

УДК 532.5.013.2:532.135

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА ДЛЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ВЯЗКОСТИ

© 2024 г. В. Н. Колодежнов

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил “Военно-воздушная академия
им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина”, Воронеж, Россия*

E-mail: kvn117@mail.ru

Поступила в редакцию 09.11.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

Рассмотрена первая задача Стокса для течения неньютоновских жидкостей, эффективная вязкость которых изменяется в соответствии со степенным законом. Для жидкостей, механическое поведение которых описывается реологическими моделями Оствальда — де Ваэля и Гершеля—Балкли, с соответствующими ограничениями на показатель n степени нелинейности построены автомодельные решения. Показано, что для жидкости Оствальда — де Ваэля автомодельное решение существует лишь при $0 < n < 1$, что соответствует псевдопластическому поведению. В то же время для вязкопластической жидкости Гершеля—Балкли автомодельное решение может быть получено только при $n > 1$, когда эта жидкость демонстрирует проявление дилатантности.

Ключевые слова: первая задача Стокса, модель Оствальда — де Ваэля, модель Гершеля—Балкли

DOI: 10.31857/S1024708424020054 EDN: RJEZXC

Среди нестационарных задач динамики вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости с постоянным значением вязкости хорошо известна так называемая первая задача Стокса [1]. В этой задаче рассматривается неустановившееся ламинарное течение жидкости в полупространстве, которое ограничено пластиной, внезапно приведенной в своей плоскости в поступательное прямолинейное движение с постоянной скоростью. Такая задача допускает достаточно простое автомодельное решение [2]. Кроме самостоятельного интереса при проведении моделирования соответствующих гидродинамических процессов, это решение может быть использовано для тестирования различных численных методов [3, 4].

Вместе с тем, широкий круг реальных жидкостей демонстрирует более сложное механическое поведение по сравнению с ньютоновскими жидкостями [5–7]. Вязкость таких сплошных сред изменяется в зависимости от скорости деформирования. В первом приближении эта зависимость, зачастую, может быть аппроксимирована в рамках степенного закона. Именно такой вид был принят в одних из первых и хорошо известных в настоящее время нелинейных реологических моделях Оствальда — де Ваэля [8, 9] и Гершеля—Балкли [10]. Такие модели постоянно используются при рассмотрении самых различных задач гидродинамики [11, 12].

В данной работе получены автомодельные решения первой задачи Стокса для случая неньютоновских жидкостей с реологическими моделями Оствальда — де Ваэля и Гершеля—Балкли, а также проведен анализ влияния значений показателя степени нелинейного изменения эффективной вязкости в зависимости от скорости сдвига на возможность построения таких решений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномерное, ламинарное течение вязкой несжимаемой неньютоновской жидкости, возникающее в полупространстве, ограниченном пластиной, которая мгновенно приводится в своей плоскости в поступательное прямолинейное движение с постоянной скоростью U_0 . Введем декартову систему координат традиционным образом, сориентировав ось Ox вдоль пластины в направлении движения, а ось Oy — по нормали к ней. В безразмерной форме уравнение, описывающее динамику жидкости в рамках таких допущений, записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y'}; \quad u' = \frac{u}{U_0}; \quad t' = \frac{t U_0}{L}; \quad \tau'_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\rho U_0^2}; \quad y' = \frac{y}{L}, \quad (1.1)$$

где t – время; $u = u(y, t)$ – скорость жидкости в направлении продольной оси Ox ; τ_{xy} – соответствующая компонента тензора напряжений; ρ – плотность жидкости; L – некоторый характерный, принимаемый в качестве масштабного, линейный размер области течения.

Здесь и далее безразмерные величины отмечены верхними штрихами.

Начальное условие, а также одно из граничных условий (на поверхности движущейся пластины) имеют вид

$$t' = 0; \quad u' = 0; \quad y' > 0; \quad (1.2)$$

$$y' = 0; \quad u' = 1; \quad t' \geq 0. \quad (1.3)$$

Естественно, что (1.1) должно быть дополнено соответствующим уравнением, определяющим с учетом реологических особенностей жидкости зависимость касательного напряжения от скорости сдвига. В свою очередь это предполагает постановку наряду с (1.3) и дополнительных граничных условий.

СЛУЧАЙ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ОСТВАДА – ДЕ ВАЭЛЯ

Пусть механическое поведение жидкости удовлетворяет реологической модели Оствальда – де Ваэля, в соответствии с которой в рамках рассматриваемой постановки задачи (1.1)–(1.3) имеем

$$\tau_{xy} = \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \mu_{eff} = k \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1}, \quad (2.1)$$

где μ_{eff} – эффективная вязкость; k – коэффициент консистенции; n – индекс течения.

