

УДК 532.5: 556.535.5

## САМОИНДУЦИРОВАННОЕ СМЕЩЕНИЕ И ВРАЩЕНИЕ ТАЮЩЕГО ЛЕДЯНОГО ДИСКА НА ПОВЕРХНОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ ВОДЫ

© 2024 г. А. В. Кистович, Т. О. Чаплина\*

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

*\*e-mail: tanya75.06@mail.ru*

Поступила в редакцию 29.01.2024 г.

После доработки 14.03.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

Представлены результаты экспериментальных исследований и физического моделирования явления самопроизвольного смещения и вращения ледяного диска на поверхности неподвижной воды. Измерены зависимости скорости вращения ледяного образца от солёности и глубины экспериментального контейнера. Показано, что причиной наблюдаемых движений на поверхности неподвижной воды является ячеистое конвективное течение, порождённое процессом таяния льда.

*Ключевые слова:* лед, таяние, вязкое увлечение, конвективные ячейки.

**DOI:** 10.31857/S1024708424040025, **EDN:** OYSVHR

Явление вращения плавучего льда на поверхности неподвижной воды, впервые описанное в конце XIX в., в последнее время снова стало привлекать внимание как натуральных [1, 2], так и лабораторных наблюдателей [3]. Несмотря на большое количество работ процессы формирования конвективных вихревых течений, образующихся вследствие таяния льда, изучены недостаточно полно; ряд сформулированных гипотез не нашел подтверждения в опытах, что объясняется сложностью теоретического описания и методическими трудностями выполнения экспериментов. До настоящего момента не существует единого мнения о механизме возникновения самоиндуцированного вращения ледяных объектов. В данной работе приводятся результаты измерений скорости вращения ледяного диска на поверхности исходно неподвижной пресной и соленой воды различной глубины, и построена новая физическая модель такого вращения.

Изучение течений, возникающих при размещении ледяного маркера на свободной поверхности покоящейся жидкости, требует учета целого ряда факторов, таких как состав и минерализация льда и воды, температура, солёность, форма и размер ледяного маркера, шероховатость его поверхности, имеющиеся подводные и поверхностные течения. При проведении эксперимента в лабораторных условиях удастся исключить или свести к минимуму влияние большинства слабо контролируемых факторов, исследовать упрощенную задачу, редуцировав ее термодинамическую часть к задаче свободной конвекции под гладкой поверхностью раздела. Эксперименты проводились в сосудах различной формы и размеров.

### 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве ледяных маркеров использовались образцы льда различной формы (круг, прямоугольник, квадрат, звезда, пятиугольник). Ледяные маркеры с замороженными указателями размещались на свободной поверхности как пресной, так и соленой воды ( $S=35\text{‰}$ ). Все эксперименты проводились при комнатной температуре воды и воздуха ( $20^\circ\text{C}$ ), ледяные маркеры охлаждались до температуры  $-11^\circ\text{C}$ , регистрация картины возникающих перемещений производилась видеокамерой, закрепленной на штативе.

При размещении ледяного маркера любой формы и размера на поверхности сосуда с покоящейся водой (площадь свободной поверхности превосходит площадь верхней грани ледяного блока не менее, чем в 2 раза) регистрируется вращение льда, скорость которого зависит как от глубины слоя воды, так

