих на слое жидкости конечной глубины. Проанализированы прогибы, вызванные нагрузкой, движущейся с равномерной скоростью.

Экспериментальным исследованиям посвящена монография [2], в которой рассматриваются возможности резонансного метода разрушения ледяного покрова. В коллективной монографии зарубежных авторов [3] рассмотрены трехмерные задачи, приведена библиография и выполнен анализ работ, посвященных движущимся по льду источникам возмущений, вплоть до 1995 г. Теоретическим исследованиям волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом посвящена монография [4]. В книге рассматриваются задачи, связанные с колебаниями ледяного покрова при движении по нему различного рода нагрузок. В [5] приводятся результаты теоретических расчетов и экспериментальных исследований, проведенных в опытовом ледовом бассейне; приводятся результаты модельных экспериментов по ледо-разрушающей способности изгибно-гравитационных волн, вызванных одиночной и парной нагрузками.

В [6–9] для решения задач о колебаниях ледяного покрова, вызванных движущейся нагрузкой, используются численные методы, причем алгоритм решения основан на методе конечных элементов

и методе конечных разностей. Путем численного решения дифференциальных уравнений колебаний ледяного покрова проводится исследование его напряженно-деформированного состояния. В [8, 9] для численного решения задачи разработан и обоснован новый конечно-разностный метод аппроксимации. В [8] приведены результаты численных экспериментов по изучению поведения плавающего ледяного покрова при движении по нему автомобилей. В [9] обсуждаются результаты численного моделирования посадки самолетов на ледовые аэродромы. Работа [10] посвящена исследованию прогибов и нормальных напряжений в ледяном покрове при взлете и посадке самолета. Исследовано влияние толщины и модуля упругости на напряжения в пластине. Получены графики прогибов ледяного покрова при взлете и посадке для различных значений скорости движения нагрузки, а также в различные моменты времени.

Среди последних работ, в которых для исследования полученного решения применяется метод стационарной фазы, можно отметить работы [11–13]. В статьях исследуются колебания ледяного покрова, плавающего на поверхности бесконечно глубокой жидкости при обтекании локализованного источника возмущений. Методом стационарной фазы построено асимптотическое представление дальних волновых возмущений ледяного покрова. Показано, что основными параметрами, влияющими на структуру волновых возмущений ледяного покрова, являются толщина ледяного покрова и скорость потока.

В работах [4, 14–16] исследуется влияние продольного, поперечного и сдвигового сжатий на поведение трехмерных изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове при равномерном прямолинейном движении по нему нагрузки. В [4, 14] исследуется структура фазовых портретов волн в зависимости от скорости движения источника и сил неравномерного сжатия. В статьях [15, 16] рассматривается задача о движении прямоугольной области по плавающему ледяному покрову с неравномерным сжатием. Учитываются продольное, поперечное и сдвиговое сжимающие усилия. Прямоугольной областью моделируется движение судна на воздушной подушке. В [15] показано, что неравномерное сжатие существенно влияет на волновое возмущение. Волновой след за нагрузкой несимметричен относительно курса движения. В [16] изучено влияние сил неравномерного сжатия при генерации волн внешней нагрузкой, движущейся по поверхности ледяного покрова, так и при движении погруженной в жидкость сферы.

В [17, 18] исследуются колебания ледяного покрова под действием движущейся нагрузки. При этом ледяной покров моделируется тонкой упругой пластинкой с учетом равномерного сжатия. Жидкость считается идеальной несжимаемой при наличии течения со сдвигом скорости. В [17] исследуются критические скорости и прогибы ледяного покрова в зависимости от скорости движения источника, сил сжатия и сдвигового течения. В [18] исследуются деформации ледяного покрова в зависимости от направления движения и градиента скорости течения, а также от коэффициента сжатия.

В зимний период многие реки и озера Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока покрываются ледяным покровом. Возникает необходимость разрушения плавающего ледяного покрова с целью продления навигации на внутренних водных путях. Для этих целей, кроме обычных ледокольных средств используют суда на воздушной подушке (СВП) [19, 20]. Отсутствие у них осадки позволяет разрушать ледяной покров на акваториях любой глубины.

Одним из способов разрушения ледяного покрова при использовании СВП является резонансный метод, который основан на возбуждении в ледяном покрове изгибно-гравитационных волн достаточной амплитуды, чтобы произошло его разрушение [2, 21–23]. При этом важно знать значения критических скоростей, при которых наиболее вероятно разрушение ледяного покрова [24]. Эффективность применения СВП может быть увеличена, если при прямолинейном равномерном движении периодически менять давление в воздушной подушке судна [25, 26].

В [4, 27–30] проводится исследование колебаний ледяного покрова, вызванных движущимися возмущениями переменной интенсивности. В [27] рассматривается плоская задача о неустановившихся колебаниях ледяного покрова, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Ледяной покров рассматривается как тонкая упругая пластина. Для решения задачи применяется преобразование Фурье по переменной x . Получено интегральное представление для возвышения поверхности пластина-жидкость в виде суммы трех интегралов. Для вычисления интегралов применяются методы теории функций комплексной переменной и метод стационарной фазы. В [4, 28] изучаются трехмерные неустановившиеся изгибно-гравитационные волны, которые образуются при движении области гармонически меняющихся со временем давлений по тонкой упругой пластинке, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины. Методом интегральных преобразований Фурье по горизонтальным

