

УДК 532.526.2

## ОБ ОБТЕКАНИИ ПОЛУТЕЛА ВРАЩЕНИЯ РЭНКИНА

© 2023 г. Г. Л. Королев<sup>a,\*</sup>, Вик. В. Сычёв<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

\*E-mail: glk777@mail.ru

Поступила в редакцию 20.08.2022 г.

После доработки 10.10.2022 г.

Принята к публикации 11.10.2022 г.

Исследовано осесимметричное течение несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса около полутела вращения Рэнкина. Установлено, что в решении задачи для системы уравнений пограничного слоя линии нулевого поверхностного трения не возникает. Рассмотренное течение является безотрывным, что находится в полном соответствии с имеющимся экспериментальным результатом.

*Ключевые слова:* решение Рэнкина, пограничный слой, отрыв

**DOI:** 10.31857/S0568528122600576, **EDN:** NSYFUF

При рассмотрении обтекания тонкого тела вращения при больших числах Рейнольдса  $Re \rightarrow \infty$  течение в масштабах последнего описывается решением краевой задачи теории малых возмущений (см. [1, 2]). Оно становится несправедливым вблизи передней точки торможения [3, 4]. В настоящей работе изучено осесимметричное течение в пограничном слое, который развивается в малой окрестности этой точки для сильно затупленного тела.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим осесимметричное установившееся течение несжимаемой жидкости около тонкого тела вращения, установленного под нулевым углом атаки к однородному набегающему потоку.

Введем следующие обозначения:  $\ell x$ ,  $\ell r$ , – оси цилиндрической системы координат;  $u_\infty$ ,  $u_\infty v$  – соответствующие проекции вектора скорости;  $p_\infty + \rho^* u_\infty^2$  – давление;  $\ell^2 u_\infty \psi$  – функция тока;  $Re = u_\infty \ell / \nu^*$  – число Рейнольдса. Здесь  $\ell$  – продольный размер тела;  $u_\infty$  и  $p_\infty$  – абсолютная величина вектора скорости и значение давления в набегающем потоке, направленном вдоль оси  $Ox$ ;  $\rho^*$  – плотность,  $\nu^*$  – кинематический коэффициент вязкости. Поместим начало системы координат на оси симметрии в малой окрестности передней критической точки.

Пусть  $r = \tau f(x)$ ,  $0 < x < 1$  и  $f(x)$  – гладкая функция, определяющая форму поверхности тела в меридиональной плоскости. При этом  $\tau$  – малый параметр:  $\tau = \tau(Re) \rightarrow 0$  при  $Re \rightarrow \infty$ . Предположим, что носовая часть тела имеет степенную форму

$$f(x) = a_0 x^\alpha + o(x^\alpha) \quad (1.1)$$

при  $x \rightarrow +0$ ,  $a_0 > 0$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ . Согласно результатам теории малых возмущений, как для плоских [3–5], так и осесимметричных течений [1], асимптотические разложения решений теряют свою равномерную пригодность при  $x = O(\tau^\lambda)$ ,  $r = O(\tau^\lambda)$ ,  $\lambda = (1 - \alpha)^{-1}$ . Изменения скорости и давления здесь суть величины порядка единицы. Тогда асимптотическое представление решения в этой области имеет вид

$$\begin{aligned} X = \tau^{-\lambda} x = O(1), \quad R = \tau^{-\lambda} r = O(1) \\ (u, v, p) = (U, V, P) + o(1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рассмотрим течение для предельного случая, когда в (1.1) значение  $\alpha = 0$ .

Подстановка (1.2) в систему уравнений Навье–Стокса при условии, что локальное число Рейнольдса  $Re^* = \tau^\lambda Re \rightarrow \infty$  при  $Re \rightarrow \infty$  ( $\lambda = 1$ ), приводит к уравнению для потенциального течения идеальной жидкости

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 0, \quad U = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R}, \quad V = \frac{\partial \Phi}{\partial R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (1.3)$$