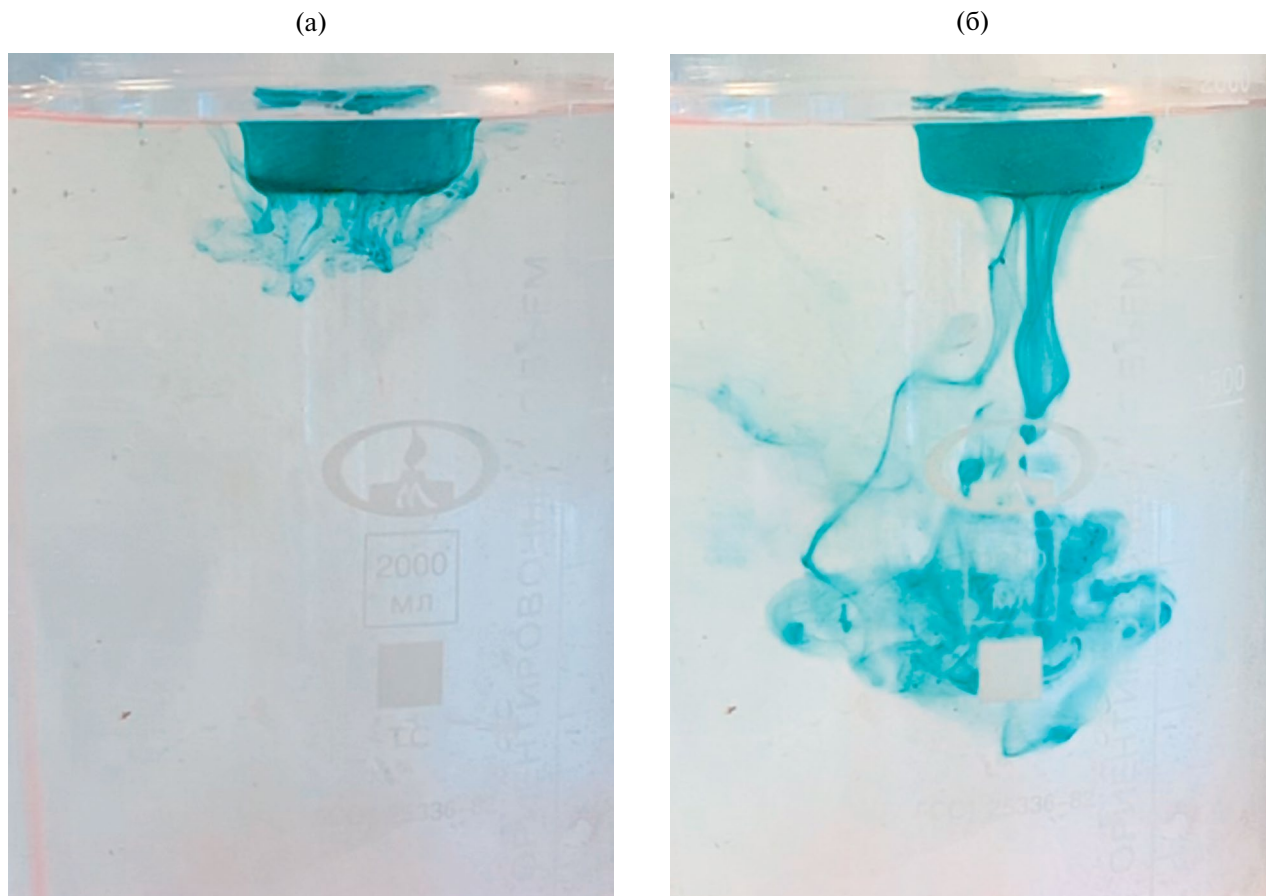


Рис. 1. Течение под ледяным диском ( $d = 1.0$  см,  $h_d = 0.3$  см,  $t = 1, 10$  с).

и от размера маркера. В частности, в экспериментах при глубине жидкости 3 см вращение ледяного блока толщиной  $h_d = 0.5$  см практически прекращалось. Для визуализации течения, возникающего в толще жидкости под размещенным на поверхности воды ледяным блоком, в ходе замораживания в воду добавлялся краситель – его высвобождение при таянии льда служит не только индикатором возникающего течения (рис. 1), но также выявляет его структуру – нисходящие под действием силы гравитации струи холодной талой воды.

При увеличении глубины слоя жидкости  $H$  (5, 10, 15, 20 см), на котором размещается ледяной блок, угловая скорость его вращения растет. Эксперименты также показали, что в соленой воде ( $S=35\%$ ) угловая скорость вращения льда меньше, чем в пресной. В этом позволяет убедиться зависимости угла поворота ледяного блока от времени для разных глубин в пресной и соленой воде, приведенные на рис. 2.

Анализ экспериментальных результатов позволяет выдвинуть гипотезу о том, что причиной вращения ледяного диска, помещенного в покоящуюся воду, являются течения, возникающие в воде в результате проявления нескольких физических эффектов. Как следует из теоретической механики [4], приобретение диском ненулевого кинетического момента относительно вертикальной оси, проходящей через его центр, возможно лишь в результате приложения к нему внешнего момента. Внешний вращательный момент, действующий на ледяной диск, представляет собой суммарный момент вязких касательных напряжений на границе “вода – лед”. Для того чтобы возникли вязкие касательные напряжения необходимо привести в движение исходно покоящуюся жидкость. Существуют два механизма, способные привести в движение жидкость в задаче в рассматриваемой постановке: неоднородность поверхностного натяжения как следствие неоднородности температурного распределения вдоль границы контакта сред, а также возникающие в воде конвективные течения.

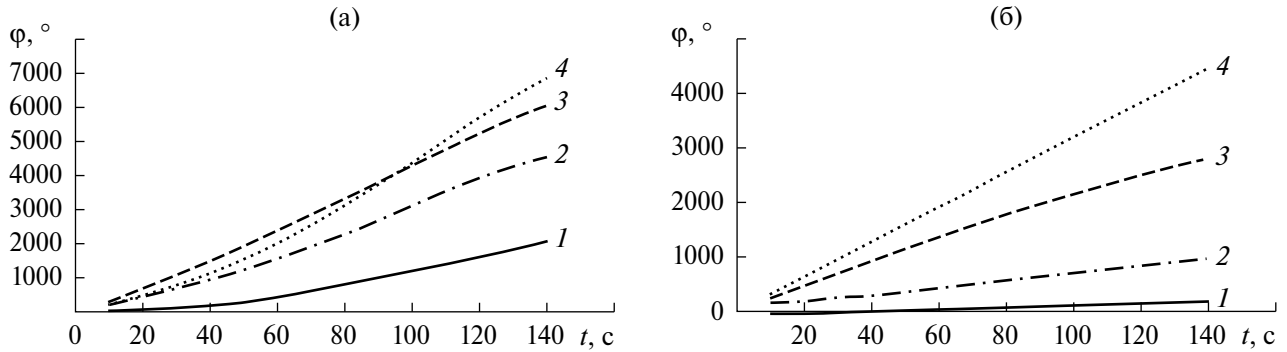


Рис. 2. Временная зависимость углового положения ледяных блоков ( $d = 2$  см,  $h = 1$  см) при различных глубинах пресной (а) и соленой (б) воды: 1–4 –  $H = 5, 10, 15, 20$  см.

Обе эти причины обусловлены наличием центров таяния льда на нижней (и, возможно, боковой) поверхности маркера.

## 2. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НА ДИНАМИКУ ЛЕДЯНОГО ДИСКА

Каждый из центров таяния даёт свой вклад в нарушение равномерного распределения температуры по контактной поверхности “вода – лёд”, в результате чего градиент коэффициента поверхностного натяжения становится отличным от нуля. Рассматриваемая здесь модель тающего ледяного диска представляет собой объект с идеально гладкой поверхностью, дно которого расположено на уровне  $z = z_b(t) < 0$  (уровень воды –  $z = 0$ ), а положение боковой стенки задается радиусом диска  $R(t)$ . Используемая цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, z)$  такова, что ее ось  $z$  совпадает с вертикальной осью, проходящей через центр диска. Так как внутри твёрдого льда макроскопическое движение его элементов отсутствует, то, согласно граничным условиям [5], возникающие вязкие напряжения на малом элементе  $dS$  поверхности льда задаются величиной  $-\nabla\alpha|_S$ , которая на дне диска ( $z = z_b$ ) имеет вид

$$-(\alpha'_r \mathbf{e}_r + \alpha'_\varphi / r \mathbf{e}_\varphi)|_{z=z_b}, \quad (2.1)$$

при этом в (1.1)  $\alpha = \alpha(r, \varphi)$ , а на боковой стороне приобретает форму

$$-(\alpha'_z \mathbf{e}_z + \alpha'_\varphi / R \mathbf{e}_\varphi)|_{r=R}, \quad (2.2)$$

причём в (2.2)  $\alpha = \alpha(z, \varphi)$ .