координатам x и y и Лапласа по времени получено интегральное представление для возвышения поверхности пластина-жидкость. Асимптотическое исследование интеграла проведено методом стационарной фазы для многомерных интегралов. Показано, что в зависимости от скорости и частоты колебаний источника, может возбуждаться от одной до семи систем волн. В [29] исследуется волновое движение в плавающем морском льду, возбуждаемое перемещением вибрирующего груза. Показано, что при фиксированной частоте увеличение скорости нагрузки приводит к появлению более коротких волн впереди и более длинных волн за нагрузкой. Амплитуда волн впереди нагрузки меньше амплитуды волн за ней. В [30] рассматриваются трехмерные изгибно-гравитационные волны, вызванные давлениями переменной интенсивности. Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой. Определены шесть значений критических скоростей, при которых меняется характер волнового возмущения. Приводятся фазовые портреты образующихся волн в зависимости от скорости движения источника и частоты его колебаний. Определены угловые зоны распространяющихся волн.

В настоящей работе проводится исследование колебаний плавающего ледяного покрова под действием движущихся возмущений переменной интенсивности с учетом сил сжатия и растяжения. Исследуется влияние частоты колебаний источника, сил сжатия и растяжения на значения критических скоростей и угловых зон распространения волн.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть по поверхности сплошного ледяного покрова, плавающего на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H , перемещается нагрузка вида

$$p = p_0 f(x_1, y) \exp(i\sigma t), \quad x_1 = x - vt, \quad v = \text{const}. \tag{1.1}$$

Ледяной покров моделируем тонкой упругой изотропной пластинкой постоянной толщины h . Исследуем развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимся источником возмущений. Полагаем, что до начала действия возмущений (1.1) жидкость не возмущена и граница поверхности пластина – жидкость горизонтальна. В рамках линейной теории в системе координат x_1, y, z , связанной с движущейся со скоростью v области давлений для потенциального движения жидкости задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta\phi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \tag{1.2}$$

со следующими граничными, кинематическим и начальными условиями:

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_l \zeta + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = p_1 \text{ при } z=0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -H, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - v \frac{\partial \zeta}{\partial x} \text{ при } z=0,$$

$$\phi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0,$$

где $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, $\Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $D_1 = \frac{D}{\rho g}$, $Q_1 = \frac{Q}{\rho g}$, $\chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}$, $p_1 = \frac{p_0}{\rho g}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, ρ – плотность жидкости; D, Q, E, h, ρ_1, μ – цилиндрическая жесткость, сжимающее усилие, модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Применяя для решения задачи (1.2)–(1.3) преобразование Фурье по горизонтальным координатам x и y для возвышения поверхности пластина–жидкость получим следующее интегральное представление:

$$\zeta = \frac{P_1}{8\pi^2} e^{i\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(m, n) M(r) \psi(m, n, t) e^{i(mx+ny)} dm dn, \quad (2.1)$$

$$\psi = \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-i\Delta_1 t} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-i\Delta_2 t}, \quad (2.2)$$

где $r = (m^2 + n^2)^{1/2}$, $m = r \cos \theta$, $n = r \sin \theta$, $\Delta_j = \sigma + \nu m + \delta_j \tau$, $\delta_j = (-1)^j$, $j = 1, 2$, $\tau(r) = (l(r)M(r))^{1/2}$, $l(r) = 1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4$, $M(r) = rg(1 + \chi_1 r g t h r H)^{-1} t h r H$, $f^*(m, n)$ – трансформанта Фурье функции $f(x, y)$. Первое слагаемое в выражении (2.2) представляет установившиеся колебания. Второе и третье слагаемые определяются начальными условиями и характеризуют развитие волнового движения.

Преобразуем (2.2) следующим образом:

$$\psi = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\Delta_1} (1 - e^{-i\Delta_1 t}) - \frac{1}{\Delta_2} (1 - e^{-i\Delta_2 t}) \right), \frac{i(1 - e^{-i\Delta_j t})}{\Delta_j} = - \int_0^t e^{-i\Delta_j \xi} d\xi.$$

После перехода к полярным координатам в случае осесимметричного распределения давлений (1.1) выражение (2.1) для ζ примет вид:

$$\zeta = - \frac{P_1}{8\pi^2} \text{Im}(e^{i\sigma t} (J_1 - J_2)), \quad (2.3)$$

$$J_j = \int_0^t \int_0^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r f^*(r)}{\tau(r)} M(r) e^{-i(rR \cos(\theta - \gamma) - \Delta_j \xi)} d\theta d\xi dr, \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma.$$

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Асимптотическое исследование выражения (2.3) для ζ , при больших значениях R и t , выполним методом стационарной фазы для многомерных интегралов [31]. Стационарные точки (r, θ, ξ) для J_j удовлетворяют системе уравнений (3.1)–(3.2):

$$R \cos(\theta - \gamma) - (\nu \cos \theta + \delta_j \tau') \xi = 0, \quad \nu \xi \sin \theta - R \sin(\theta - \gamma) = 0, \quad (3.1)$$

$$\sigma + \delta_j \tau + \nu r \cos \theta = 0, \quad (3.2)$$

где штрих означает производную по r .

