

УДК 532.522

ПРИСТЕННЫЕ ЛАМИНАРНЫЕ ЗАКРУЧЕННЫЕ СТРУИ

© 2023 г. А. М. Гайфуллин^{а,*}, А. С. Щеглов^{а,**}

^аЦентральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

*E-mail: gaifullin@tsagi.ru

**E-mail: shcheglov@phystech.edu

Поступила в редакцию 05.06.2023 г.

После доработки 20.06.2023 г.

Принята к публикации 25.06.2023 г.

Рассмотрена задача об определении характеристик пристенной ламинарной закрученной струи несжимаемой жидкости. Получены численные решения уравнений Навье–Стокса в стационарной и нестационарной постановках. Показано, что на больших расстояниях от источника струи характеристики струи подчиняются автомодельному закону, как и при истечении трехмерной ламинарной незакрученной струи, но распространение струи при этом происходит под некоторым углом к первоначальному направлению выдува струи. При большой закрутке потока в струе возникают области рециркуляционного течения, течение в струе становится нестационарным.

Ключевые слова: пристенная струя, затопленная струя, закрученная струя, автомодельное решение, рециркуляционное течение, уравнения Навье–Стокса

DOI: 10.31857/S1024708423600343, EDN: TWTIDE

Пристенные струи – струи, распространяющиеся вдоль твердой поверхности. Несмотря на практическую важность изучения пристенных струй, исследованию течения в них посвящено небольшое количество публикаций. В основном это экспериментальные исследования турбулентных пристенных струй, которые можно условно разделить на плоские струи [1–4], трехмерные незакрученные струи [5–12], трехмерные закрученные струи [13]. Численные исследования плоских пристенных струй проводились в работах [14, 15], трехмерных пристенных незакрученных струй – в [16–19]; авторам не известны работы по численному исследованию трехмерных пристенных закрученных струй.

Для ламинарных пристенных струй теоретические и численные исследования проводились только для плоских и трехмерных незакрученных струй. Впервые задача о плоской ламинарной струе, вытекающей из тонкой щели параллельно твердой поверхности, была решена в рамках уравнений пограничного слоя [20] и через три года повторена в [21]. Успеху в решении задачи способствовал тот факт, что в плоском случае удалось найти инвариант, сохраняющий свое значение в любом поперечном сечении струи. Наличие инварианта позволило теоретически определить параметр автомодельности, отвечающий за изменение характеристик струи вдоль продольной координаты x , толщина струи растет пропорционально $x^{3/4}$, а продольная компонента скорости затухает как $x^{-1/2}$.

В случае трехмерной пристенной струи, вытекающей из практически точечного источника параллельно твердой поверхности, течение можно описать с помощью параболизированных уравнений Навье–Стокса, в которых пренебрегают непорядковыми членами: продольным градиентом давления и вторыми производными вдоль продольной координаты в вязких членах уравнений. В [22] сделано предположение, что на больших расстояниях от источника струи решение должно выходить на автомодельный режим. Но для определения параметра автомодельности в [22] был применен закон сохранения момента импульса потока, который на самом деле не сохраняется. Значение параметра автомодельности и связанные с ним различные характеристики струи получены в работе [23]. Так как инвариантного решения для трехмерной пристенной струи на сегодняшний день не построено, параметр автомодельности можно определить только с помощью численного решения задачи [24], что и было сделано в [23]. Как правило, при отсутствии инварианта невозможно получить универсальные характеристики. Так, в случае трехмерной

пристенной струи профили компонент скорости и давления будут меняться в зависимости от формы и высоты над плоскостью выходного отверстия струи, от профиля скорости в выходном сечении и от числа Рейнольдса. Но, как показано в [23], универсальные профили все же можно построить, если предположить, что инвариант, хоть и не найден, но существует и если имеется асимптотическое решение задачи в некоторых областях.

