

УДК 534-13

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЯМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

© 2024 г. А. Н. Нуриев*, О. Н. Зайцева**, А. М. Камалутдинов***,
Е. Е. Богданович****, А. Р. Баймуратова*****

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

*E-mail: Artem.Nuriev@kpfu.ru

**E-mail: olga_fdpi@mail.ru

***E-mail: amkamalutdinov@kpfu.ru

****E-mail: helenbogdanovich03@gmail.com

*****E-mail: angelina.baimuratova@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.09.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

Проводится исследование гидродинамических течений, индуцированных поступательными колебаниями цилиндрических тел с разной формой сечения. Движение жидкости около осциллирующих тел описывается с помощью системы уравнений Навье—Стокса, которая записывается в обобщенной криволинейной системе координат. Переход к заданной форме тела реализуется с помощью конформного отображения. Решение задачи осуществляется в предположении о малости амплитуд колебаний с помощью метода последовательных асимптотических разложений. Подзадачи в каждом асимптотическом приближении решаются численно с помощью метода конечных разностей. По результатам работы получены оценки гидродинамического воздействия, проведена оценка применимости высокочастотного асимптотического приближения, изучены вторичные стационарные течения около цилиндров, в частности, на примере профиля Жуковского рассмотрено возникновение направленных стационарных потоков около колеблющегося несимметричного тела.

Ключевые слова: колебательное движение, вязкая жидкость, гидродинамическая сила, вторичное стационарное течение, пропульсивное движение

DOI: 10.31857/S1024708424020143 EDN: RILRDJ

Исследования аэрогидродинамики колебательного движения тел в жидкости имеют большое значение для широкого спектра прикладных направлений, таких как морское строительство [1, 2], авиационно-космическая инженерия [3, 4], атомно-силовая микроскопия [5, 6], альтернативная энергетика [7], микрофлюидика [8, 9], разработка биомиметических пропульсивных систем [10–12] и др.

Основой для многих гидродинамических моделей в обозначенной области является двумерная теория обтекания осциллирующих цилиндрических тел простой формы, например, круглой, квадратной, эллиптической и т.д. Однако даже в двумерном случае задача описания течений и определения соответствующего воздействия на колеблющиеся тела является нетривиальной.

При больших и средних амплитудах колебаний, когда около тел реализуются вихревые отрывные режимы обтекания, изучение аэрогидродинамики главным образом основывается на экспериментах и численных решениях (см., напр., [6, 9, 10, 13]), а также на моделях теории идеальной жидкости [14, 15]. При малых амплитудах колебаний, когда вязкие эффекты проявляются главным образом в пограничном слое около тела, полную картину гидродинамических процессов можно получить, используя асимптотический подход.

Первые результаты в этой области получены еще Стоксом [16] в XIX в. Им, в частности, в первом приближении было построено аналитическое решение для случая малоамплитудных колебаний круглого цилиндра. Развитие асимптотических исследований этой задачи проводилось далее в многочисленных работах, напр. [17–19, 28, 29].

Переход к некруглой форме сечения существенно осложняет решение задачи в рамках асимптотического подхода. Исследования в этой области не так многочисленны. Обобщение решения Стокса на цилиндрическое тело с произвольной формой сечения проводилось в работе Така [20], им был предложен метод

расчета гидродинамической силы, основанный на численном методе граничных элементов. Развитие этот подход получил в работах [21, 22]. Также следует отметить аналитические результаты для цилиндрических тел с разной формой сечения, полученные в исследованиях [23, 24] для случая высокочастотных малоамплитудных колебаний.

В данной работе в рамках развития метода формальных асимптотических разложений и численного моделирования исследуются гидродинамическое воздействие на тела с разной формой сечения, совершающие малоамплитудные поступательные колебания, и индуцированные такими колебаниями стационарные вторичные течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим течения, которые возникают около цилиндрического тела характерного размера R , совершающего малоамплитудные гармонические поступательные колебания в вязкой несжимаемой жидкости со скоростью

$$u_0 = U_0 \cos(\omega t)(\cos \alpha, \sin \alpha),$$

где U_0 — характерная амплитуда скорости колебаний; ω — частота колебаний; α — угол между осью колебаний и осью Ox .

Решение гидродинамической задачи будем проводить в подвижной криволинейной ортогональной системе координат (r, θ) жестко связанной с телом, которая задается конформным отображением

$$z(\zeta) = x + iy, \quad \zeta = r + i\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial y}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{\partial x}{\partial \theta}.$$

Оно отображает полуполосу $r_0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ во внешность сечения цилиндра в физической области. При этом $r = r_0$ переходит в замкнутую кривую, определяющую профиль сечения цилиндра, бесконечно удаленная точка перейдет в бесконечно удаленную $z(\infty) = \infty$ и $\partial z / \partial \zeta > 0$. Коэффициенты Ламе (масштабные коэффициенты) определяются следующим образом:

$$\lambda = \lambda_r = \lambda_\theta, \quad \lambda^2 = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta}.$$

Нормируя пространственные координаты на R , время на ω^{-1} , функцию тока u на $U_0 R$, завихренность w на ω , запишем уравнения, описывающие движение вязкой несжимаемой жидкости около цилиндра, в терминах завихренности — функция тока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k}{\lambda^2} \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} &= \beta^{-1} \Delta w, \quad w = \Delta \psi, \\ \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \Delta = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь безразмерные параметры

$$k = U_0 / (R\omega), \quad \beta = R^2 \omega / \nu$$

определяют безразмерную амплитуду колебаний и безразмерную частоту колебаний (где ν — кинематическая вязкость жидкости) цилиндра соответственно, далее будем считать $k \ll 1$.

В заданной подвижной системе координат на границе цилиндра ставятся условия прилипания и непротекания, а на бесконечности задаются граничные условия, соответствующие безвихревому осциллирующему течению:

$$r = r_0: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi \sim m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha) \cos t, \quad m_\infty = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{-\zeta} \right)_{\zeta=\infty}.$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Для решения задачи будем использовать метод формальных асимптотических разложений. Полагая k малой величиной, представим функции ψ и w в виде ряда по степеням k :

$$\psi = k^0 \psi_0 + k^1 \psi_1 + \dots, \quad w = k^0 w_0 + k^1 w_1 + \dots \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и (2) и собирая члены при одинаковых степенях k , получим серию линейных подзадач.

В главном члене решение описывает нестационарное стоксовское (осцилляционное) течение жидкости около цилиндра:

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} = \beta^{-1} \Delta w_0, \quad w_0 = \Delta \psi_0, \quad (4)$$

$$r = r_0: \quad \psi_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_0 = m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha) \cos t + O(1).$$

В соответствии с имеющимися граничными условиями решение подзадачи в этом члене можно представить в следующем виде:

$$\psi_0 = \text{Real} \left((\psi_0^1 + i \psi_0^2) e^{it} \right) = \psi_0^1 \cos t - \psi_0^2 \sin t, \quad (5)$$

$$w_0 = \text{Real} \left((w_0^1 + i w_0^2) e^{it} \right) = w_0^1 \cos t - w_0^2 \sin t.$$

Подставляя (5) в (4), перепишем эту подзадачу как

$$\begin{cases} \Delta \psi_0^{1,2} = w_0^{1,2} \\ -w_0^2 = \beta^{-1} \Delta w_0^1, \\ w_0^1 = \beta^{-1} \Delta w_0^2 \end{cases} \quad (6)$$

$$r = r_0: \quad \psi_0^{1,2} = \frac{\partial \psi_0^{1,2}}{\partial r} = 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_0^1 \sim m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha), \quad \psi_0^2 = O(1).$$

Далее ее решение будет определяться численно.

Подзадача при первой степени k , описывает как осцилляционные, так и стационарные потоки (далее стационарная часть обозначается с помощью индекса s). В ходе дальнейшего решения мы будем исследовать только стационарную составляющую решения, описывающую вторичные стационарные течения. Подзадача для определения этой составляющей записывается следующим образом:

$$\Delta w_1^s = \frac{\beta}{\lambda^2} \frac{\partial (\psi_0, w_0)^s}{\partial(r, \theta)} = \frac{\beta}{(2\lambda^2)} \frac{\partial (\psi_0^1, w_0^1)}{\partial(r, \theta)} + \frac{\partial (\psi_0^2, w_0^2)}{\partial(r, \theta)}, \quad (7)$$

$$\Delta \psi_1^s = w_1^s,$$

$$r = r_0: \quad \psi_1^s = \frac{\partial \psi_1^s}{\partial r} = 0.$$

Для симметричных тел на бесконечности будем использовать следующие условия:

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_1^s = O(1).$$

При колебаниях несимметричных тел могут возникать направленные потоки, в этом случае условие на бесконечности нужно рассматривать в виде

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_1^s = O(e^r).$$

Решение стационарной задачи далее также будет определяться численно.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Численное решение подзадач (6), (7) проводится с помощью метода конечных разностей. Решение строится в ограниченной области $r_0 \leq r \leq r_\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ на равномерных (в пространстве конформного отображения) сетках с $n_r \times n_\theta$ узлов. Дискретные значения переменных определяются в узлах расчетной сетки.

