

УДК 532.5:537.84

## ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ДИФФУЗИИ ИОНОВ НА ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИЮ ИНЖЕКЦИОННОГО ТИПА В ПЛОСКОМ СЛОЕ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

© 2023 г. И. А. Ермолаев<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

\*E-mail: iermolaev@rambler.ru

Поступила в редакцию 17.06.2023 г.

После доработки 16.07.2023 г.

Принята к публикации 20.07.2023 г.

Изучено влияние диффузии на изотермическое электроконвективное течение слабопроводящей жидкости при униполярной инъекции в постоянном электрическом поле в плоскопараллельной системе электродов. Получены зависимости полей объемной плотности заряда и течения от интенсивности диффузии. Даны численные оценки величины коэффициента диффузии инжектированных ионов для ТМ + I<sub>2</sub>. Результаты получены на основе сравнения численного эксперимента с существующими экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* изотермическая электроконвекция, слабопроводящая жидкость, униполярная инъекционная проводимость, коэффициент диффузии

DOI: 10.31857/S1024708423600410, EDN: UYEBXS

Существуют расхождения в оценках как величины коэффициента диффузии ионов, так и влияния механизма диффузии на электроконвективные процессы в слабопроводящих жидкостях. В большинстве исследований электроконвективных течений диффузия не учитывается и коэффициент диффузии полагается равным нулю, например, [1–10].

В [11] предложен критерий, являющий собой отношение сил кулоновского отталкивания к коэффициенту диффузии. Показано, что диффузия должна учитываться, если величина критерия меньше единицы. Это позволяет пренебречь током диффузии в сравнении с токами проводимости и конвекции. В ряде работ диффузия ионов учитывается, но считается достаточно малой. Так, в [12] величина коэффициента диффузии  $D_i$  полагалась равной  $10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с (йодбензол, бромбензол). В [13]  $D_i$  считался равным  $10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с (ТМ + бутиловый спирт). При этом выбор величины коэффициента определялся соображениями повышения сходимости численного решения. В работе [13] показано, что увеличение коэффициента диффузии на порядок приводит к изменению основных величин не более чем на 1%. В [14] коэффициент диффузии инжектированных ионов был равен  $10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с, в [15]  $D_i = 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с. В работе [15] отмечено, что величина коэффициента завышена (согласно соотношению Эйнштейна величина  $D_i = 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с), однако величина диффузионного потока не превышала 2% от конвективного в тонком слое, расположенном у границы заряженной струи и пренебрежимо мала в остальной части. В [16] коэффициент диффузии считался равным  $10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с (ТМ), поскольку диффузия играет роль лишь в узких слоях с большими градиентами концентрации заряженных частиц вблизи стенок. В [17] показано, что, несмотря на малую величину коэффициента диффузии, влияние диффузии на динамику течения значительно. Таким образом, существующие оценки величины коэффициента диффузии разнятся на несколько порядков.

Полный ток при электрогидродинамических течениях слабопроводящих жидкостей является суммой токов проводимости, диффузии и конвекции  $\mathbf{j} = bq\mathbf{E} - D\text{grad}q + \mathbf{V}q$ , где  $\mathbf{j}$  – вектор плотности тока ионов,  $b$  – подвижность ионов,  $q$  – объемная плотность ионов,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{V}$  – векторы напряженности электрического поля и скорости жидкости. Обычно при оценке величины коэффициента диффузии используется соотношение Эйнштейна  $D = kTb/ez$ ,  $kT/e = \varphi_0$ , где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура,  $e$  – модуль заряда электрона,  $z$  – валентность ионов,  $\varphi_0$  – характе-

ристический потенциал. При комнатной температуре характеристический потенциал равен приблизительно 0.026 В на единицу обратной валентности. При подвижности ионов  $10^{-8}$  м<sup>2</sup>/В·с это дает порядок величины коэффициента диффузии  $10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с. Что позволяет считать диффузию пренебрежимо малой, поскольку  $D/\nabla q$  много меньше  $qb/E$ .

