

УДК 532.591, 532.518

ДВУХСЛОЙНАЯ РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СМЕШИВАЮЩЕЙСЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: liapid@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 22.03.2024 г.

После доработки 11.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Рассматривается двухслойное течение стратифицированной по плотности жидкости с массообменом между слоями. В приближении Буссинеска уравнения движения сводятся к однородной квазилинейной системе уравнений в частных производных переменного типа. Параметры течения в промежуточном перемешанном слое определяются из условий равновесия в более общей модели трехслойного течения смешивающейся жидкости. В частности, из условий равновесия вытекает постоянство прослоечного числа Ричардсона в течениях со сдвигом скорости. Построено автомодельное решение задачи о распаде произвольного разрыва (задачи о водообмене в шлюзе) в области гиперболичности рассматриваемой системы. Исследованы транскритические режимы течения над локальным препятствием и определены условия, при которых препятствие определяет течение вверх по потоку. Проведено сравнение стационарных и нестационарных решений с решениями, полученными для исходных трехслойных моделей течения смешивающейся жидкости.

Ключевые слова: равновесная модель, двухслойное течение, приближение Буссинеска, смешивающаяся жидкости.

DOI: 10.31857/S1024708424040066, **EDN:** OYNBYQ

Нелинейные внутренние волны в стратифицированной по плотности жидкости являются объектом интенсивных исследований в океане и атмосфере [1]. Характерной особенностью эволюции внутренних волн конечной амплитуды является неустойчивость сдвигового течения на фронте волны, приводящая к генерации коротких волн на внутренних границах раздела и турбулентному перемешиванию слоев различной плотности. Совместное воздействие нелинейности, топографических эффектов и турбулентного перемешивания порождает многообразие волновых конфигураций в течении стратифицированной жидкости в поле силы тяжести. Формирование слоя смещения влияет на структуру внутренних гидравлических прыжков [2–5] и определяет структуру и скорость распространения фронта плотностных течений [6–9]. Влияние топографических эффектов и связанные с ним геофизические приложения обсуждаются в монографиях [10, 11]. Особенности математического моделирования внутренних волн большой амплитуды в шельфовой зоне моря представлены в [12–16].

Для описания длинных волн в стратифицированной жидкости применяется теория мелкой воды. Даже простейшие модели однослойного плотностного течения над склоном с учетом вовлечения окружающей покоящейся жидкости содержат большое число нелинейных уравнений в частных производных [17, 18] и математический анализ нестационарных процессов в рамках таких моделей представляет собой проблему. Поэтому наряду с исходной моделью используются различные подмодели, позволяющие понизить порядок системы и пригодные для описания определенных классов течений.

Равновесную модель по отношению к исходной системе уравнений можно получить, заменив некоторые уравнения системы конечными соотношениями, вытекающими из структуры решений основной модели. Наиболее известен переход от классической модели течения мелкой воды над склоном (уравнения Сен-Венана) к кинематической модели распространения длинных волн [19]. Определяющая гипотеза при выводе кинематической модели состоит в том, что скатывающая сила в потоке уравновешивается донным трением и течение описывается одним уравнением гиперболического типа. Заметим, что переход к кинематической модели распространения волн широко используется в различных моделях

механики сплошных сред. Для моделей течения стратифицированной жидкости с учетом турбулентного перемешивания переход к равновесной модели уже не так очевиден.

Для трехслойной модели течения стратифицированной жидкости с турбулентным перемешиванием между слоями соответствующая равновесная модель получена в предположении о том, что скорость вовлечения окружающей жидкости в промежуточный слой является заданной функцией от остальных искомых параметров течения [20]. Важно отметить, что эта зависимость не является эмпирической, а вытекает из структуры исходной системы уравнений. Построенная равновесная модель применена для задачи о формировании слоя смешения в течениях со сдвигом скорости. В частности, показано, что модель описывает транскритические течения смешивающейся жидкости над локальным препятствием и может быть использована для интерпретации лабораторных и натурных экспериментов. Другой вариант этой равновесной модели, примененный для расчета плотностных течений на наклонной плоскости с учетом вовлечения окружающей жидкости и подъема осадков, позволяет проанализировать структуру течения и оценить скорость фронта подводной лавины [21].

В данной работе исследована еще более простая модель, которая является равновесной по отношению к исходной трехслойной модели течения стратифицированной жидкости с перемешиванием между слоями. Модель является обобщением классических уравнений двухслойной мелкой воды и позволяет провести классификацию волновых конфигураций в нестационарной задаче о распаде произвольного разрыва и исследовать режимы стационарного транскритического обтекания локального препятствия аналогично случаю двухслойного течения без перемешивания, рассмотренному в [22].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Полная математическая модель плоскопараллельного течения стратифицированной смешивающейся жидкости в приближении Буссинеска построена в [22, гл. 5]. Для течений над неровным дном модель адаптирована в [18]. Уравнения трехслойной мелкой воды с учетом турбулентного перемешивания между слоями могут быть представлены в следующем дивергентном виде с использованием полных законов сохранения массы, импульса и энергии

$$\begin{aligned}
 h_t^- + (h^- u)_x &= -\sigma q, \quad h_t^+ + (h^+ w)_x = -\sigma q, \quad \eta_t + (\eta v)_x = 2\sigma q, \\
 u_t + (u^2 / 2 + b h^- + \bar{b} \eta + p)_x &= -b z_x, \quad w_t + (w^2 / 2 + p)_x = 0, \\
 (b h^- + \bar{b} \eta)_t + (b h^- u + \bar{b} \eta v)_x &= 0, \\
 (h^- u + \eta v + h^+ w)_t + (h^- u^2 + \eta v^2 + h^+ w^2 + b (h^-)^2 / 2 + \bar{b} \eta h^- + \\
 + \bar{b} \eta^2 / 2 + (h^- + h^+ + \eta) p)_x &= -(p + b h^- + \bar{b} \eta) z_x, \\
 (h^- u^2 + \eta (v^2 + q^2) + h^+ w^2 + b (h^-)^2 + 2 \bar{b} \eta h^- + \bar{b} \eta^2)_t + (h^- u^3 + \\
 + \eta v (v^2 + q^2) + h^+ w^3 + 2 p (h^- u + \eta v + h^+ w) + 2 \bar{b} \eta h^- u + \\
 + 2 \bar{b} (h^- + \eta) \eta v + 2 b (h^-)^2 u)_x &= -2 (b h^- u + \bar{b} \eta v) z_x - \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь h^- , h^+ , η толщины нижнего, верхнего слоев и прослойки; $z(x)$ форма дна; u , w , v — соответствующие скорости в слоях; $b = (\rho^- - \rho^+)g/\rho^+$ — заданная плавучесть нижнего слоя; $\bar{b} = (\bar{\rho} - \rho^+)g/\rho^+$ — плавучесть в прослойке; ρ^- , ρ^+ , $\bar{\rho}$ — соответствующие плотности слоев; g — ускорение свободного падения; p — модифицированное давление на верхней границе течения; q^2 — удельная кинетическая энергия “больших вихрей”, определяющих процесс вовлечения жидкости из однородных слоев в прослойку. В приближении Буссинеска полная глубина $H_0 = h^- + \eta + h^+ + z \equiv \text{const}$. Из условий несжимаемости жидкости следует, что полный расход $Q = h^- u + \eta v + h^+ w$ является функцией только времени, причем заданной в силу граничных условий. Учет диссипации энергии в турбулентной прослойке осуществляется заданием функции $\varepsilon = \sigma \kappa q^3$, $\sigma \equiv \text{const}$, $\kappa \equiv \text{const}$. Здесь σ , κ — коэффициенты, отвечающие за скорость вовлечения жидкости из однородных слоев в прослойку и скорость диссипации.

