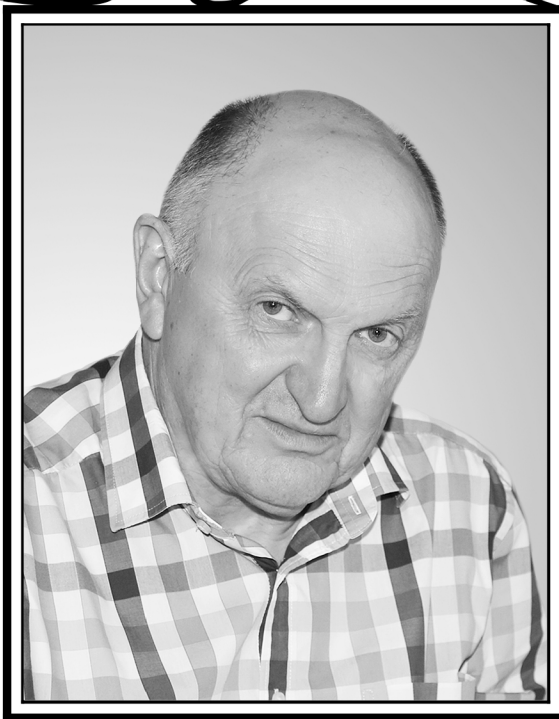


Прикладная Дифференциальная Динамика



3
2025

*70 лет Сергею Аполлоновичу Никитову
(23 апреля 1955 года)*

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

М. В. Сысоева, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

О. И. Канаков, д.ф.-м.н., ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

А. Люттйоханн, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

И. И. Мохов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

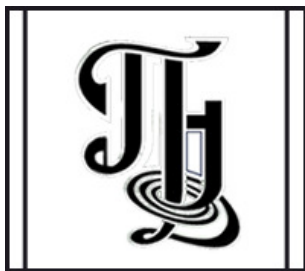
Е. Я. Фрисман, чл.-корр. РАН, д.б.н., профессор, ИКАРП ДВО РАН (Биробиджан, Россия)

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А. (Саратов, Россия)

В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Издатель Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Журнал «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-77991 от 20 марта 2020 года

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписной индекс издания 73498. Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Свободная цена

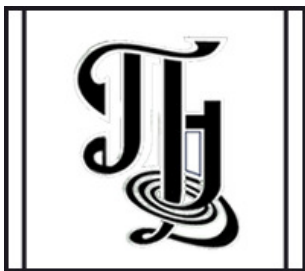
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией А. А. Грищенко
Редакторы: А. Р. Нигметулина, А. В. Князева
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (927) 625-9020,
e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 12.05.2025
Вышел в свет 30.05.2025
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 16.74 (18,0)
Тираж 100 экз. Заказ № 68-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The journal “Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics” is registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Registration ПИ No ФС77-77991 of 20 March 2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

The journal subscription index is 73498. A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru). Free price

The journal is Open Access

Head of Editorial office A. A. Grishchenko
Editors: A. R. Nigmatulina, A. V. Knyazeva
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (927) 625-9020,
e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 12.05.2025. Published 30.05.2025
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 16.74 (18,0)
Edition of 100 copies. Order No. 68-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

Бутов О. В., Дмитриев А. С. 70 лет Сергею Аполлоновичу Никитову 287

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Аринушкин П. А., Куприянов В. Д., Вадивасова Т. Е. Влияние гауссовского шума и шума Леви на фазовую динамику ансамбля Курамото-подобных осцилляторов первого и второго порядка 289

Самойленко К. Д., Митрофанова А. Ю., Сафин А. Р., Никитов С. А. Влияние топологии связанных антиферромагнитных осцилляторов на их взаимную синхронизацию 307

Комков П. С., Пыхтунов Д. С., Романенко Д. В., Скороходов В. Н., Гришин С. В. Когерентный резонанс в микроволновых генераторах хаоса 322

Говорухин В. Н., Гончаров Б. К. Сценарии переноса пассивных частиц в поле скорости пары точечных вихрей при наличии сдвигового потока 341

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

Головина А. А., Яхно В. Г. Упрощенные модели для описания многозадачных режимов в живых распознающих системах 361

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Дик О. Е. Применение методов моделирования фазовой динамики и рекуррентности для оценки характеристик взаимосвязи между физиологическими ритмами 381

Сельский А. О., Емельянова Е. П., Дроздева Е. Е. Маркеры состояния пациентов после ортодонтического воздействия: применение рекуррентного анализа к данным ЭЭГ, полученным при выполнении когнитивных тестов 399

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г. Динамика кинка в модели φ^4 с двумя протяженными примесями 412

C O N T E N T S

EDITORIAL

<i>Butov O. V., Dmitriev A. S.</i> On the 70th anniversary of Sergei A. Nikitov.....	287
--	-----

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Arinushkin P. A., Kupriyanov V. D., Vadivasova T. E.</i> Influence of Gaussian noise and Levy noise on the phase dynamics of the ensemble of Kuramoto-like oscillators of first and second order	289
<i>Samoylenko K. D., Mitrofanova A. Yu., Safin A. R., Nikitov S. A.</i> Influence of the topology of coupled antiferromagnetic oscillators on their mutual synchronization	307
<i>Komkov P. S., Pykhtunov D. S., Romanenko D. V., Skorokhodov V. N., Grishin S. V.</i> Coherent resonance in the microwave chaos generators	322
<i>Govorukhin V. N., Goncharov B. K.</i> Scenarios of passive particle transport in the velocity field of a vortex pair in shear flow	341

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

<i>Golovina A. A., Yakhno V. G.</i> Simplified models for describing multitasking modes in living recognition systems	361
---	-----

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

<i>Dick O. E.</i> Application of phase dynamics modeling and recurrence methods to assess the characteristics of the relationship between physiological rhythms.....	381
<i>Selskii A. O., Emelyanova E. P., Drozhdeva E. E.</i> Markers of patients' condition after orthodontic treatment: application of recurrent analysis to EEG data obtained during cognitive tests	399

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

<i>Fakhretdinov M. I., Ekomasov E. G.</i> Kink dynamics in the φ^4 model with two extended impurities.....	412
--	-----



70 лет Сергею Аполлоновичу Никитову

О. В. Бутов, А. С. Дмитриев✉

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия

E-mail: fot@cplire.ru, ✉chaos@cplire.ru

Поступила в редакцию 15.04.2025, опубликована 30.05.2025

Для цитирования: Бутов О. В., Дмитриев А. С. 70 лет Сергею Аполлоновичу Никитову // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. 287–288. DOI: 10.18500/0869-6632-003178. EDN: WEBFVR

For citation: Butov OV, Dmitriev AS. On the 70th anniversary of Sergei A. Nikitov. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3):287–288. DOI: 10.18500/0869-6632-003178

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

23 апреля 2025 года исполнилось 70 лет выдающемуся ученому в области твердотельной электроники, академику Российской академии наук Сергею Аполлоновичу Никитову.

Сергей Аполлонович родился в городе Бердичеве Житомирской области Украинской ССР в не самом простом для страны 1955 году. Его родители, оба участники Великой Отечественной войны, нашли свой дом и работу в этом городе после демобилизации, пронесли в своей жизни и воспитали в своих детях гордость за страну, надежду на будущее и стремление к знаниям.

После окончания средней школы № 2 в родном городе Сергей Аполлонович поступил на факультет физической и квантовой электроники Московского физико-технического института (МФТИ), который он успешно окончил в 1979 году. В том же году он поступает в аспирантуру МФТИ, которую оканчивает в 1982 году, и защищает кандидатскую диссертацию, выполненную под научным руководством Ю. В. Гуляева. В дальнейшем их долгие годы связывают дружба и общие научные интересы.

После защиты диссертации С. А. Никитов был приглашен на работу во Фрязинскую часть Института радиотехники и электроники АН СССР (ИРЭ). Его быстрый научный и профессиональный рост вполне отражает его серьезный вклад в те направления исследований, в которых ему приходилось участвовать. Уже в 1985 году он становится старшим научным сотрудником, а в 1991 защищает докторскую диссертацию. В 1995 году Сергей Аполлонович получает звание профессора и должность главного научного сотрудника, а также возглавляет лабораторию магнитных и оптических явлений в тонкопленочных гетероструктурах в Московской части ИРЭ, теперь уже Российской академии наук (ИРЭ РАН).

В 2002 году С. А. Никитов был назначен на должность заместителя директора ИРЭ РАН, а в 2014 году стал директором Института. Но его истинная сила в научной работе, которую он проводит, и в ученых, которых он вдохновляет. Сергей Аполлонович продолжает традицию выдающихся советских и российских исследователей в области радиотехники и электроники, выдвигая новые научные идеи и реализуя проекты, которые вносят существенный вклад в развитие науки в России и за рубежом.

Сергей Аполлонович обладает особенным чутьем на молодые таланты и особой способностью увлечь их наукой. В его лаборатории и других научных группах Института работает большое число привлеченных им молодых и талантливых студентов, аспирантов, кандидатов наук.

Научные интересы Сергея Аполлоновича охватывают широкий спектр областей, связанных с твердотельной электроникой, фотоникой, магнитоэлектроникой, биофизикой. Его работы легли в основу современной спинтроники и магноники, им было создано и развито новое направление по исследованию нелинейных процессов в тонкопленочных магнитных гетероструктурах.

С. А. Никитов привнес значимый вклад в разработку целого ряда новых устройств функциональной электроники.

В последние 10 лет С. А. Никитов со своими учениками решил несколько важных задач в теории дискретных конечномерных магнитных структур. В эти же годы исследованы новые резонансные и нелинейные эффекты в гетероструктурах на основе магнитных кристаллов и слоёв, а также механизмы совместного влияния связи, периодичности и взаимодействий разной физической природы. С. А. Никитов со своими учениками и коллегами развивает новое направление — терагерцовую спинтронику на основе антиферромагнитных материалов, а также применение принципов спинтроники в сверхпроводниковой электронике. Полученные результаты представляют не только фундаментальный, но и практический интерес, который обусловлен возможностью создания новых устройств СВЧ-электроники, широкополосных и сверхширокополосных нелинейных функциональных устройств ферро- и антиферромагнитной спинтроники и магноники.

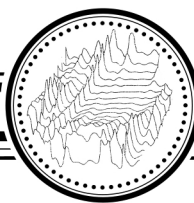
В 2003 году Сергей Аполлонович Никитов был избран членом-корреспондентом РАН по Отделению нанотехнологий и информационных технологий (ОНИТ РАН), а в 2022 году — действительным членом (академиком) Российской академии наук.

В его активе более шестисот статей в ведущих научных журналах мира, 4 монографии и более 40 патентов на изобретения. Ежегодно он принимает участие в престижных международных конференциях, часто возглавляя их программные комитеты. Он активно сотрудничает с зарубежными коллегами, что помогает интегрировать российскую науку в международное научное сообщество.

С. А. Никитов был удостоен многих наград и премий, среди которых премия комсомола Подмосковья (1981), премия Ленинского комсомола (1984), премия Правительства РФ (2009), медаль ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени (2021), Благодарность Президента Российской Федерации (2024). Его заслуги признаны не только в России, но и за рубежом, что делает его одним из самых уважаемых ученых в своей области. С. А. Никитов является лауреатом премии Гумбольдта (Германия, 1984) и почетным доктором университета Поля Сабатье (Тулуза, Франция).

70 лет, без малого полвека из которых отданы науке, — это целая эпоха, наполненная открытиями, исследовательским духом и непрерывным стремлением к новому знанию.

*Коллектив Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
и редакция журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика»
сердечно поздравляют Сергея Аполлоновича с юбилеем и желают ему
долгих лет жизни, здоровья и новых творческих свершений!*



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003145
EDN: BWJHNL

Влияние гауссовского шума и шума Леви на фазовую динамику ансамбля Курамото-подобных осцилляторов первого и второго порядка

П. А. Аринушкин¹✉, В. Д. Куприянов², Т. Е. Вадивасова²

¹ООО «ТатИТнефть» Центр компетенции искусственного интеллекта, Альметьевск, Россия

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉arinushkin.pavel@gmail.com, kuprijn@mail.ru, vadivasovate@yandex.ru

Поступила в редакцию 6.08.2024, принята к публикации 18.09.2024,
опубликована онлайн 2.12.2024, опубликована 30.05.2025

Аннотация. Цель настоящего исследования — определить порог устойчивости динамических режимов ансамбля фазовых Курамото-подобных осцилляторов, описывающего поведение простой модели энергосети с кольцевой топологией, при внешнем воздействии гауссовского шума и шума Леви, провести оценку результатов и определить пороговые значения шума, при которых рассмотренная динамическая модель является наиболее чувствительной к шумовому воздействию и демонстрирует смену установившегося режима. **Методы.** В данной работе исследуются два ансамбля Курамото-подобных фазовых осцилляторов с одинаковой топологией, но различным количеством осцилляторов. При этом ансамбли состоят из фазовых осцилляторов второго и первого порядка, моделирующих динамику генераторов и потребителей в энергосети соответственно. В работе рассчитываются и используются карты режимов, из которых выбираются области с различной синхронной динамикой. В выбранных областях фиксируется набор начальных условий и производится моделирование исследуемого ансамбля в присутствии шума разного типа и интенсивности. Полученный результат оценивается с помощью рассчитанных пространственно-временных диаграмм, значений параметра Курамото и статистических характеристик, оцененных по реализациям колебаний во времени. **Результаты.** Показано, что в модели энергосети, состоящей из Курамото-подобных фазовых осцилляторов, наблюдается различная устойчивость к внешним воздействиям шумового характера в зависимости от типа шумового воздействия и установившегося динамического режима. Было продемонстрировано, что режим частотной синхронизации всех осцилляторов, не зависящий от начальных условий, является нечувствительным к воздействию белого шума большой интенсивности, как гауссовского шума, так и шума Леви. Тогда как в области сосуществования синхронного и асинхронного поведения, зависящего от начальных условий, наблюдается смена фазовой динамики под действием различного шума. Численный эксперимент показал, что модель энергосети более чувствительна к шуму Леви из-за особенностей шума, связанных со случайными выбросами, которые, в свою очередь, можно трактовать как случайные импульсные воздействия. **Заключение.** В модели энергосети, представленной двумя ансамблями, состоящими из разного числа Курамото-подобных фазовых осцилляторов второго и первого порядка, установлены различные режимы частотной и фазовой динамики осцилляторов. Для полученных режимов проведен численный эксперимент с воздействием гауссовского шума и шума Леви. Показано, что исследуемая модель является более чувствительной к шуму Леви, воздействие которого ведет к смене динамического режима за счет влияния сильных случайных импульсов.

Ключевые слова: энергосети, фазовые осцилляторы, осцилляторы Курамото, нелинейная связь, фазовая синхронизация, шумовое воздействие, гауссовский шум, шум Леви.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-12-00119).

Для цитирования: Аринушкин П. А., Куприянов В. Д., Вадивасова Т. Е. Влияние гауссовского шума и шума Леви на фазовую динамику ансамбля Курамото-подобных осцилляторов первого и второго порядка // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. 289–306. DOI: 10.18500/0869-6632-003145. EDN: BWJHHL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003145

Influence of Gaussian noise and Levy noise on the phase dynamics of the ensemble of Kuramoto-like oscillators of first and second order

Arinushkin P. A.¹✉, Kupriyanov V. D.², Vadivasova T. E.²

¹TatITneft LLC Artificial Intelligence Competence Center, Almet'yevsk, Russia

²Saratov State University, Russia

E-mail: ✉arinushkin.pavel@gmail.com, kuprijn@mail.ru, vadivasovate@yandex.ru

Received 6.08.2024, accepted 18.09.2024, available online 2.12.2024, published 30.05.2025

Abstract. The purpose of this study is to determine the stability threshold of the dynamic modes of the ensemble of phase Kuramoto-like oscillators, describing the behavior of a simple power grid model with a ring topology, under the external influence of Gaussian noise and Levy noise, to evaluate the results and determine the threshold values of noise at which the considered dynamic model is the most sensitive to noise and demonstrates a change of the steady state. **Methods.** In this paper, two ensembles of Kuramoto-like phase oscillators with the same topology but different number of oscillators are investigated. The ensembles consist of second and first order phase oscillators modeling the dynamics of generators and consumers in the power grid, respectively. In this work, maps of the regimes are computed and used, from which regions with different synchronous dynamics are selected. In the selected regions, a set of initial conditions is fixed and the ensemble under study is modeled in the presence of noise of different types and intensities. The obtained result is evaluated with the help of calculated spatio-temporal diagrams, values of the Kuramoto parameter and statistical characteristics estimated from the realizations of oscillations in time. **Results.** It has been shown that a power grid model consisting of Kuramoto-like phase oscillators exhibits different robustness to external noise disturbances depending on the type of noise disturbance and the steady-state dynamic regime. It was demonstrated that the frequency synchronization mode of all oscillators, independent of the initial conditions, is insensitive to the influence of white noise of high intensity, both Gaussian and Levy noise. Whereas, in the region of coexistence of synchronous and asynchronous behavior, depending on the initial conditions, a change of phase dynamics under the influence of different noise is observed. Numerical experiment has shown that the power grid model is more susceptible to Levy noise due to the noise features associated with random bursts, which in turn can be interpreted as random impulses. **Conclusion.** In a power grid model represented by two ensembles consisting of different numbers of Kuramoto-like phase oscillators of second and first order, different modes of frequency and phase dynamics of the oscillators are established. A numerical experiment with the influence of Gaussian noise and Levy noise is carried out for the obtained modes. It is shown that the model under study is more sensitive to Levy noise, the influence of which leads to a change of the dynamic mode due to the influence of strong random pulses.

Keywords: power grids, phase oscillators, Kuramoto oscillators, nonlinear coupling, phase synchronization, noise effects, Gaussian noise, Levy noise.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 20-12-00119).

For citation: Arinushkin PA, Kupriyanov VD, Vadivasova TE. Influence of Gaussian noise and Levy noise on the phase dynamics of the ensemble of Kuramoto-like oscillators of first and second order. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3):289–306. DOI: 10.18500/0869-6632-003145

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Одним из приоритетных направлений в области численного моделирования физических процессов является рассмотрение динамики энергосистем разного типа и сложности. Развитие инфраструктуры городов в полной мере зависит от технологического развития энергосетей. Особенно важным фактором в работе любой энергосети является устойчивость к внешним воздействиям и географическая доступность электроэнергии.

*Аринушкин П. А., Куприянов В. Д., Вадивасова Т. Е.
Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 3*

Проблема географической доступности источников электроэнергии заключается в невозможности построения электростанции в заданной местности из-за особенностей географического рельефа, что, в свою очередь, влечет за собой использование электростанций, находящихся вдали от потребителей энергии. В таком случае энергосеть становится более централизованной, что может сказываться на ее устойчивости к внешним воздействиям, таким как каскадный сбой электросетей или обрыв линий передач. В качестве решения проблемы доступности электроэнергии используется применение возобновляемых источников энергии. Такой подход позволяет снизить нагрузку на централизованную электростанцию или вовсе отказаться от ее использования. Однако включение таких элементов в энергосеть имеет сложность, связанную с синхронизацией и нормальным функционированием [1–9]. Одна из рассматриваемых задач данного исследования связана с решением проблем глобальной устойчивости и синхронизации энергосетей. Решения этих проблем находятся как с позиции технического усовершенствования электросетей, так и с помощью математического моделирования. Особый интерес среди ученых вызывает изучение эффектов и явлений синхронизации энергосетей, так как такой подход дает возможность приблизиться к решению проблемы, связанной с устойчивым поведением электростанций.

Динамика энергосети достаточно хорошо описывается с помощью связанных нелинейных осцилляторов [10–21]. Различные модели нелинейных осцилляторов служат различным приближением к реальному поведению энергосетей. Например, модель фазовых осцилляторов Курамото позволяет рассмотреть в более простом ключе устойчивость и синхронизацию энергосетей [22, 23], однако такая модель не учитывает роль и влияние инерционности электрогенераторов, которая присутствует в динамике электростанций невозобновляемого типа и в традиционных источниках электроэнергии. Для учета инерционности используется модель ротаторов, то есть модель фазовых осцилляторов с инерцией [24–28]. В нашей работе используется комбинированная модель энергосети, взятая из статьи [24]. Особенностью данной модели является то, что генераторы описываются с учетом инерции, то есть как ротаторы, а потребители — как фазовые осцилляторы Курамото без инерции. Такой подход позволяет учесть динамику не только генераторов энергии, но и потребителей.

Несмотря на рост возобновляемых источников и общую децентрализацию энергосетей, главной проблемой продолжает оставаться частотная синхронизация энергостанций в случае возникновения неисправностей и внешних воздействий, нарушающих поведение сети. Основными видами внешних воздействий в энергосети служат шумовое и импульсное воздействия. Помехи в электрической сети можно классифицировать как фоновый шум, который меняется в течение длительных периодов времени, и импульсное воздействие, которое является кратковременным. Фоновый шум, в свою очередь, можно разделить на цветной шум, который в основном создается бытовым электронным оборудованием, таким как компьютеры, диммеры или фены [29], и узкополосные флуктуации, вызванные радиовещанием, выбросами мощности. Подключение или отключение электронных устройств может вызвать аperiodические импульсные помехи частоты сети. В других случаях из-за включенных в состав источников питания выпрямителей в сети могут возникать периодические импульсные помехи, синхронные с основной частотой или с частотой повторения помехи, кратной 50/60 Гц. В сети также присутствует асинхронный периодический импульсный шум с частотой повторения 50...200 кГц [29–35]. В соответствии с работами [36–38] помехи в электрической сети можно представить как сумму ранее упомянутых типов воздействий. В представленных работах [39–43] продемонстрировано, что фотоэлектрические инверторы, зарядные устройства для аккумуляторов, энергоэффективное освещение, гидроэнергетические системы, ветряные турбины или зарядные устройства для электромобилей среди прочих объектов являются основными источниками кондуктивных флуктуаций высокой амплитуды. Другие устройства, такие как двигатели [40], осветительные устройства [44, 45] или электронные усилители, создают шумовые высокоамплитудные излучения с широким диапазоном спектральных характеристик.

Ключевая цель исследований энергосетей сводится к выявлению механизмов устойчивой работы энергосетей и бесперебойному функционированию.

Цель настоящего исследования состоит в том, чтобы рассмотреть энергосеть с кольцевой топологией и однородными параметрами, моделируемую ансамблем взаимодействующих роторов и фазовых осцилляторов первого порядка [24] в присутствии источников шума, таких как гауссовский шум и шум Леви, выявить порог устойчивости энергосети при изменении различных характеристик шума, оценить изменения пространственно-временных структур в модели энергосети с динамическими потребителями под влиянием шумовых воздействий.

1. Исследуемая модель и методы численного исследования

1.1. Параметры энергосети и архитектура связей. Исследуемая энергосеть состоит из двух типов элементов — это генераторы и потребители электроэнергии, которые, в свою очередь, соединяются с помощью линий передач. Представленные элементы и линии передач обладают большим набором характеристик для описания работы энергосети. Исходя из методики, представленной в статье [24], начальным этапом расчета энергосети является задание набора физических величин (табл. 1).

Таблица 1. Характеристики энергосети

Table 1. Power grid characteristics

Характеристики генераторов						Характеристики потребителей			
x'_i	H_i	D_i	$P_{g(\text{active}),i}$	$P_{g(\text{reactive}),i}$	ω_R	$V_{g,i}$	$P_{c(\text{active}),i}$	$P_{c(\text{reactive}),l}$	$V_{c,l}$
0.0608	4.4с	50	2	0	314.15 рад/с	1.04	2	0	1.04

Здесь H_i является параметром инерционности генератора, D_i — параметр диссипации, x'_i — индуктивность обмотки ротора и статора генератора. Каждый генератор характеризуется значениями активной $P_{g(\text{active}),i}$ и реактивной мощности $P_{g(\text{reactive}),i}$, тогда как для потребителей энергии эти параметры задают потребление активной $P_{c(\text{active}),l}$, $l = 1 \dots n_c$, и реактивной мощности $P_{c(\text{reactive}),l}$, $l = 1 \dots n_c$, соответственно. Напряжения на выходе генераторов и потребителей обозначены как $V_{g,i}$ и $V_{c,i}$ соответственно. Опорная частота энергосети ω_R равна 314.15 рад/с или 50 Гц. Индексы параметров принимают значения $i = 1, 2, 3 \dots n_g$ и $l = 1, 2, 3 \dots n_c$ для генераторов и потребителей соответственно, где n_g — общее количество генераторов и n_c — общее количество потребителей. Параметры x'_i , H_i , D_i , $P_{g(\text{active}),i}$, $P_{g(\text{reactive}),i}$, $V_{g,i}$ выбираются идентичными для всех генераторов, для потребителей, соответственно, идентичными выбираются параметры $P_{c(\text{active}),l}$, $P_{c(\text{reactive}),l}$, $V_{c,l}$. Стоит также отметить, что представленные параметры мощности и напряжения являются безразмерными величинами, где величина мощности нормируется на значение 100 МВт и напряжения на 100 кВ.

Линия передач энергосети (табл. 2) имеет одинаковый набор значений физических величин. В зависимости от типа соединения эти значения индивидуальны. Линия передач представлена в виде π -модели, в которой активное сопротивление r связано с индуктивным элементом x

Таблица 2. Характеристики линии передач

Table 2. Transmission line characteristics

Тип соединения	r	x	b	τ	ψ
генератор — внешний узел генератора	0	0.0576	0	1	0
внешний узел генератора — потребитель	0.0085	0.072	0.149	1	0

последовательно. К последовательному соединению сопротивления и индуктивности параллельно присоединены две емкости, равные b , которые образуют П-звено со всеми элементами. Величины элементов в π -модели являются нормированными на значения 1 Ом/м для активных сопротивлений, для индуктивностей на 1 Гн/м, а для емкостей на 1 Ф/м. Параметр τ является коэффициентом трансформации напряжения, а ψ — фазовым сдвигом напряжения. В соответствии с методикой, предложенной в [24], генератор разбивается на два элемента: генерирующая часть и внешний узел генератора, которые имеют чисто индуктивную связь между собой, как показано в табл. 2. Исследуемая топология выглядит в виде кольца чередующихся элементов генераторов и потребителей. Такая связь между элементами представлена в типе соединения «внешний узел генератора — потребитель» в табл. 2.

Представленные в табл. 1 и 2 характеристики энергосети используются программой MATPOWER [46] для вычисления матрицы проводимости \mathbf{Y} энергосети. Данная матрица используется для расчета правых частей уравнений фазовых осцилляторов. В свою очередь, параметры правых частей уравнений (1) и (4) вычисляются в программе, предоставленной авторами статьи [24]. За основу представленных данных в табл. 1 и 2 были взяты тестовые данные системы электроснабжения Новой Англии с 10 генераторами, характеристики которой описаны в статье [47]. Мы провели изменения тестовых данных исходной системы электроснабжения, выбрав усредненные значения для каждого представленного элемента энергосети в целях получения идеализированной энергосети, в которой физические параметры элементов сети являлись однородными, а сама энергосеть представляла простую кольцевую топологию. Цель такого подхода состоит в рассмотрении фазовой динамики сложной модели фазовых уравнений, представленных в работе [24] на более простых примерах энергосетей.

1.2. Курамото-подобная модель фазовых осцилляторов первого и второго порядка.

Исследуемая модель энергосети с динамическими потребителями [24] представляется в виде Курамото-подобных фазовых осцилляторов первого и второго порядка. Уравнение для генератора энергосети представлено в виде фазового осциллятора с инерцией или ротатора и записывается как

$$\frac{2H_i}{\omega_R} \ddot{\delta}_i + \frac{D_i}{\omega_R} \dot{\delta}_i = A_i^g - K_{i,i+n_g}^g \sin(\delta_i - \delta_{i+n_g}) + \sigma \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, n_g, \quad (1)$$

$$A_i^g = P_{g(\text{active}),i}, \quad (2)$$

$$K_{i,i+n_g}^g = |E_i V_i / x_i'|. \quad (3)$$

Для потребителей уравнение модели выглядит как уравнение фазового осциллятора первого порядка:

$$\frac{D_l}{\omega_R} \dot{\delta}_l = A_l - \sum_{j=n_c, j \neq l}^N K_{lj} \sin(\delta_l - \delta_j - \gamma_{lj}) + \sigma \xi_l(t), \quad l = n_c, \dots, N, \quad (4)$$

$$A_l = -P_{c(\text{active}),l} - |V_l|^2 G_{ll}, \quad (5)$$

$$K_{lj} = |V_l V_j Y_{lj}|, \quad (6)$$

$$\gamma_{lj} = \alpha_{lj} - \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

$$\mathbf{Y} = |Y_{lj}| e^{j\alpha_{lj}}, \quad \mathbf{j} = \sqrt{-1}, \quad (8)$$

$$|E_i|^2 = \left(\frac{P_{g(\text{active}),i} x_i'}{|V_i|} \right)^2 + \left(|V_i| + \frac{P_{g(\text{reactive}),i} x_i'}{|V_i|} \right)^2, \quad (9)$$

Параметры и переменные в представленных уравнениях имеют следующий смысл: ω_R — опорная угловая частота системы (в рад/с); $\dot{\delta}_i$ — мгновенная частота вращения i -го осциллятора относительно ω_R ; H_i (в секундах) и D_i — параметры инерции и диссипации i -го генератора соответственно. Параметры A_i^g и A_i в уравнениях (2) и (5) представляют собой безразмерные мощности генератора и потребителя соответственно с учетом диссипативных потерь. $P_{g(\text{active}),i}$ — безразмерная активная генерируемая мощность генератора, $P_{c(\text{active}),l}$ — безразмерная активная мощность потребителя, $|E_i|$, V_i — безразмерное напряжение генератора и потребителя (включая выходные узлы генераторов). \mathbf{G} — действительная часть безразмерной матрицы проводимости \mathbf{Y} . Параметр K_{ij} в уравнении (6) задает силу связи между осцилляторами с номерами i и j , выраженную через произведение безразмерных напряжений V_i , V_j двух связанных генерирующих узлов и комплексную матрицу проводимости \mathbf{Y} между ними. В случае силы связи генератора (уравнение (3)) параметр $K_{i,i+n_g}^g$ выражается через соотношение произведения безразмерного напряжения генератора E_i и безразмерного напряжения выходного узла генератора V_i на паразитную индуктивность x_i' . Параметр γ_{ij} в уравнении (7) характеризует фазовый сдвиг в цепи связи. Аддитивный шум в исследуемой модели вводится во все осцилляторы ансамбля и представлен независимыми нормированными источниками $\xi_i(t)$ и $\xi_l(t)$. Параметр σ задает интенсивность шума. Безразмерная матрица \mathbf{Y} , полученная из характеристик исследуемой энергосети, участвует в расчете параметров A_i , A_i^g , K_{ij} , $K_{i,i+n_g}^g$, γ_{ij} в правых частях уравнений (1), (4) и является матрицей проводимости элементов сети. Рассчитанные матрицы параметров правых частей уравнения для исследуемой энергосети имеют следующие размерности: $\mathbf{A}^g(1 \times n_g)$, $\mathbf{A}(1 \times n_c)$, $\mathbf{K}^g(n_g \times n_g)$, $\mathbf{K}(n_c \times n_c)$, $\gamma(n_c \times n_c)$.

В представленной работе мы будем использовать два ансамбля, моделирующих энергосеть, описываемых уравнениями (1)–(9), но имеющих разное количество элементов, моделирующих энергосеть. Первый ансамбль энергосети состоит из $N = 40$ элементов, из которых 10 являются генераторами, 10 — выходными узлами генераторов, 10 — потребителями с нулевой активной и реактивной мощностью потребления и 10 — потребителями с ненулевой активной и реактивной мощностью потребления. Выходные узлы генераторов соединены с потребителями с нулевой активной и реактивной мощностью. Узлы потребителей с нулевой активной и реактивной мощностью, в свою очередь, соединены с обычными потребителями, образуя топологию в виде кольца. Второй ансамбль энергосети включает $N = 30$ элементов сети, из которых 10 являются генераторами, 10 — выходными узлами генераторов и 10 — потребителями. В данном случае выходные узлы генераторов соединены с обычными потребителями, образуя кольцевую топологию. В представленных ансамблях энергосетей генераторы будут описываться дифференциальным уравнением (1), тогда как остальные элементы сети, такие как выходные узлы генераторов и различные потребители, будут описываться дифференциальными уравнениями (4).

2. Результаты исследований

Исследование фазовой динамики двух энергосетей под различным шумовым воздействием разделено на две задачи. В первой задаче производится расчет карты режимов для фазовой и частотной динамики модели и проводится анализ полученных режимов. Вторая задача состоит в исследовании различных шумовых воздействий на полученные режимы с целью определения пороговых значений интенсивностей различного типа шума и оценки чувствительности модели к внешним воздействиям. Представленные карты режимов были получены с помощью интегрирования системы уравнений (1)–(9) методом Гюна 2-го порядка с шагом интегрирования $h = 0.01$ на безразмерном времени системы $T = 11000$. При этом интегрирование на времени установления 1000 первых единиц не учитывалось для устранения переходного процесса в модели.

Все представленные карты режимов были получены при использовании 50 различных случайных нормально распределенных начальных условий.

2.1. Анализ фазовой и частотной динамики в ансамблях фазовых осцилляторов разного размера. Для проведения численного эксперимента с шумовым воздействием на энергосеть произведем численный расчет частотной и фазовой карт режимов для двух исследуемых ансамблей фазовых осцилляторов. Все приведенные в статье карты режимов строились для случайного разброса начальных условий, где начальные значения переменных являются нормально распределенными величинами с нулевым средним значением и дисперсиями распределений $d_{\dot{\delta}}$ и d_{δ} для мгновенных частот и фаз осцилляторов соответственно. На рис. 1, *a, d* представлены режимы, основанные на расчете средних частот осцилляторов (1) и (4). Области фазовой синхронизации для ансамблей из 30 и 40 осцилляторов являются идентичными и имеют практически одинаковые границы. На представленных картах можно заметить, что разброс начальных фаз осцилляторов существенно влияет на фазовую синхронизацию. Так, при значении дисперсии начальных фаз $d_{\delta} \approx 0.8$ наблюдается обширная область сосуществования синхронной и асинхронной динамики. Реализация синхронного или несинхронного поведения зависит от выбора начальных условий.

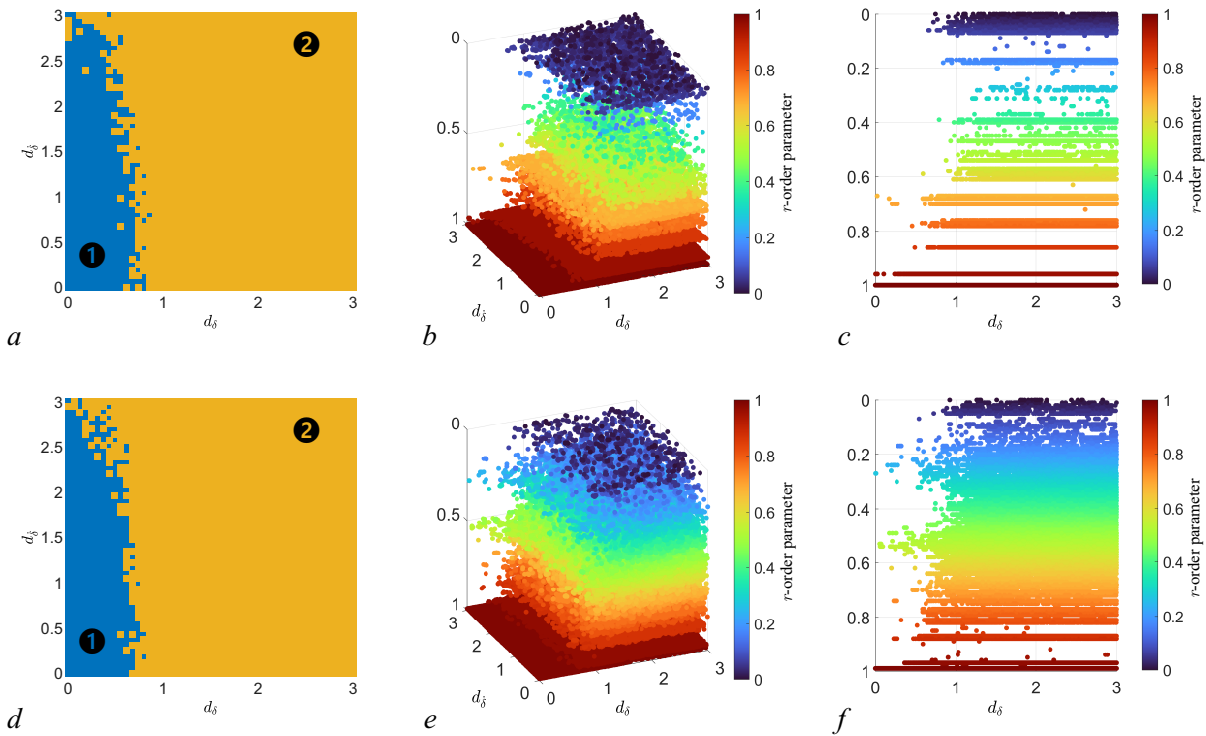


Рис. 1. Карты режимов ансамбля в зависимости от разброса начальных значений фаз и мгновенных частот: *a, d* — по среднему значению и дисперсии частот осцилляторов (синий цвет — режим синхронизации, желтый — режим сосуществования синхронной и асинхронной динамики), *b, e* — карты значений параметра порядка r (вид под углом) и *c, f* (вид сбоку). Карты *a, b, c* получены для ансамбля из 30 осцилляторов, а карты *d, e, f* — для ансамбля из 40 осцилляторов (цвет онлайн)

Fig. 1. Maps of ensemble modes depending on the dispersion of initial phase values and instantaneous frequencies: *a, d* — by the mean value and dispersion of oscillator frequencies (blue color — synchronization mode, yellow — mode of coexistence of synchronous and asynchronous dynamics), *b, e* — maps of r -order parameter values (angular view) and *c, f* (side view). The *a, b, c* maps are obtained for an ensemble of 30 oscillators, and the *d, e, f* maps are obtained for an ensemble of 40 oscillators (color online)

Стоит также отметить, что в области 1 всегда наблюдается режим фазовой синхронизации вне зависимости от начальных условий. На рис. 1, *b, c, e, f* представлены карты значений величины параметра порядка Курамото [48]. Параметр порядка характеризует степень фазовой когерентности осцилляторов ансамбля и рассчитывается по формуле

$$r(t)e^{i\chi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}, \quad (10)$$

где $\theta_j(t)$ — мгновенная фаза j -го осциллятора, N — общее количество осцилляторов, $\chi(t)$ — усредненная фаза осцилляторов. В работе используется также усредненный по времени параметр $r = \langle r(t) \rangle_t$. Представленные карты параметра порядка (см. рис. 1, *b, c, e, f*) рассчитывались отдельно для каждого из 50 вариантов распределений начальных условий с заданными дисперсиями и, соответственно, для каждой точки на плоскости были рассчитаны 50 значений параметра r , где различным значениям параметра порядка соответствует различный цвет. Из полученных изображений (рис. 1, *a, d*) видно, что карты режимов для различных ансамблей имеют практически идентичные границы режимов. В области синхронизации параметр r достигает значения равного единице, что обозначает отсутствие разности фаз между осцилляторами. Различия наблюдаются на рис. 1, *c, f* в области сосуществования синхронной и асинхронной динамики, где видно, что ансамбли характеризуются многообразием значений параметра порядка r .

Для более наглядного сопоставления режимов с разной степенью фазовой когерентности (см. рис. 1, *b, c, e, f*) были построены круговые диаграммы, показывающие процентное соотношение режимов с различными значениями параметра порядка, рассчитанное по всем выборкам начальных условий со всеми значениями дисперсий. На рис. 2, *a, b* представлены круговые диаграммы количественного подсчета процентов различных величин параметра порядка для ансамблей из 30 и 40 осцилляторов соответственно. Из представленных диаграмм видно, что в обоих случаях самым типичным значением параметра порядка является $r \simeq 1$, что соответствует синфазному поведению осцилляторов. В случае ансамбля из 40 осцилляторов, где 10 осцилляторов с нулевой активной и реактивной мощностью потребления были добавлены в качестве промежуточного звена между выходными узлами генераторов и потребителей, наблюдается уменьшение процента режимов синфазной динамики. В рассмотренном ансамбле мы можем наблюдать появление большого многообразия значений параметра порядка r . Так, на диаграмме (см. рис. 2, *b*) виден рост процента режимов фазовой некогерентности со значениями параметра порядка $0.49 \leq r \leq 0.87$.

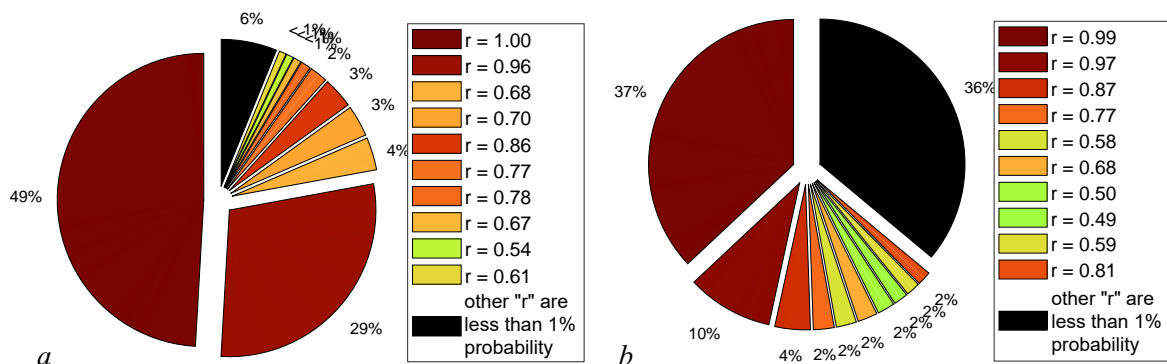


Рис. 2. Количественный подсчет процента значений параметра порядка r в виде круговой диаграммы: *a* — для ансамбля из 30 осцилляторов, *b* — для ансамбля из 40 осцилляторов (цвет онлайн)

Fig. 2. Quantitative calculation of the percentage of parameter values of order r in the form of a pie chart: *a* — for an ensemble of 30 oscillators, *b* — for an ensemble of 40 oscillators (color online)

Теперь рассмотрим, как распределяются значения параметра порядка в отдельных сегментах карт режимов, приведенных на рис. 1, *b, c*, то есть при изменении дисперсий распределений начальных значений мгновенной фазы и частоты в малых интервалах. Напомним, что рассматривались 50 различных случайных выборок с заданными дисперсиями. Были выбраны точки $d_\delta = 0.49, d_\delta = 0.49$ (область 1) и $d_\delta = 1.835, d_\delta = 2.69$ (область 2), которые соответствуют точкам синей и желтой области карты режимов на рис. 1, *a, d*. Из данных, приведенных на рис. 3, *a, d*, видно, что в точке $d_\delta = 0.49, d_\delta = 0.49$ вне зависимости от выбранного ансамбля всегда наблюдается полная когерентность всех осцилляторов и отсутствие разности фаз между всеми осцилляторами. Таким образом, область 1 карты режима рис. 1, *a, d* характеризуется не только равными мгновенными частотами осцилляторов, но и одинаковыми мгновенными фазами осцилляторов, а полученный режим не зависит от выбора начальных условий. В области 2 карты режимов (рис. 1, *a, d*), принадлежащей сосуществованию синхронной и асинхронной динамики, могут реализоваться режимы синхронизации мгновенных частот и фаз осцилляторов, синхронизации мгновенных частот с постоянными во времени разностями фаз между осцилляторами и асинхронный режим, где хотя бы один осциллятор имеет мгновенную частоту, отличную от кластера всех остальных осцилляторов. В данном случае количество рассматриваемых осцилляторов в ансамбле влияет на степень когерентности мгновенных фаз. Это видно из рис. 3, *b, e* и рис. 3, *c, f*.

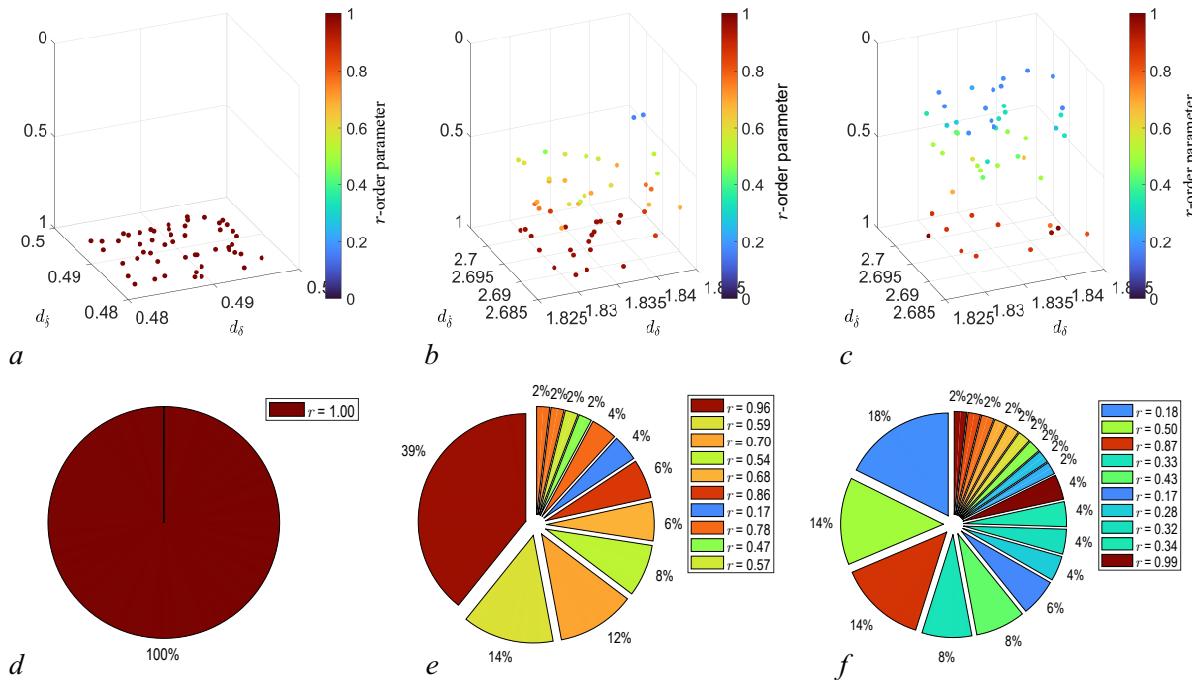


Рис. 3. Карты значений параметра порядка, построенные для выбранных сегментов карт режимов, приведенных на рис. 1, *a, d*, и соответствующие круговые диаграммы степени фазовой когерентности (значений r): *a, d* — сегмент карты и соответствующая круговая диаграмма в точке $d_\delta = 0.49, d_\delta = 0.49$ для ансамблей из 30 и 40 осцилляторов, *b, e* — сегмент карты и соответствующая круговая диаграмма в точке $d_\delta = 1.835, d_\delta = 2.69$ для ансамблей из 30 осцилляторов, *c, f* — сегмент карты и соответствующая круговая диаграмма в точке $d_\delta = 1.835, d_\delta = 2.69$ для ансамблей из 40 осцилляторов (цвет онлайн)

Fig. 3. Maps of the order parameter values plotted for selected segments of the mode maps shown in Fig. 1, *a, d* and the corresponding pie charts of the phase coherence degree (r values): *a, d* — map segment and corresponding pie chart at $d_\delta = 0.49, d_\delta = 0.49$ for ensembles of 30 and 40 oscillators, *b, e* — map segment and corresponding pie chart at $d_\delta = 1.835, d_\delta = 2.69$ for ensembles of 30 oscillators, *c, f* — map segment and corresponding pie chart at $d_\delta = 1.835, d_\delta = 2.69$ for ensembles of 40 oscillators (color online)

Из представленных рисунков видно, что для ансамбля из 30 осцилляторов (рис. 3, *b, e*) самым распространенным режимом поведения фаз является почти когерентное поведение со значением параметра порядка $r = 0.96$ (вероятность наблюдения 39% при всех рассмотренных случайных начальных условиях). Однако с увеличением ансамбля до 40 осцилляторов (рис. 3, *c, f*) самый близкий режим когерентности $r = 0.99$ имеет вероятность появления около 4%. Наиболее вероятными для данного ансамбля являются значения $r = 0.18$, $r = 0.5$ и $r = 0.87$, для которых вероятности составляют 18%, 14% и 14% соответственно. Также стоит отметить многообразие режимов фазовой динамики в представленном ансамбле осцилляторов. Очевидным недостатком представленных карт значений параметра порядка Курамото r является то, что они характеризуют степень синфазности осцилляторов, но не позволяют выделить область синхронизации мгновенных частот. Только в случае $r = 1$, когда фазы всех осцилляторов одинаковы, можно утверждать, что и мгновенные частоты всех осцилляторов совпадают. Таким образом, карты значений параметра порядка не могут дать полного представления о динамических режимах.

2.2. Влияние внешнего шумового воздействия на выбранные динамические режимы в двух ансамблях фазовых осцилляторов. Проанализировав ключевые динамические режимы энергосети, моделируемой ансамблем фазовых осцилляторов (1)–(9), и используя ранее полученные карты режимов, характеризующие синхронность частот осцилляторов (рис. 1, *a, d*) в точках $d_\delta = 0.49$, $d_\xi = 0.49$ и $d_\delta = 1.835$, $d_\xi = 2.69$, исследуем влияние гауссовского шума и шума Леви на полученные режимы сети. Под шумом Леви понимают белый негауссов шум, представляющий собой производную от процесса Леви (процесса с независимыми негауссовыми приращениями) по времени. Различие гауссова шума и шума Леви заключается в различном виде функции плотности вероятности. Плотность вероятности шума Леви характеризуется тремя параметрами: α , β и μ . Параметр стабильности $\alpha \in (0, 2]$ отвечает за наличие больших выбросов (влияет на хвосты кривой плотности вероятности). Параметр $\beta \in [-1, 1]$ характеризует асимметрию распределения. Параметр μ определяет сдвиг плотности вероятности. Для распределений, у которых существует среднее значение (то есть при $1 \leq \alpha \leq 2$), параметр μ является средним значением. При трех значениях параметра α существует явный вид для функций плотности вероятности: при $\alpha = 2$ плотность вероятности является гауссовской (или нормальной); при $\alpha = 1$ имеет место распределение Коши, а при $\alpha = 1/2$ — распределение Леви. В случае шума Леви ($\alpha < 2$) хвосты плотности вероятности являются более тяжелыми по сравнению с гауссовым распределением.

Рассмотрим режим синхронизации частот и фаз осцилляторов в точке $d_\delta = 0.49$, $d_\xi = 0.49$ и подадим в каждый осциллятор ансамбля внешнее шумовое воздействие в виде гауссовского шума и шума Леви. Источники шума в осцилляторах являются независимыми. Численный эксперимент показал, что исследуемая область является устойчивой к экстремально высоким значениям интенсивности как гауссова шума, так и шума Леви. В качестве примера продемонстрируем пространственно-временные диаграммы ансамбля из 40 осцилляторов, подверженного воздействию шума Леви со значениями параметров шума $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\mu = 0$ и интенсивностью $\sigma = 1$. На рис. 4, *a, b* представлены пространственно-временные диаграммы мгновенных фаз и частот ансамбля из 40 осцилляторов под действием шума Леви. Для наглядности были продемонстрированы первые 100 единиц безразмерного времени устоявшегося режима. Из пространственно-временной диаграммы мгновенных фаз видно, что в начальный момент времени все мгновенные фазы осцилляторов были равны между собой. Это подтверждается рис. 4, *c*, где мгновенное значение параметра порядка Курамото r_{inst} в начальный момент равно $r_{\text{inst}} = 1$, тогда как усредненное по времени значение $\langle r_{\text{inst}} \rangle_t = 0.19$. Пространственно-временная диаграмма мгновенных частот демонстрирует экстремальные всплески амплитуд мгновенных частот, вызванных шумом Леви. Несмотря на воздействия такого рода, возмущенные шумом осцилляторы поддерживают синхронизацию частот, возвращая мгновенные частоты к их первоначальным значениям.