Для аппроксимации оператора Лапласа (в двумерной области) используется стандартный симметричный пятиточечный шаблон. Для вычисления частных производных в правой части уравнения (7) по дискретному решению, полученному в главном члене, используются симметричные конечно-разностные схемы 4-го порядка точности за исключением точек в окрестности границ области, где применяются центральные разности 2-го порядка точности. Как показывают расчеты, высокий порядок схемы для вычисления правой части позволяет существенно снизить накопление ошибок при решении задачи (7), в особенности при изучении колебаний несимметричных тел.

Остановимся более подробно на дискретизации граничных условий (ГУ). На границе цилиндра ГУ преобразуются к следующему виду:

$$\tilde{\psi}_0^{1,2}(r_0) = 0, \quad \tilde{w}_0^{1,2}(r_0) = \frac{1}{\lambda(r_0)^2} \frac{2}{h^2} \tilde{\psi}_0^{1,2}(r_0 + h_r),$$

где тильда обозначает приближенную сеточную функцию; h_r – шаг сетки по координате r . Условие для завихренности здесь отражает широкоизвестное условие Тома 2-го порядка точности [25].

На внешней границе расчетной области в первой подзадаче (6) ГУ записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_0^1(r_\infty) + \frac{\partial^{(up2)} \tilde{\psi}_0^1}{\partial r}(r_\infty) &= 2m_\infty e^{r_\infty} \sin(\theta - \alpha), \\ \tilde{\psi}_0^2(r_\infty) + \frac{\partial^{(up2)} \tilde{\psi}_0^2}{\partial r}(r_\infty) &= 0, \quad \frac{\partial^{(up2)} \tilde{w}_0^{1,2}}{\partial r}(r_\infty) = 0. \end{aligned}$$

Индекс (up2) у символа частной производной указывает здесь на использование направленной разности второго порядка точности для аппроксимации соответствующей производной. Представленные условия призваны смоделировать правильное осцилляционное поведение течения на удаленной (на конечное расстояние) границе. Дополнительные замечания по критериям выбора соответствующих условий даны в разделе 5.1.

Во второй подзадаче дискретные граничные условия на внешней границе задаются для симметричных тел как

$$\begin{aligned} e^{2r_\infty} \frac{\partial^{(up)} \tilde{\psi}_1^s}{\partial r}(r_\infty) - e^{2(r_\infty - h_r)} \frac{\partial^{(up)} \tilde{\psi}_1^s}{\partial r}(r_\infty - h_r) &= 0, \\ 2\tilde{w}_1^s(r_\infty) + \frac{\partial^{(up2)} \tilde{w}_1^s}{\partial r}(r_\infty) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

для несимметричных тел как

$$\begin{aligned} e^{-r_\infty} \frac{\partial^{(up)} \tilde{\psi}_1^s}{\partial r}(r_\infty) - e^{-(r_\infty - h_r)} \frac{\partial^{(up)} \tilde{\psi}_1^s}{\partial r}(r_\infty - h_r) &= 0, \\ 2\tilde{w}_1^s(r_\infty) + \frac{\partial^{(up2)} \tilde{w}_1^s}{\partial r}(r_\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь аналогично индекс (up) указывает на использование направленной разности 1-го порядка точности.

Решение результирующих систем линейных алгебраических уравнений проводилось с помощью геометрического многосеточного метода. Использовался V-цикл, количество пре- и поститераций сглаживания

в котором варьировалось от 3 до 6 в зависимости от сетки и геометрии цилиндра. В качестве метода сглаживания использовался метод релаксации. Решение считалось найденным при достижении невязки 10^{-8} .

Программный код был реализован на языке C^{++} на базе кода, созданного в работе [26]. Благодаря использованию многосеточного метода алгоритм решения имеет высокую скорость сходимости, характерное время полного расчета (в двух приближениях) одного случая на сетке с 2.6×10^5 узлов составляет от 30 с до 5 мин (в зависимости от формы тела) на одном ядре мобильного процессора Intel Core i7-1165G7.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ЦИЛИНДР

Одной из важнейших характеристик, исследуемых течений, является гидродинамическая сила $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$, действующая на цилиндр. Ее компоненты (обезразмеренные на $2\pi R^2 U \omega$) можно определить по следующим формулам:

$$f_x = \frac{1}{2\pi\beta} \left(\int_0^{2\pi} \omega \frac{\partial x}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0} d\theta + \int_0^{2\pi} y \frac{\partial \omega}{\partial r} \Big|_{r=r_0} d\theta \right),$$

$$f_y = \frac{1}{2\pi\beta} \left(\int_0^{2\pi} \omega \frac{\partial y}{\partial \theta} \Big|_{r=r_0} d\theta - \int_0^{2\pi} x \frac{\partial \omega}{\partial r} \Big|_{r=r_0} d\theta \right).$$

В соответствии с используемым разложением сила представляется в виде суммы слагаемых

$$f_x \approx f_x^1 \cos t - f_x^2 \sin t + k f_x^s,$$

$$f_y \approx f_y^1 \cos t - f_y^2 \sin t + k f_y^s,$$

для вычисления которых в программе использовались следующие приближенные формулы:

$$f_x^{1,2,s} = \frac{1}{2\pi\beta} \left(\sum_i \tilde{w}_{0,1}^{1,2,s}(r_0, ih_0) \frac{\partial^{(c)} x}{\partial \theta}(r_0, ih_0) h_0 + \sum_i y(r_0, ih_0) \frac{\partial^{(h)} \tilde{w}_{0,1}^{1,2,s}}{\partial r}(r_0, ih_0) h_0 \right),$$

$$f_y^{1,2,s} = \frac{1}{2\pi\beta} \left(\sum_i \tilde{w}_{0,1}^{1,2,s}(r_0, ih_0) \frac{\partial^{(c)} y}{\partial \theta}(r_0, ih_0) h_0 - \sum_i x(r_0, ih_0) \frac{\partial^{(h)} \tilde{w}_{0,1}^{1,2,s}}{\partial r}(r_0, ih_0) h_0 \right).$$

Здесь индекс (c) указывает на использование центрально-разностной аппроксимации, а индекс (h) — на использование следующей аппроксимации 2-го порядка точности с компактным шаблоном:

$$\frac{\partial^{(h)} \tilde{w}}{\partial r}(r_0, ih_0) = \frac{\tilde{w}(r_0 + h) - \tilde{w}(r_0)}{h_r} +$$

$$+ \frac{h_r}{2} \left(-g(r_0, ih_0) \lambda(r_0)^2 + \frac{-\tilde{w}(r_0, (i-1)h_0) + 2\tilde{w}(r_0, ih_0) - \tilde{w}(r_0, (i+1)h_0)}{h_0^2} \right),$$

при построении которой используются исходные уравнения для завихренности (6), (7), записанные в виде

$$\Delta w = g.$$

Такой способ аппроксимации, основанный на схеме дискретизации исходных уравнений, является более предпочтительным, чем, например, использование направленных разностей второго порядка точности, так как снижает накопление ошибки, связанной с повторным приближенным вычислением производной по известным дискретным значениям функции. Заметим также, что стационарные составляющие f_x^s и f_y^s для симметричных тел в обозначенных условиях равны нулю.