Полагая априори, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} < 0,$$

приходим к следующей безразмерной форме записи выражения (2.1) для касательного напряжения

$$\tau'_{xy} = -k' \left(-\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^n, \quad k' = \frac{k}{\rho L^n U_0^{2-n}}. \quad (2.2)$$

Заметим следующее. Рассматриваемая схема течения не предполагает каких-то конкретных характерных размеров. В этой связи, в качестве L предлагается выбирать величину, получаемую некоторой комбинацией прочих физических (но не геометрических) параметров задачи. Например, принимая во внимание основные положения теории размерностей, в качестве характерного размера может быть принято значение

$$L = \left(\frac{k}{\rho U_0^{2-n}} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.3)$$

Тогда с учетом (2.3) из (2.2) получаем, что

$$k' = 1. \quad (2.4)$$

Подставляя теперь (2.2) с учетом (2.4) в (1.1), приходим к уравнению

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial y'} \left(-\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^n. \quad (2.5)$$

Здесь в дополнение к (1.2), (1.3) должно быть поставлено еще одно граничное условие:

$$y' \rightarrow \infty; \quad u' = 0. \quad (2.6)$$

Введем в рассмотрение следующую безразмерную автомодельную переменную:

$$\eta = \eta(y', t') = y' (2n(n+1)t')^{-\frac{1}{n+1}}. \quad (2.7)$$

Тогда с учетом (2.7) уравнение (2.5) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $u'(\eta)$ следующего вида:

$$\frac{d^2 u'}{d\eta^2} - 2\eta \left(-\frac{du'}{d\eta} \right)^{2-n} = 0. \quad (2.8)$$

При этом исходные начальное (1.2) и граничные условия (1.3), (2.6) преобразуются и записываются в форме

$$\eta = 0; \quad u' = 1; \quad (2.9)$$

$$\eta \rightarrow \infty; \quad u' = 0. \quad (2.10)$$

Отметим, что при $n = 1$ соотношения (2.8)–(2.10) приводят к постановке классической первой задачи Стокса для случая течения ньютоновской жидкости с постоянным значением вязкости.

Решение (2.8) с учетом условия (2.9) может быть представлено следующим образом:

$$u'(\eta) = 1 - \int_0^\eta \left[(1-n)(\xi^2 + C) \right]^{\frac{1}{n-1}} d\xi. \quad (2.11)$$

Здесь C — неопределенная пока константа интегрирования, которая, принимая во внимание условие (2.10), должна определяться из решения уравнения

$$\int_0^\infty \left[(1-n)(\xi^2 + C) \right]^{\frac{1}{n-1}} d\xi = 1. \quad (2.12)$$

Анализ (2.12) приводит к следующему заключению. В случае дилатантного поведения рассматриваемой жидкости ($n > 1$) это уравнение не имеет решения (теряет смысл), поскольку не существует конечного отрицательного значения константы C , при котором на всем полуинтервале $[0, \infty)$ интегрирования основание степени в квадратных скобках оставалось бы положительным. Иначе говоря, полученное автомодельное решение (2.11) может быть отнесено только к случаю жидкости с псевдопластическим поведением, когда $0 < n < 1$.

В общем случае определить из (2.12) константу интегрирования аналитически представляется затруднительным за исключением некоторых частных значений параметра n . Так, при $n = 0.5$ имеем $C = \pi^{2/3}$. В этой связи решение уравнения (2.12) проводили численно.

В качестве иллюстрации на рис. 1 представлена полученная зависимость значений константы интегрирования C от показателя степени n в реологической модели Оствальда — де Ваэля. Из рассмотрения этого графика следует, что функция $C(n)$ на диапазоне $0.1 < n < 1$ наиболее часто встречающихся на практике значений параметра n не является монотонной, достигая в некоторой точке $n \approx 0.271$ экстремума типа минимум. При этом значению $n = 1$ соответствует вертикальная асимптота.

СЛУЧАЙ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ГЕРШЕЛЯ — БАЛКЛИ

Пусть механическое поведение среды удовлетворяет реологической модели вязкопластической жидкости Гершеля—Балкли.

Особенность механического поведения такой вязкопластической жидкости применительно к рассматриваемой задаче предполагает, вообще говоря, разбиение исходной области на две зоны. В окрестности движущейся пластины будет располагаться зона сдвигового течения,

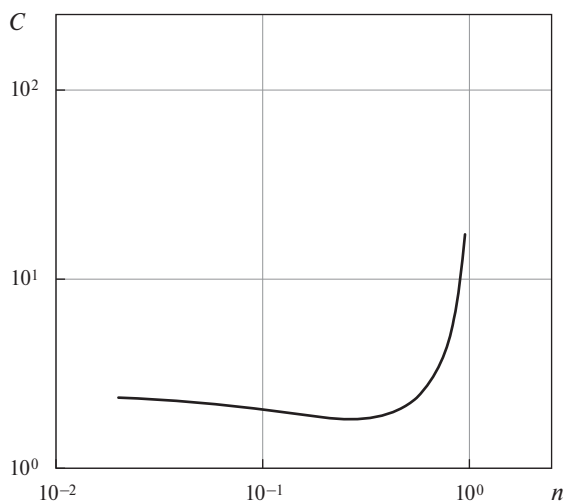


Рис. 1. Зависимость константы интегрирования C в автомодельном решении (2.11) от показателя степени n в реологической модели для жидкости Оствальда — де Ваэля, которая демонстрирует псевдопластическое поведение.

