

УДК 532.526

РЕЗОНАНСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЛАЗМЕННЫХ АКТУАТОРОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ТЕЧЕНИЕМ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА СТРЕЛОВИДНОМ КРЫЛЕ

© 2023 г. С. В. Мануйлович*

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского,
Жуковский, Россия

*E-mail: sergei.manuilovich@gmail.com

Поступила в редакцию 28.06.2022 г.

После доработки 28.01.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

Теоретически изучен процесс управления течением в пограничном слое на стреловидном крыле с помощью ряда плазменных актуаторов, установленных под углом к передней кромке. Исследован резонансный отклик управляемого течения в случае, когда угол наклона актуаторов близок углу наклона стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения. Расчет управляемого течения произведен в рамках параболизированной системы уравнений Навье–Стокса. Вычислены характеристики устойчивости периодических течений, сформированных воздействием управляющей объемной силы.

Ключевые слова: пограничный слой, поперечное течение, объемная сила, резонансное воздействие, устойчивость периодического течения

DOI: 10.31857/S1024708423600215, **EDN:** WMBUGI

Течение в пограничном слое на стреловидном крыле современного пассажирского самолета носит турбулентный характер. Это связано с наличием поперечного течения — ненулевого профиля скорости пограничного слоя в плоскости, перпендикулярной вектору скорости внешнего течения. Именно неустойчивость поперечного течения является основной причиной преждевременного ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на стреловидном крыле [1]. В этой связи является актуальной разработка методов уменьшения интенсивности поперечного течения.

Очевидный способ ослабления поперечного течения — уменьшение угла стреловидности крыла — приводит к уменьшению скорости крейсерского режима полета во избежание появления скачков уплотнения и связанного с этим увеличения волнового сопротивления. Классическим методом уменьшения скорости поперечного течения при сохранении геометрии крыла является отсос газа через его поверхность [2].

Другой метод активного подавления поперечного течения предложен в [3]. Он заключается в использовании плазменных актуаторов, формирующих поле объемной силы, направленной против поперечного течения. Положительный эффект такого способа управления был продемонстрирован в эксперименте [4]; там ослабление поперечного течения достигалось с помощью единичного актуатора, размещенного на начальном участке пограничного слоя с электродами, параллельными передней кромке модели. Это позволило увеличить протяженность ламинарного участка течения на несколько процентов.

Поскольку вниз по течению угол наклона внешней линии тока к направлению передней кромки крыла возрастает, для ослабления поперечного течения более выгодным является расположение актуаторов, электроды которых составляют некоторый угол с передней кромкой. В идеализированном случае поля объемной силы, однородного вдоль размаха крыла, оптимальной является конфигурация, когда сила направлена всюду строго против поперечного течения [5]. Поскольку с помощью электрогидродинамического воздействия создать однородное вдоль размаха распределение объемной силы невозможно, представляется естественным вместо однородного

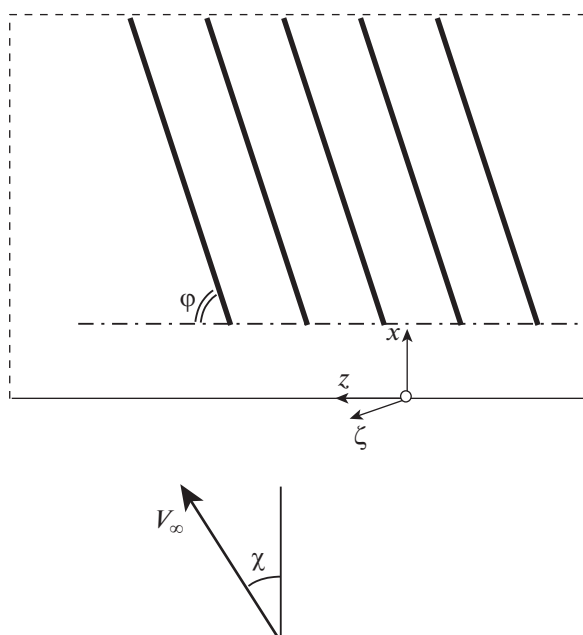


Рис. 1. Схема течения, система координат и конфигурация системы управления.

организовать продольно-периодическое силовое воздействие с помощью системы наклонных актуаторов, расставленных с некоторым шагом вдоль размаха крыла [6]. Как показано в [7], такая конфигурация системы управления может оказывать на течение нежелательное воздействие. Приведем краткое пояснение.

Пусть течение в пограничном слое управляется последовательностью наклонных актуаторов, расставленных вдоль размаха крыла с некоторым периодом. Оси виртуальной системы вихрей неустойчивости поперечного течения того же периода составляют с передней кромкой крыла углы, на несколько градусов большие, чем местные углы наклона линий тока внешнего течения. По мере разгона внешнего течения при удалении от передней кромки углы наклона его линий тока монотонно возрастают, и направления осей виртуальных вихрей неустойчивости могут совпасть с направлениями электродов актуаторов, что вызовет резонансный отклик управляемого течения. Линейный анализ резонанса проведен в [7]; данная работа посвящена изучению этого явления в нелинейной постановке.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задачу управления течением в пограничном слое на стреловидном крыле будем изучать, моделируя эксперименты, проводимые в низкоскоростных аэродинамических трубах. В этих экспериментах в качестве модели как правило используется плоская пластина со скошенной передней кромкой, обтекаемая под нулевым углом атаки. Для формирования разгонного течения над ней устанавливают вытесняющее тело цилиндрической формы, образующие которого параллельны передней кромке модели [8].

Рассмотрим задачу управления течением в ламинарном пограничном слое на плоской полубесконечной пластине, обтекаемой равномерным потоком газа под углом скольжения χ с небольшой дозвуковой скоростью V_∞° , плотностью ρ° и вязкостью μ° (кружками помечаем размерные величины). Введем декартову систему координат с началом на передней кромке пластины, ось x° направим вдоль пластины перпендикулярно передней кромке, ось y° — по нормали к стенке, а ось z° — вдоль передней кромки (рис. 1). Соответствующие компоненты вектора скорости обозначим u° , v° , w° , давление — p° . Значения параметров течения на внешней границе пограничного слоя будем пометать индексом e .

Будем предполагать, что течение управляется системой исполнительных элементов, расставленных с постоянным шагом вдоль размаха. Прямолинейные электроды актуаторов наклонены

под углом φ к передней кромке (рис. 1). Компоненты объемной силы вдоль пластины и по нормали к ней обозначим, соответственно, f° и g° .