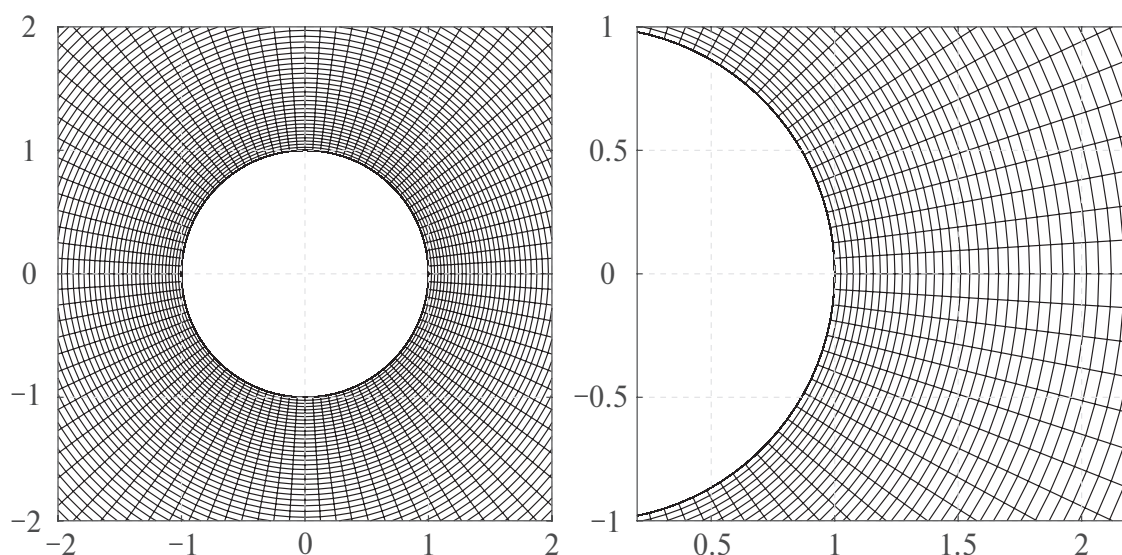


Рис. 1. Характерная структура сетки ($n = 100 \times 100$) в окрестности круглого цилиндра (в физической плоскости).

Традиционно в численных и экспериментальных работах для аппроксимации нестационарной силы (f_α), действующий на тело вдоль оси колебаний при установившемся движении, используют представление Морисона [27]:

$$f_\alpha \approx -\frac{4}{3\pi^2} k C_D \cos t + \frac{1}{2} C_M \sin t,$$

где C_D называется коэффициентом сопротивления или демпфирования, а C_M называется коэффициентом инерциальных сил. В нашем случае коэффициенты Морисона могут быть вычислены как

$$C_D = -\frac{3\pi^2}{4k} (f_x^1 \cos \alpha + f_y^1 \sin \alpha),$$

$$C_M = -2(f_x^2 \cos \alpha + f_y^2 \sin \alpha).$$

Заметим также, что вычисленная в используемой подвижной системе координат сила f отлична от силы f^* в неподвижной системе координат на величину, называемую силой Крылова–Фруда f^{FK} ($f = f^* + f^{\text{FK}}$). Она равна произведению ускорения на площадь S поперечного сечения тела:

$$f^{\text{FK}} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \sin t S.$$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

5.1. Колебания круглого цилиндра

В качестве первого примера рассмотрим колебания круглого цилиндра в жидкости. Преобразование координат для круглого цилиндра задается как

$$x = e^r \cos \theta, \quad y = e^r \sin \theta;$$

$$\lambda^2 = e^{2r}, \quad r_0 = 0.$$

Заметим, что при таком преобразовании используемая равномерная сетка в области конформного отображения соответствует экспоненциально сгущающейся сетке в направлении нормалей к цилиндру в физической плоскости (рис. 1).

На базе этого примера проведем непосредственную апробацию модели, сравнивая результаты с известным аналитическим решением. В главном члене оно было полученное впервые в знаменитой работе Стокса [16]. Его можно записать в следующем виде [28]:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \text{Real}((\psi_0^1 + i\psi_0^2)e^{it})\sin\theta, \\ \psi_0^1 + i\psi_0^2 &= e^r - e^{-r} - S_x e^{-r} - z^{-2}W_1, \\ z &= \sqrt{i\beta}, \quad W_1 = -2z \frac{K_1(ze^r)}{K_0(z)}, \quad S_x(z) = \frac{2K_1(z)}{zK_0(z)},\end{aligned}$$

здесь K_j — модифицированные функции Бесселя второго рода.

Стационарную часть решения в следующем приближении также можно выразить аналитически [19], [28]:

$$\psi_1^s = \sin 2\theta \left(\Psi(r) - \Psi(0)e^{-2r} - (\Psi'(0) + 2\Psi(0))(1 - e^{-2r})/2 \right),$$

$$\Psi(r) = -\frac{e^{4r}}{48} \frac{\beta\pi}{2} \int_1^\infty G(e^{r+x})(e^{2x} - 1)^3 dx,$$

$$G(r) = \frac{\beta\pi}{4} \text{Imag} \left(\frac{\bar{S}\Phi_0}{r^2} + 2S\Phi_2\bar{\Phi}_0 - S\Phi_2 \right),$$

$$\Phi_k(r) = \frac{K_k(zr)}{K_0(z)}, \quad S = \frac{K_2(z)}{K_0(z)}.$$

Структура аналитических решений учитывалась при выборе ГУ, представленных в разд. 3, на внешней границе расчетной области.

На рис. 2 представлена относительная погрешность $err_i^j = (\psi_i^j - \tilde{\psi}_i^j) / \psi_i^j$ численного решения, полученного на разных сетках при $\beta = 314$ в нестационарном и стационарном слагаемых. Как можно видеть, наибольшее значение относительной погрешности в главном члене достигается в пограничном слое около тела. На самой грубой сетке с $n = 256 \times 256$ узлами максимальная погрешность достигает приблизительно 0.82%, на наилучшей сетке с $n = 1024 \times 1024$ узлами — чуть менее 0.01%.

В следующем приближении, вычисленном с использованием результатов расчета главного члена, ошибка ожидаемо увеличивается. Максимальные значения относительной погрешности, как можно видеть на графиках, здесь достигаются в области перехода между внутренней и внешней циркуляционной зонами (см. подробнее разд. 5.2), где функция тока переходит через ноль.

Как следствие, в этой области при расчете относительной погрешности возникает деление на ноль, что и объясняет ее резкий скачок. Другое локальное значение максимума погрешности находится в стационарном погранслое у поверхности цилиндра, на лучшей сетке оно не превышает 2%. Во всей остальной области относительная погрешность численного решения в среднем не превышает 0.6% на самой грубой сетке и 0.04% на самой точной.

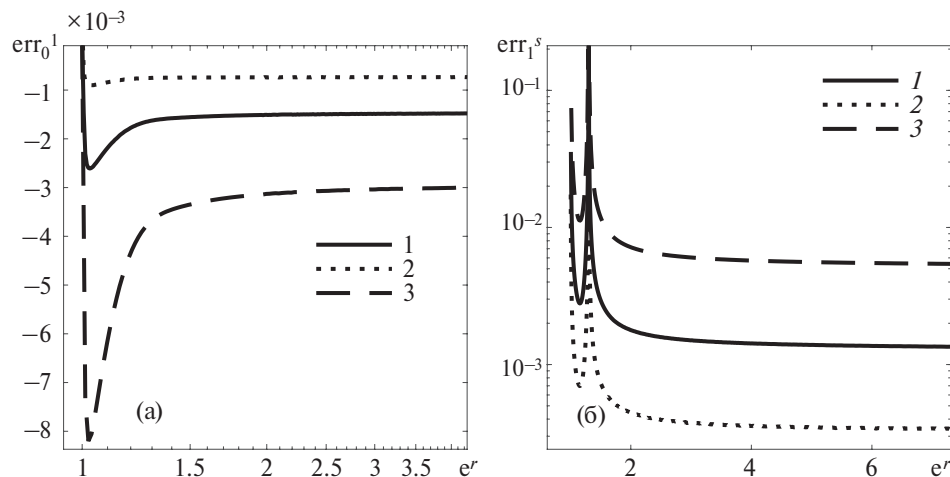


Рис. 2. Относительная погрешность численного решения $\tilde{\psi}_0^1$ (а) и $\tilde{\psi}_1^s$ (б) при $\beta = 314$, $\theta = \pi/4$, вычисленного на сетках с $n = n_r \times n_\theta$ узлов с $r_\infty = 3$: 1 — $n = 512 \times 512$, 2 — $n = 1024 \times 1024$, 3 — $n = 2566 \times 256$.