Вклад вязких напряжений на дне диска во вращательный момент относительно вертикальной оси, проходящей через его центр, определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &\sim - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \left[ \mathbf{r} \mathbf{e}_r \times (\alpha'_r \mathbf{e}_r + \alpha'_\varphi / r \mathbf{e}_\varphi)|_{z=z_b} \right] = \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \alpha'_\varphi|_{z=z_b} r dr = \\ &= \mathbf{e}_z \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \alpha'_\varphi|_{z=z_b} d\varphi = \mathbf{e}_z \int_0^R r dr (\alpha(r, 2\pi)|_{z=z_b} - \alpha(r, 0)|_{z=z_b}) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

так как по причине непрерывности температурного распределения по поверхности льда имеет место и непрерывность распределения коэффициента поверхностного натяжения, то есть  $\alpha(r, 2\pi)|_{z=z_b} - \alpha(r, 0)|_{z=z_b} = 0$ , откуда и следует результат (2.3).

Вклад вязких напряжений на боковой стороне диска во вращательный момент относительно вертикальной оси задаётся величиной

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_2 &\sim - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_b}^0 dz \left[ \mathbf{Re}_r \times \alpha'_\varphi / R \mathbf{e}_\varphi \Big|_{r=R} \right] = \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_b}^0 \alpha'_\varphi \Big|_{r=R} dz = \\
&= \mathbf{e}_z \int_{z_b}^0 dz \int_0^{2\pi} \alpha'_\varphi \Big|_{r=R} d\varphi = \mathbf{e}_z \int_{z_b}^0 dz \left( \alpha(z, 2\pi) \Big|_{r=R} - \alpha(z, 0) \Big|_{r=R} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

по той причине, что на боковой стороне диска  $\alpha(z, 2\pi) \Big|_{r=R} - \alpha(z, 0) \Big|_{r=R} = 0$ .

Таким образом, зависимость коэффициента поверхностного натяжения на границе “вода – лёд” может привести только к смещению, но не к вращению ледяного диска.

### 3. ВЛИЯНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ДИНАМИКУ ЛЕДЯНОГО ДИСКА

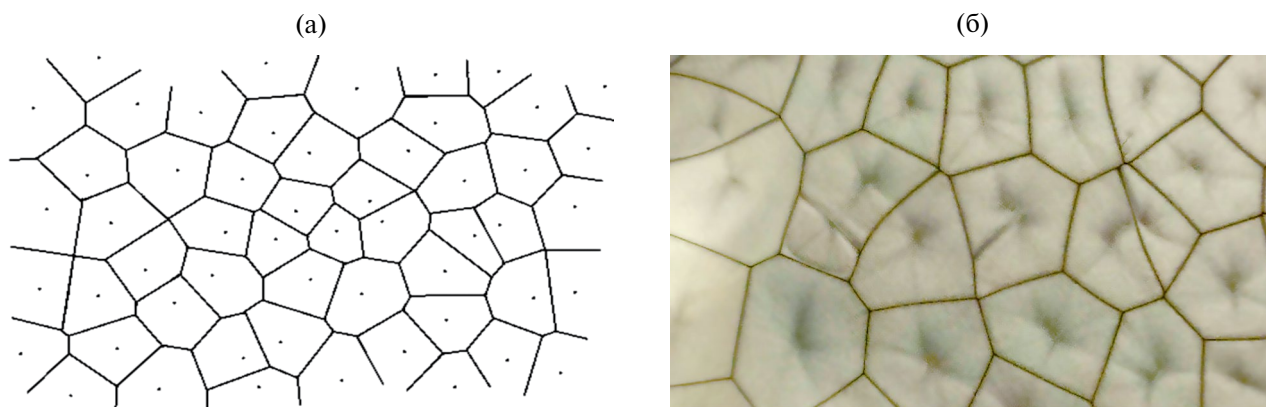
Нижняя поверхность ледяного диска, в используемой здесь модели плоская и однородная, на самом деле таковой не является. За счёт внутренних структурных неоднородностей льда, вызываемых различными причинами, на его поверхности образуются локальные области, называемые центрами таяния, на которых процесс таяния происходит интенсивнее, чем в среднем по поверхности. Этот факт подтверждается экспериментами [6] по изучению таяния нижней поверхности плавучего льда. В результате картина таяния, возникающая у нижней границы диска после контакта льда с водой, представляет собой слой талой воды и опускающиеся из него струи, порождённые центрами таяния льда. Эти струи вовлекают в своё движение окружающую воду, в том числе и слой талой воды вблизи границы “вода – лёд”, создавая на этой границе вязкие напряжения, которые при определённых условиях способны привести ледяной диск в движение.

Структура течения вблизи нижней границы льда талой жидкости, вовлечённой в движение опускающейся струей, порождённой единственным центром таяния, представляет собой вязкий пограничный слой, движение в котором направлено к этому центру [7–11]. При этом на границе “вода – лёд” и внешней границе слоя вовлечения горизонтальная скорость полагается равной нулю в предлагаемой модели, а вертикальная скорость считается отсутствующей во всём пограничном слое.