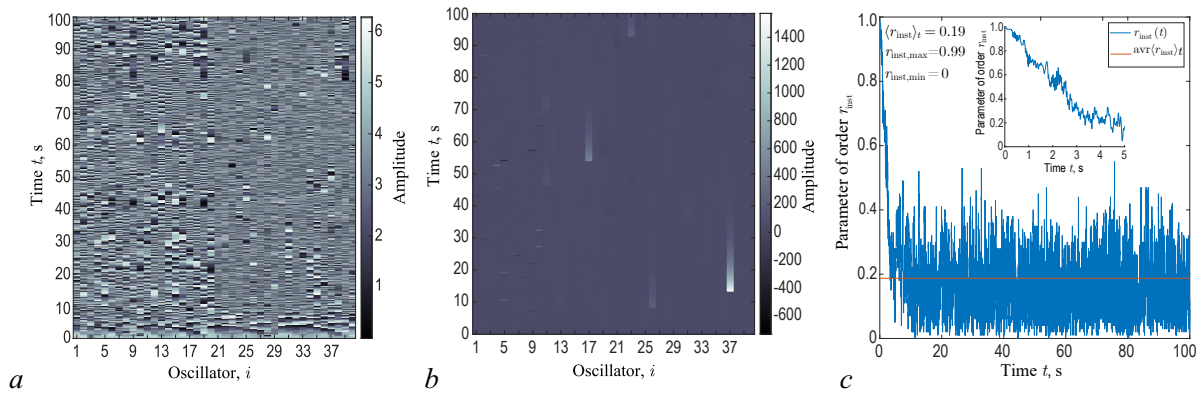


Рис. 4. Внешнее воздействие шумом Леви на ансамбль из 40 осцилляторов: *a* — пространственно-временная диаграмма мгновенных фаз, *b* — пространственно-временная диаграмма мгновенных частот, *c* — временная реализация параметра порядка Курамото r_{inst} (оранжевая линия — усредненное по времени значение) (цвет онлайн)

Fig. 4. External influence of Levy noise on an ensemble of 40 oscillators: *a* — spatiotemporal phase diagram, *b* — spatiotemporal frequency diagram, *c* — the temporal realization of the parameter of order Kuramoto r_{inst} (color online)

Таким образом, в ансамбле осцилляторов под действием шума Леви наблюдается частотная синхронизация, тогда как разность фаз между осцилляторами непрерывно изменяется под действием шума. В случае воздействия гауссовским шумом высокой интенсивности $\sigma > 0.1$ в ансамбле наблюдается изменение мгновенных фаз и частот осциллятора, однако при прекращении воздействия шума в ансамбле наблюдается резкая синхронизация частот осцилляторов. Полученные результаты для данной области наблюдались и в случае длительного времени численного счета $T = 10000$.

Рассмотрим точку $d_8 = 1.835$, $d_9 = 2.69$, в которой наблюдается режим сосуществования синхронной и асинхронной динамики. Выберем начальные условия, при которых в исследуемых ансамблях наблюдается режим асинхронной динамики, то есть хотя бы один из осцилляторов вращается с собственной частотой, отличной от частоты осцилляторов кластера. Произведем численный эксперимент с воздействием гауссовского шума на исследуемые ансамбли осцилляторов. Источники шума в осцилляторах, как и в предыдущем случае, являются независимыми. Численный результат показал, что в области исследуемого режима модели энергосети демонстрируется высокая степень устойчивости к внешнему гауссовскому воздействию. Так, например, для ансамбля из 30 осцилляторов изменение пространственно-временной динамики наблюдалось при экстремальной интенсивности шума $\sigma = 0.1833$ (рис. 5, *a*, *b*, *c*), тогда как для ансамбля из 40 осцилляторов это значение наблюдалось при $\sigma = 0.2732$ (рис. 5, *d*, *e*, *f*). Стоит также отметить, что изменения пространственно-временной динамики ансамблей наблюдалось при достаточно длительном времени численного счета $T = 10000$. Для обоих ансамблей наблюдался срыв частотного синхронизма осцилляторов, моделирующих потребителей энергии (осцилляторы с $i = 11$ по $i = 30$ или $i = 40$ моделируют потребителей энергии, тогда как оставшиеся осцилляторы принадлежат генераторам энергии в обоих рассмотренных ансамблях). Мгновенная частота вышедших из синхронизма осцилляторов устремляется к значению мгновенной частоты осциллятора, уже находившегося в асинхронном режиме до подачи внешнего воздействия.

Далее рассмотрим ту же область исходных режимов, заменив внешнее воздействие на шум Леви, и проведем численный эксперимент при изменении параметров шума, таких как α и β . Полученные результаты представлены на рис. 6 и рис. 7. На диаграммах, приведенных на рис. 6, показаны пороговые значения интенсивности шума Леви относительно параметров α и β , при которых наблюдалась смена пространственно-временной динамики ансамблей.

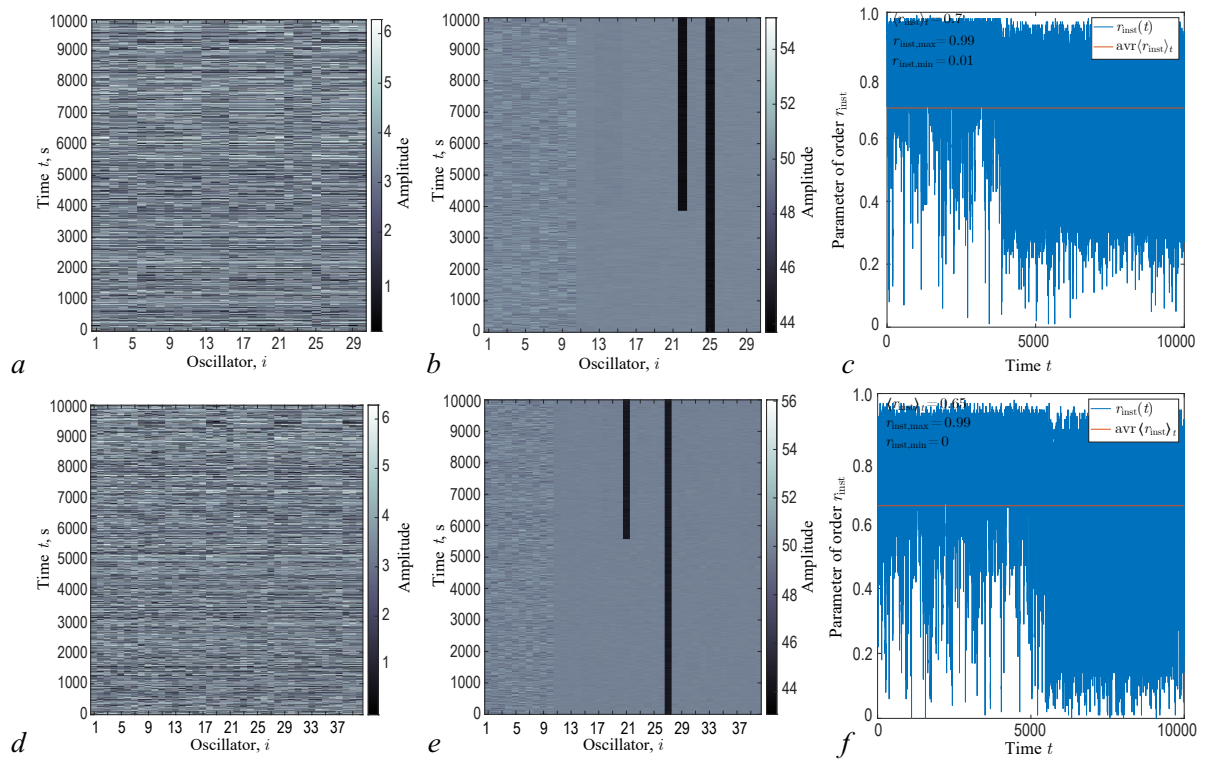


Рис. 5. Внешнее воздействие гауссовским шумом на ансамбли из 30 и 40 осцилляторов: *a, d* — пространственно-временная диаграмма мгновенных фаз; *b, e* — пространственно-временная диаграмма мгновенных частот; *c, f* — временная реализация параметра порядка Курамото r_{inst} (оранжевая линия — усредненное по времени значение); *a, b, c* — изображения для 30 осцилляторов; *d, e, f* — изображения для 40 осцилляторов (цвет онлайн)

Fig. 5. External influence of Gaussian noise on ensembles of 30 and 40 oscillators: *a, d* — spatiotemporal diagram of instantaneous phases; *b, e* — spatiotemporal diagram of instantaneous frequencies; *c, f* — temporal realization of the Kuramoto order parameter r_{inst} (orange line — time-averaged value); *a, b, c* — images for 30 oscillators; *d, e, f* — images for 40 oscillators (color online)

Рассмотрим случай нулевого значения параметра асимметрии ($\beta = 0$). В данном случае при $\alpha = 1$ пороговая интенсивность шума в исследуемых ансамблях из 30 и 40 осцилляторов имеет значения $\sigma = 2.84 \cdot 10^{-6}$ и $\sigma = 2.2 \cdot 10^{-6}$ соответственно. Далее, при увеличении параметра α пороговые значения шума Леви монотонно растут, и при значении $\alpha = 1.9$ для обоих случаев ансамблей происходит резкий скачок пороговой интенсивности шума. Наблюдаемое поведение пороговых величин интенсивности шума связано с особенностью шума Леви. При изменении α в сторону увеличения происходит уменьшение вероятности резких импульсных всплесков, частота появления таких всплесков также сокращается, и при достижении значения $\alpha = 2$ высокоамплитудные воздействия исчезают. Таким образом, полученные величины пороговой интенсивности σ при $\alpha = 2$ составляют $\sigma = 0.199$ и $\sigma = 0.3135$ для ансамблей из 30 и 40 осцилляторов соответственно. При наличии асимметрии вероятностного распределения шума Леви в диапазоне $-1 \leq \beta \leq 0.5$ наблюдается незначительное увеличение пороговой интенсивности для параметра $1 \leq \alpha \leq 1.8$ для обоих исследуемых ансамблей осцилляторов. Для параметра $\beta = 1$ в диапазоне $1 \leq \alpha \leq 1.8$ пороговое значение интенсивности для двух ансамблей является наивысшим из рассмотренных значений β , однако с приближением к значению $\alpha = 2$ рассмотренные пороговые интенсивности находятся вблизи значения полученного при $\beta = 0$. Это означает, что наличие отличной от нуля асимметрии в шуме Леви имеет влияние только в случае наличия резких высокоамплитудных случайных значений шума. Так, на рис. 6 можно видеть, что рассмотренные ансамбли осцилляторов менее чувствительны к шуму Леви при $\beta = 0.5$ и $\beta = 1$. Это говорит о том, что

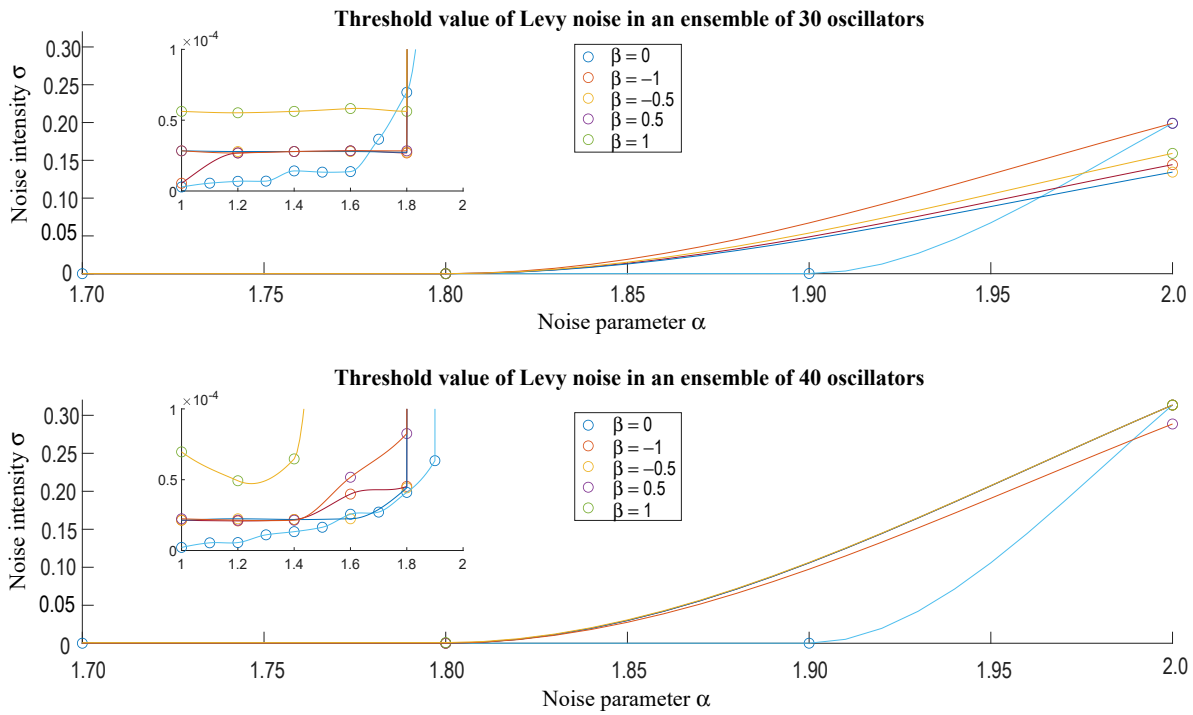


Рис. 6. Величины интенсивности шума Леви, при которых наблюдаются изменения пространственно-временной динамики в ансамблях из 30 и 40 осцилляторов (цвет онлайн)

Fig. 6. Levy noise intensity values at which changes in spatio-temporal dynamics in ensembles of 30 and 40 oscillators are observed (color online)

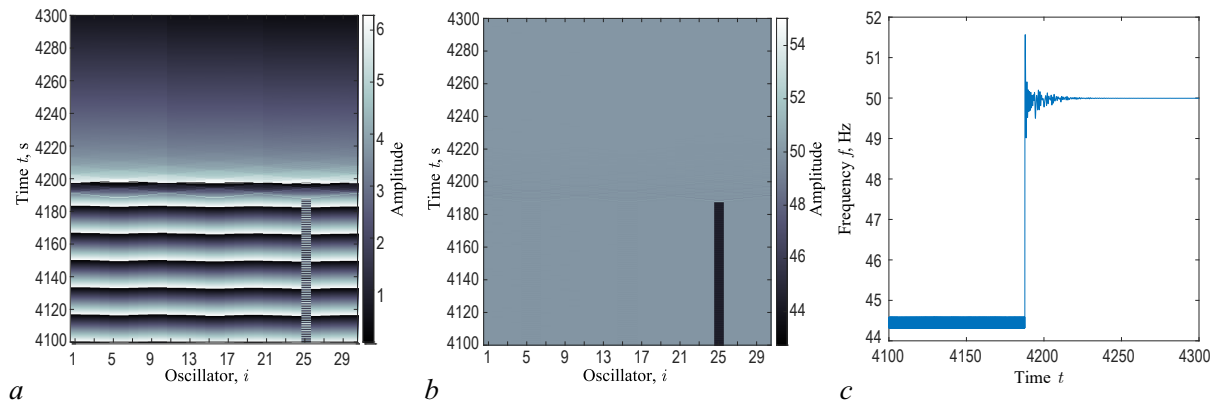


Рис. 7. Внешнее воздействие шумом Леви с параметрами $\alpha = 1.4$, $\beta = 0$, $\sigma = 1.42 \cdot 10^{-5}$ на ансамбль из 30 осцилляторов: *a* — пространственно-временная диаграмма мгновенных фаз, *b* — пространственно-временная диаграмма мгновенных частот, *c* — временная реализация мгновенной частоты осциллятора $i = 25$ (цвет онлайн)

Fig. 7. External influence of Levy noise with parameters $\alpha = 1.4$, $\beta = 0$, $\sigma = 1.42 \cdot 10^{-5}$ on an ensemble of 30 oscillators: *a* — spatiotemporal diagram of instantaneous phases, *b* — spatiotemporal diagram of instantaneous frequencies, *c* — time realization of the instantaneous frequency of the oscillator $i = 25$ (color online)

осцилляторы в ансамблях более устойчивы к резкому повышению мгновенной частоты за счет высокоамплитудного случайного воздействия.

В рассматриваемой области сосуществования синхронной и асинхронной динамики наблюдалось явление синхронизации осцилляторов под действием шума Леви. В качестве примера на рис. 7 проиллюстрировано явление, при котором высокоамплитудное импульсное воздействие шума Леви синхронизирует осциллятор, находящийся в асинхронном режиме в начальный момент времени счета. Как видно из рис. 7, с, в момент времени $T \approx 4195$ происходит резкий скачок мгновенной частоты в сторону увеличения скорости вращения с последующим установлением мгновенной частоты вблизи опорного значения ω_R (табл. 1). Стоит также отметить, что после установления частотной синхронизации в ансамбле также наблюдается фазовая когерентность осцилляторов, усредненный по времени параметр порядка находится вблизи значения $r_{\text{inst}} \approx 1$.

Заключение

В работе была исследована энергосеть с кольцеобразной топологией, которая представлялась в виде двух независимых ансамблей из 30 и 40 элементов соответственно. Элементы сети представляют собой генераторы и потребители энергии и описываются фазовыми осцилляторами первого и второго порядка [24]. Ансамбли из 40 осцилляторов отличаются наличием потребителей с нулевой величиной активной и реактивной мощности. Для сравнения пространственно-временных динамик двух различных ансамблей в работе были построены карты режимов для частотной и фазовой динамики ансамблей. Карты режимов были получены при неизменяемых управляющих параметрах модели и изменяемых случайных начальных условиях, которые задаются с помощью нормального распределения с различными значениями дисперсии случайных величин. Где дисперсия для начальных фаз и частот задавалась отдельно, а сами карты режимов строились при 50 случайных выборах начальных условий.

Полученные таким образом карты режимов демонстрировали большое многообразие пространственно-временных режимов без изменения каких-либо управляющих параметров. Так, например, карты режимов, полученные в результате анализа мгновенных частот, являются идентичными для двух рассмотренных ансамблей и содержат области синхронизации, полной синхронизации фаз и частот осцилляторов и асинхронного режима. Область полной синхронизации при всех рассмотренных начальных условиях наблюдалась при малых величинах дисперсии начальных фаз осцилляторов, тогда как все вышеперечисленные режимы наблюдались при увеличении дисперсии начальных фаз. Полученная область на карте режимов обозначалась как область сосуществования синхронной и асинхронной динамики, где появление того или иного режима определялось набором случайных величин.

Для оценки степени синфазности осцилляторов ансамбля строились карты значений параметра порядка. Величина фазовой когерентности представляет собой усредненный по времени счета параметр порядка Курамото r . Полученные таким образом карты режимов для исследуемых ансамблей демонстрировали различную степень когерентности. Так, в ансамбле из 40 осцилляторов наблюдалось самое наибольшее многообразие степеней фазовой когерентности. Это связано с наличием в ансамбле осцилляторов, моделирующих потребителей с нулевой активной мощностью, чьи собственные частоты [24] являются отличными от генераторов и остальных потребителей в энергосети. Такое разнообразие величин собственных частот усложняет установление в ансамбле полной фазовой когерентности и способствует появлению новых степеней фазовой когерентности. Однако в области полной синхронизации при любых начальных условиях наблюдалась полная фазовая когерентность $r = 1$ независимо от исследуемого ансамбля.

Исследование с шумовыми воздействиями различных типов, таких как гауссовский шум и шум Леви, проводилось в двух областях карты режимов, демонстрирующих частотную синхронизацию осцилляторов. Область карты режимов, в которой существовала исключительно

полная синхронизация, демонстрировала сильную устойчивость к гауссовскому шуму и шуму Леви и вне зависимости от значений интенсивности шума, включая экстремальные значения. Наблюдаемая устойчивость в исследуемом режиме заключалась в установлении частотной синхронизации ансамбля после прекращения воздействия шумом, тогда как разность фаз между осцилляторами становилась отличной от нуля, то есть полная синхронизация в ансамбле после воздействия различного типа шума не наблюдалась. В случае воздействия шумом на область сосуществования синхронной и асинхронной динамики под действием гауссовского шума и шума Леви возможны переключения между синхронизацией и асинхронным поведением ансамблей. В случае гауссовского шума переключения режимов наблюдались при экстремальных значениях интенсивности шума, тогда как в случае воздействия шума Леви необходимая интенсивность шума для смены режима зависела от параметра α . Так, при параметре $\alpha = 1$ интенсивность шума Леви могла составлять 10^{-6} , а при $\alpha = 2$ не более 0.5. Такие разные пороговые интенсивности шума в случае гауссовского воздействия и шума Леви связаны с особенностью шума Леви, заключающейся в наличии высокоамплитудных случайных выбросов. С уменьшением параметра α возрастает вероятность появления такого рода выбросов. Влияние параметра асимметрии β шума Леви незначительно изменяет пороговые значения интенсивности шума и только при $\beta = 1$ пороговая интенсивность шума становится выше. Полученные результаты в исследуемой области сосуществования различных синхронных и асинхронных режимов говорят о том, что исследуемые ансамбли фазовых осцилляторов являются более чувствительными к импульсной природе внешнего воздействия по отношению к внешним шумовым воздействиям.

Полученные численные результаты исследуемой модели могут иметь практическое значение в области определения условий устойчивой работы реальных энергосистем. В частности, влияние шумовых воздействий может иметь практическое применение в разработке механизмов противодействия внутренних и внешних возмущений, оказываемых на энергосеть. Результаты, полученные при воздействии гауссова шума и шума Леви на энергосеть, говорят о том, что энергосети могут являться достаточно устойчивыми к обычному, нормально распределенному шуму и сильно уязвимы к импульсному воздействию и резкому возмущению, каким и является рассмотренный в исследовании шум Леви при $\alpha < 2$. Таким образом, в реальных энергосетях стоит уделять внимание именно импульсным и резким возмущениям для поддержания устойчивой работы сети.

References

1. Ackermann T, Andersson G, Söder L. Distributed generation: a definition. *Electric Power Systems Research*. 2001;57(3):195–204. DOI: 10.1016/S0378-7796(01)00101-8.
2. Milan P, Wächter M, Peinke J. Turbulent character of wind energy. *Phys. Rev. Lett.* 2013;110(13):138701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.138701.
3. Heide D, von Bremen L, Greiner M, Hoffmann C, Speckmann M, Bofinger S. Seasonal optimal mix of wind and solar power in a future, highly renewable Europe. *Renewable Energy*. 2010;35(11):2483–2489. DOI: 10.1016/j.renene.2010.03.012.
4. Heide D, Greiner M, von Bremen L, Hoffmann C. Reduced storage and balancing needs in a fully renewable European power system with excess wind and solar power generation. *Renewable Energy*. 2011;36(9):2515–2523. DOI: 10.1016/j.renene.2011.02.009.
5. Anvari M, Lohmann G, Wächter M, Milan P, Lorenz E, Heinemann D, Tabar MRR, Peinke J. Short term fluctuations of wind and solar power systems. *New J. Phys.* 2016;18(6):063027. DOI: 10.1088/1367-2630/18/6/063027.
6. Anvari M, Wächter M, Peinke J. Phase locking of wind turbines leads to intermittent power production. *Europhysics Letters*. 2017;116(6):60009. DOI: 10.1209/0295-5075/116/60009.
7. Schmietendorf K, Peinke J, Kamps O. The impact of turbulent renewable energy production on power grid stability and quality. *Eur. Phys. J. B*. 2017;90:222. DOI: 10.1140/epjb/e2017-80352-8.

8. Schäfer B, Beck C, Aihara K, Witthaut D, Timme M. Non-Gaussian power grid frequency fluctuations characterized by Lévy-stable laws and superstatistics. *Nat. Energy*. 2018;3(2):119–126. DOI: 10.1038/s41560-017-0058-z.
9. Lee D, Chiang Y, Chen YT, Tsai HH. Impacts of battery energy storage system on power grid smartness: Case study of Taiwan Power Company. *Journal of Energy Storage*. 2024;86:111188. DOI: 10.1016/j.est.2024.111188.
10. Dorfler F, Bullo F. Synchronization and transient stability in power networks and nonuniform Kuramoto oscillators. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2012;50(3):1616–1642. DOI: 10.1137/110851584.
11. Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, Moreno Y, Zhou C. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*. 2008;469(3):93–153. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.09.002.
12. Filatrella G, Nielsen AH, Pedersen NF. Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model. *Eur. Phys. J. B*. 2008;61:485–491. DOI: 10.1140/epjb/e2008-00098-8.
13. Choi YP, Ha SY, Yun SB. Complete synchronization of Kuramoto oscillators with finite inertia. *Physica D*. 2011;240(1):32–44. DOI: 10.1016/j.physd.2010.08.004.
14. Lozano S, Buzna L, Díaz-Guilera A. Role of network topology in the synchronization of power systems. *Eur. Phys. J. B*. 2012;85:231. DOI: 10.1140/epjb/e2012-30209-9.
15. Fortuna L, Frasca M, Sarra Fiore A. A network of oscillators emulating the Italian high-voltage power grid. *International Journal of Modern Physics B*. 2012;26(25):1246011. DOI: 10.1142/S0217979212460113.
16. Rohden M, Sorge A, Timme M, Witthaut D. Self-organized synchronization in decentralized power grids. *Phys. Rev. Lett*. 2012;109(6):064101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.064101.
17. Carareto R, Baptista MS, Grebogi C. Natural synchronization in power-grids with anti-correlated units. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2013;18(4):1035–1046. DOI: 10.1016/j.cnsns.2012.08.030.
18. Motter AE, Myers SA, Anghel M, Nishikawa T. Spontaneous synchrony in power-grid networks. *Nature Phys*. 2013;9(3):191–197. DOI: 10.1038/nphys2535.
19. Dörfler F, Bullo F. Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey. *Automatica*. 2014;50(6):1539–1564. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.04.012.
20. Olmi S, Navas A, Boccaletti S, Torcini A. Hysteretic transitions in the Kuramoto model with inertia. *Phys. Rev. E*. 2014;90(4):042905. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.042905.
21. Grzybowski JMV, Macau EEN, Yoneyama T. On synchronization in power-grids modelled as networks of second-order Kuramoto oscillators. *Chaos*. 2016;26(11):113113. DOI: 10.1063/1.4967850.
22. Mirollo RE, Strogatz SH. The spectrum of the locked state for the Kuramoto model of coupled oscillators. *Physica D*. 2005;205(1–4):249–266. DOI: 10.1016/j.physd.2005.01.017.
23. Delabays R, Coletta T, Jacquod P. Multistability of phase-locking in equal-frequency Kuramoto models on planar graphs. *J. Math. Phys*. 2017;58(3):032703. DOI: 10.1063/1.4978697.
24. Nishikawa T, Motter AE. Comparative analysis of existing models for power-grid synchronization. *New J. Phys*. 2015;17(1):015012. DOI: 10.1088/1367-2630/17/1/015012.
25. Manik D, Witthaut D, Schäfer B, Matthiae M, Sorge A, Rohden M, Katifori E, Timme M. Supply networks: Instabilities without overload. *Eur. Phys. J. Spec. Top*. 2014;223:2527–2547. DOI: 10.1140/epjst/e2014-02274-y.
26. Coletta T, Jacquod P. Linear stability and the Braess paradox in coupled-oscillator networks and electric power grids. *Phys. Rev. E*. 2016;93(3):032222. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.032222.
27. Machowski J, Lubosny Z, Bialek JW, Bumby JR. *Power System Dynamics: Stability and Control*. N.Y.: Wiley; 2020. 896 p.
28. Tumash L, Olmi S, Schöll E. Stability and control of power grids with diluted network topology. *Chaos*. 2019;29(12):123105. DOI: 10.1063/1.5111686.

29. Gotz M, Rapp M, Dostert K. Power line channel characteristics and their effect on communication system design. *IEEE Communications Magazine*. 2004;42(4):78–86. DOI: 10.1109/MCOM.2004.1284933.
30. González-Ramos J, Uribe-Pérez N, Sendin A, Gil D, de la Vega D, Fernández I, Núñez IJ. Upgrading the power grid functionalities with broadband power line communications: Basis, applications, current trends and challenges. *Sensors*. 2022;22(12):4348. DOI: 10.3390/s22124348.
31. Bai T, Zhang H, Wang J, Xu C, El Kashlan M, Nallanathan A, Hanzo L. Fifty years of noise modeling and mitigation in power-line communications. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. 2020;23(1):41–69. DOI: 10.1109/comst.2020.3033748.
32. Antoniali M, Versolatto F, Tonello AM. An experimental characterization of the PLC noise at the source. *IEEE Transactions on Power Delivery*. 2015;31(3):1068–1075. DOI: 10.1109/TPWRD.2015.2452939.
33. Di Bert L, Caldera P, Schwingshackl D, Tonello AM. On noise modeling for power line communications. In: *IEEE International Symposium on Power Line Communications and Its Applications*. 2011, Udine, Italy. IEEE; 2011. P. 283–288. DOI: 10.1109/ISPLC.2011.5764408.
34. Meng H, Guan YL, Chen S. Modeling and analysis of noise effects on broadband power-line communications. *IEEE Transactions on Power Delivery*. 2005;20(2):630–637. DOI: 10.1109/TPWRD.2005.844349.
35. Nassar M, Gulati K, Mortazavi Y, Evans BL. Statistical modeling of asynchronous impulsive noise in powerline communication networks. In: *2011 IEEE Global Telecommunications Conference-GLOBECOM 2011*. 2011, Houston, TX, USA. IEEE; 2011. P. 1–6. DOI: 10.1109/GLOCOM.2011.6134477.
36. Ferreira HC, Lampe L, Newbury J, Swart TG. *Power Line Communications: Theory and Applications for Narrowband and Broadband Communications over Power Lines*. N.Y.: Wiley; 2010. 536 p.
37. Nassar M, Dabak A, Kim IH, Pande T, Evans BL. Cyclostationary noise modeling in narrowband powerline communication for smart grid applications. In: *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. 2012, Kyoto, Japan. IEEE; 2012. P. 3089–3092. DOI: 10.1109/ICASSP.2012.6288568.
38. Zimmermann M, Dostert K. Analysis and modeling of impulsive noise in broad-band powerline communications. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*. 2002;44(1):249–258. DOI: 10.1109/15.990732.
39. Klatt M, Meyer J, Schegner P, Koch A, Myrzik J, Darda T, Eberl G. Emission levels above 2 kHz–Laboratory results and survey measurements in public low voltage grids. In: *22nd International Conference and Exhibition on Electricity Distribution (CIRED 2013)*. 2013, Stockholm, Sweden. IEEE; 2013. P. 1–4. DOI: 10.1049/cp.2013.1102.
40. Fernandez I, Uribe-Pérez N, Eizmendi I, Angulo I, de la Vega D, Arrinda A, Arzuaga T. Characterization of non-intentional emissions from distributed energy resources up to 500 kHz: A case study in Spain. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*. 2019;105:549–563. DOI: 10.1016/j.ijepes.2018.08.048.
41. Yalcin T, Özdemir M, Kostyla P, Leonowicz Z. Analysis of supra-harmonics in smart grids. In: *IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2017 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC/I&CPS Europe)*. 2017, Milan, Italy. IEEE; 2017. P. 1–4. DOI: 10.1109/EEEIC.2017.7977812.
42. Bollen M, Olofsson M, Larsson A, Rönnberg S, Lundmark M. Standards for supraharmonics (2 to 150 kHz). *IEEE Electromagnetic Compatibility Magazine*. 2014;3(1):114–119. DOI: 10.1109/MEMC.2014.6798813.
43. Larsson EA, Bollen MH, Wahlberg MG, Lundmark CM, Rönnberg SK. Measurements of high-frequency (2–150 kHz) distortion in low-voltage networks. *IEEE Transactions on Power Delivery*. 2010;25(3):1749–1757. DOI: 10.1109/TPWRD.2010.2041371.

44. Larsson EOA, Bollen MHJ. Measurement result from 1 to 48 fluorescent lamps in the frequency range 2 to 150 kHz. In: Proceedings of 14th International Conference on Harmonics and Quality of Power-ICHQP 2010. 2010, Bergamo, Italy. IEEE; 2010. P. 1–8. DOI: 10.1109/ICHQP.2010.5625395.
45. Rönnberg SK, Bollen MH. Emission from four types of LED lamps at frequencies up to 150 kHz. In: IEEE 15th International Conference on Harmonics and Quality of Power. 2012, Hong Kong, China. IEEE; 2012. P. 451–456. DOI: 10.1109/ICHQP.2012.6381216.
46. Zimmerman R, Murillo-Sanchez C, Thomas R. MATPOWER: Steady-State Operations, Planning, and Analysis Tools for Power Systems Research and Education. IEEE Transactions on Power Systems. 2011;26(1):12–19. DOI: 10.1109/TPWRS.2010.2051168.
47. Cañizares C, Fernandes T, Geraldini Jr E., Gerin-Lajoie L, Gibbard M, Hiskens I, Kersulis J, Kuiava R, Lima L, De Marco F, Martins N, Pal BC, Piardi A, Ramos R, dos Santos J, Silva D, Singh AK, Tamimi B, Vowles D. IEEE PES Technical Report TR-18: Benchmark Systems for Small-Signal Stability Analysis and Control. IEEE PES Resource Center; 2015. 390 p.
48. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: Araki H, editor International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. Lecture Notes in Physics. Vol. 39. Berlin: Springer; 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.



Аринушкин Павел Алексеевич — родился в г. Ртищево Саратовской обл. (1994). Окончил Саратовский государственный университет имени Чернышевского (2017). Кандидат физико-математических наук (2023, СГУ). Работает инженером машинного обучения 1 категории в организации ООО «ТатИТнефть» Центра компетенции искусственного интеллекта (Альметьевск). Научные интересы — фазовые осцилляторы, математическое моделирование, энергосети, мемристоры, мультифракталы. Опубликовал 8 научных статей по указанным направлениям.

Россия, Республика Татарстан, 423450 Альметьевск, Улица Ленина, 35
 ООО «ТатИТнефть» Центр компетенции искусственного интеллекта
 E-mail: arinushkin.pavel@gmail.com
 ORCID: 0000-0003-3011-8336
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1130119



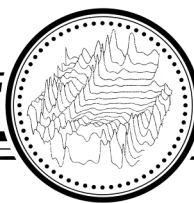
Вадивасова Татьяна Евгеньевна — родилась в Саратове (1958). Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981). Доктор физико-математических наук. В настоящее время — профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики и статистической радиофизики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических и стохастических осцилляторов, волновые структуры в активных средах, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, влияние шума и стохастические эффекты в нелинейных системах и др. Автор более 130 публикаций в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
 E-mail: vadivasovate@yandex.ru
 ORCID: 0000-0002-8081-2820
 AuthorID (eLibrary.Ru): 34840



Куприянов Владислав Дмитриевич — родился в Саратове (2001). Окончил Саратовский государственный университет им. Чернышевского (2023) по направлению «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». Научные интересы — фазовые осцилляторы, математическое моделирование, энергосети.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
 E-mail: kuprijn@mail.ru



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003154
EDN: JVIJVU

Влияние топологии связанных антиферромагнитных осцилляторов на их взаимную синхронизацию

К. Д. Самойленко^{1,2}✉, А. Ю. Митрофанова^{1,2}, А. Р. Сафин^{1,2,3}, С. А. Никитов^{1,2}

¹Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Москва, Россия

²Московский физико-технический институт, Россия

³Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

E-mail: ✉kris_samoylenko@mail.ru, nastya_mitrofanova_2000@mail.ru,
arsafin@gmail.com, nikitov@cplire.ru

Поступила в редакцию 22.08.2024, принята к публикации 21.10.2024,
опубликована онлайн 7.12.2024, опубликована 30.05.2025

Аннотация. Цель настоящего исследования — математическое описание ансамбля связанных общим дипольным полем осцилляторов, моделирование и изучение синхронизации трёх рассматриваемых топологий — кольцо, решётка и цепочка — с последующим выявлением приоритетной топологии, которая обеспечивала бы синхронизацию в большем диапазоне начальных условий. **Методы.** Для упрощения численного моделирования и изучения синхронизации систем, связанных общим дипольным полем антиферромагнитных осцилляторов, была использована модель Курамото для фазовых осцилляторов, а также параметр порядка и его среднее значение. **Результаты.** Получена математическая модель для связанных общим дипольным полем антиферромагнитных осцилляторов для трёх топологий: кольцо, решётка и цепочка. На примере модели Курамото связанных осцилляторов и с помощью параметра порядка и его среднего значения была изучена синхронизация рассматриваемых массивов и было выяснено, что решётка является преимущественной топологией при одинаковых параметрах ансамбля. **Заключение.** В работе исследована задача синхронизации ансамблей антиферромагнитных спин-Холл осцилляторов, объединённых в различные топологии: кольцо, решётку и цепочку. Показано, что решётка является наиболее предпочтительной топологией для достижения синхронизации при меньших значениях константы силы связи между осцилляторами. Для кольца и цепочки требуются более высокие значения константы силы связи. Для достижения синхронизации в них требуется существенно повышать силу связи.

Ключевые слова: синхронизация, антиферромагнитный спин-Холл осциллятор, модель Курамото, ансамбль, параметр порядка.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение № 075-15-2024-538).

Для цитирования: Самойленко К. Д., Митрофанова А. Ю., Сафин А. Р., Никитов С. А. Влияние топологии связанных антиферромагнитных осцилляторов на их взаимную синхронизацию // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. 307–321. DOI: 10.18500/0869-6632-003154. EDN: JVIJVU

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Influence of the topology of coupled antiferromagnetic oscillators on their mutual synchronization

K. D. Samoylenko^{1,2}✉, A. Yu. Mitrofanova^{1,2}, A. R. Safin^{1,2,3}, S. A. Nikitov^{1,2}

¹Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology, Russia

³National Research University «Moscow Power Engineering Institute», Moscow, Russia

E-mail: ✉kris_samoylenko@mail.ru, nastya_mitrofanova_2000@mail.ru,

arsafin@gmail.com, nikitov@cplire.ru

Received 22.08.2024, accepted 21.10.2024, available online 7.12.2024, published 30.05.2025

Abstract. The purpose of this study is to mathematically describe an ensemble of oscillators coupled by a common dipole field, to model and study the synchronization of the three topologies under consideration: a ring, a grid, and a special case of a lattice-chain, with subsequent identification of a priority topology that would ensure synchronization over a larger range of initial conditions of the ensemble. *Methods.* To simplify the numerical modeling and study the synchronization of systems of antiferromagnetic oscillators coupled by a common dipole field, the Kuramoto model for coupled oscillators, as well as the order parameter and its average value, were used. *Results.* A mathematical model for antiferromagnetic oscillators coupled by a common dipole field was obtained for three topologies: ring, grid, and chain. Using the Kuramoto model of coupled oscillators and the order parameter and its average value, the synchronization of the considered arrays was studied, and it was found that the lattice is the preferred topology for the same ensemble parameters. *Conclusion.* The paper studies the problem of synchronization of ensembles of antiferromagnetic spin-Hall oscillators combined into different topologies: ring, grid and chain. It is shown that the grid is the most preferable topology for achieving synchronization at lower values of the coupling strength constant between the oscillators. The ring and chain require higher values of the coupling strength constant, which is their disadvantage. Nevertheless, with a sufficiently strong coupling, synchronization is also possible in these topologies.

Keywords: synchronization, antiferromagnetic spin-Hall oscillator, Kuramoto model, ensemble, order parameter.

Acknowledgements. This work was supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-15-2024-538).

For citation: Samoylenko KD, Mitrofanova AYU, Safin AR, Nikitov SA. Influence of the topology of coupled antiferromagnetic oscillators on their mutual synchronization. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(3):307–321. DOI: 10.18500/0869-6632-003154

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Спинтроника является перспективным направлением развития науки и технологий. В частности, особый научный интерес вызывают спин-трансферные и спин-Холл осцилляторы (СТО и СХО соответственно), которые обладают потенциалом внедрения в СВЧ- и терагерцевой электронике. Названные спинтронные осцилляторы (СТО) могут быть реализованы как на основе ферромагнитных (ФМ) [1,2], так и антиферромагнитных (АФМ) [3–5] слоёв. Диапазон частот ФМ СТО составляет десятки ГГц, в то время как для АФМ СТО возможно возбуждение колебаний с частотами от единиц ГГц до десятков ТГц, что является преимуществом последних. В свою очередь, СХО выигрывают у СТО в простоте изготовления, что делает АФМ СХО привлекательным объектом исследования [6,7]. Исследование АФМ СХО открывает перспективы их использования в качестве источников, детекторов и спектроанализаторов ТГц-сигналов [8,9], а также логических элементов [10] и элементов нейроморфных вычислений [11]. Тем не менее низкая выходная мощность единичного АФМ СХО вызывает проблемы в практической реализации перечисленных компонентов, которые могут быть решены посредством связи и взаимной синхронизации единичных АФМ СХО в массиве [12,13].

В качестве механизма синхронизации можно использовать общее дипольное поле [14], обусловленное свойствами скошенных АФМ. Такой вид связи обеспечивает возможность построения различных топологий связанных консервативно АФМ СХО путем простого их расположения в пространстве вблизи друг друга. Таким образом, по-разному сгруппированные СХО на основе скошенных АФМ позволяют создавать сложные магнитные структуры и контролировать взаимодействие их элементов друг с другом. Также объединение АФМ осцилляторов в топологические конфигурации может обеспечить устойчивые и эффективные способы генерации и управления спиновыми волнами, что расширяет возможности применения антиферромагнитных осцилляторов. Некоторые топологии могут обеспечивать более сильную и стабильную связь и синхронизацию между осцилляторами, что влияет на эффективность передачи информации или генерацию спиновых волн, а также на возможность улучшения параметров предполагаемых устройств на основе АФМ СХО. В данной работе исследуется взаимная синхронизация связанных посредством общего дипольного поля СХО на основе скошенных АФМ. Сравниваются 3 топологии: кольцо, решётка и её частный случай — цепочка.

1. Физическая структура

Антиферромагнитный спин-Холл осциллятор — это двухслойная гетероструктура, которая состоит из слоя немагнитного металла (например, платины) и расположенного на нем АФМ [15]. По немагнитному металлу протекает постоянный электрический ток j_{DC} . Вследствие спинового эффекта Холла [16–18] при многократном рассеянии электронов появляется поток спин-поляризованных электронов с единичным вектором поляризации \mathbf{p} , и из НМ в АФМ протекает спиновый ток j_{SC} в направлении, перпендикулярном электрическому току. Вместе с течением спинового тока происходит перенос спинового момента из НМ в АФМ, в результате чего намагниченности АФМ возмущаются, при этом в зависимости от величины j_{DC} и, соответственно, от перенесенного в АФМ спинового момента происходят либо затухающие колебания намагниченностей M_1 и M_2 , либо их вращение в лёгкой плоскости (EP), то есть автоколебания [19]. Из-за обратного спинового эффекта Холла спиновый ток, протекающий из АФМ в НМ, преобразуется в переменный электрический ток ТГц-диапазона, который протекает по слою НМ и является выходным сигналом АФМ СХО.

Для увеличения мощности выходного сигнала АФМ СХО предлагается объединить несколько осцилляторов в ансамбль и синхронизировать их [20]. Связь антиферромагнитных осцилляторов может быть осуществлена с помощью двух методов: посредством общей шины немагнитного металла и общего дипольного поля. В данной работе рассматривается синхронизация АФМ СХО в режиме автоколебаний, связанных посредством общего дипольного поля. Так как данный вид связи обусловлен динамикой вектора ферромагнетизма, в данной работе в качестве активного слоя СХО рассматривается скошенный АФМ (слабый ФМ), скос намагниченностей которого объясняется взаимодействием Дзялошинского–Мория [21, 22]. Физическая структура единичного АФМ СХО изображена на рис. 1, а. Лёгкая и трудная оси АФМ сонаправлены с осями Oy и Ox на рис. 1, а соответственно, их единичные орты обозначаются как \mathbf{p}_e и \mathbf{p}_h . В результате вращения намагниченностей в лёгкой плоскости с терагерцевой частотой, пропорциональной вводимому спиновому току и обменному полю АФМ, возникает дипольное излучение с той же частотой, которое может приниматься как соседними, так и более удалёнными от данного осцилляторами ансамбля.

Рассматриваемые топологии изображены на рис. 1, b и c. Цепочка считается частным случаем решётки, продемонстрированной на рис. 1, c. Расстояние от центра системы координат до j -го осциллятора обозначено как r_j , при этом для записи последующих формул и реализации

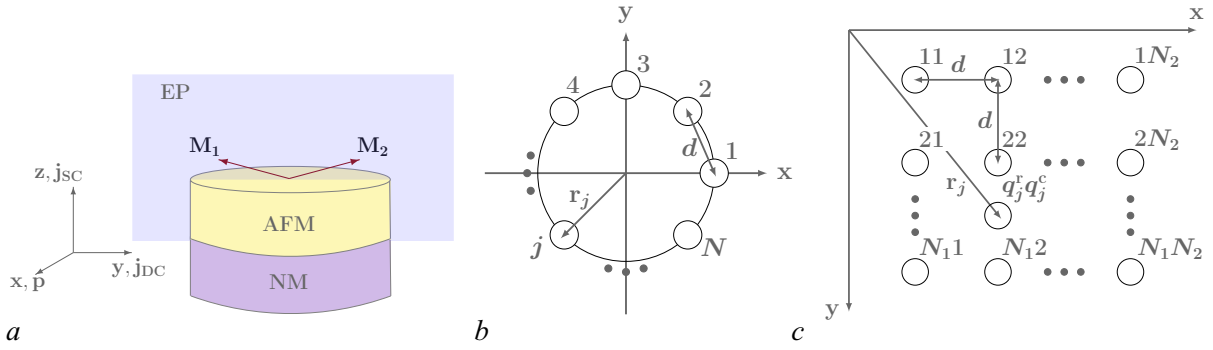


Рис. 1. Физическая структура единичного АФМ СХО и рассматриваемые варианты расположения элементов в массивах: *a* — конструкция антиферромагнитного спин-Холл осциллятора с нижним слоем немагнитного металла (NM), по которому протекает ток j_{DC} , и верхним слоем антиферромагнетика (AFM), в котором из-за поляризации \mathbf{p} спинов электронов и течения спинного тока j_{SC} происходит прецессия намагниченностей \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 в лёгкой плоскости (easy plane-EP); топологии N связанных АФМ СХО, для которых расстояние от центра системы координат до j -го осциллятора \mathbf{r}_j , расстояние между двумя ближайшими осцилляторами d : *b* — кольцо, *c* — решётка, где q_j^r и q_j^c являются индексами строки и столбца соответственно

Fig. 1. Physical structure of a single AFM SCHO and the considered variants of arrangement of elements in arrays; *a* — design of an antiferromagnetic spin-Hall oscillator with a lower layer of non-magnetic metal (NM), through which current j_{DC} flows and an upper layer of antiferromagnet (AFM), in which, due to polarization \mathbf{p} of electron spins and the flow of spin current j_{SC} , precession of magnetizations \mathbf{M}_1 and \mathbf{M}_2 occurs in the easy plane (EP); topologies of N coupled AFM SCWs for which the distance from the center of the coordinate system to the j -th oscillator \mathbf{r}_j , the distance between two nearest oscillators d : *b* — ring, *c* — grid, where q_j^r and q_j^c are the row and column indices, respectively

вычислительных экспериментов индексы j -го осциллятора в решётке, которые отвечают за номера строки и столбца, обозначаются в виде q_j^r и q_j^c . Так как результаты моделирования связанных осцилляторов, расположенных в цепочке, не зависят от направления самой цепи, то в этом случае нет необходимости уточнять номер строки и столбца, поэтому для j -го осциллятора цепочки не принято никаких прочих обозначений. Во всех трёх топологиях расстояние между двумя ближайшими осцилляторами одинаково и равно d . Нумерация осцилляторов начинается с единицы, последний осциллятор имеет номер N , то есть $j = \overline{1, N}$, при этом в решётке количество строк и столбцов обозначено как N_1 и N_2 соответственно.

2. Математическая модель

Уравнение для вектора \mathbf{l}_j антиферромагнитного момента j -го осциллятора [15, 23–25] имеет вид

$$\mathbf{l}_j \times \left(\ddot{\mathbf{l}}_j + \alpha \omega_{ex} \dot{\mathbf{l}}_j - 2\gamma [\dot{\mathbf{l}}_j \times \mathbf{H}_j] + \frac{\partial W_{AFMj}}{\partial \mathbf{l}_j} + \sigma j_{DCj} \omega_{ex} [\mathbf{p} \times \mathbf{l}_j] \right) = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

где α — коэффициент затухания Гильберта, γ — гиромагнитное отношение, $\omega_{ex} = \gamma H_{ex}$ — частота обменного поля H_{ex} , $\sigma = 2\pi \cdot 4.32 \text{ рад} \cdot \text{см}^2 / (\text{А} \cdot \text{с})$ — коэффициент, характеризующий перенос спинного момента из слоя НМ в АФМ, j_{DCj} — плотность постоянного тока, протекающего через j -й осциллятор. Расстояние между i -м и j -м осцилляторами $\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, в матричном виде для кольца $\mathbf{r}_{ji} = d \sin \pi(i-j)/N \quad (-\sin \pi(i+j)/N \quad \cos \pi(i+j)/N \quad 0)^T$, а для решётки $\mathbf{r}_{ji} = d (q_i^c - q_j^c \quad q_i^r - q_j^r \quad 0)^T$. Поле взаимодействия между i -м и j -м осцилляторами с объёмом V_0

$$\mathbf{H}_{ij} = \frac{V_0}{r_{ij}^3} \left(\frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2} - \mathbf{m}_i \right). \quad (2)$$

В рассматриваемой модели магнитный момент i -го осциллятора

$$\mathbf{m}_i = \frac{2M_0[\mathbf{H}_{\text{DMI}} \times \mathbf{l}_i]}{H_{\text{ex}}}, \quad (3)$$

где \mathbf{H}_{DMI} — поле взаимодействия Дзялошинского–Мория, M_0 — намагниченность насыщения подрешёток антиферромагнетика. Тогда суммарное поле для отдельно взятого осциллятора относительно остальных элементов системы выражается как

$$\mathbf{H}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N \mathbf{H}_{ij}. \quad (4)$$

Энергия, выражение для которой включает $\omega_{e,h} = \gamma H_{e,h}$ — частоты полей H_e и H_h анизотропии в плоскости и вне плоскости легкого намагничивания:

$$W_{\text{AFM}_j} = -\frac{\omega_e \omega_{\text{ex}}}{2} (\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{n}_e)^2 + \frac{\omega_h \omega_{\text{ex}}}{2} (\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{n}_h)^2 + \frac{\gamma^2}{2} (\mathbf{H}_j \cdot \mathbf{l}_j)^2 + \gamma^2 \mathbf{l}_j \cdot [\mathbf{H}_j \times \mathbf{H}_{\text{DMI}}]. \quad (5)$$

Так как вращение единичного вектора \mathbf{l}_j происходит в лёгкой плоскости, в сферической системе координат его можно записать в виде $\mathbf{l}_j = (\cos \varphi_j \sin \varphi_j \ 0)^T$, $\theta_j = \pi/2$. Тогда итоговое уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_j + a \omega_{\text{ex}} \dot{\varphi}_j + \frac{\omega_e \omega_{\text{ex}}}{2} \sin 2\varphi_j + \frac{3}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^N k_{i1} \cos(\varphi_i + \varphi_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^N k_{i2} \sin(\varphi_i - \varphi_j) + \\ + \frac{3}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^N k_{i3} \sin(\varphi_i + \varphi_j) = \sigma j_{\text{DC}} \omega_{\text{ex}}, \end{aligned} \quad (6)$$

а физические коэффициенты связи $k_{i1, i2, i3}$ для рассматриваемых топологий представлены в [Таблице](#), где $a = \left(\sqrt{2(1 - \cos 2\pi|i-j|/N)}/2 |\sin \pi(i-j)/N| \right)^3$, $b = \left[(q_i^r - q_j^r)^2 + (q_i^e - q_j^e)^2 \right]^{2/3}$, $\zeta = 2\gamma^2 V_0 M_0 H_{\text{DMI}}^2 / (d^3 H_{\text{ex}})$.