Таблица 1. Значения коэффициентов инерциальных сил и сил сопротивления для круглого цилиндра

$2^*\beta$	2^*k	C_D/C_M					
		n_1	n_2	n_3	(10)	(11)	[24]
*319	0.16	3.82/2.16	3.82/2.16	3.81/2.16	3.81/2.16	3.81/2.16	4/2.16
	0.22	2.77/2.16	2.77/2.16	2.77/2.16	2.77/2.16	2.77/2.16	2.9/2.16
	0.32	1.91/2.16	1.91/2.16	1.9/2.16	1.9/2.16	1.9/2.16	2.1/2.14
3*722	0.16	2.44/2.1	2.43/2.1	2.41/2.1	2.41/2.1	2.41/2.1	2.57/—
	0.22	1.77/2.1	1.77/2.1	1.75/2.1	1.75/2.1	1.75/2.1	1.85/—
	0.32	1.22/2.1	1.22/2.1	1.21/2.1	1.21/2.1	1.21/2.1	1.35/—
3*1 600	0.16	1.71/2.07	1.68/2.07	1.67/2.07	1.67/2.07	1.67/2.07	1.8/—
	0.22	1.24/2.07	1.22/2.07	1.21/2.07	1.21/2.07	1.21/2.07	1.25/—
	0.32	0.86/2.07	0.84/2.07	0.84/2.07	0.84/2.07	0.84/2.07	0.95/—

Далее проведем анализ интегральных характеристик течения, рассмотрим гидродинамические силы, действующие на круглый цилиндр. При малоамплитудных колебаниях силы в этом случае, очевидно, действуют лишь вдоль оси колебаний. Согласно аналитическому решению коэффициенты гидродинамических сил находятся следующим образом [28]:

$$C_D = -\frac{3\pi^2}{4k} \text{Imag}(S_x) + O(k),$$

$$C_M = 2 + 2\text{Real}(S_x) + O(k^2).$$
(10)

В табл. 1 представлены значения коэффициентов разложения Морисона вычисленные на сетках с количеством узлов $n_1 = 256 \times 256$, $n_2 = 512 \times 512$, $n_3 = 1024 \times 1024$ для разных значений β . Там же представлены значения C_D, C_M в приближении $\beta \rightarrow \infty$ [17] (их можно получить из (10), раскладывая S_x в ряд по степеням β):

$$\beta \rightarrow \infty: C_D = \frac{3\pi^2}{4k} (\sqrt{2}\beta^{-1/2} + \beta^{-1}) + O(\beta^{-3/2}) + O(k),$$

$$C_M = 2 + 2\sqrt{2}\beta^{-1/2} + O(\beta^{-3/2}) + O(k^2);$$
(11)

и данные прямого численного моделирования [24].

Как можно видеть, на всех рассматриваемых сетках мы получаем результат с хорошей точностью. Максимальная относительная погрешность по сравнению с аналитическим решением составляет не более 2.4% на самой грубой сетке.

Отметим хорошую согласованность рассматриваемой асимптотики (полученной в предположении $k \ll 1$) с данными прямого численного моделирования: при относительно малых амплитудах ($k = 0.16, 0.22$) разница между оценками C_D не превышает 6%.

Отдельно укажем на широкую область применимости формулы, которая дает хорошее приближение (совпадающее с полным решением в первых трех значащих цифрах) во всем рассмотренном диапазоне.

5.2. Эллиптический цилиндр

В качестве второго примера рассмотрим колебания эллиптического цилиндра в жидкости. Преобразование координат для этого случая задается следующим образом:

$$x = \sqrt{1-b^2} \cosh r \cos \theta,$$

$$y = \sqrt{1-b^2} \sinh r \sin \theta, \quad b = \frac{R_y}{R_x} < 1,$$

$$r_0 = \ln \left(\frac{\sqrt{1+b}}{\sqrt{1-b}} \right), \quad \lambda = (\sqrt{1-b^2}) \sqrt{\cosh^2 r - \cos^2 \theta},$$

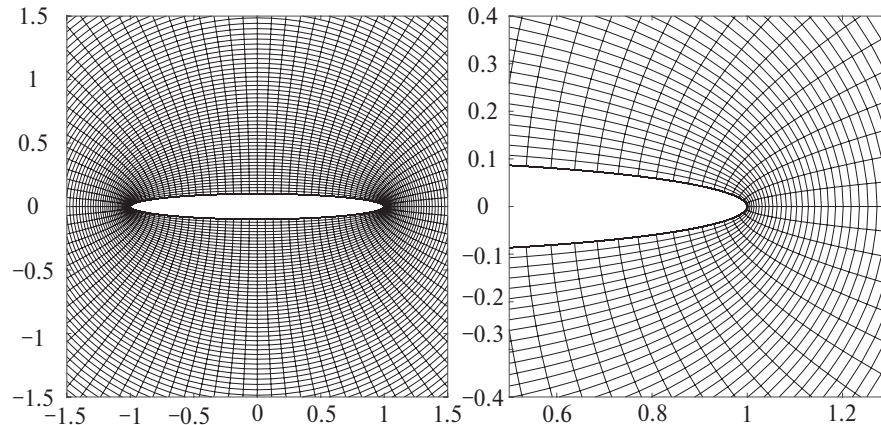


Рис. 3. Характерная структура сетки ($n = 100 \times 100$) в физической плоскости в окрестности эллиптического цилиндра при $b = 0.1$.

Таблица 2. Результаты исследования сеточной сходимости для случая $b = 0.1$ при $\beta = 772$, $\alpha = \pi/2$, $k = 0.032$.

2^*n	C_D			C_M		
	$r_\infty=2.4$	$r_\infty=3$	$r_\infty=3.4$	$r_\infty=2.4$	$r_\infty=3$	$r_\infty=3.4$
256×256	11.78	11.76	11.75	1.2		
512×512	11.83	11.82	11.81			
1024×1024	11.84					

где R_x, R_y — длины полуосей сечения цилиндра, расположенных вдоль соответствующих осей Ox, Oy в физической плоскости. Размер большей полуоси R_x в дальнейшем будем принимать в качестве характерного размера профиля ($R = R_x$).

Так как при малых значениях b геометрия тела существенно отличается от рассмотренного случая круглого цилиндра (рис. 3), проведем дополнительный анализ сеточной сходимости для $b = 0.1$.

В табл. 2 представлены результаты вычисления коэффициентов силы в расчетных областях разного размера (для разных значений r_∞) и на сетках с разным количеством узлов.

Как можно видеть, близость внешней границы (в обозначенных диапазонах) не сильно влияет на коэффициенты сил. Практически для всех расчетных параметров были получены идентичные результаты. На сетке с наибольшим количеством узлов значения коэффициентов при разных r_∞ вообще не отличаются в четырех первых значащих цифрах. Последующая серия расчетов выполнялась на сетке с 512×512 узлами при $r_\infty = 3$.

Проведем анализ зависимости коэффициентов C_M и C_D гидродинамической силы от отношения полуосей эллипса, переходя от круглого цилиндра при $b = 1$ к бесконечно тонкой пластине при $b = 0$. Графики соответствующих зависимостей, полученные в настоящей работе, представлены на рис. 4 для $\beta = 772$, $\alpha = \pi/2$ одновременно с результатами прямого численного моделирования и графиками асимптотических зависимостей, выведенных для случая $\beta \rightarrow \infty$ в [24]:

$$C_D^{(3)} = \frac{3\pi^2}{8k}(1+b)^2 \left\{ \beta^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \sin^2 \alpha) + \beta^{-1} \left[\cos^2 \alpha \left(-\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} j A_j^2 \right) + \sin^2 \alpha \left(-\frac{1}{2b^2} + \sum_{j=1}^{\infty} j B_j^2 \right) \right] \right\},$$

$$C_M^{(3)} = (1+b)(b \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \beta^{-1/2} \frac{(1+b)^2}{\sqrt{2}} (A_1 \cos^2 \alpha + B_1 \sin^2 \alpha),$$

$$A_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \theta \sin(j\theta)}{\lambda \sqrt{\cosh^2 r_0 - \cos^2 \theta}} d\theta,$$

$$B_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta \cos(j\theta)}{\lambda \sqrt{\cosh^2 r_0 - \cos^2 \theta}} d\theta.$$

(12)