При наличии единственного центра таяния течение в жидкости симметрично относительно вертикальной плоскости, проходящей через этот центр и вертикальную ось симметрии ледяного диска. В результате момент вязких сил, действующих на поверхность диска, относительно центра его дна будет равен нулю, независимо от места расположения центра таяния. При этом результирующая сила может быть отличной от нуля, что может привести к смещению ледяного диска вдоль прямой, соединяющей центр дна диска и центр таяния. Если бы для течения, формирующегося под тающим диском, выполнялся принцип суперпозиции, то появление сразу двух центров таяния изменило бы только результирующую вязкую силу, но оставило бы неизменным её нулевой момент и диск только бы смещался, но не вращался. Но возникающее течение под диском, как показывают эксперименты, разбивается на конвективные ячейки, на границах которых горизонтальная компонента поля скорости обращается в ноль. Принцип суперпозиции нарушается, что и приводит к возникновению вращения. Предлагаемая ниже модель воздействия конвекции при таянии льда на движение ледяного диска основана, для простоты, на предположении о равенстве интенсивности течений от различных центров таяния.

Неподвижная граница конвективных ячеек, порождённых двумя центрами таяния, характеризуется равенством давлений по обе её стороны (в противном случае граница начала бы смещаться). В рамках используемой модели равенства интенсивностей центров таяний это означает, что граница между двумя соседними конвективными ячейками проходит по срединному перпендикуляру к отрезку, соединяющему центры таяния.

На рис. 3 приведено визуальное обоснование предлагаемой модели посредством сравнения результатов одной из её компьютерных реализаций (а) и фотографии реальной конвективной структуры (б), образовавшейся в эксперименте при нагреве плоского горизонтального источника тепла [11]. По сути дела, не существует отличия между экспериментально наблюдаемой и модельной структурами, что качественно подтверждает справедливость предлагаемой простейшей модели, которая далее будет использована при проведении необходимых расчётов.



**Рис. 3.** (а) Компьютерное моделирование конвективного паркета, образованного одинаковыми всплывающими струями. (б) Фотография реальной конвективной структуры в тонком слое жидкости [11] (вид сверху).

Количественная проверка данного способа формирования ячеистой картины конвекции проводилась для модели прямоугольного маркера, на котором случайным образом генерируются координаты большого числа ( $N = 40$ ) центров таяния с равномерным распределением координат по осям  $x \in [0, 2]$  и  $y \in [0, 1]$ . На основании этих координат строились границы конвективных ячеек и определялись характеристики отдельной конвективной картины (реализации), а именно: набор значений площадей отдельных ячеек; набор значений их периметров; зависимость количества ячеек в реализации от числа сторон ячейки. Для получения статистически значимых результатов создавались ансамбли реализаций, изучение свойств которых показало, что стабильные характеристики конвективных структур обеспечиваются ансамблями, включающими в себя не менее 40 реализаций. Именно это число элементов ансамблей было использовано при построении графиков, представленных на рис. 4–6.

На рис. 4–5 результаты статистической обработки ансамбля реализаций ячеистой структуры представлены в виде функций распределения числа сторон ячейки (рис. 4) и её периметра (рис. 5), показанные тёмными окружностями, и их аппроксимации (пунктирные линии) по методу наименьших квадратов. На рис. 4 по горизонтальной оси откладывается дискретное значение числа сторон конвективной ячейки, а на рис. 5 – периметр (в тех же безразмерных единицах, что и длины сторон прямоугольной области, занимаемой конвективной картиной). По вертикали на обоих графиках отложена плотность вероятности соответствующего случайного события. Как показывает проведённый анализ, функция распределения числа сторон ячейки  $n$  описывается распределением Вейбулла

$$f(a, b, n) = Weibull(a, b, n - 2) = \frac{b}{n - 2} \left( \frac{n - 2}{a} \right)^b \exp \left( - \left( \frac{n - 2}{a} \right)^b \right), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (3.1)$$

при  $a = 3.7$ ,  $b = 3.2$ .

Функция распределения периметра ячейки  $P$  представляет собой нормальное распределение со смещением

$$f(a, b, c, P) = Gauss(a, b, c) = a \exp(-b(P - c)^2), \quad P \in [0, 6], \quad (3.2)$$

при  $a = 0.34$ ,  $b = -8.1$ ,  $c = 0.95$ .

Функция распределения площади ячейки показана на рис. 6, где на левом графике представлены результаты статистической обработки ансамбля конвективных картин при дискретизации шага площади на величину 0.01 в диапазоне площадей  $S \in [0, 1.5]$ , а на правом – часть левого графика в диапазоне площадей  $S \in [0, 0.12]$  (тёмные окружности) и аппроксимация этого распределения функцией Вейбулла  $Weibull(a, b, S)$  при  $a = 5.7$ ,  $b = 2.2$  (пунктирная кривая).

Результаты проделанного моделирования – описание распределений площадей и числа сторон конвективных ячеек посредством двухпараметрической функции Вейбулла – совпадает с результатами

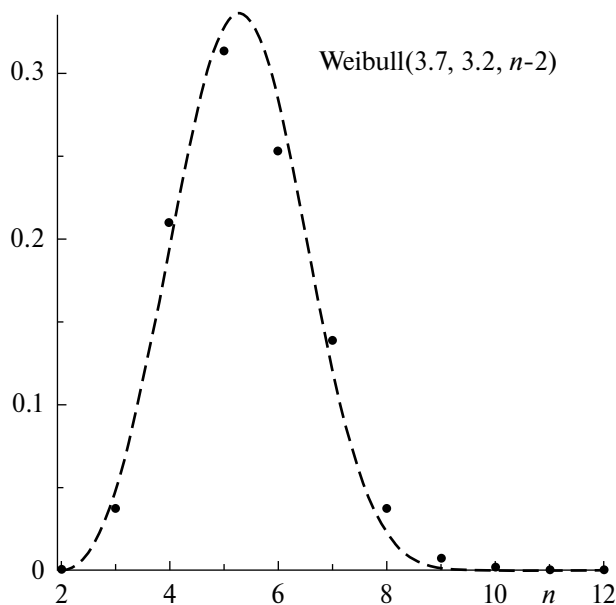


Рис. 4. Функция распределения числа сторон ячейки  $n$  – распределение Вейбулла (2.1).