где  $\Psi(X, R)$  и  $\Phi(X, R)$  – функция тока и потенциал течения в рассматриваемой области. Пусть последнее описывается здесь решением Рэнкина [6], которое есть сумма потенциалов однородного потока и источника, помещенного (для простоты) в точку  $X = R = 0$

$$\begin{aligned} \Phi &= X - \frac{Q_0}{4\pi\rho}, \quad U = 1 + \frac{Q_0 X}{4\pi\rho^3} \\ \Psi &= \frac{R^2}{2} - \frac{Q_0 X}{4\pi\rho}, \quad \rho = (X^2 + R^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $Q_0$  – обильность источника. Нетрудно видеть, что на оси симметрии находится точка торможения

$$U(X, 0) = 1 + \frac{Q_0 X}{4\pi|X|^3} = 0, \quad X = X_0 = -\left(\frac{Q_0}{4\pi}\right)^{1/2} \quad (1.5)$$

Тогда поверхность тока, проходящая через эту точку, согласно (1.4), (1.5), есть

$$\Psi = \frac{R^2}{2} - \frac{Q_0 X}{4\pi\rho} = \frac{Q_0}{4\pi} \quad (1.6)$$

Введем сферические координаты  $\rho, \theta$

$$\rho = (X^2 + R^2)^{1/2}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{R}{X}\right) \quad (1.7)$$

Приняв (1.6) за поверхность обтекаемого тела и введя для нее обозначение  $R = G(X)$ , имеем

$$G^2 = \frac{Q_0}{2\pi} \left( \frac{X}{(X^2 + G^2)^{1/2}} + 1 \right) \quad (1.8)$$

или, используя (1.6), (1.7), запишем соответствующие уравнения в параметрической форме

$$\begin{aligned} X &= x_0(t) = -r_0(t) \operatorname{ctgt}, \quad t = \pi - \theta, \quad 0 \leq t < \pi \\ R &= r_0(t) = \left(\frac{Q_0}{2\pi}\right)^{1/2} (1 - \cos t)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Наконец, из (1.3), (1.4), (1.6)–(1.9) следует (см. [7]), что скорость  $U_s(t)$  вдоль поверхности тока  $\Psi = Q_0/4\pi$  есть

$$U_s = \left( \frac{1}{2}(1 - \cos t) + \frac{3}{4} \sin^2 t \right)^{1/2} \quad (1.10)$$

При  $X \rightarrow \infty$ , согласно (1.8), (1.9),  $G \rightarrow (Q_0/\pi)^{1/2}$ , т.е.  $a_0 = (Q_0/\pi)^{1/2}$  (см. (1.1))

Замена  $X = Q_0^{1/2} X^0$ ,  $R = Q_0^{1/2} R^0$ ,  $\Phi = Q_0^{1/2} \Phi^0$ ,  $\Psi = Q_0 \Psi^0$  в (1.4) исключает постоянную  $Q_0$ . Вариация этого параметра приводит лишь к изменению масштаба течения в целом. Поэтому, не ограничивая общности, будем полагать  $Q_0 = 1$ .

График функции  $G(X)$  (см. [6]) дан на рис. 1. На рис. 2 представлена функция  $U_e(s) = U_s(t)$  из (1.10), где  $s$  – длина дуги, отсчитываемая от точки торможения вдоль поверхности тела в меридиональной плоскости

$$s(t) = \int_0^t (x_0'^2 + r_0'^2)^{1/2} dt^0 \quad (1.11)$$

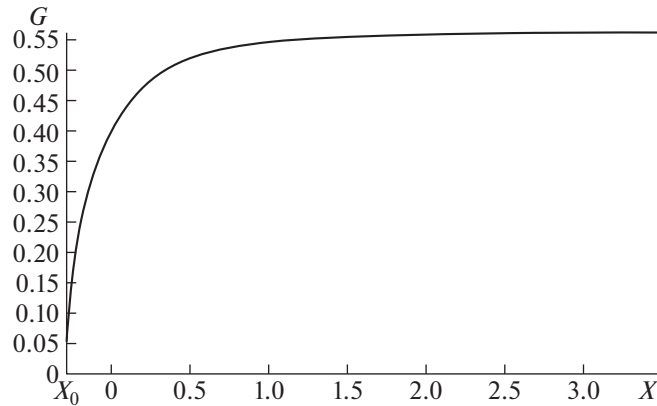


Рис. 1. Контур полутела Рэнкина в меридиональной плоскости.