В данной статье рассмотрены трехмерные пристенные закрученные ламинарные струи. В результате исследований авторы попытались ответить на следующие вопросы. Подчиняются ли характеристики в дальнем поле струи автомодельным законам, и если да, то зависит ли параметр автомодельности от закрутки струи? Линия, вдоль которой происходит распространение струи при наличии закрутки, уже не будет прямой. Является ли в дальнем поле эта линия параллельной оси x , вдоль которой выдувается струя, наклонена ли к ней под некоторым углом? Решению этих и некоторых других вопросов посвящена данная статья.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившееся течение несжимаемой жидкости. Введем декартову систему координат x_1, y_1, z_1 . Компоненты скорости \mathbf{V}_1 в этой системе координат обозначим через u_1, v_1, w_1 . Плотность жидкости ρ , давление p_1 , кинематический коэффициент вязкости ν . Бесконечная твердая плоскость определяется уравнением $y_1 = 0$. Струя выдувается из круглой цилиндрической трубы радиуса a параллельно твердой плоскости в направлении оси x_1 в затопленное пространство. Центр входного сечения трубы имеет координаты $x_1 = 0, y_1 = h_1, z_1 = 0$. Аналогично [25] закрутка струе придается вращением внутренней поверхности трубы. Внешняя поверхность трубы не вращается. На выходном сечении трубы со стороны потока струя закручена по часовой стрелке.

Определим безразмерные координаты и переменные

$$x = \frac{x_1}{a}, \quad y = \frac{y_1}{a}, \quad z = \frac{z_1}{a}, \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}_1}{u_{1*}}, \quad p = \frac{p_1 - p_{1\infty}}{\rho u_{1*}^2}, \quad \text{Re} = \frac{u_{1*} a}{\nu}$$

где u_{1*} — среднерасходная продольная скорость жидкости в трубе.

Течение жидкости будем считать ламинарным, его характеристики удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса

$$\text{div} \mathbf{V} = 0, \quad (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\text{grad} p + \text{Re}^{-1} \Delta \mathbf{V} \quad (1.1)$$

В [23] было также показано, что характеристики трехмерной пристенной струи при больших числах Рейнольдса можно определить в приближении параболизированных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.3)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (1.4)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1.5)$$

В случае незакрученной трехмерной пристенной струи при больших x решение уравнений (1.2)–(1.5) стремится к автомодельному с параметром автомодельности, равным $4/3$

$$u(x, y, z) = \text{Re}^{5/3} x^{-5/3} U(\eta, \xi)$$

$$v(x, y, z) = \text{Re}^{1/3} x^{-4/3} V(\eta, \xi)$$

$$w(x, y, z) = \text{Re}^{1/3} x^{-4/3} W(\eta, \xi)$$

$$p(x, y, z) = \text{Re}^{2/3} x^{-8/3} P(\eta, \xi)$$

$$\eta = \frac{y \text{Re}^{4/3}}{x^{4/3}}, \quad \xi = \frac{z \text{Re}^{4/3}}{x^{4/3}}.$$

Таким образом, толщина и ширина трехмерной пристенной незакрученной ламинарной струи растут пропорционально $x^{4/3}$.

При заданной форме и высоте над поверхностью выходного сечения трубы характеристики пристенной закрученной ламинарной струи будут зависеть от нескольких начальных параметров, заданных в сечении истечения струи: расхода, закрутки, числа Рейнольдса. Определим недостающие параметры. Будем считать, что труба, из которой выдувается струя, достаточно длинная, чтобы в сечениях, не близких к выходному, установился профиль Пуазейля для продольной компоненты скорости и твердотельное вращение для азимутальной скорости v_φ

$$u = 2(1 - r^2), \quad v_\varphi = \Omega r \tag{1.6}$$

Здесь безразмерный радиус r отсчитывается от оси трубы, $\Omega_1 = (u_* / a)\Omega$ угловая скорость вращения жидкости в трубе, учтено то, что среднерасходная скорость $u_* = 1$, а максимальная скорость $u_{\max} = 2$. Под закруткой будем понимать величину $S = \Omega_1 a / u_{1\max} = \Omega / 2$.