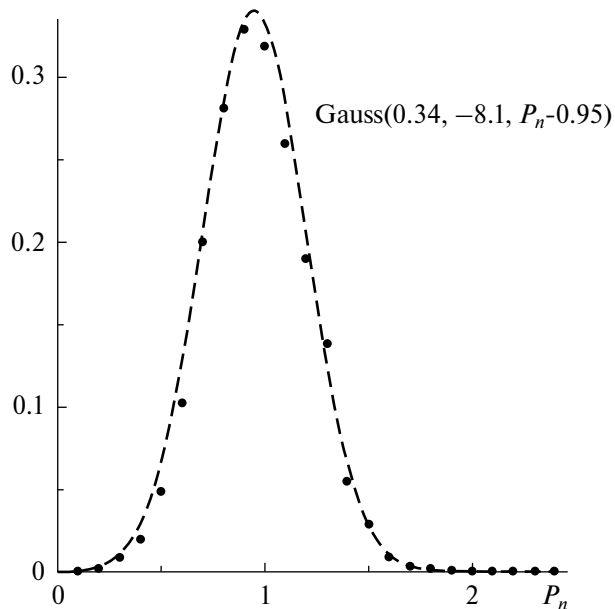


Рис. 5. Функция распределения периметра ячейки  $P$  – нормальное распределение со смещением (2.2).

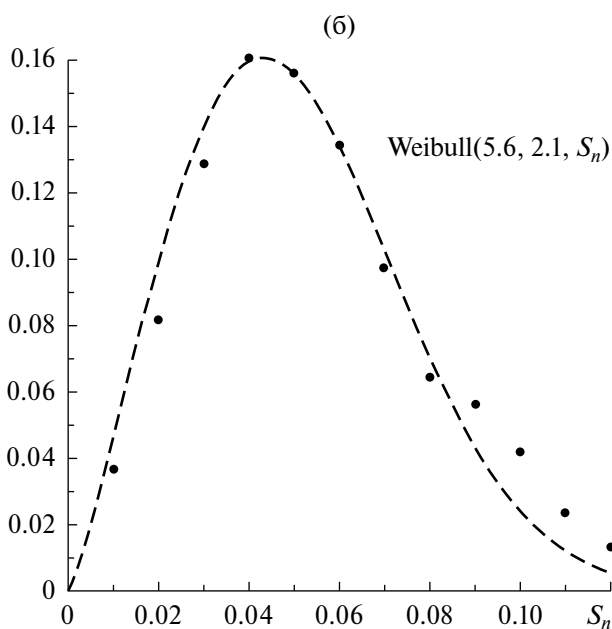
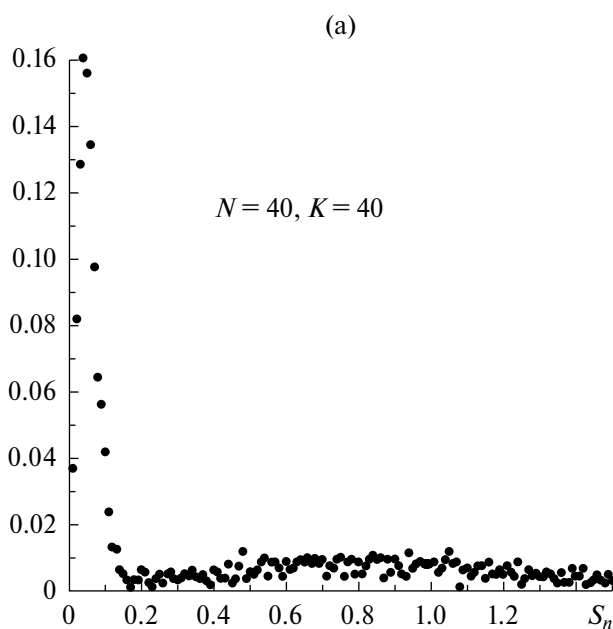


Рис. 6. Функция распределения площади ячейки: а) результаты статистической обработки ансамбля конвективных картин при дискретизации шага площади на величину 0.01 в диапазоне площадей  $S \in [0, 1.5]$ , б) часть рис. 6 (а) в диапазоне площадей  $S \in [0, 0.12]$  (тёмные окружности) и аппроксимация этого распределения функцией Вейбулла  $Weibull(a, b, S)$  при  $a = 5.7, b = 2.2$  (пунктирная кривая).

статистической обработки тех же параметров для выходов конвективных магматических структур на поверхность Земли при криогенезе вечной мерзлоты во время криодеградационного перехода льда в воду [12] (максимум сторон грунтовых полигонов сосредоточен при числе сторон 5 или 6, в точном соответствии с рис. 4 или картин кракелюр при высыхании грязевых поверхностей [13], что указывает на применимость предлагаемого здесь метода разбиения поверхности ледяного маркера на отдельные ячейки.

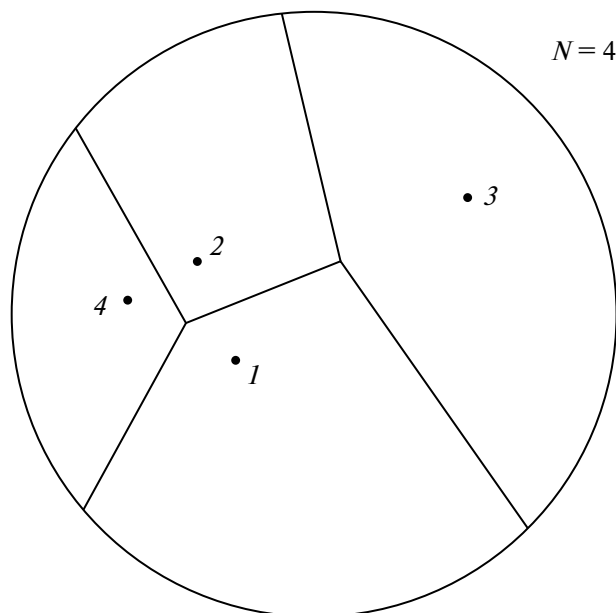


Рис. 7. Отдельная картина конвективных ячеек при  $N = 4$ .