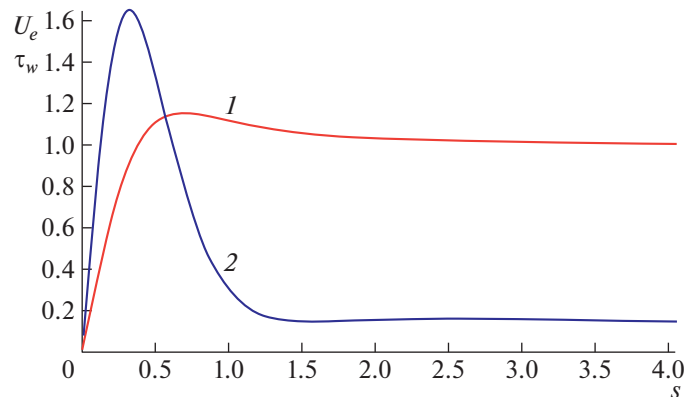


Рис. 2. Касательная составляющая вектора скорости  $U_e(s)$  (1) и распределение трения  $\tau_w(s)$  (2) вдоль поверхности тела.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Для удовлетворения условию прилипания на поверхности тела в области, где  $x = O(\tau)$ ,  $r = O(\tau)$ , введем пограничный слой. Пусть  $s, n$  ортогональная криволинейная система координат, связанная здесь с поверхностью тока  $\Psi = Q_0/4\pi$ ,  $\Psi = \tau^{-2}\psi$ . Для пограничного слоя, как обычно [8]

$$s = O(1), \quad n = \text{Re}^{*-1/2} N, \quad \Psi = \frac{Q_0}{4\pi} + \text{Re}^{*-1/2} \Psi_0(s, N) + o(\text{Re}^{*-1/2})$$

$$U_0 \frac{\partial U_0}{\partial s} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial N} - U_e \frac{dU_e}{ds} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial N^2} \tag{2.1}$$

$$R_0 U_0 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial N}, \quad R_0 V_0 = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial s}$$

где  $R_0(s) = G(X)$  – расстояние точки на поверхности тела от оси симметрии.

Преобразование Степанова–Манглера

$$\xi = \int_0^s R_0^2 ds^0, \quad \eta = R_0 N, \quad \Psi_0 = \psi_0(\xi, \eta), \quad U_e = u_e(\xi) \tag{2.2}$$

приводит (2.1) к виду, соответствующему плоскому течению

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \eta^2} - u_e \frac{du_e}{d\xi} = \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial \eta^3} \quad (2.3)$$

$$\eta = 0: \Psi_0 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \eta} = 0, \quad \eta \rightarrow \infty: \frac{\partial \Psi_0}{\partial \eta} \rightarrow u_e(\xi)$$

Здесь также приведены краевые условия прилипания на поверхности и срачивания с решением в области, где  $X = O(1)$ ,  $R = O(1)$ .

Рассмотрим решение вблизи точки торможения  $s = n = 0$ . Согласно (1.9)–(1.11), при  $s \rightarrow 0$ :  $R_0 = s + O(s^3)$ ,  $U_e = q_0 s + O(s^3)$ ,  $q_0 = 2(\pi/Q_0)^{1/2}$ . Тогда течение в пограничном слое при  $s \rightarrow 0$  описывается известным решением Хомана [9]. Это решение в переменных  $\xi$ ,  $\eta$  имеет вид

$$u_e = q_0(3\xi)^{1/3} + O(\xi), \quad \Psi_0 = (3^{4/3} q_0/2)^{1/2} \xi^{2/3} h(\xi) + O(\xi^{5/3})$$

$$\zeta = (2 \cdot 3^{-2/3} q_0)^{1/2} \eta/\xi^{1/3}, \quad \xi \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

$$h''' + hh'' + \frac{1}{2}(1 - h^2) = 0, \quad h(0) = h'(0) = 0, \quad h'(\infty) = 1$$

Решение задачи для уравнения в (2.4), относящегося к типу Фолкнера-Скан, дано в [9] (см. также [8]).

Заметим, что при  $s = O(\text{Re}^{*-1/2})$ ,  $n = O(\text{Re}^{*-1/2})$  течение описывается точным решением [9] системы уравнений Навье–Стокса.