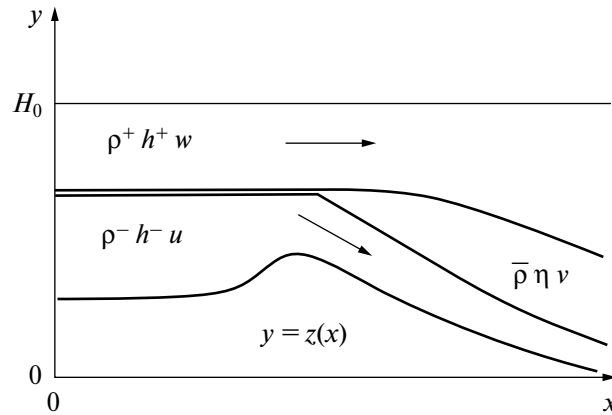


Рис. 1. Схема течения.

Более четкое представление о структуре (1.1) может быть получено из дифференциальной формы записи этой системы

$$\begin{aligned} h_t^- + u h_x^- + h^- u_x = -\sigma q, \quad h_t^+ + w h_x^+ + h^+ w_x = -\sigma q, \quad \eta_t + v \eta_x + \eta v_x = 2\sigma q, \\ u_t + u u_x + b h_x^- + b z_x + \bar{b} \eta_x + \eta \bar{b}_x + p_x = 0, \quad w_t + w w_x + p_x = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} v_t + v v_x + \bar{b} h_x^- + \bar{b} z_x + \bar{b} \eta_x + \eta \bar{b}_x / 2 + p_x = \sigma q(u + w - 2v) / \eta, \\ \bar{b}_t + v \bar{b}_x = \sigma q(b - 2\bar{b}) / \eta, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$q_t + v q_x = \sigma((u - v)^2 - (2 + \kappa)q^2 - b\eta + (w - v)^2) / (2\eta). \quad (1.4)$$

Подсистема (1.2) представляет собой неоднородную систему уравнений трехслойной мелкой воды в приближении Буссинеска, а левая часть в уравнениях (1.3)–(1.4) — производную вдоль траектории частиц в прослойке. Система (1.1)–(1.4) описывает нелинейную стадию развития процесса неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в течениях со сдвигом скорости и применима для описания развития интенсивного турбулентного перемешивания на подветренной стороне подводного хребта при его обтекании потоком стратифицированной жидкости.

Уравнения (1.1) допускают различные варианты перехода к более простым системам при уменьшении числа рассматриваемых слоев и использовании различных дополнительных условий равновесия между компонентами течения [22, гл. 5]. В недавней работе [20] при построении равновесной модели трехслойного течения (далее модель E1) вместо уравнения (1.4) использовано соотношение

$$(u - v)^2 - (2 + \kappa)q^2 - b\eta + (w - v)^2 \equiv 0, \quad (1.5)$$

из которого неотрицательная скорость вовлечения в прослойку задается как функция остальных искоемых переменных. Модель E1 не меняет структуры исходных уравнений, в том числе неизменными остаются характеристики системы (уменьшается только кратность контактной характеристики). Эта модель используется для описания процесса формирования слоя смешения в нестационарных течениях над неровным дном.

При течении стратифицированной жидкости в длинном канале с относительно небольшими уклонами дна пригоден также равновесный вариант модели (E1), в котором средняя скорость турбулентного вовлечения в прослойку близка к нулю и генерация турбулентности в промежуточном слое уравновешивается ее диссипацией. В этом случае кроме (1.5) выполнены следующие соотношения:

$$v = \frac{u + w}{2}, \quad \bar{b} = \frac{b}{2},$$

и уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}h_t + (h^- u + \frac{1}{2}\eta v)_x &= 0, \\u_t + uu_x + bh_x + bz_x + p_x &= 0, \\w_t + ww_x + p_x &= 0, \\Q_x = uh_x^- + h^- u_x + \frac{1}{2}\eta u_x + \frac{1}{2}u\eta_x + \frac{1}{2}\eta w_x + \frac{1}{2}w\eta_x + h^+ w_x + wh_x^+ &= 0.\end{aligned}$$

Здесь $h = h^- + 0.5\eta$, $h^- + \eta + h^+ = H = H_0 - z(x)$. Заменой $\gamma = u - w$ получаем равновесную модель (модель E2) для течения двухслойной мелкой воды над препятствием

$$\begin{aligned}h_t + (h(\bar{u} + (1 - \frac{h}{H})\gamma) - \frac{Ri\gamma^3}{4b})_x &= 0, \\ \gamma_t + (\gamma(\bar{u} - \frac{h\gamma}{H} + \frac{\gamma}{2}) + b(h + z))_x &= 0.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Здесь $\bar{u} = Q/H$ – средняя скорость жидкости, $Ri = b\eta/(u - w)^2 = 1/2$ – число Ричардсона.

Следует подчеркнуть, что значение $Ri = 1/2$ является следствием (1.1) и условий равновесия в потоке. Число Ричардсона Ri удобно оставить в (1.6), так как при описании течения в прослойке между однородными слоями различной плотности также используются значения прослоечного числа Ri отличного от принятого в данной модели E2.

Перепишем систему (1.6) в дифференциальной форме

$$\begin{aligned}h_t + (\bar{u} + (1 - 2\frac{h}{H})\gamma)h_x + ((1 - \frac{h}{H})h - \frac{3Ri\gamma^2}{4b})\gamma_x &= 0, \\ \gamma_t + (b - \frac{\gamma^2}{H})h_x + (\bar{u} + (1 - 2\frac{h}{H})\gamma)\gamma_x &= -bz_x,\end{aligned}$$

из которой находятся характеристики системы (1.6)

$$\lambda^\pm = \bar{u} + (1 - \frac{2h}{H})\gamma \pm \sqrt{R}, \quad R = (b - \frac{\gamma^2}{H})(h - \frac{h^2}{H} - \frac{3Ri\gamma^2}{4b}) > 0.$$

Условие гиперболичности системы состоит в положительности R , что влечет ограничение на сдвиг скорости в слоях. Заметим, что при $Ri = 0$ уравнения (1.6) являются классическими уравнениями двухслойной мелкой воды ($\eta = 0$), исследованными в [11, 22, 23]. В дальнейшем изложении будет рассматриваться фиксированное число Ричардсона $Ri = 0.5$. Основное отличие модели E2 при $Ri = 0$ от рассматриваемого случая состоит в том, что при $Ri = 0$ автомодельное решение задачи о распаде произвольного разрыва с начальными данными из области гиперболичности не выходит из этой области, т.е. выполнение условия гиперболичности для системы (1.6) в начальный момент времени обеспечивает гиперболичность уравнений при $t > 0$ для течений в канале с ровным дном [22]. Заметим, что для течений над неровным дном выход решений из области гиперболичности при возрастании времени возможен также и при $Ri = 0$.

2. ЗАДАЧА О РАСПАДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА

При рассмотрении горизонтальных течений над ровным дном можно воспользоваться внутренней симметрией уравнений для решения задачи о распаде произвольного разрыва. Кроме того, введем безразмерные переменные так, чтобы $H_0 = 1$, $b = 1$. Система (1.6) принимает вид

$$h_t + (h\bar{u} + h(1 - h)\gamma - \frac{Ri\gamma^3}{4})_x = 0, \quad \gamma_t + (\gamma\bar{u} + \frac{\gamma^2}{2} - h\gamma^2 + h)_x = 0.\tag{2.1}$$

Нетрудно видеть, что при $u_m = \text{const}$ уравнения (2.1) допускают преобразование $h \rightarrow 1 - h$, $\gamma \rightarrow -\gamma$. При $\text{Ri} > 0$ областью гиперболичности системы (2.1) является множество

$$\Omega = \left\{ (h, \gamma): 0 < h < 1, h - h^2 - \frac{3}{4} \text{Ri} \gamma^2 > 0, \gamma^2 < 1 \right\}.$$

В частности, при $\text{Ri} = 1/2$ множество Ω представляет собой эллипс. При $\text{Ri} = 0$ область гиперболичности лежит внутри прямоугольника $\{(h, \gamma): 0 < h < 1, \gamma^2 < 1\}$.