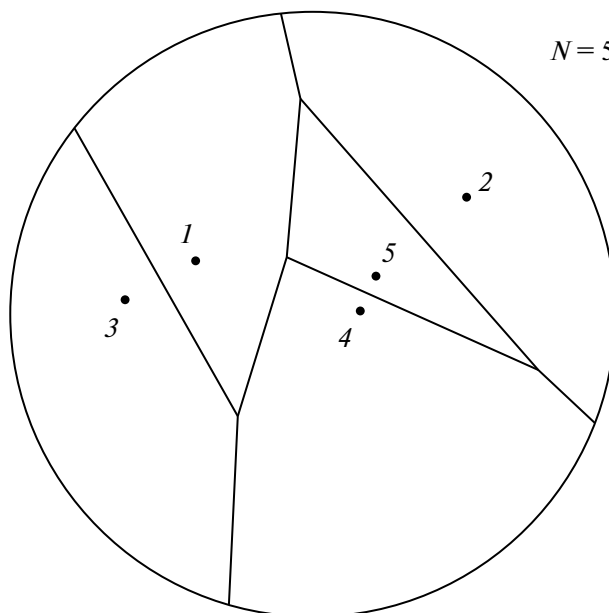


Рис. 8. Отдельная картина конвективных ячеек при  $N = 5$ .

Использование предложенной модели построения конвективной картины при таянии дна плавучего ледяного диска иллюстрируется двумя частными реализациями для четырёх и пяти центров таяния, показанными на рис. 7 и 8 соответственно.

Такое количество центров таяния соответствует экспериментальным наблюдениям. По причине того, что каждая отдельная реализация конвективной картины в данном случае содержит слишком малое число конвективных ячеек для создания устойчивых статистических характеристик, позволяющих проводить сравнения с известными лабораторными и натурными наблюдениями, построение функций распределения, подобных представленным на рис. 4–6, невозможно. Именно по этой причине статистическое обоснование принципа моделирования ячеистой картины таяния проводилось при большом числе центров  $N = 40$ , а прямоугольная форма области конвекции была выбрана для упрощения вычислений.

Для того, чтобы получить количественные оценки сил и моментов, действующих на таящий ледяной диск, необходимо задаться моделью поля скорости в пограничном слое, примыкающем к его дну. Многочисленные экспериментальные результаты, в том числе и [14], указывают на то, что внутри конвективной ячейки горизонтальная компонента поля скорости в произвольной точке всегда направлена вдоль прямой, соединяющей эту точку и точку всплытия (погружения) жидкости – в рассматриваемом здесь случае такой точкой является центр таяния льда. При этом горизонтальная скорость должна обращаться в ноль как в центре таяния, так и на границах конвективной ячейки.

С целью упрощения описания и вычислений, окружность на краю диска представлялась в виде правильного 100-угольника, что визуально трудноотлично, в том числе и на рис. 7. Каждая конвективная ячейка разбивается на треугольники отрезками, проведёнными из центра таяния в углы многоугольника, ограничивающего эту ячейку. Выбирается некоторая  $n$ -тая конвективная ячейка и  $j$ -тый треугольник в ней. Центр таяния расположен в точке  $(x_n, y_n)$ , а остальные две вершины этого  $j$ -того треугольника – в точках  $(x_j^{(n)}, y_j^{(n)})$  и  $(x_{j+1}^{(n)}, y_{j+1}^{(n)})$ . Пусть какая-либо точка выбранного треугольника имеет координаты  $(x, y)$ . Прямая, проходящая через центр таяния и эту точку пересекает отрезок, соединяющий точки  $(x_j^{(n)}, y_j^{(n)})$  и  $(x_{j+1}^{(n)}, y_{j+1}^{(n)})$  в точке  $(x_n^*, y_n^*)$ . Согласно модели течения, у поверхности льда внутри образующейся конвективной ячейки поле скорости во всех точках, за исключением погружающейся струи и малых областей вблизи стенок ячейки, направлено радиально к центру таяния, спадает обратно пропорционально расстоянию от центра таяния до точки наблюдения и описывается выражением, которое представляет собой модификацию приближённого выражения для поля скорости [7–11], применительно к ячеистой структуре

$$\mathbf{v}_j^{(n)} = v_n \frac{(x_n - x)\mathbf{e}_x + (y_n - y)\mathbf{e}_y}{r_n^2} \operatorname{erf}^2(\kappa r_n) \operatorname{erf}^2(\kappa r_n^*) f(z), \quad (3.3)$$

где  $\operatorname{erf}$  – функция ошибок,  $\kappa$  – некоторый параметр, величина которого будет оговорена в дальнейшем, и введены обозначения

$$f(z) = (z - z_b) \operatorname{erfc} \left( \frac{z_b - z}{\sqrt{\nu t_n}} \right), \quad r_n = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}, \quad r_n^* = \sqrt{(x_n^* - x)^2 + (y_n^* - y)^2},$$

при этом  $t_n$  – характерное время формирования пограничного слоя,  $\nu$  – кинематическая вязкость воды, а сама функция  $f(z)$  описывает поперечную структуру поля скорости в пограничном слое.