В общем случае динамика связанных фазовых осцилляторов описывается моделью Курамото [26–30]. С помощью различных методов возмущения [31] возможно перейти от исходных уравнений связанных осцилляторов типа (6) к модели фазовых осцилляторов Курамото, как это было сделано, например, в [32] для массивов джозефсоновских контактов, описываемых аналогичными дифференциальными уравнениями, посредством метода многих временных масштабов. После этого соответствующие уравнения для фаз отдельных осцилляторов примут вид

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \sum_{i=1, i \neq j}^N k_{ij} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad k_{ij} = k a_{ij}, \quad (7)$$

Таблица. Физические коэффициенты связи для разных топологий

Table. Physical coupling coefficients for different topologies

	k_{i1}	k_{i2}	k_{i3}
Цепочка	0	$\frac{\zeta}{ i-j ^3}$	$\frac{\zeta}{ i-j ^3}$
Кольцо	$\zeta a \sin \frac{2\pi(i+j)}{N}$	ζa	$-\zeta a \cos \frac{2\pi(i+j)}{N}$
Решётка	$2\zeta b \cdot \frac{(q_i^r - q_j^r)(q_i^e - q_j^e)}{(q_i^r - q_j^r)^2 + (q_i^e - q_j^e)^2}$	ζb	$\zeta b \cdot \frac{(q_i^e - q_j^e)^2 - (q_i^r - q_j^r)^2}{(q_i^r - q_j^r)^2 + (q_i^e - q_j^e)^2}$

где $\omega_j = \sigma j_{\text{DC}_j} / \alpha$ — собственная частота колебаний j -ого осциллятора, k_{ij} — коэффициент связи модели Курамото, k — константа силы связи, которая подбирается эмпирически для достижения синхронизации из-за условного перехода от модели антиферромагнитных осцилляторов к модели Курамото, $a_{ij} = V_0 / r_{ij}^3$ является элементом матрицы связи между осцилляторами. Коэффициенты связи модели (1) определяются положением конкретно выбранных осцилляторов в ансамбле, то есть геометрическим расположением элементов внутри системы, а значит, непосредственный расчёт расстояний между выбранными осцилляторами не производится. Отметим, что фазы осцилляторов $\varphi(t)$ в уравнении (7) не совпадают с полярными углами поворота вектора Нееля из уравнений (6). Далее будем пользоваться обозначением для фаз осцилляторов $\varphi(t)$, предполагая, что они удовлетворяют модели Курамото (7). В ней связь осцилляторов относительно друг друга выражается через расстояние r_{ij} , которое определяет отдаление элементов системы между собой, поэтому матрица связи a_{ij} представляет собой эквивалент коэффициентов связи, указанных в Таблице исходной модели. Обратим внимание, что записанная модель Курамото является безразмерной и производная здесь берётся от переменной времени, отличной от (6). Определить факт установления синхронизации возможно с помощью параметра порядка, который показывает степень синхронизации [33]

$$r(t) = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \exp\{i\varphi_i(t)\} \right|. \quad (8)$$

Значения параметра порядка принадлежат интервалу от 0 до 1. Чем ближе значение функции $r(t)$ к 1, тем выше степень синхронизации. Параметр порядка — функция, зависящая от времени, а значит, для оценки факта установления синхронизации нужен визуальный контроль, что достаточно времязатратно. Поэтому для оценки влияния количества осцилляторов в различных топологиях на синхронизацию АФМ СХО мы будем использовать среднее значение параметра порядка за время T , которое разбивается на точки t_1, \dots, t_p , которое записывается в виде

$$r_{\text{av}} = \frac{1}{T} \sum_{p=1}^T r(t_p). \quad (9)$$

3. Результаты

В качестве скошенного антиферромагнетика рассматривается гематит $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ с физическими параметрами $\alpha = 3.5 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 2\pi \cdot 28$ ГГц/Тл, $M_0 = 840$ Тл, $H_{\text{ex}} = 900$ Тл, $H_e = 0.06$ Тл, $H_{\text{DMI}} = 2.2$ Тл; размеры осциллятора: $V_0 = 1571$ нм³, $r = 10$ нм; расстояние между соседними осцилляторами ансамбля $d_0 = 100$ нм. В работе для проведения численного моделирования были выбраны типичные параметры антиферромагнитных структур [23]. Исследование влияния разброса параметров на параметры синхронизации является, несомненно, важной задачей, но составляет предмет отдельного детального исследования и в работе не приводится. Рассмотрим АФМ СХО, через которые должны протекать одинаковые токи, то есть идентичные осцилляторы. Тем не менее технические особенности реализации АФМ СХО могут привести к незначительной разнице между электрическими токами j_{DC_j} , протекающими по НМ разных СХО. Так как именно j_{DC_j} определяют собственную частоту j -го осциллятора ω_j , мы считаем, что собственные частоты разных осцилляторов также незначительно отличаются друг от друга. Собственные частоты осцилляторов нормированы к коэффициенту затухания Гильберта и частоте поля H_e , тогда формула принимает вид $\omega_j = \sigma j_{\text{DC}_j} / \gamma H_e$, для плотности тока $j_{\text{DC}_j} = 4 \cdot 10^8$ А/см² частоты собственных колебаний осцилляторов принимают значения $\omega_j \approx 1$. На рис. 2 представлены результаты вычислительного эксперимента над моделью Курамото (7) и соответствующие им зависимости $r(t)$ (8). Для численного моделирования было выбрано $N = 16$, начальные фазы $\varphi_j(t = 0) = \varphi_{0j}$ были

случайно распределены на интервале $[0, 2\pi]$, при этом результаты на рис. 2, *a*, *b*, *c* соответствуют одинаковым начальным условиям. Время интегрирования (7) составило $T = 1000$, однако, так как начиная с $t = 50$ состояние системы не меняется, графики на рис. 2 ограничиваются именно этим временем. На рис. 2, *a* продемонстрирован пример установления синхронизации с разностями фаз, близкими к нулевым, то есть в системе колебания АФМ осцилляторов происходят с одинаковой фазой, константа силы связи между осцилляторами составляет $k = 100$, тогда нормированная на константу затухания Гильберта сила связи будет определяться выражением $\tilde{k} = \alpha k = 0.35$, равномерное распределение собственных частот колебаний осцилляторов $\omega_j \in [1, 1.1]$. Данному случаю соответствует увеличение параметра порядка $r(t)$ до единицы. Рис. 2, *b* иллюстрирует случай, когда в массиве колебания осцилляторов происходят с разными, но постоянными фазами, $\tilde{k} = 0.35$; равномерное распределение собственных частот колебаний осцилляторов $\omega_j \in [1, 1.5]$, здесь параметр порядка устанавливается постоянным значением,

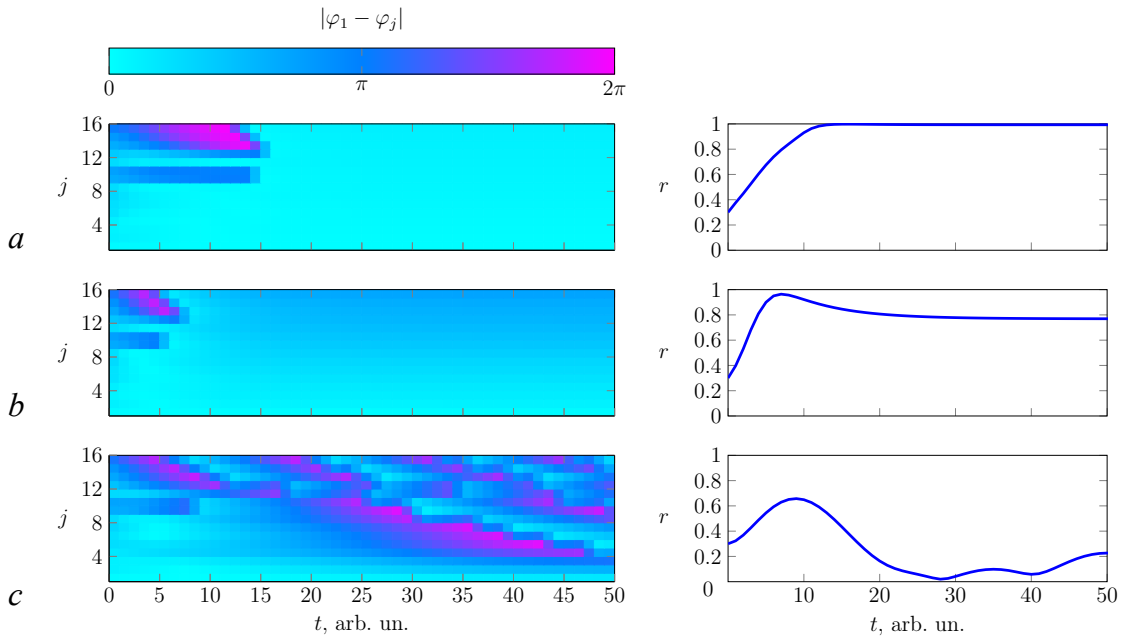


Рис. 2. Визуализация разностей фаз $|\varphi_1 - \varphi_j|$ и графиков функции $r(t)$ для топологии решётки, состоящей из 16 осцилляторов со случайным разбросом фаз в начальный момент времени $[0, 2\pi]$ для трёх случаев: *a* — $|\varphi_1 - \varphi_j| \approx 0$, сила связи с учетом затухания Гильберта $\tilde{k} = 0.35$, равномерное распределение собственных частот колебаний осцилляторов $\omega_j \in [1, 1.1]$, наблюдается синхронизация, функция $r(t)$ возрастает до единицы; *b* — $|\varphi_1 - \varphi_j| = \text{const} \neq 0$, сила связи с учетом затухания Гильберта $\tilde{k} = 0.35$, равномерное распределение собственных частот колебаний осцилляторов $\omega_j \in [1, 1.5]$, наблюдается синхронизация, функция $r(t)$ возрастает, но из-за ненулевой постоянной разности фаз не достигает единицы: $r < 1 \approx 0.8$; *c* — $|\varphi_1 - \varphi_j| \neq \text{const}$, сила связи с учетом затухания Гильберта $\tilde{k} = 0.035$, равномерное распределение собственных частот колебаний осцилляторов $\omega_j \in [1, 1.5]$, отсутствие синхронизации, значение функции $r(t)$ зависит от состояния ансамбля, может как убывать, так и возрастать в зависимости от текущего значения разности фаз (цвет онлайн)

Fig. 2. Visualization of phase differences $|\varphi_1 - \varphi_j|$ and graphs of function $r(t)$ for the grid topology consisting of 16 oscillators with random phase spread at the initial time $[0, 2\pi]$ for three cases: *a* — $|\varphi_1 - \varphi_j| \approx 0$, coupling strength taking into account Hilbert damping $\tilde{k} = 0.35$, uniform distribution of oscillator natural frequencies $\omega_j \in [1, 1.1]$, synchronization is observed, function $r(t)$ increases to unity; *b* — $|\varphi_1 - \varphi_j| = \text{const} \neq 0$, coupling strength taking into account Hilbert damping $\tilde{k} = 0.35$, uniform distribution of natural frequencies of oscillators $\omega_j \in [1, 1.5]$, synchronization is observed, function $r(t)$ increases, but, due to non-zero constant phase difference, does not reach unity: $r < 1 \approx 0.8$; *c* — $|\varphi_1 - \varphi_j| \neq \text{const}$, coupling strength taking into account Hilbert damping $\tilde{k} = 0.035$, uniform distribution of oscillators' natural frequencies $\omega_j \in [1, 1.5]$, no synchronization, the value of the function $r(t)$ depends on the state of the ensemble, can either decrease or increase depending on the current value of the phase difference (color online)

меньше единицы, $r \approx 0.8$. Таким образом, рис. 2, *a*, *b* демонстрируют наличие синхронизации, что вызвано сильной связью между элементами ансамбля, которая компенсирует разброс собственных частот колебаний осцилляторов. Отметим, что оба описанных режима можно использовать в приложениях. Так, массив синхронизированных АФМ осцилляторов (рис. 2, *a*) можно использовать в качестве генератора ТГц-сигнала, так как параметр порядка равен одному и ансамбль работает как единая система — большой осциллятор, при прохождении постоянного тока через который на выходе имеем переменный ток ТГц-диапазона, в то время как случай массива на рис. 2, *b* может найти применение в нейроморфных вычислениях. В данном примере частоты на всех осцилляторах были различны, хоть и близки между собой, о чём говорит значение параметра порядка. Таким образом, проводя разные токи через разные группы осцилляторов, можно добиться того, чтобы на каких-то элементах частоты были одни, а на другой группе — другие. Тогда если мы используем ансамбль в качестве нейроморфного решателя, то входные данные — это значения токов или начальные условия, а выходные — частоты осцилляторов. Например, таким нейроморфным решателем можно решить задачу восстановления зашумленного изображения, ассоциируя разные цвета с разными выходными частотами. На рис. 2, *c* продемонстрировано отсутствие синхронизации, что вызвано непостоянной разностью фаз и меньшим значением константы силы связи между осцилляторами $k = 10$ и $\tilde{k} = 0.035$ в сравнении с предыдущими случаями при равномерном распределении собственных частот колебаний осцилляторов $\omega_j \in [1, 1.5]$. Соответствующий такой системе параметр порядка не постоянен, а зависит от состояния ансамбля в конкретный момент времени t : может как убывать, так и возрастать в зависимости от характера изменения значения разности фаз. Выбор величины константы связи для выбранного механизма полевой связи существенно зависит от расстояния между соседними элементами и убывает с расстоянием. Мы проводили численные исследования с моделью Курамото и такими значениями коэффициентов связи, которые соответствуют как близкому расположению осцилляторов (сильная связь), так и дальнему расположению осцилляторов (слабая связь).

В следующих сериях вычислительных экспериментов ω_j и φ_{0j} распределены равномерно на интервале $[1, 1.1]$ и $[0, \pi]$ соответственно. Теперь, когда мы продемонстрировали возможные режимы системы связанных АФМ СХО и связанное с ними поведение параметра порядка, перейдем к сравнению топологий. Рассматривается зависимость среднего значения параметра порядка r_{av} (9) от константы силы связи k , которая варьируется в диапазоне $0 \leq k \leq 2 \cdot 10^4$, тогда сила связи, с учетом затухания Гильберта, принимает значения $0 \leq \tilde{k} \leq 70$ для фиксированного числа осцилляторов $N = 100$. Использование большого количества осцилляторов позволяет получить результаты, более близкие к реальным системам, где число взаимодействующих элементов, как правило, велико, а также явно демонстрирует особенности рассматриваемых топологий. При этом уменьшались временные затраты на численное решение системы во время проведения вычислительных экспериментов в сравнении с числом осцилляторов ансамбля порядка тысяч элементов. Построенная зависимость представлена на рис. 3. Стоит отметить, что особый интерес представляет выявление значения константы силы связи k , для которой характерно наступление синхронизации, а конкретно $r_{av} \approx 1$ для каждой из рассматриваемых топологий. Так, для топологий решётка, кольцо и цепочка значения \tilde{k} , при которых $r_{av} \geq 0.999$, составляют 2.1, 61.6 и 320.25 соответственно. Из-за большого разброса значений \tilde{k} между рассматриваемыми топологиями визуализация момента наступления синхронизации для каждого массива связанных осцилляторов является затруднительной, поэтому отображение на рис. 3 ограничивается значением $\tilde{k} = 70$. Увеличение константы силы связи ансамбля k приводит к обеспечению более сильной связи между осцилляторами, благодаря чему система приближается к состоянию синхронизации. Для наступления синхронизации в решётке требуется наименьшее значения константы силы связи k по сравнению с кольцом и цепочкой, так как вклад в среднее значение параметра порядка r_{av} соседних осцилляторов больше в силу особенности расположения осцилляторов в ансамбле, а именно:

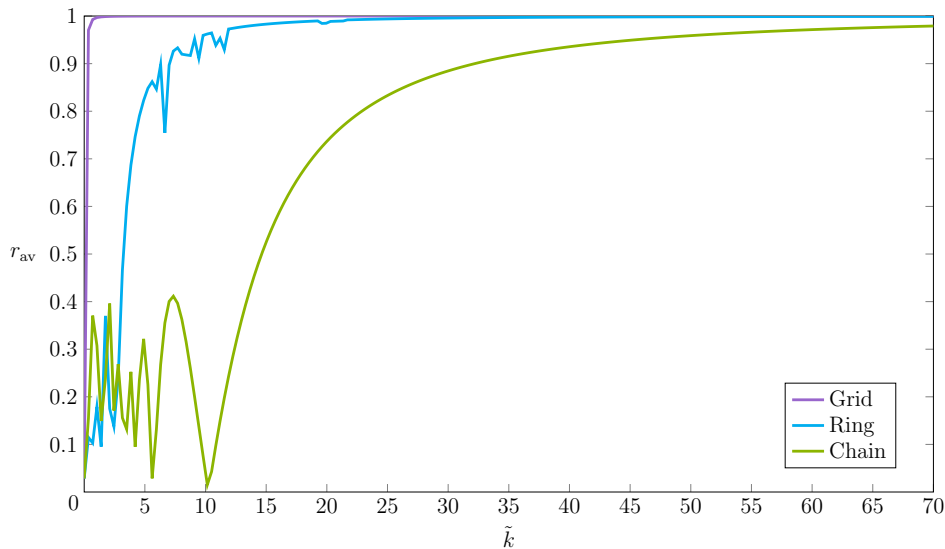


Рис. 3. Зависимость среднего значения параметра порядка r_{av} для $N = 100$ осцилляторов ансамбля от силы связи с учетом затухания Гильберта \tilde{k} , принимающей значения $0 \leq k \leq 70$, для равномерного распределения частот собственных колебаний осцилляторов $\omega_j \in [1, 1.1]$ и фаз в начальный момент времени $\varphi_{0j} \in [0, \pi]$; все рассматриваемые топологии стремятся к синхронизации, достижение среднего значения параметра порядка, близкого к единице $r_{av} \geq 0.999$, происходит в решётке при $\tilde{k} = 2.1$, в кольце при $\tilde{k} = 61.6$, в цепочке при $\tilde{k} = 320.25$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Dependence of the average value of the order parameter r_{av} for $N = 100$ oscillators of the ensemble on the coupling strength taking into account the Hilbert damping \tilde{k} , taking the values $0 \leq k \leq 70$, for a uniform distribution of the frequencies of the oscillators' natural oscillations $\omega_j \in [1, 1.1]$ and the phases at the initial moment of time $\varphi_{0j} \in [0, \pi]$; all the topologies under consideration tend to synchronization, the average value of the order parameter close to one $r_{av} \geq 0.999$ is achieved in the grid at $\tilde{k} = 2.1$, in the ring: $\tilde{k} = 61.6$, in the chain: $\tilde{k} = 320.25$ (color online)

число соседних осцилляторов для каждого рассматриваемого элемента системы варьируется от 2 до 4 в зависимости от его расположения в решётке, в то время как для кольца и цепочки число ближайших соседей не может превышать 2. Как видно из рис. 3, для цепочки среднее значение параметра порядка r_{av} меньше относительно других топологий из-за большого расстояния между 1-м и N -м осциллятором ансамбля, поэтому достижение состояния синхронизации для данной топологии затруднительно в сравнении с остальными топологиями. Нестабильный характер кольца и цепочки представляет собой интересный вопрос для будущего исследования. Таким образом, делаем вывод о том, что при обеспечении сильной связи в ансамбле, независимо от топологии, система стремится к синхронизации.

В следующем вычислительном эксперименте рассматривается зависимость среднего значения параметра порядка r_{av} (9) от числа осцилляторов N , который увеличивается в диапазоне $N = 4, \dots, 100$ для трёх различных значений константы силы связи $k = 50, 200, 500$, то есть для сил связи с учетом затухания Гильберта $\tilde{k} = 0.175, 0.7, 1.75$. Результат представлен на рис. 4. Увеличение k приводит к обеспечению более сильной связи между осцилляторами и нахождению системы в синхронизации для большего числа осцилляторов системы N . На решётке увеличение числа осцилляторов сказывается меньше из-за того, что расстояние, которое вносит вклад в коэффициенты связи модели Курамото k_{ij} , увеличивается только между осцилляторами, которые находятся на гранях решётки, поэтому синхронизация в решётке сохраняется для большого числа осцилляторов. Для кольца увеличение числа N приводит к увеличению диаметра кольца, в котором расположены осцилляторы, а значит, происходит увеличение расстояния между диаметрально противоположными элементами ансамбля, что вносит значительный вклад в среднее значение параметра порядка r_{av} . Поэтому для кольца требуется большее значения константы силы связи

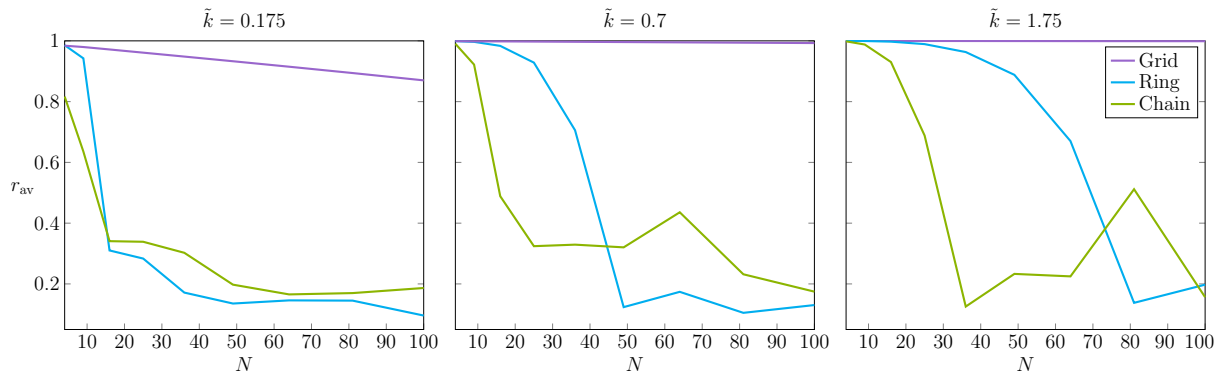


Рис. 4. Зависимость среднего значения параметра порядка r_{av} от количества осцилляторов в ансамбле для $N = 4, \dots, 100$ и трёх значений силы связи с учетом затухания Гильберта $\tilde{k} = 0.175, 0.7, 1.75$ при равномерных распределениях частот собственных колебаний осцилляторов $\omega_j \in [1, 1.1]$ и фаз в начальный момент времени $\varphi_{0j} \in [0, \pi]$ для трёх рассматриваемых топологий: кольцо, решётка и цепочка (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of the average value of the order parameter r_{av} on the number of oscillators in the ensemble for $N = 4, \dots, 100$ and three values of the coupling strength taking into account the Hilbert attenuation $\tilde{k} = 0.175, 0.7, 1.75$ with uniform distributions of the frequencies of the oscillators' natural oscillations $\omega_j \in [1, 1.1]$ and phases at the initial time $\varphi_{0j} \in [0, \pi]$ for the three topologies under consideration: ring, grid and chain (color online)

k для сохранения состояния синхронизации в сравнении с решёткой. Наибольшим количеством отдалённых друг от друга осцилляторов в ансамбле характеризуется цепочка, на которую увеличение числа элементов сказывается наибольшим образом, а значит, достичь синхронизации можно только при больших значениях константы силы связи k , что ярко выражено на рис. 4.

Заключение

В работе исследована задача синхронизации АФМ СХО, связанных общим дипольным полем и объединенных в 3 разные топологии: кольцо, решётку и цепочку. Дифференциальное уравнение (6), описывающее связь между попарно рассматриваемыми осцилляторами ансамбля, в результате математического вывода оказалось общим для трёх рассматриваемых топологий. Коэффициенты связи модели (1) определяются геометрическим расположением элементов внутри системы, а не непосредственным расчётом расстояний между выбранными осцилляторами ансамбля в отличие от модели Курамото (7), которая является общим случаем описания динамики связанных фазовых осцилляторов, где матрица связи представляет собой эквивалент коэффициентов связи, указанных в Таблице исходной модели. На примере модели Курамото была рассмотрена зависимость синхронизации различных ансамблей связанных осцилляторов от топологии, числа осцилляторов и силы связи k . Оценка синхронизации осуществлялась с помощью построения графиков параметра порядка $r(t)$ и его среднего значения r_{av} . Численные эксперименты по изучению среднего значения параметра порядка от параметров рассматриваемых ансамблей показали, что изучаемые осцилляторы синхронизируются при увеличении константы силы связи. Решётка в данном эксперименте является преимущественной топологией в силу достижения синхронизации при наименьших значениях константы силы связи из трёх рассмотренных вариантов расположения осцилляторов. В данной топологии число соседних осцилляторов для каждого элемента варьируется от 2 до 4 в зависимости от расположения рассматриваемого осциллятора, причем для большого числа N превалирует именно 4, так как число осцилляторов, расположенных на гранях решётки, становится меньше относительно общего числа элементов ансамбля. Для такого же числа АФМ СХО, но расположенных в кольце или цепочке, число соседних осцилляторов не может составлять больше 2, чем вызвана более слабая связь в данных ансамблях.

Поэтому можем сделать вывод о том, что для кольца и цепочки значения константы силы связи должны быть выше, чем для случая решётки, что является недостатками данных топологий и связано с особенностями типа расположения осцилляторов в ансамбле. Тем не менее, если существует необходимость объединения осцилляторов именно в кольцо или цепочку, добиться синхронизации и функционирования массива как единой системы можно с помощью увеличения константы силы связи ансамбля. Тогда даже в случае большого числа элементов системы при k , обеспечивающем сильную связь ансамбля, синхронизация возможна.

Список литературы

1. Kim S. K., Beach G. S., Lee K. J., Ono T., Rasing T., Yang H. Ferrimagnetic spintronics // *Nat. Mater.* 2022. Vol. 21, iss. 1. P. 24–34. DOI: 10.1038/s41563-021-01139-4.
2. Kim K. W., Park B. G., Lee K. J. Spin current and spin-orbit torque induced by ferromag-nets // *npj Spintronics*. 2024. Vol. 2, iss. 1. P. 8. DOI: 10.1038/s44306-024-00010-x.
3. Gomonay O., Baltz V., Brataas A., Tserkovnyak Y. Antiferromagnetic spin textures and dynamics // *Nature Phys.* 2018. Vol. 14, iss. 3. P. 213–216. DOI: 10.1038/s41567-018-0049-4.
4. Han J., Cheng R., Liu L., Ohno H., Fukami S. Coherent antiferromagnetic spintronics // *Nat Mater.* 2023. Vol. 22, iss. 6. P. 684–695. DOI: 10.1038/s41563-023-01492-6.
5. Иванов Б. А. Спиновая динамика антиферромагнетиков и сверхбыстрая спинтроника // *ЖЭТФ*. 2020. Т. 158, № 1(7). С. 103–123. DOI: 10.31857/S004445102007010X.
6. Zhang W., Jungfleisch M. B., Jiang W., Pearson J. E., Hoffmann A., Freimuth F., Mokrousov Y. Spin Hall effects in metallic antiferromagnets // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 113, iss. 19. P. 196602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.196602.
7. Puliafito V., Khymyn R., Carpentieri M., Azzerboni B., Tiberkevich V., Slavin A., Finocchio G. Micromagnetic modeling of terahertz oscillations in an antiferromagnetic material driven by the spin Hall effect // *Phys. Rev. B*. 2019. Vol. 99, iss. 2. P. 024405. DOI: 10.1103/PhysRevB.99.024405.
8. Cheng R., Xiao D., Brataas A. Terahertz antiferromagnetic spin Hall nano-oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 116, iss. 20. P. 207603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.207603.
9. Safin A., Puliafito V., Carpentieri M., Finocchio G., Nikitov S., Stremoukhov P., Kirilyuk A. I., Tyberkevych V., Slavin A. N. Electrically tunable detector of THz-frequency signals based on an antiferromagnet // *Appl. Phys. Lett.* 2020. Vol. 117, iss. 22. P. 222411. DOI: 10.1063/5.0031053.
10. Sulymenko O., Prokopenko O., Lisenkov I., Åkerman J., Tyberkevych V., Slavin A. N., Khymyn R. Ultra-fast logic devices using artificial “neurons” based on antiferromagnetic pulse generators // *J. Appl. Phys.* 2018. Vol. 124, iss. 15. P. 152115. DOI: 10.1063/1.5042348.
11. Mitrofanova A. Yu., Safin A. R., Kravchenko O. V. Neuromorphic computing based on an antiferromagnet-heavy metal hybrid structure under the action of laser pulses // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. Vol. 2127, iss. 1. P. 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/2127/1/012023.
12. Tsunegi S., Taniguchi T., Lebrun R., Yakushiji K., Cros V., Grollier J., Fukushima A., Yuasa S., Kubota H. Scaling up electrically synchronized spin torque oscillator networks // *Sci. Rep.* 2018. Vol. 8, iss. 1. P. 13475. DOI: 10.1038/s41598-018-31769-9.
13. Dieny B., Prejbeanu I. L., Garello K., Gambardella P., Freitas P., Lehdorff R., Raberg W., Ebels U., Demokritov S. O., Åkerman J., Deac A., Pirro P., Adelmann C., Anane A., Chumak A. V., Hirohata A., Mangin S., Valenzuela S. O., Onbaşlı M. C., d’Aquino M., Prenat G., Finocchio G., Lopez-Diaz L., Chantrell R., Chubykalo-Fesenko O., Bortolotti P. Opportunities and challenges for spintronics in the microelectronics industry // *Nat. Electron.* 2020. Vol. 3, iss. 8. P. 446–459. DOI: 10.1038/s41928-020-0461-5.
14. Sulymenko O. R., Prokopenko O. V., Tiberkevich V. S., Slavin A. N., Ivanov B. A., Khymyn R. S. Terahertz-frequency spin Hall auto-oscillator based on a canted antiferromagnet // *Phys. Rev. Applied.* 2017. Vol. 8, iss. 6. P. 064007. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.8.064007.

15. *Khymyn R., Lisenkov I., Tiberkevich V., Ivanov B. A., Slavin A.* Antiferromagnetic THz-frequency Josephson-like oscillator driven by spin current // *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7, iss. 1. P. 43705. DOI: 10.1038/srep43705.
16. *Dyakonov M.* Magnetoresistance due to edge spin accumulation // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99, iss. 12. P. 126601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.126601.
17. *Hoffmann A.* Spin Hall effects in metals // *IEEE Trans. Magnetics.* 2013. Vol. 49, iss. 10. P. 5172–5193. DOI: 10.1109/TMAG.2013.2262947.
18. *Taniguchi T.* Magnetoresistance originated from charge-spin conversion in ferromagnet // *AIP Advances.* 2018. Vol. 8, iss. 5. P. 055916. DOI: 10.1063/1.5003397.
19. *Сафин А. Р., Никитов С. А.* Нелинейная динамика антиферромагнитного спинтронного осциллятора // *Известия вузов. Радиофизика.* 2018. Т. 61, №. 11. С. 937–944.
20. *Hong H., Park H., Choi M. Y.* Collective synchronization in spatially extended systems of coupled oscillators with random frequencies // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72, iss. 3. P. 036217. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.036217.
21. *Moriya T.* Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism // *Phys. Rev.* 1960. Vol. 120, iss. 1. P. 91–98. DOI: 10.1103/PhysRev.120.91.
22. *Дзялошинский И. Е.* Термодинамическая теория «слабого» ферромагнетизма антиферромагнетиков // *ЖЭТФ.* 1957. Т. 32, №. 6. С. 1547–1563.
23. *Ozhogin V. I., Preobrazhenskii V. L.* Effective anharmonicity of elastic subsystem in antiferromagnets // *Physica B+C.* 1977. Vol. 86–88. P. 979–981. DOI: 10.1016/0378-4363(77)90768-9.
24. *Звездин А. К.* О динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках // *Письма в ЖЭТФ.* 1979. Т. 29, №. 10. P. 605–610.
25. *Иванов Б. А., Лапченко В. Ф., Сукстанский А. Л.* Поверхностные спиновые волны в антиферромагнетиках // *Физика твердого тела.* 1985. Т. 27, №. 1. С. 173–180.
26. *Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77, iss. 1. P. 137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
27. *Rodrigues F. A., Peron T. K. D., Kurths P. J.* The Kuramoto model in complex networks // *Phys. Rep.* 2016. Vol. 610. P. 1–98. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.10.008.
28. *Garg N., Bhotla S. V. H., Muduli P. K., Bhowmik D.* Kuramoto-model-based data classification using the synchronization dynamics of uniform-mode spin Hall nano-oscillators // *Neuromorph. Comput. Eng.* 2021. Vol. 1, iss. 2. P. 024005. DOI: 10.1088/2634-4386/ac3258.
29. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101, iss. 26. P. 264103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.264103.
30. *Митрофанова А. Ю., Сафин А. Р., Кравченко О. В., Никитов С. А.* Взаимная синхронизация антиферромагнитных спинтронных осцилляторов // *Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника.* 2022. Т. 25, №. 5. С. 80–90. DOI: 10.32603/1993-8985-2022-25-5-80-90.
31. *Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 447 с.
32. *Trees B. R., Saranathan V., Stroud D.* Synchronization in disordered Josephson junction arrays: Small-world connections and the Kuramoto model // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, iss. 1. P. 016215. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.016215.
33. *Frank T. D., Richardson M. J.* On a test statistic for the Kuramoto order parameter of synchronization: An illustration for group synchronization during rocking chairs // *Physica D.* 2010. Vol. 239, iss. 23–24. P. 2084–2092. DOI: 10.1016/j.physd.2010.07.015.

References

1. Kim SK, Beach GS, Lee KJ, Ono T, Rasing T, Yang H. Ferrimagnetic spintronics. *Nat. Mater.* 2022;21(1):24–34. DOI: 10.1038/s41563-021-01139-4.
2. Kim KW, Park BG, Lee KJ. Spin current and spin-orbit torque induced by ferromagnets. *npj Spintronics.* 2024;2(1):8. DOI: 10.1038/s44306-024-00010-x.
3. Gomonay O, Baltz V, Brataas A, Tserkovnyak Y. Antiferromagnetic spin textures and dynamics. *Nature Phys.* 2018;14(3):213–216. DOI: 10.1038/s41567-018-0049-4.
4. Han J, Cheng R, Liu L, Ohno H, Fukami S. Coherent antiferromagnetic spintronics. *Nat. Mater.* 2023;22(6):684–695. DOI: 10.1038/s41563-023-01492-6.
5. Ivanov BA Spin dynamics for antiferromagnets and ultrafast spintronics. *J. Exp. Theor. Phys.* 2020;131(1):95–112. DOI: 10.1134/S1063776120070079.
6. Zhang W, Jungfleisch MB, Jiang W, Pearson JE, Hoffmann A, Freimuth F, Mokrousov Y. Spin Hall effects in metallic antiferromagnets. *Phys. Rev. Lett.* 2014;113(19):196602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.196602.
7. Puliafito V, Khymyn R, Carpentieri M, Azzerboni B, Tiberkevich V, Slavin A, Finocchio G. Micromagnetic modeling of terahertz oscillations in an antiferromagnetic material driven by the spin Hall effect. *Phys. Rev. B.* 2019;99(2):024405. DOI: 10.1103/PhysRevB.99.024405.
8. Cheng R, Xiao D, Brataas A Terahertz antiferromagnetic spin Hall nano-oscillator. *Phys. Rev. Lett.* 2016;116(20):207603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.207603.
9. Safin A, Puliafito V, Carpentieri M, Finocchio G, Nikitov S, Stremoukhov P, Kirilyuk AI, Tyberkevych V, Slavin AN. Electrically tunable detector of THz-frequency signals based on an antiferromagnet. *Appl. Phys. Lett.* 2020;117(22):222411. DOI: 10.1063/5.0031053.
10. Sulymenko O, Prokopenko O, Lisenkov I, Åkerman J, Tyberkevych V, Slavin AN, Khymyn R. Ultra-fast logic devices using artificial “neurons” based on antiferromagnetic pulse generators. *J. Appl. Phys.* 2018;124(15):152115. DOI: 10.1063/1.5042348.
11. Mitrofanova AY, Safin AR, Kravchenko OV. Neuromorphic computing based on an antiferromagnet-heavy metal hybrid structure under the action of laser pulses. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;2127(1):012023. DOI: 10.1088/1742-6596/2127/1/012023.
12. Tsunegi S, Taniguchi T, Lebrun R, Yakushiji K, Cros V, Grollier J, Fukushima A, Yuasa S, Kubota H. Scaling up electrically synchronized spin torque oscillator networks. *Sci. Rep.* 2018;8(1):13475. DOI: 10.1038/s41598-018-31769-9.
13. Dieny B, Prejbeanu IL, Garello K, Gambardella P, Freitas P, Lehndorff R, Raberg W, Ebels U, Demokritov SO, Åkerman J, Deac A, Pirro P, Adelmann C, Anane A, Chumak AV, Hirohata A, Mangin S, Valenzuela SO, Onbaşlı MC, d’Aquino M, Prenat G, Finocchio G, Lopez-Diaz L, Chantrell R, Chubykalo-Fesenko O, Bortolotti P. Opportunities and challenges for spintronics in the microelectronics industry. *Nat. Electron.* 2020;3(8):446–459. DOI: 10.1038/s41928-020-0461-5.
14. Sulymenko OR, Prokopenko OV, Tiberkevich VS, Slavin AN, Ivanov BA, Khymyn RS. Terahertz-frequency spin Hall auto-oscillator based on a canted antiferromagnet. *Phys. Rev. Applied.* 2017;8(6):064007. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.8.064007.
15. Khymyn R, Lisenkov I, Tiberkevich V, Ivanov BA, Slavin A. Antiferromagnetic THz-frequency Josephson-like oscillator driven by spin current. *Sci. Rep.* 2017;7(1):43705. DOI: 10.1038/srep43705.
16. Dyakonov M. Magnetoresistance due to edge spin accumulation. *Phys. Rev. Lett.* 2007;99(12):126601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.126601.
17. Hoffmann A. Spin Hall effects in metals. *IEEE Trans. Magnetics.* 2013;49(10):5172–5193. DOI: 10.1109/TMAG.2013.2262947.
18. Taniguchi T. Magnetoresistance originated from charge-spin conversion in ferromagnet. *AIP Advances.* 2018;8(5):055916. DOI: 10.1063/1.5003397.

19. Safin AR, Nikitov SA. Nonlinear Dynamics of an Antiferromagnetic Spintronic Oscillator. Radiophys. Quantum Electron. 2019;61(11):834–840. DOI: 10.1007/s11141-019-09940-7.
20. Hong H, Park H, Choi MY. Collective synchronization in spatially extended systems of coupled oscillators with random frequencies. Phys. Rev. E. 2005;72(3):036217. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.036217.
21. Moriya T. Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism. Phys. Rev. 1960;120(1):91–98. DOI: 10.1103/PhysRev.120.91.
22. Dzyaloshinskiy IE Thermodynamical Theory of “Weak” Ferromagnetism in Antiferromagnetic Substances. Sov. Phys. JETP. 1957;5(6):1259–1272.
23. Ozhigin VI, Preobrazhenskii VL. Effective anharmonicity of elastic subsystem in antiferromagnets. Physica B+C. 1977;86–88:979–981. DOI: 10.1016/0378-4363(77)90768-9.
24. Zvezdin AK. Dynamics of domain walls in weak ferromagnets. JETP Lett. 1979;29:553–557.
25. Ivanov BA, Lapchenko VF, Sukstanskii AL. Surface spin waves in antiferromagnets. Sov. Phys. Solid State. 1985;27:101.
26. Acebrón JA, Bonilla LL, Pérez Vicente CJ, Ritort F, Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. Rev. Mod. Phys. 2005;77(1):137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
27. Rodrigues FA, Peron TKD, Kurths PJ. The Kuramoto model in complex networks. Phys. Rep. 2016;610:1–98. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.10.008.
28. Garg N, Bhotla SVH, Muduli PK, Bhowmik D. Kuramoto-model-based data classification using the synchronization dynamics of uniform-mode spin Hall nano-oscillators. Neuromorph. Comput. Eng. 2021;1(2):024005. DOI: 10.1088/2634-4386/ac3258.
29. Pikovsky A, Rosenblum M. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators. Phys. Rev. Lett. 2008;101(26):264103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.264103.
30. Mitrofanova AYU, Safin AR, Kravchenko OV, Nikitov SA. Mutual synchronization of antiferromagnetic spintronic oscillators. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2022;25(5): 80–90 (in Russian). DOI: 10.32603/1993-8985-2022-25-5-80-90.
31. Shakhgildyan VV, Lyakhovkin AA. Phase-Locked Frequency Control Systems. M.: Svyaz; 1972. 447 p. (in Russian).
32. Trees BR, Saranathan V, Stroud D. Synchronization in disordered Josephson junction arrays: Small-world connections and the Kuramoto model. Phys. Rev. E. 2005;71(1):016215. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.016215.
33. Frank TD, Richardson MJ. On a test statistic for the Kuramoto order parameter of synchronization: An illustration for group synchronization during rocking chairs. Physica D. 2010;239(23–24): 2084–2092. DOI: 10.1016/j.physd.2010.07.015.



Самойленко Кристина Дмитриевна — студент магистратуры кафедры твердотельной электроники, радиофизики и прикладных информационных технологий Московского физико-технического института. Работает инженером в Институте радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — физика магнитных явлений и спинтроника.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7
 Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
 E-mail: kris_samoylenko@mail.ru
 ORCID: 0009-0008-9943-4103
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1260171



Митрофанова Анастасия Юрьевна — аспирант кафедры твердотельной электроники, радиофизики и прикладных информационных технологий Московского физико-технического института. Научный сотрудник Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — нелинейная динамика, нейроморфные вычисления и спинтроника.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: nastya_mitrofanova_2000@mail.ru
ORCID: 0000-0003-4662-9632
AuthorID (eLibrary.Ru): 1035175



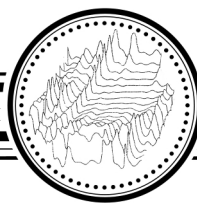
Сафин Ансар Ризаевич — доктор физико-математических наук (2023). Руководитель лаборатории «Антиферромагнитная спинтроника» Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры формирования и обработки радиосигналов Национального исследовательского университета «МЭИ». Автор более 50 научных публикаций. Научные интересы — радиофизика и электроника, физика магнитных явлений и спинтроника.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: arsafin@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6507-6573
AuthorID (eLibrary.Ru): 525831



Никитов Сергей Аполлонович — академик РАН (2022), профессор (1995), доктор физико-математических наук (1991). Директор Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор МФТИ. Автор более 400 научных работ. Научные интересы — радиофизика и физическая электроника, физика магнитных явлений, спинтроника и магнетика.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: nikitov@cplire.ru
ORCID: 0000-0002-2413-7218
AuthorID (eLibrary.Ru): 121644



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003150
EDN: DPHWFG

Когерентный резонанс в микроволновых генераторах хаоса

П. С. Комков^{1,2}, Д. С. Пыхтунов^{1,2}, Д. В. Романенко¹, В. Н. Скороходов¹, С. В. Гришин¹✉

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

²АО «НПП «Алмаз», Россия

E-mail: ✉sergrsh@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.10.2024, принята к публикации 29.11.2024,
опубликована онлайн 6.12.2024, опубликована 30.05.2025

Аннотация. Цель настоящего исследования — экспериментальное наблюдение явления когерентного резонанса в двух микроволновых одномодовых генераторах хаоса с запаздывающей обратной связью, находящихся под внешним шумовым воздействием. Первым генератором является вакуумный генератор хаоса на основе лампы бегущей волны и многорезонаторного пролетного клистрона. В роли второго генератора выступает твердотельный генератор хаоса на основе транзисторного усилителя и спин-волновой линии передачи на поверхностной магнитостатической спиновой волне (ПМСВ). Хаотическая динамика вакуумного генератора обусловлена наличием падающего участка на амплитудной характеристике пролетного клистрона. У твердотельного генератора развитие хаотической динамики связано с нелинейным параметрическим трехволновым распадом ПМСВ на коротковолновые спиновые волны. **Методы.** Для наблюдения явления когерентного резонанса в одиночных хаотических осцилляторах (микроволновых генераторах хаоса) используется метод временной фильтрации хаоса под воздействием шума с ограниченной полосой частот. Метод базируется на эффекте вынужденной синхронизации хаоса (через его подавление) внешним шумовым воздействием. Предложенный метод обладает наибольшей эффективностью при частотном разделении спектров мощности хаотического и шумового сигналов (спектры мощности обоих сигналов не должны перекрываться). **Результаты.** В исследуемых микроволновых генераторах хаоса различной физической природы экспериментально установлено существование режима «on-off» перемежаемости, в котором наблюдается явление когерентного резонанса. Показано, что время автокорреляции огибающей хаотического сигнала имеет максимальное значение при определенном уровне мощности внешнего шумового сигнала, и это максимальное значение зависит от ширины полосы частот шумового сигнала. **Заключение.** Разработанный метод наблюдения когерентного резонанса может быть применен и к микроволновым многомодовым (широкополосным) генераторам хаоса с запаздывающей обратной связью.

Ключевые слова: генераторы хаоса, лампа бегущей волны, многорезонаторный пролетный клистрон, спиновые волны, когерентный резонанс, перемежаемость типа «on-off».

Благодарности. Авторы выражают благодарность профессору О.И. Москаленко за консультации по диагностике «on-off» перемежаемости. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-00274, <https://rscf.ru/project/23-22-00274/>.

Для цитирования: Комков П. С., Пыхтунов Д. С., Романенко Д. В., Скороходов В. Н., Гришин С. В. Когерентный резонанс в микроволновых генераторах хаоса // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. 322–340. DOI: 10.18500/0869-6632-003150. EDN: DPHWFG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Coherent resonance in the microwave chaos generators

*P. S. Komkov^{1,2}, D. S. Pykhtunov^{1,2}, D. V. Romanenko¹,
V. N. Skorokhodov¹, S. V. Grishin¹✉*

¹Saratov State University, Russia

²JSC “SPE “Almaz”, Russia

E-mail: ✉sergrsh@yandex.ru

Received 15.10.2024, accepted 29.11.2024, available online 6.12.2024, published 30.05.2025

Abstract. The purpose of this study is the observation of coherent resonance phenomenon in two microwave single-mode chaos generators with a delayed feedback under external noise influence. The first generator is a vacuum chaos generator based on a traveling wave tube and a multi-resonator drift klystron. The second generator is a solid-state chaos generator based on a transistor amplifier and a spin-wave transmission line supporting a magnetostatic surface wave (MSSW) propagation. The chaotic dynamics of the vacuum generator is caused by the presence of a falling section on the amplitude characteristic of the drift klystron. In the solid-state generator, the development of chaotic dynamics is associated with a nonlinear parametric three-wave decay of the MSSW into short-wave spin waves. **Methods.** To observe the coherent resonance phenomenon in single chaotic oscillators (the microwave chaos generators), the time filtering method under the noise influence with a limited frequency band is used. The method is based on the effect of forced chaos synchronization (through its suppression) by external noise. The proposed method has the greatest efficiency in frequency separation of the power spectra of chaotic and noise signals (the power spectra of both signals should not overlap). **Results.** In the studied microwave chaos generators of various physical natures, the existence of the “on-off” intermittency mode, in that the coherent resonance phenomenon is observed, has been experimentally established. It has been shown that the autocorrelation time of the envelope of a chaotic MW signal has a maximum value at a certain power level of the noise MW signal, and this maximum value depends on the noise MW signal bandwidth. **Conclusion.** The developed method for the coherent resonance observation can also be applied to the multimode (broadband) ring chaos generators with the delayed feedback.

Keywords: chaos generators, traveling wave tube, multi-resonator drift klystron, spin waves, coherent resonance, “on-off” intermittency.

Acknowledgements. The authors thank Professor O.I. Moskalenko for consultations on the diagnostics of “on-off” intermittency. This work was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 23-22-00274, <https://rscf.ru/project/23-22-00274/>).

For citation: Komkov PS, Pykhtunov DS, Romanenko DV, Skorokhodov VN, Grishin SV. Coherent resonance in the microwave chaos generators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(3):322–340. DOI: 10.18500/0869-6632-003150

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Известно, что в возбудимых шумом системах наблюдается фундаментальное нелинейное явление, получившее название когерентного резонанса [1–3]. Оно заключается в том, что у шумового воздействия есть некий оптимальный уровень, при котором индуцированные шумом колебания становятся наиболее близкими к регулярным. В этом случае зависимость времени автокорреляции от интенсивности шума имеет ярко выраженный максимум при определенной интенсивности шума [2]. Когерентный резонанс подтвержден экспериментально в возбудимых электронных схемах [4], в полупроводниковом лазере с оптической обратной связью [5] и в сверхвысокочастотном (СВЧ) клистронном автогенераторе, находящемся на пороге самовозбуждения [6].

В динамических хаотических системах когерентный резонанс был исследован как теоретически [7, 8], так и экспериментально [9, 10]. В работах [7, 9, 10] это явление было обнаружено в хаотической бистабильной цепи Чуа, а в [8] — в системе двух связанных идентичных хаотических осцилляторов Лоренца. В последнем случае эффект когерентного резонанса наблюдался в режиме «on-off» перемежаемости, который возникал под действием шума вблизи состояния синхронизации двух хаотических осцилляторов. В обоих случаях у динамической системы существовало

два устойчивых состояния, между которыми происходило переключение под воздействием шума, как и в возбудимых шумом системах.

Аналогичную ситуацию можно реализовать, используя эффект подавления хаоса внешним воздействием. Так, на основе эталонных моделей нелинейной динамики было показано, что внешний гармонический сигнал при достижении его амплитуды определенного уровня может полностью подавить собственную хаотическую динамику системы и тем самым установить режим синхронизации колебаний [11, 12]. Данный тип синхронизации через подавление хаоса внешним монохроматическим сигналом, известный в литературе как вынужденная синхронизация хаоса [11, 12], наблюдался экспериментально как в вакуумных [13, 14], так и в твердотельных (спин-волновых) [15] микроволновых генераторах хаоса с запаздывающей обратной связью (ЗОС). В вакуумных генераторах хаоса с ЗОС, собранных по схеме шумотрона [16, 17], хаотическая динамика обусловлена нелинейностью либо лампы бегущей волны (ЛБВ) [18], либо многорезонаторного пролетного клистрона [19]. В спин-волновых генераторах хаоса с ЗОС в качестве нелинейного элемента, обеспечивающего хаотизацию генерируемого СВЧ-сигнала, выступала линия задержки на магнитостатических спиновых волнах (МСВ) [20].