Уравнение (3.2) имеет вещественные корни

$$\theta = \pm \theta_j, \quad \theta_j = \arccos(-\delta_j \tau_j), \quad \tau_j = (\tau + \delta_j \sigma) / \nu r, \quad (3.3)$$

при $|\tau_j| \leq 1$. После подстановки (3.3) в (3.1) получим

$$t g \gamma = \chi_j(r), \quad \chi_j = \tau'(1 - \tau_j^2)^{1/2} (\nu - \tau_j \tau')^{-1}, \quad (3.4)$$

$$\xi = R/u_j, \quad u_j = (\nu - \delta_j \tau') \cos^{-1} \gamma. \quad (3.5)$$

Из (3.4) определяются значения r , соответствующие стационарным точкам интегралов J_j , в установившемся и неустановившемся режимах. Принадлежность стационарных точек области интегрирования определяется условием $0 \leq \xi \leq t$. Это условие и соотношение (3.5) характеризуют распространение колебаний.

Из анализа поведения функций $\chi_j(r)$ следует, что число положительных корней α_{jk} уравнений (3.4) зависит от скорости ν перемещения давлений, частоты колебаний σ источника и величины угла γ .

Таблица 1. Системы изгибно-гравитационных волн ζ_{1j}

σ	v	γ	ζ_{1j}
$0 < \sigma < \sigma_0$	$0 < v < v_{01}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{14}
	$v_{01} < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{13}, ζ_{14}
	$v_{11} < v < v_{02}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$ $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_1$ $\gamma_1 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{11}, ζ_{14} $\zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$ ζ_{13}, ζ_{14}
$\sigma > \sigma_0$	$v > v_{02}$ ($v_{02} < v < v_{10}, v > v_{10}$)	$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$ $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$ $\gamma_3 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{14} $\zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$ ζ_{13}
	$0 < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{14}
	$v > v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$ $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$ $\gamma_3 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{14} $\zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$ ζ_{13}

Таблица 2. Системы изгибно-гравитационных волн ζ_{2j}

σ	v	γ	ζ_{2j}
$\sigma > 0$	$v_{03} < v < v_{12}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{23}
	$v > v_{12}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_{22}$ $\gamma_{22} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$ $\gamma_{11} \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{21} $\zeta_{21}, \zeta_{22}, \zeta_{23}$ ζ_{23}

В табл. 1, 2 приведены системы волн ζ_{ij} , которые зависят от скорости перемещения и частоты колебаний источника, а также приведены угловые зоны, в которых распространяется каждая из этих волн.

В таблицах выражения для σ_0 и v_{ij} определяются следующим образом:

$\sigma_0 = (\beta_2 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_2))(\beta_2 - \beta_1)^{-1}$, $v_{01} = \tau_5(\beta_2)$, $v_{02} = \tau_5(\beta_1)$, $v_{03} = \tau_6(\beta_3)$, $v_{11} = (\tau_7(\beta_4))^{1/2}$, $v_{12} = (\tau_8(\beta_6))^{1/2}$, $v_{10} = (\tau_9(\beta_8))^{1/2}$, $\tau_{5,6} = (\tau \pm \sigma)/r$, $\tau_7 = \tau_5^2 - r(\tau_5')^2 \tau' / \tau''$, $\tau_8 = \tau_6^2 - r(\tau_6')^2 \tau' / \tau''$, $\tau_9 = \tau_5 \tau'$, β_k ($k = 1 - 9$) являются корнями уравнений: $\tau_5'(\beta_{1,2}) = 0$, $\tau_6'(\beta_3) = 0$, $\chi_1''(\beta_{4,5}) = 0$, $\chi_2''(\beta_{6,7}) = 0$, $\tau_9'(\beta_{8,9}) = 0$, где $\beta_1 < \beta_2$, $\beta_4 < \beta_5$, $\beta_6 < \beta_7$, $\beta_8 < \beta_9$, $r_1 < r_2 < \beta_1 < r_3 < \beta_2 < r_4$, $r_5 < \beta_3 < r_6$, r_k ($k = 1 - 4$) положительные корни уравнения $1 - \tau_1^2 = 0$, а $r_{5,6}$ – уравнения $1 - \tau_2^2 = 0$, v_{ij} ($i=0, 1; j=1-3$) – значения скоростей при которых происходит изменение структуры волнового возмущения.

Размеры угловых зон определяются величинами углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{11}, \gamma_{22}$.

$\gamma_1 = \arctg \chi_1(\alpha_1)$, если $v_{11} < v < v_{02}$, $\gamma_3 = \arctg \chi_1(\alpha_1)$, если $v > v_{02}$, $\gamma_2 = \arctg \chi_1(\alpha_2)$, $\gamma_{11} = \arctg \chi_2(\alpha_3)$, $\gamma_{22} = \arctg \chi_2(\alpha_4)$, α_k ($k = 1-4$) корни уравнений: $\chi_1'(\alpha_{1,2}) = 0$, $\chi_2'(\alpha_{3,4}) = 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_3 < \alpha_4$.

Каждый корень α_{jk} уравнений (3.4) характеризует систему волн ζ_{jk} вида:

$$\zeta_{jk} = R^{-1/2} \psi_j(\alpha_{jk}) \cos(R\Phi_j(\alpha_{jk}) + \sigma t + \delta_{jk} \pi / 4) + O(R^{-1}), \tag{3.6}$$

$$\psi_j = -\frac{p_0}{\rho g} f^*(r) M(r) ((1 - \tau_j^2) \tau v)^{-1} (2\pi |\Phi_j''|)^{-1/2}, \quad \Phi_j = \delta_j r ((1 - \tau_j^2)^{1/2} \sin \gamma - \tau_j \cos \gamma),$$

$$j = 1, k = 1 - 4; j = 2, k = 1, 2, 3; \delta_{jk} = (-1)^{j+k}, k \neq 4, \delta_{14} = 1.$$