В дальнейшем будем использовать две размерных единицы длины — масштаб внешнего течения L° и характерную толщину пограничного слоя

$$\delta^\circ = \sqrt{\frac{\mu^\circ L^\circ}{\rho^\circ V_\infty^\circ}}$$

Введем безразмерные переменные с помощью равенств

$$\{x^\circ, y^\circ, z^\circ\} = \delta^\circ \{x, y, z\}, \quad \{u^\circ, v^\circ, w^\circ\} = V_\infty^\circ \{u, v, w\}$$

$$p^\circ = \rho^\circ V_\infty^{\circ 2} p, \quad \{f^\circ, g^\circ\} = \frac{\rho^\circ V_\infty^{\circ 2}}{L^\circ} \{f, g\}$$

В сделанных предположениях параметры течения удовлетворяют системе уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - f \cos \varphi \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + g \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f \sin \varphi \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $R = \rho^\circ V_\infty^\circ \delta^\circ / \mu^\circ \gg 1$ — число Рейнольдса.

Параметры течения удовлетворяют условиям прилипания на стенке и условиям срачивания с внешним течением

$$\begin{aligned} u(x, 0, z) &= v(x, 0, z) = w(x, 0, z) = 0 \\ u(x, \infty, z) &= u_e(x), \quad w(x, \infty, z) = w_e = \sin \chi, \quad \frac{\partial p}{\partial x}(x, \infty, z) = -u_e \frac{du_e}{dx} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для расчета течения в пограничном слое необходимо задать продольную скорость внешнего течения u_e . Будем использовать ее модельное распределение в форме сглаженной ступеньки

$$u_e(s) = \left[1 + H \left(\frac{s-1}{\Delta s} \right) \Delta u \right] \cos \chi, \quad s = \frac{1}{R} x, \quad H(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{th} \xi)$$

где $\Delta u = 0.5$ задает приращение продольной скорости внешнего течения, вызванное действием вытесняющего тела, а $\Delta s = 0.3$ — полуширина области разгона.

В силу двумерной конфигурации системы актуаторов будем считать, что объемная сила всюду перпендикулярна электродам, т.е. ее направление лежит в плоскости $y, \zeta = z \sin \varphi - x \cos \varphi$ (см. рис. 1). Зададим компоненты объемной силы в виде [7]

$$\begin{aligned} f &= cf_s F(\zeta) \exp(-y^2), \quad g = cf_s \frac{dF}{d\zeta} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(y) \\ F &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp[-(\zeta - \Pi m)^2], \quad f_s = H \left(\frac{s-s_0}{a} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\operatorname{erfc}(y)$ — интеграл вероятностей [9]. Множитель f_s задает форму сглаживания силового воздействия на его начальном участке. Местоположение переднего края системы управления $s_0 = 0.5$ выбрано таким образом, чтобы оно предшествовало области потери устойчивости (см. разд. 5). Параметр $a = 0.05$ определяет характерный размер области сглаживания.

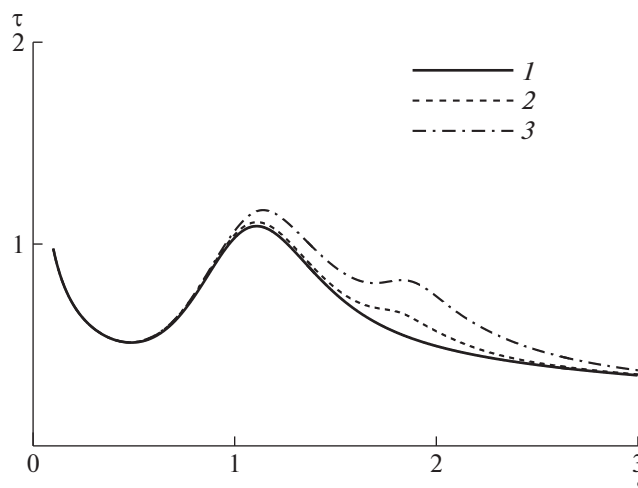


Рис. 2. Распределения по s трения, осредненного по размаху пластины: в отсутствие управляющего воздействия — 1, при воздействии с углом наклона актуаторов $\varphi = 71^\circ$, расставленных с периодами $\Pi = 6, 12 - 2, 3$.

2. ТЕЧЕНИЕ В ОТСУТСТВИЕ УПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Исследуем характеристики течения в классическом [2] пограничном слое на пластине, соответствующем описанному в разд. 1 модельному распределению скорости внешнего течения. Течение — двумерное (аргумент z опускаем). Здесь и далее все расчеты проведены при угле скольжения $\chi = 30^\circ$.

На рис. 2 показано распределение величины

$$\tau(s) = \frac{\partial u}{\partial y}(s, 0) \cos \chi + \frac{\partial w}{\partial y}(s, 0) \sin \chi \quad (2.1)$$

характеризующей сопротивление трения в направлении скорости набегающего потока (кривая 1). При $0 < s < 0.5$ трение убывает по закону, близкому $\tau \sim \sqrt{s}$, что соответствует течению Блазиуса [2] для $u_e \equiv \sqrt{3}/2$. Затем на участке $0.5 < s < 1.2$ течение подвергается разгону, что приводит к значительному возрастанию трения. Еще ниже по потоку, где $u_e \approx 1.3$, трение вновь начинает затухать.

Опишем основные характеристики поперечного течения при отсутствии силового воздействия. Введем обозначения для формы профиля скорости поперечного течения, а также для местного максимума его интенсивности

$$V_{cf} = \frac{u_e w_e}{\sqrt{u_e^2 + w_e^2}} \left(\frac{u}{u_e} - \frac{w}{w_e} \right), \quad V_m(s) = \max_y V_{cf} \quad (2.2)$$

На начальном участке пластины течение мало отличается от течения Блазиуса, поэтому интенсивность поперечного течения мала. На участке разгона происходит резкий рост его интенсивности (рис. 3а, линия 1), максимум которой $V_m = 0.086$ достигается при $s = 1.17$. Затем наблюдается сравнительно медленное (приблизительно — обратно пропорционально расстоянию от передней кромки) уменьшение амплитуды поперечного течения несмотря на практически отсутствующий градиент давления при $s > 2$. Эта особенность — следствие инерции течения.

На рис. 4а приведена форма профиля скорости поперечного течения вблизи точки максимума его интенсивности ($s = 1.2$).