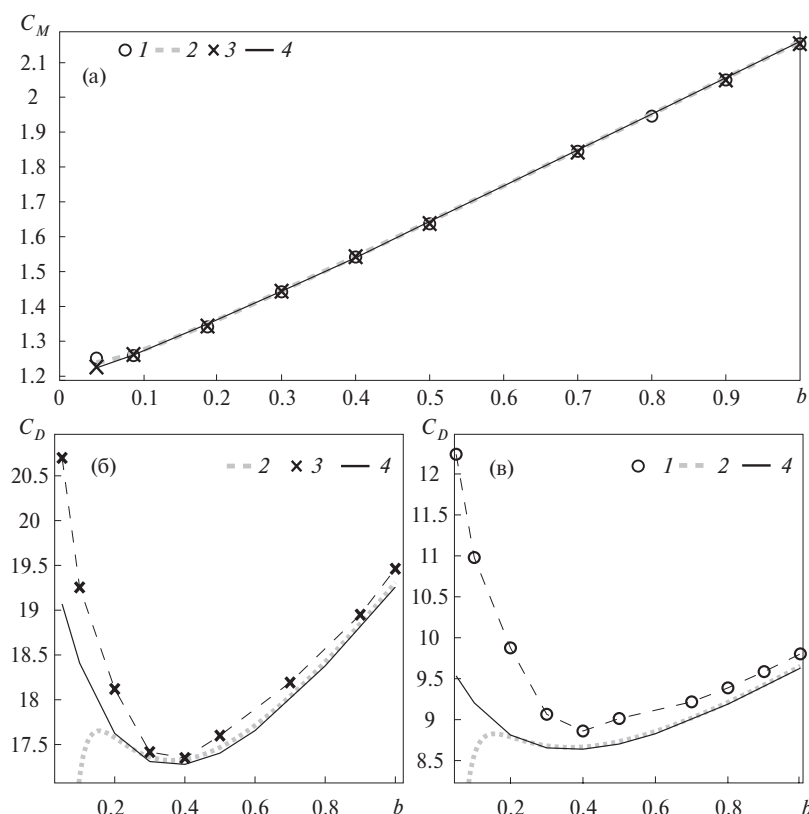


Рис. 4. Изменение коэффициентов C_M (а) и C_D (б, в) в зависимости от соотношения полуосей b для эллиптического цилиндра при $\beta = 314$, $k = 0.032$, $k = 0.064$. Сравнение малоамплитудной асимптотики (результаты настоящей работы) с высокочастотным приближением (12) и результатами прямого численного моделирования: 1 – численное моделирование при $k = 0.064$; 2 – асимптотика $\beta \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 0$; 3 – численное моделирование при $k = 0.032$; 4 – асимптотика $k \rightarrow 0$.

Таблица 3. Значения коэффициентов инерциальных сил и сил сопротивления для $\alpha = \pi/2$.

b	$\beta = 40$		$\beta = 314$		$\beta = 772$		$\beta = 1600$		$\beta = 4000$	
	$C_D k$	$C_D^{(03)} k$	$C_D k$	$C_D^{(03)} k$	$C_D k$	$C_D^{(03)} k$	$C_D k$	$C_D^{(03)} k$	$C_D k$	$C_D^{(03)} k$
1	1.84	1.84	0.614	0.614	0.386	0.386	0.266	0.266	0.167	0.167
0.5	1.66	1.67	0.554	0.556	0.348	0.349	0.240	0.241	0.152	0.151
0.1	1.66	1.14	0.586	0.541	0.375	0.362	0.263	0.258	0.168	0.167
0.05	1.69	-1.50	0.604	0.260	0.392	0.268	0.227	0.224	0.180	0.164

Здесь индекс (03) указывает на удержание трех членов при разложении по степеням b .

Как можно видеть, вычисленные в настоящей работе значения коэффициента C_M полностью согласуются как с асимптотической зависимостью (12), так и с результатами прямого численного моделирования.

Значения C_D при $b > 0.3$, полученные в разных приближениях (в том числе по данным численного моделирования), также хорошо совпадают. В области $b \rightarrow 0$ слагаемые ряда (12) для C_D попеременно стремятся то к плюс бесконечности, то к минус бесконечности, что ставит вопрос о границах применимости формулы при малых b . Как можно видеть, высокочастотная асимптотика (12) для рассматриваемого b хорошо совпадает с асимптотическим решением, полученным в нашей работе, начиная с $b \approx 0.2$.

В табл. 3 приведено сравнение C_D полученного в ходе численного асимптотического решения для произвольных β с высокочастотной асимптотикой (12).

Результаты показывают, что формула (12) в действительности имеет достаточно широкую область применимости, корректно описывая изменение C_D , начиная с низких частот b в широком диапазоне изменения параметра b . Существенные ошибки в определении коэффициента сопротивления наблюдаются лишь при малых b .

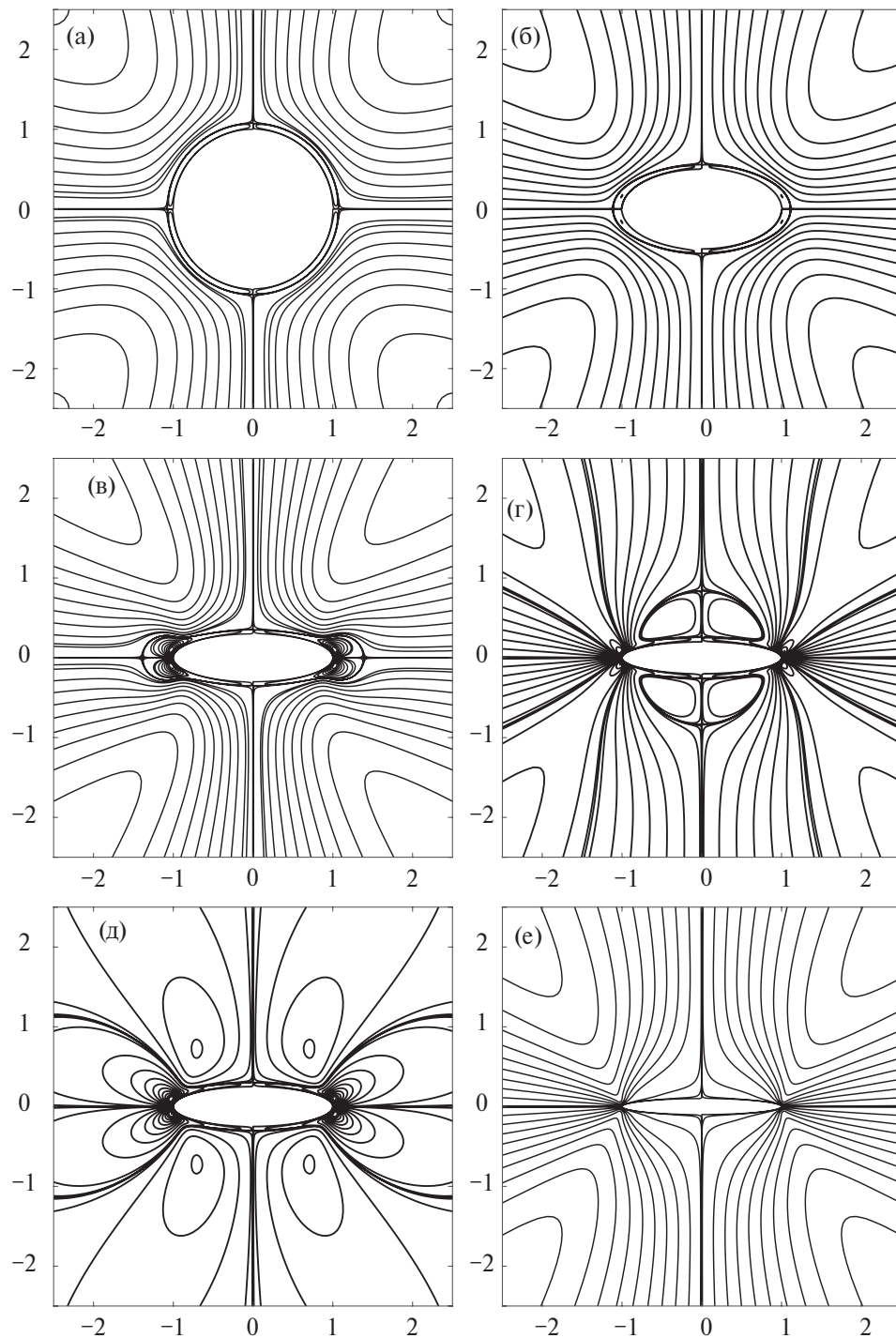


Рис. 5. Картины вторичных стационарных течений. Линии тока $\psi_1^s = \text{const}$ при $\beta = 4000$, $\alpha = \pi/2$: (а–е) – $b = 1, 0.5, 0.3, 0.25, 0.2, 0.1$.

Важно также отметить хорошее совпадение асимптотических оценок коэффициента сопротивления и результатов прямого численного моделирования. Видимые отличия наблюдаются лишь в области малых $b < 0.2$. Причем они усиливаются с ростом безразмерной амплитуды, что является следствием увеличения вклада членов порядка k^2 в определении силы (которые не определялись в данной работе).