Однако соотношение Эйнштейна, эмпирически оправданное для водных электролитов, не обязательно справедливо для слабопроводящих жидкостей [18]. Так, в опытах с очищенным трансформаторным маслом и другими слабопроводящими жидкостями [19] характеристический потенциал на 5 порядков превышал значение, соответствующее водным электролитам. Значения характеристического потенциала  $\phi_0/z$  возрастали пропорционально приложенным напряжениям, как  $\phi_0/zU = 0.36 \pm 0.01$ .

Результаты [20] подтверждают, что значение характеристического потенциала для слабопроводящих жидкостей зависит от приложенного напряжения и отличается от значения  $kT/e$ , принятого в электрохимии водных растворов. При этом  $\phi_0 = ZkT/(Ze - W/E)$ , где  $Z$  – зарядовое число кластера,  $W$  – энергия взаимодействия зарядовой части кластера со своей дипольной оболочкой. Полученные в [20] зависимости для раствора бутилового спирта в трансформаторном масле позволяют оценить величину коэффициента диффузии как  $10^{-7} - 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с при 1–10 кВ/см соответственно, для начальной удельной проводимости  $\sigma_0 = 10^{-10}$  (Ом · м)<sup>-1</sup>.

Таким образом, вопрос величины коэффициента диффузии и влияния диффузии инжектированных ионов на электроконвективные процессы в слабопроводящих жидкостях требует дополнительных исследований. В настоящей работе величина коэффициента диффузии ионов при изотермической электроконвекции жидкости с униполярной инжекционной проводимостью оценивалась методом вычислительного эксперимента.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривалась двухкомпонентная вязкая несжимаемая слабопроводящая жидкость, состоящая из заряженной и нейтральной компоненты, где плотность заряженной компоненты много меньше полной плотности. Процессы считались квазиэлектростатическими, условия – изотермические, джоулев нагрев пренебрежимо мал, инъекция – униполярна, плотность и диэлектрическая проницаемость среды – постоянны. Жидкость – вязкая, несжимаемая. В таких условиях общая система уравнений токопрохождения имеет вид [18]

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + q \mathbf{E} \\ \nabla \mathbf{V} &= 0 \\ \varepsilon \nabla \mathbf{E} &= q \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla(\sigma \mathbf{E} + q \mathbf{V} - D \nabla q) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{V}$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля,  $\varepsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $q$  – объемная плотность зарядов,  $\sigma$  – начальная удельная проводимость (измеренная по линейному участку вольт-амперной характеристики),  $\phi$  – электрический потенциал. Фоновая проводимость среды считалась постоянной. Подвижность зарядов, диэлектрическая проницаемость, вязкость слабо зависят от напряженности поля вплоть до пробивных напряжений, что для изотермических условий позволяет считать эти величины постоянными. Соответственно в последнем уравнении системы (1.1) пренебрегается нелинейностью зависимости  $j \sim qbE$ .

Плоскопараллельный бесконечный слой жидкости моделировался прямоугольной ячейкой шириной  $L$ , высотой  $H$ , с аспектным отношением  $L/H = 1.3$  [3, 21]. Бесконечность слоя моделировалась условиями симметрии на боковых границах. Приложенное электрическое поле полагалось однородным:  $E_x = 0$ ,  $E_y = \phi/H$ , где  $H$  – толщина слоя.

Использовалось безындукционное приближение как следствие малой инъекции. Которое предполагает, что распределение заряда не вызывает заметного изменения потенциала электрического поля. Такое приближение обосновано, поскольку рассматривалась жидкость с незначительной величиной начальной проводимости в поле со средней напряженностью порядка 1 кВ/см.

Для описания ЭК-течений использовалась декартова система координат. Начало совпадало с левым нижним углом расчетной области, ось  $x$  направлена горизонтально, ось  $y$  – вертикально.

В начальный момент времени жидкость находилась в гидростатическом равновесии. Для возбуждения течения и ускорения сходимости в начальный момент времени задавалось несимметричное поле объемной плотности заряда.