Задача о распаде произвольного разрыва для (2.1) представляет собой задачу Коши со специальными начальными данными при $t = 0$

$$(h(0, x), \gamma(0, x)) = \begin{cases} (h_1, \gamma_1), & x < 0 \\ (h_2, \gamma_2), & x > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Решением этой задачи в области $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ с данными $(h_i, \gamma_i) \in \Omega$, $(i = 1, 2)$ является автомодельное решение, зависящее от переменной $\xi = x/t$ и содержащее конечное число центрированных простых волн и устойчивых ударных волн. Полный анализ задачи (2.2) для классических уравнений двухслойной мелкой воды ($\text{Ri} = 0$) приведен в [22]. В частности, показано, что решение задачи (2.1), (2.2) существует для всех значений $(h_i, \gamma_i) \in \Omega$ и не выходит за границы этой области. Для $\text{Ri} > 0$ это утверждение уже не является справедливым. Выход решения из области гиперболичности означает, что условия равновесности модели (2.1) перестают выполняться и для описания течения следует перейти к моделям более высокого уровня, например, к трехслойной схеме течения. Далее в этом разделе рассматривается структура решений задачи (2.1), (2.2) при $\text{Ri} > 0$ с данными (h_i, γ_i) , $(i = 1, 2)$, обеспечивающими принадлежность решения области гиперболичности Ω .

2.1. Простая центрированная волна

Под простой центрированной волной понимается непрерывное автомодельное решение задачи (2.1), (2.2). С использованием автомодельной переменной $\xi = x/t$ задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} ((1 - 2h)\gamma - \xi)h' + (h(1 - h) - 3/4 \text{Ri} \gamma^2)\gamma' &= 0, \\ (1 - \gamma^2)h' + ((1 - 2h)\gamma - \xi)\gamma' &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ . На плоскости (h, γ) решения (2.3) задаются уравнениями

$$\frac{d\gamma}{dh} = \pm \sqrt{\frac{1 - \gamma^2}{h(1 - h) - 0.75 \text{Ri} \gamma^2}}. \quad (2.4)$$

Знак “+” соответствует волнам, распространяющимся вправо, знак “−” — распространяющимся влево. В силу монотонности кривых, представляющих решение (2.4), и ограниченности области Ω это решение существует вплоть до границы области гиперболичности. Далее, используя указанную выше симметрию исходной системы (2.1), достаточно рассмотреть свойства простых волн, обращенных вправо. В этом случае из (2.3) следует, что в простой волне

$$\xi = \lambda^+ = \bar{u} + (1 - 2h)\gamma + \sqrt{(1 - \gamma^2)(h(1 - h) - 0.75 \text{Ri} \gamma^2)}. \quad (2.5)$$

Поэтому из (2.5) следует, что $(\lambda^+)' > 0$ и допустимыми являются решения (2.3), в которых производные $h'(\xi)$ и $\frac{d\lambda^+(h, \gamma^+(h))}{dh}$ имеют один и тот же знак. При $\text{Ri} > 0$ кривая

$$\Gamma^+ = \left\{ (h, \gamma) \in \Omega, \frac{d\lambda^+}{dh} = 0 \right\}$$

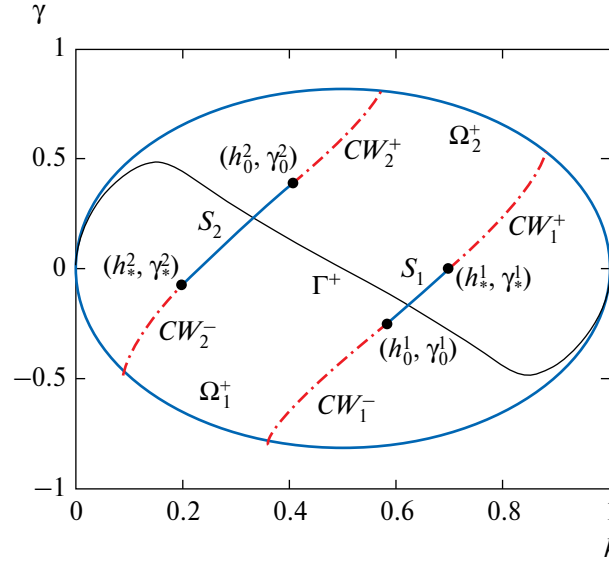


Рис. 2. Структура волновой адиабаты для волн, обращенных вправо: $CW_i^\pm$ — простые центрированные волны; S_i — устойчивые разрывы ($i = 1, 2$).

на плоскости (h, γ) разделяет две односвязных области Ω_1^+ и Ω_2^+ , в которых производная $\frac{d\lambda^+}{dh}$ положительна и отрицательна, соответственно. На рис. 2 представлен вид этой кривой при $Ri = 0.5$. Если (h_0, γ_0) постоянное решение (2.1), к которому слева примыкает простая волна ($\xi < \xi_0 = \lambda^+(h_0, \gamma_0)$), то при $(h_0, \gamma_0) \in \Omega_1^+$ допустимыми являются решения (2.4), для которых $h < h_0$. Аналогично, для $(h_0, \gamma_0) \in \Omega_2^+$ решения (2.4) допустимы при $h > h_0$. Заметим, что при $Ri = 0$ кривая Γ^+ представляет собой диагональ прямоугольника $\Omega = \{0 < h < 1, |\gamma| < 1\}$, соединяющую точки $(0, 1)$ и $(1, -1)$ [22].

Для описания структуры всех возможных волн, распространяющихся вправо и являющихся автомодельным решением (2.1), требуется включить в рассмотрение ударные волны.

2.2. Ударные волны, распространяющиеся вправо

Пусть $(h_0, \gamma_0) \in \Omega_1^+$. Так как система (2.1) записана в дивергентном виде, то любая точка (h, γ) , соединенная с (h_0, γ_0) ударным переходом, обращенным вправо, должна удовлетворять соотношениям на разрыве

$$\begin{aligned} D[h] &= \left[h\bar{u} + h(1-h)\gamma - 1/4 Ri \gamma^3 \right], \\ D[\gamma] &= \left[\gamma\bar{u} + 1/2 \gamma^2 - h\gamma^2 + h \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $[f] = f(\xi + 0) - f(\xi - 0)$, $D = dx/dt$ — скорость ударной волны ($D > 0$). Кроме того, на решении (2.6), представленном в виде $\gamma = \gamma_s^+(h)$, ударная волна должна удовлетворять условию Лакса [24]

$$\lambda^+(h_0, \gamma_0) \leq D \leq \lambda^+(h, \gamma_s^+(h)). \quad (2.7)$$

Из общих свойств разрывных решений нелинейных гиперболических систем [25, гл. 4] следует, что

$$D = 1/2(\lambda^+(h_0, \gamma_0) + \lambda^+(h, \gamma_s^+(h))) + O(|h - h_0|).$$

Поэтому в малой окрестности $(h_0, \gamma_0) \in \Omega_1^+$ разрыв устойчив только при $h > h_0$. При нарушении условия (2.7) для ударной волны конечной амплитуды при возрастании h решение может быть продолжено