Периодическое установление / нарушение вынужденной синхронизации хаоса, приводящее к генерации периодической последовательности хаотических СВЧ-импульсов, было реализовано на практике в клистронном автогенераторе хаоса с ЗОС, находящемся под воздействием периодической последовательности прямоугольных СВЧ-импульсов большой амплитуды [21]. На временных интервалах, где внешние СВЧ-импульсы отсутствовали, генерировался хаотический СВЧ-сигнал (вынужденная синхронизация хаоса «выключена»), а на временных интервалах, где внешние СВЧ-импульсы присутствовали, наблюдалось полное подавление хаотической динамики системы (вынужденная синхронизация хаоса «включена»). В [22] предложенный способ управления хаотической динамикой системы был распространен на широкополосные микроволновые генераторы хаоса с ЗОС, в которых за счет большой частотной отстройки между несущими хаотического СВЧ-сигнала и внешнего импульсно-модулированного (ИМ) СВЧ-сигнала удавалось осуществить частотное разделение спектров мощности обоих сигналов (спектры мощности сигналов не перекрывались) и отфильтровывать монохроматический СВЧ-сигнал, находящийся в паузах между хаотическими СВЧ-импульсами. Это позволяло исследовать непосредственно сам хаотический СВЧ-сигнал, на который внешний ИМ СВЧ-сигнал уже оказал воздействие. Впоследствии данный метод временной фильтрации хаотического СВЧ-сигнала периодической последовательностью внешних прямоугольных СВЧ-импульсов был применен в установке бриллюэновской спектроскопии для изучения пространственно-временной динамики хаотических диссипативных солитонов огибающей [23].

В [24] для временной фильтрации широкополосного хаотического СВЧ-сигнала, генерируемого спин-волновым генератором хаоса с ЗОС, было предложено использовать внешний шумовой СВЧ-сигнал, который представлял собой белый шум с ограниченной полосой частот в микроволновом диапазоне. Было показано, что метод временной фильтрации широкополосного хаотического сигнала внешним более узкополосным шумовым сигналом большой амплитуды эффективно работает только в том случае, когда спектры мощности обоих сигналов (хаотического и шумового) не пересекаются (частотно разделены). Использование внешнего шумового воздействия приводило к случайному установлению / нарушению вынужденной синхронизации хаоса. Таким образом, в подавляемой шумом хаотической системе реализовывался режим, напоминающий режим «on-off» перемежаемости в системе двух связанных хаотических осцилляторов, в котором диагностировался когерентный резонанс [8]. Если проводить аналогию с возбудимыми шумом системами (например, с моделью ФицХью–Нагумо, описывающей поведение нервных импульсов) [2], то в подавляемых шумом хаотических системах хаотический аттрактор соответствует аттрактору в виде неподвижной точки возбудимой шумом системы, а характерное время подавления хаоса соответствует времени активации нервного импульса. Время возврата

из подавленного состояния в состояние хаотической генерации соответствует времени возврата из возбужденного в невозбужденное состояние в модели нейрона. Таким образом, в подавляемых шумом хаотических системах наблюдается ситуация, которая прямо противоположна ситуации в возбудимых шумом системах. Здесь внешний шум является не возбудителем, а подавителем («синхронизатором») собственной хаотической динамики системы, что должно приводить к появлению «on-off» перемежаемости и когерентного резонанса. Однако в [24] оба этих явления не исследовались.

В настоящей работе на примере двух разных (вакуумном и твердотельном) микроволновых генераторов хаоса демонстрируется универсальность метода временной фильтрации хаоса ограниченным по частоте внешним шумом. Использование данного метода приводит к режиму «on-off» перемежаемости подавленных (синхронных) и неподдавленных (несинхронных) состояний и, как следствие этого, к наблюдению эффекта когерентного резонанса в подавляемых шумом хаотических системах.

1. Экспериментальные макеты микроволновых генераторов хаоса

1.1. Вакуумный кольцевой генератор хаоса. Схематические изображения исследуемых в эксперименте микроволновых одномодовых генераторов хаоса с ЗОС представлены на рис. 1. Так, одномодовый вакуумный генератор хаоса, собранный по схеме шумотрона [16, 17] (см. рис. 1, а), состоит из ЛБВ-усилителя, переменного аттенюатора и пятирезонаторного пролетного клистрона средней мощности типа КУ-134Е, входы и выходы которых последовательно соединены друг с другом и охвачены цепью ЗОС. ЛБВ-усилитель, выполненный на основе одностекольной спиральной задерживающей системы с переменным шагом, работающая в диапазоне

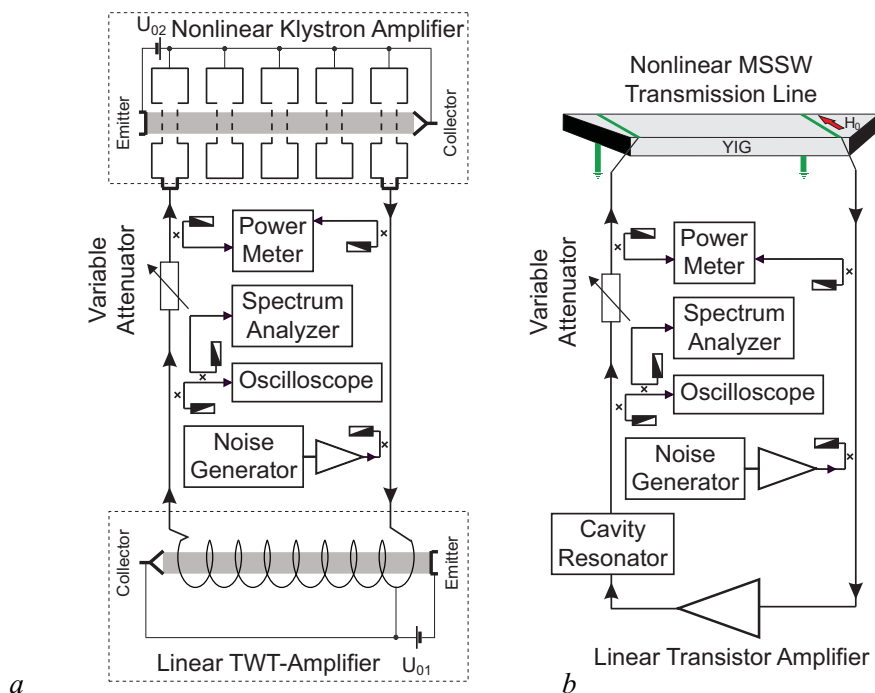


Рис. 1. Блок-схемы микроволновых кольцевых генераторов хаоса: а — вакуумный генератор хаоса (модифицированная схема шумотрона); б — спин-волновой генератор хаоса (цвет онлайн)

Fig. 1. Block diagrams of the microwave ring chaos generators: а — a vacuum chaos generator (the modified noisetron scheme); б — a spin-wave chaos generator (color online)

частот 2...4 ГГц, компенсирует потери СВЧ-сигнала, циркулирующего по кольцу. Пролетный клистрон с центральной частотой $f_0 = 2797$ МГц используется одновременно как частотно-избирательный и нелинейный элемент для выделения одной из собственных мод кольцевого резонатора и формирования на ней хаотического СВЧ-сигнала. Уровень мощности СВЧ-сигнала на входе пролетного клистрона регулируется с помощью переменного аттенуатора. Необходимо отметить, что в [25] аналогичная модифицированная схема шумотрона демонстрировала генерацию хаотических последовательностей темных импульсов огибающей короткой длительности при условии, что ЛБВ-усилитель работает в режиме сильной амплитудной и фазовой нелинейности, а пролетный клистрон — в слабо нелинейном режиме. Теперь ЛБВ-усилитель работает в слабо нелинейном режиме усиления генерируемого СВЧ-сигнала, а многорезонаторный пролетный клистрон — в режиме сильной амплитудной нелинейности.

Большая часть мощности СВЧ-сигнала с выхода ЛБВ-усилителя возвращается обратно в кольцевой генератор, а ее меньшая часть через микрополосковые направленные ответвители поступает на входы анализатора спектра E4408B и осциллографа реального времени Infiniium DSO81004B для анализа и последующей обработки. Осциллограф реального времени характеризуется полосой пропускания 10 ГГц. Для анализа временных рядов, содержащих СВЧ-сигнал, частота дискретизации сигнала выбирается равной 20 Гс/с. В этом случае глубина памяти составляет 2 млн. точек.

Внешний шумовой СВЧ-сигнал с нормальным (гауссовым) законом распределения вероятностей формируется генератором сигналов ESG E4438C и подается на вход ЛБВ-усилителя на частоте $f_n = 2.6$ ГГц через микрополосковый направленный ответвитель, когда ЛБВ-усилитель используется в схеме генератора хаоса. Фактически внешний шумовой СВЧ-сигнал генерируется источником белого шума, из которого полосно-пропускающими фильтрами выделяется требуемая полоса частот Δf_n , которая может меняться до 80 МГц. Такой ограниченный по частоте белый шум используется для осуществления временной фильтрации генерируемого хаотического сигнала. На рис. 2 приведены спектральные и статистические характеристики задаваемого в эксперименте шумового сигнала, имеющего одинаковую центральную частоту f_n , но разную полосу частот Δf_n . Видно, что увеличение Δf_n приводит к уменьшению спектральной плотности мощности при одинаковом уровне интегральной мощности шума P_n . При этом гистограммы распределения вероятностей в обоих случаях подчиняются нормальному закону, которому соответствует сплошная красная кривая. Для $\Delta f_n = 1$ МГц нормальный закон описывается средним $m = 0.0049$ и дисперсией $\sigma = 0.185$. Для $\Delta f_n = 30$ МГц — $m = 0.0033$ и $\sigma = 0.201$.

На рис. 3, а приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) ЛБВ-усилителя и многорезонаторного пролетного клистрона. Видно, что АЧХ клистрона имеет резонансный вид. Максимальное значение коэффициента усиления ~ 40 дБ наблюдается на частоте f_0 . На этой же частоте для выбранных значений тока пучка и ускоряющего напряжения ($I_{01} = 44.3$ мА и $U_{01} = 2.5$ кВ) коэффициент усиления ЛБВ имеет величину ~ 28 дБ. Как будет показано далее, именно на частоте f_0 и будет происходить формирование хаотического СВЧ-сигнала вакуумным генератором хаоса. Необходимо отметить, что максимальное значение коэффициента усиления ЛБВ ~ 47 дБ достигается на частоте ~ 3.5 ГГц при токе пучка $I_{01} = 100$ мА и ускоряющем напряжении $U_{01} = 3$ кВ. Работа ЛБВ-усилителя не в номинальном режиме обусловлена тем, что при выбранных значениях тока пучка и ускоряющего напряжения явление когерентного резонанса наблюдается при меньшей мощности внешнего шумового СВЧ-сигнала, подаваемого на вход ЛБВ, которую мы можем реализовать в эксперименте.

На рис. 3, б приведены амплитудные характеристики обоих вакуумных СВЧ-усилителей. Из представленных результатов следует, что на амплитудной характеристике многорезонаторного пролетного клистрона наблюдается ярко выраженный участок с отрицательным наклоном (так называемый «падающий» участок), возникновение которого обусловлено перегруппировкой электронов в пучке под действием СВЧ-поля большой амплитуды. Наличие падающего

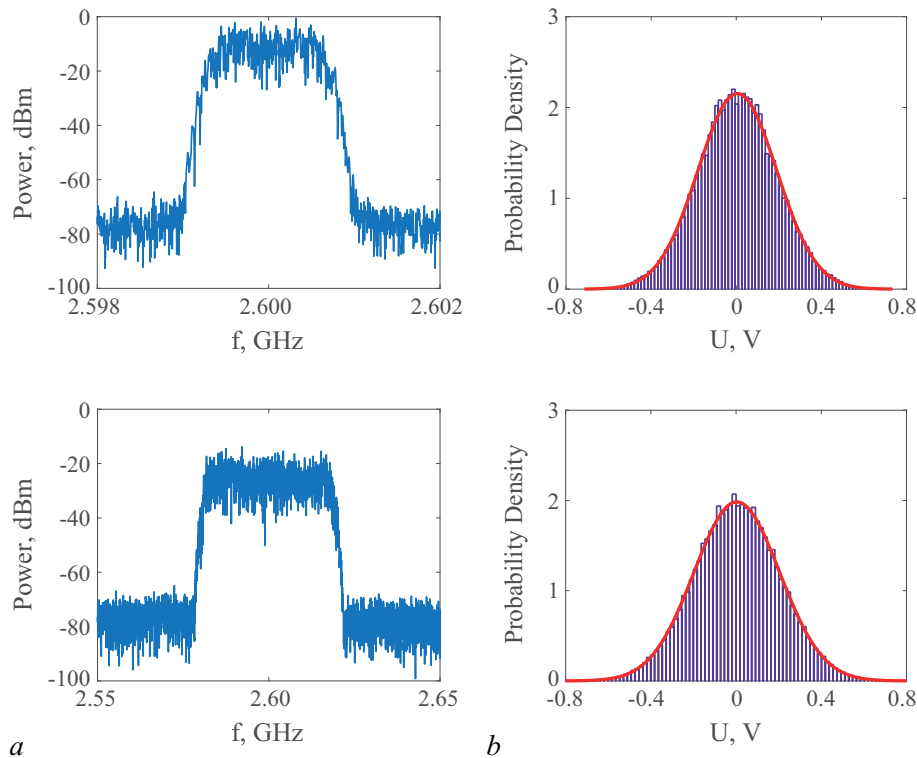


Рис. 2. Характеристики шумового СВЧ-сигнала: *a* — спектры мощности и *b* — гистограммы распределения вероятностей. Верхний ряд — ширина полосы шума $\Delta f_n = 1$ МГц, нижний ряд — $\Delta f_n = 30$ МГц. В обоих случаях центральная частота шумового СВЧ-сигнала $f_n = 2.6$ ГГц, а его интегральная мощность $P_n = 0$ дБм (цвет онлайн)

Fig. 2. Characteristics of MW noise signal: *a* — the power spectra and *b* — the probability distribution histograms. Top row — the noise bandwidth $\Delta f_n = 1$ MHz, bottom row — $\Delta f_n = 30$ MHz. In both cases, the central frequency of MW noise signal $f_n = 2.6$ GHz and its integral power $P_n = 0$ dBm (color online)

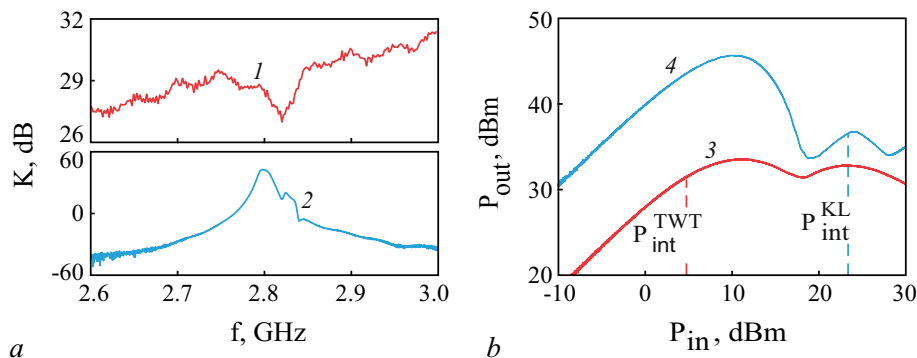


Рис. 3. *a* — Амплитудно-частотные характеристики ЛБВ-усилителя (кривая 1) и многорезонаторного пролетного клистрона (кривая 2), измеренные при входной мощности $P_{in} = -30$ дБм. *b* — Амплитудные характеристики ЛБВ-усилителя (кривая 3) и многорезонаторного пролетного клистрона (кривая 4), измеренные на частоте $f_0 = 2797$ МГц. Здесь же пунктирными линиями показаны уровни интегральной мощности на входе ЛБВ-усилителя и пролетного клистрона, при которых в кольцевом генераторе формируется хаотический СВЧ-сигнал. На фрагментах *a* и *b* результаты получены при $I_{01} = 44.3$ мА, $U_{01} = 2.5$ кВ, $I_{02} = 42$ мА и $U_{02} = 2.1$ кВ (цвет онлайн)

Fig. 3. *a* — Amplitude-frequency characteristics of the TWT-amplifier (curve 1) and the multi-resonator drift klystron (curve 2), measured for the input power $P_{in} = -30$ dBm. *b* — Amplitude characteristics of the TWT-amplifier (curve 3) and the multi-resonator drift klystron (curve 4) measured for the frequency $f_0 = 2797$ МГц. Here, the dotted lines show the integral power levels at the input of the TWT-amplifier and the drift klystron, at that the chaotic MW-signal is formed in the ring generator. In *a* and *b*, the results were obtained for $I_{01} = 44.3$ mA, $U_{01} = 2.5$ kV, $I_{02} = 42$ mA and $U_{02} = 2.1$ kV (color online)

участка на амплитудной характеристике пролетного клистрона приводит к амплитудному механизму автомодуляции генерируемого СВЧ-сигнала и к переходу к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода (сценарий Фейгенбаума) [19]. Здесь же показаны уровни интегральной мощности СВЧ-сигнала на входах ЛБВ-усилителя $P_{\text{int}}^{\text{TWT}} = +5$ дБм и пролетного клистрона $P_{\text{int}}^{\text{KL}} = +24$ дБм, при которых в исследуемой автоколебательной системе наблюдается генерация хаотического СВЧ-сигнала. При указанных уровнях мощности ЛБВ-усилитель работает в слабо нелинейном режиме, а пролетный клистрон — в сильно нелинейном режиме.

1.2. Спин-волновой кольцевой генератор хаоса. Одномодовый спин-волновой генератор хаоса представляет собой последовательно соединенные сверхширокополосный транзисторный усилитель, объемный резонатор, переменный аттенуатор и спин-волновую линию передачи, которые охвачены цепью ЗОС (см. рис. 1, б). В спин-волновом генераторе хаоса в отличие от рассмотренного выше вакуумного генератора хаоса частотно-избирательными и нелинейными свойствами обладают два разных элемента: объемный резонатор и спин-волновая линия передачи. Транзисторный усилитель, так же как и линейная ЛБВ, используется как для компенсации потерь генерируемого сигнала, так и для управления усилением с помощью внешнего шумового СВЧ-сигнала. Как следует из результатов, представленных на рис. 4, а, б, транзисторный усилитель обладает коэффициентом усиления 55 дБ в полосе частот 2...8 ГГц и выходной мощностью в режиме насыщения 12 Вт. Объемный резонатор характеризуется резонансной частотой $f_r = 3$ ГГц и нагруженной добротностью $Q_L = 668$. Спин-волновая линия передачи в конфигурации «линия задержки» состоит из пленки железо-иттриевого граната (ЖИГ) с намагниченностью насыщения 1750 Гс, толщиной 65 мкм, шириной 4 мм и длиной 15 мм, которая размещается на поверхности несимметричной микрополосковой линии (НМПЛ). НМПЛ представляет собой два разомкнутых микрополосковых проводника шириной 30 мкм, расположенных на диэлектрической подложке. Один конец каждого проводника закорочен на землю, а другой подсоединен к нагрузке. Внешнее постоянное магнитное поле $H_0 = 450$ Э прикладывается касательно к поверхности пленки ЖИГ вдоль микрополосковых проводников. В этом случае, как следует из результатов, представленных на рис. 4, а, б, в пленке ЖИГ в полосе частот 2.5...3.5 ГГц эффективно возбуждается поверхностная МСВ (ПМСВ), которая при повышенных уровнях мощности обладает нелинейными потерями.

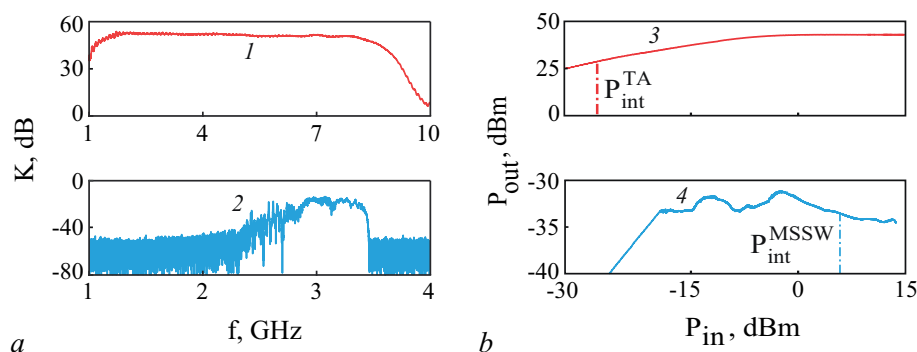


Рис. 4. а — Амплитудно-частотные характеристики транзисторного усилителя (кривая 1) и спин-волновой линии передачи (кривая 2), измеренные при входной мощности $P_{\text{in}} = -30$ дБм. б — Амплитудные характеристики транзисторного усилителя (кривая 3) и спин-волновой линии передачи (кривая 4), измеренные на частоте $f_r = 3$ ГГц. Здесь же пунктирными линиями показаны уровни интегральной мощности на входе транзисторного усилителя и спин-волновой линии передачи, при которых в кольцевом генераторе формируется хаотический СВЧ-сигнал (цвет онлайн)

Fig. 4. а — Amplitude-frequency characteristics of the transistor amplifier (curve 1) and the spin-wave transmission line (curve 2), measured for the input power $P_{\text{in}} = -30$ dBm. б — Amplitude characteristics of the transistor amplifier (curve 3) and the spin-wave transmission line (curve 4) measured for the frequency $f_r = 3$ GHz. Here, the dotted lines show the integral power levels at the input of the transistor amplifier and the spin-wave transmission line, at that the chaotic MW-signal is formed in the ring generator (color online)

Последние обусловлены развитием трехволновых параметрических процессов распада ПМСВ на коротковолновые спиновые волны, приводящих к хаотизации генерируемого СВЧ-сигнала. Уровень мощности СВЧ-сигнала на входе спин-волновой линии передачи регулируется с помощью переменного аттенюатора.

С выхода объемного резонатора генерируемый СВЧ-сигнал через микрополосковые направленные ответвители поступает на входы анализатора спектра E4408B и осциллографа реального времени Infiniium DSO81004B для анализа и последующей обработки. В эксперименте со спин-волновым кольцевым генератором измеряется огибающая хаотического СВЧ-сигнала с помощью детекторной головки, так как характерные временные масштабы здесь гораздо больше, чем в предыдущей генераторной схеме. В этом случае частота дискретизации сигнала выбирается равной 2 Гс/с, а глубина памяти остается равной 2 млн. точек. Внешний шумовой СВЧ-сигнал подается на вход транзисторного усилителя на частоте $f_n = 2.9$ ГГц через микрополосковый направленный ответвитель.

На рис. 4, *b* пунктирными линиями показаны уровни интегральной мощности на входе транзисторного усилителя $P_{\text{int}}^{\text{TA}} = -25.4$ дБм и спин-волновой линии передачи $P_{\text{int}}^{\text{MSSW}} = +7.1$ дБм, при которых в кольцевом генераторе формируется хаотический СВЧ-сигнал. Видно, что при данных уровнях входной мощности транзисторный усилитель работает в линейном режиме, а спин-волновая линия передачи — в нелинейном режиме, где превышение над нелинейным порогом составляет более 20 дБ.

2. Экспериментальные результаты

2.1. Вакуумный кольцевой генератор хаоса. Генерация СВЧ-сигнала в исследуемом кольцевом автогенераторе зависит от выполнения амплитудных и фазовых условий. Амплитудные условия заключаются в том, что суммарное усиление (K_{total}) используемых в генераторной схеме активных элементов должно компенсировать общий уровень потерь сигнала на всех элементах схемы (A_{total}), то есть $G = K_{\text{total}} - A_{\text{total}} = 0$, где G — коэффициент усиления кольца. Фазовые условия состоят в том, что суммарный набег фазы на всех элементах кольцевого генератора (ψ_{total}) должен быть кратен 2π , то есть $\psi_{\text{total}} = 2\pi n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ — целое число, характеризующее количество проходов сигнала по кольцу. При $G = 0$ в автоколебательной системе генерируется монохроматический СВЧ-сигнал на частоте доминантной кольцевой моды, соответствующей частоте f_0 . По мере увеличения G (уменьшается уровень ослабления переменного аттенюатора и, как следствие этого, общий уровень потерь A_{total}) наблюдается появление частот автомодуляции и переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода [19].

Внешний шумовой СВЧ-сигнал начинает оказывать заметное влияние на хаотическую динамику автоколебательной системы при мощности $P_n > P_{\text{int}}^{\text{TW}} = +5$ дБм. Однако режим вынужденной синхронизации хаоса под воздействием шума, приводящий к перемежаемости типа «on-off», наблюдается только при очень больших уровнях мощности шума. На рис. 5 приведены спектры мощности хаотического СВЧ-сигнала и фрагменты временных рядов его огибающей, измеренные в присутствии внешнего шумового СВЧ-сигнала с полосой частот $\Delta f_n = 1$ МГц и повышенных уровнях интегральной мощности P_n . Во всех случаях центральная частота шумового СВЧ-сигнала отстроена от центральной частоты хаотического СВЧ-сигнала на величину, равную 0.2 ГГц. При такой величине частотной отстройки внешний шумовой СВЧ-сигнал находится вне полосы частот хаотического СВЧ-сигнала (спектры мощности обоих сигналов не перекрываются), но в полосе частот ЛБВ-усилителя. Это дает возможность внешнему сигналу воздействовать на режим работы ЛБВ-усилителя, а пролетному клистрону затем отфильтровывать данный сигнал. Необходимо отметить, что частотное разделение хаотического и шумового СВЧ-сигналов оказывается возможным только при наличии в автогенераторе широкополосного усилителя и является необходимым условием для диагностирования явления когерентного резонанса в режиме динамического хаоса.

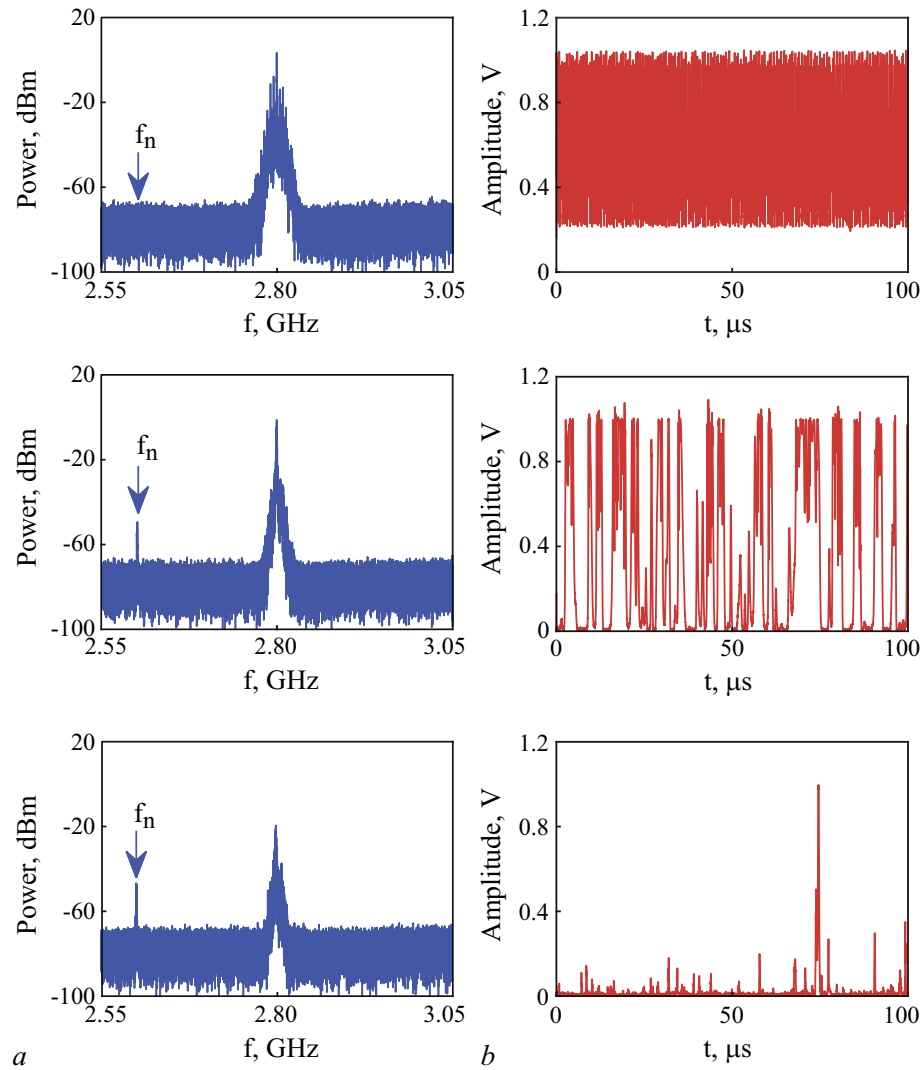


Рис. 5. *a* — Спектры мощности хаотического СВЧ-сигнала и *b* — временные ряды огибающей хаотического СВЧ-сигнала, измеренные в модифицированной схеме шумотрона под воздействием внешнего шумового СВЧ-сигнала с центральной частотой $f_n = 2.6$ ГГц, полосой частот $\Delta f_n = 1$ МГц и различным уровнем мощности P_n : +24.2 дБм (верхний ряд), +27.6 дБм (средний ряд) и +31.6 дБм (нижний ряд) (цвет онлайн)

Fig. 5. *a* — Power spectra of the chaotic MW signal and *b* — time series of the chaotic MW signal envelope measured in the modified noisetron scheme under the external noise MW signal influence with the central frequency $f_n = 2.6$ GHz, the frequency band $\Delta f_n = 1$ МГц and different power levels P_n : +24.2 dBm (upper row), +27.6 dBm (middle row) and +31.6 dBm (lower row) (color online)

Как следует из представленных на рис. 5 результатов, при уровне мощности $P_n = +24.2$ дБм (верхний ряд) шумовое воздействие не приводит еще к заметному подавлению хаотического СВЧ-сигнала. Спектр мощности хаотического СВЧ-сигнала характеризуется центральной частотой $f_{ch} = 2.8$ ГГц и шириной полосы частот $\Delta f_{ch} = 9.5$ МГц, измеренной по уровню -3 дБ относительно максимального значения спектральной мощности. С увеличением уровня мощности внешнего шумового СВЧ-сигнала до $P_n = +27.6$ дБм (см. средний ряд на рис. 5) возникает случайное чередование двух состояний системы, в одном из которых наблюдается полное подавление хаотической динамики (режим вынужденной синхронизации хаоса), а в другом — генерация хаотического сигнала (режим отсутствия вынужденной синхронизации хаоса). При этом оба состояния имеют приблизительно одинаковые характерные длительности. С технической точки

зрения такое поведение системы обусловлено модуляцией коэффициента усиления ЛБВ шумом. На тех временных интервалах, где мгновенные значения амплитуды шума соответствуют режиму линейного усиления ЛБВ, хаотический СВЧ-сигнал не подавляется, а на временных интервалах, где мгновенные значения амплитуды шума уже не соответствуют режиму линейного усиления ЛБВ, хаотический СВЧ-сигнал испытывает подавление. При дальнейшем увеличении уровня мощности шумового СВЧ-сигнала до $P_n = +31.6$ дБм (см. нижний ряд на рис. 5) характерная длительность подавленных (синхронных) состояний возрастает, а характерная длительность состояний с хаотической динамикой (несинхронных состояний), наоборот, уменьшается.

Наличие состояний с развитой (несинхронной) и подавленной (синхронной) хаотической динамикой характерно для перемежаемости типа «on-off». В то же самое время зависимости характерных времен обоих состояний от интенсивности шума напоминают аналогичные зависимости характерных времен (времени активации и времени возвращения в невозбужденное состояние) от интенсивности шума в возбудимых шумом системах [2]. Тогда временные интервалы, соответствующие синхронным состояниям, мы будем условно трактовать как участки ламинарной фазы, а временные интервалы, соответствующие несинхронным состояниям, — как участки хаотической фазы. Наличие «on-off» перемежаемости в исследуемом нами вакуумном генераторе хаоса, находящемся под внешним шумовым воздействием, подтверждается результатами расчета ее статистических характеристик, приведенных на рис. 6.

На рис. 6 представлены результаты расчета распределений N длительностей ламинарных фаз τ и зависимостей средней длительности ламинарных фаз $\langle \tau \rangle$ от параметра надкритичности $P_{\text{crit}} - P_n$. Данные статистические характеристики рассчитаны как на основе экспериментальных временных рядов, так и на основе аналитических выражений, характерных для перемежаемости типа «on-off». Уровень мощности шумового СВЧ-сигнала, соответствующий значению P_{crit} , определялся по 10-процентному отклонению времени автокоррекции огибающей хаотического СВЧ-сигнала от ее значения, полученного в автономном режиме. Как следует из результатов, представленных на рис. 6, измеренные и аналитически рассчитанные статистические характеристики хорошо согласуются между собой. Это свидетельствует о том, что в модифицированной схеме

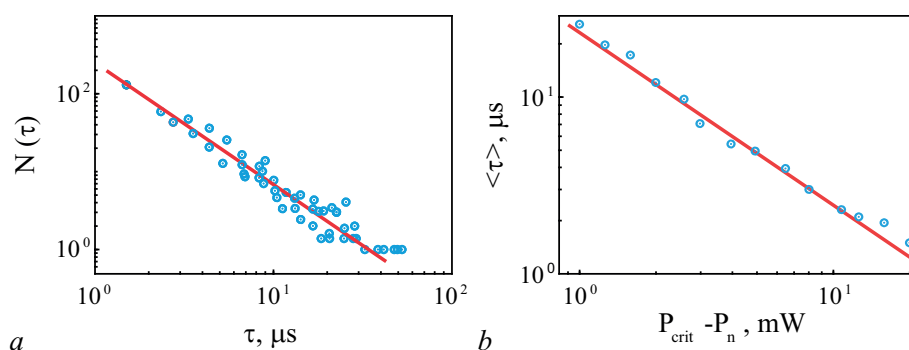


Рис. 6. Статистические характеристики «on-off» перемежаемости, полученные на модифицированной схеме шумотрона для $\Delta f_n = 1$ МГц: a — распределение длительностей ламинарных фаз и b — зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Синие кружки соответствуют значениям длительностей ламинарных фаз, полученным по экспериментальным временным рядам. Сплошные линии соответствуют аналитическим результатам, полученным на основе следующих аналитических выражений: $a - N \sim \tau^{-3/2}$ и $b - \langle \tau \rangle \sim (P_{\text{crit}} - P_n)^{-1}$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Statistical characteristics of the “on-off” intermittency obtained from the modified noisetron scheme for $\Delta f_n = 1$ МГц: a — distribution of the laminar phase durations, b — dependence of the average duration of the laminar phases on the supercriticality parameter. Blue circles correspond to the values of laminar phase durations obtained from the experimental time series. Solid lines correspond to the analytical results obtained from the following analytical expressions: $a - N \sim \tau^{-3/2}$ and $b - \langle \tau \rangle \sim (P_{\text{crit}} - P_n)^{-1}$ (color online)

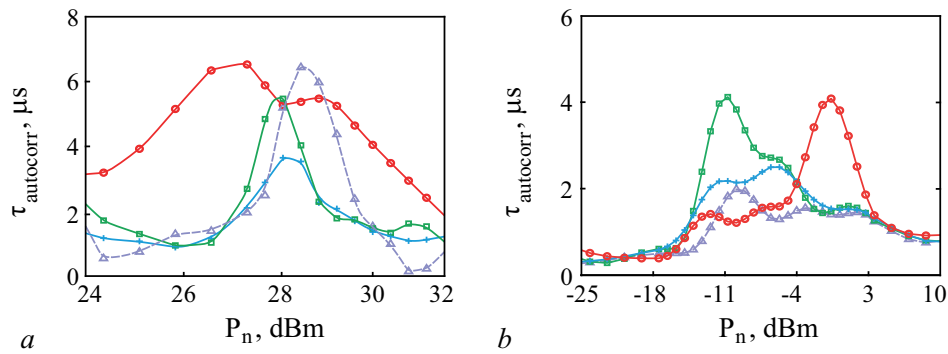


Рис. 7. Зависимости времени автокорреляции огибающей хаотического СВЧ-сигнала от мощности внешнего шумового СВЧ-сигнала, полученные на двух схемах микроволновых одномодовых кольцевых генераторов хаоса: *a* — модифицированная схема шумотрона, *b* — спин-волновой генератор хаоса. Результаты получены для разных значений полосы частот шумового СВЧ-сигнала Δf_n : 1 МГц (красные кружки), 10 МГц (голубые крестики), 15 МГц (фиолетовые треугольники) и 30 МГц (зеленые квадратики) (цвет онлайн)

Fig. 7. Dependences of the autocorrelation time of the chaotic MW signal envelope on the external noise MW signal power obtained for two MW single-mode ring chaos generator schemes: *a* — modified noisetron scheme and *b* — spin-wave chaos generator. The results were obtained for different values of the noise MW signal bandwidth Δf_n : 1 MHz (red circles), 10 MHz (blue crosses), 15 MHz (purple triangles) and 30 MHz (green squares) (color online)

шумотрона наблюдается перемежаемость типа «on-off» под воздействием внешнего шумового СВЧ-сигнала.

На рис. 7, *a* приведены зависимости времени автокорреляции огибающей хаотического СВЧ-сигнала τ_{autocorr} от мощности внешнего шумового СВЧ-сигнала P_n , построенные для нескольких значений полосы частот шума Δf_n . Видно, что все зависимости имеют ярко выраженный максимум времени автокорреляции $\tau_{\text{autocorr}}^{\text{max}}$, который наблюдается при определенной мощности внешнего шумового СВЧ-сигнала $P_{n,\text{opt}}$. Так, среди зависимостей, полученных на модифицированной схеме шумотрона, наибольшее значение $\tau_{\text{autocorr}}^{\text{max}} = 6.53$ мкс регистрируется при наименьшей полосе шума $\Delta f_n = 1$ МГц. Значение $\tau_{\text{autocorr}}^{\text{max}} = 3.61$ мкс является минимальным при $\Delta f_n = 10$ МГц (уменьшается практически в два раза по сравнению с предыдущим случаем) и вновь начинает возрастать при дальнейшем увеличении полосы Δf_n . При этом уровень $P_{n,\text{opt}}$ остается практически постоянным (меняется на величину ~ 1 дБ).

Наличие на всех зависимостях максимума времени автокорреляции при определенной интенсивности шума свидетельствует о том, что огибающая хаотического СВЧ-сигнала становится более регулярной при определенном уровне мощности внешнего шумового СВЧ-сигнала, и в хаотической автоколебательной системе наблюдается когерентный резонанс. Однако в отличие от классического явления когерентного резонанса, наблюдаемого в возбудимых шумом системах [1–3], у огибающей генерируемого СВЧ-сигнала в нашем случае нет четкой периодичности при оптимальной мощности внешнего шумового СВЧ-сигнала (см. рис. 5, *b*). Огибающая СВЧ-сигнала в модифицированной схеме шумотрона остается хаотической при всех интенсивностях внешнего шумового воздействия. Таким образом, в исследуемом нами одномодовом вакуумном СВЧ-генераторе хаоса явление когерентного резонанса диагностируется в режиме генерации только хаотического СВЧ-сигнала и обусловлено, по всей видимости, частичной синхронизацией его спектральных компонент.

2.2. Спин-волновой кольцевой генератор хаоса. В спин-волновом кольцевом генераторе хаоса с ЗОС для генерации СВЧ-сигнала также необходимо выполнение амплитудных и фазовых условий. При $G = 0$ генерация монохроматического СВЧ-сигнала возникает на частоте доминантной кольцевой моды, соответствующей частоте f_r . С увеличением G и при малом превышении

нелинейного порога здесь также появляются частоты автомодуляции, но не за счет падающего участка, а за счет параметрического возбуждения коротковолновых спиновых волн поверхностной МСВ (параметрический трехволновый процесс распада). Параметрически возбуждаемые спиновые волны модулируют сигнал на частоте ПМСВ как по амплитуде, так и по фазе [26]. Частоты автомодуляции в этом случае имеют значения порядка нескольких сотен килогерц [15]. Переход к хаосу в одномодовом спин-волновом генераторе с ЗОС, работающем в условиях нелинейного трехволнового параметрического распада, тоже происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода, по сценарию Фейгенбаума [27].

На рис. 8 представлены результаты, демонстрирующие влияние внешнего шумового СВЧ-сигнала с ограниченной полосой частот на хаотическую динамику одномодового спин-волнового

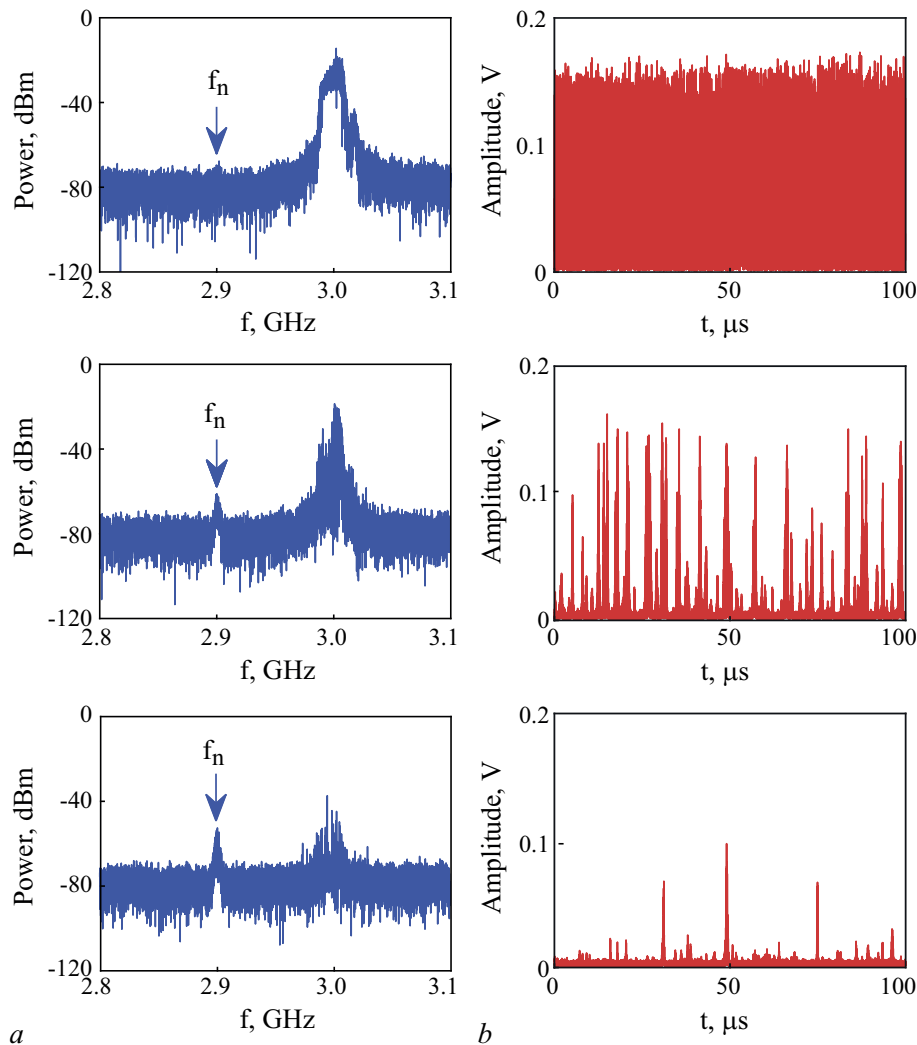


Рис. 8. *a* — Спектры мощности хаотического СВЧ-сигнала и *b* — временные ряды огибающей хаотического СВЧ-сигнала, измеренные в спин-волновом генераторе хаоса под воздействием внешнего шумового СВЧ-сигнала с центральной частотой $f_n = 2.9$ ГГц, полосой частот $\Delta f_n = 1$ МГц и различным уровнем мощности P_n : -25 дБм (верхний ряд), -1.4 дБм (средний ряд) и $+8.9$ дБм (нижний ряд) (цвет онлайн)

Fig. 8. *a* — Power spectra of the chaotic MW signal and *b* — time series of the chaotic MW signal envelope measured in the spin-wave chaos generator under the external noise MW signal influence with the central frequency $f_n = 2.9$ GHz, the frequency band $\Delta f_n = 1$ MHz and different power levels P_n : -25 dBm (upper row), -1.4 dBm (middle row) and $+8.9$ dBm (lower row) (color online)

генератора с ЗОС. В эксперименте центральная частота шумового СВЧ-сигнала отстроена от центральной частоты хаотического СВЧ-сигнала на величину, равную 0.1 ГГц. При такой отстройке внешний шумовой СВЧ-сигнал с полосой частот $\Delta f_n = 1$ МГц находится вне полосы частот хаотического СВЧ-сигнала ($\Delta f_{ch} = 11.3$ МГц по уровню -3 дБ), но в полосе частот транзисторного усилителя. Это дает возможность внешнему шуму воздействовать на режим работы транзисторного усилителя, а объемному резонатору затем отфильтровывать такой сигнал.

Из представленных на рис. 8 результатов следует, при уровне мощности $P_n = -25$ дБм (верхний ряд) внешний шумовой СВЧ-сигнал не оказывает заметного влияния на хаотический СВЧ-сигнал, спектральные и временные характеристики которого соответствуют аналогичным характеристикам, полученным в автономном режиме генерации. При $P_n = -1.4$ дБм (см. средний ряд на рис. 8) наблюдается случайное чередование состояний с подавленной (синхронной) и неподдавленной (несинхронной) хаотической динамикой, имеющих приблизительно одинаковые характерные длительности. В этом случае, как и в случае с вакуумным генератором хаоса, наблюдается вынужденная синхронизация хаоса под внешним шумовым воздействием, которая должна приводить к «on-off» перемежаемости. В техническом плане такое поведение автоколебательной системы можно объяснить тем, что внешний шумовой СВЧ-сигнал начинает модулировать коэффициент усиления транзисторного усилителя по случайному закону, заставляя его работать то в линейном, то в нелинейном режимах. Однако в отличие от ЛБВ-усилителя этот процесс наблюдается при гораздо меньших уровнях мощности. При дальнейшем увеличении уровня мощности внешнего шумового СВЧ-сигнала до $P_n = +8.9$ дБм (см. нижний ряд на рис. 8) характерная длительность подавленных (синхронных) состояний здесь также возрастает, а характерная длительность состояний с хаотической динамикой (несинхронных состояний) здесь также уменьшается.

На рис. 9 представлены результаты расчета распределений N длительностей ламинарных фаз τ и зависимостей средней длительности ламинарных фаз $\langle \tau \rangle$ от параметра надкритичности $P_{crit} - P_n$. Данные статистические характеристики рассчитаны как на основе экспериментальных временных рядов, так и на основе аналитических выражений, характерных для «on-off»

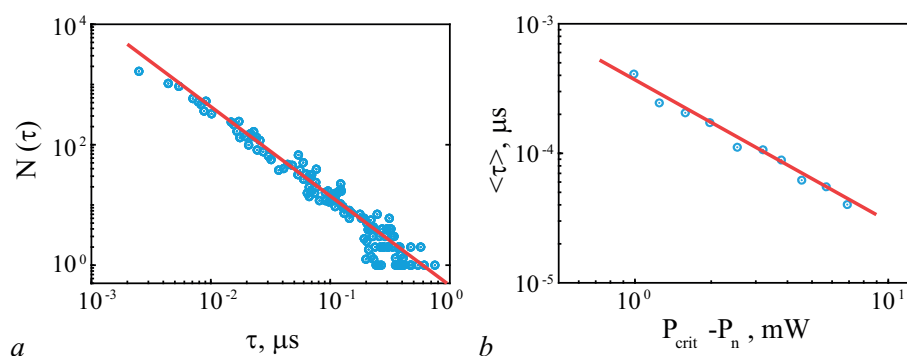


Рис. 9. Статистические характеристики «on-off» перемежаемости, полученные на схеме спин-волнового генератора хаоса для $\Delta f_n = 1$ МГц: a — распределение длительностей ламинарных фаз и b — зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Синие кружки соответствуют значениям длительностей ламинарных фаз, полученным на основе экспериментальных временных рядов. Сплошные линии соответствуют аналитическим результатам, полученным на основе следующих аналитических выражений: $a - N \sim \tau^{-3/2}$ и $b - \langle \tau \rangle \sim (P_{crit} - P_n)^{-1}$ (цвет онлайн)

Fig. 9. Statistical characteristics of the “on-off” intermittency obtained from the spin-wave chaos generator scheme for $\Delta f_n = 1$ MHz: a — distribution of the laminar phase durations, b — dependence of the average duration of the laminar phases on the supercriticality parameter. Blue circles correspond to the values of laminar phase durations obtained from the experimental time series. Solid lines correspond to the analytical results obtained from the following analytical expressions: $a - N \sim \tau^{-3/2}$ and $b - \langle \tau \rangle \sim (P_{crit} - P_n)^{-1}$ (color online)

перемежаемости. Как следует из результатов, представленных на рис. 9, измеренные и аналитически рассчитанные статистические характеристики хорошо согласуются между собой. Это свидетельствует о том, что использование метода временной фильтрации хаотического СВЧ-сигнала внешним шумовым СВЧ-сигналом в спин-волновом генераторе также позволяет реализовать режим «on-off» перемежаемости. В связи с этим здесь следует ожидать и явления когерентного резонанса.

На рис. 7, б приведены зависимости времени автокорреляции огибающей хаотического СВЧ-сигнала τ_{autocorr} от мощности внешнего шумового СВЧ-сигнала P_n , полученные на схеме спин-волнового генератора хаоса для нескольких значений полосы частот шума Δf_n . Как и в случае модифицированной схемы шумотрона, все зависимости имеют ярко выраженный максимум времени автокорреляции $\tau_{\text{autocorr}}^{\text{max}}$, который наблюдается при определенной мощности шумового СВЧ-сигнала $P_{n,\text{opt}}$. Здесь также наибольшее значение $\tau_{\text{autocorr}}^{\text{max}} = 4.1$ мкс регистрируется при наименьшей полосе шума $\Delta f_n = 1$ МГц, а наименьшее значение $\tau_{\text{autocorr}}^{\text{max}} = 2$ мкс (оно уменьшается более чем в два раза) наблюдается при $\Delta f_n = 15$ МГц, что не сильно отличается от значения полосы шума $\Delta f_n = 10$ МГц, полученной на модифицированной схеме шумотрона. При дальнейшем увеличении полосы шума до $\Delta f_n = 30$ МГц значение $\tau_{\text{autocorr}}^{\text{max}}$ сравнивается по величине с аналогичным значением, полученным при $\Delta f_n = 1$ МГц. В отличие от модифицированной схемы шумотрона, значение $P_{n,\text{opt}}$ в схеме спин-волнового генератора хаоса претерпевает существенные изменения с увеличением полосы частот внешнего шумового СВЧ-сигнала. Оно уменьшается на величину ~ 10 дБ с увеличением значения Δf_n в 30 раз. Таким образом, в спин-волновом генераторе хаоса, находящемся под воздействием внешнего шумового СВЧ-сигнала с ограниченной полосой частот, явление когерентного резонанса также диагностируется в режиме генерации хаотического СВЧ-сигнала.

Необходимо отметить, что в обеих генераторных схемах минимальное значение $\tau_{\text{autocorr}}^{\text{max}}$ наблюдается приблизительно при одинаковом значении ширины полосы частот внешнего шумового СВЧ-сигнала $\Delta f_n = 10...15$ МГц. По всей видимости, это связано с тем, что данные значения полосы частот шумового СВЧ-сигнала становятся сравнимыми со значениями ширины полосы частот хаотического СВЧ-сигнала ($\Delta f_n \sim \Delta f_{ch}$), генерируемого в обеих генераторных схемах. Приблизительно одинаковые характерные временные масштабы («квазипериоды» огибающей) у обоих сигналов не позволяют получать более регулярные переключения между режимами полного подавления хаоса и его генерации, как в двух других случаях, когда $\Delta f_n < \Delta f_{ch}$ и $\Delta f_n > \Delta f_{ch}$.