в которой касательное напряжение по модулю превышает предел текучести τ_p . Вторая зона характеризуется тем, что жидкость в ней остается неподвижной.

Априори можно полагать, что граница раздела этих зон представляет собой параллельную пластине плоскость, которая перемещается в пространстве, удаляясь от пластины, в направлении оси Oy . При этом координата этой границы раздела представляет собой неизвестную заранее функцию времени $y_p = y_p(t)$.

В безразмерной форме записи с учетом допущений и обозначений предыдущего раздела в зоне сдвигового течения выражение для касательного напряжения согласно модели Гершеля—Балкли может быть представлено следующим образом:

$$\tau'_{xy} = -\tau'_p - k' \left(-\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^n; \quad \tau'_p = \frac{\tau_p}{\rho U_0^2}. \quad (3.1)$$

Тогда с учетом (2.4), (3.1) вновь приходим из (1.1) к уравнению вида (2.5).

Учитывая наличие границы раздела между застойной зоной и зоной сдвигового течения, в дополнение к (1.3) здесь должны быть поставлены следующие условия:

$$y' = y'_p; \quad u' = 0; \quad \frac{\partial u'}{\partial y'} = 0. \quad (3.2)$$

Последнее граничное условие в (3.2) означает, что касательное напряжение на границе раздела зон по модулю принимает значение предела текучести.

Вводя теперь в рассмотрение автомодельную переменную (2.7), вновь приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению вида (2.8).

При этом исходные начальное (1.2) и граничные условия (1.3), (3.2) преобразуются и записываются в форме

$$\eta = 0; \quad u' = 1; \quad (3.3)$$

$$\eta = \eta_p; \quad u' = 0; \quad \frac{du'}{d\eta} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь принято обозначение

$$\eta_p = \frac{y'_p(t')}{n+1 \sqrt{2n(n+1)t'}}. \quad (3.5)$$

Отметим, что начальное условие (1.2), которое сводится к виду (2.10), выполняется в точности, поскольку в застойной зоне при $\eta_p < \eta < \infty$ заведомо имеем $u' = 0$.

Решение уравнения (2.8) для распределения скорости в зоне сдвигового течения описывается соотношением вида

$$u'(\eta) = 1 - \int_0^\eta \left[(n-1)(\eta_p^2 - \xi^2) \right]^{\frac{1}{n-1}} d\xi. \quad (3.6)$$

Анализируя выражение (3.6), можно видеть, что в случае $0 < n < 1$ не представляется возможным удовлетворить краевым условиям (3.3), (3.4). В этой связи построение автомодельного решения для рассматриваемой задачи возможно лишь в случае $n > 1$, когда жидкость Гершеля—Балкли демонстрирует дилатантное поведение.

В (3.6) значение η_p автомодельной переменной на границе раздела зоны сдвигового течения и застойной зоны, находится с учетом условия (3.3) в зависимости от значения параметра n из решения следующего уравнения:

$$\int_0^{\eta_p} \left[(n-1)(\eta_p^2 - \xi^2) \right]^{\frac{1}{n-1}} d\xi = 1. \quad (3.7)$$

Определить аналитически значение η_p из решения (3.7) получается лишь для некоторых частных значений индекса течения. Например, при $n = 1.5$ имеем точное значение $\eta_p = (7.5)^{0.2}$. Для произвольного же

значения индекса течения найти η_p аналитически представляется затруднительным.

В этой связи решение уравнения (3.7) проводили численно. Результаты такого решения представлены на рис. 2 в виде графика зависимости η_p от n . Заметим, что при $n \approx 7.199$ график функции $\eta_p(n)$ имеет экстремум типа минимума. При этом значению $n = 1$ соответствует вертикальная асимптота.

Определившись с решением $\eta_p(n)$ уравнения (3.7), из (3.5) приходим к выражению

$$y'_p(t') = \eta_p(n) n^{+1} \sqrt{2n(n+1)} t',$$

которое описывает кинематику границы раздела между зоной сдвигового течения жидкости и застойной (неподвижной) зоной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено построение автомодельного решения в рамках постановки первой задачи Стокса для случая ламинарного течения неньютоновской жидкости, эффективная вязкость которой в зависимости от скорости сдвига описывается степенным законом.