3. МЕТОД РАСЧЕТА УПРАВЛЯЕМОГО ТЕЧЕНИЯ

Для вычисления характеристик пограничного слоя, управляемого периодической по размаху объемной силой (1.4), перепишем систему (1.1) в переменных s, y, ζ , пренебрегая членами порядка R^{-2} (далее в расчетах всюду $R = 500$)

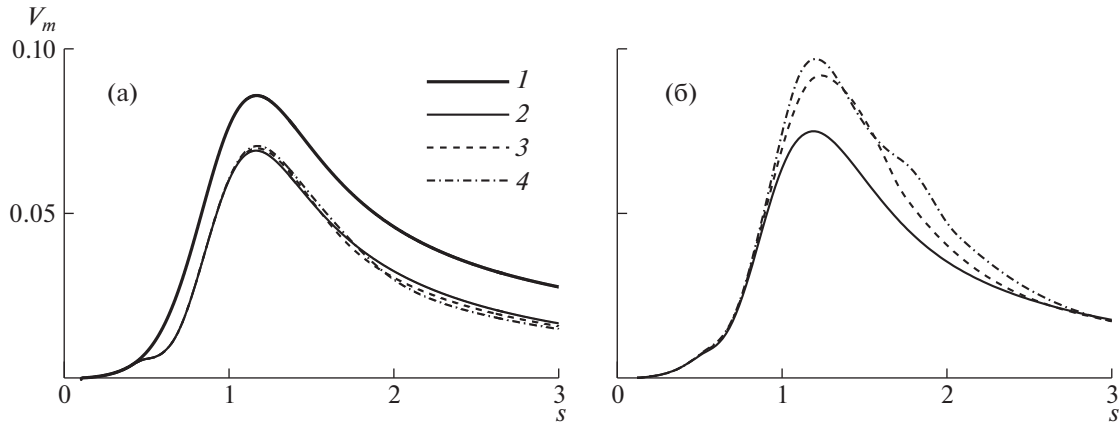


Рис. 3. Распределения по s максимума скорости поперечного течения, осредненного по z (а), абсолютного по z (б): 1 – отсутствие силового воздействия; 2–4 – при воздействии актуаторами под углами наклона $\varphi = 75^\circ$, 72° , 71° ($\Pi = 12$).

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \\
 & u \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial s} - \cos \varphi \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - f \cos \varphi \right) \\
 & u \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} - \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \sin \varphi \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + g \right) \\
 & u \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s} - \cos \varphi \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \sin \varphi \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + f \sin \varphi \right)
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Параметры течения периодичны по ζ при фиксированных s, y . В связи с этим будем представлять поле объемной силы и решение системы (3.1) в форме рядов Фурье по переменной ζ

$$\begin{aligned}
 \{f, g\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{f_n, g_n\}(s, y) \exp(ik_n \zeta), \quad k_n = \frac{2\pi n}{\Pi} \\
 q &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(s, y) \exp(ik_n \zeta), \quad q = u, v, w, p, \quad q_0 = U, \frac{1}{R} V, W, P
 \end{aligned}$$

Выпишем систему для нулевых гармоник, снова пренебрегая членами порядка R^{-2} :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\
 & U \frac{\partial U}{\partial s} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -f_0 \cos \varphi - R \sum_0 \left(i\alpha_m u_l u_m + v_l \frac{\partial u_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l u_m \right) \\
 & \frac{\partial P}{\partial y} = -\sum_0 \left(i\alpha_m u_l v_m + v_l \frac{\partial v_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l v_m \right) \\
 & U \frac{\partial W}{\partial s} + V \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = f_0 \sin \varphi - R \sum_0 \left(i\alpha_m u_l w_m + v_l \frac{\partial w_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l w_m \right)
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь и далее используются обозначения

$$\sum_n (\bullet)_l (\bullet\bullet)_m = \sum_{\substack{l+m=n \\ l, m \neq 0}} (\bullet)_l (\bullet\bullet)_m, \quad \alpha_n = -k_n \cos \varphi, \quad \gamma_n = k_n \sin \varphi$$

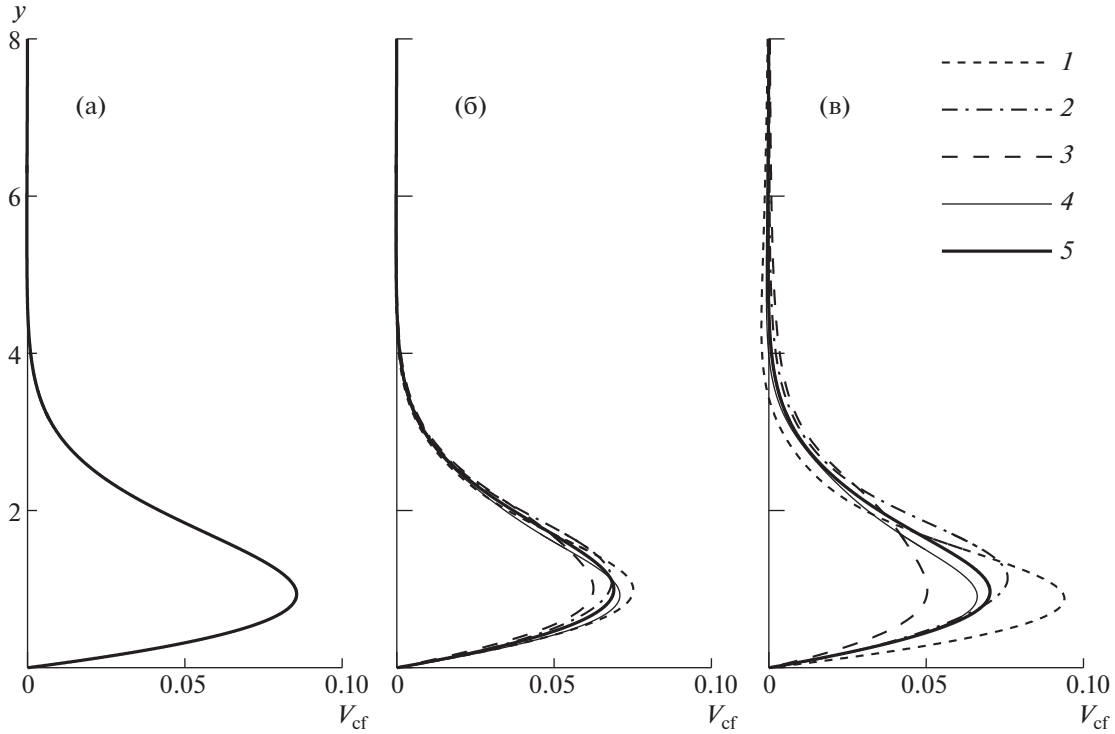


Рис. 4. Профили скорости поперечного течения в точке $s = 1.2$; (а) – при отсутствии силового воздействия и (б, в) – при управлении системой актуаторов с углом наклона $\varphi = 71^\circ$ и шагом $\Pi = 6, 12$ в сечениях $\zeta = -\Pi/4, 0, \Pi/4, \Pi/2$ (1–4); 5 – скорость поперечного течения, осредненная по размаху.