Большой интерес при изучении гидродинамики колебательного движения тел представляют вторичные стационарные течения, которые формируются на фоне первичного колебательного движения и определяют перенос массы жидкости в области. Рассматриваемый подход дает большие возможности для изучения таких течений, возникающих во втором приближении. Здесь высокочастотная теория имеет

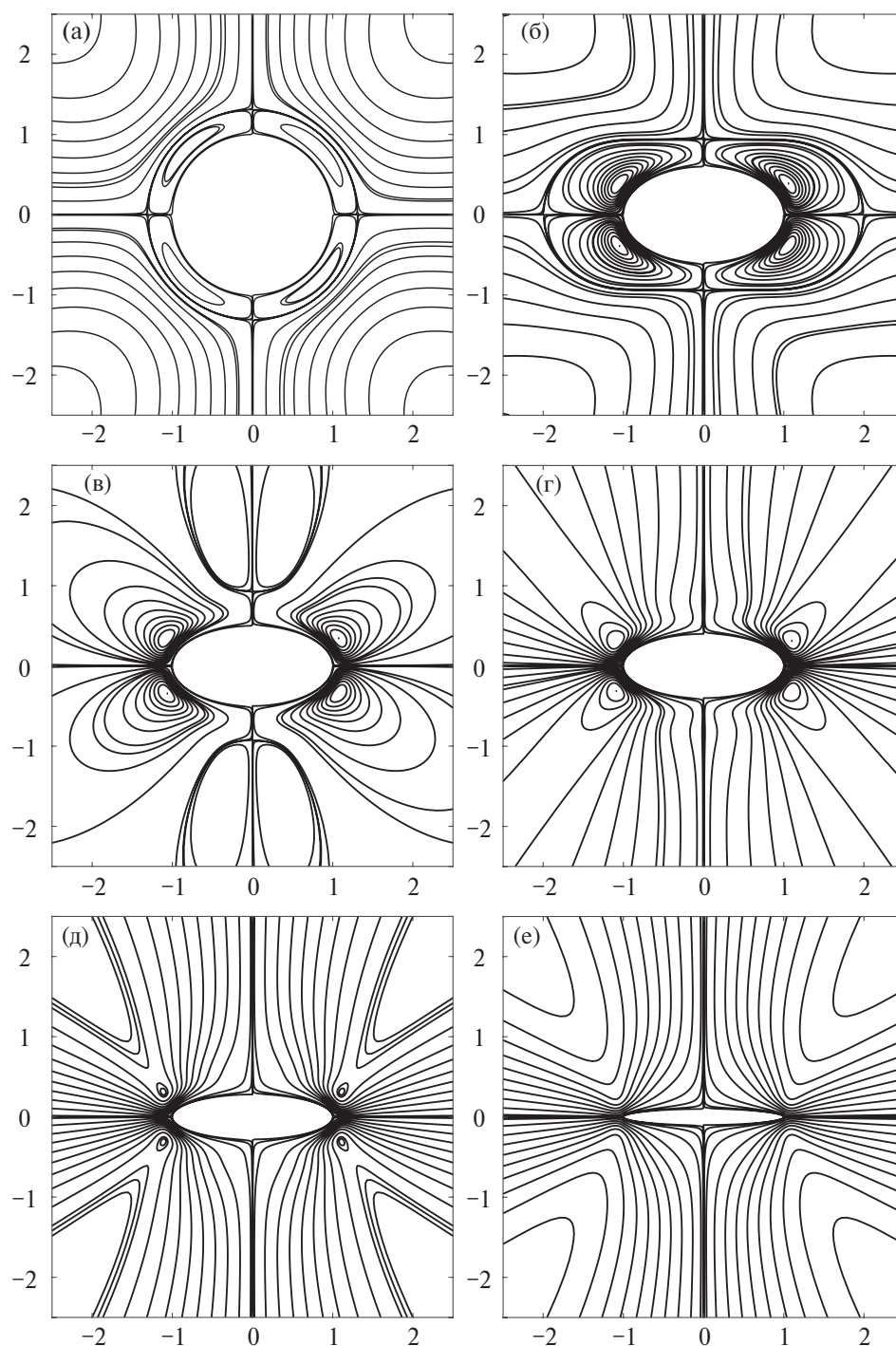


Рис. 6. Картины вторичных стационарных течений. Линии тока $\psi_1^s = \text{const}$ при $\beta = 314$, $\alpha = \pi/2$: (а–е) – $b = 1, 0.6, 0.5, 0.4, 0.28, 0.1$.

весьма ограниченные возможности, а прямое численное моделирование требует больших вычислительных затрат, так как требуются расчеты сотен циклов колебаний для описания стационарных течений.

На рис. 5, 6 представлены характерные структуры вторичных течений при разных значениях b для $\beta = 4000$ и $\beta = 134$. При $b = 1$ для всех рассматриваемых частот можно наблюдать один и тот же режим течения, в литературе он иногда называется закритическим [28].

Подобный режим течения был впервые теоретически описан Шлихтингом в 1932 г. [29]. Он реализуется при всех $\beta > 37.064$ [28] и характеризуется формированием двух циркуляционных зон около цилиндра.

Внутренняя циркуляционная зона состоит из четырех симметрично расположенных ячеек, внешняя граница которых образует окружность. Ее радиус зависит от параметра b . Внешнее циркуляционное течение на удалении от тела представляет собой квадрауполь

$$b=1, r \rightarrow \infty: \psi_1^s \sim \left(1 - \frac{1}{e^{2r}}\right) \sin 2(\theta - \alpha).$$

При $\beta=4000$ аналогичный режим можно наблюдать при $b=0.5$ и $b=0.3$. С уменьшением b центры внутренних циркуляционных ячеек смещаются вдоль поверхности цилиндра ближе к оси, перпендикулярной оси колебаний. При $b=0.25$ ($\beta=4000$) можно наблюдать значительное увеличение размера ячеек внутренней зоны. При $b=0.2$ ($\beta=4000$) они становятся бесконечно большого размера, ядро каждой из ячеек разделяется на два: один из центров остается около тела, второй устремляется к бесконечности. Внешняя циркуляционная зона при этом прижимается к оси колебания, превращаясь в циркуляционные ячейки конечных размеров. При $b=0.1$ ($\beta=4000$) эти ячейки полностью исчезают, также исчезают и ядра ячеек бывшей внутренней циркуляционной зоны, расположенные около цилиндра.

Изменение структуры течения при $\beta=314$ происходит похожим образом, только изменяются границы перехода между разными режимами. Трансформации закритического режима начинаются уже при $b=0.5$. Также разделение ячеек внешней циркуляционной зоны происходит здесь уже после полного исчезновения внешней циркуляционной зоны. До разделения, при $b=0.4$ течение приобретает структуру похожую на докритический режим, наблюдаемый у круглого цилиндра при $\beta < 37.064$.

5.3. Профиль Жуковского

В качестве заключительного примера рассмотрим колебания цилиндрического тела с сечением в форме руля Жуковского. Преобразование координат для описания геометрии этого тела задается как

$$x = m_\infty \left(e^r \cos \theta - m \right) + \frac{(1-m)^2 (e^r \cos \theta - m)}{e^{2r} - 2me^r \cos \theta + m^2};$$

$$y = m_\infty \left(e^r \sin \theta \right) - \frac{(1-m)^2 (e^r \sin \theta)}{e^{2r} - 2me^r \cos \theta + m^2};$$

$$m_\infty = \frac{1+m}{2}, 0 < m \leq 1,$$

$$\lambda^2 = e^{2r} \frac{(e^{2r} - 2(2m-1)e^r \cos \theta + (2m-1)^2)(e^{2r} - 2e^r \cos \theta + 1)}{(e^{2r} - 2me^r \cos \theta + m^2)^2} m_\infty^2.$$

Здесь x , y , λ^2 записаны в виде вещественных функций от вещественных переменных в той форме, в которой они использовались в программной реализации. Для получения классического профиля с острой кромкой нужно выбрать $r_0=0$, при этом сама кромка становится особой точкой в которой, в частности, λ^2 обращается в ноль. Для проведения расчетов профиль скруглялся, и значение r_0 выбиралось равным 0.02. Форма профиля и структура расчетной сетки в физической области для этого случая представлены на рис. 7.

Далее рассмотрим колебания этого цилиндрического тела вдоль оси симметрии (при $\alpha=0$). Проверка на сеточную сходимость и влияние размеров расчетной области проводились практически в каждом расчетном случае, в качестве основной была выбрана расчетная сетка с $n=512 \times 512$ узлами.