Заключение

Полученные в работе экспериментальные результаты демонстрируют возможность наблюдения явления когерентного резонанса в подавляемых шумом микроволновых одномодовых генераторах хаоса с ЗОС, работающих в СВЧ-диапазоне. Это стало возможным благодаря использованию метода временной фильтрации хаотического СВЧ-сигнала внешним шумовым СВЧ-сигналом с ограниченной полосой частот. Метод базируется на эффекте вынужденной синхронизации хаоса под внешним шумовым воздействием и позволяет реализовать режим «on-off» перемежаемости, в котором по аналогии с двумя связанными хаотическими осцилляторами [8] диагностируется когерентный резонанс. Предложенный метод может быть использован для наблюдения когерентного резонанса и в многомодовых (широкополосных) генераторах хаоса [24]. Последнее может представлять определенный интерес для систем широкополосной связи и шумовой локации [28, 29]. Помимо этого, разработанный метод временной фильтрации хаотического сигнала может найти применение и в нейроморфных вычислительных системах, в основе работы которых лежит концепция «вычисления на краю хаоса» [30].

Список литературы

1. *Hu G., Ditzinger T., Ning C. Z., Haken H.* Stochastic resonance without external periodic force // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, no. 6. P. 807–810. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.807.
2. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, no. 5. P. 775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775.
3. *Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A. B., Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems // *Phys. Rep.* 2004. Vol. 392, iss. 6. P. 321–424. DOI: 10.1016/j.physrep.2003.10.015.
4. *Han S. K., Yim T. G., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V.* Interacting coherence resonance oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, no. 9. P. 1771–1774. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.1771.
5. *Giacomelli G., Giudici M., Balle S., Tredicce J. R.* Experimental evidence of coherence resonance in an optical system // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84, no. 15. P. 3298–3301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.3298.
6. *Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Садовников С. А., Скороходов В. Н., Степанов А. О.* Когерентный резонанс в клистронном автогенераторе на пороге самовозбуждения // *Письма в ЖТФ.* 2011. Т. 37, № 22. С. 86–94.
7. *Palenzuela C., Toral R., Mirasso C. R., Calvo O., Gunton J. D.* Coherence resonance in chaotic systems // *Europhys. Lett.* 2001. Vol. 56, no. 3. P. 347–353. DOI: 10.1209/epl/i2001-00526-5.
8. *Liu Z., Lai Y.-C.* Coherence resonance in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, no. 21. P. 4737–4740. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.4737.
9. *Calvo O., Mirasso C. R., Toral R.* Coherence resonance in chaotic electronic circuits // *Electron. Lett.* 2001. Vol. 37, no. 17. P. 1062–1063. DOI: 10.1049/el:20010735.
10. *Calvo O., Gomes I., Mirasso C. R., Toral R.* Experimental observation of coherence and stochastic resonances in an electronic Chua circuit // *AIP Conf. Proc.* 2002. Vol. 622, no. 1. P. 427–432. DOI: 10.1063/1.1487561.
11. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 359 с.
12. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания. Изд. 2-е, доп. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 424 с.
13. *Marchewka C., Larsen P., Bhattacharjee S., Booske J., Sengele S., Ryskin N., Titov V.* Generation of chaotic radiation in a driven traveling wave tube amplifier with time-delayed feedback // *Phys. Plasmas.* 2006. Vol. 13, no. 1. P. 013104. DOI: 10.1063/1.2161170.
14. *Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Скороходов В. Н., Геншафт А. М.* Синхронизация хаотических колебаний путем подавления хаоса в клистронном автогенераторе внешним гармоническим сигналом // *Известия вузов. ПНД.* 2007. Т. 15, № 3. С. 52–57. DOI: 10.18500/0869-6632-2007-15-3-52-57.
15. *Гришин С. В., Гришин В. С., Храмов А. Е., Шараевский Ю. П.* Генерация широкополосного хаотического сигнала в автоколебательной системе с нелинейной линией передачи на магнитостатических волнах // *ЖТФ.* 2008. Т. 78, № 5. С. 89–98.
16. *Кислов В. Я., Мясин Е. А., Богданов Е. В.* Способ генерации электромагнитных шумовых колебаний // *А.с. № 1125735 (СССР).* 1984. Бюл. № 43.
17. *Анисимова Ю. В., Воронцов Г. М., Залогин Н. Н., Кислов В. Я., Мясин Е. А.* Шумотрон // *Радиотехника.* 2000. № 2. С. 19–25.
18. *Блиох Ю. П., Любарский М. Г., Подобинский В. О., Файнберг Я. Б.* Исследование механизмов стохастизации секционированных пучковых СВЧ-генераторов // *Физика плазмы.* 1994. Т. 20, № 7–8. С. 718–728.
19. *Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Клокотов Д. В., Рыскин Н. М.* Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном клистронном автогенераторе с запаздывающей обратной связью // *ЖТФ.* 2003. Т. 73, № 7. С. 105–110.

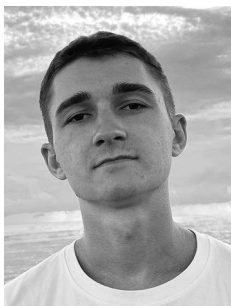
20. *Wu M.* Nonlinear spin waves in magnetic film feedback rings // *Solid State Phys.* 2010. Vol. 62. P. 163–224. DOI: 10.1016/B978-0-12-374293-3.00003-1.
21. *Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Скороходов В. Н.* Способ генерации хаотических радиоимпульсов большой мощности для прямохаотических систем связи // Патент на изобретение № 2349027 С1 РФ, МПК H03K 3/84: заявл. 25.07.2007: опубл. 10.03.2009. 7 с.
22. *Гришин С. В., Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Манышев Р. А., Скороходов В. Н.* Генерация хаотических СВЧ импульсов в широкополосных спин-волновых и вакуумных генераторах хаоса под внешним периодическим воздействием // *Известия вузов. ПНД.* 2012. Т. 20, № 5. С. 137–155. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-5-137-155.
23. *Grishin S. V., Moskalenko O. I., Pavlov A. N., Romanenko D. V., Sadovnikov A. V., Sharaevskii Yu. P., Sysoev I. V., Medvedeva T. M., Seleznev E. P., Nikitov S. A.* Space-quasiperiodic and time-chaotic parametric patterns in a magnonic quasicrystal active ring resonator // *Phys. Rev. Appl.* 2021. Vol. 16, no. 5. P. 054029. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.16.054029.
24. *Гришин С. В., Никитов С. А., Романенко Д. В., Худоложский В. О., Шараевский Ю. П.* Генерация одиночных хаотических импульсов в кольцевой автоколебательной системе с ферромагнитной пленкой под внешним шумовым воздействием // *Письма в ЖТФ.* 2013. Т. 39, № 7. С. 9–18.
25. *Гришин С. В., Скороходов В. Н.* Генерация темных импульсов огибающей в модифицированной схеме шумотрона // *Письма в ЖТФ.* 2023. Т. 49, № 18. С. 37–41. DOI: 10.21883/PJTF.2023.18.56176.19516.
26. *Демидов В. Е., Ковшиков Н. Г.* Стохастическая генерация при параметрическом возбуждении спиновых волн в пленках железоиттриевого граната // *Письма в ЖТФ.* 1998. Т. 24, № 7. С. 66–72.
27. *Демидов В. Е., Ковшиков Н. Г.* Некоторые особенности перехода к хаосу при автомодуляции поверхностных спиновых волн // *Письма в ЖЭТФ.* 1997. Т. 66, № 4. С. 243–246.
28. *Дмитриев А. С., Панас А. И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
29. *Залогин Н. Н., Кислов В. В.* Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах. М.: Радиотехника, 2006. 205 с.
30. *Legenstein R., Maass W.* Edge of chaos and prediction of computational performance for neural circuit models // *Neural Netw.* 2007. Vol. 20, no. 3. P. 323–334. DOI: 10.1016/j.neunet.2007.04.017.

References

1. *Hu G, Ditzinger T, Ning CZ, Haken H.* Stochastic resonance without external periodic force. *Phys. Rev. Lett.* 1993;71(6):807–810. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.807.
2. *Pikovsky A, Kurths J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Phys. Rev. Lett.* 1997;78(5):775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775.
3. *Lindner B, Garcia-Ojalvo J, Neiman AB, Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems. *Phys.Rep.* 2004;392:321–424. DOI: 10.1016/j.physrep.2003.10.015.
4. *Han SK, Yim TG, Postnov DE, Sosnovtseva OV.* Interacting coherence resonance oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1999;83(9):1771–1774. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.1771.
5. *Giacomelli G, Giudici M, Balle S, Tredicce JR.* Experimental evidence of coherence resonance in an optical system. *Phys.Rev. Lett.* 2000;84(15):3298–3301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.3298.
6. *Dmitriev BS, Zharkov YD, Sadovnikov SA, Skorokhodov VN, Stepanov AO.* Coherent resonance in klystron oscillator at self-excitation threshold. *Tech. Phys. Lett.* 2011;37(11):1082–1085. DOI: 10.1134/S1063785011110216.

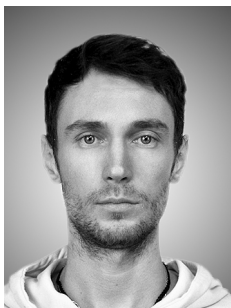
7. Palenzuela C, Toral R, Mirasso CR, Calvo O, Gunton JD. Coherence resonance in chaotic systems. *Europhys. Lett.* 2001;56(3):347–353. DOI: 10.1209/epl/i2001-00526-5.
8. Liu Z, Lai Y-C. Coherence resonance in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2001;86(21):4737–4740. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.4737.
9. Calvo O, Mirasso CR, Toral R. Coherence resonance in chaotic electronic circuits. *Electron. Lett.* 2001;37(17):1062–1063. DOI: 10.1049/el:20010735.
10. Calvo O, Gomes I, Mirasso CR, Toral R. Experimental observation of coherence and stochastic resonances in an electronic Chua circuit. *AIP Conf. Proc.* 2002;622(1):427–432. DOI: 10.1063/1.1487561.
11. Landa PS. *Auto-Oscillations in the Systems with a Finite Number of Freedom Degrees*. M.: Nauka; 1980. 359 p. (in Russian).
12. Neymark YuI., Landa PS. *Stochastic and Chaotic Oscillations*. 2nd Ed., suppl. M.: Book House “LIBROKOM”; 2009. 424 p. (in Russian).
13. Marchewka C, Larsen P, Bhattacharjee S, Booske J, Sengele S, Ryskin N, Titov V. Generation of chaotic radiation in a driven traveling wave tube amplifier with time-delayed feedback. *Phys. Plasmas*. 2006;13(1):013104. DOI: 10.1063/1.2161170.
14. Dmitriev BS, Zharkov YuD, Skorokhodov VN, Genshaft AM. Synchronization of chaotic oscillation by the way of chaos suppression in klystron active oscillator by external harmonic signal. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2007;15(3):52–57 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2007-15-3-52-57.
15. Grishin SV, Grishin VS, Hramov AE, Sharaevskii YuP. Wideband chaotic oscillation in a self-oscillatory system with a nonlinear transmission line on magnetostatic waves. *Tech. Phys.* 2008;53(5):620–628. DOI: 10.1134/S1063784208050150.
16. Kislov VYa, Myasin EA, Bogdanov EV. Method of generation of electromagnetic noise oscillations. *A.s. No. 1125735 (USSR)*. 1984;43 (in Russian).
17. Anisimova YuV, Vorontsov GM, Zalogin NN, Kislov VYa, Myasin EA. *Noisetron. Radiotekhnika*. 2000;2:19–25 (in Russian).
18. Bliokh JP, Lubarsky MG, Podobinsky VO, Feinberg JB. Investigation of stochasticization mechanisms of sectionalized microwave beam generators. *Physics of Plasma*. 1994;20(7,8):718–728 (in Russian).
19. Dmitriev BS, Zharkov YD, Klokotov DV, Ryskin NM. Experimental study of complex dynamics in a delayed-feedback multiple-cavity klystron self-oscillator. *Tech. Phys.* 2003;48(7):901–905. DOI: 10.1134/1.1593198.
20. Wu M. Nonlinear spin waves in magnetic film feedback rings. *Solid State Phys.* 2010;62:163–224. DOI: 10.1016/B978-0-12-374293-3.00003-1.
21. Dmitriev BS, Zharkov YuD, Skorokhodov VN. Method of chaotic radio-frequency pulses of major power generation for direct-random communication systems. Patent for invention No. 2349027 Russian Federation, IPC H03K 3/84: appl. 25.07.2007: publ. 10.03.2009. 7 p. (in Russian).
22. Grishin SV, Dmitriev BS, Zharkov YuD, Manyshev RA, Skorokhodov VN. Chaotic microwave pulse generation in wideband spin-wave and vacuum oscillators of chaos under external periodical influence. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2012;20(5):137–155. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-5-137-155.
23. Grishin SV, Moskalenko OI, Pavlov AN, Romanenko DV, Sadovnikov AV, Sharaevskii YuP, Sysoev IV, Medvedeva TM, Seleznev EP, Nikitov SA. Space-quasiperiodic and time-chaotic parametric patterns in a magnonic quasicrystal active ring resonator. *Phys. Rev. Appl.* 2021;16(5):054029. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.16.054029.
24. Grishin SV, Nikitov SA, Romanenko DV, Khudolozhkin VO, Sharaevskii YuP. Generation of single

- chaotic microwave pulses in a self-oscillating ring system with ferromagnetic film under the action of external noise. *Tech. Phys. Lett.* 2013;39(4):321–324. DOI: 10.1134/S1063785013040056.
25. Grishin SV, Skorokhodov VN. Generation of dark envelope pulses in a modified noisetron scheme. *Tech. Phys. Lett.* 2023;49(9):75–78. DOI: 10.61011/TPL.2023.09.56716.19516.
 26. Demidov VE, Kovshikov NG. Stochastic generation accompanying parametric excitation of spin waves in yttrium iron garnet films. *Tech. Phys. Lett.* 1998;24(4):274–276. DOI: 10.1134/1.1262081.
 27. Demidov VE, Kovshikov NG. Some special features of the transition to chaos in the self-modulation of surface spin waves. *JETP Lett.* 1997;66(4):261–265. DOI: 10.1134/1.567464.
 28. Dmitriev AS, Panas AI. *Dynamic Chaos: New Information Carriers for Communication Systems*. M.: Fizmatlit; 2002. 252 p. (in Russian).
 29. Zalogin NN, Kislov VV. *Broadband Chaotic Signals in Radio Engineering and Information systems*. M.: Radio Engineering; 2006. 205 p. (in Russian).
 30. Legenstein R, Maass W. Edge of chaos and prediction of computational performance for neural circuit models. *Neural Netw.* 2007;20(3):323–334. DOI: 10.1016/j.neunet.2007.04.017.



Комков Павел Сергеевич — родился в Саратовской области (2001). Окончил бакалавриат по направлению «Радиофизика» Института физики Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (2023). На данный момент обучается в магистратуре по направлению «Радиофизика» и работает в АО «НПП «Алмаз». Имеет одну научную публикацию.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: k-pavlik-k@mail.ru
ORCID: 0009-0002-5988-5352



Пыхтунов Дмитрий Сергеевич — родился в Энгельсе (1993). Обучался в бакалавриате по направлению «Радиофизика» факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (2013). Окончил магистратуру по направлению «Радиофизика» Института физики Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (2024). На данный момент работает в АО «НПП «Алмаз».

Россия, 410033 Саратов, ул. им. Панфилова И. В., зд. 1А, стр. 1
АО «НПП «Алмаз»
E-mail: dmitry.pyhtunoff@yandex.ru



Романенко Дмитрий Владимирович — родился в Саратове (1988). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2010). В настоящее время является старшим преподавателем кафедры нелинейной физики Института физики СГУ. Автор более 30 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах, руководитель и исполнитель ряда научных проектов, выполнявшихся при поддержке ФЦП, РФФИ, РНФ. Основные области научных интересов: волновая динамика в ферромагнитных структурах, нелинейные явления в спин-волновой электронике.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: dmitrii.romanenk@mail.ru
ORCID: 0000-0003-1872-6697
AuthorID (eLibrary.Ru): 681088



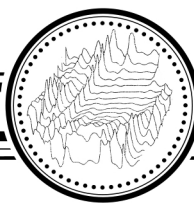
Скороходов Валентин Николаевич — родился в 1959 году. Окончил физический факультет СГУ в 1982 году. В настоящее время является заведующим лабораторией кафедры электроники, колебаний и волн. Область научных интересов: нелинейная динамика в СВЧ-электронике. Автор более 20 статей в отечественных и зарубежных журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: skor@info.sgu.ru



Гришин Сергей Валерьевич — родился в 1974 году. Окончил физический факультет СГУ имени Н. Г. Чернышевского (1997). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2006). Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн Института физики СГУ. Область научных интересов — нелинейные явления в автоколебательных системах вакуумной и магнито-электронике, генераторы ультракоротких импульсов, метаматериалы на основе гиротропных сред. Автор более 50 научных статей, опубликованных в отечественных и зарубежных журналах, четырех патентов на изобретение и двух патентов на полезную модель. Один из авторов коллективной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот».

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: sergrsh@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-3654-3299
AuthorID (eLibrary.Ru): 42293



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003157
EDN: MMEERC

Сценарии переноса пассивных частиц в поле скорости пары точечных вихрей при наличии сдвигового потока

В. Н. Говорухин[✉], Б. К. Гончаров

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: [✉]vngovoruhin@sfedu.ru, bgoncharov@sfedu.ru

Поступила в редакцию 12.09.2024, принята к публикации 16.12.2024,

опубликована онлайн 17.12.2024, опубликована 30.05.2025

Аннотация. Целью работы является анализ переноса пассивных частиц в поле скорости конфигурации из двух вихрей на плоскости при возможном присутствии сдвигового потока. Для моделирования используется система двух точечных вихрей и сдвиговое течение с линейной зависимостью компонент скорости от одной из координат. Изучены сценарии переноса и перемешивания частиц в зависимости от интенсивности одного вихря (в области $[-1, 1] \setminus \{0\}$) и различных сдвиговых потоков при фиксированном начальном положении вихрей и равной единице интенсивности второго. При исследовании применялись численные методы анализа динамических систем. Для решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений использовались интеграторы 8-го порядка точности. Строились сечения Пуанкаре, поля локальных показателей Ляпунова, изучались трансформации маркерных окружностей (жидких контуров) на плоскости. **Результаты.** В зависимости от знаков интенсивностей вихрей и направления сдвигового потока обнаружены следующие сценарии: перемешивание частиц в окрестности вихревой структуры; движение вихревой пары по замкнутым орбитам с переносом частиц из её окрестности и перемешиванием вблизи орбит; перемешивание частиц в обширной области на плоскости; движение вихревой пары к бесконечности с переносом частиц из окрестности её начального положения на большие расстояния; распад пары и движение вихрей в разные стороны на бесконечность с переносом частиц из окрестностей их начальных положений. При наличии сдвигового потока типично стохастическое рассеивание пассивных частиц, что обусловлено их хаотической динамикой. **Закключение.** Показано, что в зависимости от знаков интенсивностей и параметров сдвигового потока вихревая пара может быть «перевозчиком», перемещающим на большие расстояния частицы из окрестности своего начального положения, «перемешивателем» частиц в ограниченной области плоскости, «рассеятелем» частиц из некоторой области по пути своего движения к бесконечности. Результаты статьи могут быть полезны при объяснении сложности процессов переноса в потоках жидкостей и газов при возникновении в них вихревых пар.

Ключевые слова: система точечных вихрей, перенос частиц, перемешивание пассивной примеси, нелинейные системы.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-21-00371. Авторы также благодарят анонимного рецензента за полезные замечания.

Для цитирования: Говорухин В. Н., Гончаров Б. К. Сценарии переноса пассивных частиц в поле скорости пары точечных вихрей при наличии сдвигового потока // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. 341–360. DOI: 10.18500/0869-6632-003157. EDN: MMEERC

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Scenarios of passive particle transport in the velocity field of a vortex pair in shear flow

V. N. Govorukhin[✉], B. K. Goncharov

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: [✉]vngovoruhin@sfedu.ru, bgoncharov@sfedu.ru

Received 12.09.2024, accepted 16.12.2024, available online 17.12.2024, published 30.05.2025

Abstract. Purpose of the work is to analyze the transport of passive particles in the velocity field of a two-vortex configuration on a plane with a possible presence of a shear flow. We model the system using two point vortices and a shear flow, where the velocity components depend linearly on one coordinate. Scenarios of particle transport and mixing are studied depending on the intensity of one vortex (in the region of $[-1, 1] \setminus \{0\}$) and various shear flows with fixed initial positions of the vortices and an intensity of the second equal to unity. In the investigation, we mainly use numerical methods of dynamical systems analysis. We apply 8th-order of accuracy integrators to solve the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. The study also involved constructing Poincare sections and fields of local Lyapunov exponents, as well as studying transformations of marker circles (fluid contours) on a plane. **Results.** Depending on the signs of the vortex intensities and the direction of the shear flow, the following scenarios were found: mixing of particles near the vortex structure; movement of a vortex pair along closed orbits with the transfer of particles from its vicinity and mixing near the orbits; mixing of particles in a large area on the plane; movement of a vortex pair to infinity with the transfer of particles from the vicinity of its initial position over long distances; disintegration of the pair and movement of vortices in different directions to infinity with the transfer of particles from the vicinity of their initial positions. In the presence of a shear flow, stochastic scattering of passive particles is typical, which is because of their chaotic dynamics. **Conclusion.** We show that depending on the signs of intensities and parameters of the shear flow, a vortex pair can be a “carrier” moving particles from the vicinity of its initial position over long distances, a “mixer” of particles in a limited area of the plane, a “scatterer” of particles from a certain area along its path to infinity. The results of the article can be useful in explaining the complexity of transfer processes in fluids and gas flows when vortex pairs arise in them.

Keywords: system of point vortices, particle transfer, advection, nonlinear systems.

Acknowledgements. The research was funded by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00371). The authors are grateful for the valuable comments of an anonymous reviewer.

For citation: Govorukhin VN, Goncharov BK. Scenarios of passive particle transport in the velocity field of a vortex pair in shear flow. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3):341–360. DOI: 10.18500/0869-6632-003157

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Плоские вихревые структуры возникают и наблюдаются в двумерной турбулентности, в атмосфере и океане [1,2], в течениях каналов [3,4], реализуются в физических экспериментах [5–7]. Двухмерность течения может быть обусловлена геометрическими ограничениями, например, тонким слоем или пленкой, наличием фоновых вращений системы, стратификацией жидкости. Простейшими вихревыми течениями, демонстрирующими сложное поведение, являются пары вихрей на плоскости — системы из двух вихрей произвольной интенсивности. Движения вихрей изучались, начиная с конца 19 века, аналитически, численно и экспериментально. В результате выяснены многие фундаментальные свойства их динамики. Одним из эффективных методов при этом оказался метод математического моделирования. Движения системы из двух вихрей зависят от знаков интенсивностей (направления вращения) вихрей. Если они одного знака (однонаправлены), то достаточно удаленные друг от друга вихри вращаются вокруг общего центра интенсивностей, а при их различных знаках формируется движущийся по плоскости модон [6,8,9]. Сценарии усложняются при наличии сдвигового течения, которое может принципиально изменять поведение вихревой пары [6,8,10–13].

Говорухин В. Н., Гончаров Б. К.
Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 3

Во многих случаях эффекты вихревой динамики качественно верно описывает простейшая математическая модель — конфигурация точечных вихрей. Она позволяет интерпретировать физические эксперименты и понять обнаруженные в них эффекты [14], описать структуру течения по информации о его скорости [15]. Это гамильтонова система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая перемещение на плоскости сосредоточенных в точках вихрей с заданной интенсивностью, см. [16, 17]. Динамическая система, описывающая движение точечных вихрей при отсутствии фоновых течений и других осложняющих факторов, интегрируема, а движения вихрей нестационарны. Сдвиговое течение может приводить к существованию стационарных режимов и хаотизации динамики вихрей, нетривиальному рассеянию пассивных частиц, другим нелинейным эффектам [18–20].

Особенный интерес вызывают механизмы массопереноса и перемешивания жидкости в вихревых течениях. Для их понимания полезно исследование процессов в простейшей формулировке — в поле скорости, порождаемом системой точечных вихрей. В этом случае перенос пассивной частицы может трактоваться как динамика системы из трех вихрей, но интенсивность третьего вихря равна нулю. Несмотря на изученность динамики пары точечных вихрей, процессы переноса пассивных частиц в индуцированном им поле скорости до конца не исследованы. Их аналитическое изучение затруднительно, что требует использования методов численного анализа. Особенно эффективны для этого оказываются подходы, основанные на теории динамических систем [21–27].

Целью данной работы является демонстрация динамических эффектов и режимов переноса и перемешивания пассивных частиц, которые могут быть в вихревых структурах в атмосфере, океанах и экспериментах. При изучении системы мы не переходим к подвижной системе координат, что позволяет нагляднее соотнести данные наблюдений и экспериментов с результатами математического моделирования. Рассмотрена система двух точечных вихрей в присутствии сдвигового течения с компонентами скорости, линейно зависящими от координат на плоскости. Статья состоит из введения, краткого описания модели и методов её исследования и раздела, посвященного обнаруженным сценариям переноса частиц без сдвигового потока и при его присутствии.

1. Математическая модель пары точечных вихрей

Согласно [16, 17, 28] динамика N точечных вихрей на плоскости в присутствии линейного по координатам сдвигового течения описывается гамильтоновой системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1,i < j}^N \omega_i \omega_j \ln((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) + \sum_{i=1}^N \omega_i \left(\frac{\alpha}{2} y_i^2 + \frac{\beta}{2} x_i^2 \right),$$

$$\omega_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\omega_i}{2\pi} \sum_{j \neq i}^N \omega_j \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} + \omega_i \alpha y_i,$$

$$\omega_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\omega_i}{2\pi} \sum_{j \neq i}^N \omega_j \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - \omega_i \beta x_i.$$
(1)

Здесь точка означает дифференцирование по времени t , H — гамильтониан системы, (x_i, y_i) — декартовы координаты вихря с номером i на плоскости, а ω_i — его интенсивность (циркуляция). Динамика системы определяется параметрами ω_i и координатами вихрей на плоскости $(x_i(0), y_i(0), i = 1, \dots, N)$ в начальный момент времени $t = 0$. При $\alpha = \beta = 0$, то есть

при отсутствии сдвигового потока, система (1) является классической системой точечных вихрей [16, 17]. Она имеет следующие независимые первые интегралы:

$$Q = \sum_{i=1}^N \omega_i x_i, \quad P = \sum_{i=1}^N \omega_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^N \omega_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (2)$$

Система точечных вихрей индуцирует поле скорости на всей плоскости. Движение пассивной частицы с координатами (x, y) в этом поле скорости описывается системой двух дифференциальных уравнений с нестационарным гамильтонианом Ψ

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \omega_i \ln((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) + \alpha \frac{y^2}{2} + \beta \frac{x^2}{2}, \\ \dot{x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \omega_i \frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} + \alpha y, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \omega_i \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - \beta x. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь (x_i, y_i) — координаты точечного вихря с номером i в момент времени t , а (x, y) — координаты пассивной частицы.

В статье рассмотрена модель пары вихрей — система (1) при $N = 2$ — и исследуется движение пассивной частицы в индуцированном ими поле скорости на плоскости, то есть изучается система шести обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{\omega_2}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{D} + \alpha y_1, & \dot{y}_1 &= \frac{\omega_2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{D} - \beta x_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\omega_1}{2\pi} \frac{y_2 - y_1}{D} + \alpha y_2, & \dot{y}_2 &= \frac{\omega_1}{2\pi} \frac{x_2 - x_1}{D} - \beta x_2 \end{aligned}, \quad \text{где } D = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\omega_1}{2\pi} \frac{y - y_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \frac{\omega_2}{2\pi} \frac{y - y_2}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} + \alpha y, \\ \dot{y} &= \frac{\omega_1}{2\pi} \frac{x - x_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \frac{\omega_2}{2\pi} \frac{x - x_2}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} - \beta x, \end{aligned} \quad (5)$$

где первые четыре уравнения (4) описывают движения точечных вихрей, а (5) — динамику пассивной частицы. Рассматриваются только начальные положения вихрей $x_1(0) = 0, y_1(0) = 1$ и $x_2(0) = 0, y_2(0) = -1$. Также неизменной принята интенсивность первого вихря $\omega_1 = 1$, а интенсивность второго $\omega_2 \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Изучаются возможные сценарии переноса пассивных частиц при изменении параметров ω_2, α, β .

Система уравнений (4) являлась предметом многих исследований и хорошо изучена [6, 16, 17, 28–30]. В частности, в [8, 29] подробно анализируется система (4) динамики двух точечных вихрей в рассматриваемом сдвиговом течении. Опираясь на перечисленные работы, приведем необходимые известные факты. Для дальнейшего исследования важно рассмотреть две характеристики — квадрат расстояния между вихрями $D = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ и координаты

центра интенсивностей $x_c = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2}{\omega_1 + \omega_2}$, $y_c = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2}{\omega_1 + \omega_2}$. Дифференцируя эти выражения по t , в силу системы (4), получим уравнения, определяющие динамику этих величин:

$$\dot{D} = 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(\alpha - \beta), \quad (6)$$

$$\dot{x}_c = \alpha y_c, \quad \dot{y}_c = -\beta x_c. \quad (7)$$

Легко показать, что центр интенсивностей (x_c, y_c) при $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ лежит на прямой, соединяющей координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) точечных вихрей на плоскости при всех t . Траектории центра интенсивностей описываются интегралом системы (7):

$$\frac{\alpha}{2} y_c^2 + \frac{\beta}{2} x_c^2 = C. \quad (8)$$

В зависимости от α, β центр интенсивностей вихрей может перемещаться по эллипсам, гиперболам и прямым. Также центр интенсивности может покоиться при любых значениях параметров α, β , когда $\omega_1 = \omega_2$. При этом покоящемуся центру интенсивностей может соответствовать как ограниченное, так и неограниченное движение вихрей на плоскости. Полная классификация возможных движений пары точечных вихрей, в зависимости от параметров системы (4), не является целью данной статьи, но многие сценарии описаны в разделе 3. При отсутствии сдвигового течения ($\alpha = \beta = 0$) система (4) интегрируема в силу существования достаточного числа независимых интегралов движения. В общем случае при $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ интегрируемость уравнений (4) нарушается и возможна хаотическая динамика вихрей [30, 31].

2. Используемые численные методы анализа динамических систем

Основным инструментом исследования в статье является численный анализ. Это связано с нелинейностью рассматриваемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ограниченностью аналитических методов. Используемые методы и алгоритмы реализованы в среде Matlab [32]. Для контроля численных результатов расчеты воспроизводились с использованием методов различного порядка точности. Мы ограничились кратким описанием методов и алгоритмов, а их подробное изложение можно найти в цитируемой литературе. В работе применяются и реализованы следующие методы численного анализа.

1. *Интеграторы высоких порядков точности*, что обусловлено высокой чувствительностью результатов вычислений для консервативных систем к погрешности методов. Игнорирование этого может приводить к качественно неверным результатам. Использовались метод ode89, входящий в набор интеграторов пакета Matlab [33], и метод ode77 [34]. Использование таких методов позволило проводить численный анализ с высокой точностью. Для контроля результатов отслеживалось сохранение интегралов (2) в динамике. Для всех расчетов погрешность величин (2) не превышала 10^{-10} .

2. *Численное построение отображений Пуанкаре*. В качестве секущей выбиралась гиперплоскость $x_1 - x_2 = 0$ в фазовом пространстве системы уравнений движения вихрей (4) и пассивной частицы (5). Итогом построения отображения является множество точек в \mathbb{R}^2 , представляющих собой координаты пассивных частиц (x, y) в момент возвращения вихрей на заданную гиперплоскость, что соответствует полному обороту пары вихрей вокруг центра интенсивностей. По отображениям Пуанкаре можно судить о динамике частиц в окрестностях вихревой конфигурации на больших временах. Для расчета траекторий при построении отображения Пуанкаре применялся интегратор ode77, а уточнение точки на гиперплоскости проводилось с помощью метода Ньютона. В присутствии сдвигового течения движение вихрей может быть двухчастотным,

что влечет за собой «смазывание» отображения Пуанкаре для пассивных частиц (x, y) . Чтобы нивелировать эффект «смазывания» отображения, мы рассматриваем точки на секущей относительно движущегося центра интенсивностей пары вихрей: $x' = x - x_c$, $y' = y - y_c$, что позволяет учесть одну из частот движения пары вихрей.

3. *Динамика маркерных окружностей.* Под маркерной окружностью $C(R)$ мы понимаем набор из N_m маркерных точек на плоскости с начальными координатами

$$C(R) = \left\{ (x_k, y_k) : x_k = R \cos(\varphi_k), y_k = R \sin(\varphi_k), \varphi_k = \frac{2\pi k}{N_m}, k = 1, \dots, N_m \right\}. \quad (9)$$

Этот набор точек при большом N_m хорошо приближает окружность радиуса R , а её трансформации во времени наглядно иллюстрируют области со сложной структурой течения, активного перемещения и возможного перемешивания пассивных частиц на плоскости. Деформация маркерных окружностей связана с тем, что они, как правило, не совпадают с линиями уровня интегралов движения и демонстрируют возможное поведение маркеров в реальных течениях, когда интегралы движения неизвестны. В этом случае мы под перемешиванием маркерных окружностей подразумеваем усложнение их формы во времени и пространстве.

Расчеты проводились для пяти и более маркерных окружностей разного радиуса, каждая из которых приближалась $N_m = 10000$ точками, то есть численно решалась задача Коши для системы $2N_m + 4$ обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. *Расчет поля локальных показателей Ляпунова (ЛПЛ).* ЛПЛ служат инструментом качественного анализа процессов перемешивания и массопереноса, а также позволяют обнаружить застойные зоны и инвариантные множества в структуре потока. С их помощью можно установить, насколько с течением времени близкие в начальный момент частицы жидкости отдаляются друг от друга. Кроме того, поле ЛПЛ позволяет находить транспортные барьеры для частиц жидкости в структуре течения. Поскольку значения показателей изучаются на конечных временах и они зависят от начальных данных, то речь идет о нахождении поля ЛПЛ. Используемый в работе метод основан на схемах работ [35, 36] и достаточно подробно описан в [37]. В расчетах рассматривалась начальная область, включающая начальные положения вихрей. На рисунках большим значениям ЛПЛ соответствует более светлый оттенок.

3. Сценарии переноса пассивных частиц

Цель статьи — демонстрация возможных режимов и эффектов при переносе пассивных частиц в поле скорости двух точечных вихрей на плоскости, а не детальное исследование системы (4)–(5) в зависимости от параметров. Нами рассматривалось фиксированное начальное положение вихрей

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1. \quad (10)$$

Интенсивность вихря, расположенного в точке $(0, 1)$, фиксировалась и равнялась $\omega_1 = 1$, а интенсивность вихря в точке $(0, -1)$ принимала значения в интервале $\omega_2 \in [-1, 1] \setminus \{0\}$.

3.1. Сценарии переноса в отсутствие сдвигового течения. При $\alpha = \beta = 0$, то есть без сдвигового течения, динамика достаточно проста. Расстояние между точечными вихрями D является константой, смотри (6), центр интенсивностей (x_c, y_c) остается на месте (7), а вихри движутся по круговым траекториям вокруг него. В численно изученной динамике пассивных частиц не были найдены области хаоса, а каждая рассмотренная частица движется по своей замкнутой кривой на плоскости, см. рис. 1. Это позволяет предположить интегрируемость всей

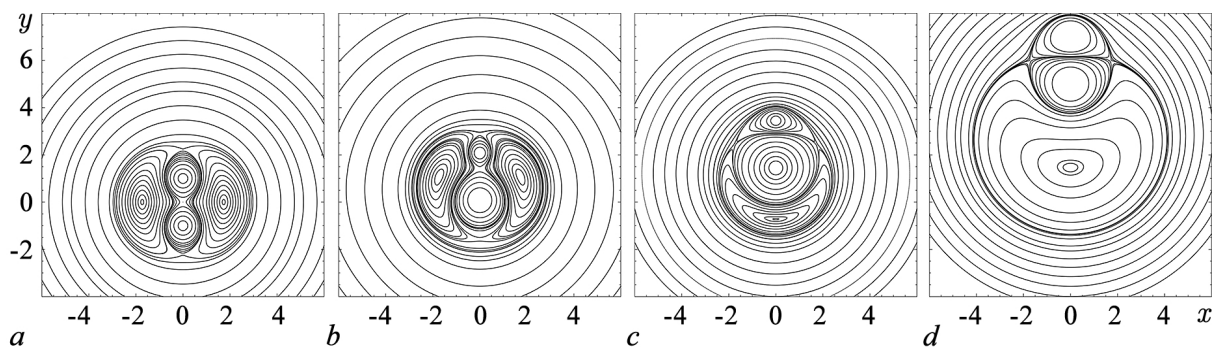


Рис. 1. Сечения Пуанкаре фазового пространства плоскостью $x_1 = x_2$ при отсутствии сдвигового течения $\alpha = \beta = 0$. $a - \omega_1 = \omega_2 = 1$, $b - \omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.3$, $c - \omega_1 = 1$, $\omega_2 = -0.1$, $d - \omega_1 = 1$, $\omega_2 = -0.5$

Fig. 1. Poincaré sections of the phase space by the plane $x_1 = x_2$ in the absence of background flow $\alpha = \beta = 0$. $a - \omega_1 = \omega_2 = 1$, $b - \omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.3$, $c - \omega_1 = 1$, $\omega_2 = -0.1$, $d - \omega_1 = 1$, $\omega_2 = -0.5$

системы (4)–(5), что требует доказательства. Таким образом, при отсутствии сдвигового течения рассматривается только перемешивание пассивных частиц, связанное с деформацией и усложнением маркерных окружностей. Отметим, что в частицах окружностей (9) значения интегралов (2) различны. Если в качестве маркерных кривых в начальный момент выбирать линии уровня функции тока (3), то перемешивание в классическом понимании теории консервативных систем отсутствует в силу предполагаемой интегрируемости динамики, что подтверждают расчеты.

При фиксированных координатах вихрей скорость пассивной частицы затухает при $x \rightarrow \pm\infty$ и $y \rightarrow \pm\infty$, и значительное перемещение пассивных частиц происходит в окрестности вихревой пары. Размер этой области зависит от положения вихрей, их направленности и интенсивностей. При $\alpha = \beta = 0$ выделяется три принципиально различных сценария динамики вихрей и пассивных частиц.

a1. При $\omega_2 > 0$ центр интенсивностей структуры лежит внутри отрезка, соединяющего координаты вихрей. Это означает, что окружности, по которым движутся вихри, расположены в окрестности центра координат, что ограничивает область активного переноса пассивных частиц. Описанный сценарий иллюстрирует отображение Пуанкаре, представленное на рис. 1, *a*, *b*, и маркерные окружности на рис. 2, *a*, *b*.

В отображении Пуанкаре есть четыре эллиптические и три седловые особые точки. Сепаратрисы седловых точек разделяют области качественно различной динамики в окрестностях эллиптических точек. Эти области окружены замкнутыми кривыми, причем чем дальше от центра координат они расположены, тем медленнее движение на них.

На рис. 2, *a* изображено изменение маркерных окружностей для конфигурации с $\omega_2 = 1$, когда вихри вращаются по окружности единичного радиуса. Видно, что маркерная окружность наименьшего из рассмотренных радиусов трансформируется со временем, а другие остаются практически неизменными. При $t \geq 5000$ она распадается на набор точек, см. рис. 1, *a*, и демонстрирует наличие застойных областей в окрестностях вихрей и точек, соответствующих особым точкам отображения Пуанкаре.

При нарушении симметрии вихревой пары, $\omega_2 = 0.3$, координаты центра интенсивностей $(0, 0.5385)$, а радиусы окружностей движения вихрей $r_1 = 0.4615$ и $r_2 = 1.5385$. Это означает, что область активного переноса расширяется, большее число маркерных окружностей деформируется, см. рис. 2, *b*. Структура отображения Пуанкаре качественно сохраняется, но размеры областей вокруг эллиптических особых точек меняются. Для этого случая было построено поле ЛПЛ,

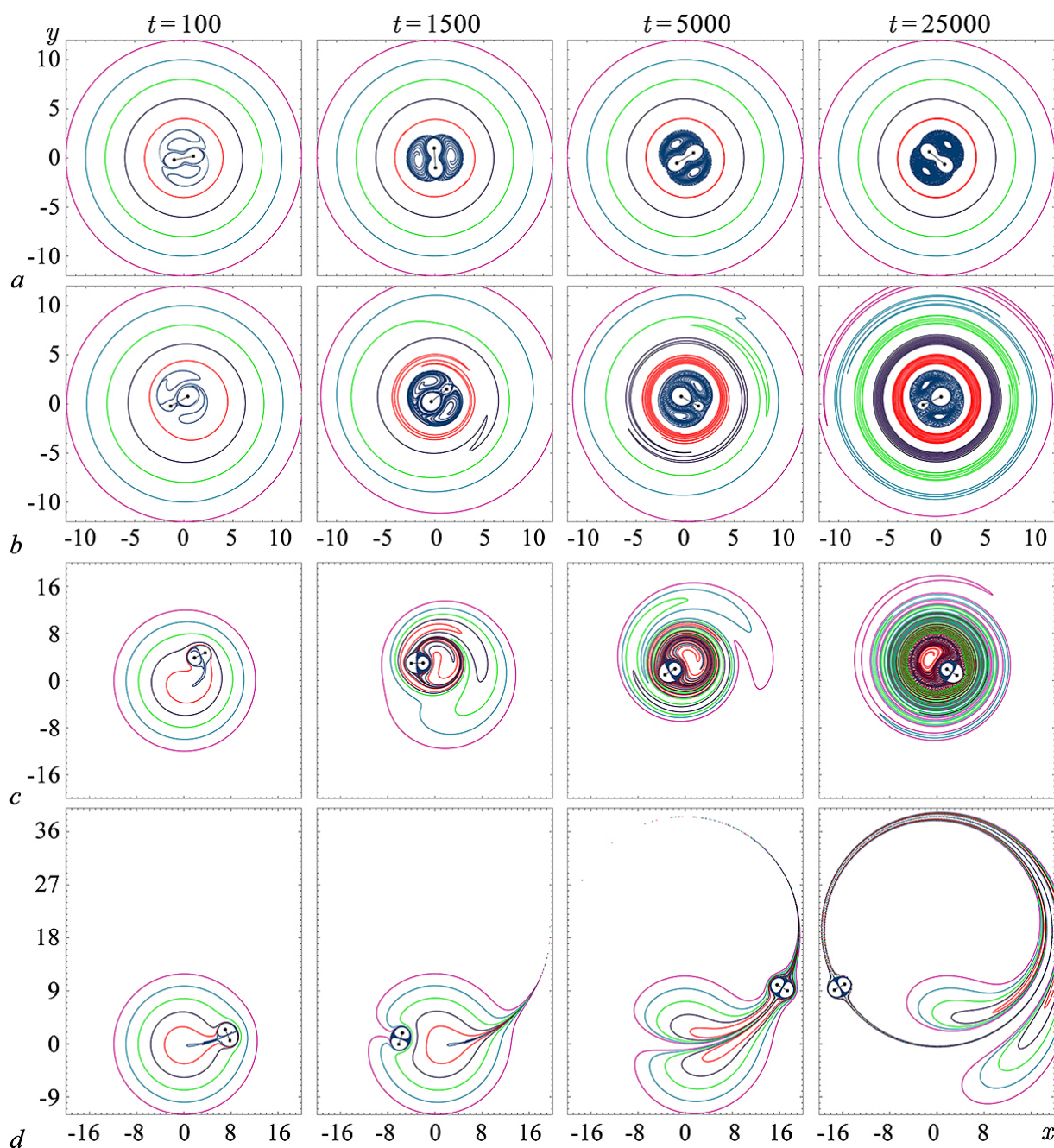


Рис. 2. Динамика шести маркерных окружностей при отсутствии сдвигового течения $\alpha = \beta = 0$. $a - \omega_1 = \omega_2 = 1$; $b - \omega_1 = 1, \omega_2 = 0.3$; $c - \omega_1 = 1, \omega_2 = -0.5$; $d - \omega_1 = 1, \omega_2 = -0.9$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Dynamics of six marker circles in the absence of background flow $\alpha = \beta = 0$. $a - \omega_1 = \omega_2 = 1$; $b - \omega_1 = 1, \omega_2 = 0.3$; $c - \omega_1 = 1, \omega_2 = -0.5$; $d - \omega_1 = 1, \omega_2 = -0.9$ (color online)

изображенное при $t = 4000$ на рис. 3, левый кадр. Значения ЛПЛ находятся в интервале $[-0.0004, 0.005]$. Видны транспортные барьеры между качественно различными областями на плоскости и застойные зоны.

а2. При $\omega_2 \in (-1, 0)$ центр интенсивностей ($x_c = 0, y_c \in (1, \infty)$), вихри расположены по одну сторону от него и движутся по окружностям с центром в (x_c, y_c) . На рис. 1, c, d видно, что в отображении Пуанкаре есть три эллиптические и две седловые особые точки. Наиболее

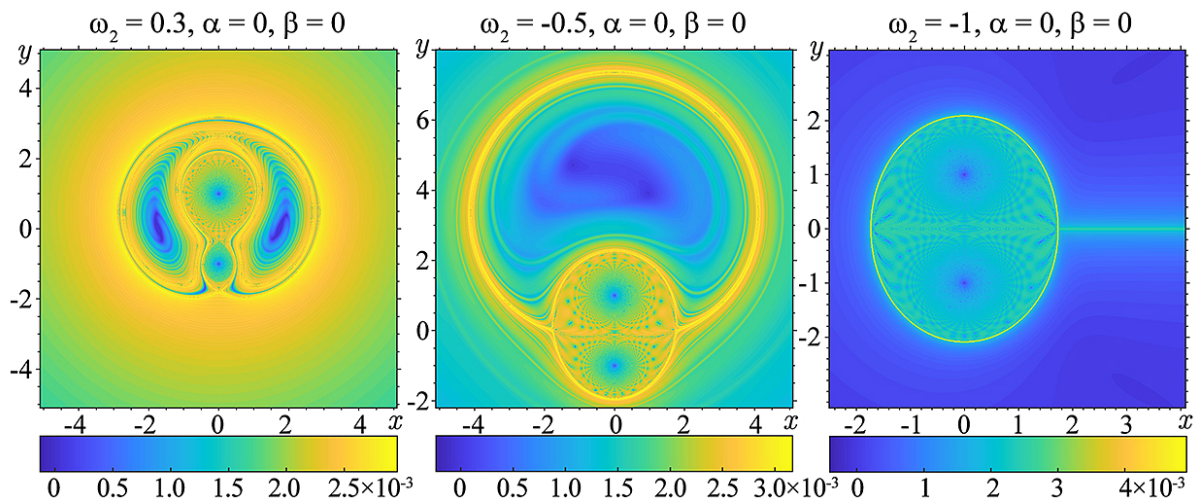


Рис. 3. Поле локальных показателей Ляпунова для трёх значений параметра ω_2 без сдвигового течения при $t = 4000$. Светлый оттенок соответствует областям более активного перемешивания (цвет онлайн)

Fig. 3. Local Lyapunov exponents for three values of the ω_2 parameter without background flow at $t = 4000$. Light shade corresponds to regions of more active mixing (color online)

активное перемещение частиц происходит в окрестностях сепаратрис сёдел, а в окрестности (x_c, y_c) образуется застойная зона, см. поле ЛПЛ на рис. 3, *b*. Маркерные окружности при $\omega_2 = -0.5$ даны на рис. 2, *c*. Когда $\omega_2 \rightarrow -1$ координаты центра интенсивностей $(x_c, y_c) \rightarrow (0, \infty)$, траектории движения вихрей удлиняются, расширяется застойная зона, смотри отображения Пуанкаре на рис. 1, *c, d* и динамику маркерных окружностей на рис. 2, *d*. Видно, что деформации маркерных окружностей изменились — вихревая пара захватывает и активно переносит частицы вдоль траектории своего движения.

а3. Когда $\omega_2 = -1$, траекториями движения вихрей являются два параллельных луча. Вихревая пара захватывает частицы из области, ограниченной сепаратрисами седловых равновесий «моментального векторного поля» при $t = 0$, и перемещает их вдоль своего движения. Переносятся и перемешиваются частицы внутри этой области на луче $\{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}$ и его окрестности, смотри поле ЛПЛ на рис. 3, *c*.

3.2. Сценарии переноса в присутствии сдвигового течения. При $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ динамика вихрей и сценарии переноса пассивных частиц усложняются и становятся значительно разнообразнее. В большинстве случаев интегрируемость системы (4)–(5) нарушается. Это приводит к возникновению областей хаотической динамики, что принципиально отличает рассмотренные процессы перемешивания в присутствии и отсутствие сдвиговых течений. Кроме того, области активного переноса не обязательно расположены в окрестности вихревой пары, так как задаются и сдвиговым течением. Его скорость определяется параметрами α, β и имеет компоненты:

$$v_x^S = \dot{x} = \alpha y, \quad v_y^S = \dot{y} = -\beta x. \quad (11)$$

Система (11) совпадает с (7) и также описывает движение центра интенсивностей вихревой пары. Очевидно, что при α и β одного знака пассивные частицы движутся в поле (11) по эллипсам с центром в начале координат, а при различных знаках траектории частиц стремятся к бесконечности, за исключением особой точки $(0, 0)$. Такое поведение демонстрирует и динамика центра интенсивностей (x_c, y_c) . Наличие вихрей в области течения может существенно менять динамику пассивных частиц в его окрестности, но достаточно далеко от вихрей она определяется полем (11).

Далее представлены результаты только для начальных данных (10). Как и в предыдущем разделе, мы не ставим целью полный анализ системы (4)–(5) при $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, а ограничимся демонстрацией качественно различных сценариев.

b0. При наличии сдвигового течения возможны стационарные режимы. Приведем примеры. Для начальных условий (10) при $\omega_1 = \omega_2 = 1$ имеется стационарное решение, если $\alpha = \frac{1}{4\pi}, \forall \beta$. При этом траектории пассивных частиц определяются функцией тока

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \left(\ln(x^2 + (y-1)^2) + \ln(x^2 + (y+1)^2) \right) + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{1}{8\pi}y^2. \quad (12)$$

Центр интенсивностей вихрей находится в особой точке $(x_c = 0, y_c = 0)$ и не движется. При $\beta \leq 0$ часть частиц остается в окрестностях точечных вихрей, что видно на рис. 4, *a*. Из остальных начальных данных поток уносит пассивные частицы на неограниченное расстояние. Малейшее нарушение значения ω_2 приводит к смещению (x_c, y_c) и распаду стационарного режима, так как возникает движение центра интенсивностей согласно (7).

При возмущении стационарного режима по параметру $\alpha > \frac{1}{4\pi}$ при $\beta = 0$ вихревая пара с начальными условиями (10) разрывается, сдвиговый поток уносит вихри вместе с частицами в противоположные стороны на неограниченное расстояние.

Когда $\beta > 0$, частицы перемещаются по замкнутым траекториям. С ростом β меняется число особых точек стационарного режима и поведение частиц в их окрестностях, например, возникает область замкнутых траекторий около стационарных точек $(0, \pm\sqrt{5})$, это показано на рис. 4, *b, c, d*. Стационарные режимы могут иметь разное количество особых точек и сепаратрис, разделяющих области с качественно различным поведением, смотри рис. 4.