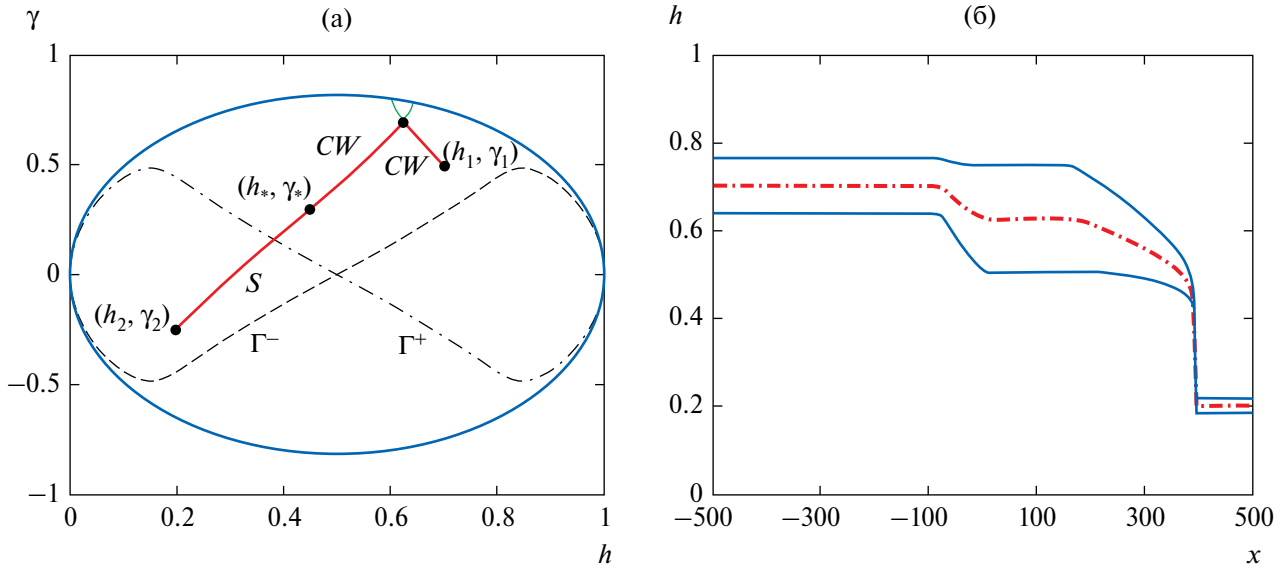


Рис. 3. Задача о распаде произвольного разрыва (2.1), (2.2): а) — структура решения на плоскости (h, γ) , CW — простая центрированная волна, S — ударный переход; б) — профиль решения при $t_0 = 500$ (сплошные линии — границы слоя смешения, штрихпунктирная линия — зависимость $h(t_0, x)$).

простой центрированной волной. Это означает, что точка (h_*, γ_*) , в которой (2.7) перестает выполняться, принадлежит области Ω_2^+ . Строго этот факт доказан при $Ri = 0$ в [22].

При $h > h_*$ решение задачи (2.1), (2.2) может быть продолжено простой волной, проходящей через точку (h_*, γ_*) , вплоть до границы области гиперболичности. Таким образом, волновая адиабата $\gamma = W^+(h, h_0^1, \gamma_0^1)$, проходящая через точку $(h_0^1, \gamma_0^1) \in \Omega_1^+$ и определяющая структуру волн, распространяющихся вправо, в классе автомодельных решений задачи (2.1), (2.2) состоит из центрированной волны CW_1^- при $h < h_0^1$, устойчивой ударной волны S_1 , соединяющей точки (h_0^1, γ_0^1) и (h_*, γ_*) , и центрированной волны CW_1^+ при $h > h_*$.

В случае, если $(h_0^2, \gamma_0^2) \in \Omega_2^+$, конфигурация волн аналогична при замене $h \rightarrow 1 - h$, $\gamma \rightarrow -\gamma$, то есть при $h > h_0^2$ имеет место центрированная волна CW_2^+ , при $h_*^2 < h < h_0^2$ — ударный переход S_2 , при $h < h_*^2$ — центрированная волна CW_2^- (рис. 2).

Для волн, обращенных влево, волновая адиабата $W^-(h, h_0, \gamma_0)$ строится аналогично с учетом отмеченной выше инвариантности системы (2.1) относительно преобразования независимых переменных $h \rightarrow 1 - h$, $\gamma \rightarrow -\gamma$.

Решение задачи (2.1), (2.2) определяется точкой пересечения (h_3, γ_3) волновых адиабат $W^-(h, h_1, \gamma_1)$ и $W^+(h, h_2, \gamma_2)$, если такая точка лежит внутри области гиперболичности Ω . Так как $W^-(h, h_1, \gamma_1)$ монотонно убывает по h , а $W^+(h, h_2, \gamma_2)$ монотонно возрастает, то такая точка единственна. Ситуация, при которой волновые адиабаты не имеют точек пересечения требуют дополнительного исследования, поскольку в этом случае адиабаты достигают границы области Ω и решение выходит из области гиперболичности. Заметим только, что при $Ri = 0$ решение остаётся внутри замыкания области гиперболичности $\bar{\Omega}$, а выход волновых адиабат на границу Ω соответствует разлету в вакуум в волне разрежения для уравнений газовой динамики. В этом случае решение задачи (2.1), (2.2) будет существовать для любых значений (h_i, γ_i) , $i = 1, 2$, если допускается появление “вакуума” между волнами, соответствующего части границы области гиперболичности [22].

На рис. 3а показано регулярное решение задачи (2.1), (2.2) на плоскости (h, γ) , построенное с использованием волновых адиабат $W^\pm$. Для выбранных значений (h_i, γ_i) , $i = 1, 2$ решение представляет собой центрированную волну, обращенную влево, и комбинацию ударной волны и центрированной волны, обращенных вправо. Зависимость построенного решения от пространственной координаты x при заданном значении времени $t_0 = 500$ (безразмерная переменная) проиллюстрирована на рис. 3б. В качестве начальных данных выбраны значения $(h_1, \gamma_1) = (0.7, 0.5)$, $(h_2, \gamma_2) = (0.2, -0.25)$. Решение построено