На выходе из трубы струя обладает импульсом J_x в направлении оси x и близким к нулю импульсом J_z в направлении оси z

$$J_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u^2 dy dz, \quad J_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u w dy dz$$

Под действием сил трения жидкости о твердую поверхность продольный импульс струи с ростом x будет уменьшаться, а поперечный импульс будет сначала приобретаться, а затем уже теряться. Из уравнений (1.3) и (1.5)

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} = -\frac{1}{\text{Re}} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} dz, \quad \frac{\partial J_z}{\partial x} = -\frac{1}{\text{Re}} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} dz.$$

Выскажем гипотезу: на больших расстояниях от источника струи несимметрия в струе, вызванная вращением жидкости в выходном сечении, исчезнет; эволюция струи ничем не будет отличаться от эволюции незакрученной струи, но за счет приобретенного бокового импульса струя будет распространяться не вдоль оси x , а вдоль прямой линии, наклоненной к оси x на некоторый угол θ ; параметр автономности для закрученной струи совпадет с параметром автономности для незакрученной струи, т.е. будет равен $4/3$.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Численно с помощью метода конечных объемов решались уравнения Навье–Стокса (1.1). Аппроксимация конвективных членов проводилась по схеме второго порядка точности с разностями против потока, а диффузионных членов и давления — с помощью центральных разностей второго порядка точности. Уравнения импульсов и давления решаются совместно. Задача решается как псевдонестационарная методом установления с фиксированным шагом по псевдовремени.

Моделирование проводится на структурированной расчетной сетке с общим количеством ячеек 6×10^6 . На рис. 1 приведены параметры расчетной области и геометрические параметры трубы (поверхность трубы выделена серым цветом); пропорции между различными размерами на рис. 1 не соблюдаются. Расширяющаяся расчетная область позволяет сосредоточить большую часть ячеек внутри ядра струи.

На границах расчетной области были поставлены следующие граничные условия:

- В начальном сечении (5) заданы профили компонент скорости (1.6)

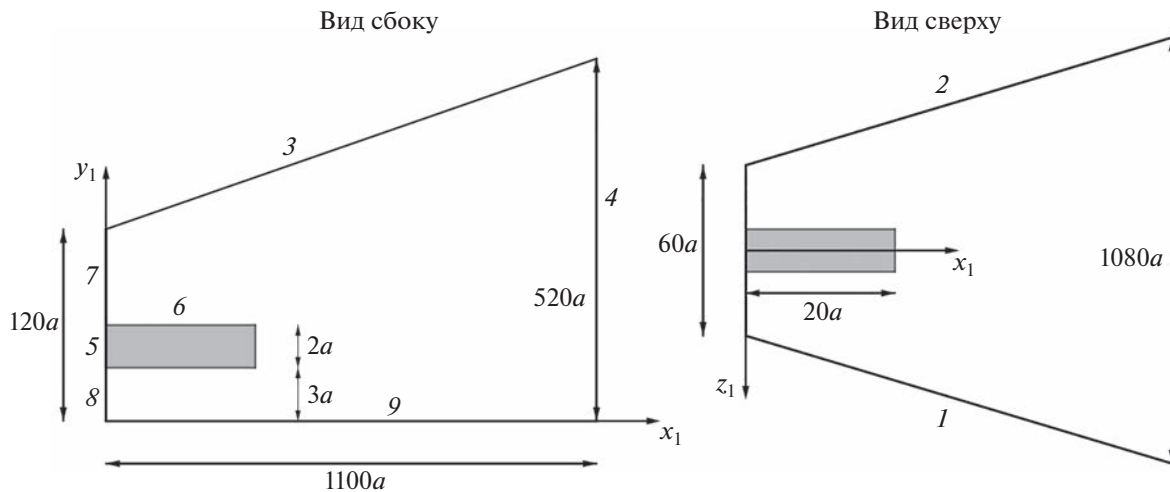


Рис. 1. Система координат задачи и геометрия расчетной области.

- На горизонтальной твердой поверхности (9) и на поверхностях (внутренней и внешней) трубы (6) задано условие прилипания
- На боковых (1), (2), верхней (3), передней (7, 8) и выходной (4) свободных границах поставлено условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$$

Установление решения отслеживается по величине массового расхода через границу (4) расчетной области. При этом величина невязок по уравнению импульса не превосходит 10^{-6} .