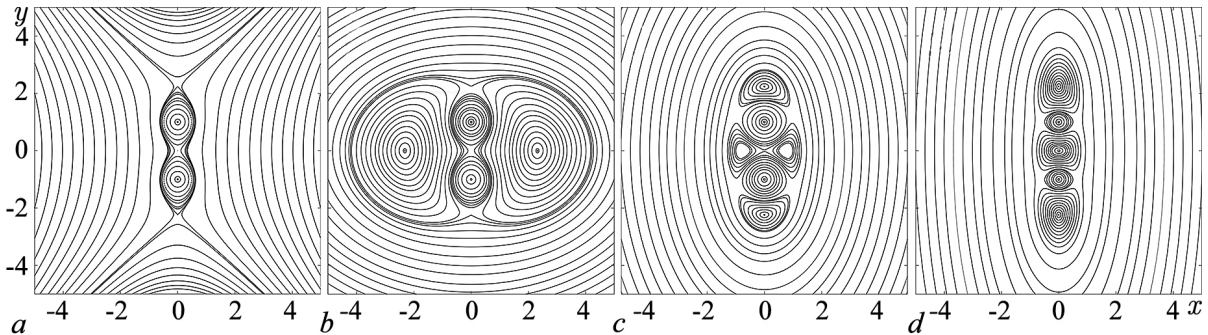


Рис. 4. Траектории частиц в окрестности стационарной пары вихрей при $\alpha = \frac{1}{4\pi} \approx 0.079577$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$ при разных значениях параметра β : *a* – $\beta = -0.1$, *b* – $\beta = 0.05$, *c* – $\beta = 0.2$, *d* – $\beta = 0.5$

Fig. 4. Particle trajectories in the neighbourhood of a stationary dipole at $\alpha = \frac{1}{4\pi} \approx 0.079577$, $\omega_1 = \omega_2 = 1$ for different values of the parameter β : *a* – $\beta = -0.1$, *b* – $\beta = 0.05$, *c* – $\beta = 0.2$, *d* – $\beta = 0.5$

b1. При $\omega_2 > 0$, $\alpha \cdot \beta = 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ существуют значения $\hat{\alpha} > 0$ или $\hat{\beta} > 0$, меньше которых движение пары вихрей состоит из комбинации перемещения центра интенсивностей вдоль одной из осей координат, смотри (7), и вращения вихрей вокруг $(x_c(t), y_c(t))$. Пример дан на рис. 5, *a*, где траектории вихрей изображены толстыми кривыми, а тонкими показано движение 20-ти пассивных частиц с начальными данными в квадрате со стороной 0.001 (помечен на рисунке). Видна сильная зависимость движения пассивных частиц от начального положения, что объясняется их принадлежностью области хаотической динамики. Хаотическая область не ограничена, смотри отображение Пуанкаре в подвижной системе координат на рис. 6, *a*, и можно предположить, что все пассивные частицы со временем стремятся к бесконечности.

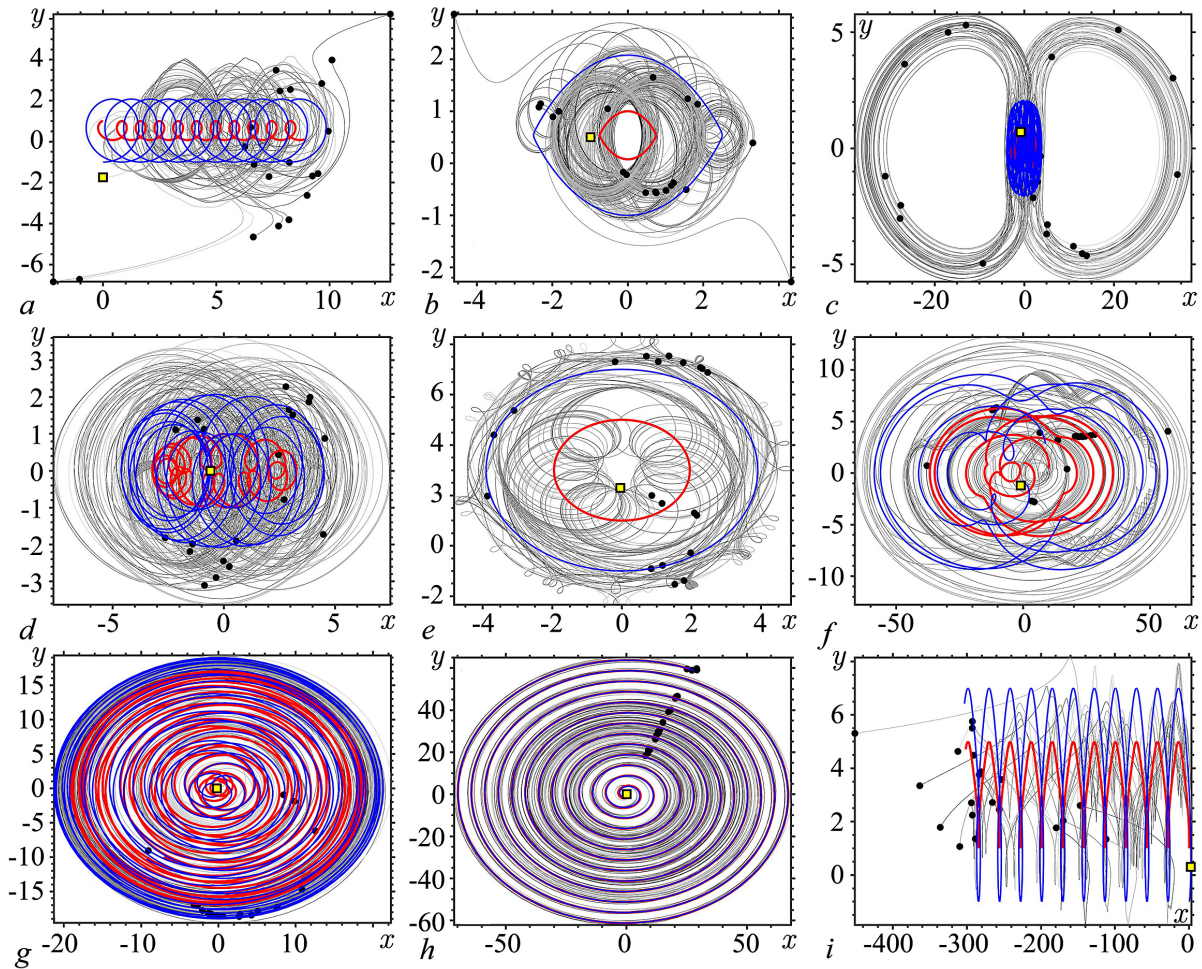


Рис. 5. Траектории вихрей (жирная синяя и красная линии), траектории 20-ти частиц (тонкие серые линии), их начальные (квадрат) и конечные положения (кружки) при значениях параметров и времени: $a - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0.0125, \beta = 0, T = 650$; $b - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0, \beta = 0.01902, T = 1700$; $c - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0.025, \beta = 0.001, T = 4000$; $d - \omega_2 = 0.3, \alpha = -0.025, \beta = -0.001, T = 2000$; $e - \omega_2 = -0.5, \alpha = 0, \beta = -0.001, T = 4000$; $f - \omega_2 = -0.5, \alpha = 0.025, \beta = 0.001, T = 8000$; $g - \omega_2 = -0.8, \alpha = 0.1, \beta = 0.08, T = 2000$; $h - \omega_2 = -1, \alpha = 0.1, \beta = 0.08, T = 900$; $i - \omega_2 = -0.5, \alpha = -0.025, \beta = 0, T = 4000$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Trajectories of vortices (thick blue and red lines), trajectories of 20 particles (thin gray lines), their initial (square) and final positions (circles) for the parameter and time values: $a - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0.0125, \beta = 0, T = 650$; $b - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0, \beta = 0.01902, T = 1700$; $c - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0.025, \beta = 0.001, T = 4000$; $d - \omega_2 = 0.3, \alpha = -0.025, \beta = -0.001, T = 2000$; $e - \omega_2 = -0.5, \alpha = 0, \beta = -0.001, T = 4000$; $f - \omega_2 = -0.5, \alpha = 0.025, \beta = 0.001, T = 8000$; $g - \omega_2 = -0.8, \alpha = 0.1, \beta = 0.08, T = 2000$; $h - \omega_2 = -1, \alpha = 0.1, \beta = 0.08, T = 900$; $i - \omega_2 = -0.5, \alpha = -0.025, \beta = 0, T = 4000$ (color online)

Очевидно хаотическое рассеяние частиц в поле скорости движущейся пары вихрей. Часть частиц «выбрасывается» из окрестности вихревой пары и начинает двигаться в поле сдвигового течения согласно (11). Маркерные окружности с большим радиусом растягиваются под воздействием сдвигового течения, а окружности в окрестности вихревой пары перемешиваются, см. рис. 7, a .

Если $\alpha = 0$, центр интенсивностей стоит на месте при условиях (10). Если $\beta \in (0, \hat{\beta})$, появление сдвигового течения разрушает структуру линий тока, изображенную на рис. 1, b . Возникают области хаотического перемешивания в окрестности сепаратрис особых точек отображения Пуанкаре без сдвигового течения, рис. 1, b . Отображение Пуанкаре при $\beta \lesssim \hat{\beta}$ аналогично

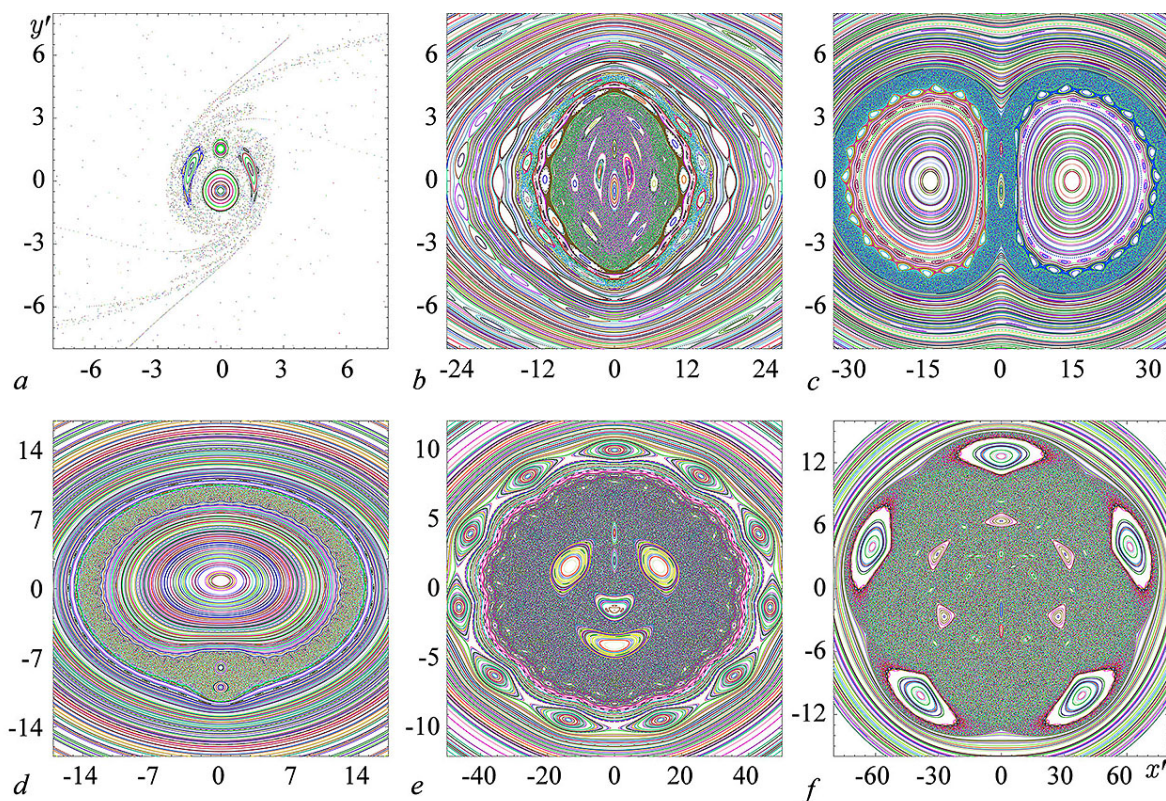


Рис. 6. Отображения Пуанкаре для частиц в системе с фоновым потоком. Отображение рассматривается относительно центра интенсивностей: $(x', y') = (x - x_c, y - y_c)$. $\omega_1 = 1$; $a - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0.0125, \beta = 0$; $b - \omega_2 = 0.3, \alpha = -0.025, \beta = -0.001$; $c - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0.025, \beta = 0.001$; $d - \omega_2 = -0.8, \alpha = 0.16, \beta = 0.08$; $e - \omega_2 = -0.5, \alpha = -0.025, \beta = -0.001$; $f - \omega_2 = -0.5, \alpha = 0.025, \beta = 0.001$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Poincaré maps for particles in a system with a background flow. The map is considered relative to the center of vorticity: $(x', y') = (x - x_c, y - y_c)$. $\omega_1 = 1$, $a - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0.0125, \beta = 0$; $b - \omega_2 = 0.3, \alpha = -0.025, \beta = -0.001$; $c - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0.025, \beta = 0.001$; $d - \omega_2 = -0.8, \alpha = 0.16, \beta = 0.08$; $e - \omega_2 = -0.5, \alpha = -0.025, \beta = -0.001$; $f - \omega_2 = -0.5, \alpha = 0.025, \beta = 0.001$ (color online)

рис. 6, b , а траектории вихрей и частиц в исходной системе координат даны на рис. 5, b . Видно, что траектории частиц покидают окрестность вихревой пары за конечное время. Маркерные окружности малого радиуса перемешиваются вблизи вихрей, а большого растягиваются и сжимаются, см. рис. 7, b .

Когда $\beta > \hat{\beta}$, вихревая пара «разрывается» — вихри разбегаются в противоположные стороны, увлекая за собой часть частиц из окрестности их начального положения. Если $\beta < 0$, вихри сохраняют периодическое движение по окружностям, а в их окрестности имеются обширные области хаоса. Достаточно далекие от вихрей частицы движутся по близкой к замкнутой траектории с медленным дрейфом на плоскости, частицы смещаются, и на больших временах некоторые могут попасть в хаотическую область, и наоборот, частицы из области хаоса могут попасть в область «почти-регулярной» динамики. Поведение частиц похоже на динамику в поле скорости вихревого триполя [23] и САВС-течении [38].

Когда $\alpha < 0, \beta = 0$, при любых значениях параметров вихри имеют периодическую динамику относительно движущегося или покоящегося центра интенсивностей. При этом картина перемешивания схожа со случаем, когда $\alpha = 0, \beta < 0$. Благодаря перемещению пары вихрей и хаотизации динамики частиц также есть эффект их рассеивания.

Когда $\alpha \cdot \beta > 0$, вихри движутся относительно центра интенсивностей с двумя частотами, но вид их траекторий зависит от параметров системы. Динамика частиц при положительных

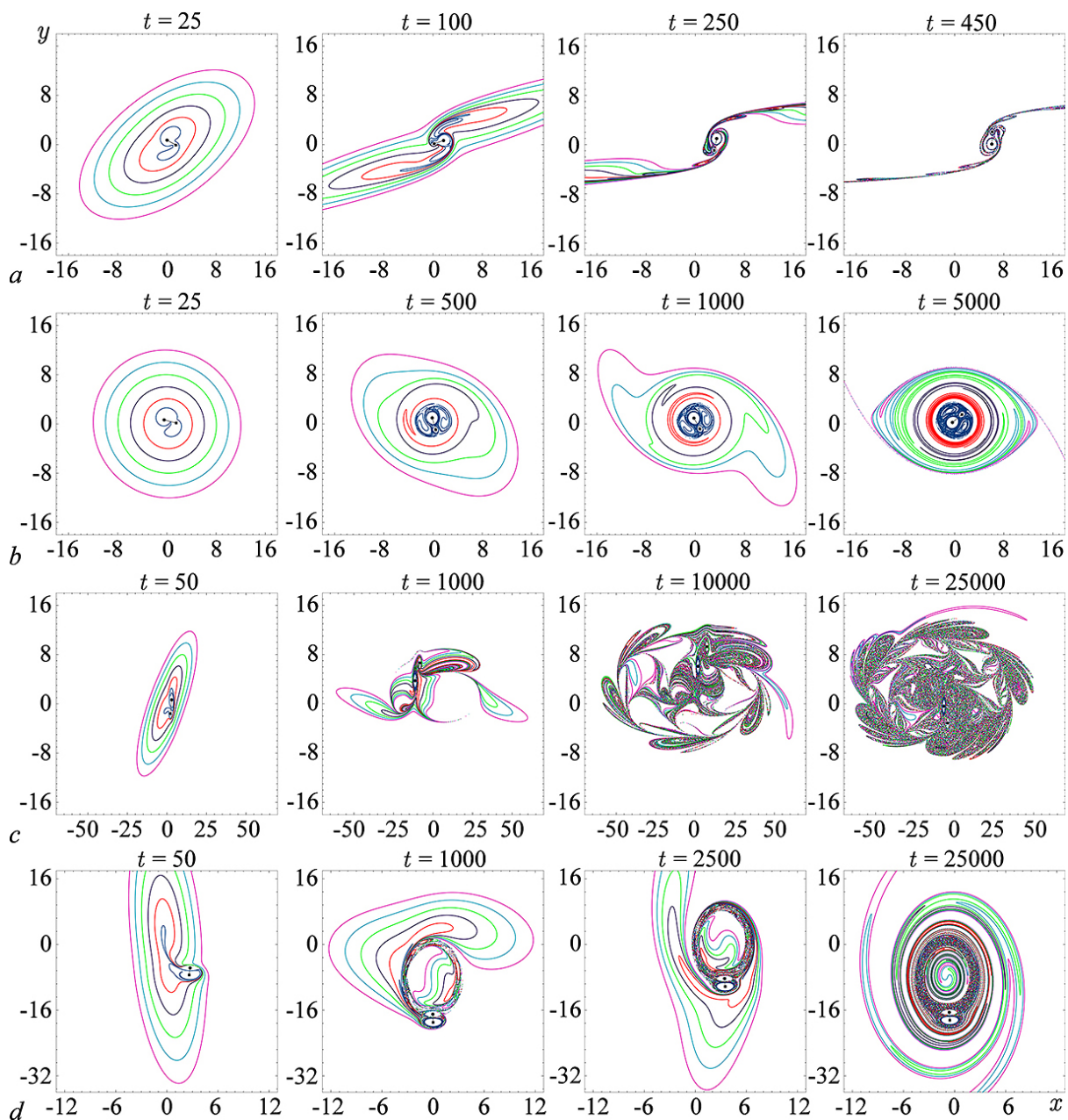


Рис. 7. Динамика шести маркерных окружностей в присутствии сдвигового течения. $a - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0.0125, \beta = 0$; $b - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0, \beta = -0.001$; $c - \omega_2 = -0.5, \alpha = 0.025, \beta = 0.001$; $d - \omega_2 = -0.8, \alpha = 0.16, \beta = 0.08$ (цвет онлайн)

Fig. 7. Dynamics of six marker circles in the presence of shear flow. $a - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0.0125, \beta = 0$; $b - \omega_2 = 0.3, \alpha = 0, \beta = -0.001$; $c - \omega_2 = -0.5, \alpha = 0.025, \beta = 0.001$; $d - \omega_2 = -0.8, \alpha = 0.16, \beta = 0.08$ (color online)

и отрицательных параметрах сдвигового течения качественно отличается. При $\alpha < 0, \beta < 0$ перемешивание частиц локализовано в области движения вихревой пары, рис. 5, d . Возникают большие и малые острова регулярной динамики около хаотических областей, см. рис. 6, b . При $\alpha > 0, \beta > 0$ может возникать обширная область хаотической динамики в виде восьмерки в проекции на плоскость (x, y) , см. рис. 5, c , а отображение Пуанкаре дано на рис. 6, c . Близкие к вихрям частицы могут покинуть окрестности вихрей, а затем вернуться в нее обратно.

Достаточно далекие, не принадлежащие области хаоса частицы циркулируют вокруг начала координат по квазипериодической орбите.

Когда $\alpha \cdot \beta < 0$ при условиях (10), вихревая пара или уносится потоком, совершая вращения вихрей относительно центра интенсивностей, или разрывается. В первом случае вихри захватывают частицы и переносят их, причем частицы рассеиваются по плоскости, а затем отдаляются от вихрей.

b2. Рассмотрим сценарии при $\omega_2 < 0$. Наиболее простая динамика пары вихрей реализуется при нулевых значениях одного из параметров сдвигового потока. Например, при $\alpha = 0$ и $\beta < 0$ вихри движутся по замкнутым орбитам, см. рис. 5, e. Поведение частиц при этом сильно зависит от их начального положения относительно вихрей. При близких начальных данных происходит перемешивание частиц в окрестности вихревой структуры, а из далеких — движение по почти замкнутым орбитам.

Если $\beta > 0$, то существует критическое значение этого параметра, при превышении которого пара «разрывается» и движется попутно к бесконечности с увеличением расстояния между вихрями. При параметрах меньше критического динамика вблизи структуры сходна со случаем $\beta < 0$, а при далеких начальных данных частицы переносятся к бесконечности фоновым потоком.

При $\beta = 0$ и α , не превышающем некоторого критического значения, центр интенсивностей движется вдоль оси абсцисс, а вихри вращаются вокруг него, см. рис. 5, i. Частицы, в зависимости от начальных данных, рассеиваются в полосе движения структуры. При превышении критического α вращение пары вихрей прекращается, и она движется к бесконечности с увеличением расстояния между вихрями.

В широком интервале изменения параметров $\alpha \cdot \beta > 0$ реализуется сценарий сходный с **a2**. Пара движется, перенося и перемешивая частицы в обширной области на плоскости. Разница с **a2** заключается в более сложной динамике вихрей, которая представляет собой комбинацию колебаний относительно перемещающегося согласно (7) центра интенсивностей. Это демонстрируют построенные отображения Пуанкаре для трех наборов параметров на рис. 6, d–f. Типичная для такого сценария динамика вихрей и пассивных частиц изображена на рис. 5, f. Размер и структура области перемешивания при этом зависит не только от знаков параметров сдвигового

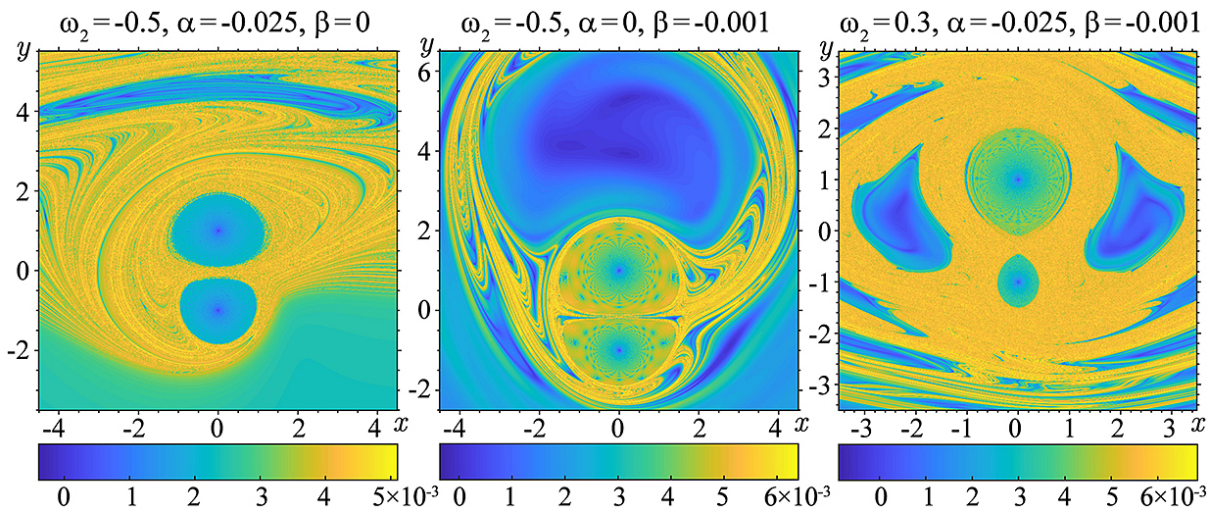


Рис. 8. Поле локальных показателей Ляпунова для $\omega_2 = -0.5$ в присутствии фоновых течений, определяемых параметрами α и β при $t = 2000$ (цвет онлайн)

Fig. 8. Local Lyapunov exponents for $\omega_2 = -0.5$ in the presence of background currents determined by parameters α and β at $t = 2000$ (color online)

потока, но и от соотношения всех параметров системы. Различные области перемешивания демонстрируют маркерные окружности на рис. 7, *c, d*.

Выделяется случай диполя $\omega_2 = -1$, при котором центр завихренности не определен. Если $\alpha \cdot \beta > 0$, то диполь движется по раскручивающейся спирали, смотри рис. 5, *h*. При $\alpha \cdot \beta < 0$ происходит однонаправленный уход вихрей на бесконечность, причем скорость одного из вихрей больше скорости другого. При незначительном увеличении ω_2 динамика вихрей состоит из двух этапов — движение по раскручивающейся спирали до критической ограничивающей кривой и по закручивающейся спирали к началу координат. Такая динамика изображена на рис. 5, *g*. Частицы внутри области движения диполя перемешиваются, а извне вращаются вокруг области перемешивания.

Отметим, что при наличии сдвигового течения характерным свойством потока пассивных частиц в большинстве рассмотренных случаев является возникновение областей хаотической динамики. Это приводит к усложнению процессов переноса и перемешивания частиц. Это наглядно демонстрирует сравнение полей локальных показателей Ляпунова без сдвигового течения и при его присутствии, смотри рис. 3 и 8. Это также является причиной стохастического рассеяния частиц в ограниченной области или в полосе движения диполя.

Заключение

Представленное исследование продемонстрировало большое разнообразие сценариев переноса пассивных частиц парой точечных вихрей на плоскости. В зависимости от знаков интенсивностей вихрей и направления сдвигового потока возможны следующие сценарии: локализация вихрей на плоскости вблизи их центра интенсивностей при перемешивании пассивных частиц в их окрестности; движение пары по круговым орбитам вокруг центра интенсивностей с переносом частиц из его малой окрестности и перемешиванием вблизи орбит; движение вихрей вокруг перемещающегося в поле сдвигового течения центра интенсивностей в достаточно обширной области на плоскости с перемешиванием частиц внутри неё; движение вихрей к бесконечности с переносом частиц или всех частиц из его окрестности на большие расстояния; распад вихревой пары и движение ее вихрей на бесконечность в противоположные стороны с переносом частиц из их окрестностей на большие расстояния. При наличии сдвигового течения типичным в переносе частиц является их стохастическое рассеивание, что объясняется возникновением областей хаотической динамики в системе движения пассивных частиц.

Несмотря на простоту рассмотренной математической модели двух точечных вихрей, полученные результаты частично объясняют разнообразие и сложность динамики при переносе примеси в морских и атмосферных потоках при возникновении вихревых структур. К таким явлениям можно отнести факты переноса примесей на большие расстояния, непредсказуемость динамики частиц жидкости при малом изменении их начального положения, рассеяние загрязнений по большой площади и их локализацию в ограниченных областях и другие эффекты. Другими словами, вихревая конфигурация двух вихрей может быть как «перевозчиком», который перемещает частицы из окрестности своего начального положения на большие расстояния и практически не захватывает новых частиц по пути своего следования, «перемешивателем» ограниченной области плоскости, так и «рассеивателем» частиц из некоторой начальной области по пути своего движения к бесконечности.

В статье рассмотрено только одно начальное положение вихрей — симметричное относительно оси абсцисс и сдвигового течения со скоростями, линейно зависящими от вертикальной координаты. Многое в динамике вихрей и пассивных частиц зависит от положения центра интенсивностей, особенно при наличии сдвигового течения. Его расположение определяется

интенсивностями вихрей и их начальным положением. В работе изменялись только интенсивность одного из вихрей и параметры сдвигового потока, но этого оказалось достаточно для реализации качественно различных нетривиальных сценариев динамики вихревой структуры и процессов переноса пассивных частиц. Естественно ожидать, что при изменении других характеристик вихрей и сдвигового течения могут возникать и другие, возможно более сложные сценарии. Все результаты получены с помощью методов численного анализа динамических систем, что еще раз продемонстрировало их эффективность для анализа задач математической гидродинамики.

Список литературы

1. *Hughes C. W., Miller P. I.* Rapid water transport by long-lasting modon eddy pairs in the southern midlatitude oceans // *Geophysical Research Letters*. 2017. Vol. 44, no. 12. P. 375–384. DOI: 10.1002/2017GL075198.
2. *Callendar W., Klymak J. M., Foreman M. G. G.* Tidal generation of large sub-mesoscale eddy dipoles // *Ocean Sci.* 2011. Vol. 7, iss. 7. P. 487–502. DOI: 10.5194/os-7-487-2011.
3. *Govorukhin V. N.* An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2023. Vol. 95, iss. 4. P. 579–602. DOI: 10.1002/fld.5163.
4. *Kilin A. A., Artemova E. M.* Bifurcation Analysis of the Problem of Two Vortices on a Finite Flat Cylinder // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024. Vol. 20, no. 1. P. 95–111. DOI: 10.20537/nd231209.
5. *Afanasyev Y. D.* Formation of vortex dipoles // *Physics of Fluids*. 2006. Vol. 18, iss. 3. P. 037103. DOI: 10.1063/1.2182006.
6. *Trieling R., Dam C., van Heijst G.* Dynamics of two identical vortices in linear shear // *Physics of Fluids*. 2010. Vol. 22, iss. 11. P. 117104. DOI: 10.1063/1.3489358.
7. *Salinas-Rodríguez E., Hernández M. G., Torres A., Valderrama F., Valdés-Parada F. J.* Dynamic evolution of vortex dipoles // *Revista Brasileira De Ensino De Física*. 2011. Vol. 33, iss. 3. P. 3310. DOI: 10.1590/S1806-11172011000300010.
8. *Gethner R. M.* Motion of two point vortices in a steady, linear, and elliptical flow // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2001. Vol. 28, iss. 10. P. 571–580. DOI: 10.1155/S0161171201007153.
9. *Folz P. J. R., Nomura K. K.* On asymmetric vortex pair interactions in shear // *Journal of Fluid Mechanics*. 2023. Vol. 969. P. A21. DOI: 10.1017/jfm.2023.525.
10. *Marcus P. S.* Vortex dynamics in a shearing zonal flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 1990. Vol. 215. P. 393–430. DOI: 10.1017/S0022112090002695.
11. *Ryzhov E. A., Koshel K. V.* Two-point-vortex evolution in an oscillatory shear flow with rotation // *Europhys. Lett.* 2014. Vol. 108, no. 2. P. 24002. DOI: 10.1209/0295-5075/108/24002.
12. *Vic A., Carton X., Gula J.* The interaction of two unsteady point vortex sources in a deformation field in 2D incompressible flows // *Regul. Chaot. Dyn.* 2021. Vol. 26, iss. 6. P. 618–646. DOI: 10.1134/S1560354721060034.
13. *Walsh D., Pratt L. J.* The interaction of a pair of point potential vortices in uniform shear // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1995. Vol. 22, iss. 3. P. 135–160. DOI: 10.1016/0377-0265(95)00402-V.
14. *Velasco Fuentes O. U., van Heijst G. J. F., Cremers B. E.* Chaotic transport by dipolar vortices on a β -plane // *Journal of Fluid Mechanics*. 1995. Vol. 291, iss. 1. P. 139–161. DOI: 10.1017/s0022112095002655.
15. *Говорухин В. Н.* Идентификация и прогноз динамики плоской вихревой структуры на основе математической модели системы точечных вихрей // *Известия вузов. ПНД*. 2023. Т. 31, № 6. С. 710–726. DOI: 10.18500/0869-6632-003071.

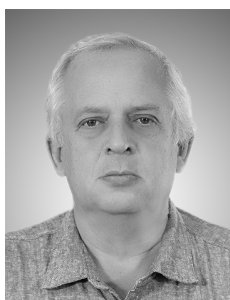
16. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. Ижевск: НИЦ «РХД», Инст. компьютерн. исслед., 2005. 368 с.
17. Курцгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. М.: АН СССР, 1962. 404 с.
18. Didov A. A., Uleysky M. Y., Budyansky M. V. Stable and unstable periodic orbits and their bifurcations in the nonlinear dynamical system with a fixed point vortex in a periodic flow // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2020. Vol. 91. P. 105426. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105426.
19. Ryzhov E. A., Koshel K. V. Global chaotization of fluid particle trajectories in a sheared two-layer two-vortex flow // Chaos. 2015. Vol. 25, iss. 10. P. 103108. DOI: 10.1063/1.4930897.
20. Vetchanin E. V., Mamaev I. S. Dynamics of two point vortices in an external compressible shear flow // Regul. Chaot. Dyn. 2017. Vol. 22, no. 8. P. 893–908. DOI: 10.1134/S1560354717080019.
21. Rom-Kedar V., Leonard A., Wiggins S. An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow // Journal of Fluid Mechanics. 1990. Vol. 214. P. 347–394. DOI: 10.1017/S0022112090000167.
22. Kuznetsov L., Zaslavsky G. M. Regular and chaotic advection in the flow field of a three-vortex system // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, no. 6. P. 7330–7349. DOI: 10.1103/physreve.58.7330.
23. Говорухин В. Н. Перенос пассивных частиц в поле скорости движущегося по плоскости вихревого триполя // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, вып. 3. С. 286–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003039.
24. Delbende I., Selcuk C., Rossi M. Nonlinear dynamics of two helical vortices: A dynamical system approach // Physical Review Fluids. 2021. Vol. 6, no. 8. P. 084701. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.084701.
25. Кошель К. В., Пранц С. В. Хаотическая адвекция в океане // Успехи физических наук. 2006. Т. 176, № 11. С. 1178–1206. DOI: 10.3367/UFNr.0176.200611c.1177.
26. Aref H., Roenby J., Stremler M. A., Tophøj L. Nonlinear excursions of particles in ideal 2D flows // Physica D. 2011. Vol. 240, iss. 2. P. 199–207. DOI: 10.1016/j.physd.2010.08.007.
27. Anurag A., Goodman R., O'Grady E. A new canonical reduction of three-vortex motion and its application to vortex-dipole scattering // Physics. of Fluids. 2024. Vol. 36, iss. 6. P. 067110. DOI: 10.1063/5.0208538.
28. Kimura Y., Hasimoto H. Motion of two identical point vortices in a simple shear flow // J. Phys. Soc. Jpn. 1985. Vol. 54, no. 11. P. 4069–4072. DOI: 10.1143/JPSJ.54.4069.
29. Богомолов В. А. Взаимодействие вихрей в плоскопараллельном потоке // Изв. АН СССР, Физ. атмосф. и океана. 1981. Т. 17, № 2. С. 199–201.
30. Ryzhov E. A., Koshel K. V., Carton X. J. Passive scalar advection in the vicinity of two point vortices in a deformation flow // European Journal of Mechanics - B/Fluids. 2012. Vol. 34. P. 121–130. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2012.01.005.
31. Perrot X., Carton X. Point-vortex interaction in an oscillatory deformation field: Hamiltonian dynamics, harmonic resonance and transition to chaos // Discrete and Continuous Dynamical Systems - B. 2009. Vol. 11, № 4. P. 971–995. DOI: 10.3934/dcdsb.2009.11.971.
32. The MathWorks. <https://www.mathworks.com>.
33. Verner J. H. Numerically Optimal Runge–Kutta Pairs with Interpolants // Numer. Algor. 2010. Vol. 53, № 2–3. P. 383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3.
34. Govorukhin V. ode87 Integrator. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3616-ode87-integrator>.
35. Shadden S. C., Lekien F., Marsden J. E. Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows // Physica D. 2005. Vol. 212, iss. 3–4. P. 271–304. DOI: 10.1016/J.PHYSD.2005.10.007.
36. Haller G. Finding finite -time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields // Chaos. 2000. Vol. 10. P. 99–108. DOI: 10.1063/1.166479.

37. Говорухин В. Н., Филимонова А. М. Анализ структуры плоских вихревых течений и их изменений во времени // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 4. С. 367–376. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.30.
38. Govorukhin V. N., Morgulis A., Yudovich V. I., Zaslavsky G. M. Chaotic advection in compressible helical flow // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, no. 3. P. 2788–2798. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.2788.

References

1. Hughes CW, Miller PI. Rapid water transport by long-lasting modon eddy pairs in the southern midlatitude oceans. *Geophysical Research Letters*. 2017;44(12):375–384. DOI: 10.1002/2017GL075198.
2. Callendar W, Klymak JM, Foreman MGG. Tidal generation of large sub-mesoscale eddy dipoles. *Ocean Sci.* 2011;7:487–502. DOI: 10.5194/os-7-487-2011.
3. Govorukhin VN. An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2023;95(4):579–602. DOI: 10.1002/fld.5163.
4. Kilin AA, Artemova EM. Bifurcation analysis of the problem of two vortices on a finite flat cylinder. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024;20(1):95–111. DOI: 10.20537/nd231209.
5. Afanasyev YD. Formation of vortex dipoles. *Physics of Fluids*. 2006;18(3):037103. DOI: 10.1063/1.2182006.
6. Trieling RR, Dam CEC, van Heijst GJF. Dynamics of two identical vortices in linear shear. *Physics of Fluids*. 2010;22(11):117104. DOI: 10.1063/1.3489358.
7. Salinas-Rodríguez E, Hernández MG, Torres A, Valderrama F, Valdés-Parada FJ. Dynamic evolution of vortex dipoles. *Revista Brasileira De Ensino De Física*. 2011;33(3):3310. DOI: 10.1590/S1806-11172011000300010.
8. Gethner RM. Motion of two point vortices in a steady, linear, and elliptical flow. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2001;28(10):571–580. DOI: 10.1155/S0161171201007153.
9. Folz PJR, Nomura KK. On asymmetric vortex pair interactions in shear. *Journal of Fluid Mechanics*. 2023;969:A21. DOI: 10.1017/jfm.2023.525.
10. Marcus PS. Vortex dynamics in a shearing zonal flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1990;215:393–430. DOI: 10.1017/S0022112090002695.
11. Ryzhov EA, Koshel KV. Two-point-vortex evolution in an oscillatory shear flow with rotation. *Europhysics Letters*. 2014;108(2):24002. DOI: 10.1209/0295-5075/108/24002.
12. Vic A, Carton X, Gula J. The interaction of two unsteady point vortex sources in a deformation field in 2D incompressible flows. *Regul. Chaot. Dyn.* 2021;26(6):618–646. DOI: 10.1134/S1560354721060034.
13. Walsh D, Pratt LJ. The interaction of a pair of point potential vortices in uniform shear. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1995;22(3):135–160. DOI: 10.1016/0377-0265(95)00402-V.
14. Velasco Fuentes OU, van Heijst GJF, Cremers BE. Chaotic transport by dipolar vortices on a β -plane. *Journal of Fluid Mechanics*. 1995;291(1):139–161. DOI: 10.1017/s0022112095002655.
15. Govorukhin VN. Identification and dynamics prediction of a plane vortex structure based on a mathematical model of a point vortices system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(6):710–726. DOI: 10.18500/0869-6632-003071.
16. Borisov AV, Mamaev IS. *Mathematical Methods in the Dynamics of Vortex Structures*. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science; 2005; 368 p. (In Russian).
17. Kirchhoff G. *Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik*. Leipzig: Teubner; 1877. 466 p. (in German).

18. Didov AA, Uleysky MY, Budyansky MV. Stable and unstable periodic orbits and their bifurcations in the nonlinear dynamical system with a fixed point vortex in a periodic flow. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020;91:105426. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105426.
19. Ryzhov EA, Koshel KV. Global chaotization of fluid particle trajectories in a sheared two-layer two-vortex flow. *Chaos*. 2015;25(10):103108. DOI: 10.1063/1.4930897.
20. Vetchanin EV, Mamaev IS. Dynamics of two point vortices in an external compressible shear flow. *Regul. Chaotic Dyn.* 2017;22(8):893–908 DOI: 10.1134/S1560354717080019.
21. Rom-Kedar V, Leonard A, Wiggins S. An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1990;214:347–394. DOI: 10.1017/S0022112090000167.
22. Kuznetsov L, Zaslavsky GM. Regular and chaotic advection in the flow field of a three-vortex system. *Phys. Rev. E*. 1998;58(6):7330–7349. DOI: 10.1103/physreve.58.7330.
23. Govorukhin VN. Transfer of passive particles in the velocity field of vortex tripole moving on a plane. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(3):286–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003039.
24. Delbende I, Selcuk C, Rossi M. Nonlinear dynamics of two helical vortices: A dynamical system approach. *Physical Review Fluids*. 2021;6(8):084701. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.084701.
25. Koshel KV, Prants SV. Chaotic advection in the ocean. *Phys. Usp.* 2006;49:1151–1178. DOI: 10.1070/PU2006v049n11ABEH006066.
26. Aref H, Roenby J, Stremler MA, Tophøj L. Nonlinear excursions of particles in ideal 2D flows. *Physica D*. 2011;240(2):199–207. DOI: 10.1016/j.physd.2010.08.007.
27. Anurag A, Goodman R, O’Grady E. A new canonical reduction of three-vortex motion and its application to vortex-dipole scattering. *Physics of Fluids*. 2024;36(6):067110. DOI: 10.1063/5.0208538.
28. Kimura Y, Hasimoto H. Motion of two identical point vortices in a simple shear flow. *J. Phys. Soc. Jpn.* 1985;54(11):4069–4072. DOI: 10.1143/JPSJ.54.4069.
29. Bogomolov VA. Interaction of vortices in plane-parallel flow. *Izvestiya - Atmospheric and Ocean Physics*. 1981;17(2):199–201.
30. Ryzhov EA, Koshel KV, Carton XJ. Passive scalar advection in the vicinity of two point vortices in a deformation flow. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. 2012;34:121–130. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2012.01.005
31. Perrot X, Carton X. Point-vortex interaction in an oscillatory deformation field: Hamiltonian dynamics, harmonic resonance and transition to chaos. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 2009;11(4):971–995. DOI: 10.3934/dcdsb.2009.11.971.
32. The MathWorks. <https://www.mathworks.com>.
33. Verner JH. Numerically optimal Runge–Kutta pairs with interpolants. *Num. Algorithms*. 2010; 53(2–3):383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3.
34. Govorukhin V. ode87 Integrator. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3616-ode87-integrator>
35. Shadden SC, Lekien F, Marsden JE. Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. *Physica D*. 2005; 212(3–4):271–304. DOI: 10.1016/J.PHYSD.2005.10.007.
36. Haller G. Finding finite -time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields. *Chaos*. 2000;10:99–108. DOI: 10.1063/1.166479.
37. Govorukhin VN, Filimonova AM. Analysis of the structure of vortex planar flows and their changes with time. *Comput. Cont. Mechanics*. 2021;14(4):367–376. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.30.
38. Govorukhin VN, Morgulis A, Yudovich VI, Zaslavsky GM. Chaotic advection in compressible helical flow. *Phys. Rev. E*. 1999;60(3):2788–2798. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.2788.



Говорухин Василий Николаевич — родился в Ростове-на-Дону (1962). Окончил механико-математический факультет Ростовского государственного университета (1984). Защитил докторскую диссертацию (2021) в области численного исследования вихревых и конвективных течений жидкости. Опубликовал более 75 научных статей по вычислительной математике, гидродинамике, математической биологии и нелинейной динамике. Работает профессором кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ
E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru
ORCID: 0000-0001-8459-7841
AuthorID (eLibrary.Ru): 13438



Гончаров Борис Константинович — родился в Ростове-на-Дону (2003). Бакалавр Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И Воровича Южного федерального университета. Специализируется в области математического моделирования динамики жидкости.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ
E-mail: bgoncharov@sfedu.ru
ORCID: 0009-0006-7544-1814



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003148
EDN: CMDASL

Упрощенные модели для описания многозадачных режимов в живых распознающих системах

А. А. Головина¹, В. Г. Яхно^{1,2}✉

¹Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского, Россия

²Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики
им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия
E-mail: alinagolovina88@mail.ru, ✉yakhno@ipfran.ru

Поступила в редакцию 13.04.2024, принята к публикации 31.10.2024,
опубликована онлайн 4.12.2024, опубликована 30.05.2025

Аннотация. Цель настоящего исследования — рассмотреть возможности и создать версии упрощенных языков, описывающих разнообразие динамических режимов при попеременном выполнении нескольких задач, которые могут быть использованы для адекватного описания экспериментально регистрируемых вариантов поведения живых систем в таких ситуациях. **Методы.** Исследование проведено с использованием физической методологии, основанной на качественном анализе возможных решений, и подтверждено результатами вычислительных экспериментов. Для качественного описания версий возможных механизмов переключения между динамическими режимами функционирования живых систем в ситуациях, предоставленных средой для этих систем (выраженных через изменение эмоциональных или энергетических состояний), использовалась наиболее простая базовая модель. Модель включает два балансных уравнения, соответствующих либо первой, либо второй решаемой задаче. Для данной системы строится двумерное фазовое пространство, позволяющее отслеживать характерные изменения траекторий движения изображающих точек в системе нуль – изоклин, которые зависят от управляющих параметров. Рассматриваются различные траектории изображающих точек в зависимости от начальных условий и наглядно демонстрируются основные режимы переходных процессов в развивающейся системе. **Результаты и обсуждение.** Проведена классификация динамических режимов в системе в зависимости от управляющих параметров. Такие динамические режимы составляют основу для упрощенных языков описания. Предложенная упрощенная математическая модель позволила рассмотреть широкий спектр состояний и разнообразные виды её эволюционных изменений в полном соответствии с известными примерами режимов поведения живых систем.

Ключевые слова: нейроноподобные модули, балансные уравнения, многозадачность, математическое моделирование.

Благодарности. Работа профинансирована Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № FFUF-2024-0037.

Для цитирования: Головина А. А., Яхно В. Г. Упрощенные модели для описания многозадачных режимов в живых распознающих системах // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. 361–380. DOI: 10.18500/0869-6632-003148. EDN: CMDASL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Simplified models for describing multitasking modes in living recognition systems

A. A. Golovina¹, V. G. Yakhno^{1,2}✉

¹National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

²Federal Research Center A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics
of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: alinagolovina88@icloud.com, ✉yakhno@ipfran.ru

Received 13.04.2024, accepted 31.10.2024, available online 4.12.2024, published 30.05.2025

Abstract. The purpose of this study is to explore the possibilities and create versions of simplified languages that describe the variety of dynamic modes during the alternating execution of multiple tasks. These languages can be used for an adequate description of experimentally recorded variants of behavior in living systems under such conditions. *Methods.* The study was conducted using a physical methodology based on qualitative analysis of possible solutions and confirmed by the results of computational experiments. To qualitatively describe the versions of possible mechanisms for switching between dynamic modes of operation of living systems in situations presented by the environment for these systems (expressed through changes in emotional or energy states), the simplest basic model was used. This model includes two balance equations corresponding to either the first or the second solvable problem. For this system, a two-dimensional phase space is constructed, allowing for tracking characteristic changes in the trajectories of the representing points in the null – isocline system, which depend on the control parameters. Various trajectories of representing points are considered depending on the initial conditions, visually demonstrating the main modes of transitional processes in the developing system. *Results and discussion.* Classification of dynamic modes in the system has been conducted, depending on control parameters. Such dynamic modes form the basis for simplified language descriptions. The proposed simplified mathematical model allowed for the examination of a wide range of states and various types of its evolutionary changes in full accordance with known examples of behavior modes in living systems.

Keywords: neuron-like modules, balance equations, multitasking, mathematical modeling.

Acknowledgements. This work was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the state assignment of IPF RAS, project No. FFUF-2024-0037.

For citation: Golovina AA, Yakhno VG. Simplified models for describing multitasking modes in living recognition systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(3):361–380. DOI: 10.18500/0869-6632-003148

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Живая система в норме может реализовывать широкий диапазон возможных состояний, между которыми происходят различные во времени («эпизодические» и эволюционные) многовариантные динамические переключения. При этом существует несколько уровней представления особенностей динамических режимов восприятия и реагирования живых систем. Цель настоящего исследования — рассмотреть возможности и создать версии упрощенных языков, описывающих разнообразие динамических режимов при попеременном выполнении нескольких задач, которые можно использовать для адекватного описания экспериментально регистрируемых вариантов поведения живых систем в таких ситуациях.

В зависимости от выбора конкретных областей функционирования и вида рассматриваемых задач особенности обработки сенсорных сигналов могут быть описаны с помощью упрощенных (редуцированных) базовых моделей распознавания и принятия решений, которые обычно выводятся из моделей, аналогичных схемам П. К. Анохина [1–3]. Модули разных уровней в иерархических модельных архитектурах собираются в единую функциональную систему таким образом, чтобы можно было достигать поставленных перед системой целей. Кроме того, в живых системах

имеются модули управления, которые обеспечивают переключение между различными важными для неё целями. Соответственно, для их достижения происходит управление выполнением операций по решению необходимых задач.

В данной работе проведено рассмотрение одной из версий вывода редуцированных моделей [4–17]. Важно отметить, что, следуя этапам физической методологии исследований [14, 17], удастся из потенциальной многовариантности модельных описаний выбрать наиболее подходящий режим для сравнения с описываемыми экспериментальными данными [4–17]. Ранее было показано [12, 13], что такой язык упрощенного модельного описания оказался адекватным для большого числа экспериментальных данных, зарегистрированных при обучении детей нескольким языкам (варианты билингвизма). Обсуждение этих результатов с заинтересованными исследователями позволило выдвинуть гипотезу о плодотворности такого модельного описания и для более широкого спектра областей многозадачного функционирования живых систем.

Таким образом, в настоящем исследовании рассматриваются возможности создания версий упрощенных языков, описывающих разнообразие динамических режимов в иерархически организованных распознающих системах, которые попеременно ориентированы на реализацию разных задач. Для доказательства адекватности описания используются некоторые примеры «стандартных» жизненных ситуаций, взятых из некоторых литературных произведений. Проводится сравнение модельных результатов и описание жизненного опыта в произведении. В частности, используются фрагменты из литературного произведения «Унесённые ветром» М. Митчелл [18]. В них прослеживаются процессы выбора приоритетов среди мировоззренческих позиций или стереотипов, используемых героиней при бессознательной опоре на ряд уровней обобщенных средств управления. Для качественного описания механизмов переключения между динамическими режимами функционирования живых систем в предоставленной среде для этих систем ситуациях (эмоциональных или энергетических условиях) использовалась наиболее простая базовая модель из двух уравнений. При необходимости рассмотрения иерархических взаимодействий число балансных уравнений возрастает. Временные режимы получены на основе вычислительных экспериментов.

Статья состоит из трех частей, каждая из которых имеет свою цель и логику развития. Первая часть посвящена важному аспекту нашего исследования — аксиоматическим положениям, представляющим собой набор интерпретаций экспериментальных результатов [19–22]. На основе принятых исследователем аксиом конструируется одна из множества возможных версий формализованных описаний для будущего упрощенного языка [4–17].

Во второй части представлен один из множества способов перехода от сложных (и поэтому многозначно трактуемых) схем — «образов» — к версиям балансных уравнений, соответствующим выбранным аксиоматическим положениям. Эти уравнения позволяют определить требования к областям функционирования изучаемой системы. Другими словами, визуализация условий перехода играет ключевую роль в понимании экспериментальных условий, при которых можно эффективно использовать решения, полученные из этих уравнений. Это важно для определения областей их адекватного применения.