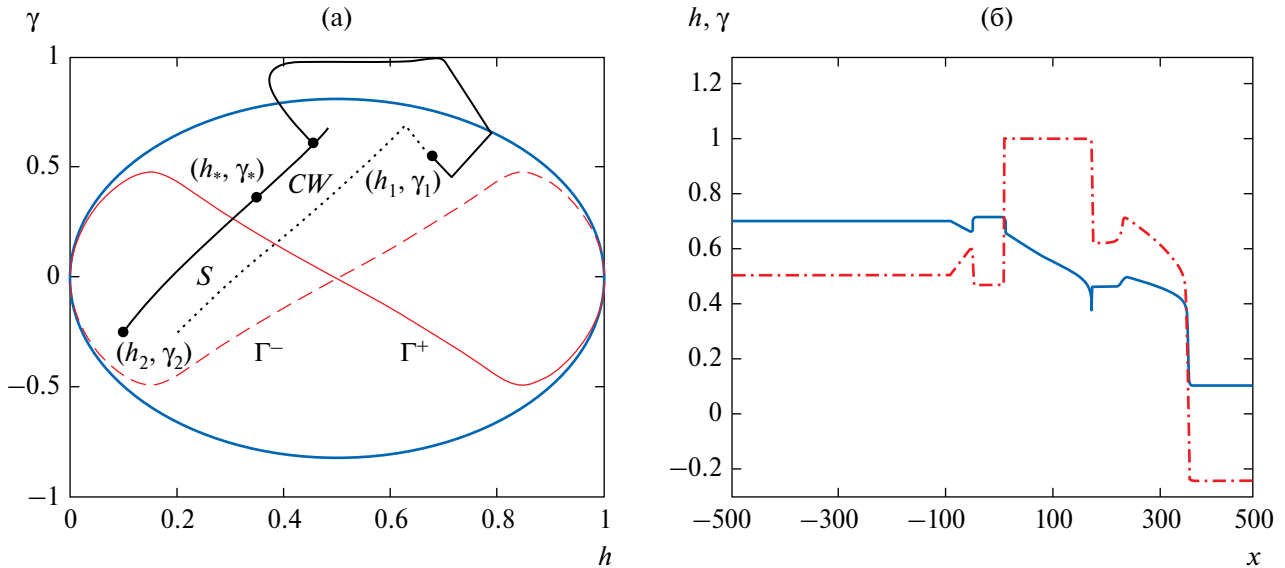


Рис. 4. Численное решение задачи (2.1), (2.2), выходящее из области гиперболичности Ω : а) — сплошная линия — численное решение на плоскости (h, γ) , точки — решение задачи, представленное на рис. 3а; б) — $t_0 = 500$ (сплошная линия — зависимость $h = h(t_0, x)$, штрихпунктирная линия — зависимость $\gamma = \gamma(t_0, x)$).

численно с использованием схемы С. К. Годунова. Точное автомодельное решение, полученное с использованием формул (2.5), (2.6), а также условия устойчивости разрыва (2.7), полностью совпадает с численным решением и поэтому не приведено на рис. 3б. Штрихпунктирной линией обозначена зависимость $h = h(t_0, x)$, а сплошными линиями — графики функций $h(t_0, x) \pm \frac{1}{2} \eta(t_0, x)$. Если перейти к переменным (t, ξ) , где $\xi = x/t$, то построенные функции h, η в этих переменных не будут зависеть от времени t , т.е. при $t > t_0$ численное решение выходит на автомодельный режим.

Следует отметить, что в задаче о распаде произвольного разрыва (2.1), (2.2) с начальными данными (h_i, γ_i) , $i = 1, 2$, при которых волновые адиабаты $W^-(h, h_1, \gamma_1)$ и $W^+(h, h_2, \gamma_2)$ не пересекаются внутри Ω , решение не разваливается, а имеет вполне регулярную структуру. На рис. 4 а жирной линией изображено численное решение задачи (2.1), (2.2) с данными $(h_1, \gamma_1) = (0.7, 0.5)$, $(h_2, \gamma_2) = (0.1, -0.25)$ на плоскости (h, γ) . Для сравнения точками обозначено рассмотренное выше регулярное решение, изображенное на рис. 3а. Участки сплошной линии, проходящие через начальные точки (h_i, γ_i) , $i = 1, 2$, являются волновыми адиабатами $W^\pm$. Они соединены участком кривой, выходящей из области гиперболичности Ω и частично совпадающей с границей $\gamma = 1$. Напомним, что при $\gamma = 1$ характеристики (2.5) исходной системы являются вещественными и совпадают.

На рис. 4б показаны зависимости $h = h(t, x)$ (сплошная линия) и $\gamma = \gamma(t, x)$ (штрихпунктир) при $t = 500$. Из рис. 4б видно, что построенное численное решение является разрывным и имеет вполне регулярную структуру.

К настоящему времени построены примеры обобщенных решений уравнений механики сплошных сред, в которых переход между несвязными компонентами области гиперболичности в нестационарных процессах происходит при помощи устойчивых ударных переходов [26, 27]. Однако этот подход не применим к рассматриваемому в данной статье вырожденному случаю и понятие обобщенного решения для модели (1.6) требует дальнейшего исследования.

3. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НАД ПРЕПЯТСТВИЕМ

При моделировании течений в канале конечной длины важной проблемой является корректность постановки граничных условий. Для адекватного описания докритических и транскритических течений требуется исследовать влияние локального препятствия на течение вверх по потоку. В классической

теории однослойной мелкой воды необходимым условием существования транскритического течения является свойство критичности потока над гребнем препятствия. Для двухслойных течений мелкой воды переход от докритического к сверхкритическому течению в стационарных течениях над локальным препятствием имеет существенно более сложную структуру. Даже при отсутствии перемешивания между слоями ($Ri = 0$) свойство критичности потока над гребнем уже не является необходимым для контроля препятствием течения вверх по потоку.

Возможность возникновения других типов контроля связана со сложной волновой структурой двухслойных течений. При $Ri = 0$ различные режимы двухслойного течения над локальным препятствием подробно исследованы в [22, 23]. При $Ri > 0$ анализ двухслойной равновесной модели усложняется еще больше, хотя качественно возникающие режимы стационарного течения над препятствием соответствуют течению двухслойной жидкости без перемешивания между слоями ($Ri = 0$). Поэтому ниже будут только проиллюстрированы основные особенности течений с учетом перемешивания.

В силу однородности системы (1.6) уравнения стационарного течения могут быть проинтегрированы. При $H_0 = 1$ и $b = 1$ получаем следующие соотношения для течений над неровным дном ($u_m = \text{const}$, $z = z(x)$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(hu_m + h \left(1 - \frac{h}{1-z} \right) \gamma - \frac{Ri \gamma^3}{4} \right) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(\gamma u_m + \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{1-z} \right) \gamma^2 + h + z \right) &= 0, \end{aligned}$$

которые нетрудно свести к алгебраической системе. Однако удобнее найти зависимости $h = h(z)$, $\gamma = \gamma(z)$ из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно независимой переменной z

$$\begin{aligned} u_m h' + \left(1 - \frac{2h}{1-z} \right) \gamma h' + h \left(1 - \frac{h}{1-z} \right) \gamma' - \frac{3Ri \gamma^2}{4} \gamma' &= \frac{h^2 \gamma}{(1-z)^2}, \\ \left(1 - \frac{\gamma^2}{1-z} \right) h' + \left(u_m + \left(1 - \frac{2h}{1-z} \right) \gamma \right) \gamma' &= \frac{h \gamma^2}{(1-z)^2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Система (3.1) приводится к нормальной форме

$$h' = \frac{f_1 c_2 - f_2 c_1}{\Delta}, \quad \gamma' = \frac{f_2 a_1 - f_1 a_2}{\Delta}, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= u_m + \left(1 - \frac{2h}{1-z} \right) \gamma, \quad c_1 = h \left(1 - \frac{h}{1-z} \right) - \frac{3}{4} Ri \gamma^2, \quad f_1 = \frac{\gamma h^2}{(1-z)^2}, \\ a_2 &= 1 - \frac{\gamma^2}{1-z}, \quad c_2 = u_m + \left(1 - \frac{2h}{1-z} \right) \gamma, \quad f_2 = \frac{\gamma^2 h}{(1-z)^2} - 1, \quad \Delta = a_1 c_2 - a_2 c_1. \end{aligned}$$

На плоскости (h, z) решение уравнений (3.2) может представлять различные режимы обтекания локального препятствия $z = z(x)$ в зависимости от параметров набегающего потока. Регулярное транскритическое течение реализуется, если над гребнем препятствия набегающий докритический поток ($\Delta < 0$) преобразуется в сверхкритический над подветренной стороной препятствия. На рис. 5 жирной линией показано решение (3.2), соответствующее транскритическому течению над препятствием ($u_m = 0.3$). Из рисунка видно, что для реализации этого течения в канале высота локального препятствия z_m должна быть равна 0.1. При этом, как и для классических уравнений мелкой воды, решение не зависит от формы препятствия. На рис. 5б пунктирной линией показана зависимость $h = h(t_0, x)$, а сплошными линиями изображено поведение функций $(h \pm 0.5\eta)(t_0, x)$, полученных в численном решении нестационарной