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для определенности будем считать, что центр выходного сечения трубы расположен на высоте $h_1 = 4a$ (рис. 1). Было проведено два расчета при $Re = 77$, $S = 0.56$ и $S = 0.33$.

Имеется некоторый произвол в выборе определения центра струи. В данной работе центром струи в сечении $x = \text{const}$ называется точка с координатами $y_c(x)$, $z_c(x)$, в которой имеет максимум составляющая скорости, параллельная твердой плоскости, т.е. функция $\sqrt{u^2(x, y, z) + w^2(x, y, z)}$ имеет максимум при фиксированном x . На рис. 2 представлены графики функций $y_c(x)$, $z_c(x)$, из которых следует, что действительно струя распространяется под некоторым углом к оси x . Очевидно, что этот угол зависит от начальной закрутки струи. При $S = 0.33$ и $S = 0.56$ эти углы соответственно равны 1.7° и 2.7° .

Введем понятие линии тока поперечного течения в сечении $x = x_0 = \text{const}$. Уравнение линий тока

$$\frac{dy}{v(x_0, y, z)} = \frac{dz}{w(x_0, y, z)}$$

На рис. 3а показаны линии тока поперечного течения при $x = 600$. Если вместо координат x , y , z ввести повернутую на угол θ систему координат ζ , y , τ (рис. 4), то в этой системе координат линии тока поперечного течения соответствуют показанным на рис. 3б. Линии тока на рис. 3б соответствуют аналогичным расчетам для незакрученной струи [23]. Определенный показатель автомодельности при распространении струи вдоль оси ζ соответствует значению $4/3$. Тем самым подтверждена гипотеза о соответствии в дальнем поле эволюции закрученной струи, повернутой на угол θ , эволюции незакрученной струи.

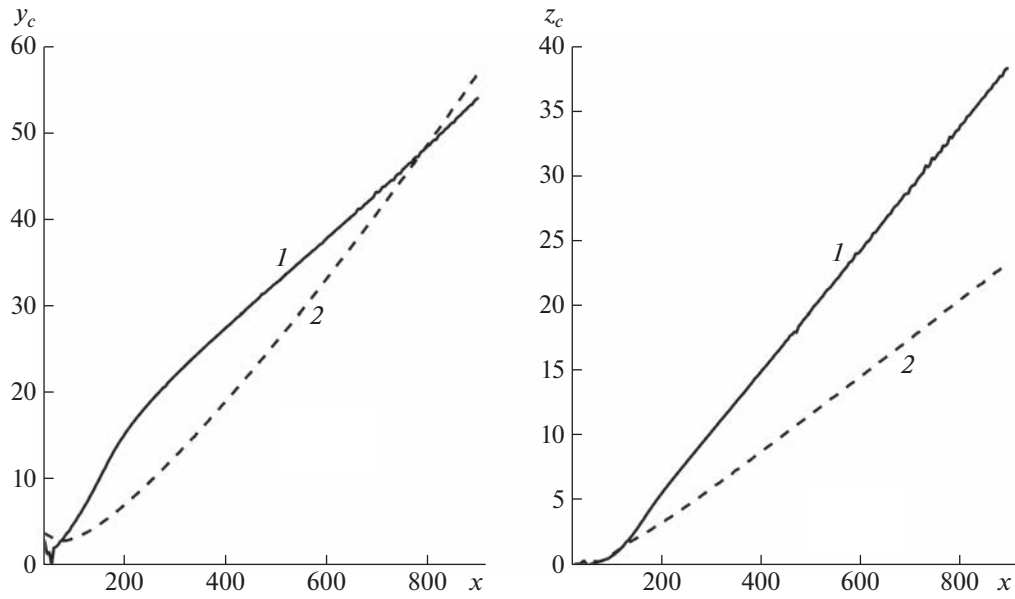


Рис. 2. Графики $y_c(x)$, $z_c(x)$: 1, 2 – $S = 0.56, 0.33$.