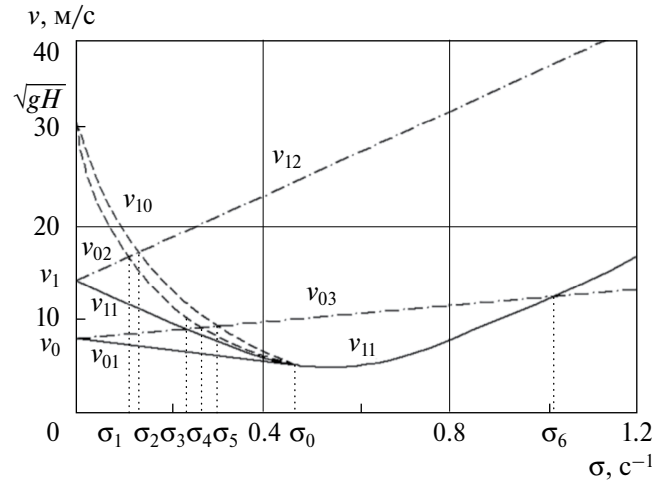


Рис. 1. Зависимость критических скоростей v_{ij} (м/с) от частоты колебаний источника σ (с^{-1}) для $Q=0$.

Волны образуются в областях $R < u_{jk}t$, $u_{jk} = u_j(\alpha_{jk})$ угловых зон соответствующих диапазону изменения скорости перемещения источника возмущений. Передние фронты этих волн перемещаются со скоростью u_{jk} .

Справедливы следующие оценки:

при $0 < \sigma < \sigma_0$ для α_{1k}

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 \text{ если } 0 < v < v_{01}, r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ если } v_{01} < v < v_{11},$$

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{11} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ если } v_{11} < v < v_{02},$$

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ если } v > v_{02};$$

при $\sigma > \sigma_0$ для α_{1k}

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 \text{ если } 0 < v < v_{11}, r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_2 \text{ если } v > v_{11};$$

при $\sigma > 0$ для α_{2k}

$$r_5 \leq \alpha_{23} \leq r_6 \text{ если } v_{03} < v < v_{12}; r_5 \leq \alpha_{21} \leq \alpha_3 \leq \alpha_{22} \leq \alpha_4 \leq \alpha_{23} \leq r_6 \text{ если } v > v_{12}.$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Для количественной оценки численные расчеты здесь и далее проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости: $h=0.2$ м, $H=10^2$ м, $E=3 \times 10^9$ Н/м², $\mu=0.34$, $\rho_1=870$ кг/м³, $\rho=10^3$ кг/м³.

Рассмотрим случай, когда сжимающие усилие удовлетворяют условию $Q_1 < Q_0$, где $Q_0 = q_1(r^*)$, r^* – положительный корень уравнения $q_1'(r) = 0$, а q_1 имеет вид:

$$q_1 = r^{-2}((1 + D_1 r^4)q_2 + 4D_1 q_3 r^4)(q_2 + 2q_3)^{-1}, q_2 = th rH + rH (chrH)^{-2}, q_3 = (1 + \chi_1 r g th rH) th rH.$$

Для $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ существенно меняется структура волнового движения. За источником возмущений происходит наложение волн [32].

На рис. 1 и 2 приведены зависимости критических скоростей перемещения области возмущений от частоты колебаний при отсутствии сил сжатия и растяжения (рис. 1) и для сжимающего усилия (рис. 2).

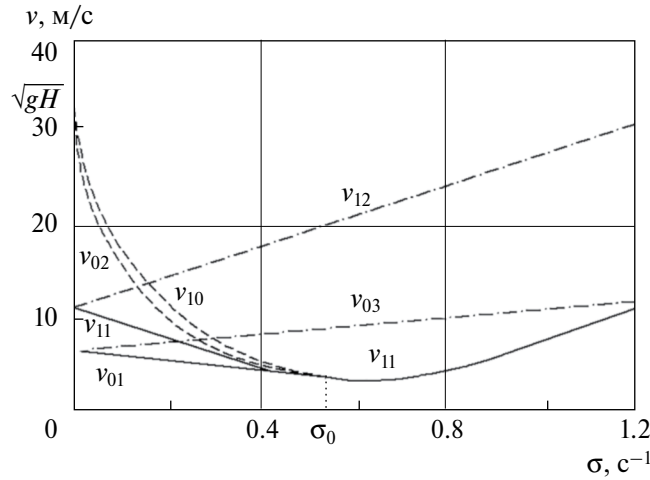


Рис. 2. Зависимость критических скоростей v_j (м/с) от частоты колебаний источника σ (с^{-1}) для $Q = 0.5\sqrt{D\rho g}$.

Критические скорости v_{03} и v_{12} растут при увеличении σ , а скорости v_{01} , v_{02} и v_{10} убывают. Критическая скорость v_{11} имеет минимум. В окрестности этих скоростей меняется характер волнового возмущения. При $\sigma=0$ $v_{01}=v_{03}=v_0$, $v_{11}=v_{12}=v_1$, $v_{10}=v_{02}=\sqrt{gH}$. При увеличении сил сжатия уменьшаются значения критических скоростей.