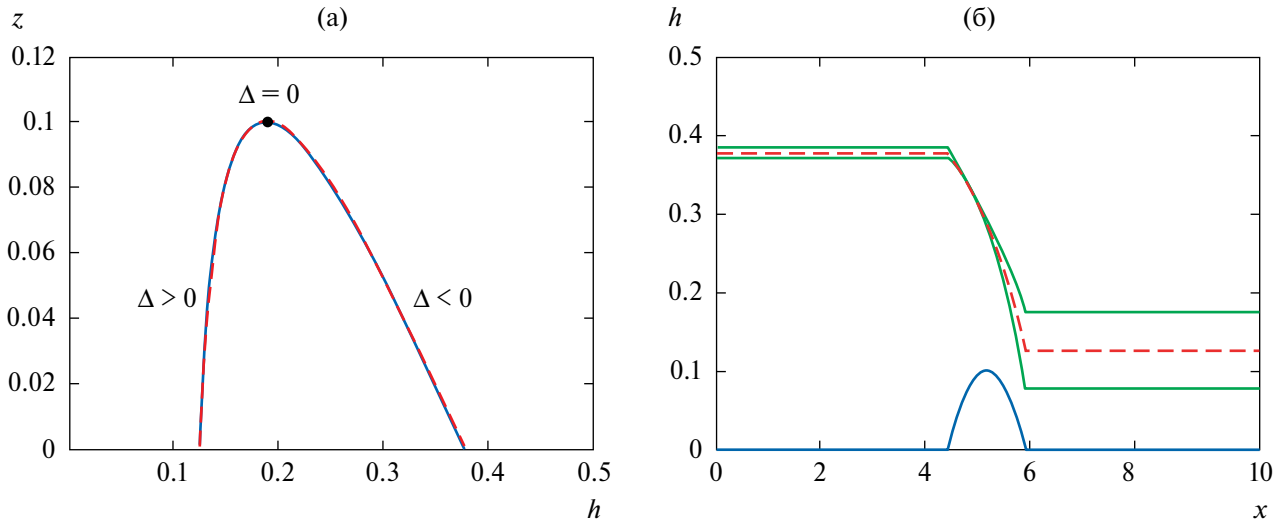


Рис. 5. Регулярное транскритическое течение над локальным препятствием ($u_m = 0.3$): а) — стационарное течение на плоскости (h, z) (докритическое при $\Delta < 0$ и сверхкритическое при $\Delta > 0$); б) — выход нестационарного течения на стационарный режим обтекания при $t_0 = 60$ (пунктирная линия — зависимость $h = h(t_0, x)$, сплошные линии — границы слоя смешения).

задачи об обтекании препятствия двухслойным потоком в рамках модели (1.6) ($t_0 = 60$, течение слева направо) с начальными данными

$$\begin{aligned} h(0, x) &= h_0 - z(x), \quad \gamma(0, x) = \gamma_0, \quad z(x) = \max\{0, z_m - 0.2(x - 5)^2\}, \\ h_0 &= 0.3, \quad \gamma_0 = 0, \quad z_m = 0.1, \quad -L < x < L. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Величина L выбрана достаточно большой так, чтобы возмущения начального состояния не достигали границ расчетной области. При этом над препятствием при $t > 20$ реализуется стационарное транскритическое течение, показанное на рис. 5а пунктирной линией. Это решение полностью совпадает с решением задачи Коши (3.2) с соответствующими начальными данными (3.3).

Другой тип стационарных транскритических течений показан на рис. 6а при $u_m = 0.4$. В этом случае течение непосредственно перед препятствием является критическим ($\Delta > 0$). На переднем склоне течение соответствует сверхкритической кривой Γ_1 ($0 \leq z \leq z_m$). Далее толщина нижнего слоя уменьшается вдоль подветренной стороны склона до локального максимума функции $z = z(h)$, ($z_M \leq z \leq z_m$), затем следует гидравлический прыжок S и течение снова становится сверхкритическим на кривой Γ_2 ($0 \leq z \leq z_M$). Поэтому построенное таким образом решение над гребнем препятствия ($z = z_m$) является сверхкритическим ($\Delta > 0$) а скачок S является “звуковым”, т.е. за скачком $\Delta > 0$ и условия (2.7) выполнены.

Для того, чтобы понять, как формируется такое решение, достаточно рассмотреть течение вверх по потоку от препятствия. На рис. 6б приведено численное решение задачи Коши для уравнений (1.6), аналогичной рассмотренной выше ($u_m = 0.4$, $h_0 = 0.25$, $\gamma_0 = 0$, $z_m = 0.33$). На рисунке показана волновая конфигурация перед препятствием, состоящая из бора максимальной амплитуды и следующей за ней простой волны. Если правая граница простой волны движется с отрицательной скоростью, то есть перед препятствием формируется область постоянного течения, то реализуется регулярный режим обтекания, показанный на рис. 5. Если же скорость этой границы волны обращается в нуль, то регулярный режим обтекания невозможен и течение над препятствием полностью сверхкритическое, как это показано на рис. 6а. Конфигурация течения на рис. 6б при $t = 60$ показывает, что и в этом случае препятствие контролирует поток вверх по течению, что следует иметь в виду при постановке граничных условий в каналах конечной длины. Штрихпунктирная линия представляет зависимость $h = h(t_0, x)$, а сплошные линии обозначают границы слоя смешения ($h \pm 0.5\eta$)(t_0, x). Пунктирная линия на рис. 6а, полученная из численного решения, показывает структуру течения над препятствием на плоскости (h, z) . Из рисунка видно, что численное нестационарное решение и стационарное решение системы (3.2) полностью совпадают

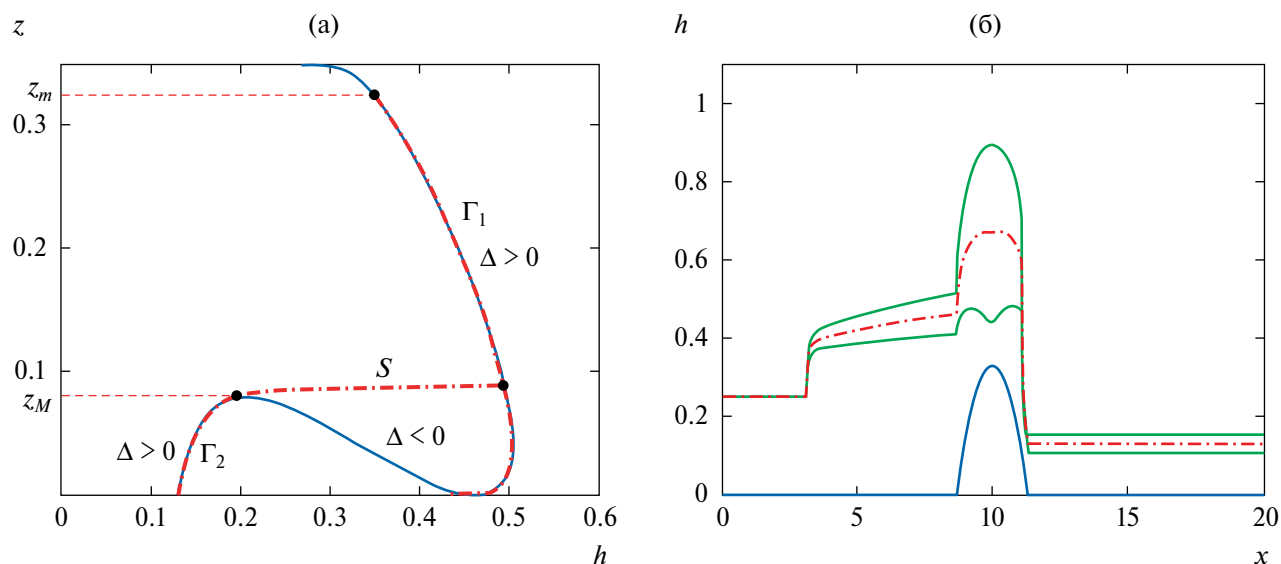


Рис. 6. Нерегулярный режим обтекания локального препятствия ($u_m = 0.4$): а) — структура стационарного течения на плоскости (h, z) , Γ_1 ($0 \leq z \leq z_m$) и Γ_2 ($0 \leq z \leq z_M$) — сверхкритические участки течения, S — внутренний гидравлический прыжок; б) — волновая конфигурация в окрестности препятствия при $t_0 = 60$ (штрихпунктирная линия — зависимость $h = h(t_0, x)$, сплошные линии — границы слоя смешения).