При расчете высших гармоник будем пренебрегать конвективными членами порядка R^{-1} . В результате системы для гармоник с номерами $n \neq 0$ приобретают вид

$$\begin{aligned}
 i\alpha_n u_n + \frac{\partial v_n}{\partial y} + i\gamma_n w_n &= 0 \\
 (i\alpha_n U + i\gamma_n W) u_n + \frac{\partial U}{\partial y} v_n + i\alpha_n p_n - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - k_n^2 u_n \right) &= \\
 &= -\frac{1}{R} f_n \cos \varphi - \sum_n \left(i\alpha_m u_l u_m + v_l \frac{\partial u_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l u_m \right) \\
 (i\alpha_n U + i\gamma_n W) v_n + \frac{\partial p_n}{\partial y} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} - k_n^2 v_n \right) &= \frac{1}{R} g_n - \sum_n \left(i\alpha_m u_l v_m + v_l \frac{\partial v_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l v_m \right) \\
 (i\alpha_n U + i\gamma_n W) w_n + \frac{\partial W}{\partial y} v_n + i\gamma_n p_n - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - k_n^2 w_n \right) &= \\
 &= \frac{1}{R} f_n \sin \varphi - \sum_n \left(i\alpha_m u_l w_m + v_l \frac{\partial w_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l w_m \right)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

При значительном угле отклонения актуаторов от направления линии тока внешнего течения высшие гармоники имеют тот же порядок, что и вынуждающая сила $q_n = O(R^{-1})$, члены под знаками сумм имеют порядок $O(R^{-2})$. В этом случае нулевые гармоники удовлетворяют уравнениям классического пограничного слоя, а высшие гармоники могут быть рассчитаны в линейном приближении по малому параметру R^{-1} [7]. В исследуемом здесь околорезонансном случае все члены в системах (3.2), (3.3) имеют один порядок по числу R , поэтому члены под знаками сумм имеют порядок $O(R^{-1})$.

В силу

$$\frac{\partial P}{\partial s}(s, \infty) = -u_e \frac{du_e}{ds}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(s, y) = O(R^{-1})$$

система (3.2) может быть подвергнута дальнейшему упрощению и приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial s} + V \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= u_e \frac{du_e}{ds} - f_0 \cos \varphi - R \sum_0 \left(i\alpha_m u_l u_m + v_l \frac{\partial u_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l u_m \right) \\ U \frac{\partial W}{\partial s} + V \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= f_0 \sin \varphi - R \sum_0 \left(i\alpha_m u_l w_m + v_l \frac{\partial w_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l w_m \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Краевые условия для системы (3.4) такие же, как для классического пограничного слоя [2]

$$U(s, 0) = V(s, 0) = W(s, 0) = 0, \quad U(s, \infty) = u_e(s), \quad W(\infty) = w_e \quad (3.5)$$

Краевые условия для системы (3.3) — условия прилипания на поверхности пластины и условия затухания высших гармоник на внешней границе пограничного слоя

$$u_n(s, 0) = v_n(s, 0) = w_n(s, 0) = 0, \quad q_n(s, \infty) = 0 \quad (3.6)$$

Опишем метод расчета краевых задач (3.4), (3.5) и (3.3), (3.6). В первой из них отсутствуют высшие производные по s , а вторая вообще не содержит производных по этой переменной и зависит от s как от параметра. Как и система (3.1), объединенная задача (3.3)–(3.6) имеет параболический тип, ее решение вычислялось маршевым методом.

Для расчета решения задачи (3.4), (3.5) применялась неявная схема [2] по переменной s . Решение задачи (3.3), (3.6) вычислялось методом [7]. На каждом шаге по s решение рассчитывалось с помощью итераций. Билинейные члены под знаками сумм и коэффициенты системы (3.3) вычислялись с использованием величин, рассчитанных на предыдущем шаге итераций (на первом шаге итераций — с предыдущего шага по s). При расчетах бесконечные суммы заменялись конечными — $N_h \leq n, m, l \leq N_h$, где N_h — число учитываемых гармоник. Расчеты управляемого течения проводились для $N_h = 10$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА УПРАВЛЯЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ

В системе управления, описанной в разд. 1, пока не заданы угол наклона актуаторов φ , расстояние между актуаторами Π и амплитуда силового воздействия c . Поясним их выбор.

Как уже упоминалось выше, наклон виртуальной системы вихрей неустойчивости на несколько градусов больше наклона внешней линии тока. У изучаемого течения угол наклона линии тока к передней кромке пластины монотонно возрастает, пробегая значения от 60° до 69° . Для исследования околорезонансной конфигурации системы управления будем рассматривать значения углов, лежащих выше этого промежутка.

Исследуемый диапазон изменения параметра Π выбран таким, чтобы соответствующие волновые числа γ_n располагались в окрестности области роста вихрей неустойчивости поперечного течения (см. разд. 5). При варьировании Π амплитудный параметр c выбирался из условия сохранения интегрального силового воздействия. Далее всюду $c/\Pi = 0.05$.

Высота расчетной области и шаги интегрирования по переменным s, y выбирались с учетом снижения времени вычислений при обеспечении достаточной точности. В результате все расчеты выполнялись при $y_{\max} = 10, h_s = 0.001, h_y = 0.01$.

На рис. 2 показаны распределения осредненной по размаху силы трения (2.1), вычисленной для $\Pi = 6, 12$ и $\varphi = 71^\circ$. Расчеты показывают, что при сохранении интегральной силы и увеличении периода воздействия сила трения возрастает. Это связано с ростом вклада, оказываемого высшими гармониками (выражения под знаками сумм в (3.4)) на осредненное течение, подобно тому, как напряжения Рейнольдса [2] увеличивают наполненность профиля турбулентного течения. Таким образом, увеличение шага расстановки актуаторов может нивелировать их благоприятное стабилизирующее воздействие, вызывая возрастание сопротивления трения до его значений в турбулентном пограничном слое.