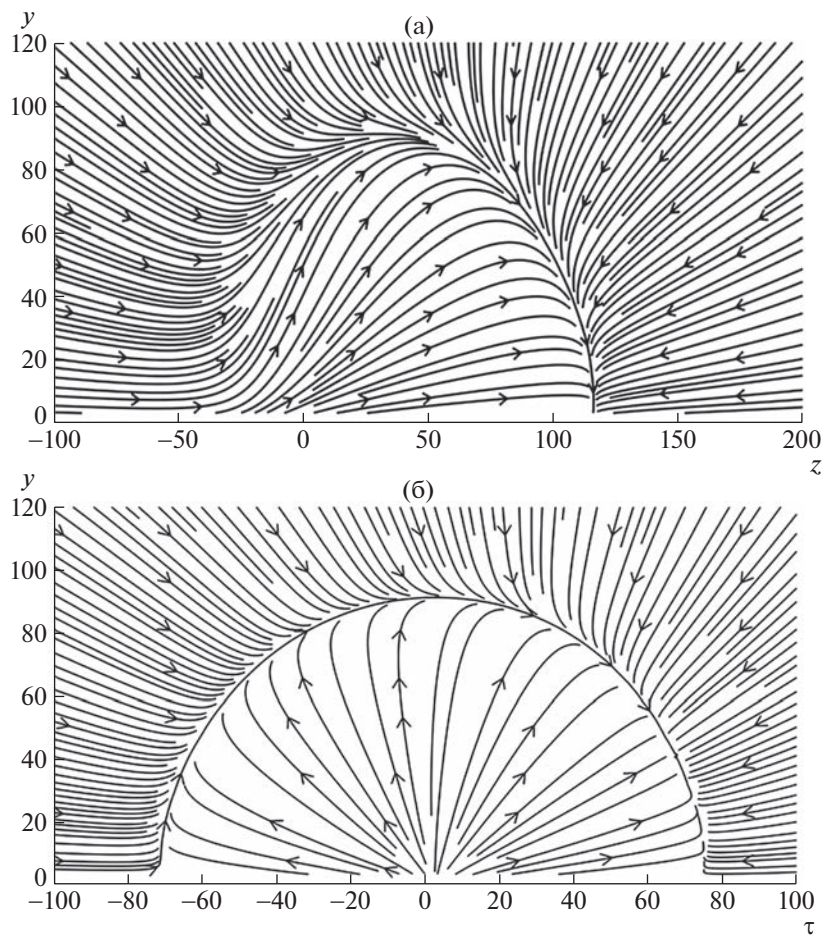


Рис. 3. (а) Линии тока поперечного течения при $Re = 77$ и $S = 0.56$ в сечении $x = 600$ в исходной системе координат. (б) Линии тока поперечного течения при $Re = 77$ и $S = 0.56$ в сечении $x = 600$ в новой системе координат.

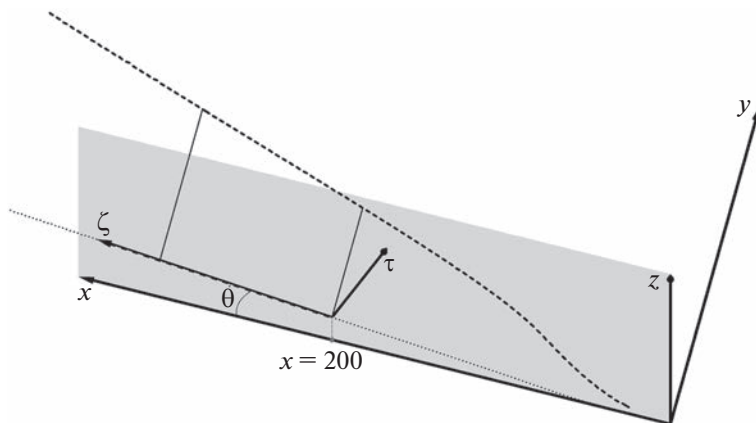


Рис. 4. Прямоугольные декартовы системы координат x, y, z и ζ, y, τ . Пунктир соответствует линии $y = y_c(x)$, $z = z_c(x)$, точки – проекции пунктирной линии на плоскость $y = 0$. Ось ζ направлена вдоль касательной к проекции пунктирной линии на плоскость $y = 0$ в точке $x = 200$.