Рассмотрены две хорошо известные реологические модели такого типа. Применительно к модели Оствальда — де Ваэля показано, что полученное автомодельное решение для распределения скорости распространяется только на случай, когда жидкость демонстрирует псевдопластическое поведение ($0 < n < 1$).

Что же касается модели жидкости Гершеля—Балкли, то здесь, наоборот, автомодельное решение для распределения скорости может быть получено лишь для случая, когда жидкость проявляет свойство дилатантности ($n > 1$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stokes G.G.* On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // *Trans. Cambr. Phil. Soc.* 1851. V. IX. Part II. Cambridge: Printed at the Pitt Press / by John W. Parker. P. 1–99. <https://archive.org/details/b22464074/page/n1/mode/2up>
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
3. *Янилкин Ю.В., Топорова О.О., Стадник А.Л., Корзакова Л.Е.* Об аппроксимации вязкости разностных схем и расчеты течений вязкой жидкости // *ВАНТ. Сер. ММФП.* 2016. № 3. С. 3–17.
4. *Никонов В.В.* О тестировании конечно-разностной схемы моделирования процесса вязкой диффузии с учетом сжимаемости газа в двумерном случае // *Изв. Самар. науч. центра РАН.* 2020. Т. 22. № 5. С. 128–131.
5. *Виноградов Г.В., Малкин А.Я.* Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 440 с.
6. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 312 с.; *Astarita G., Marrucci G.* Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. London: McGraw-Hill, 1974. 289 p.
7. *Малкин А.Я., Исаев А.И.* Реология. Концепции, методы, приложения. М.: Профессия, 2007. 560 с.
8. *De Waele A.A.* Viscometry and plastometry // *J. Oil Colour Chem. Assoc.* 1923. V. 6. P. 33–88.
9. *Ostwald W.* Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität // *Koll. Zeitschr.* 1929. V. 47. P. 176–187. <https://doi.org/10.1007/BF01496959>
10. *Herschel W.H., Bulkley R.* Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen // *Koll. Zeitschr.* 1926. V. 39. P. 291–300. <https://doi.org/10.1007/BF01432034>
11. *Борзенко Е.И., Дьякова О.А., Шрагер Г.Р.* Ламинарное течение степенной жидкости в Т-образном канале при заданных перепадах давления // *Изв. РАН. МЖГ.* 2019. № 4. С. 63–71.
12. *Рыльцев И.А., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р.* Кинематика течения степенной жидкости в трубе переменного сечения // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.* 2020. № 63. С. 125–138.

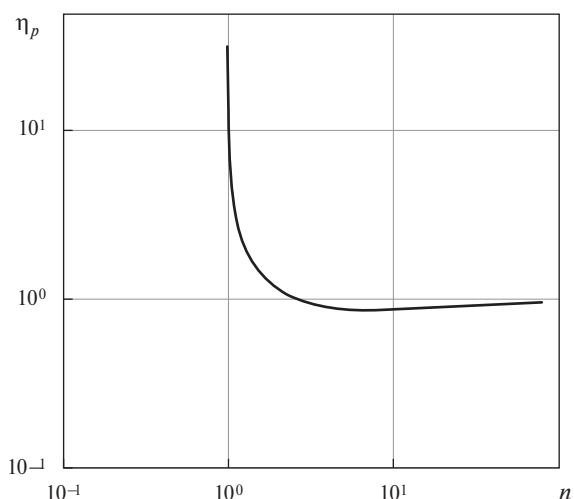


Рис. 2. Зависимость значения η_p автомодельной переменной, которая определяет положение границы раздела между зоной сдвигового течения и застойной зоной для жидкости Гершеля—Балкли, от показателя степени n .

SELF-SIMILAR SOLUTION OF THE FIRST STOKES PROBLEM FOR NON-NEWTONIAN FLUIDS WITH POWER-LAW VISCOSITY

V. N. Kolodezhnov*

*Military Education and Science Center of the Air Forces "Prof. Zhukovski and Gagarin Air Force Academy",
Voronezh, 394064 Russia*

**e-mail: kvn117@mail.ru*

The first Stokes problem is considered for flows of non-Newtonian fluids with effective viscosity varying in accordance with the power law. Self-similar solutions are constructed for the fluids, whose mechanical behavior is described by the Ostwald – de Waele and Herschel–Bulkley rheological models with the corresponding restrictions on the nonlinearity degree exponent n . It is shown that for the Ostwald – de Waele fluid self-similar solutions exist only for $0 < n < 1$, which corresponds to the pseudoplastic behavior. At the same time, self-similar solutions for the Herschel–Bulkley fluid can be obtained only at $n > 1$, when this fluid exhibits the properties of dilatancy.

Keywords: first Stokes problem, Ostwald – de Waele model, Herschel–Bulkley model