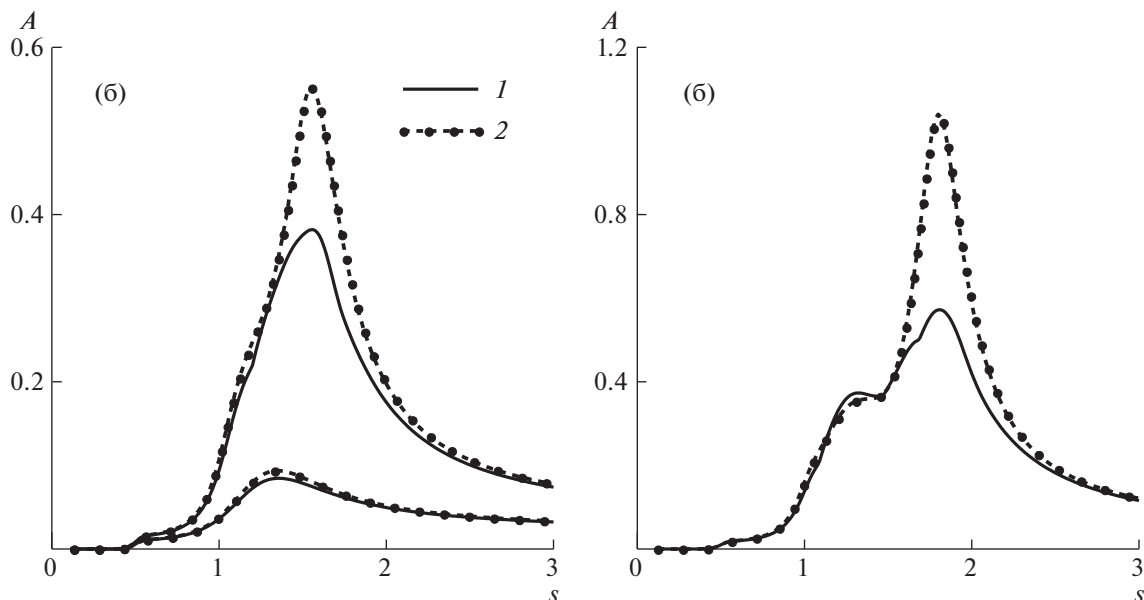


Рис. 5. Распределения по s интенсивности колебательной составляющей скорости управляемого течения при углах наклона актуаторов $\varphi = 75^\circ, 72^\circ$ (а) и $\varphi = 71^\circ$ (б); 1 – в рамках нелинейной постановки, 2 – в рамках линейного анализа [7] ($\Pi = 12$).

На рис. 4б, в приведены профили скорости поперечного течения в сечении $s = 1.2$ при управлении системой актуаторов с наклоном $\varphi = 71^\circ$ и шагом расстановки $\Pi = 6, 12$. Линиями 1–4 показаны профили в сечениях, равноотстоящих по размаху; линии 5 – профили осредненного течения. При силовом воздействии средняя скорость поперечного течения снижается почти на 20%, но возникает его поперечная модуляция, усиливающаяся при возрастании периода воздействия. При $\Pi = 6$ максимум скорости поперечного течения (теперь он зависит и от ζ) колеблется в пределах $0.062 < V_m < 0.075$, а при $\Pi = 12$ – в диапазоне $0.048 < V_m < 0.097$, местами даже превышая значение 0.086 для случая отсутствия воздействия. В данной работе исследуются околорезонансные режимы управления поперечным течением, поэтому ниже всюду считаем $\Pi = 12$.

На рис. 3а изображены зависимости от s осредненных по z значений V_m , вычисленных для углов наклона актуаторов $\varphi = 75^\circ, 72^\circ, 71^\circ$ (линии 2–4). Расчеты показывают, что по влиянию на осредненное течение указанные воздействия мало отличаются друг от друга. Что касается абсолютных максимумов скорости по размаху пластины (рис. 3б), то при $\varphi = 75^\circ$ их отличие от среднего значения мало, а при $\varphi = 72^\circ$ и 71° оно становится значительным, указывая на околорезонансный характер воздействий.

Для исследования околорезонансных режимов управления введем функцию

$$A(s) = \max_{y, \zeta} \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}, \quad q' = q - Q \quad (4.1)$$

характеризующую распределение интенсивности колебательной составляющей q' скорости течения. Напомним, что в силу малости источников членов в системе (3.3) для высших гармоник, соотношение $q' = O(1)$ указывает на резонансный характер силового воздействия.

На рис. 5 линиями 1 показаны распределения (4.1), вычисленные для трех значений угла наклона актуаторов. Линиями 2 для сравнения приведены те же распределения, вычисленные в рамках подхода [7] в предположении $q' = O(R^{-1}) \ll Q$. При $\varphi = 75^\circ$ расчеты показали, что результаты, полученные в рамках обоих подходов, практически совпадают (нижние кривые на рис. 5а), т.е. резонанс не наблюдается. При $\varphi = 72^\circ$ (верхние кривые рис. 5а) максимум функции (4.1) увеличивается почти в 5 раз, а при $\varphi = 71^\circ$ – еще в 2 раза (рис. 5б).

На начальном участке ($s < 1$) угол наклона линии тока внешнего течения меньше 65° , и результаты расчета для $\varphi = 72^\circ, 71^\circ$ по-прежнему мало отличаются от решения линеаризованной задачи [7]. Ниже по потоку отличие становится существенным, и нелинейный анализ определяет

более гладкую зависимость (4.1) по сравнению с [7], уменьшая амплитуду околорезонансного пика.

5. ИЗМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ

Выясним, как управляющее воздействие влияет на скорость роста стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения. Изучим сначала характеристики устойчивости в отсутствие силового воздействия, представляя параметры течения в виде

$$q = Q(y) + \varepsilon [q^*(y) \exp(i\alpha x + i\gamma z) + \text{с.с.}] \quad (5.1)$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ — амплитуда возмущения, $\gamma > 0$ — поперечное волновое число. Подставляя (5.1) в систему (1.1), производя ее линеаризацию по параметру ε и пренебрегая членами, содержащими $\partial U/\partial x$, V , $\partial W/\partial x$ (плоскопараллельное приближение [2]), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных собственных функций q^* .

Эта система может быть сведена к уравнению Орра-Зоммерфельда для функции v^* . Налагая на его решение условия $v^*(0) = dv^*/dy(0) = v^*(\infty) = 0$, получим задачу на собственные значения для определения комплексного продольного волнового числа α . Решение задачи рассчитывалось с помощью вычисления линейно независимых решений с использованием процедуры ортонормализации Шмидта [10].

На рис. 6а приведены результаты расчетов инкремента нарастания $\sigma = -\text{Im } \alpha(s, \gamma)$ моды неустойчивости поперечного течения. Линия 1 — кривая нейтральной устойчивости (где $\sigma = 0$), линии 2 — линии уровня $\sigma > 0$, нанесенные с шагом 0.001. Расчет показывает, что усиление стационарных возмущений вниз по потоку впервые наблюдается на расстоянии $s_c = 0.86$ от передней кромки пластины для гармоники с волновым числом $\gamma_c = 0.42$. Максимальная скорость усиления $\sigma_m = 5.05 \times 10^{-3}$ достигается в точке $s_m = 1.24$, $\gamma_m = 0.47$.