В качестве масштаба объемной плотности заряда был выбран  $q = \eta E_0$ , где  $\eta$  – коэффициент инжекции,  $E_0$  – средняя напряженность поля. Масштабами расстояния, времени, скорости и напряженности поля были:  $H, H^2/\nu, \nu/H, E_0$ . Соответственно безразмерные переменные  $X = x/H, Y = y/H, \tau = \nu t/H^2, U = uH/\nu, V = vH/\nu, Q = q/\eta E_0, e_x = E_x/E_0, e_y = E_y/E_0$ . Таким образом,  $x = XH, y = YH, t = H^2\tau/\nu, u = \nu U/H, v = \nu V/H, q = Q\eta E_0, E_x = e_x E_0, E_y = e_y E_0$ . Здесь  $x, y$  – координаты;  $t$  – время;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $u, v$  – составляющие скорости в проекции на оси  $x, y$  соответственно. Безразмерные уравнения изотермической электроконвекции (1.1) были записаны в переменных “вихрь скорости–функция тока–объемная плотность зарядов” как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} &= \Delta \omega + Gr_e A \cdot e_x \frac{\partial Q}{\partial Y} - Gr_e A \cdot e_y \frac{\partial Q}{\partial X} \\ \Delta \psi &= \omega \\ \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial Q}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial Q}{\partial Y} &= -\frac{1}{Pr_e} Q + \frac{1}{Pr_d} \Delta Q \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $Gr_e = \varepsilon E_0^2 H^2 / 4\pi \rho \nu^2$  – электрический аналог числа Грасгофа (отношение кулоновских и вязких сил),  $A = 4\pi H \eta / \varepsilon$  – безразмерной коэффициент инжекции,  $Gr_e A = E_0^2 H^3 \eta / \rho \nu^2$  – произведение электрического числа Грасгофа на безразмерную инжекцию.  $Pr_e = \varepsilon \nu / \sigma_0 H^2$  – электрический аналог числа Прандтля, являющий собой соотношение токов смещения и проводимости (отношение времени релаксации электрического заряда к характерному времени развития гидродинамических возмущений).  $Pr_d = \nu / D_i$  – диффузионное число Прандтля.

Безразмерные граничные условия для системы уравнений (1.2) имели вид

$$X = 0: \quad \psi(0, Y, \tau) = \omega(0, Y, \tau) = \frac{\partial Q(0, Y, \tau)}{\partial X} = 0$$

$$X = L: \quad \psi(L, Y, \tau) = \omega(L, Y, \tau) = \frac{\partial Q(L, Y, \tau)}{\partial X} = 0$$

$$Y = 0: \quad \psi(X, 0, \tau) = \frac{\partial \psi(X, 0, \tau)}{\partial Y} = 0$$

$$Y = H: \quad \psi(X, H, \tau) = \frac{\partial \psi(X, H, \tau)}{\partial Y} = 0$$

На нижнем электроде (катоде) был задан линейный закон инжекции зарядов (постоянная, равномерная инжекция)  $Q(X, 0, \tau) = -1$  ( $e_x = 0, e_y = -1$ ), на аноде разрядка ионов считалась мгновенной  $Q(X, H, \tau) = 0$ . На твердых непроницаемых границах (электродах) обеспечивались условия “прилипания” вязкой жидкости, граничные условия для вихря скорости вычислялись по формуле Вудса [22], начальные условия  $\psi(X, Y, 0) = \omega(X, Y, 0) = Q(X, Y, 0) = 0$ .

Для решения использовалась слабая формулировка метода конечных элементов Галеркина. Объемная плотность зарядов, вихрь скорости и функция тока аппроксимировались линейной комбинацией не зависящих от времени функций формы на линейных треугольных конечных элементах. Аппроксимации по времени осуществлялись с помощью полностью неявной двухслойной схемы. Уравнения (1.2) решались последовательно. Временной шаг начинался с вычисления поля объемной плотности зарядов. Далее определялись граничные условия, и решалось уравнение для вихря скорости; поле вихря скорости корректировалось, и определялось поле функции тока. Расчеты проводились с использованием конечно-элементной программы ЕРЕМАІ\_ELECTRO (свидетельство № 2012611637 от 13.02.2012).