Результаты расчета силовых коэффициентов Морисона по решению в главном члене представлены в табл. 4. Для сравнения с круглым цилиндром ($m=1$), значения коэффициентов (и значения β) рассчитаны для случая, когда максимальная толщина крылового профиля равна двум. Как можно видеть значения коэффициента инерциальных сил последовательно снижается при уменьшении m , значение коэффициента сопротивления наоборот возрастает как следствие увеличение площади поверхности тела.

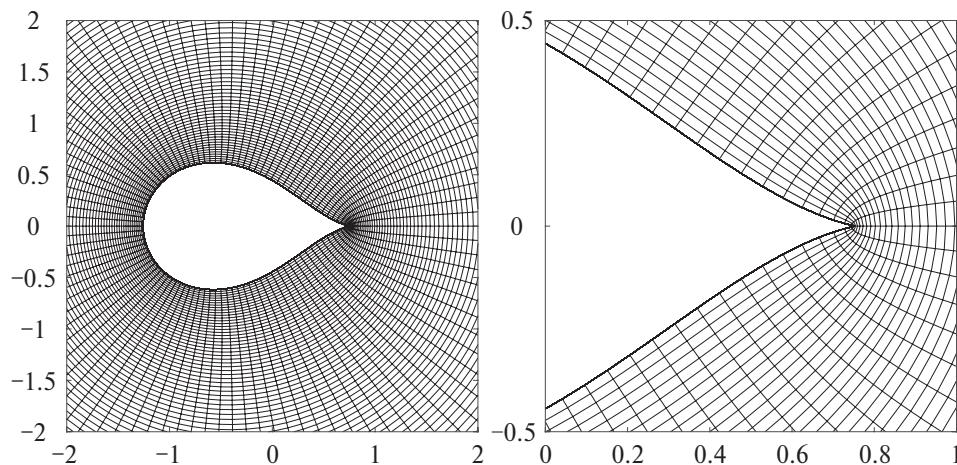


Рис. 7. Характерная структура сетки ($n = 100 \times 100$) в окрестности симметричного профиля Жуковского при $m = 0.5$, $r_0 = 0.02$.

Таблица 4. Значения коэффициентов инерциальных сил и сопротивления для крылового профиля при $\alpha = 0$, значения β вычислены по толщине профиля

m	$\beta = 40$		$\beta = 314$		$\beta = 772$		$\beta = 1600$		$\beta = 4000$	
	C_{Dk}	C_{DM}	C_{Dk}	C_{DM}	C_{Dk}	C_{DM}	C_{Dk}	C_{DM}	C_{Dk}	C_{DM}
1	1.84	2.45	0.614	2.15	0.386	2.1	0.266	2.07	0.167	2.04
0.9	1.83	2.38	0.614	2.10	0.389	2.05	0.272	2.02	0.179	1.99
0.5	1.98	1.750	0.673	1.55	0.428	1.51	0.303	1.487	0.245	1.47
0.3	2.41	1.44	0.832	1.28	0.539	1.24	0.386	1.225	0.250	1.208

Поскольку крыловой профиль не является симметричным относительно оси перпендикулярной оси колебаний, появляется асимметрия течений, индуцированных движением тела. В этом случае может возникать ненулевая скорость движения тела (направленный поток на бесконечности в рассматриваемой подвижной системе координат) или ненулевая средняя сила.

Второй вариант в рассматриваемом приближении приведет к появлению логарифмической особенности на бесконечности при решении уравнения Стокса [12] (в используемых координатах речь идет о члене re^r в функции тока), поэтому далее будем искать решение, при котором тело движется с крейсерской скоростью u^{st} при нулевой средней силе.

Для построения такого решения вместо условия (8), применявшегося ранее для симметричных тел, будем использовать на удаленной границе условие (9). Оно не ограничивает появление направленного потока, но запрещает возрастание скорости на бесконечности. При этом u^{st} находится из решения задачи.

Характерные структуры вторичных течений, возникающих при колебаниях профиля Жуковского, представлены на рис. 8. Как можно видеть, большинство из них похоже на те, что формируются у круглого и эллиптического цилиндров. При малых числах β (см. $\beta = 20$) около колеблющегося формируется одна циркуляционная зона, состоящая из четырех вихрей (как в докритическом режиме у круглого цилиндра), которые из-за формы тела и присутствия направленного потока расположены несимметрично относительно оси Oy . При больших значениях β (см. $\beta = 500, 7000, 4 \times 10^5$) хорошо различимы уже две циркуляционные зоны: внутренняя, прижатая к телу, и внешняя, как в закритическом режиме. Случаи $\beta = 50, 100$ можно отнести к переходным режимам.

Направление движения профиля с ростом β меняется несколько раз (значения скорости при разных β представлены в подписи к рис. 8). При $\beta = 20, 50, 100$ профиль движется острым торцом вперед. Затем, с появлением полноценной внешней циркуляционной зоны (см. $\beta = 500, 7000$), направление движения меняется на противоположное. В пределе больших β профиль вновь движется острым концом вперед.

В то же время следует отметить, что скорость стационарного движения во всех режимах является весьма незначительной. С учетом условия $k \ll 1$ она по крайней мере на два порядка ниже амплитуды скорости колебаний.

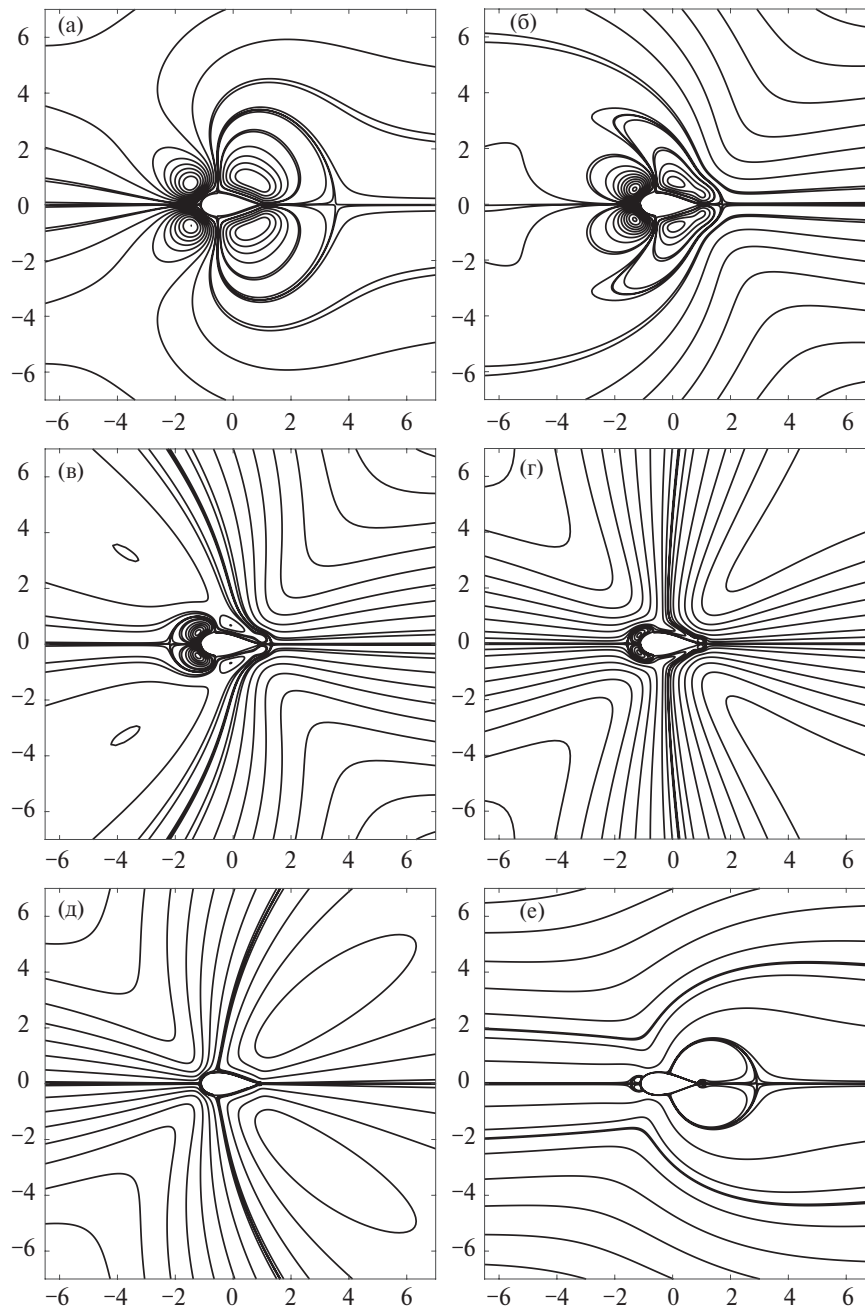


Рис. 8. Вторичные стационарные течения около кылового профиля. Линии тока для $m=0.3$ (а) $\beta=20$, $u^{st}=0.0069k$, (б) $\beta=50$, $u^{st}=0.0068k$, (в) $\beta=100$, $u^{st}=0.0065k$, (г) $\beta=300$, $u^{st}=0.003k$, (д) $\beta=7000$, $u^{st}=-0.025k$, (е) $\beta=4 \times 10^5$, $u^{st}=0.23k$; β вычислено по длине хорды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование гидродинамических течений, индуцированных малоамплитудными поступательными колебаниями цилиндрических тел в вязкой несжимаемой жидкости.