Численное решение задачи (2.3), (2.4) было получено после следующего представления

$$\mu = \xi^{1/3}, \quad \nu = (2q_0)^{1/2} (3\xi)^{-1/3} Q_e^{1/2}(\mu)\eta$$

$$u_e = q_0(3\xi)^{1/3} Q_e(\mu), \quad \Psi_0 = \left(\frac{q_0}{2}\right)^{1/2} (3\xi)^{2/3} Q_e^{1/2}(\mu)F(\mu, \nu) \quad (2.5)$$

которое учитывает особое поведение в (2.4) и, в силу регулярности  $F(\mu, \nu)$  при  $\mu \rightarrow 0$ , позволяет проводить расчет от сечения  $\mu = 0$ . В результате внесения (2.5) в (2.3), (2.4) приходим к задаче

$$\frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial F}{\partial \nu} \frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial \nu} - \frac{\partial F}{\partial \mu} \frac{\partial^2 F}{\partial \nu^2} \right) - \frac{\mu Q_e'}{4 Q_e} \left( F \frac{\partial^2 F}{\partial \nu^2} - 2 \left( \frac{\partial F}{\partial \nu} \right)^2 + 2 \right) + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial F}{\partial \nu} \right)^2 - 1 \right) - F \frac{\partial^2 F}{\partial \nu^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial \nu^3}$$

$$\nu = 0: F = \frac{\partial F}{\partial \nu} = 0, \quad \nu \rightarrow \infty: \frac{\partial F}{\partial \nu} \rightarrow 1, \quad F(0, \nu) = h(\nu)$$

На рис. 2 представлен график функции

$$\tau_w(s) = \frac{\partial U_0}{\partial N} \Big|_{N=0} = (2q_0^3)^{1/2} R_0(s) Q_e^{3/2} \frac{\partial^2 F}{\partial \nu^2} \Big|_{\nu=0}$$

которая определяет поверхностное трение согласно (2.1), (2.2), (2.5). Оказалось, что, как и в случае плоского течения около полутела Рэнкина [10],  $\tau_w(s)$  всюду положительна, несмотря на существование интервала  $s$ , где градиент давления неблагоприятен. Точки  $s = 1.526$  и  $s = 2.467$  являются для нее точками слабо выраженных минимума и максимума. При  $s \rightarrow \infty$  решение задачи имеет асимптотику Прандтля-Блазиуса:  $\tau_w = O(s^{-1/2})$ .

Таким образом обтекание полутела вращения Рэнкина является безотрывным, что находится в соответствии с экспериментальным результатом Верле [11] (см. [12]), полученным путем визуализации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ показал, что обтекание при больших числах Рейнольдса полутела вращения в форме Рэнкина является безотрывным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Van Dyke M.D.* Second-order slender-body theory – axisymmetric flow // NASA Tech. Rep. 1959. R-47. 26 p.
2. *Cole J.D.* Perturbation methods in applied mathematics. Waltham: Blaisdell, 1968. 260 p.
3. *Jones R.T.* Leading-edge singularities in thin-airfoil theory // J. Aeronaut. Sci. 1950. V. 17. № 5. P. 307–310.
4. *Van Dyke M.D.* Second-order subsonic airfoil theory including edge effects // NASA Rep. 1956. № 1274. 23 p.
5. *Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics. Stanford: Parabolic Press, 1975. 271 p.
6. *Rankine W.J.M.* On the mathematical theory of stream-lines, especially those with four foci and upwards // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1871. V. 161. Pt. II. P. 267–306.
7. *Сычев В.В., Башкин В.А.* Лекции по теоретической гидродинамике. Ч. I. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2003. 188 с.
8. *Rosenhead L.* (Ed.) Laminar boundary layers. Oxford: Clarendon Press, 1963, 688 p.
9. *Homann F.* Der Einfluß großer Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel // ZAMM. 1936. Bd. 16. H. 3. S. 153–164.
10. *Королев Г.Л., Сычев Вик. В.* О пограничном слое при обтекании полутела Рэнкина // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 6. С. 62–65.
11. *Werlé H.* Le décollement sur les corps de révolution à basse vitesse // La Rech. Aéron. 1962. № 90. P. 3–14.
12. *Van Dyke M.* An album of fluid motion. Stanford: Parabolic Press, 1982. 176 p.