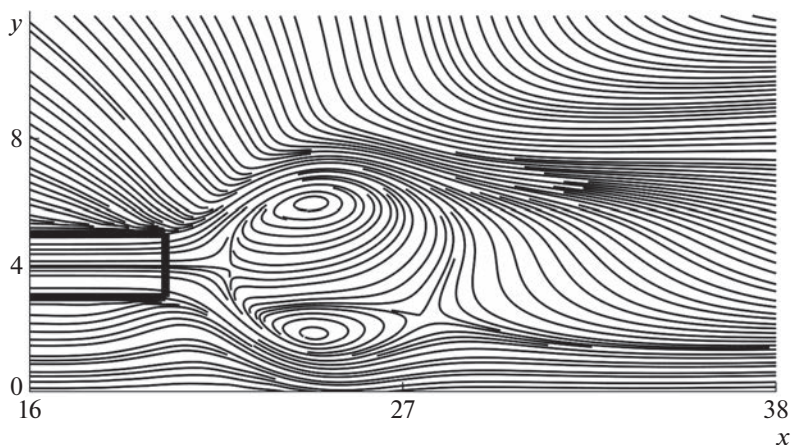


Рис. 5. Линии тока, соответствующие расчету при $S \approx 1.1$.

4. ОТСУТСТВИЕ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ S

Так же, как и в свободной струе, увеличение закрутки струи приводит к появлению в потоке областей рециркуляционного течения [26]. При появлении возвратного течения невязки при решении стационарных уравнений Навье–Стокса уже нельзя сделать меньше некоторой заданной величины. Этот факт указывает на необходимость решения задачи с помощью нестационарных уравнений Навье–Стокса.

Результаты расчетов представлены на рис. 5 и 6 в виде уже линий тока в сечении $z = 0$

$$\frac{dx}{u(x, y, 0)} = \frac{dy}{v(x, y, 0)}$$

При $S \approx 1.1$ нестационарность, хотя и присутствует, но картина линий тока слабо зависит от времени – рис. 5. Иное дело, когда закрутка струи становится еще больше, $S \approx 2.2$ – рис. 6. В этом случае в окрестности рециркуляционной области, геометрия которой сильно зависит от времени, образуются дополнительные вихри различного направления вращения. Течение становится периодическим. На рис. 6 представлено характерное изменение линий тока через равные промежутки времени в течение периода. Периодичность течения можно наблюдать и по изменению продольной компоненты скорости в заданной точке пространства. В качестве таковой выбрана точка на продолжении оси трубы, отстоящая на 4 радиуса от выходного сечения – рис. 7.