При движении области давлений (1.1), в зависимости от скорости перемещения и частоты колебаний, может возбуждаться от одной до семи систем волн (4.1) с амплитудами затухания как $R^{-1/2}$ (3.6). Эти волны формируют колебания пластинки и волновое движение жидкости как перед областью давлений, так и за ней

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_{14}, \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_0, 0 < v < v_{01}; \sigma_0 < \sigma < \sigma_6, 0 < v < v_{11}; \\ \sigma > \sigma_6, 0 < v < v_{03} \\ \zeta_{14} + \zeta_{13}, \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_3, v_{01} < v < v_{03}; \\ \sigma_3 < \sigma < \sigma_0, v_{01} < v < v_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{21}, \text{ при: } \sigma > \sigma_6, v_{03} < v < v_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_3, v_{03} < v < v_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13}, \text{ при: } \sigma_4 < \sigma < \sigma_0, v_{02} < v < v_{03}; \\ \sigma_0 < \sigma < \sigma_6, v_{11} < v < v_{03} \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13}, \text{ при: } \sigma_3 < \sigma < \sigma_4, v_{11} < v < v_{03}; \\ \sigma_4 < \sigma < \sigma_0, v_{11} < v < v_{03} \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при: } \sigma_1 < \sigma < \sigma_4, v_{02} < v < v_{12}; \\ \sigma_4 < \sigma < \sigma_6, v_{03} < v < v_{12}; \sigma > \sigma_6, v_{11} < v < v_{12} \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_1, v_{11} < v < v_{12}; \\ \sigma_1 < \sigma < \sigma_3, v_{11} < v < v_{02}; \sigma_3 < \sigma < \sigma_4, v_{03} < v < v_{02} \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23}, \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_1, v > v_{02}; \\ \sigma > \sigma_1, v > v_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23} \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_1, v_{12} < v < v_{02} \end{cases} \quad (4.1)$$

Волны ζ_{14} , ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} обусловлены периодическими изменениями давления и при $\sigma=0$ не образуются. Кроме этого волны ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} обусловлены наличием упругой пластинки.

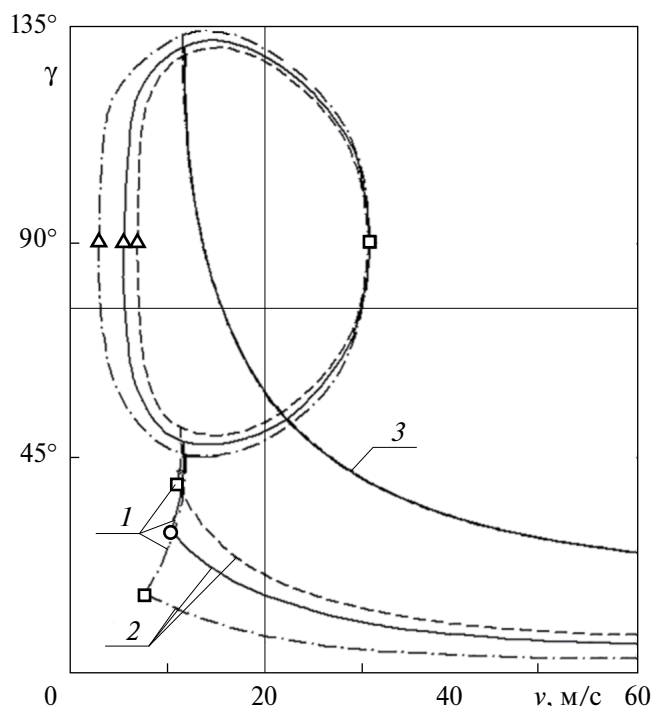


Рис. 3. Размеры угловых зон γ_k ($k=1, 2, 3$, кривые 1–3) для $\sigma=0.2 \text{ c}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$); $Q = -\sqrt{D\rho g}$ – штриховая; $Q = 0$ – сплошная; $Q = \sqrt{D\rho g}$ – штрихпунктирная.

Волны ζ_{14} имеют вид кольцевых волн и распространяются при любых значениях частоты колебаний ($\sigma > 0$) и скорости перемещения источника возмущений ($v > 0$). При $0 < \sigma < \sigma_0$ а $0 < v < v_{02}$ и при $\sigma > \sigma_0$ а $0 < v < v_{11}$ волны ζ_{14} распространяются вокруг источника возмущений ($0 \leq |\gamma| \leq \pi$). Если $0 < \sigma < \sigma_0$ а $v > v_{02}$ и если $\sigma > \sigma_0$ а $v > v_{11}$, то волны распространяются в угловой зоне $-\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_3$.

Волны ζ_{21} носят характер поперечных, а ζ_{22} продольных корабельных волн, деформированных за счет упругих и массовых сил пластинки. Волны ζ_{21} распространяются в угловой зоне $-\gamma_{11} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$, а ζ_{22} в угловых зонах $\gamma_{22} \leq |\gamma| \leq \gamma_{11}$ за движущейся областью периодических давлений при $v > v_{12}$ и $\sigma > 0$.

Изгибно-гравитационные волны ζ_{23} при $v_{03} < v < v_{12}$ и $\sigma > 0$ покрывают всю поверхность пластинки, распространяясь как впереди источника возмущений, так и за ним. При $v > v_{12}$ и $\sigma > 0$ они распространяются в угловой зоне $\gamma_{22} \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_{22}$.

Волны ζ_{11} , ζ_{12} , и ζ_{13} при движении источника возмущений образуются и при $\sigma = 0$ [33, 34]. Волны ζ_{11} и ζ_{12} носят характер продольных и поперечных корабельных волн, распространяющихся за источником возмущений. Волны ζ_{11} образуются при $v_{11} < v < v_{02}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ в угловой зоне $-\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_1$. Волны ζ_{12} образуются в угловых зонах $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1$ при $v_{11} < v < v_{02}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ и угловых зонах $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3$ при $v > v_{02}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ и $v > v_{11}$, $\sigma > \sigma_0$.