Все результаты получены на равномерных конечно-элементных сетках  $32 \times 25$  с шагом по времени  $10^{-3}$ . Проверка на сетке  $42 \times 33$  показала, что относительные изменения экстремальных

значений функции тока и вихря скорости не превышают 1%. Стационарные решения были получены методом установления, критерием установления являлось неравенство

$$\left| Q_m^{k+1} - Q_m^k \right| + \left| \omega_m^{k+1} - \omega_m^k \right| + \left| \psi_m^{k+1} - \psi_m^k \right| < eps$$

где  $Q_m, \omega_m, \psi_m$  – экстремальные значения объемной плотности зарядов, вихря скорости и функции тока. Индекс  $k$  – номер шага по времени, величина  $eps$  изменялась в интервале  $10^{-5} - 10^{-6}$ .

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рассматривалось электроконвективное движение диэлектрической жидкости, характеризуемой значением электрического числа Прандтля  $Pr_e = 1$ , т.е. полагалось, что время релаксации заряда близко характерному времени затухания вязких возмущений. Для ТМ +  $I_2$  ( $\rho = 880 \text{ кг/м}^3$ ;  $\nu = 2.25 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\epsilon = 2.25$ ;  $H = 1 \text{ см}$ ) это соответствует низковольтной проводимости  $\sigma_0 = 4.48 \times 10^{-12} (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ . Жидкость с такой начальной проводимостью обладает высокими изоляционными свойствами. Коэффициент диффузии инжектированных ионов варьировался в пределах  $0 - 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Интенсивность ЭК-течения изменялась до  $Gr_e A = 600$ .