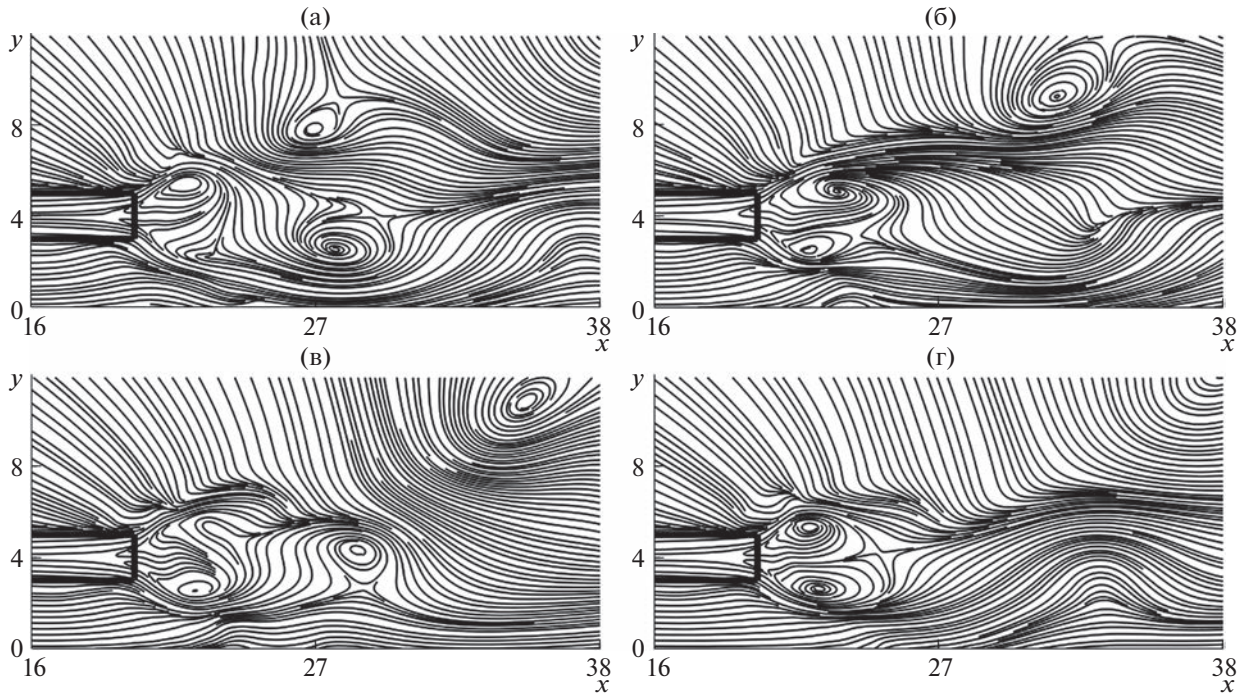


Рис. 6. Линии тока, соответствующие расчету при $S \approx 2.2$.

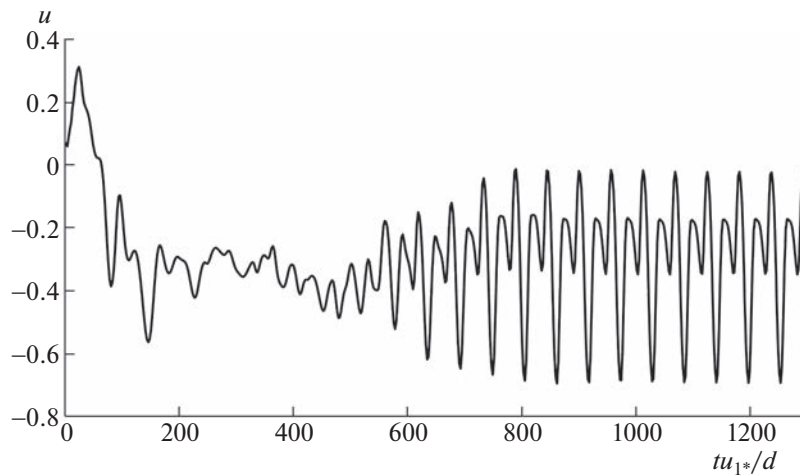


Рис. 7. Изменение продольной компоненты скорости в фиксированной точке пространства вблизи выходного сечения трубы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые определены важные особенности эволюции трехмерной закрученной ламинарной струи. Закрутка струи приводит к отклонению оси струи от первоначального направления. В дальней области струя распространяется под некоторым углом к этому первоначальному направлению. Закрученная трехмерная пристенная струя достаточно быстро теряет свою закрутку, и в повернутой системе координат ее поведение в дальней области слабо отличается от незакрученной струи. Соответственно, и параметр автомодельности оказывается таким же, как в незакрученной струе – $4/3$. Поперечные размеры струи растут пропорционально $\zeta^{4/3}$, продольная компонента скорости затухает по закону $\zeta^{-5/3}$, а поперечные компоненты пропорционально $\zeta^{-4/3}$.

При больших значениях закрутки в струе возникают области рециркуляционного течения. Течение становится нестационарным, периодическим.