Перейдем к изучению характеристик устойчивости течения, модулированного объемным силовым воздействием. Как и в случае классической теории устойчивости, будем, использовать допущение о квазиоднородном, квазипараллельном характере осредненного течения, не распространяя это на колебательную составляющую течения. Исследуем поведение малых стационарных вихревых возмущений, представляя параметры течения в виде

$$q = Q(y) + \left[\sum_{n=1}^{\infty} q_n(y) \exp(ik_n \zeta) + \text{с.с.} \right] + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_m^*(y) \exp[i(\alpha_n + \alpha)x + i(\gamma_n + \gamma)z] \quad (5.2)$$

Представление (5.2) аналогично выражению (5.1) для случая отсутствия управления с той разницей, что теперь основное течение и собственная функция периодичны по переменным x, z . Подставим (5.2) в задачу (1.1), (1.2) и линеаризуем ее по малому ε , группируя члены, соответствующие отдельным гармоникам. В результате получим краевую задачу на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} i(\alpha_n + \alpha)u_n^* + \frac{dv_n^*}{dy} + i(\gamma_n + \gamma)w_n^* &= 0 \\ i[(\alpha_n + \alpha)U + (\gamma_n + \gamma)W]u_n^* + \frac{\partial U}{\partial y}v_n^* + i(\alpha_n + \alpha)p_n^* - \frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 u_n^*}{dy^2} - [(\alpha_n + \alpha)^2 + (\gamma_n + \gamma)^2]u_n^* \right\} &= \\ = - \sum_{\substack{l+m=n \\ l \neq 0}} \left\{ i[(\alpha_n + \alpha)u_l + (\gamma_m + \gamma)w_l]u_m^* + v_l \frac{du_m^*}{dy} + \frac{\partial u_l}{\partial y}v_m^* + i\gamma_l u_l w_m^* \right\} \\ i[(\alpha_n + \alpha)U + (\gamma_n + \gamma)W]v_n^* + \frac{dp_n^*}{dy} - \frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 v_n^*}{dy^2} - [(\alpha_n + \alpha)^2 + (\gamma_n + \gamma)^2]v_n^* \right\} &= \\ = - \sum_{\substack{l+m=n \\ l \neq 0}} \left\{ i\alpha_l v_l u_m^* + \left[i(\alpha_m + \alpha)u_l + \frac{\partial v_l}{\partial y} + i(\gamma_m + \gamma)w_l \right]v_m^* + v_l \frac{dv_m^*}{dy} + i\gamma_l v_l w_m^* \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

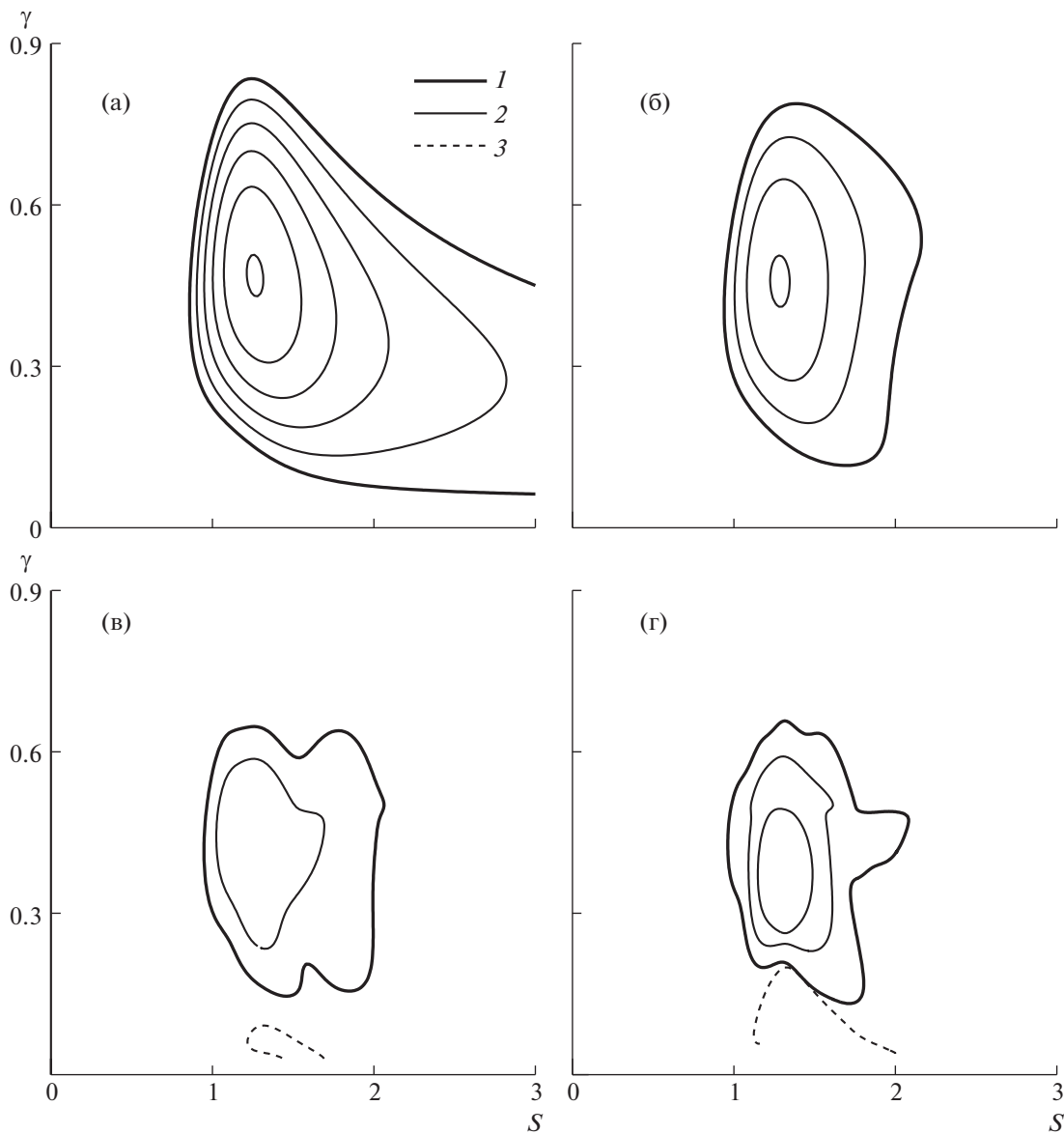


Рис. 6. Характеристики устойчивости течения: (а) – в отсутствие управления, (б, в, г) – при управлении с углами наклона актуаторов $\varphi = 75^\circ, 72^\circ, 71^\circ$ ($\Pi = 12$); 1 – кривые нейтральной устойчивости, 2 – линии уровня инкрементов нарастания с интервалом 0.001, 3 – кривые $\theta(s, \gamma) = \varphi$.

$$\begin{aligned}
 & i[(\alpha_n + \alpha)U + (\gamma_n + \gamma)W]w_n^* + \frac{\partial W}{\partial y}v_n^* + i(\gamma_n + \gamma)p_n^* - \frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 w_n^*}{dy^2} - [(\alpha_n + \alpha)^2 + (\gamma_n + \gamma)^2]w_n^* \right\} = \\
 & = - \sum_{\substack{l+m=n \\ l \neq 0}} \left\{ i\alpha_l w_l u_m^* + v_l \frac{dw_m^*}{dy} + \frac{\partial w_l}{\partial y} v_m^* + i[(\alpha_n + \alpha)u_l + (\gamma_m + \gamma)w_l]w_m^* \right\} \\
 & u_n^*(0) = v_n^*(0) = w_n^*(0) = 0, \quad q_n^*(\infty) = 0
 \end{aligned}$$