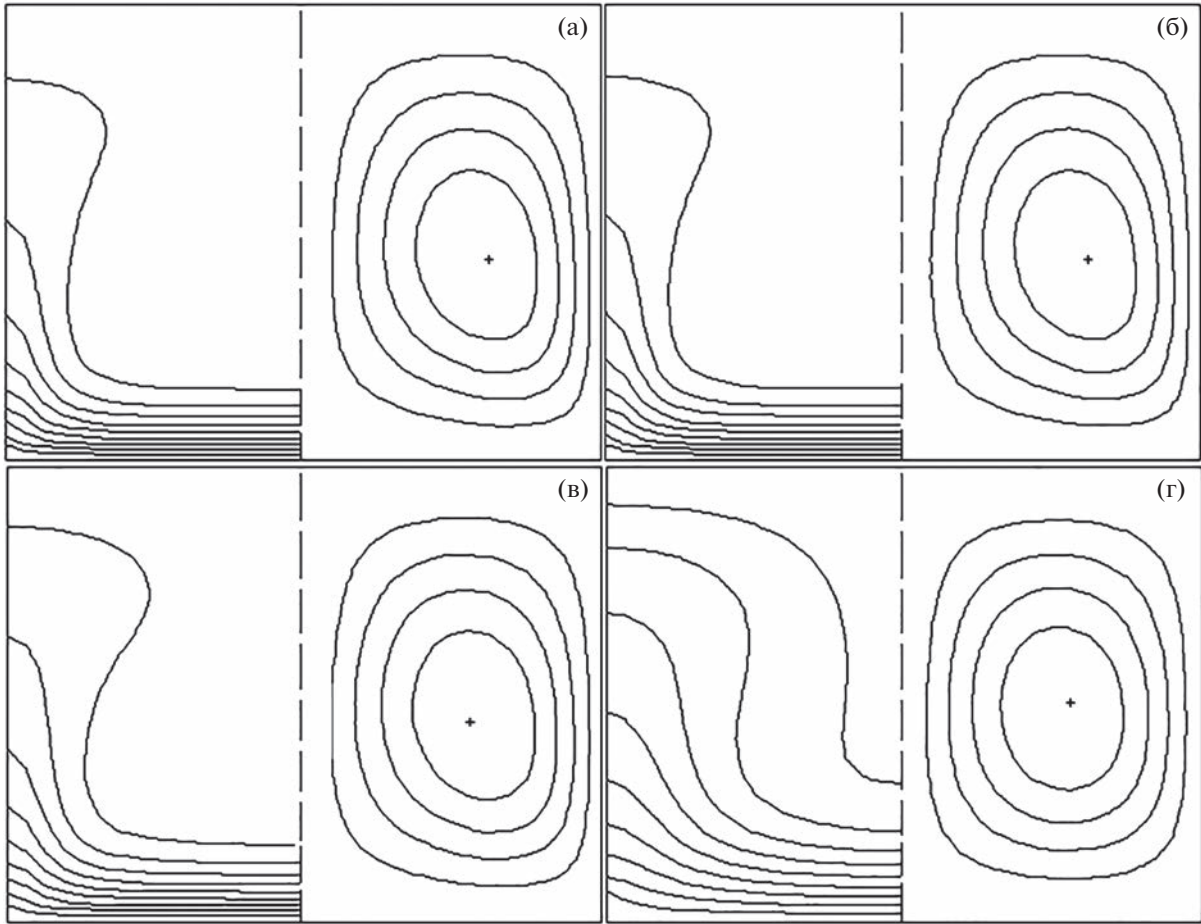
На рис. 1 показаны изменения полей объемной плотности зарядов и течения с ростом интенсивности диффузии. Поля стационарны, соответствуют развитым ЭК-течениям, переходные процессы завершены, поле течения двухвихревое. При пренебрежимо малой диффузии с коэффициентом от 0 до  $10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$  (рис. 1а,б) распределения плотности заряда практически идентичны. Они представляют собой пограничный слой толщиной  $0.15H$  и электроконвективные аналоги “термиков” в движущихся от катода конвективных потоках, пространственная периодичность которых равна  $1.3H$ . Вблизи катода плотность инжектируемых ионов изменяется по линейному закону. Исключение составляют области поперечных конвективных потоков от катода (рис. 1, 2). При этом скорости конвективных потоков от катода вдоль боковых границ расчетной ячейки больше скорости жидкости, движущейся от анода в ее центре. Соответственно центры конвективных вихрей смещены к боковым границам. Из рис. 3а (кривые 1–3) так же видно, что интенсивность течения практически не изменяется с ростом коэффициента диффузии от 0 до  $10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ . Изменения интенсивности течения не превышают 2%.

Количественные изменения полей плотности зарядов и течения возникают при  $D_i \approx 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ . Толщина пограничного слоя объемной плотности заряда вблизи катода становится равной  $0.19H$  (рис. 1в), при  $Gr_e A = 600$  изменения интенсивности течения составляют уже 16% (кривая 4 на рис. 3а) в сравнении с  $D_i = 0$  и увеличиваются с ростом интенсивности ЭК-движения. При  $D_i \approx 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  влияние диффузии становится еще более существенным. Растет плотность инжектируемых ионов вблизи анода и в средней части слоя слабопроводящей жидкости (рис. 2, кривая 4). Толщина пограничного слоя плотности заряда  $0.31H$  (рис. 1г), поле скоростей становится более симметричным, конвективный вихрь приобретает “прямоугольную” форму (рис. 1г), величины скоростей конвективных потоков от катода и от анода примерно равны.