Волны ζ_{13} – изгибно-гравитационные волны. Они обусловлены наличием упругой пластины и при ее отсутствии не образуются. При $v_{01} < v < v_{11}$ и $0 < \sigma < \sigma_0$, волны распространяются как впереди области возмущений, так и за ней. Если $v > v_{11}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ и $v > v_{11}$, $\sigma > \sigma_0$, эти волны распространяются в угловой зоне $\gamma_2 \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_2$.

Зависимость размеров угловых зон, покрытых волнами, от скорости перемещения области давлений приведена на рис. 3–5. Штриховая кривая на рисунках отвечает силам растяжения ($Q = -\sqrt{D\rho g}$), а сплошная – отсутствию сил сжатия и растяжения ($Q = 0$), и штрихпунктирная – силам сжатия ($Q = \sqrt{D\rho g}$).

На рис. 3 представлено распределение γ_k ($k=1, 2, 3$) в зависимости от скорости v . Линии 1–3 соответствуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Верхняя часть замкнутых кривых между треугольниками и квадратом представляют максимальные значения угла γ_3 , а нижняя – угла γ_1 . Квадратом помечены максимальные значения углов γ_1 и γ_3 для $\sigma = 0$, а треугольниками максимальные значения γ_1 и γ_3 для $\sigma = \sigma_0$. Минимальное значение угла

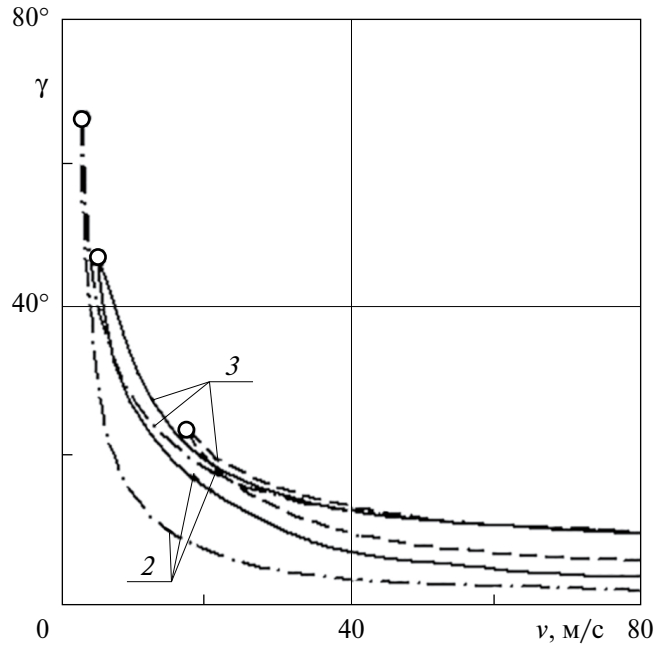


Рис. 4. Размеры угловых зон γ_k ($k= 2, 3$) для $\sigma=0,8 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma>\sigma_0$); $Q = -\sqrt{D\rho g}$ – штриховая; $Q = 0$ – сплошная; $Q = \sqrt{D\rho g}$ – штрихпунктирная.

γ_1 и максимальное значение угла γ_2 совпадают, если $v=v_{11}$. Из рисунка видно, что с увеличением скорости v значения углов γ_2 и γ_3 убывают, а величина угла γ_1 растет. Силы сжатия и растяжения на величину угла γ_3 влияния не оказывают. Величина угла γ_2 уменьшается при увеличении сжатия и увеличивается при увеличении растяжения.

На рис. 4 представлены для частоты $\sigma>\sigma_0$ значения углов γ_2 и γ_3 , которые убывают с ростом v . При $v=v_{11}$ значения γ_2 и γ_3 равны. Это отмечено на рисунке кружками. Увеличение сил сжатия уменьшает значение угла γ_2 , а действие растяжения противоположно. Силы сжатия и растяжения при увеличении скорости v на величину угла γ_3 практически не оказывают влияния.

На рис. 5 дано распределение γ_{11} (кривые 1) и γ_{22} (кривые 2) в зависимости от скорости v для $\sigma=0,05 \text{ с}^{-1}$. Кружками отмечены значения углов при $v=v_{12}$. Значение γ_{22} убывает с ростом v . Значение угла γ_{11} сначала возрастает при увеличении v , а затем достигнув максимума убывает при дальнейшем увеличении скорости движения нагрузки. При увеличении сил сжатия значение угла γ_{22} уменьшается, а при увеличении растягивающих усилий увеличивается. Из рисунка видно, что сжатие и растяжение не оказывают влияния на величину угла γ_{11} при больших значениях v .