Научное исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00210, <https://rscf.ru/project/23-11-00210/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wygnanski I., Katz Y., Horev E.* On the applicability of various scaling laws to the turbulent wall jet // *J. Fluid Mech.* 1992.
2. *Schneider M.E., Goldstein R.J.* Laser Doppler measurement of turbulence parameters in a two-dimensional plane wall jet // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6. P. 3116–3129.
3. *Eriksson J., Karlsson R., Persson J.* An experimental study of a two-dimensional plane turbulent wall jet // *Exp. Fluids.* 1998.
4. *Eriksson J.* Experimental studies of the plane turbulent wall jet: PhD thesis / Eriksson J. – Stockholm, Sweden: Royal Institute of Technology. Department of Mechanics. 2003.
5. *Sun H., Ewing D.* Effect of initial and boundary conditions on development of three-dimensional wall jets // 40th AIAA ASME. 2002. P. 733.
6. *Agelin-Chaab M., Tachie M.F.* Characteristics of turbulent three-dimensional wall jets // *ASME. J. Fluids Eng.* 2011. V. 133. № 2.
7. *Namgyal L., Hall J.* Reynolds stress distribution and turbulence generated secondary flow in the turbulent three-dimensional wall jet // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 800. P. 613–644.
8. *Inoue Y., Yano H., Yamashita S.* Experimental study on a three-dimensional wall jet // *JFST.* 2007. V. 2. № 3. P. 655–664.
9. *Hall J.W., Ewing D.* Three-dimensional turbulent wall jets issuing from moderate-aspect-ratio rectangular channels // *AIAA J.* 2007. V. 45. P. 1177–1186.
10. *Newman B., Patel R., Savage S., Tjio H.* three-dimensional wall jet originating from a circular orifice // *AEQ.* 1972. V. 23. № 3. P. 188–200.
11. *Matsuda H., Iida S., Hayakawa M.* Coherent structures in a three-dimensional wall jet // *ASME. J. Fluids Eng.* 1990. V. 112. № 4. P. 462–467.
12. *Padmanabham G., Lakshmana Gowda B.H.* Mean and turbulence characteristics of a class of three-dimensional wall jets—Part 1: Mean flow characteristics // *ASME. J. Fluids Eng.* 1991. V. 113. № 4. P. 620–628.
13. *Pani B.S., Rajaratnam N.* Swirling Circular Turbulent Wall Jets // *JHR.* 1976. V. 14. № 2. P. 145–154.
14. *Dejoan A., Leschziner M.* Large eddy simulation of a plane turbulent wall jet // *Phys. Fluids.* 2005. V. 17.
15. *Naqavi I.Z., Tyacke J.C., Tucker P.G.* Direct numerical simulation of a wall jet: flow physics // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 852. P. 507–542.
16. *Гайфуллин А.М., Щеглов А.С.* Структура течения в трехмерной пристенной турбулентной струе. // *ПММ.* 2023. № 2. С. 226–239.
17. *Craft T., Launder B.* On the spreading mechanism of the three-dimensional turbulent wall jet. // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 435. P. 305–326.
18. *Kakka P., Anupindi K.* Flow and thermal characteristics of three-dimensional turbulent wall jet // *Phys. Fluids.* 2021. V. 33. № 2.
19. *Khosronejad A., Rennie C.D.* Three-dimensional numerical modeling of unconfined and confined wall-jet flow with two different turbulence models // *Can. J. Civ. Eng.* 2010. V. 37. № 4. P. 576–587.
20. *Акатнов Н.И.* Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твердой стенки // *Труды ЛПИ.* 1953. № 5. С. 24–31.
21. *Glauert M.B.* The wall jet // *J. Fluid Mech.* 1956. V. 1. P. 625–643.
22. *Krechtnikov R., Lipatov I.* Hidden invariances in problems of two-dimensional and three-dimensional wall jets for Newtonian and non-Newtonian fluids // *SIAP.* 2002. V. 62. № 6. P. 1837–1855.
23. *Бут И.И., Гайфуллин А.М., Жвик В.В.* Дальнее поле трехмерной пристенной ламинарной струи // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 6. С. 51–61.
24. *Баренблатт Г.И.* Автомодельные явления — анализ размерностей и скейлинг. — Долгопрудный: Интеллект, 2009.
25. *Гайфуллин А.М., Жвик В.В.* Взаимодействие двух противоположно закрученных затопленных струй. // *Изв. РАН МЖГ.* № 3. 2019. С. 48–57.
26. *Жвик В.В.* Инварианты и асимптотики осесимметричных закрученных затопленных струй // *ПМТФ.* 2020. Т. 61. № 2. С. 92–108.