В третьей части используются стандартные методы анализа решений дифференциальных уравнений, позволяющие получить спектр новых динамических режимов. До сих пор, по нашему мнению, изучению особенностей динамики многозадачных режимов не уделялось достаточного внимания.

Предлагаемый подход позволяет исследователям формировать свои версии концепций, выделяющих наиболее значимые фрагменты из огромных объемов экспериментальных данных. Это необходимо для создания упрощенных формализованных описаний на основе принятых базовых моделей. Результаты сопоставления экспериментальных данных с динамическими режимами, полученными из базовых моделей, подтверждают адекватность формализованного описания.

Обоснованность вывода упрощенных (базовых) моделей опирается на использование другого набора экспериментальных данных об основных элементах и устройстве их связей в живых системах, которые также принимаются в качестве аксиом.

1. Элементы методики описания сложных природных систем

Рассмотрим основные элементы в процедуре формирования упрощенных (редуцированных) моделей из многообразия иерархических взаимосвязей разных уровней, основанных на большом объеме экспериментальных данных. Физическая методология исследований содержит следующие этапы [14–17]: формулировка аксиом; выбор наиболее адекватных переменных и базовых моделей; нахождение спектра возможных решений; контроль требований по минимизации ошибки между выбираемыми решениями и описываемыми экспериментальными данными. Основные особенности когнитивных систем связаны с большим разнообразием режимов их функционирования. Это объясняется тем, что сигналы от внешних воздействий, а также внутренние сигналы управления обрабатываются с помощью трех групп алгоритмов, ориентированных на:

- 1) «образные» представления;
- 2) «логические, инженерно-ориентированные» описания и технические реализации;
- 3) широкий спектр конструкторов, возникающих из совместного использования алгоритмов из первой и второй групп [17].

1.1. Исходные варианты аксиоматических схем для описания живых систем. Опыт работы исследователей, разрабатывающих разнообразные модели для описания живых систем, позволяет аксиоматически разделить их многообразие на несколько классов [4–22]. Например:

a — модели 1-го уровня — ориентированы на описание прямых процессов преобразования исходного сигнала в требуемый выходной сигнал без включения автономных настроек. К ним относятся преобразования, формирующие наборы элементарных признаков, детекторы заранее заданных сигналов, а также упрощенные смысловые модели, демонстрирующие характерные качественные режимы более сложных имитационных моделей;

b — модели 2-го уровня — имитируют живые прототипы с помощью простейших путей преобразования внешних и внутренних сигналов. Они ориентированы на формирование наборов из элементарных операций принятия решений с использованием автономных циклов настроек, а также демонстрационных примеров элементарных психологических режимов реагирования живых распознающих модулей;

c — модели 3-го уровня — имитируют живые прототипы через иерархические связи и многообразие преобразований внешних и внутренних сигналов. Модели ориентированы на описание высших уровней поведения (психологических режимов) в сложной архитектуре систем из иерархии распознающих модулей.

Если имитационные модели 2-го и 3-го уровней можно редуцировать до моделей 1-го уровня, тем самым демонстрируя динамику ряда поведенческих режимов прототипа, то вновь полученные модели 1-го уровня называют смысловыми моделями (напр., см. [4, 12, 13]). В соответствии с целью данной статьи далее будет продемонстрирована одна из реализаций (из множества возможных версий [14–27]) описания ряда динамических режимов моделей 3-го и 2-го классов в рамках моделей 1-го класса.

В качестве отправной точки на пути перехода к упрощенным моделям воспользуемся схемой базового распознающего модуля рис. 1 с основным циклом обработки, выделенным из известной схемы П. К. Анохина [1–3] (в ней было предложено три таких цикла). Важно отметить, что распознающая система рис. 1 может осознавать внутреннюю интерпретацию входного сенсорного сигнала, которая соответствует последнему наилучшим образом. Таким образом, моделирование

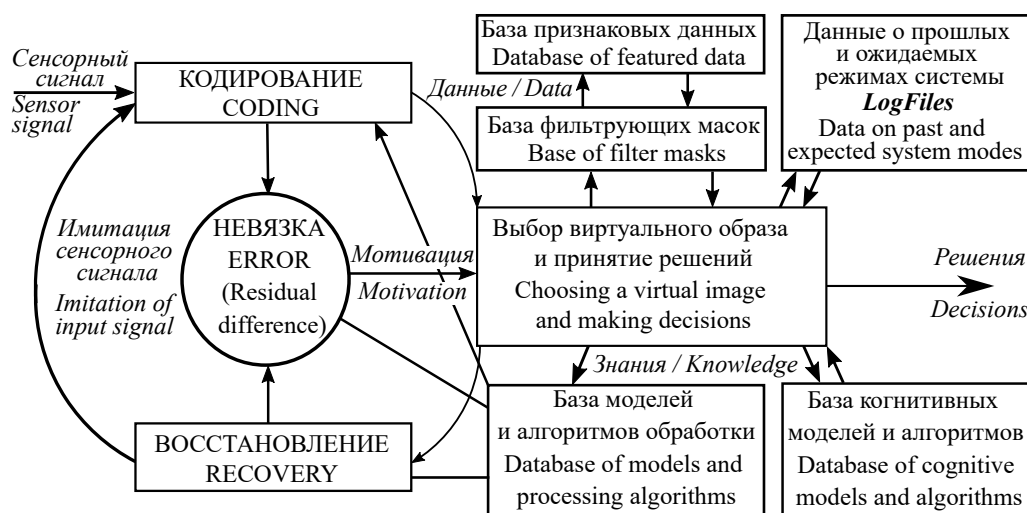


Рис. 1. КАРМ (КвазиАвтономный Распознающий Модуль) (варианты в работах [4–10])

Fig. 1. KARM (Quasi-autonomous Recognition Module) (variants in works [4–10])

работы таких модулей позволяет более глубоко понять процессы обработки информации и реагирования системы на внешние стимулы в соответствии с целями решаемой задачи. Исследования, проведенные в работах [4–10], предоставляют более подробное описание базовой распознающей ячейки и ее роли в обработке сигналов на различных уровнях иерархии управления.

В подсистеме «Данные о прошлых и ожидаемых режимах системы» формируется описание состояний всего модуля 2-го уровня в прошлом и планируемых событиях. Подсистема выполняет операции, аналогичные эпизодической памяти в живых системах. Кроме того, в ней происходит восприятие сигналов управления от модуля «Я–ЭГО». С учетом его сигналов осуществляется управление режимами подсистемы «Выбор виртуального образа и принятие решений», которая выполняет функции операционной системы для данного КвазиАвтономного Распознающего Модуля (КАРМ).

В интегральной системе, то есть в модулях 3-го уровня, модельная система КАРМ выступает в роли элементарного «кирпичика» конструкции. КАРМ может быть использован как для формирования, так и для описания режимов обработки сигналов на разных уровнях иерархического управления. С помощью КАРМ можно конструировать различные архитектуры живых систем и исследовать динамические режимы, ориентированные на решение разнообразных задач в рамках всей интегральной системы. Особый интерес представляют архитектуры, соответствующие экспериментальным данным, в которых наивысшие управляющие модули, используя КАРМ, выполняют функциональные операции «Я–ЭГО» или «Я–Самость» [19–21]. Эти модули принимают основное (окончательное) решение о том, какую задачу в данный момент решает интегральная иерархическая система.

1.2. Варианты упрощенных схем для иерархических систем. Следующий шаг, соответствующий требованиям биологической правдоподобности базовых моделей, связан с необходимостью определить и описать особенности прохождения сложных информационных сигналов (бессознательных, осознанных, интуитивных). Такие режимы функционирования ориентированы на управление состоянием живых распознающих систем, что позволяет формировать адекватные реакции на внешние воздействия. Процесс контроля верхнеуровневых модулей над состоянием и функционированием нижнеуровневых модулей можно обозначить термином из психологии «Я–ЭГО». В модулях верхних уровней предполагается одновременная работа распознающих

систем, связанных с описанием различных сценариев поведения (в соответствии с Э. Берн [21]): «учитель», «взрослый», «ребёнок».

Живая система может осознавать информационные сигналы из интегрального потока, которые пропускает фильтр на входе модуля «Я – ЭГО». В интегральной иерархической системе оптимизационные процессы анализа прошлых ошибочных решений могут восприниматься в блоке «Я – ЭГО» как в сознательном, так и в бессознательном режимах. При этом анализ прошлых ошибочных решений из эпизодической памяти происходит в сознательном режиме. Управление, задаваемое из блока планирования (ближайшего «Я – ЭГО»), указывает, какие алгоритмы k_i из множества рассматриваемых задач следует использовать. Например, в простейшем случае с двумя задачами — k_1 и k_2 .

Данные физиологических экспериментов указывают, что в живых системах управление осуществляется с помощью как минимум четырех видов внутренних информационных сигналов [22]. Нейроноподобные модули, управляющие этими сигналами, взаимодействуют друг с другом так, как показано на рис. 2. Особенности управления обработкой сигналов правой и левой половинками мозга (см., например, [27]) в данной работе учитываться не будут. В дальнейших исследованиях такое управление можно будет учесть в особенностях сигналов со стороны блока «Я – ЭГО».

В основе рассмотрения нейроноподобных механизмов лежат циклические процессы, известные как информационные, моторные, вегетативные и эмоциональные циклы. Такие циклы необходимы для сопоставления ожидаемого (эталонного) сигнала с поступившим на вход сигналом (характерные времена обработки разного вида внутренних управляющих сигналов могут варьироваться и зависят от типа, целей и условий выполняемых задач). Степень рассогласования между этими сигналами формирует мотивацию и потребности рассматриваемой системы.

а) *Информационный модуль* отвечает за формирование моделей и принятие решений на основе информационных сигналов, поступающих из различных информационных каналов (характерные времена срабатывания обычно от долей секунды до минут). К известным сенсорным каналам в живых системах относятся зрительная система, слуховая система, кожная и вкусовая системы, обонятельная система, а также интерорецепция и вестибулярная система.

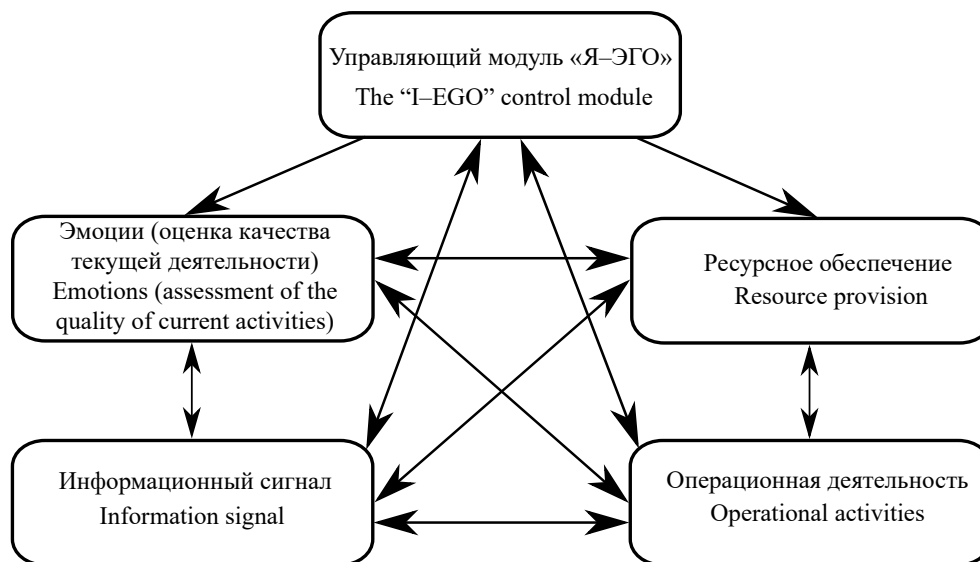


Рис. 2. Архитектура управляющего блока «Я–ЭГО»

Fig. 2. The architecture of the “I-EGO” control unit

б) *Операционная деятельность* управляет функциональным состоянием исполнительных механизмов и контролирует работу мышечной системы (характерные времена срабатывания от секунд до нескольких минут). Это включает в себя выполнение конкретных операций, координацию движений, регуляцию работы мышц и другие процессы, необходимые для выполнения задач и реагирования на внешние воздействия. Операционная (мышечная) деятельность играет ключевую роль в обеспечении выполнения различных функций живых организмов.

с) *Эмоциональная система* осуществляет вычисление интегральных оценок для состояний или выполняемых операций модулей, используя шкалы «комфорт-дискомфорт», «сила-слабость» и другие подобные параметры. Характерное время формирования таких оценок обычно может варьироваться от секунд до нескольких минут, иногда часов.

д) *Ресурсное обеспечение* отвечает за управление уровнями энергетического обеспечения, управляет вегетативный модуль. Характерные времена изменения уровней энергообеспечения могут находиться в диапазоне от десятков секунд до нескольких часов, а иногда и месяцев или лет.

Функционирование многомодульных систем определяется сценарием, который учитывает опыт системы и длительности циклов для различных видов внутренних сигналов. Основная цель этого сценария — снижение ошибок между внутренними предсказаниями сигналов и реальным потоком входных сенсорных сигналов.

1.3. Выбор основных переменных и условия перехода к упрощенным уравнениям.

Для концептуального описания и анализа динамических режимов функционирования субъекта в определённой среде используем известный физический подход составления балансных уравнений. В качестве основной характеристики развивающейся системы будем использовать число алгоритмов k_i , необходимых для решения той или иной задачи. Чем большее число алгоритмов смогла сгенерировать система, тем лучше она решает i задачу в заданных для нее условиях функционирования.

Алгоритмы, по определению Ю. И. Александрова [28], представляют собой единицы индивидуального опыта. Интерпретация этого опыта может принимать различные формы в зависимости от подхода исследователей. Некоторые экспериментаторы связывают его с созданием функциональных систем на основе иерархических нейронных сетей, в то время как другие предпочитают представлять процесс фиксации опыта через создание новых «базисных» инструментальных алгоритмов, с помощью которых обрабатываются информационные и управляющие сигналы.

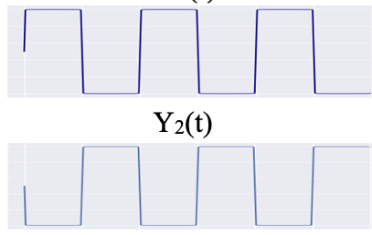
С учетом разнообразия конструируемых алгоритмов для живых систем, их количество может быть весьма значительным. Для упрощения анализа нормируем это количество на максимально возможное и рассмотрим переменную k_i как непрерывную (долю от максимальной величины). Хотя в действительности такие доли имеют дискретный характер, шаг дискретизации можно считать достаточно малым для целей нашего исследования.

Общий вид упрощенной математической модели, описывающей переключения в многозадачных режимах (в соответствии со схемами на рис. 1 и рис. 2), может быть представлен системой дифференциальных уравнений (ДУ) (1):

$$\frac{dk_i}{dt} = Y_i(t) \left(-\frac{k_i}{\tau_{2i}} + \frac{1}{\tau_{1i}} F_0[-T_i(M, U, Q, E) + \gamma_{ii}k_i - \sum_{j \neq i} \gamma_{ij}k_j] \right), \quad (1)$$

где k_i — количество инструментальных алгоритмов, связанных с решением i -й задачи, которым обучилась та или иная система; τ_{1i} — характерное время освоения новых алгоритмов; τ_{2i} — характерное время забывания старых алгоритмов; F_i — ступенчатая функция, соответствующая условиям решения i -й задачи; γ_{ij} — весовые коэффициенты взаимной связи между подсистемами; $T_i(M, U, Q, E)$ — порог запуска алгоритмов обучения в i -й области деятельности;

Таблица. Варианты параметров в упрощенной системе для описания двухзадачных режимов
Table. Options for parameters in a simplified system for describing two-task modes

Управляющие сигналы из модуля «Данные о прошлых и ожидаемых режимах» на рис. 1 или модуля «Я – ЭГО» на рис. 2	
Эмоции и энергетическое влияние дел друг на друга через величины времен и коэффициенты взаимодействия	$T_1; T_2$ $eps; \overline{\gamma_{11}}; \overline{\gamma_{12}}$ $\overline{\gamma_{22}}; \overline{\gamma_{21}}$
Набор алгоритмов, величина которых характеризует жизненный опыт данной системы	$\overline{k_1}/\overline{k_2}$

$Y_i(t)$ — управляющий модуль для i -ой задачи, передающий сигналы от блока «Я – ЭГО» (изменяется в пределах от 0 до 1) и проиллюстрированный для случая двух решаемых задач в Таблице, задан с помощью непрерывных функций (изменяется в пределах от 0 до 1). В уравнениях (1) мы основываемся на экспериментальных данных, показывающих, что для большинства живых систем каждая задача выполняется попеременно в рамках общей многозадачной процедуры. Это можно сформулировать как дополнительную аксиому: если $Y_i(t) = 1$, то $Y_j(t) = 0$ для всех j , не равных i .

$U(t)$, $E(t)$, $Q(t)$ — важные параметры, определяемые эмоциональными, энергетическими и стрессовыми процессами и влияющие на состояние развивающегося субъекта (в рамках данного рассмотрения будем считать их постоянными, но разными в зависимости от ситуации, в которой находится субъект). $M(t)$ представляет собой количество операций, выполняемых активными алгоритмами над образами, воспринятыми из окружающей среды, то есть уровень образного восприятия (мировоззрения) живой системы.

2. Упрощенные балансные уравнения и их решения

Здесь рассмотрим упрощенную ситуацию, когда система попеременно решает только одну из двух рассматриваемых задач. В этом случае от системы из многих ДУ (1) переходим к версии из двух балансных уравнений, также относящихся к классу моделей 1-го уровня.

$$\frac{dk_1}{dt} = Y_1(t) \left(-\frac{k_1}{\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_{11}} F_0[-T_1 + \gamma_{11}k_1 - \gamma_{12}k_2] \right), \quad (2)$$

$$\frac{dk_2}{dt} = Y_2(t) \left(-\frac{k_2}{\tau_{22}} + \frac{1}{\tau_{12}} F_0[-T_2 + \gamma_{22}k_2 - \gamma_{21}k_1] \right), \quad (3)$$

где для упрощенного рассмотрения выбраны одинаковые нелинейные функции: $F_0[]$ — ступенчатая функция Хевисайда как для 1-й, так и для 2-й задачи. Типы решений в такой системе зависят от 10 параметров.

2.1. Описание вывода упрощенных балансных уравнений с нормировкой. Выделение уменьшенного числа определяющих параметров обычно осуществляют с помощью процедуры нормировки. Это позволяет упростить анализ и стандартизировать численные расчёты изучаемой системы. Если ввести новые переменные $\bar{k}_1 = \frac{\tau_{11}}{\tau_{21}} k_1$, $\bar{t} = \frac{t}{\tau_{21}}$, $\bar{k}_2 = \frac{\tau_{12}}{\tau_{22}} k_2$ и новые определяющие параметры $\bar{\gamma}_{11} = \gamma_{11} \frac{\tau_{21}}{\tau_{11}}$, $\bar{\gamma}_{21} = \gamma_{21} \frac{\tau_{21}}{\tau_{11}}$, $\bar{\gamma}_{22} = \gamma_{22} \frac{\tau_{22}}{\tau_{12}}$, $\bar{\gamma}_{12} = \gamma_{12} \frac{\tau_{22}}{\tau_{12}}$, $\varepsilon = \frac{\tau_{22}}{\tau_{21}}$, то система (2)–(3) переписывается в виде следующих уравнений:

$$\frac{d\bar{k}_1}{d\bar{t}} = Y_1(\bar{t}) (-\bar{k}_1 + F_0 [-T_1 + \bar{\gamma}_{11}\bar{k}_1 - \bar{\gamma}_{12}\bar{k}_2]), \quad (4)$$

$$\varepsilon \frac{d\bar{k}_2}{d\bar{t}} = Y_2(\bar{t}) (-\bar{k}_2 + F_0 [-T_2 + \bar{\gamma}_{22}\bar{k}_2 - \bar{\gamma}_{21}\bar{k}_1]), \quad (5)$$

где \bar{k}_1 и \bar{k}_2 — нормированное количество инструментальных алгоритмов, которым обучилась та или иная система; F_0 — одинаковая ступенчатая функция Хевисайда для 1-й и 2-й задачи; нормированные величины $\bar{\gamma}_{ij}$ — весовые коэффициенты взаимной связи между подсистемами, которые в зависимости от рассматриваемых ситуаций могут быть как положительными, так и отрицательными; T_1, T_2 — пороги запуска алгоритмов обучения для первой или второй областей деятельности, которые также в зависимости от рассматриваемых ситуаций могут быть как положительными, так и отрицательными; ε определяет соотношение характерных времен изменения \bar{k}_1 и \bar{k}_2 ; $Y_1(\bar{t})$ и $Y_2(\bar{t})$ — управляющие модули, представленные в Таблице, при численных расчетах задавались с помощью непрерывных функций, изменяемых в пределах от 0 до 1. Соответствие параметров из уравнений (4)–(5) экспериментально измеряемым величинам приведено и наглядно демонстрируется в Таблице.

В системе с нормировкой получаемые решения зависят уже только от 7 параметров.

2.2. Инструментарий для анализа решений упрощенных балансных уравнений. Этапы реализуемых режимов в системе уравнений (4)–(5) наглядно видны на рис. 3–5, построенных в двумерном фазовом пространстве (при условии, что $F_0[\cdot] = 0$, если $[\cdot] < 0$ и $F_0[\cdot] = 1$, если $[\cdot] > 0$). Уравнения (6)–(7) для нуль-изоклин получены из уравнений (4)–(5):

$$-T_1 + \bar{\gamma}_{11}\bar{k}_1 - \bar{\gamma}_{12}\bar{k}_2 = 0, \quad \bar{k}_1 = 0, \quad \bar{k}_1 = 1 \quad (6)$$

для первой задачи (рис. 3 слева);

$$-T_2 + \bar{\gamma}_{22}\bar{k}_2 - \bar{\gamma}_{21}\bar{k}_1 = 0, \quad \bar{k}_2 = 0, \quad \bar{k}_2 = 1 \quad (7)$$

для второй задачи (рис. 3 справа).

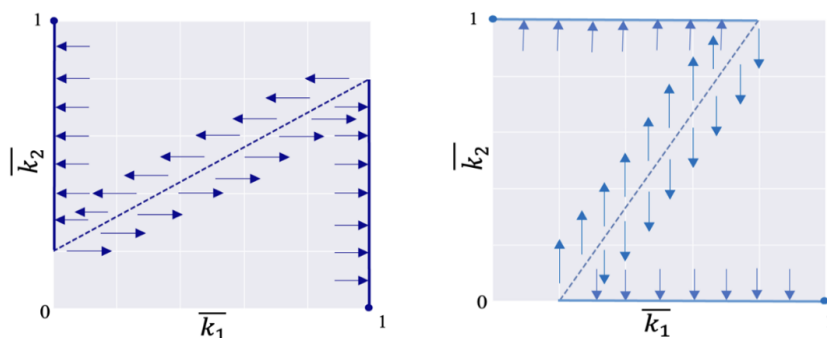


Рис. 3. Разные виды нуль-изоклин для уравнений (6) и (7) при решении первой ($Y_1 = 1$; $Y_2 = 0$) и второй ($Y_1 = 0$; $Y_2 = 1$) задач

Fig. 3. Different types of zero-isoclines for equations (6) and (7) in solving the first ($Y_1 = 1$; $Y_2 = 0$) and second ($Y_1 = 0$; $Y_2 = 1$) problems

Таким образом, для анализа изменений в значениях \bar{k}_1 и \bar{k}_2 используется шесть вариантов нуль-изоклин из уравнений (6) и (7). Четыре из них (устойчивые) задают стороны квадрата двумерного фазового пространства ($\bar{k}_1 = 0$, $\bar{k}_1 = 1$ и $\bar{k}_2 = 0$, $\bar{k}_2 = 1$), в пределах которого осуществляются различные динамические режимы системы. С двумя другими (неустойчивыми) нуль-изоклинами $-T_1 + \bar{\gamma}_{11}\bar{k}_1 - \bar{\gamma}_{12}\bar{k}_2 = 0$ и $-T_2 + \bar{\gamma}_{22}\bar{k}_2 - \bar{\gamma}_{21}\bar{k}_1 = 0$ из уравнений (6) и (7) возможны операции параллельных переносов или угловых поворотов за счет изменения параметров: T_i , $\bar{\gamma}_{ii}$, $\bar{\gamma}_{ij}$, $\bar{\gamma}_{jj}$, где $i = 1, 2$ и $j = 1, 2$. Тем самым формируются условия для реализации не менее восьми качественно различных динамических режимов изменений \bar{k}_1 и \bar{k}_2 в процессе попеременного выполнения как первой, так и второй задач.

Особенности построения траекторий при движении изображающей точки на фазовой плоскости \bar{k}_1 и \bar{k}_2 показаны на рис. 4. На рис. 4, а на одной фазовой плоскости изображены сразу два типа неустойчивых нуль-изоклин (6) и (7); также показана интегральная траектория решения как для первой, так и для второй задач. На рис. 4, б на фазовой плоскости изображены нуль-изоклины (6), а сплошной линией показаны изменения траектории, соответствующие первой задаче. На рис. 4, в на фазовой плоскости изображены нуль-изоклины (7), а сплошной линией показаны изменения траектории, соответствующие второй задаче.

При переключении с одной задачи на другую и анализе каждого уравнения в отдельности переменная, определяемая из другого уравнения, остается постоянной, что позволяет во время решения одной из задач перевести изображающую точку через неустойчивую нуль-изоклину для нерешаемого в этот момент уравнения.

На рис. 4 на одной фазовой плоскости изображено сразу два типа нуль-изоклин, соответствующих уравнениям (5) и (6). При анализе каждого уравнения в отдельности, другое уравнение не учитывается, что позволяет нуль-изоклинам пересекаться на графике фазовых траекторий. То есть каждая нуль-изоклина имеет своё пространство параметров, никак не пересекающееся с пространством параметров другой нуль-изоклины.

Расчёты на рис. 3 и на рис. 4 проводились при следующих параметрах системы: $T_1 = -10$, $T_2 = -10$, $\bar{\gamma}_{11} = 30$, $\bar{\gamma}_{22} = 30$, $\bar{\gamma}_{12} = 50$, $\bar{\gamma}_{21} = 50$, $\varepsilon = 1$.

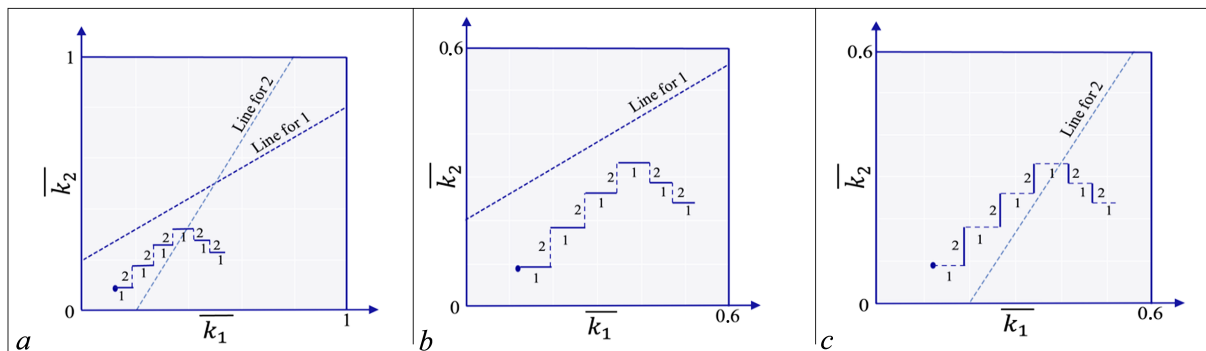


Рис. 4. Двухмерное фазовое пространство, в котором происходит вся динамика развития двух решаемых задач при управляемой процедуре переключений. Этапы обучения первому набору алгоритмов (горизонтальные линии) обозначены цифрой 1, а обучения второму набору алгоритмов (вертикальные линии) цифрой 2; б — изображена одна нуль-изоклина для 1-ого набора алгоритмов; в — изображена одна нуль-изоклина для 2-ого набора алгоритмов, как видно, траектории изображающих точек не пересекают нуль-изоклины, соответствующие решаемым задачам

Fig. 4. A two-dimensional phase space in which all dynamics occur during the controlled switching procedure for solving two tasks. The training stages for the first set of algorithms (horizontal lines) are marked with the number 1, while the training stages for the second set of algorithms (vertical lines) are marked with the number 2; б — One null isocline for the first set of algorithms is depicted; в — One null isocline for the second set of algorithms is depicted, and as we can see, they do not intersect with each other

2.3. Анализ возможных переходных процессов в упрощенной модели. Возможные динамические режимы в данной системе проиллюстрированы далее на рис. 5. Рассмотрим вначале примеры расположения нуль-изоклин и траектории изображающих точек. Для наглядности неустойчивые нуль-изоклины изображены пунктиром.

Опираясь на примеры реализации изменений \bar{k}_1 и \bar{k}_2 в процессе попеременного выполнения первой и второй задач, представленных на рис. 5, выделим восемь качественно различных режимов поведения:

- 1) режим одновременного «развития» — рост числа алгоритмов для обеих задач (в зоне 1);
- 2) «депрессивный» режим — снижение числа алгоритмов для обеих задач (в зоне 2);
- 3) развитие только первой задачи и угнетение второй (в зоне 4);
- 4) развитие только второй задачи и угнетение первой (в зоне 3);
- 5) режимы развития для двух задач переключаются на развитие только первой задачи и угнетение второй (переходы из зоны 1 в зону 4);

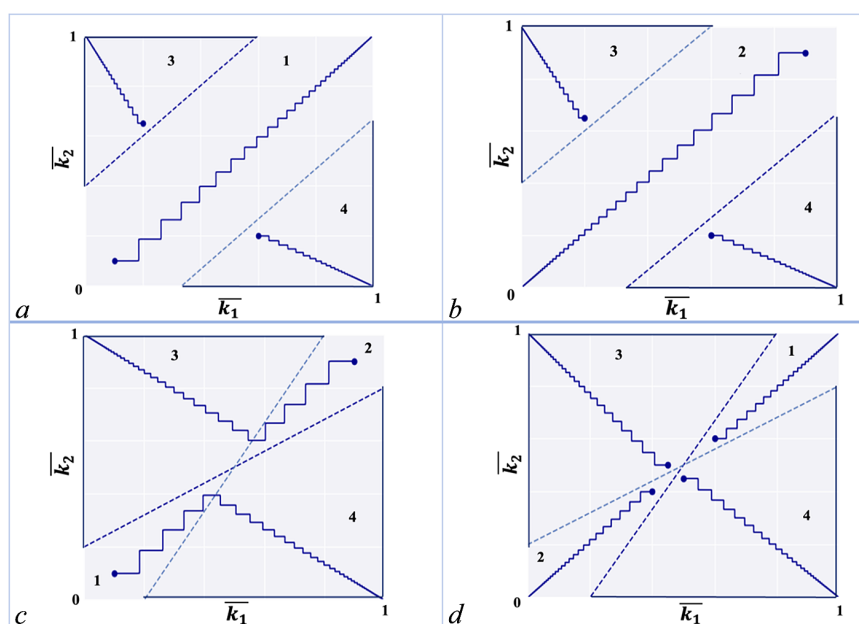


Рис. 5. Четыре типа зон с характерными процессами изменений \bar{k}_1 и \bar{k}_2 . *a* — Оптимальное расположение неустойчивых изоклин с зоной 1, где отсутствуют пороги для двухвариантных режимов развития, $T_1 = -10$; $T_2 = -10$; $\bar{\gamma}_{11} = 30$; $\bar{\gamma}_{22} = 25$; $\bar{\gamma}_{12} = 30$; $\bar{\gamma}_{21} = 25$; $\varepsilon = 1$. *b* — Зона 2 с «депрессивным» эффектом, снижающим развитие систем, находится вдоль центральной оси до верхнего правого угла, $T_1 = 10$; $T_2 = 10$; $\bar{\gamma}_{11} = 30$; $\bar{\gamma}_{22} = 25$; $\bar{\gamma}_{12} = 30$; $\bar{\gamma}_{21} = 25$; $\varepsilon = 1$. *c* — «Депрессивное» состояние (зона 2) находится сверху вдоль оси и ограничивает рост двухвариантных режимов развития (зона 1) внизу вдоль оси, $T_1 = -10$; $T_2 = -10$; $\bar{\gamma}_{11} = 30$; $\bar{\gamma}_{22} = 30$; $\bar{\gamma}_{12} = 50$; $\bar{\gamma}_{21} = 50$; $\varepsilon = 1$. *d* — Зона с оптимальными двухвариантными режимами развития систем (зона 1) находится вдоль центральной оси до верхнего правого угла. «Депрессивное» состояние (зона 2) в нижнем левом углу формирует порог для двухвариантных режимов развития, $T_1 = 10$; $T_2 = 10$; $\bar{\gamma}_{11} = 50$; $\bar{\gamma}_{22} = 50$; $\bar{\gamma}_{12} = 30$; $\bar{\gamma}_{21} = 30$; $\varepsilon = 1$

Fig. 5. Types of zones with characteristic processes of changes in \bar{k}_1 and \bar{k}_2 . *a* — The optimal location of unstable isoclines with zone 1, where there are no thresholds for two-variant modes of development: $T_1 = -10$, $T_2 = -10$, $\bar{\gamma}_{11} = 30$, $\bar{\gamma}_{22} = 25$, $\bar{\gamma}_{12} = 30$, $\bar{\gamma}_{21} = 25$, $\varepsilon = 1$. *b* — Zone 2 with a “depressive” effect, which reduces the development of systems, is located along the central axis up to the upper right corner: $T_1 = 10$, $T_2 = 10$, $\bar{\gamma}_{11} = 30$, $\bar{\gamma}_{22} = 25$, $\bar{\gamma}_{12} = 30$, $\bar{\gamma}_{21} = 25$, $\varepsilon = 1$. *c* — The “depressive” state (zone 2) is located at the top along the axis and limits the growth of two-variant modes of development (zone 1) at the bottom along the axis: $T_1 = -10$, $T_2 = -10$, $\bar{\gamma}_{11} = 30$, $\bar{\gamma}_{22} = 30$, $\bar{\gamma}_{12} = 50$, $\bar{\gamma}_{21} = 50$, $\varepsilon = 1$. *d* — The area with optimal two-variant modes of system development (zone 1) is located along the central axis up to the upper right corner, while the “depressive” state (zone 2) in the lower left corner forms a threshold for two-variant modes of development: $T_1 = 10$, $T_2 = 10$, $\bar{\gamma}_{11} = 50$, $\bar{\gamma}_{22} = 50$, $\bar{\gamma}_{12} = 30$, $\bar{\gamma}_{21} = 30$, $\varepsilon = 1$

- 6) двухвариантные режимы развития переключаются на развитие только второй задачи и угнетение первой (переходы из зоны 1 в зону 3);
- 7) «депрессивный» режим с уменьшением числа алгоритмов для обеих задач переключается на развитие только первой задачи и угнетение второй (переходы из зоны 2 в зону 4);
- 8) «депрессивный» режим с уменьшением числа алгоритмов для обеих задач переключается на развитие только второй задачи и угнетение первой (переходы из зоны 2 в зону 3).

Существование дополнительных режимов переключений, качественно отличающихся от режимов с наиболее очевидным поведением, уже приведенных выше, может быть обусловлено изменением длительности выполнения той или иной задачи.

3. Типы решений, соответствующие эпизоду из литературного произведения «Унесённые ветром»

Обратимся к одному из самых трогательных эпизодов романа «Унесенные ветром» Маргарет Митчелл. В этом моменте начинается Гражданская война в США, и янки (военные союзники Севера) приходят в город. Главная героиня, Скарлетт О'Хара, сидит и слушает звуки, доносящиеся из города, пытаясь унять беспорядочные мысли, которые проносятся у неё в голове [18] (том 1, гл. 23–24).

«Она сидела, прислушиваясь к звукам, долетавшим из города, и вдруг увидела, что небо над верхушками деревьев заалело. Это ее озадачило. Зарево разгоралось у нее на глазах. Из бледно-розового небо стало багровым. И вскоре огромный язык пламени взвился над деревьями. Скарлетт вскочила на ноги. Снова противно заныло и заколотилось сердце. Янки в городе! Они пришли и жгут город. Горело, по-видимому, где-то к востоку от центра. Языки пламени взмывали все выше и выше, множились, захватывали все большее пространство неба перед ее испуганным взором. Похоже было, что горит целый квартал. Теплое дуновение ветра повеяло ей в лицо, принеся с собой запах дыма» [18].

Главная героиня, Скарлетт О'Хара, находится в состоянии паники и страха после того, как янки начали захватывать город. Она осознает, что ей необходимо покинуть Атланту и отправиться в Тару, свое родное поместье. Скарлетт признается Ретту Батлеру, что она напугана и хочет вернуться домой. Ретт предупреждает ее о боевых действиях и опасностях на дороге, но Скарлетт настойчиво стоит на своем решении. Она проявляет свою стойкость и решимость, несмотря на возможные угрозы.

«Она стояла, вся дрожа, и слушала его, но слова почти не доходили до ее сознания. Однако когда он задал свой вопрос, что-то прояснилось у нее в голове, и она внезапно поняла, что на протяжении всего этого злосчастного дня знала, куда ей надо уехать. Только туда.

— Я поеду домой, — сказала она.

— Домой? Вы хотите сказать — в Тару?

— Да, да! В Тару! О, Ретт, нам надо спешить!

Он посмотрел на нее так, словно сомневался, в своем ли она уме.

— В Тару? Бог с вами, Скарлетт! Вы что, не знаете, что под Джонсборо целый день шли бои?

На пространстве в десять миль вдоль дороги, от Раф-энд-Реди вплоть до самого Джонсборо, и даже на улицах города! Янки, может быть, уже орудуют в Таре сейчас, а может быть, и во всем графстве. Достоверно никому не известно, где они, но, во всяком случае, где-то там, рядом. Вам нельзя ехать домой. Вы напоретесь прямо на армию янки!

— Нет, я поеду домой! — закричала она, и голос ее сорвался. — Я поеду домой! Вы не можете мне помешать! Я поеду домой! Я хочу к маме! Я убью вас, если вы будете мне мешать! Я хочу домой!

Страшное напряжение этих суток прорвалось наружу истерическими рыданиями, слезы ярости и страха катились по ее лицу. Она замолотила кулаками по его груди, вскрикивая снова и снова:

— Я хочу домой! Домой! Я пойду пешком! Всю дорогу!

И вдруг почувствовала себя в его объятьях — мокрая щека прижата к его крахмальной манишке, усмиренные кулаки притиснуты к его груди. Его руки нежно, успокаивающе гладили ее растрепанные волосы, голос тоже звучал нежно. Так мягко, так нежно, без тени насмешки, словно это был голос не Ретта Батлера, а какого-то совсем незнакомого ей большого, сильного мужчины, от которого так знакомо пахло бренди, табаком и лошадьми — совсем как от Джералда.

— Ну полно, полно, дорогая, — ласково говорил Ретт.

— Не плачьте. Вы поедете домой, моя маленькая храбрая девочка. Вы поедете домой. Перестаньте плакать» [18].

В данном эпизоде романа «Унесенные ветром» одним из основных приоритетов Скарлетт О’Хары является ее собственная безопасность и возвращение на родину в Тару. В первую очередь она испытывает страх за свою жизнь и пытается найти способ спастись от возможной опасности, вызванной пожаром и атакой янки. Для Скарлетт возвращение в Тару представляет собой попытку вернуться к корням, найти поддержку и защиту в родном доме в период исторических потрясений.

Следующим, но не менее важным приоритетом для Скарлетт становится сохранение жизни Мелани и детей. Она проявляет мужество и решимость, чтобы преодолеть преграды и риски на пути к Таре, стремясь обеспечить безопасность своим близким и найти для них убежище от войны. «Щурясь от солнца, она поглядела на Мелани и испуганно ахнула. Мелани лежала так неподвижно и была так бледна, что показалась Скарлетт мертвой. Никаких признаков жизни. Но вот Скарлетт уловила чуть заметный шелест дыхания и поняла, что Мелани удалось пережить эту ночь» [18]. Приоритеты героини отражают её индивидуальный опыт.

В данной ситуации основными приоритетами Скарлетт стали:

- $\overline{k_1}$ — обеспечение своей безопасности через применение соответствующих алгоритмов;
- $\overline{k_2}$ — гарантирование сохранности жизни своих близких при помощи необходимых мер.

Эта ситуация, в зависимости от начального состояния субъекта и расположения нуль-изоклин на плоскости, могла иметь как минимум четыре различных варианта поведения. Рассмотрим соответствующие примеры движения изображающей точки на фазовой плоскости и во времени. Пунктирными линиями изображены пороги переключения для $\overline{k_1}$ и $\overline{k_2}$.

1. Скарлетт, будучи храброй и решительной, сразу осознает опасность и мгновенно переключается на действия. Она быстро собирает необходимые вещи для себя, Мелани и детей, оставляя все лишнее позади. Призвав всех собраться вместе, она направляется к ближайшему укрытию или месту, где они могут найти защиту от огня и войны. Этот вариант поведения был бы характерен для героини в случае расположения нуль-изоклин, как на рис. 6, с зоной, где отсутствуют пороги для двухвариантного развития событий, что так же представлено на рис. 5, а (зона 1). Расчёты на рис. 6 проводились для следующих параметров системы: $T_1 = -11$; $T_2 = -17$; $\overline{\gamma_{11}} = 30$; $\overline{\gamma_{22}} = 25$; $\overline{\gamma_{12}} = 30$; $\overline{\gamma_{21}} = 25$; $\varepsilon = 1$.

2. При изменении положения нуль-изоклин внешние условия окружающей среды, в которой находится живая система, соответственно, и её состояние также изменяются, что приводит к изменению её поведения. На рис. 7 представлена зона с двухвариантным развитием, но с переходным режимом, что также соответствует рис. 5, с (зона 1). В романе «Унесенные ветром» ситуация могла бы развиваться следующим образом: изначально, когда Скарлетт и Мелани вынуждены бежать с детьми из-за войны, Скарлетт чувствует ответственность за безопасность Мелани и детей. Она стремится обеспечить их защиту, принимая на себя руководящую роль в этой ситуации. Однако по мере того как опасность увеличивается, их путь становится все более опасным, и Скарлетт начинает осознавать, что ее собственная безопасность становится приоритетом. Данный эпизод

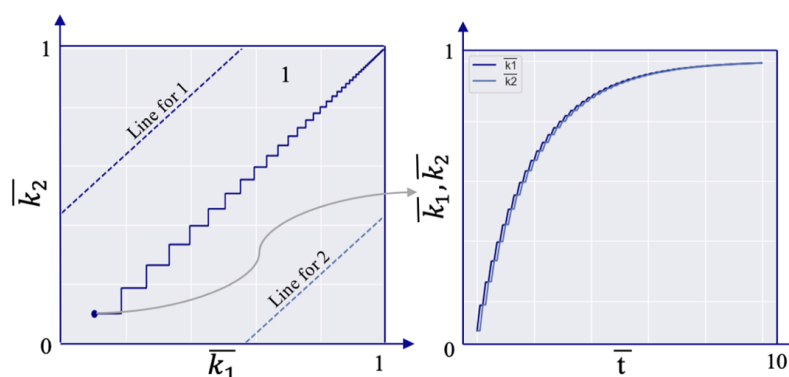


Рис. 6. Режим с двухвариантным развитием

Fig. 6. A mode with two-variant development

мог бы показать эволюцию характера Скарлетт, ее способность адаптироваться к экстремальным обстоятельствам и принимать трудные решения в условиях опасности. Она проходит через внутренний конфликт, связанный с балансированием между заботой о других и заботой о самой себе в условиях кризиса.

Расчёты на рис. 7 проводились для следующих параметров системы: $T_1 = -13$; $T_2 = -15$; $\bar{\gamma}_{11} = 30$; $\bar{\gamma}_{22} = 30$; $\bar{\gamma}_{12} = 50$; $\bar{\gamma}_{21} = 50$; $\varepsilon = 1$.

3. В данном случае Скарлетт, обладающая высокой самозащитной реакцией, решает действовать самостоятельно. Она не ждет помощи от Ретта Батлера или кого-либо еще, а быстро принимает решение о том, что нужно сделать. Скарлетт собирает только самое необходимое и берет детей за руки, чтобы убедиться, что они в безопасности. Она выбирает наиболее безопасный путь и спешит вместе с детьми к месту, которое она заранее определила как укрытие. Подобное развитие событий достоверно описывает вариант на рис. 8, в котором наблюдается резкий переход через порог.

Расчёты на рис. 8 проводились для следующих параметров системы: $T_1 = 1$; $T_2 = 1$; $\bar{\gamma}_{11} = 31$; $\bar{\gamma}_{22} = 85$; $\bar{\gamma}_{12} = 30$; $\bar{\gamma}_{21} = 30$; $\varepsilon = 1$.

4. Скарлетт, изначально испытывающая панику и страх, оказывается парализованной и неспособной принять решение. Она теряется в своих мыслях и не может сосредоточиться

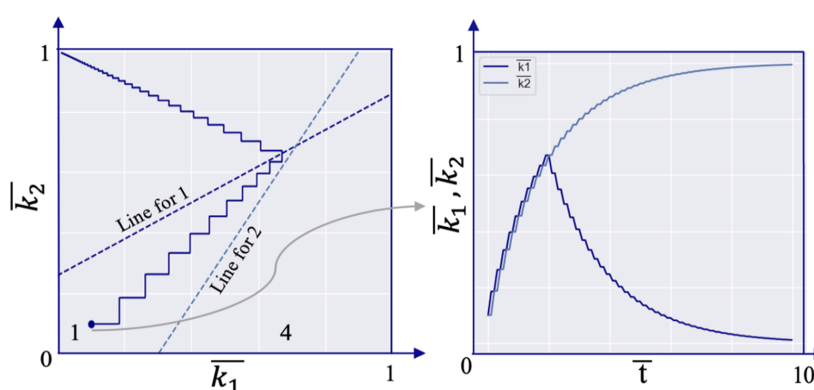


Рис. 7. Режим перехода от двухвариантного развития к одновариантному

Fig. 7. The mode of transition from two-variant to one-variant development

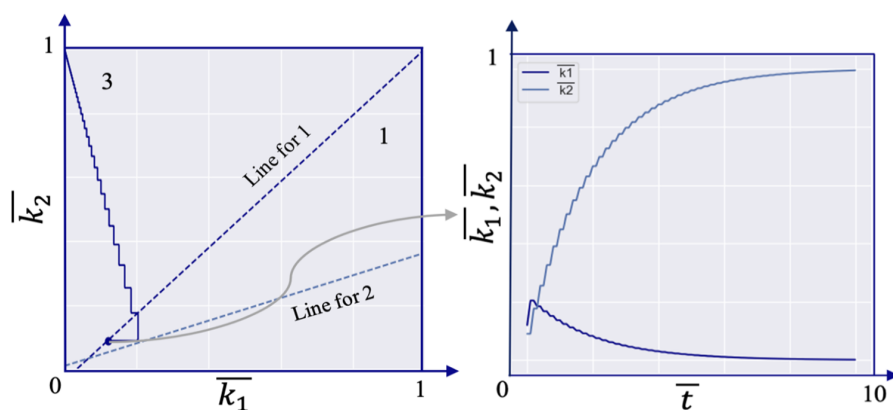


Рис. 8. Режим с одновариантным развитием после преодоления порога

Fig. 8. A mode with a single-variant development, after overcoming the threshold

на действиях. При появлении Ретта Батлера в Скарлетт вселяется надежда на спасение из этой ужасной ситуации. Исходя из рис. 9, можно сказать, что героиня смогла преодолеть порог запуска алгоритмов \bar{k}_2 для начала действия и вышла из «депрессивной» зоны, где невозможно развитие ни одного из заданных варианта поведения рис. 5 с (зона 2). Скарлетт начинает укладывать необходимые вещи в повозку для Мелани и её новорожденного ребёнка, проявляя заботу о них. Такое развитие событий точно соответствует описанному в романе и отражает реалистичный сюжет.

Расчёты на рис. 9 проводились для следующих параметров системы: $T_1 = -1$; $T_2 = -1$; $\bar{\gamma}_{11} = 30$; $\bar{\gamma}_{22} = 30$; $\bar{\gamma}_{12} = 50$; $\bar{\gamma}_{21} = 50$; $\varepsilon = 1$.

Изучая возможные сценарии развития сюжета, мы видим, что изменение положения нуль-изоклин и начального состояния живой системы могло бы привести к изменению хода событий в романе. Эти изменения порогов переключения (зависящие от реакций восприятия через «образный» канал, эмоционального состояния, текущего энергообеспечения) могли бы повлиять на выбор поведения главной героини.

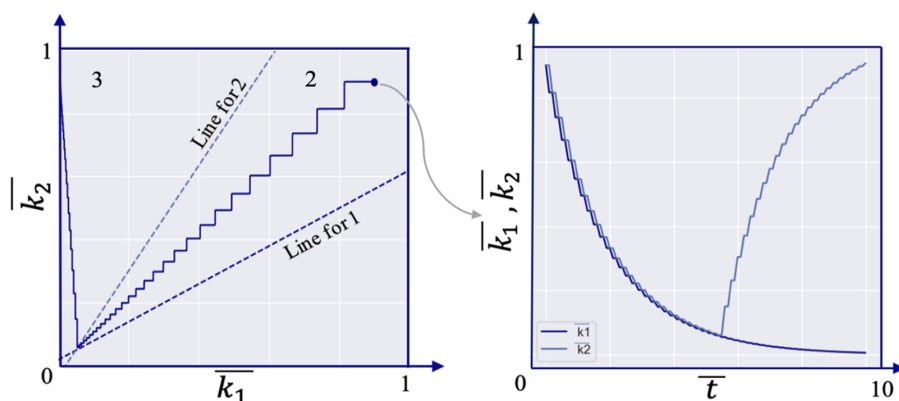


Рис. 9. Режим, в котором изначально возможности развития обоих вариантов поведения уменьшаются. После преодоления порога система выходит на одновариантное развитие

Fig. 9. A mode in which the possibilities for the development of both behavioral options are initially reduced. After overcoming the threshold, the system enters a single-variant development

Заключение и выводы

Таким образом, проведенное рассмотрение позволяет сделать следующие выводы.

1. На основе физической методологии исследований удастся предложить вариант перехода от иерархических схем управления к упрощенной базовой модели в виде дифференциальных уравнений, позволяющих рассматривать динамику приобретения или утраты индивидуального опыта в живых иерархических системах через изменение числа алгоритмов, вовлеченных в этот процесс.

2. Продемонстрировано, что такого вида уравнения адекватно описывают не только экспериментальные данные, связанные с обучением детей билингвизму [12, 13], но также применимы для более широкого спектра описаний режимов многозадачного функционирования живых систем (содержат не менее восьми типов режимов функционирования). Демонстрация адекватного описания процессов переключения между двумя режимами функционирования живой системы была выполнена на примере эпизодов из литературного произведения «Унесённые ветром» [18]. Полученные результаты закладывают основу для создания версий упрощенных языков, объясняющих разнообразие динамических режимов в иерархически организованных распознающих системах при попеременно решаемых ими задачах различного вида.

3. Существуют различные методы формирования версий упрощенных моделей и соответствующих им языков описания режимов переключений в живых системах. Например, подходы, разработанные М. И. Рабиновичем [23, 29], В. А. Лефевром [24, 25] и его учениками [26], ориентированы на упрощенные модели и соответствующий им язык описания. В данной работе представляется новый подход к описанию многозадачных режимов (различных операционных действий) в живых системах с использованием математического моделирования, основанного на функциональной системе П. К. Анохина. Высокая результативность такого подхода ранее была показана при анализе экспериментальных данных, наблюдаемых при обучении детей билингвизму [12, 13].