Как и при расчете основного течения, заменим конечными бесконечные суммы в правых частях уравнений (5.3). Сведем систему (5.3) к системе $6(2N_h + 1)$ дифференциальных уравнений первого порядка, используя в качестве неизвестных функций компоненты вектора $\mathbf{Z}$

$$Z_{N+1} = u_n^*, \quad Z_{N+2} = \frac{du_n^*}{dy}, \quad Z_{N+3} = v_n^*, \quad Z_{N+4} = p_n^*, \quad Z_{N+5} = w_n^*, \quad Z_{N+6} = \frac{dw_n^*}{dy}$$

$$N = 6(n + N_h), \quad -N_h \leq n \leq N_h$$

Представим $\mathbf{Z}$ в виде суммы $3(2N_h + 1)$ линейно независимых решений системы, затухающих при $y \rightarrow \infty$ (у векторов использованы верхние индексы)

$$\mathbf{Z} = \sum_{n=-N_h}^{N_h} (C_{M+1} \mathbf{Z}^{M+1} + C_{M+2} \mathbf{Z}^{M+2} + C_{M+3} \mathbf{Z}^{M+3}), \quad M = 3(n + N_h) \quad (5.4)$$

В отличие от слагаемых в левых частях уравнений (5.3), правые части быстро стремятся к 0 при $y \rightarrow \infty$, поэтому там система распадается на системы четвертого порядка для отдельных гармоник. Это позволяет при $y = y_{\max}$ задать ненулевые компоненты линейно независимых векторов в явном виде

$$\begin{aligned} Z_{N+1}^{N+1} &= i(\alpha + \alpha_n), & Z_{N+2}^{N+1} &= i(\alpha + \alpha_n)\lambda_1, & Z_{N+3}^{N+1} &= \lambda_1 \\ Z_{N+4}^{N+1} &= \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{R}, & Z_{N+5}^{N+1} &= i(\gamma + \gamma_n), & Z_{N+6}^{N+1} &= i(\gamma + \gamma_n)\lambda_1 \\ Z_{N+1}^{N+2} &= 1, & Z_{N+2}^{N+2} &= \lambda_2, & Z_{N+3}^{N+2} &= -\frac{i(\alpha + \alpha_n)}{\lambda_2} \\ Z_{N+3}^{N+3} &= -\frac{i(\gamma + \gamma_n)}{\lambda_2}, & Z_{N+5}^{N+3} &= 1, & Z_{N+6}^{N+3} &= \lambda_2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $\lambda_1 = \sqrt{(\alpha + \alpha_n)^2 + (\gamma + \gamma_n)^2}$, $\lambda_2 = \sqrt{iR[(\alpha + \alpha_n)u_e + (\gamma + \gamma_n)w_e] + \lambda_1^2}$, $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$.

Линейно независимые решения системы с начальными данными (5.5) вычислялись методом Рунге–Кутты с шагом $h_y = -0.02$ с использованием ортонормализации. Для расчета коэффициентов разложения (5.4) использовались граничные условия (5.3) при $y = 0$, в которых условие для v_0^* заменено на условие нормировки собственной функции $du_0^*/dy = 1$ при $y = 0$. Полученная линейная неоднородная алгебраическая система уравнений порядка $3(2N_h + 1)$ решалась методом Гаусса, что позволяло вычислить $v_0^* = D(\alpha; s, \gamma)$. Корень $\alpha = \alpha(s, \gamma)$ дисперсионного соотношения $D = 0$ рассчитывался методом Ньютона.

Поскольку в данной работе вычисления производились на персональном компьютере, для уменьшения времени параметрических расчетов требовалось определить минимальное количество гармоник, которое следует учитывать для достижения достаточной точности.

В качестве иллюстрации приведем пример расчета моды неустойчивости поперечного течения в точке $s = 1.2$, $\gamma = 0.6$ для околорезонансного угла наклона актуаторов $\varphi = 71^\circ$ при возрастании числа учитываемых гармоник

N_h	α
0	$-0.22211 - i 0.00210$
1	$-0.22045 - i 0.00105$
2	$-0.22050 - i 0.00045$
3	$-0.22052 - i 0.00050$
4	$-0.22052 - i 0.00052$
5	$-0.22052 - i 0.00052$

Результаты показывают, что расчеты с $N_h = 5$ заведомо обеспечивают достаточную точность.

На рис. 7 приведены зависимости инкремента нарастания от поперечного волнового числа, вычисленные для различного количества учитываемых гармоник в сечении $s = 1.2$ при углах наклона актуаторов $\varphi = 75^\circ, 72^\circ, 71^\circ$ (рис. 7а, б, в). Расчеты показывают, что для достижения адекватной точности при $\varphi = 75^\circ$ достаточно учитывать три гармоники ($N_h = 2$), а при $\varphi = 72^\circ$ – четыре ($N_h = 3$). При расчетах для $\varphi = 71^\circ$ будем полагать $N_h = 5$.

На рис. 6б, в, г показаны кривые нейтральной устойчивости и линии уровня инкремента нарастания на плоскости s, γ для углов наклона актуаторов $\varphi = 75^\circ, 72^\circ, 71^\circ$. При $\varphi = 75^\circ$ результаты

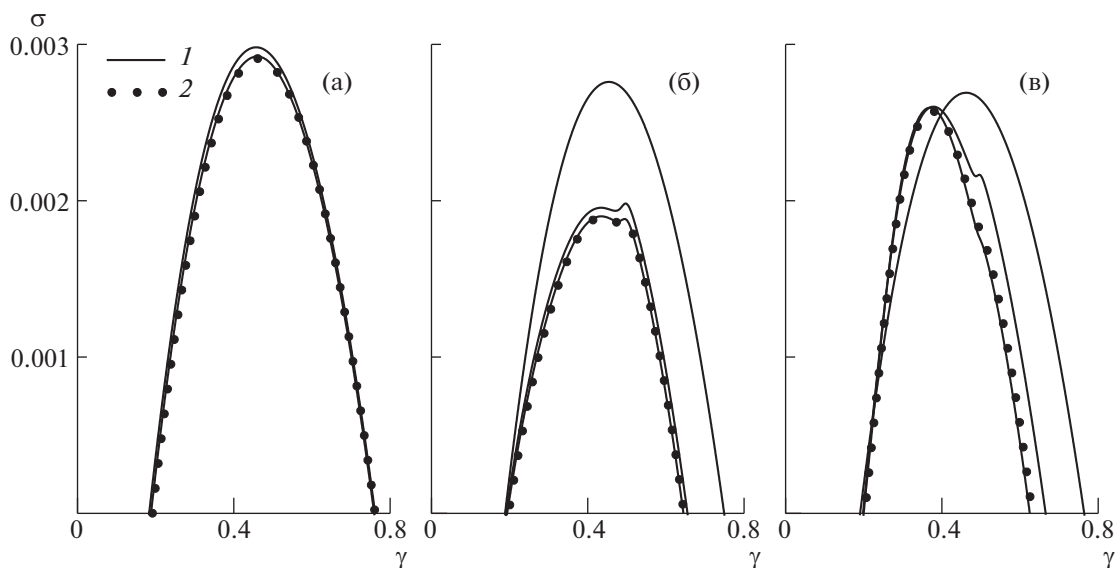


Рис. 7. Расчет инкрементов нарастания моды неустойчивости в сечении $s = 1.2$ для углов наклона актуаторов $\varphi = 75^\circ, 72^\circ, 71^\circ$ (а, б, в) ($\Pi = 12$); анализ сходимости результатов при возрастании числа учитываемых гармоник $N_h = 0, 1, 2$ (1), $N_h = 5$ (2).