на участках сверхкритического течения ($\Delta > 0$), что подтверждает правило построения стационарных решений при нерегулярном режиме обтекания препятствия.

4. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ E1 И E2

Проведенный анализ стационарных течений над локальными препятствиями дает возможность сравнить поведение решений для моделей E1 и E2. С этой целью рассмотрим течения двухслойной стратифицированной жидкости, реализованные в большом экспериментальном лотке [5]. Особенностью этого эксперимента является возможность регулировки положения гидравлического прыжка на подветренной стороне препятствия условиями ниже по потоку. Детали проведения эксперимента можно найти в [5], результаты расчета по модели E1 в [20]. Здесь мы сравним результаты расчета нестационарных решений, выполненных по моделям E2 и E1 для двух режимов течения над препятствием [20, рис. 5а, 5г]. На рис. 7 приведено сравнение численных решений нестационарных задач, полученных для уравнений (1.6) (модель E2, сплошные линии) и уравнений (1.2, 1.3, 1.5) (модель E1, пунктирные линии). Сплошные и пунктирные линии показывают границы перемешанного слоя для соответствующих моделей.

При задании постоянных расходов $Q^\pm$ в каждом из слоев на левой границе течения реализуется стационарный режим обтекания локального препятствия, соответствующий транскритическому течению, изображенному на рис. 5. На рис. 7а положение гидравлического прыжка на подветренном склоне, переводящего сверхкритическое течение в докритическое, определяется условиями вниз по потоку. В численных расчетах на некотором расстоянии от первого препятствия помещалось второе локальное препятствие, обеспечивающее контроль течения вверх по потоку. Высота этого препятствия выбиралась так, чтобы положение гидравлического прыжка за первым препятствием соответствовало экспериментальным данным. Так как течение за вторым препятствием сверхкритическое, то граничные условия на выходе канала не заданы. В безразмерных переменных, используемых в данной работе, полученное численное решение определяется следующими параметрами: $Q^- = 0.073$, $Q^+ = 0.11$, $z_m^2 = 0.138$, где z_m^2 — высота второго препятствия.

Из рис. 7 видно, что на транскритическом участке течения имеется хорошее соответствие между моделями E1 и E2. Однако за гидравлическим прыжком разность скоростей во внешних слоях резко уменьшается. Поэтому толщина прослойки в модели E2 близка к нулю. В рамках модели E1 перемешанный слой не схлопывается и соответствует толщине наблюдаемой в эксперименте подкрашенной прослойки (рис. 7а).

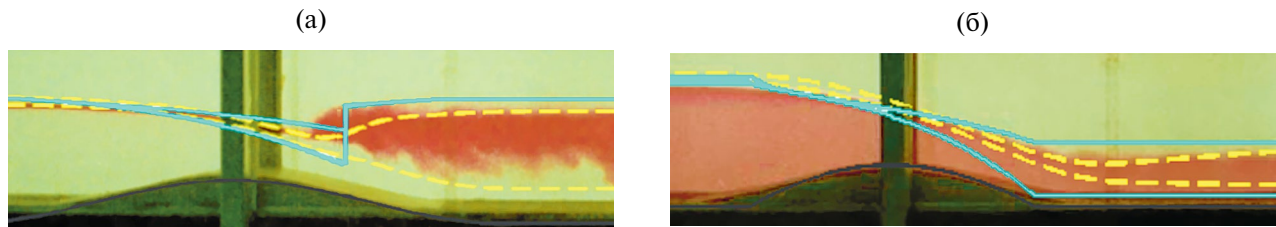


Рис. 7. Сравнение моделей E1 (пунктирные линии) и E2 (сплошные линии) с экспериментальными данными [5]: а) – течение с подветренным гидравлическим прыжком; б) – регулярное транскритическое течение.

В качестве второго примера сравнения моделей выбрано течение с отогнанным гидравлическим прыжком ($z_m^2 = 0$). В этом случае результаты расчета течения над препятствием в рамках модели E1 наиболее отличаются от полученных экспериментально (см. [20, рис. 5г]), в то же время вне препятствия границы между слоями передаются адекватно. Расчеты по модели E2 также существенно отличаются от наблюдаемой в эксперименте границы раздела над локальным препятствием, а вне препятствия соответствуют как экспериментальным данным, так и модели E1.

Для того, чтобы найти причину расхождения вычислительных и экспериментальных результатов заметим, что для приведенных в статье [5] определяющих безразмерных параметров ($Q^- = 0.134$, $Q^+ = 0.2$, $z_m = 0.21$) в рамках модели E2 течение соответствует картине, изображенной на рис. 6 б, то есть течение непосредственно перед препятствием критическое, а над гребнем сверхкритическое. Для трехслойной модели E1 классификация стационарных решений усложняется, но характерный немонотонный профиль внутренней границы раздела над гребнем также свидетельствует о сверхкритическом режиме обтекания [20, рис. 5г]. Так как модели E1 и E2 выведены с использованием гипотезы о гидростатичности распределения давления во всей области течения, то влияние негидростатических эффектов может быть более выраженным для такого режима течения, чем для регулярных режимов обтекания препятствия. Поэтому переход к нерегулярному режиму в лабораторном эксперименте при возрастании скоростей в слоях может затягиваться. Для модели без перемешивания ($Ri = 0$) учет влияния негидростатических эффектов показал возможность использования двухслойной схемы обтекания локального препятствия для интерпретации экспериментальных данных и в случае нерегулярного режима течения [28, рис. 5]. Учет негидростатических эффектов в равновесных моделях течения многослойной стратифицированной жидкости требует дальнейшего исследования.

Заметим, что даже относительно небольшое уменьшение расходов в слоях ($Q^- = 0.12$, $Q^+ = 0.17$, $z_m = 0.21$) в численных расчетах по моделям E1 и E2 приводит к регулярному режиму обтекания препятствия, близкому к наблюдаемому в эксперименте. Для этих данных на рис. 7б результаты расчета по модели E2 (сплошные линии) и модели E1 (пунктирные линии) приведены на фоне фотографии из статьи [5, рис. 6г]. В отсутствие подветренного гидравлического прыжка равновесные модели E1 и E2 качественно описывают эволюцию границ слоя смешения во всей области течения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Равновесные модели выводятся из более общих моделей при дополнительных и весьма ограничительных требованиях на характер движения сплошной среды. Поэтому они пригодны только для описания определенных классов течений. Но редукция определяющих течение уравнений к более простой системе позволяет расширить класс точных решений и более полно исследовать корректность постановки граничных условий для рассматриваемых нелинейных задач. Предложенная в работе модель (1.6) по структуре аналогична классическим уравнениям двухслойной мелкой воды без перемешивания между слоями ($Ri = 0$). Структура автомодельных решений (простых центрированных волн и устойчивых ударных переходов) также соответствует этому случаю. Основное отличие состоит в поведении решений в окрестности границы области гиперболичности. Проведенные численные расчеты нестационарных течений показывают возможность выхода решения из области гиперболичности и нарушения корректности задачи Коши для рассматриваемой системы. С другой стороны, полученное численное решение остается достаточно регулярным. Таким образом, вопрос о построении решения системы (1.6) со значениями,

выходящими из области гиперболичности, зависит от понятия обобщенного решения в рассматриваемом классе течений и требует дальнейшего исследования.