Направление гребней волн ζ_{13} и ζ_{23} определяется углами

$$\gamma_{01} = \arctg\left(\frac{v^2}{v_{01}^2} - 1\right)^{1/2}, \quad \gamma_{02} = \arctg\left(\frac{v^2}{v_{03}^2} - 1\right)^{1/2}.$$

Значения этих углов уменьшаются при увеличении скорости v . При этом $\gamma_{01}<\gamma_{02}$. Максимальные значения этих углов равны $\pi/2$ и достигаются для γ_{01} при $v=v_{01}$, а для γ_{02} при $v=v_{03}$. Увеличение σ приводит к уменьшению γ_{01} и росту γ_{02} . Увеличение сил сжатия приводит к уменьшению значений этих углов и уменьшению при увеличении сил растяжения и толщины ледяного покрова. Если $\sigma=0$, то $\gamma_{01}=\gamma_{02}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что при перемещении по ледяному покрову возмущений переменной интенсивности, в зависимости от частоты колебаний источника и скорости его перемещения, существует шесть значений

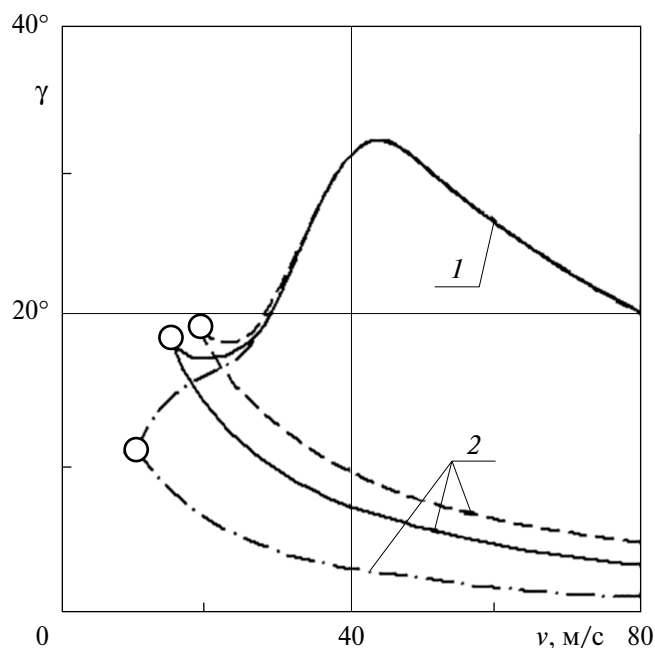


Рис. 5. Размеры угловых зон γ_{kk} ($k=1, 2$) для $\sigma=0,05 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$) $Q = -\sqrt{D\rho g}$ – штриховая; $Q = 0$ – сплошная; $Q = \sqrt{D\rho g}$ – штрихпунктирная.

критических скоростей, если $0 < \sigma < \sigma_0$ и три, если $\sigma > \sigma_0$. При движении по упругой пластине возмущений постоянной интенсивности существует три значения критических скоростей – v_0 , v_1 и $(gH)^{1/2}$.

При $\sigma=0$, значения критических скоростей v_{01} и v_{03} равны значению v_0 ($v_{01}=v_{03}=v_0$), где v_0 – минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны. Критические скорости v_{11} и v_{12} равны значению критической скорости v_1 ($v_{11}=v_{12}=v_1$), где v_1 – скорость при которой совпадают фазовые скорости гравитационной, упругой и изгибно-гравитационной волн. Значения критических скоростей v_{02} и v_{10} равны $(gH)^{1/2}$ ($v_{02}=v_{10}=(gH)^{1/2}$), где $(gH)^{1/2}$ – максимальное значение фазовой скорости гравитационной волны.

Движущимися возмущениями переменной интенсивности, в зависимости от скорости перемещения и частоты колебаний источника, может генерироваться от одной до семи систем волн, а движущимися возмущениями постоянной интенсивности $\sigma=0$ генерируется от одной до трех систем волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоздат, 1967. 215 с.
2. Козин В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М.: Академия Естествознания, 2007. 355 с.
3. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving loads on ice plates. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012. 236 p.
4. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
5. Козин В.М., Земляк В.Л., Рогожникова Е.Г., Погорелова А.В. Влияние ледовых условий на деформированное состояние ледяного покрова от движения нагрузки. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. 123 с.
6. Жесткая В.Д. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 4. С. 243–248.
7. Жесткая В.Д., Чижимов С.Д. Численный расчет напряженно-деформированного состояния ледяного покрова, находящегося под действием нестационарной нагрузки. М.: Академия естествознания, 2007. 53 с.
8. Кулешов А.А., Мырзин В.В. Моделирование колебаний плавающего льда в приближении тонкой упругой пластины // Матем. моделирование. 2009. Т. 21. № 6. 28–40.