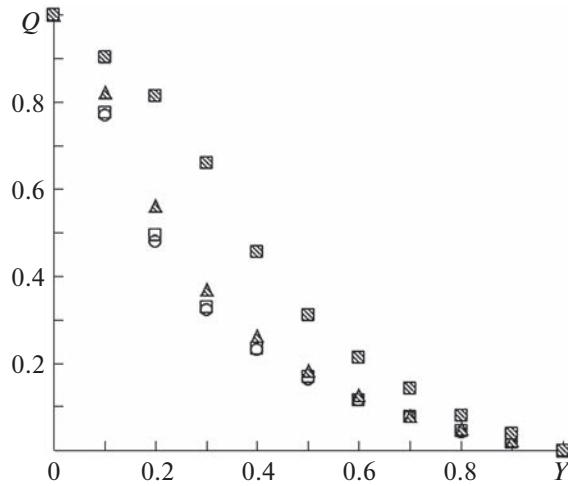
Следует отметить, что ЭК-движение существует до значений критерия  $Gr_e A \approx 250 - 300$  как медленное “ползущее” течение. Такое течение имело вид двух вихрей разной интенсивности, асимметрия которых  $|\psi_{\max}/\psi_{\min}|$  изменялась от 0.7 до 1 с ростом числа  $Gr_e A$ . Вид кривых на рис. 3, где представлены зависимости средней величины  $\psi_m = 0.5 \times (|\psi_{\max}| + |\psi_{\min}|)$  от критериального числа  $Gr_e A$  при различной интенсивности диффузии, отражает указанные изменения течения. При  $Gr_e A$  более 250–300 зависимости на рис. 3 соответствуют режиму развитого пограничного слоя и описываются корневой зависимостью.

В изотермических условиях стационарная электроконвекция в плоском конденсаторе возникает в результате обратной бифуркации [23]. Аналогичным образом возникали переходы от равновесия к конечно-амплитудному режиму течения в работах автора, например, [24]. Однако в настоящем исследовании электроконвекция формировалась в результате бифуркации вперед. Что может быть связано приближением зависимости  $j \sim qbE$  и величиной критерия Прандтля  $Pr_e = 1$ .

Вид кривых на рис. 3 типичен для задач со слабым нарушением условий равновесия [22]. При малых нарушениях условий равновесия амплитуда течения вблизи кризиса может быть описана кубическим уравнением вида  $b^3 + c_1(G - G^*)b + c_2 = 0$  [25], где  $G$  – некоторый критерий устойчивости. Однако зависимость средней величины  $\psi_m$  от критерия  $Gr_e A$  может быть приближенно

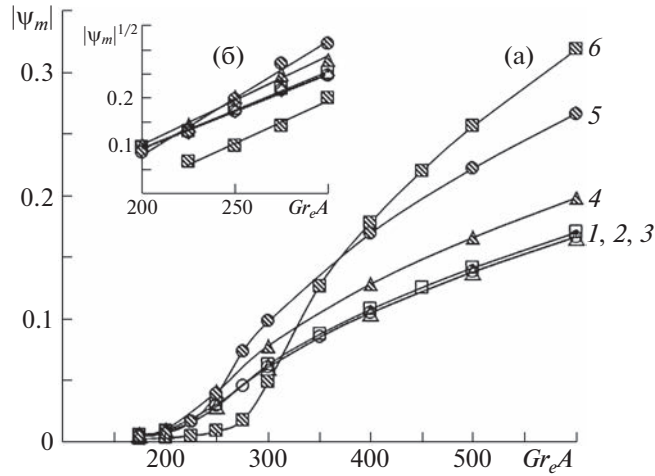


**Рис. 1.** Изолинии объемной плотности зарядов (слева) и линии тока (справа) при  $Gr_e A = 600$ : а-г –  $D_i = 0, 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

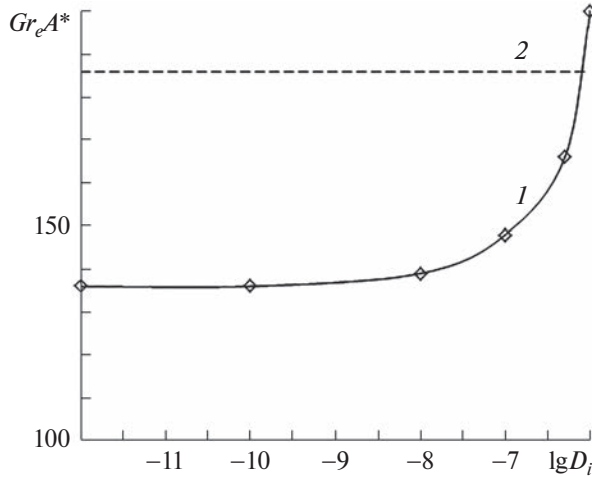


**Рис. 2.** Объемная плотность зарядов при  $X = 0, Gr_e A = 600$ : 1–6 –  $D_i = 0, 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  (обозначения на рис. 2 и рис. 3 одинаковы).