Анализ стационарных двухслойных течений над локальным препятствием в рамках модели (1.6) сводится к исследованию алгебраической системы уравнений. Показано, что транскритические течения смешивающейся жидкости кроме регулярного режима обтекания, в котором переход от докритического к сверхкритическому течению происходит над гребнем препятствия, допускают также полностью сверхкритическое течение над препятствием. В этом случае течение вверх по потоку не зависит от высоты препятствия, а контроль течения обеспечивается условием критичности потока непосредственно перед локальным препятствием. Таким образом показано, что условия, обеспечивающие контроль течения вверх по потоку, для равновесной модели (1.6) аналогичны случаю течения несмешивающихся жидкостей, исследованному в [22, 23].

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-41-00090).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Helfrich K.R., Melville W.K.* Long nonlinear internal waves // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 38. P. 395–425. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.38.050304.092129>
2. *Thorpe S.A., Li Lin.* Turbulent hydraulic jumps in a stratified shear flow. Part 2 // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 758. P. 94–120. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.502>
3. *Baines P.G.* Internal hydraulic jumps in two-layer systems // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 787. P. 1–15. <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.662>
4. *Ogden K.A., Helfrich K.R.* Internal hydraulic jumps in two-layer flows with increasing upstream shear // *Phys. Rev. Fluids.* 2020. V. 5. 074803. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.074803>
5. *Lawrence G.A., Armi L.* Stationary internal hydraulic jumps // *J. Fluid Mech.* 2022. V. 936. A25. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.74>
6. *Rastello M., Hopfinger E.J.* Sediment-entraining suspension clouds: a model of powder-snow avalanches // *J. Fluid. Mech.* 2004. V. 509. P. 181–206. <https://doi.org/10.1017/S0022112004009322>
7. *Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V.* A note on the propagation speed of a weakly dissipative gravity current // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 574. P. 393–403. <https://doi.org/10.1017/S0022112006004198>
8. *Dai A.* Experiments on gravity currents propagating on different bottom slopes // *J. Fluid Mech.* 2013. 731 pp. 117–141. <https://doi.org/10.1017/jfm.2013.372>
9. *Zhu R., He Z., Meiburg E.* Mixing, entrainment and energetics of gravity currents released from two-layer stratified locks // *J. Fluid Mech.* 2023. V. 960. A1. <https://doi.org/10.1017/jfm.2023.146>
10. *Turner J.S.* Turbulent entrainment: the development of the entrainment assumption, and its application to geophysical flows // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 183. P. 431–471. <https://doi.org/10.1017/S0022112086001222>
11. *Baines P.G.* Topographic effects in stratified flows. Cambridge Univ. Press, 1995. 500 p. DOI: 10.1017/9781108673983
12. *Klymak M., Moum J.N.* Internal solitary waves of elevation advancing on a shoaling shelf // *Geophys. Res. Lett.* 2003. V. 30, Issue 20. 2045. <https://doi.org/10.1029/2003GL017706>
13. *Bourgault D., Kelley D.E., Galbraith P.S.* Interfacial solitary wave run-up in the St. Lawrence Estuary // *J. Marine Res.* 2005. V. 63. P. 1001–1015. DOI:10.1357/002224005775247599
14. *Lamb K.* Shoaling solitary internal waves: on a criterion for the formation of waves with trapped cores // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 478. P. 81–100. <https://doi.org/10.1017/S0022112002003269>

15. *Ляпидевский В.Ю., Храпченко Ф.Ф., Чесноков А.А., Ярошук И.О.* Моделирование нестационарных гидрофизических процессов на шельфе Японского моря // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 1. С. 57–68.
<https://doi.org/10.31857/S0568528122010066>
16. *Кириллов В.В., Ляпидевский В.Ю., Суторихин И.А., Храпченко Ф.Ф.* Особенности трансформации нелинейных внутренних волн на шельфе и в глубоком озере // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 6. С. 121–131.
DOI: 10.31857/S1024708423600537
17. *Parker G., Fukushima Y., Pantin H.M.* Self-accelerating turbidity currents // J. Fluid Mech. 1986. V. 171. P. 145–81.
<https://doi.org/10.1017/S0022112086001404>
18. *Liapidevskii V. Yu., Dutykh D.* On the velocity of turbidity currents over moderate slopes // Fluid Dyn. Res. 2019. V. 51, № 3. 035501.
DOI: 10.1088/1873-7005/ab0091
19. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. М; Мир, 1977. 621 с.
20. *Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А.* Равновесная модель слоя смешения в сдвиговом течении стратифицированной жидкости // ПМТФ. 2024.
DOI: 10.15372/PMTF202315412
21. *Ляпидевский В.Ю.* Равновесная модель плотностного течения // Труды МИАН. 2023. Т. 322. № 6. С. 167–189.
<https://doi.org/10.4213/tm4303>
22. *Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Изд-во СО РАН, Новосибирск, 2000, 420 с.
23. *Baines P.G.* A unified description of two-layer flow over topography // J. Fluid Mech. 1984. V. 146. P. 127–167.
<https://doi.org/10.1017/S0022112084001798>
24. *Lax P.D.* Hyperbolic systems of conservation laws II // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. P. 537–566.
<https://doi.org/10.1002/cpa.3160100406>
25. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
26. *Гаврилюк С.Л.* Задача о распаде произвольного разрыва для газа Ван-дер-Ваальса // Динамика жидкости со свободными границами. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985. С. 36–54. (Динамика сплошной среды; Вып. 69).
27. *Ляпидевский В.Ю.* Течение Куэтта вязкоупругой среды максвелловского типа с двумя временами релаксации // Труды МИ АН. 2018, Т. 300. С. 146–157.
DOI: 10.1134/S0371968518010119
28. *Bukreev V.I., Gusev A.V., Liapidevskii V. Yu.* Blocking effects in supercritical flows over topography // PIV and Modeling Water Wave Phenomena, Proc. of the Int. Symp. (Cambridge, UK, April 18–19, 2002), Univ. of Oslo (2002). P. 86–90.

Two-Layer Equilibrium Model of Miscible Inhomogeneous Fluid Flow

V. Yu. Liapidevskii

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

e-mail: liapid@hydro.nsc.ru

Two-layer flow of a density-stratified fluid with mass transfer between the layers is considered. In the Boussinesq approximation, the equations of motion are reduced to a homogeneous quasilinear system of partial differential equations of mixed type. The flow parameters in the intermediate mixed layer are determined from the equilibrium conditions in a more general model of three-layer flow of a miscible fluid. In particular, the equilibrium conditions imply the constancy of the interlayer Richardson number in velocity-shift flows. A self-similar solution to the problem of breakdown of an arbitrary discontinuity (the lock-exchange problem) in the domain of hyperbolicity of the system under consideration is constructed. The transcritical flow regimes over a local obstacle are studied and the conditions under which the obstacle determines the upstream flow are determined. A comparison of steady-state and time-dependent solutions with the solutions obtained for the original three-layer models of miscible fluid flow is carried out.

Keywords: equilibrium model, two-layer flow, Boussinesq approximation, miscible fluids.