Координаты точки  $(x_n^*, y_n^*)$  на отрезке, соединяющий точки  $(x_j^{(n)}, y_j^{(n)})$  и  $(x_{j+1}^{(n)}, y_{j+1}^{(n)})$ , определяются выражениями

$$x_n^* = x_j^{(n)} + \lambda(x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}), \quad y_n^* = y_j^{(n)} + \lambda(y_{j+1}^{(n)} - y_j^{(n)}), \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Аналогично, координаты точки  $(x, y)$  на отрезке, соединяющем точки  $(x_n, y_n)$  и  $(x_n^*, y_n^*)$ , задаются соотношениями

$$x = x_n + \mu(x_n^* - x_n), \quad y = y_n + \mu(y_n^* - y_n), \quad \mu \in [0, 1]. \quad (3.5)$$

На основании (3.4,3.5) представление поля скорости (2.3) приобретает вид

$$\mathbf{v}_j^{(n)} = -v_n \frac{\xi_j \mathbf{e}_x + \eta_j \mathbf{e}_y}{\mu r_j^2} \operatorname{erf}^2(\kappa \mu r_j) \operatorname{erf}^2(\kappa(1 - \mu)r_j) f(z), \quad r_j = \sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2} \quad (3.6)$$

$$\xi_j = x_j^{(n)} - x_n + \lambda(x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}), \quad \eta_j = y_j^{(n)} - y_n + \lambda(y_{j+1}^{(n)} - y_j^{(n)})$$

При этом координаты точки внутри описываемого треугольника задаются соотношениями

$$x = (1 - \mu)x_n + \mu(x_j^{(n)} + \lambda(x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)})), \quad y = (1 - \mu)y_n + \mu(y_j^{(n)} + \lambda(y_{j+1}^{(n)} - y_j^{(n)})). \quad (3.7)$$

И тогда имеет место соотношение для элемента площади треугольника

$$dxdy = \left[ (y_{j+1}^{(n)} - y_j^{(n)})(x_j^{(n)} - x_n) - (x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)})(y_j^{(n)} - y_n) \right] \mu d\mu d\lambda = a_j^{(n)} \mu d\mu d\lambda, \quad (3.8)$$

где  $a_j^{(n)}$  – удвоенная площадь  $j$ -го треугольника  $n$ -й ячейки.

Правила интегрирования некоторой функции  $f$  по поверхности  $j$ -го треугольника имеет вид

$$\iint_{S_j^{(n)}} f dS_j^{(n)} = \int_{\mu_0}^{\sqrt{1-\mu_0^2}} \left( \int_0^1 f(\mu, \lambda) a_j^{(n)} d\lambda \right) \mu d\mu. \quad (3.9)$$

Здесь  $\mu_0 = 1$  – размер области вблизи центра таяния, в которой существует нисходящая струя холодной жидкости, а горизонтальная скорость обращается в ноль,  $\sqrt{1 - \mu_0^2}$  – размер области вблизи границы ячейки, где имеет место восходящий поток и горизонтальная скорость также обращается в ноль, при этом выполняется закон сохранения массы в совместном действии восходящего и нисходящего потоком. Таким образом, величина  $\kappa$ , входящая в соотношения (3.3–3.6) задаётся выражением  $\kappa = 1/\sqrt{1 - \mu_0^2}$ .

Так как в области  $\mu \in [\mu_0, \sqrt{1 - \mu_0^2}]$  справедливо соотношение

$$\Delta \mathbf{v}_j^{(n)} \Big|_{z=z_b} \approx -v_n \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\xi_j \mathbf{e}_x + \eta_j \mathbf{e}_y}{\mu r_j^2}$$



то, согласно (3.3) и (3.6), сила, действующая на  $n$ -ую ячейку, определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= -\eta v_n \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{J_n} \int_{\mu_0}^{\sqrt{1-\mu_0^2}} \int_0^1 \frac{\xi_j \mathbf{e}_x + \eta_j \mathbf{e}_y}{\mu(\xi_j^2 + \eta_j^2)} a_j^{(n)} \mu d\mu d\lambda = \\ &= -\eta v_n \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \sqrt{1-\mu_0^2} - \mu_0 \right) \sum_{j=1}^{J_n} \left( I_{xj}^{(n)} \mathbf{e}_x + I_{yj}^{(n)} \mathbf{e}_y \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $\eta$  – динамическая вязкость воды,  $J_n$  – число сторон в  $n$ -ой конвективной ячейке и введены обозначения

$$\begin{aligned} I_{xj}^{(n)} &= \frac{a_j^{(n)}}{\Delta_j^{(n)2} \left[ \Delta_{xj}^{(n)} \ln \frac{d_{j+1}^{(n)}}{d_j^{(n)}} + \Delta_{yj}^{(n)} \arcsin \frac{a_j^{(n)}}{d_j^{(n)} d_{j+1}^{(n)}} \right]} \\ I_{yj}^{(n)} &= \frac{a_j^{(n)}}{\Delta_j^{(n)2} \left[ \Delta_{yj}^{(n)} \ln \frac{d_{j+1}^{(n)}}{d_j^{(n)}} - \Delta_{xj}^{(n)} \arcsin \frac{a_j^{(n)}}{d_j^{(n)} d_{j+1}^{(n)}} \right]}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

при этом

$$\begin{aligned} \Delta_{xj}^{(n)} &= x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}, \quad \Delta_{yj}^{(n)} = y_{j+1}^{(n)} - y_j^{(n)}, \quad \Delta_j^{(n)2} = \Delta_{xj}^{(n)2} + \Delta_{yj}^{(n)2} \\ d_j^{(n)} &= \sqrt{(x_j^{(n)} - x_n)^2 + (y_j^{(n)} - y_n)^2}, \quad d_{j+1}^{(n)} = \sqrt{(x_{j+1}^{(n)} - x_n)^2 + (y_{j+1}^{(n)} - y_n)^2} \\ a_j^{(n)} &= \sqrt{p_j^{(n)}(p_j^{(n)} - \Delta_j^{(n)})(p_j^{(n)} - d_j^{(n)})(p_j^{(n)} - d_{j+1}^{(n)})}, \quad p_j^{(n)} = \frac{1}{2}(\Delta_j^{(n)} + d_j^{(n)} + d_{j+1}^{(n)}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Момент сил относительно оси симметрии ледяного диска определяется выражением