описана уравнением второй степени. Во всяком случае, зависимости  $\psi_m^{1/2} \sim (Gr_e A - Gr_e A^*)$  близки к линейным, как показано на рис. 3б. Экстраполяция на ноль позволяет вычислить критические значения числа  $Gr_e A^*$  для различных величин коэффициента диффузии инжектированных ионов.



**Рис. 3.** (а) Зависимость интенсивности ЭК-течения от  $Gr_e A$ , 1–6 –  $D_i = 0; 10^{-10}; 10^{-8}; 10^{-7}; 5 \times 10^{-7}; 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ; (б) аппроксимация интенсивности медленного течения вблизи кризиса.



**Рис. 4.** Изменения порогового значения критерия  $Gr_e A^*$  с ростом интенсивности диффузии: 1 – численные результаты, 2 – эксперимент [26].

Изменения пороговых значений  $Gr_e A^*$  с ростом интенсивности диффузии представлены на рис. 4. Эти значения не меняются, или изменяются незначительно при  $0 < D_i < 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$  и существенно при  $10^{-8} < D_i < 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Высокие токи диффузии смещают порог возникновения электроконвективного течения к бóльшим величинам параметра  $Gr_e A$ . Сравнение с существующими экспериментальными данными позволяет оценить величину коэффициента диффузии инжектированных ионов в выбранной слабопроводящей жидкости. Так, линия 2 ( $Gr_e A^* = 186$ ) на рис. 4 соответствует экспериментально измеренному значению пороговой средней напряженности  $E^* = 1 \text{ кВ/см}$  для ТМ +  $I_2$  при  $\sigma_0 = 4.48 \times 10^{-12} (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$  [26].

В работе [26] исследовалась проводимость трансформаторного масла (ТМ) с добавлением малых доз молекулярного йода ( $I_2$ ) в однородном поле (плоский конденсатор) и в сильно неоднородном поле (вблизи острия) в изотермических условиях. Визуализация ЭК-течений осуществлялась методом фотографирования треков светорассеивающих частиц. Напряжение на электродах изменялось с шагом 20 В. Получена зависимость пороговой средней напряженности поля в конденсаторе от проводимости жидкости в пределах  $7 \times 10^{-14} \leq \sigma_0 \leq 2 \times 10^{-11} \text{ См/см}$ . Зависимость

близка к линейной. Соответствующий коэффициент инжекции вычислен согласно [27] и равен  $8.31 \times 10^{-9}$  Кл/В · м<sup>2</sup>.