Движение жидкости описывалось с помощью системы уравнений Навье–Сокса, для решения которой была реализована аналитико-численная модель, основанная на методе формальных асимптотических разложений. Выбранный комплекс методов обеспечивал скорость расчетов на несколько порядков выше той, что может быть достигнута при прямом численном решении рассматриваемого класса задач.

Апробация метода была проведена на задаче о колебаниях круглого цилиндра, по результатам которой была подтверждена точность расчетной схемы, а также продемонстрирован широкий диапазон примени-

мости малоамплитудной асимптотической модели. В рамках решения задач о колебаниях эллиптического цилиндра и профиля Жуковского были построены асимптотические оценки нестационарной гидродинамической силы, проведены оценки границ их применимости, описаны трансформации вторичных стационарных течений, возникающих в результате нелинейности на фоне первичного нестационарного течения.

На примере профиля Жуковского изучена возможность появления направленных стационарных вторичных потоков или, что эквивалентно, движения колеблющегося тела с ненулевой крейсерской скоростью. Показано, что колеблющийся профиль является двигателем. В результате несимметричной формы он может совершать направленное движение в жидкости даже при симметричном законе колебаний. Направление такого пропульсивного движения зависит от безразмерной частоты колебаний.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда 22-79-10033 (разд. 1–4, 5.3) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук МК-3245.2022.1.1 (разд. 5.1, 5.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tang G., Cheng L., Lu L., Teng Y., Zhao M., An H. Effect of oscillatory boundary layer on hydrodynamic forces on pipelines // *Coast. Eng.* 2018. V. 140. P. 114–123.
2. Cheng L., An H., Draper S., White D. Effect of wave boundary layer on hydrodynamic forces on small diameter pipelines // *Ocean Eng.* 2016. V. 125. P. 26–30.
3. Бужинский В.А., Петряхин Д.А., Соломонов Е.В. Колебания в жидкости пластин с ребрами жесткости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 1. С. 39–46.
4. Бужинский В.А. Колебания жидкости в цилиндрических баках с продольными демпфирующими перегородками // *Изв. РАН. МЖГ.* 2020. № 1. С. 9–21.
5. Sader J.E. Frequency response of cantilever beams immersed in vis-cous fluids with applications to the atomic force microscope // *J. Appl. Phys.* 1998. V. 84. № 1. P. 64–76.
6. Scherer M.P., Frank G., Gummer A.W. Experimental determination of the mechanical impedance of atomic force microscopy cantilevers in fluids up to 70 kHz // *J. Appl. Phys.* 2000. V. 88. № 5. P. 2912–2920.
7. Erturk A., Inman D. Piezoelectric energy harvesting. N.Y.: John Wiley & Sons, 2011. P. 416.
8. Zhu H., Zhang P., Zhong Z., Xia J., Rich J., Mai J., Su X., Tian Z., Bachman H., Rufo J., Gu Y., Kang P., Chakrabarty K., Witelski T.P., Huang T.J. Acoustohydrodynamic tweezers via spatial arrangement of streaming vortices // *Science Advances.* 2021. V. 7. № 2. P. eabc7885.
9. Semati A., Amani E., Saffaraval F., Saffar-Avval M. Numerical simulation of oscillating plates at the visco-inertial regime for bio-inspired pumping and mixing applications // *Phys. Fluids.* 2020. V. 32. № 10. P. 101906.
10. Yeh P.D., Demirel E., Alexeev A. Turning strategies for plunging elastic plate propulsor // *Phys. Rev. Fluids.* 2019. V. 4. № 064101.
11. Гувернюк С.В., Дынников Я.А., Дынникова Г.Я., Малахова Т.В. Гидродинамические механизмы влияния упругой связи на пропульсивную силу крылового профиля при полудетерминированных колебаниях в потоке вязкой жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 5. С. 3–12.
12. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section // *J. Fluid Mech.* 2022. V. 941. № A23.
13. Нуриев А.Н., Камалутдинов А.М. Идентификация характеристик силового аэродинамического воздействия на колеблющиеся консольно-закрепленные балки // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 5. С. 62–79.
14. Бужинский В.А. Вихревое сопротивление пластинки при колебаниях в маловязкой жидкости // *ПММ.* 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 233–238.
15. Graham J.M.R. The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 97. № 2. P. 331–346.
16. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // *Trans. Camb. Phil. Soc.* 1851. V. 9. P. 8–106.
17. Wang C.-Y. On high-frequency oscillatory viscous flows // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32. № 1. P. 55–68.
18. Riley N. The steady streaming induced by a vibrating cylinder // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 68. № 4. P. 801–812.
19. Holtsmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S. Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid // *J. Acoust. Soc. Am.* 1954. V. 26. № 1. P. 26–39.

20. *Tuck E.O.* Calculation of unsteady flows due to small motions of cylinders in a viscous fluid // *J. Engng Maths* 1969. V. 3. № 1. P. 29–44.
21. *Brumley D.R., Willcox M., Sader J.E.* Oscillation of cylinders of rectangular cross section immersed in fluid // *Phys. Fluids*. 2010. V. 22. № 5. P. 052001.
22. *Ahsan S.N., Aureli M.* Finite amplitude oscillations of flanged laminas in viscous flows: vortex-structure interactions for hydrodynamic damping control // *J. Fluids Struct.* 2015. V. 59. P. 297–315.
23. *Davidson B.J., Riley N.* Jets induced by oscillatory motion // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 53, № 2. P. 287–303.
24. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M.* Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 913. P. A40.
25. *Weinan E., Liu J.G.* Vorticity boundary conditions and related issues for finite difference schemes // *J. Comput. Phys.* 1996. V. 124. P. 368–382.
26. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N.* Bifurcation analysis of steady-state flows in the lid-driven cavity // *Fluid Dyn. Res.* 2016. V. 48. № 6. P. 061405.
27. *Morison J.R., Johnson J.W., Schaaf S.A.* The force exerted by surface waves on piles // *J. Pet. Technol* 1950. V. 2. № 1. P. 149–154.
28. *Egorov A.G., Nuriev A.N.* Steady streaming generated by low-amplitude oscillations of a cylinder // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42, № 9. P. 2102–2108.
29. *Schlichting H.* Berechnung ebener periodischer grenzschichtströmungen // *Phys. Zeit.* 1932. V. 33. P. 327–335.

ASYMPTOTIC STUDY OF FLOWS INDUCED BY OSCILLATIONS OF CYLINDRICAL BODIES

A. N. Nuriev^{a,*}, O. N. Zaitseva^{a,}, A. M. Kamalutdinov^{a,***}, E. E. Bogdanovich^{a,****},
and A. R. Baimuratova^{a,*****}**

^a *Kazan Federal University, Kazan, Russia*

* *E-mail: Artem.Nuriev@kpfu.ru*

** *E-mail: olga_fdpi@mail.ru*

*** *E-mail: amkamalutdinov@kpfu.ru*

**** *E-mail: helenbogdanovich03@gmail.com*

***** *E-mail: angelina.baimuratova@yandex.ru*

Hydrodynamic flows induced by translational oscillations of cylindrical bodies of various cross-sectional shapes are studied. The motion of fluid around oscillating bodies is described using the system of Navier–Stokes equations written in a generalized curvilinear coordinate system. Transition to a given body shape is implemented using a conformal mapping. The problem is solved using the method of successive asymptotic expansions under the assumption that the oscillation amplitudes are small. In each asymptotic approximation, the subproblems are solved numerically using the finite-difference method. Based on the results of the work, estimates of the hydrodynamic effect are obtained, the applicability of the high-frequency asymptotic approximation is estimated, and secondary stationary flows near cylinders are studied, in particular, the occurrence of directed stationary flows near an oscillating asymmetric body is considered with reference to the Joukowski airfoil.

Keywords: oscillatory motion, viscous fluid, hydrodynamic forces, secondary stationary flows, propulsive motion