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{M}_n = \mathbf{e}_z \cdot \sum_{n=1}^N \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n = -\eta \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \sqrt{1-\mu_0^2} - \mu_0 \right) \sum_{n=1}^N v_n \left( x_n \sum_{j=1}^{J_n} I_{yj}^{(n)} - y_n \sum_{j=1}^{J_n} I_{xj}^{(n)} \right), \quad (3.13)$$

где  $N$  – число сформировавшихся конвективных ячеек на нижней поверхности тающего диска,  $\mathbf{r}_n = x_n \mathbf{e}_x + y_n \mathbf{e}_y$ .

Полная сила, действующая на ледяной диск, задаётся величиной

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n. \quad (3.14)$$

При реализации статистической обработки расчётов для  $N = 4$  и  $N = 5$  центров таяния создавались ансамбли из 200 реализаций конвективных структур. Обработка результатов показала, что средние по ансамблю значения компонент результирующей силы  $F_x$ ,  $F_y$  и момента  $M_z$  относительно вертикальной оси и их средние квадратичные отклонения  $\delta F_x$ ,  $\delta F_y$  и  $\delta M_z$  имеют значения

$$\overline{F_x} = -0.017, \quad \overline{F_y} = 0.097, \quad \overline{M_z} = 0.005; \quad \delta F_x = 0.736, \quad \delta F_y = 0.448, \quad \delta M_z = 0.126$$

при  $N = 4$ , а при  $N = 5$  имеют место данные

$$\overline{F_x} = -0.0006, \quad \overline{F_y} = 0.0145, \quad \overline{M_z} = -0.0008; \quad \delta F_x = 0.122, \quad \delta F_y = 0.584, \quad \delta M_z = 0.224.$$

Полученные результаты указывают на то, что ледяной диск может закручиваться как в одну, так и в другую стороны, а также смещаться в произвольном направлении (в зависимости от расположения

центров таяния), но в среднем по ансамблю он остаётся на месте и не вращается. При этом увеличение числа центров таяния влечёт за собой уменьшение средних по ансамблю значений компонент сил и момента относительно вертикальной оси. При этом каждая отдельная реализация конвективной структуры характеризуется смещением ледяного диска и его вращением.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что причина самопроизвольного смещения и вращения ледяных маркеров на поверхности покоящейся жидкости состоит в формировании под их нижней тающей поверхностью ячеистой конвективной структуры, порождённой несколькими центрами таяния льда. Именно наличие нескольких центров таяния способно придать ледяному диску не только поступательное, но и вращательное движение. Направление вращения зависит от знака суммарного момента, который определяется взаимным расположением центров таяния, и может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда РФФ № 24-27-00029.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nordell B., Westerstrom G. Large rotating ice discs on ice-covered rivers // *Weather*. 1997. № 209. P. 205–209.
2. Kouraev A.V., Zakharova E.A., Rémy F., Kostianoy A.G., Shimaraev M.N., Hall N.M.J., Zdrovennov R.E., Suknev A.Y. Giant ice rings on lakes and field observations of lens-like eddies in the Middle Baikal (2016–2017) // *Limnology and Oceanography*. 2019. № 64(6). P. 2738–2754.
3. Dorbolo S., Adami N., Dubois C., Caps H., Vandewalle N., Darbois-Texier B. Rotation of melting ice disks due to melt fluid flow // *Physical Review E*. 2016. № 93(3). P. 1–5
4. Айзерман М.А. Классическая механика. М.: Наука, 1980. 368 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
6. Bushuk M., Holland D.M., Stanton T.P., Stern A., Gray C. Ice Scallop: A Laboratory Investigation of the Ice-Water Interface // *J. Fluid. Mech*. 2019. P. 942–976.
7. Shlien D.J. Transition of the axisymmetric starting plume cap // *PhFl*. 1978. V. 21. № 12. P. 2154–2158.
8. Shlien D.J. Relations between point source buoyant convection phenomena // *PhFl* 1979. V. 22, № 12, P. 2277–2283.
9. Morton B.R., Taylor G., Turner J.S. Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources // *Proc. Roy. Soc. Ser. A*. 1956. V. A234. № 1196, P. 1–23.
10. Scorer R.S. Experiments on convection of isolated masses of buoyant fluid // *J. Fluid. Mech*. 1957. V. 2. P. 583–594.
11. <https://i.ytimg.com/vi/RUc-xRyBtSU/maxresdefault.jpg>
12. [http://ecosystema.ru/Географический\\_словарь/Полигонные\\_грунты](http://ecosystema.ru/Географический_словарь/Полигонные_грунты)
13. Bagnold R.A., Barndorff-Nelsen O. The pattern of natural size distributions // *Sedimentology*. 1980. V. 27, Issue 2, P. 199–207.
14. White D.B. The planforms and onset of convection with temperature dependent viscosity // *J. Fluid. Mech*. 1988, V. 191. P. 247–268.

## Self-Induced Displacement and Rotation of a Melting Ice Disk on the Still Water Surface

V. Kistovich and T. O. Chaplina \*

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

*\*e-mail: tanya75.06@mail.ru*

The results of an experimental investigation and physical modeling of self-induced displacement and rotation of an ice disk on the still water surface are presented. The dependence of the ice specimen rotation velocity on the water salinity and the depth of the experimental container is measured. It is shown that the reason for observable motions over the still water surface is the cellular convective flow generated by the ice melting process.

**Keywords:** ice, melting, viscous entrainment, convective cells.