Сравнение полученных численных результатов с результатами эксперимента [26] на рис. 4 показывает, что величина коэффициента диффузии при униполярной инжекции для раствора молекулярного йода в трансформаторном масле приближенно равна  $7 \times 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с. Порядок величины коэффициента диффузии совпадает с оценками работ [19, 20].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках модели слабопроводящей жидкости с униполярной инжекционной проводимостью, в качестве которой рассматривался раствор молекулярного йода в трансформаторном масле, даны оценки величины коэффициента диффузии инжектированных ионов. Оценки получены на основе сравнения численных результатов с экспериментальными данными [26]. Значение коэффициента диффузии  $7 \times 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с соответствует довольно заметному диффузионному току, которым нельзя пренебречь. Такая величина интенсивности диффузии ионов влияет на порог возникновения ЭК-течения, его параметры и структуру полей течения и объемной плотности зарядов. Важно отметить, что интенсивность диффузии оценивалась вблизи порога возникновения ЭК-течения. С ростом напряженности поля величина коэффициента диффузии может изменяться.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарунин Е.Л., Ямшинина Ю.А. Расчет электрогидродинамического течения в сильно неоднородных электрических полях // Магнитная гидродинамика. 1990. № 2. С. 142–144.
2. Тарунин Е.Л., Ямшинина Ю.А. Ветвление стационарных решений системы уравнений электрогидродинамики при униполярной инжекции // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 23–29.
3. Жакин А.И., Тарапов И.Е. Неустойчивость и течение слабопроводящей жидкости при окислительно-восстановительных реакциях на электродах и рекомбинации // Изв. АН СССР. 1981. № 4. С. 20–26.
4. Ильин В.А., Мордвинов А.Н., Петров Д.А. Электроконвекция слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции заряда в постоянном электрическом поле // ЖЭТФ. 2015. Т. 147. Вып. 1. С. 181–188.
5. Ильин В.А., Чигорина Т.И. Стационарные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции заряда в постоянном электрическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 5. С. 3–13.
6. Ильин В.А. Электроконвекция слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 1. С. 64–73.
7. Смородин Б.Л., Тараут А.В. Параметрическая конвекция слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 3–11.
8. Ильин В.А. Электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе при униполярной инжекции заряда // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 1. С. 5–9.
9. Мордвинов А.Н., Смородин Б.Л. Электроконвекция при инжекции с катода и нагрева сверху // ЖЭТФ. 2012. Т. 141. Вып. 5. С. 997–1005.
10. Ильин В.А., Александрова В.Н. Волновые режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции заряда в постоянном электрическом поле // ЖЭТФ. 2020. Т. 157. Вып. 2. С. 349–356.
11. Perez A. T., Castellanos A. Role of charge diffusion in finite amplitude electro-convection // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. № 10. P. 5844–5855.
12. Смородин Б.Л., Тараут А.В. Влияние модуляции электрического поля на распространение заряда в полярной слабопроводящей жидкости // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 3–12.
13. Стишков Ю.К., Чирков В.А. Формирование электрогидродинамических течений в сильнонеоднородных электрических полях при двух механизмах зарядообразования // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 1. С. 3–13.
14. Тараут А.В., Смородин Б.Л. Электроконвекция при наличии автономной униполярной инжекции и остаточной проводимости // ЖЭТФ. 2012. Т. 142. Вып. 2. С. 403–412.
15. Ситников А.А., Стишков Ю.К. Трехионная модель ЭГД-течений в системе электродов “провод над плоскостью” // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 2. С. 3–10.
16. Панкратьева И.Л., Полянский В.А. Моделирование электрогидродинамических течений в слабопроводящих жидкостях // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 4. С. 36–44.
17. Zhang M., Martinelli F., Wu J., Schmid P.J., Quadrio M. Modal and non-modal stability analysis of electrohydrodynamic flow with and without cross-flow // J. Fluid. Mech. 2015. V. 770. P. 319–349.
18. Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. Физические основы электрогидродинамики. М.: Наука, 1979. 320 с.

19. *Остроумов Г.А., Петриченко Н.А.* Изолирующие жидкости как ионные проводники электричества. // ЭОМ. 1974. № 1. С. 40–44.
20. *Рычков Ю.М.* Контактные явления в жидких слабопроводящих средах // ИФЖ. 1997. № 6. С. 1007–1013.
21. *Стишков Ю.К.* Наблюдение изотермической конвекции в электрическом поле плоского конденсатора // ЭОМ. 1972. № 1. С. 61–62.
22. *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
23. *Lacroix J.C., Atten P., Hopfinger E.J.* Electro-convection in a dielectric liquid layer subjected to unipolar injection // J. Fluid Mech. 1975. V. 69. P. 539–563.
24. *Ermolaev I.A., Zhanov A.I.* Investigation of the electroconvective flow of a weakly conducting liquid with unipolar injection conductivity by the finite element method // ЖЕПТ. 2002. V. 75. № 5. P. 1125–1129.
25. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
26. *Федоненко А.И., Жакин А.И.* Экспериментальные исследования электроконвективного движения в трансформаторном масле // Магнитная гидродинамика. 1982. № 3. С. 74–78.
27. *Ермолаев И.А., Жбанов А.И.* Численное исследование униполярной инжекции при электроконвективном движении в плоском слое трансформаторного масла // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 3–7.