9. *Кулешов А.А., Мырзин В.В.* Моделирование колебаний плавающего льда при посадке самолетов на ледовые аэродромы // Выч. мет. программирование. 2010. Т. 11. № 1. С. 7–13.
10. *Погорелова А.В., Козин В.М., Матюшина А.А.* Исследование напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при взлете и посадке на него самолета // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 5(333). С. 214–221.
DOI: 10.15372/PMTF20150520
11. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю., Морозов Е.Г.* Дальние поля возмущений поверхности раздела глубокого океана и ледяного покрова от локализованных источников // Докл. РАН. Науки о Земле. 2023. Т. 512. № 2. С. 302–307.
DOI: 10.31857/S2686739723600716
12. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю.* Дальние поля на поверхности раздела бесконечно глубокого океана и ледяного покрова, возбуждаемые локализованным источником // Изв. РАН. ФАО. 2023. Т. 59. № 3. С. 346–351.
DOI: 10.31857/S0002351523030033
13. *Булатов В.В., Владимиров И.Ю.* Амплитудно-фазовая структура волновых возмущений на границе ледяного покрова и глубокой жидкости от локализованных источников // Вестник НИЯУ МИФИ. 2023. Т. 12. № 3. С. 135–142.
DOI: 10.26583/vestnik.2023.267
14. *Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д.* Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // ПМТФ. 1991. № 6. С. 51–57.
15. *Стурова И.В.* Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 4. С. 63–72.
DOI: 10.31857/S0568528121040125
16. *Стурова И.В., Ткачева Л.А.* Влияние сжимающих усилий в ледяном покрове на генерацию изгибно-гравитационных волн // Труды Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб.: Изд-во «ЛЕМА», 2023. С. 209–212.
17. *Ткачева Л.А.* Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии течения со сдвигом скорости // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 2. С. 113–122.
DOI: 10.31857/S0568528123700044
18. *Ткачева Л.А.* Деформации и волновые силы при движении нагрузки по ледяному покрову и наличии течения со сдвигом скорости // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 6. С. 59–66.
DOI: 10.31857/S1024708423600203
19. *Зуев В.А.* Средства продления навигации на внутренних водных путях. Л.: Судостроение, 1986. 208 с.
20. *Зуев В.А., Козин В.М.* Использование судов на воздушной подушке для разрушения ледяного покрова. Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 1988. 128 с.
21. *Жёсткая В.Д., Козин В.М.* Исследования возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке резонансным методом. Владивосток: Дальнаука, 2003. 161 с.
22. *Козин В.М., Лебедев А.А.* Энергоэффективные технологии разрушения ледяного покрова судами на воздушной подушке резонансным методом // Вестник инженерной школы ДВФУ. 2022. № 3(52). С. 19–29.
DOI: 10.24866/2227-6858/2022-3/19-29
23. *Козин В.М.* Результаты экспериментально-теоретических исследований возможностей резонансного метода разрушения ледяного покрова // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 3. С. 3–20.
DOI: 10.31857/S0572329922600396
24. *Козин В.М.* Способы определения критических скоростей нагрузок, движущихся в условиях сплошного ледяного покрова (обзор) // Вестник инженерной школы ДВФУ. 2019. № 2(39). С. 30–38.
DOI: 10.24866/2227-6858/2019-2-4
25. *Козин В.М., Скрипачев В.В.* Колебания ледяного покрова под действием периодически изменяющейся нагрузки // ПМТФ. 1992. № 5. С. 141–146.
26. *Кожжаев А.В., Козин В.М.* Повышение эффективности резонансного метода интерференцией изгибно-гравитационных волн от периодического изменения давления в подушке СВП // IV Всероссийская конференция с международным участием «Полярная механика-2017», 14–15 сентября 2017 г., Санкт-Петербург, Россия: сборник докладов. С. 265–271.
27. *Букатов А.Е., Черкесов Л.В.* Неустановившиеся колебания ледяного покрова, вызываемые периодически перемещающимися давлениями // Морские гидрофизические исследования. Севастополь: МГИ АН УССР, 1969. № 2 (44). С. 94–105.
28. *Букатов А.Е., Ярошенко А.А.* Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн при движении области давлений переменной интенсивности // ПМТФ. 1986. № 5. С. 54–60.

29. *Duffy D.G.* The response of floating ice to a moving, vibrating load // *Cold Regions Science and Technology*. 1991. V. 20. Iss. 1. P. 51–64.
DOI: 10.1016/0165-232X(91)90056-M
30. *Ярошенко А.А., Маленко Ж.В.* Неустановившиеся трехмерные изгибно-гравитационные волны, вызванные движущимися возмущениями переменной интенсивности // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2023. Т. 20. № 1. С. 41–51.
DOI: 10.31429/vestnik-20-1-41-51
31. *Федорюк М.В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. Серия: Физико-математическое наследие: математика (математический анализ). М.: URSS, 2022. 544 с.
32. *Ярошенко А.А., Маленко Ж.В., Маркина Е.В., Боран-Кеишьян А.Л., Кондратьев А.И.* Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений в условиях равномерного сжатия // *Морские интел. технол.* 2022. № 4(58). Т. 1. С. 251–257.
DOI: DOI: 10.37220/MIT.2022.58.4.050
33. *Маленко Ж.В., Ярошенко А.А.* Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений // *Морские интел. технол.* 2021. Т. 4. № 2. С. 157–161.
DOI: 10.37220/MIT.2021.52.2.086
34. *Маленко Ж.В., Ярошенко А.А.* Трехмерные изгибно-гравитационные волны в плавающем ледяном покрове от движущегося источника возмущений // *ПММ*. 2023. Т. 87. Вып. 6. С. 1037–1048.
DOI: 10.31857/S0032823523060115

Flexural-Gravity Waves in an Ice Cover Exited by Periodically Varying Moving Perturbations

Zh. V. Malenko^{a, b, *} and A. A. Yaroshenko^{a, b, **}

^a*Kornilov Marine Institute, the branch of the Ushakov State Marine University, Sevastopol, Russia*

^b*Sevastopol State University, Sevastopol, Russia*

^{*}*e-mail: zhvla17@mail.ru*

^{**}*e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru*

The vibrations of a floating ice cover under the action of moving disturbances of variable intensity are studied. The model of vibrations of a floating ice cover is based on the linearized fluid mechanics equations and the linear classical theory of vibrations of plates. The ice cover is considered as a thin elastic isotropic plate. The critical velocities at which the nature of the wave disturbances changes both in front of the disturbance source and behind it are determined. The critical velocities as functions of the source oscillation frequency are studied, six critical velocities being obtained. It is shown that from one to seven wave systems are formed depending on the velocity of the source and the frequency of its oscillations. The corner zones in which these waves are formed are determined. The effect of compression and tension forces on the critical velocities and the corner zones in which the waves propagate has been studied.

Keywords: flexural-gravity waves, ice cover, critical velocity, elastic plate.