мало отличаются от вычисленных в рамках линейного подхода [7]; в целом, течение оказывается чуть более устойчивым. Максимальное значение инкремента $\sigma_m = 3.08 \times 10^{-3}$ достигается в точке $s_m = 1.28$, $\gamma_m = 0.46$. Точка потери устойчивости ($s_c = 0.94$, $\gamma_c = 0.41$) по сравнению со случаем отсутствия воздействия смещена вправо и немного вниз. При $s > 2.16$ течение вновь становится устойчивым по отношению к возмущениям рассматриваемого типа. Здесь целесообразно прекращать управление, поскольку уже отсутствует первопричина формирования поперечного течения — разгон потока.

Расчеты, проведенные для $\varphi = 72^\circ$ (рис. 6в), дают неожиданный результат. По сравнению со случаем $\varphi = 75^\circ$ максимальная скорость осредненного поперечного течения повышается на 1%, абсолютный максимум V_{cf} — на 20%, колебательная составляющая скорости больше в несколько раз (см. рис. 3, 5), а неустойчивость управляемого течения существенно снижается ($\sigma_m = 2 \times 10^{-3}$ в точке $s_m = 1.26$, $\gamma_m = 0.42$). По-видимому, эффект аналогичен обнаруженному экспериментально в [11]. Там наблюдалась стабилизация разгонного течения со скольжением, достигаемая с помощью искусственно организованной модуляции течения вдоль размаха. Роль управляющего воздействия играла слабо нарастающая система вихрей неустойчивости поперечного течения, генерируемая периодической последовательностью неровностей. В данной работе аналогичную роль играет поперечная модуляция течения, вызываемая околорезонансным воздействием системы актуаторов.

При $\varphi = 71^\circ$ стабилизирующий эффект поперечной модуляции течения становится менее явным. Хотя размер области неустойчивости уменьшается (рис. 6г), максимальное значение инкремента нарастания увеличивается ($\sigma_m = 2.88 \times 10^{-3}$ при $s_m = 1.29$, $\gamma_m = 0.36$). По сравнению со случаем $\varphi = 75^\circ$, при $\varphi = 72^\circ, 71^\circ$ положение точки потери устойчивости меняется незначительно: $s_c = 0.95, 0.96$ и $\gamma_c = 0.42, 0.43$ соответственно.

Выпишем условие, эквивалентное условию совпадения угла наклона актуаторов φ с углом наклона осей вихрей неустойчивости θ :

$$\operatorname{Re} \alpha(s, \gamma) = -\gamma \operatorname{ctg} \varphi \quad (5.6)$$

Точки плоскости s, γ , удовлетворяющие условию (5.6), показаны на рис. 6 (линии 3). На рис. 6б, соответствующем системе управления с $\varphi = 75^\circ$, резонансная кривая (5.6) отсутствует, поэтому система генерирует слабую модуляцию течения, описываемую линейной теорией [7]. При $\varphi = 72^\circ, 71^\circ$ кривая (5.6) возникает в нижней части рис. 6в, г и приближается к линии $\gamma = \gamma_1 \approx 0.5$ с уменьшением φ , вызывая резонансный рост модуляции течения (см. рис. 5).

При усилении модуляции управляемого течения могут развиваться новые типы неустойчивости, для обнаружения которых используемый метод непригоден (сходимость метода Ньютона чувствительна к точности задания начального значения α). Дискретизация задачи устойчивости по переменной y с последующим сведением ее к задаче расчета собственных значений матрицы также мало эффективна из-за чрезвычайно большого размера получаемой матрицы. Кроме того, расчет таким методом порождает бесконечное множество ложных мод: моде в точке γ с волновым числом α соответствуют ложные моды в точке $\gamma + \gamma_m$ с волновыми числами $\alpha + \alpha_m$ и смещенными на $-n$ номерами гармоник собственной функции. Именно по этой причине данное исследование ограничивалось только расчетами характеристик стационарной моды неустойчивости поперечного течения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретически исследован процесс управления течением в пространственном пограничном слое на стреловидном крыле с помощью объемной силы, моделирующей действие периодической последовательности плазменных актуаторов.

Рассчитаны параметры управляемых течений для различных углов наклона актуаторов и периодов их расстановки. Вычисления проведены в рамках параболизированной системы уравнений Навье—Стокса. Особое внимание уделено околорезонансной конфигурации системы управления, когда направление актуаторов близко направлению осей вихрей неустойчивости поперечного течения.

Изучены характеристики устойчивости течений, модулированных управляющим силовым воздействием. Показано, что повышенная модуляция управляемого течения, вызванная околорезонансным воздействием, может приводить к дополнительному ослаблению неустойчивости течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gray W.E. The effect of wing sweep on laminar flow // RAE TM Aero. 1952. № 255.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Наука, 1974. 711 с.
3. Курячий А.П. Управление поперечным течением в трехмерном пограничном слое с помощью объемного пространственно-периодического силового воздействия // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 2. С. 71–79.
4. Yadala S., et al. Experimental control of swept-wing transition through base-flow modification by plasma actuators // J. Fluid Mech. 2018. V. 844. 11 p.
5. Мануйлович С.В. Объемные воздействия, устраняющие поперечное течение в ламинарном пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 3. С. 87–98.
6. Баранов С.А., и др. Ослабление неустойчивости поперечного течения в трехмерном пограничном слое с помощью многоразрядной актуаторной системы // Докл. РАН. 2019. Т. 488. № 2. С. 147–152.
7. Мануйлович С.В. Устойчивость и восприимчивость течения в пограничном слое на стреловидном крыле, управляемого периодической последовательностью плазменных актуаторов // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 5. С. 34–48.
8. Deyhle H., Bippes H. Disturbance growth in an unstable three-dimensional boundary layer and its dependence on environmental conditions // J. Fluid Mech. 1996. V. 316. P. 73–113.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
10. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.
11. Saric W.S., Carillo R.B.J., Reibert M.S. Leading edge roughness as a transition control mechanism // AIAA paper. 1998. № 98–0781.