Упрощенное модельное описание ориентировано не только на лучшее понимание данных о поведении живых систем, но и открывает, по нашему мнению, новые горизонты для анализа и предсказания их функционирования в различных условиях. Работа с такими математическими моделями будет способствовать формированию языка для описания механизмов переключения, используемых живыми системами при решении ситуативных задач. В дальнейшем можно будет провести сравнительный анализ результатов, полученных здесь, в [12, 13] и, например, в работах [23–26, 29], для выяснения того, как разные исходные базисные подходы влияют на особенности изложенных ранее описаний. Из-за объемности такого рассмотрения мы вынуждены оставить такое сравнение за рамками данной статьи.

Список литературы

1. Анохин П. К. Теория функциональной системы как предпосылка к построению физиологической кибернетики // В кн.: Биологические аспекты кибернетики. М.: АН СССР, 1962. С. 74–91.
2. Анохин П. К. Теория функциональной системы // Успехи физиологических наук. 1970. Т. 1, № 1. С. 19–54.
3. Анохин П. К. Узловые вопросы теории функциональных систем. М.: Наука, 1980. 198 с.
4. Яхно В. Г. Модели нейроноподобных систем. Динамические режимы преобразования информации // В кн.: Нелинейные волны – 2002. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. С. 90–114.
5. Яхно В. Г. Нейроноподобные модели описания динамических процессов преобразования информации // VI Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2004»: Лекции по нейроинформатике. Часть 1. М.: МИФИ, 2004. С. 136–150.

6. Яхно В. Г. Динамика нейроноподобных моделей и процессы «сознания» // VIII Всероссийская Научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2006»: Лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ, 2006. С. 88.
7. Яхно В. Г., Полевая С. А., Парин С. Б. Базовая архитектура системы, описывающей нейробиологические механизмы осознания сенсорных сигналов // В кн.: Когнитивные исследования: сборник научных трудов. Вып. 4. М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2010. С. 273–301.
8. Яхно В. Г. Основные динамические режимы осознания сенсорных сигналов в нейроноподобных моделях: проблемы на пути к «нейроморфному» интеллекту // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 6. С. 130–144. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-130-144.
9. Яхно В. Г., Макаренко Н. Г. Поможет ли нам создание «Цифрового двойника человека» лучше понимать друг друга? // В кн.: Подходы к моделированию мышления. М.: ЛЕНАНД, 2014. С. 169–202.
10. Yakhno V. G., Parin S. B., Poleyaya S. A., Nuidel I. V., Shemagina O. V. Who Says Formalized Models are Appropriate for Describing Living Systems? // In: Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research IV. NEUROINFORMATICS 2020. Studies in Computational Intelligence. Vol. 925. Cham: Springer, 2021. P. 10–33. DOI: 10.1007/978-3-030-60577-3_2.
11. Нуйдель И. В., Соколов М. Е., Кузнецова Г. Д., Яхно В. Г. Моделирование динамических процессов преобразования сенсорных сигналов в таламо-кортикальных сетях // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 6. С. 117–129. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-117-129.
12. Александрова Н. Ш., Антонец В. А., Нуйдель И. В., Шемагина О. В., Яхно В. Г. Моделирование ряда особенностей формирования естественного билингвизма // Сб. научных трудов 21-ой Международной научно-технической конференции «Нейроинформатика-2019». Часть 1. Москва: Изд-во «МФТИ», 2019. С. 101–108.
13. Alexandrova N. Sh., Antonets V. A., Kuzenkov O. A., Nuidel I. V., Shemagina O. V., Yakhno V. G. Bilingualism as an Unstable State // In: Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics. Intercogncsci 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing. Vol. 1358. Cham: Springer, 2021. P. 359–367. DOI: 10.1007/978-3-030-71637-0_41.
14. Чернавский Д. С. Методологические основы синергетики и её применения // В кн.: Методологические основы синергетики и ее социальные аппликации: Материалы научного семинара. Вып. № 1. М.: Научный эксперт, 2010. С. 6–29.
15. Савостьянов Г. А. Теория разделения труда как основа развития в биологии и обществе. СПб.: Лема, 2023. 232 с.
16. ВП СССР. От корпоративности под покровом идей к соборности в Богодержавии. М.: МИМ - Московское издательство «МЕРА», 2015. 320 с.
17. Яхно В. Г., Парин С. Б. О методологии исследования когнитивных систем // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, №. 3. С. 257–260. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-3-257-260.
18. Митчелл М. Унесённые ветром. В 2 т. Т. 1 / Пер. с англ. Т. Озерской. Москва: Издательство АСТ, 2020. 704 с.
19. Уилбер К. Интегральная психология: Сознание, Дух, Психология, Терапия. М.: ООО «Издательство АСТ», 2004. 412 с.
20. Мольц М. Я – это Я, или как стать счастливым / Предисловие В. П. Зинченко, Е. Б. Моргунова. М.: Прогресс, 1991. 192 с.

21. Берн Э. Игры, в которые играют люди. Психология человеческих отношений. Люди, которые играют в игры. Психология человеческой судьбы / Под ред. М.С. Мацковского. СПб.: Лениздат, 1992. 400 с.
22. Шмидт Р., Тевс Г. Здоровье и медицина // В кн.: Физиология человека. М.: Мир, 1996. С. 834.
23. Рабинович М. И., Мюезинолу М. К. Нелинейная динамика мозга: эмоции и интеллектуальная деятельность // УФН. 2010. Т. 180, № 4. С. 371–387. DOI: 10.3367/UFNr.0180.201004b.0371.
24. Лефевр В. А. Алгебра совести. М.: Когито-центр, 2003. 426 с.
25. Лефевр В. А. Рефлексия. М.: Когито-центр, 2003. 496 с.
26. Анисимова С. А. Нелинейные модели теории рефлексивного управления // Известия вузов. ПНД. 2004. Т. 12, № 1–2. С. 96–113. DOI: 10.18500/0869-6632-2004-12-1-96-113.
27. Болотовский В. М., Левин М. Л., Миллер М. А., Суворов Е. В. Фарадей – Максвелл – Герц – Хевисайд... О согласованности функциональных специализаций мозга // Известия вузов. ПНД. 1996. Т. 4, № 2. С. 103–123. DOI: 10.18500/0869-6632-1996-4-2-103-123.
28. Психофизиология: Учебник для вузов / Под ред. Ю. И. Александрова. 5-е издание. СПб.: Питер, 2024. 528 с.
29. Рабинович М. И., Варона П. Нелинейная динамика творческого мышления. Многомодальные процессы и взаимодействие гетероклических структур // УФН. 2021. Т. 191, № 8. С. 846–860. DOI: 10.3367/UFNr.2020.09.038837.

References

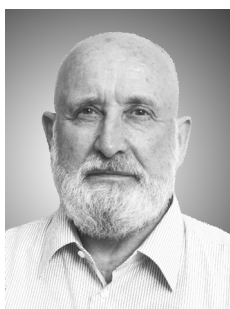
1. Anokhin PK. The theory of the functional system as a prerequisite for the construction of physiological cybernetics. In: Biological Aspects of Cybernetics. Moscow: ANSSSR; 1962. P. 74–91.
2. Anokhin PK. Theory of the functional system. Advances in Physiological Sciences. 1970; 1(1):19–54.
3. Anokhin PK. Key Issues of the Theory of Functional Systems. Moscow: Nauka; 1980. 198 p.
4. Yakhno VG. Models of neuron-like systems. Dynamic modes of information transformation. In: Nonlinear Waves – 2002: Materials of the School. Nizhny Novgorod: IAP RAS; 2003. P. 90–114.
5. Yakhno VG. Neuron-like models for describing dynamic information transformation processes. In: VI All-Russian Scientific and Technical Conference “Neuroinformatics-2004”: Lectures on neuroinformatics. Part 1. Moscow: MEPhI; 2004. P. 136–150 (in Russian).
6. Yakhno VG. Dynamics of neuron-like models and processes of “consciousness”. In: VIII All-Russian Scientific and Technical conference “Neuroinformatics-2006”: Lectures on neuroinformatics. M.: MEPhI; 2006. P. 88 (in Russian).
7. Yakhno VG, Polevaya SA, Parin SB. The basic architecture of a system describing the neurobiological mechanisms of awareness of sensory signals. In: Alexandrov YuI, Solovyov VD, editors. Cognitive Research: Collection of Scientific Papers. Issue 4. M.: Institute of Psychology of the Russian Academy of Sciences Publishing; 2010. P. 273–301. (in Russian).
8. Yakhno VG. The main dynamic modes of awareness of sensory signals in neuron-like models: problems on the way to “neuromorphic” intelligence. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2011;19(6):130–144 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-130-144.
9. Yakhno VG, Makarenko NG. Will the creation of a “Digital human double” help us to better understand each other? In: Redko VG, editor. Approaches to Modeling Thinking. M.: LENAND; 2014. P. 169–202. (in Russian).

10. Yakhno VG, Parin SB, Polevaya SA, Nuidel IV, Shemagina OV. Who Says Formalized Models are Appropriate for Describing Living Systems? In: Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research IV. NEUROINFORMATICS 2020. Studies in Computational Intelligence. Vol. 925. Cham: Springer; 2021. P. 10–33. DOI: 10.1007/978-3-030-60577-3_2.
11. Nuidel I.V., Sokolov M.E., Kuznetsova G.D., Yakhno V.G. Modeling of dynamic processes of transformation of sensory signals in thalamo-cortical networks. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2011;19(6):117–129. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-117-129.
12. Alexandrova NSh, Antonec VA, Nuydel IV, Shemagina OV, Yakhno VG. Modeling the Formation Features of Natural Bilingualism. In: Collection of Scientific Papers of the 21st International Scientific and Technical Conference “Neuroinformatics-2019”, Part 1. Moscow: Publishing House “MIPT”; 2019. P. 101–108.
13. Alexandrova NSh, Antonets VA, Kuzenkov OA, Nuidel IV, Shemagina OV, Yakhno VG. Bilingualism as an Unstable State. In: Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics. Intercogncsci 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing. Vol. 1358. Cham: Springer; 2021. P. 359–367. DOI: 10.1007/978-3-030-71637-0_41.
14. Chernavsky DS. Methodological Foundations of Synergetics and Its Applications. In: Methodological Foundations of Synergetics and Its Social Applications. Materials of the Scientific Seminar. Vol. 1. Moscow: Scientific Expert; 2010. P. 6–29. (in Russian).
15. Savostyanov GA. The Theory of Division of Labor as the Basis for Development in Biology and Society. St. Petersburg: Lema; 2023. 232 p.
16. USSR VP. From Corporate Identity Under the Cover of Ideas to Sobornost in God’s Sovereignty. Moscow: Moscow publishing house “Mera”.
17. Yakhno VG, Parin SB. On the Methodology of Researching Cognitive Systems. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(3):257–260. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-3-257-260.
18. Margaret Mitchell Gone with the Wind. Moscow: AST Publishing House; 2020. 704 p.
19. Wilber K. Integral Psychology: Consciousness, Spirit, Psychology, Therapy. Moscow: AST Publishing House LLC; 2004. 412 p.
20. Molts M. I am Me, or How to Be Happy. Moscow: Progress; 1991. 192 p.
21. Berne E. Games People Play: The Psychology of Human Relationships; People Who Play Games: The Psychology of Human Destiny. St. Petersburg: Lenizdat; 1992. 400 p.
22. Schmidt R, Tevs G. Human Physiology. Berlib: Springer; 1989. 825 p.
23. Rabinovich MI, Muezinolu MK. Nonlinear dynamics of the brain: emotion and cognition. Physics Uspekhi 2010;53(4):357–372. DOI: 10.3367/ufne.0180.201004b.0371.
24. Lefevre VA. Algebra of Conscience. Moscow: Cogito-Center; 2003. 426 p.
25. Lefevre VA. Reflection. Moscow: Cogito-Center; 2003. 496 p.
26. Anisimova SA. Nonlinear models of reflexive control theory. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2004;12(1-2):96-113. DOI: 10.18500/0869-6632-2004-12-1-96-113.
27. Bolotovskiy VM, Levin ML, Miller MA, Suvorov EV. Faraday - Maxwell - Hertz - Heaviside... on the coordination of the functional specialization of cerebrum. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 1996;4(2):103-123.
28. Alexandrov YuI, editor. Psychophysiology: A Textbook for Higher Educational Institutions. 5th edition. St. Petersburg: Piter; 2024. 528 p.
29. Rabinovich MI, Varona P. Nonlinear Dynamics of Creative Thinking: Multimodal Processes and Interaction of Heterocyclic Structures. Physics Uspekhi. 2021;64(8):801–814. DOI: 10.3367/ufne.2020.09.038837.



Головина Алина Андреевна — родилась в Нижнем Новгороде (2000). В 2022 году окончила бакалавриат радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. С 2022 года студентка магистратуры радиофизического факультета кафедры теории колебаний и автоматического регулирования Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Научные интересы — математическое моделирование, психофизиология, нейронаука.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр-т. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: alinagolovina88@mail.ru



Яхно Владимир Григорьевич — родился в 1947 году. Доктор физико-математических наук. Заведующий лабораторией в Институте прикладной физики РАН (Нижний Новгород). Научные интересы связаны с исследованием процессов самоорганизации в распределенных неравновесных системах и приложением автоволновых представлений для моделирования процессов обработки сенсорных сигналов, развития компьютерных алгоритмов кодирования сложных изображений (разработка биометрических систем); рассмотрением характерных процессов в модельных системах, имитирующих функционирование живых систем. Имеет более 200 научных публикаций (в том числе 2 монографии и 10 патентов).

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН
E-mail: yakhno@appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0002-4689-472X
AuthorID (eLibrary.Ru): 18659



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003165
EDN: QISLWL

Применение методов моделирования фазовой динамики и рекуррентности для оценки характеристик взаимосвязи между физиологическими ритмами*

О. Е. Дик

Институт физиологии им. И. П. Павлова РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dickviola@gmail.com

Поступила в редакцию 26.10.2024, принята к публикации 13.01.2025,
опубликована онлайн 3.02.2025, опубликована 30.05.2025

Аннотация. Цель настоящей работы — применение двух методов нелинейной динамики для оценки характеристик взаимосвязи между временными рядами, извлеченными из физиологических ритмов. В качестве анализируемых временных рядов использованы флуктуации дыхательного ритма, кривые вариабельности артериального давления и вариабельности интервалов нейрональной активности продолговатого мозга крыс до и во время болевого воздействия. **Методы.** Для решения задачи выявления взаимосвязи, оценки асимметрии и направления связи применены метод моделирования фазовой динамики слабосвязанных и слабозашумленных систем и метод вычисления усредненных условных вероятностей рекуррентностей временных рядов, генерируемых взаимодействующими системами. В качестве характеристик взаимосвязи между системами использованы оценки интенсивности воздействия одной системы на другую и оценки в различиях усредненных условных вероятностей рекуррентностей. **Результаты.** Для проверки устойчивости примененных методов к шуму проведен анализ хорошо изученной модели однонаправленно связанных осцилляторов ван дер Поля. Подтверждено правильное определение направления связи обоими методами при слабом зашумлении, снижение возможности выявления направления методом фазового моделирования при нарастании зашумления и сохранение возможности правильного определения направления методом рекуррентностей. Для экспериментально полученных и слабозашумленных биологических временных рядов в большинстве анализируемых данных обнаружена асимметрия связи с преимущественным влиянием дыхательного ритма на вариабельность нейрональной активности и артериальное давление и влияние вариабельности артериального давления на нейронную активность ретикулярной формации продолговатого мозга. **Заключение.** Применение двух методов оценки характеристик взаимосвязи между слабозашумленными временными рядами — как модельными, так и экспериментальными — показало вполне согласованные результаты в преимущественном влиянии одной системы на другую.

Ключевые слова: фазовая динамика, рекуррентность, физиологические ритмы.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке государственного финансирования, выделенного Институту физиологии им. И. П. Павлова РАН (№ 1021062411784-3-3.1.8).

Для цитирования: Дик О. Е. Применение методов моделирования фазовой динамики и рекуррентности для оценки характеристик взаимосвязи между физиологическими ритмами // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. 381–398. DOI: 10.18500/0869-6632-003165. EDN: QISLWL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нейроинформатика — 2024».

Application of phase dynamics modeling and recurrence methods to assess the characteristics of the relationship between physiological rhythms*

O. E. Dick

Pavlov Institute of Physiology of the Russian Academy of Science, St. Petersburg, Russia
E-mail: dickviola@gmail.com

Received 26.10.2024, accepted 13.01.2025, available online 3.02.2025, published 30.05.2025

Abstract. The purpose of this work is to apply two methods of nonlinear dynamics to assess the characteristics of the relationship between time series extracted from physiological rhythms. The analyzed time series were respiratory rhythm fluctuations, arterial pressure variability curves, and variability of neuronal activity intervals in the medulla oblongata of rats before and during pain exposure. **Methods.** To solve the problem of identifying the relationship and assessing the asymmetry and direction of the relationship, a method for modeling the phase dynamics of weakly coupled and weakly noisy systems and a method for calculating averaged conditional probabilities of recurrences of time series generated by interacting systems were used. As characteristics of the relationship between systems, estimates of the intensity of the influence of one system on another and estimates in the differences of the averaged conditional probabilities of recurrences were used. **Results.** To verify the robustness of the applied methods to noise, an analysis of a well-studied model of unidirectionally coupled van der Pol oscillators was performed. The correct determination of the direction of coupling by both methods with weak noise and a decrease in the possibility of identifying the direction by the phase modeling method with increasing noise, and the preservation of the possibility of correctly determining the direction by the recurrence method were confirmed. For experimentally obtained and weakly noisy biological time series, an asymmetry of the coupling with a predominant influence of the respiratory rhythm on the variability of neuronal activity and arterial pressure, and the influence of arterial pressure variability on the neuronal activity of the reticular formation of the medulla oblongata was found in most of the analyzed data. **Conclusion.** The application of two methods for assessing the characteristics of the relationship between weakly noisy time series, both model and experimental, showed quite consistent results in the predominant influence of one system on the other.

Keywords: phase dynamics, recurrence, physiological rhythms.

Acknowledgements. The work was supported by the State funding allocated to the Pavlov Institute of Physiology Russian Academy of Sciences (No. 1021062411784-3-3.1.8).

For citation: Dick OE. Application of phase dynamics modeling and recurrence methods to assess the characteristics of the relationship between physiological rhythms. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(3):381–398. DOI: 10.18500/0869-6632-003165

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследование характеристик взаимосвязи между слабосвязанными динамическими системами представляет значительный интерес в связи с тем, что выяснение направления связи важно для понимания механизма функционирования взаимодействующих систем. При анализе таких биологических систем, как сердечно-сосудистая и дыхательная, в работах [1,2] определено преимущественное влияние низкочастотных колебаний вариабельности сердечного ритма на вариабельность кровенаполнения артериальных сосудов, при этом нарушение частоты сердечных сокращений вызывает нарушение регуляции тонуса артериальных сосудов. В работах [3–6] определено доминирующее влияние колебаний дыхательного ритма по отношению к колебаниям сердечно-сосудистого ритма. Дыхание управляет фазовой синхронизацией между артериальным давлением и колебаниями сердечного ритма [7]. Патологические состояния могут изменять взаимодействия физиологических систем, например, в результате инфаркта миокарда длительность

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Neuroinformatics — 2024”.

синхронизации уменьшается [1, 8]. Однако взаимность связей дыхательной и нервной систем считается не совсем ясной [9], поэтому получение дополнительной информации о направленности связей в рассматриваемых системах представляется весьма актуальной задачей. Для оценки направленной связанности возможно применение различных методов нелинейной динамики [10, 11]. Это методы, связанные с определением причинно-следственной связи по Грейнджеру [12], энтропией переноса [13], частной направленной когерентности [14], с вычислением индекса направленности с помощью моделирования фазовой динамики [5, 15, 16], с определением совместных рекуррентностей и вычислением средних условных вероятностей рекуррентностей между двумя фазовыми траекториями анализируемых систем [17, 18]. Эти подходы получили признание в различных прикладных задачах в областях физиологии [3, 19–23] и климатологии [24, 25].

Целью данной работы является нахождение характеристик взаимосвязи (направленности и интенсивности влияния одной системы на другую) между временными рядами, извлеченными из физиологических ритмов различных систем, методом моделирования фазовой динамики слабо-связанных и слабозашумленных периодических процессов и методом вычисления усредненных условных вероятностей рекуррентностей.

В качестве анализируемых временных рядов использованы флуктуации дыхательного ритма (RES), кривые вариабельности артериального давления (BPV) и вариабельности нейрональной активности (NAV) продолговатого мозга крыс, полученные в работе [26] до и во время болевого воздействия, представляющего собой механическое растяжение толстой кишки с помощью резинового баллона. В работе [26] эти данные были использованы для выявления фазовой синхронизации между попарными временными рядами с помощью синхросжатого вейвлетного преобразования. В настоящей работе эти данные применены для анализа характеристик взаимосвязи между физиологическими ритмами и выяснения их изменения во время болевого воздействия. Используемые методы описаны в разделе 1. Для проверки устойчивости методов анализа характеристик взаимосвязи двух временных рядов к шуму в разделе 2.1 рассмотрена хорошо изученная модель двух однонаправленно связанных осцилляторов с известными свойствами фазовой синхронизации. В разделе 2.2 приведены результаты применения этих методов к экспериментальным данным.

1. Методика

1.1. Определение характеристик связи между взаимодействующими системами на основе анализа совместных рекуррентностей. Для анализа связей между слабо взаимодействующими системами с помощью нахождения совместных рекуррентностей требуется прежде всего построить фазовые траектории x и y из исходных сигналов $X(t)$ и $Y(t)$, генерируемых системами X и Y [27]. Для этого применяется метод временных задержек [28]:

$$x(t) = (X(t), X(t+d), \dots, X(t+(m-1)d), \quad (1)$$

$$y(t) = (Y(t), Y(t+d), \dots, Y(t+(m-1)d), \quad (2)$$

где d — временная задержка и m — размерность вложения, определяемые методами поиска минимума функции взаимной информации [29] и минимума ближайших ложных соседей [30] соответственно. Затем для построенных траекторий x и y вычисляются матрицы рекуррентностей [27]:

$$R_{i,j}^X = \Theta(\varepsilon_X - \|x_i - x_j\|), \quad (3)$$

$$R_{i,j}^Y = \Theta(\varepsilon_Y - \|y_i - y_j\|), \quad (4)$$

где Θ — функция Хэвисайда, $N = n - (m-1)d$, n — длина анализируемых сигналов $X(t)$ и $Y(t)$, $i, j = 1, \dots, N$, ε_X и ε_Y — радиусы окрестностей точек фазовых траекторий, значения которых

выбираются таким образом, чтобы плотность рекуррентных точек $RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N RR_{i,j}$ для обеих матриц рекуррентностей была одинаковой [27]. Матрица совместных рекуррентностей $JR_{i,j}^{X,Y}$ вычисляется по формуле [27]

$$JR_{i,j}^{X,Y} = \Theta(\varepsilon_X - \|x_i - x_j\|) \Theta(\varepsilon_Y - \|y_i - y_j\|). \quad (5)$$

На основании вычисленных матриц определяются усредненные условные вероятности рекуррентностей (MCR) [17]:

$$\text{MCR}(X|Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p(x_i, y_i)}{p(y_i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sum_{j=1}^N JR_{i,j}^{X,Y}}{\sum_{j=1}^N R_{i,j}^Y}, \quad (6)$$

$$\text{MCR}(Y|X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{p(x_i, y_i)}{p(x_i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sum_{j=1}^N JR_{i,j}^{X,Y}}{\sum_{j=1}^N R_{i,j}^X}. \quad (7)$$

Выполнение условия $\Delta \text{MCR}(X|Y) = 0$ для взаимодействующих систем означает наличие симметрии связи, а выполнение условия $\Delta \text{MCR}(X|Y) = \text{MCR}(X|Y) - \text{MCR}(Y|X) > 0$ означает асимметрию связи с направлением, при котором система X в большей степени влияет на систему Y , то есть система X управляет системой Y [17, 18]. Таким образом, этот метод позволяет определять направление связи взаимодействующих систем при наличии асимметрии связи с помощью показателя асимметрии связи $\Delta \text{MCR}(X|Y)$. Преимущества метода оценки характеристик направленной связи с использованием совместных рекуррентных соотношений заключаются в возможности его использования для зашумленных и достаточно коротких временных рядов, что актуально для анализа экспериментальных биологических записей [31].

1.2. Определение характеристик связи между взаимодействующими системами методом моделирования фазовой динамики. Метод моделирования фазовой динамики предполагает построение экспериментальной модели фазовой динамики анализируемых систем по временным рядам, представляющим сигналы систем. Для этих сигналов вычисляются мгновенные фазы $\phi_X(t)$ и $\phi_Y(t)$, а затем строится модель фазовой динамики с приращениями фаз на временном интервале τ :

$$\phi_X(t + \tau) - \phi_X(t) = F_X(\phi_X(t), \phi_Y(t), a_X) + \varepsilon_X(t), \quad (8)$$

$$\phi_Y(t + \tau) - \phi_Y(t) = F_Y(\phi_X(t), \phi_Y(t), a_Y) + \varepsilon_Y(t), \quad (9)$$

где $\varepsilon_X(t)$ и $\varepsilon_Y(t)$ — гауссовы шумы с нулевым средним. Функции $F_X(\phi_X(t), \phi_Y(t), a_X) + \varepsilon_X(t)$ и $F_Y(\phi_X(t), \phi_Y(t), a_Y) + \varepsilon_Y(t)$ описываются многочленами вида [5, 32]:

$$F_j(\phi_X, \phi_Y, a_j) = \sum_{m,n} a_{j,m,n} \exp(i(m\phi_X + n\phi_Y)), \quad j = X, Y. \quad (10)$$

Согласно [5, 32], значения τ равны меньшему из характерных периодов колебаний для двух анализируемых сигналов, и $m < 4$, $n < 4$. Для оценки значений коэффициентов $a_{j,m,n}$ находится минимум целевой функции

$$S_j^2 = \sum_{i=1}^{N-\tau} (\Delta \phi_j(t_i) - F_j(\phi_X(t_i), \phi_Y(t_i), a_j))^2, \quad j = X, Y \quad (11)$$

с помощью метода наименьших квадратов.

На основании вычисленных функций $F_j(\phi_X(t), \phi_Y(t), a_j)$, $j = X, Y$ определяются количественные характеристики направленных связей взаимодействующих систем как интенсивность

влияния одной системы на другую. Интенсивность воздействия системы Y на систему X определяется как крутизна зависимости функции F_X от ϕ_Y , а влияние системы X на систему Y определяется как крутизна зависимости функции F_Y от ϕ_X [5]:

$$c_X^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F_X(\phi_X, \phi_Y, a_X)}{\partial \phi_Y} \right)^2 d\phi_X d\phi_Y, \quad (12)$$

$$c_Y^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F_Y(\phi_X, \phi_Y, a_Y)}{\partial \phi_X} \right)^2 d\phi_X d\phi_Y. \quad (13)$$

В связи с этим величина c_X является количественной характеристикой направленной связи $Y \rightarrow X$, а c_Y — количественной характеристикой направленной связи $X \rightarrow Y$.

Для коротких временных рядов (длиной 50 характерных периодов, свойственных реальным сигналам) в работе [32] предложены примененные в данной работе несмещенные оценки величин c_X^2 и c_Y^2 , вычисляемые в соответствии с формулами, приведенными в [32]:

$$\gamma_j = c_j^2 - r_j = c_j^2 - \sum_k n_k^2 \sigma_{j,k}^2, \quad j = X, Y, \quad (14)$$

где r_X и r_Y — поправки, зависящие от уровня шума и длины временного ряда, $k = 1, \dots, L$, где L — число коэффициентов многочленов $F_X(\phi_X, \phi_Y, a_X)$ и $F_Y(\phi_Y, \phi_X, a_Y)$. Величины несмещенных оценок дисперсий $\sigma_{X,k}^2$ и $\sigma_{Y,k}^2$ коэффициентов $a_{X,k}$ и $a_{Y,k}$ многочленов функций $F_X(\phi_X, \phi_Y, a_X)$ и $F_Y(\phi_Y, \phi_X, a_Y)$ вычисляются по формулам работы [32], приведенным в Приложении. Эти поправки обеспечивают нулевое смещение (нулевую систематическую ошибку) и возможные отрицательные значения величин γ_X и γ_Y [32, 33]. При этом отрицательные значения говорят о том, что несмещенные оценки не значимо отличны от нуля [32, 33]. Нахождение оценок дисперсии $\sigma_{\gamma_X}^2$ и $\sigma_{\gamma_Y}^2$ для величин γ_X и γ_Y по формулам в Приложении позволяет определить 95-процентные доверительные интервалы $[\gamma_X - 1.6\sigma_{\gamma_X}, \gamma_X + 1.8\sigma_{\gamma_X}]$ и $[\gamma_Y - 1.6\sigma_{\gamma_Y}, \gamma_Y + 1.8\sigma_{\gamma_Y}]$ [32] (здесь для удобства обозначим $\sigma_X = \sigma_{\gamma_X}$ и $\sigma_Y = \sigma_{\gamma_Y}$).

При выполнении условия $\gamma_X - 1.6\sigma_X > 0$ делается вывод о влиянии системы Y на систему X с вероятностью ошибки не более 0.05, а при выполнении условия $\gamma_Y - 1.6\sigma_Y > 0$ учитывается преобладающее влияние системы X на систему Y с той же вероятностью ошибки [32, 34]. При одновременном выполнении обоих условий делается вывод о наличии взаимного влияния двух систем друг на друга.

В связи с тем, что направление связи может быть определено только для экспериментальных данных, для которых значение индекса фазовой синхронизации ρ не превышает значение 0.6 [32], предварительно вычислялся индекс фазовой синхронизации [3]

$$\rho = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp(2\pi i(\phi_X(t + j\Delta t/N) - \phi_Y(t + j\Delta t/N))) \right| \quad (15)$$

в скользящем окне шириной Δt и сдвигом скользящего окна, равном интервалу дискретизации.

Вычисление мгновенных фаз $\phi_X(t)$ и $\phi_Y(t)$ проводилось с помощью синхросжатого вейвлетного преобразования [35], подробно описанного в нашей предыдущей работе [26] на основании нахождения гребней (частотных компонент сигнала) путем решения задачи условной оптимизации поиска среди всех кривых тех, которые максимизируют коэффициенты синхросжатого вейвлетного преобразования.

Для оценки статистической значимости вычисленных значений индекса фазовой синхронизации ρ и показателя асимметрии связи ΔMCR был применен статистический тест с созданием

суррогатных временных рядов на основе рекуррентностей [36]. Нулевая гипотеза заключалась в том, что сигналы $X(t)$ и $Y(t)$ имеют независимые рекуррентные структуры. Статистический тест включал вычисление 100 суррогатов $Y_{\text{surr}j}$ и $X_{\text{surr}j}$, $j = 1, \dots, 100$, вычисление показателей синхронизации ρ и асимметрии связи ΔMCR (обозначим их в общем виде $A_{\text{surr}j}$) для каждого суррогата и получение распределения значений A_{surr} , а затем нахождение статистики

$$Z = \left| \frac{A - \overline{A_{\text{surr}}}}{\sigma_{\text{surr}}} \right|, \quad (16)$$

где $\overline{A_{\text{surr}}}$ — среднее и σ_{surr} — стандартное отклонение. Нулевая гипотеза отвергалась на 95% уровне значимости в случае $Z > 1.96$, и значение (показателя синхронизации ρ или асимметрии связи ΔMCR) считалось статистически значимым [36].

2. Результаты

2.1. Применение методов нахождения характеристик направленной связи для модели осцилляторов ван дер Поля. В качестве модели были рассмотрены две однонаправленно связанные системы X и Y осцилляторов ван дер Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0.5(1 - x^2)\frac{dx}{dt} - \omega_X^2 x + \xi_1(t), \quad (17)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0.5(1 - y^2)\frac{dy}{dt} - \omega_Y^2 y + \mu\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) + \xi_2(t) \quad (18)$$

с частотами $\omega_X = 1.11$ и $\omega_Y = 0.89$, параметром связи μ и шумовыми компонентами $\xi_X(t)$ и $\xi_Y(t)$ в виде гауссовского белого шума с нулевым средним и автоковариационной функцией $\langle \xi_X(t)\xi_X(t') \rangle = D\delta(t - t')$, где $\delta(t - t')$ — дельта-функция Дирака и D — интенсивность шума.

Уравнения (17)–(18) были проинтегрированы с шагом 0.03 с и временем интегрирования 600 с, что соответствовало 20000 точкам.

Рис. 1 иллюстрирует влияние уровня шума на колебания осцилляторов, показатели фазовой синхронизации ρ и направления связи γ_1 , γ_2 и $\Delta\text{MCR}(X|Y)$ для двух однонаправленно связанных систем. Фазовые переменные x и y и траектории осцилляторов X и Y построены для параметра связи $\mu = 0.15$ при двух уровнях шума $D = 0.1$ (рис. 1, а–с) и $D = 0.7$ (рис. 1, d–f). Временные реализации, полученные при различных уровнях шума, показывают, что повышение интенсивности шума в большей степени искажает колебания осцилляторов, увеличивая разброс случайных траекторий вокруг периодических траекторий, соответствующих отсутствию шума.

Для вычисления значений $\Delta\text{MCR}(X|Y)$ параметры временной задержки $d = 10$ и размерности вложения $m = 7$ были определены методами поиска минимума функции взаимной информации [30] и минимума ближайших ложных соседей [29] соответственно. Пороговые значения ε_X и ε_Y были выбраны таким образом, чтобы иметь фиксированную плотность рекуррентности $RR = 0.1$ в обеих матрицах рекуррентности для системы X и системы Y [17, 18].

Для каждого значения силы связи μ в диапазоне от 0.05 до 0.21 были вычислены средние значения по 100 траекториям для равномерно распределенных начальных условий и соответствующие им стандартные отклонения для ρ и $\Delta\text{MCR}(X|Y)$. Для оценок показателей направления связи γ_X и γ_Y доверительные интервалы построены по формулам (19)–(23) в Приложении. Кривые $\rho(\mu)$, $\gamma_X(\mu)$ и $\gamma_Y(\mu)$, и $\Delta\text{MCR}(X|Y)(\mu)$ построены для двух уровней шума (интенсивность шума $D = 0.3$ соответствует кривым с круглыми точками и $D = 0.7$ соответствует кривым с квадратными точками). При увеличении силы связи значение индекса фазовой синхронизации

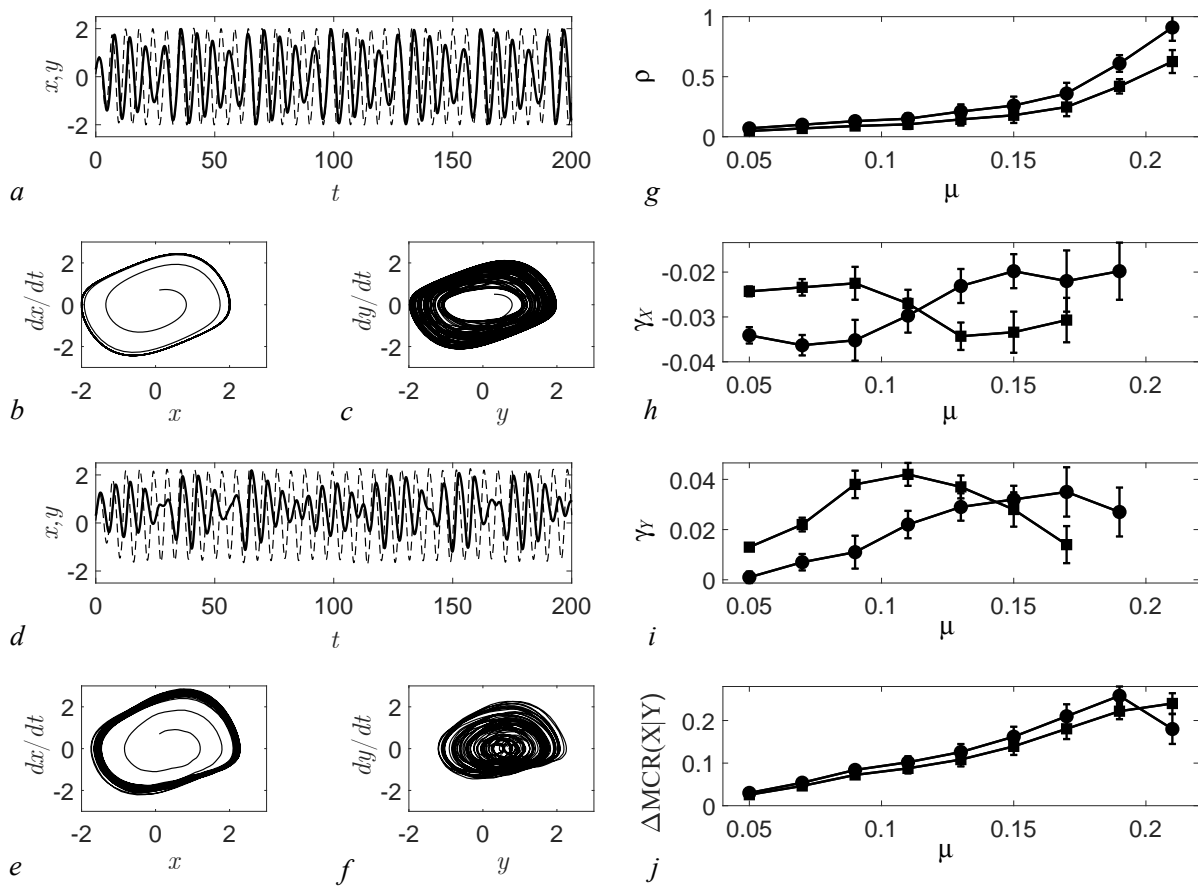


Рис. 1. Фазовые переменные x и y при $D = 0.1$ (a) и $D = 0.7$ (d) и траектории осцилляторов X и Y при $D = 0.1$ (b, c) и $D = 0.7$ (e, f) для параметра связи $\mu = 0.15$. Зависимости значений индекса фазовой синхронизации и показателей направленности связи от параметра связи μ для модели однонаправленно связанных систем генераторов ван дер Поля: $\rho(\mu)$ (g); $\gamma_X(\mu)$ (h); $\gamma_Y(\mu)$ (i); $\Delta\text{MCR}(X|Y)(\mu)$ (j). Кривые с круглыми точками построены при интенсивности шума $D = 0.3$, кривые с квадратными точками построены для $D = 0.7$

Fig. 1. Phase variables x and y at $D = 0.1$ (a) and $D = 0.7$ (d) and trajectories of oscillators X and Y at $D = 0.1$ (b, c) and $D = 0.7$ (e, f) for the coupling parameter $\mu = 0.15$. Dependencies of values of the index phase synchronization and coupling directionality indices from the coupling parameter μ for the model of unidirectionally coupled van der Pol generator systems: $\rho(\mu)$ (g); $\gamma_X(\mu)$ (h); $\gamma_Y(\mu)$ (i); $\Delta\text{MCR}(X|Y)(\mu)$ (j). Curves with round points are plotted for noise intensity $D = 0.3$, curves with square points are plotted for $D = 0.7$

увеличивается больше при более низком уровне шума (рис. 1, g). Для $\mu = 0.21$ $\rho = 0.65 \pm 0.09$ при интенсивности шума $D = 0.3$ и $\rho = 0.89 \pm 0.12$ при уровне шума $D = 0.7$.

Метод моделирования фазовой динамики позволяет достоверно определить направление связи двух однонаправленно связанных систем в рассматриваемой модели только при силе связи $\mu \leq 0.19$ при уровне шума $D = 0.3$ и при силе связи $\mu \leq 0.17$ при уровне шума $D = 0.7$ в связи с тем, что при больших значениях силы связи значение индекса фазовой синхронизации превышает пороговое значение $\rho_{\text{crit}} = 0.6$ [32]. При $\rho < \rho_{\text{crit}}$ значения характеристик направления связи удовлетворяют условиям $\gamma_X \pm 1.6\sigma_X < 0$ (рис. 1, h) и $\gamma_Y \pm 1.6\sigma_Y > 0$ (рис. 1, i), что соответствует известному влиянию системы X на систему Y с вероятностью ошибки не более 0.05 [32, 34].

В отличие от этого, метод выявления асимметрии связи между взаимодействующими системами на основе анализа совместных рекуррентностей позволяет определить направление связи в данной модели однонаправленно связанных генераторов ван дер Поля для всех анализируемых

значений параметра связи $0.05 \leq \mu \leq 0.21$. Для всех этих значений μ показатели асимметрии связи удовлетворяют условию $\Delta MCR(X|Y) > 0$ при интенсивности шума $D = 0.3$ и $D = 0.7$ (рис. 1, *j*), то есть асимметрия связи между системой X и системой Y сохраняется, и система X является ведущей, а система Y остается ведомой при повышении уровня шума и при достижении фазовой синхронизации. Указание на то, что показатели асимметрии связи, основанные на анализе рекуррентностей, правильно определяют направление связи до и во время фазовой синхронизации, согласуется с результатами работ [17, 39], в которых показано, что наступление фазовой синхронизации для модели двух неидентичных однонаправленно связанных систем Лоренца не изменяет асимметрию связи. К исчезновению асимметрии связи приводит обобщенная синхронизация, приводящая к $\Delta MCR(X|Y) = 0$ [39].

Известно, что при увеличении уровня шума становится труднее обнаружить асимметрию связи для очень малых значений силы связи, поскольку значения $MCR(X|Y)$ и $MCR(Y|X)$ практически одинаковы, поэтому чем выше уровень шума, тем сильнее должна быть сила связи для обнаружения асимметрии [17]. Тем не менее, даже при относительно высоких уровнях шума, асимметрия связи все еще может быть правильно обнаружена для относительно малых значений силы связи с помощью метода рекуррентностей [17].

2.2. Применение методов нахождения характеристик связи между физиологическими ритмами. Физиологические данные, использованные для анализа, подробно описаны и представлены на рис. 1 в статье [26]. Это одновременно зарегистрированные колебания артериального давления, дыхания и нейрональной активности ретикулярной формации продолговатого мозга для 10 крыс длиной каждой записи в 60 секунд до и в 60 секунд во время болевого воздействия с частотой дискретизации 10000 Гц и повторением 5 раз после 60-секундной релаксации.

В настоящей работе было проанализировано 30 пар безартефактных временных рядов, представляющих собой колебания дыхательного ритма (RES), выделенные кривые вариабельности интервалов нейрональной активности (NAV) и кривые вариабельности интервалов артериального давления (BPV). Эти кривые содержали последовательности временных интервалов между локальными максимумами исходных данных нейрональной активности и артериального давления. Полученные кривые были аппроксимированы кубическими сплайнами с передискретизацией до частоты 1000 Гц и удалением нелинейных трендов.

Для выделения компонент вариабельности интервалов нейрональной активности и артериального давления с основными частотами, близкими к частоте дыхательного ритма, использовалась полосовая фильтрация временных рядов BPV и NAV, удаляющая частоты менее 1 Гц и более 2.5 Гц. При определении значений показателей направленности связей мы использовали пары нормализованных временных рядов, чтобы иметь нулевое среднее значение и единичное стандартное отклонение.

Для вычисления значений ΔMCR мы использовали значения размерности вложения m и лага d , определенные методами поиска минимума ближайших ложных соседей [29] и минимума функции взаимной информации [30] соответственно. Сначала оптимальные параметры m и d были определены для каждого временного ряда NAV, BPV, RES. При этом значения $m_1 > m_2 > m_3$, $d_3 > d_2 > d_1$ были получены для всех 30 рядов. В среднем эти значения равны $m_1 = 5$, $d = 15$ для NAV, $m_2 = 4$, $d_2 = 17$ для BPV, $m_3 = 3$, $d_3 = 20$ для RES.

Матрицы рекуррентностей, в соответствии с формулами (3), (4), вычислялись при указанных значениях m_1 , m_2 , m_3 , d_1 , d_2 , d_3 , а матрицы совместных рекуррентностей, в соответствии с формулой (5), вычислялись при значениях $m = \max m_1, m_2, m_3 = 5$ и $d = \min d_1, d_2, d_3 = 15$.

Пороговые значения ϵ_X и ϵ_Y были выбраны $\epsilon_X = \epsilon_Y = \epsilon = 0.05$. Для проверки мы применили расчеты для различных значений ϵ в диапазоне от 0.01 до 0.3 и для различных значений

m в диапазоне от 3 до 5 и обнаружили, что результаты вычисления ΔMCR нечувствительны по отношению к выбору этих значений.

На рис. 2 представлены примеры вычисления разности фаз временных рядов NAV и BPV ($\Delta\phi_{NAV-BPV}$) (рис. 2, *a*), временных рядов BPV и RES ($\Delta\phi_{BPV-RES}$) (рис. 2, *b*) и функции связи $F_{BPV}(\phi_{NAV}, \phi_{BPV})/\tau$, $F_{NAV}(\phi_{NAV}, \phi_{BPV})/\tau$, $F_{RES}(\phi_{RES}, \phi_{BPV})/\tau$, $F_{BPV}(\phi_{BPV}, \phi_{RES})/\tau$ (рис. 2, *c-f*), значения которых разделены на величину $\tau = 0.5$ (с), равную меньшему из характерных периодов колебаний для двух анализируемых сигналов.

Рис. 2, *e, f* иллюстрируют вариант взаимосвязи между колебаниями дыхания и variability интервалов артериального давления. Функция $F_{BPV}(\phi_{BPV}, \phi_{RES})/\tau$ характеризуется большим диапазоном изменений значений (рис. 2, *f*) по сравнению с функцией $F_{RES}(\phi_{BPV}, \phi_{RES})/\tau$, флуктуирующей вокруг круговой частоты $\omega = 2\pi f_{BPV} \approx 12.1$ (рис. 2, *e*). Для другой пары временных рядов NAV и BPV характерен меньший диапазон флуктуаций функции связи $F_{BPV}(\phi_{BPV}, \phi_{NAV})/\tau$ вокруг круговой частоты $\omega = 2\pi f_{BPV} \approx 12.5$ (рис. 2, *c*) по сравнению с функцией $F_{NAV}(\phi_{BPV}, \phi_{NAV})/\tau$ (рис. 2, *d*).

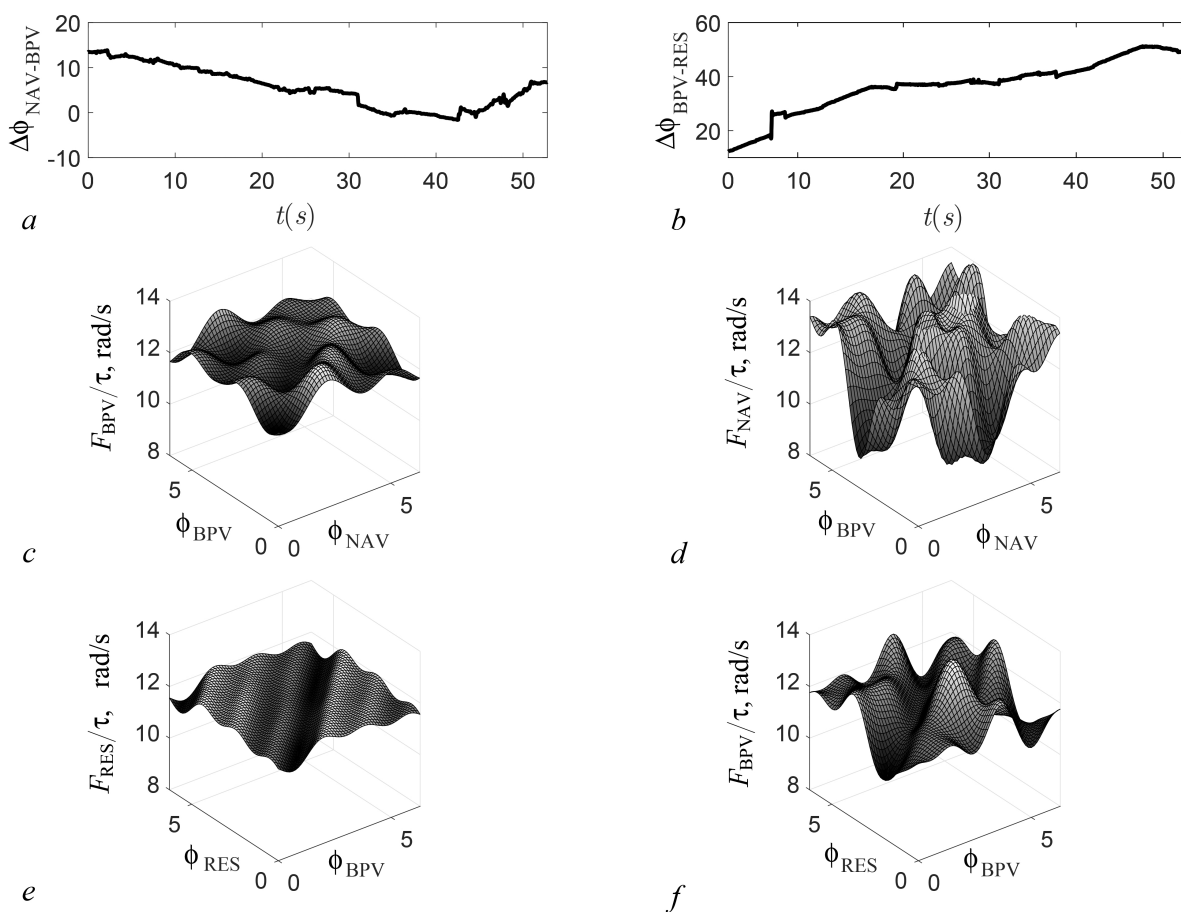


Рис. 2. Примеры вычисления разности фаз временных рядов NAV и BPV, временных рядов BPV и RES и функции связи. *a* — $\Delta\phi_{NAV-BPV}$; *b* — $\Delta\phi_{BPV-RES}$; *c* — $F_{BPV}(\phi_{NAV}, \phi_{BPV})/\tau$; *d* — $F_{NAV}(\phi_{NAV}, \phi_{BPV})/\tau$; *e* — $F_{RES}(\phi_{BPV}, \phi_{RES})/\tau$; *f* — $F_{BPV}(\phi_{BPV}, \phi_{RES})/\tau$

Fig. 2. Examples of calculating the phase difference of time series NAV and BPV and time series BPV and RES and the coupling functions. *a* — $\Delta\phi_{NAV-BPV}$; *b* — $\Delta\phi_{BPV-RES}$; *c* — $F_{BPV}(\phi_{NAV}, \phi_{BPV})/\tau$; *d* — $F_{NAV}(\phi_{NAV}, \phi_{BPV})/\tau$; *e* — $F_{RES}(\phi_{BPV}, \phi_{RES})/\tau$; *f* — $F_{BPV}(\phi_{BPV}, \phi_{RES})/\tau$

Значения индексов фазовой синхронизации между вариабельностью нейрональной активности и вариабельностью артериального давления, а также для синхронизации между вариабельностью артериального давления и ритмом дыхания в данных примерах меньше критического значения 0.6 ($\rho_{BPV-NAV} = 0.24$, $\rho_{RES-BPV} = 0.27$), что позволяет определить характеристики связи между анализируемыми временными рядами.

Оценки $\gamma_{NAV} - 1.6\sigma_{NAV} = 0.13$ и $\gamma_{BPV} - 1.6\sigma_{BPV} = -0.08$ для одной пары временных рядов свидетельствуют о влиянии сердечно-сосудистой системы на нервную, в то время как оценки $\gamma_{BPV} - 1.6\sigma_{BPV} = 0.19$ и $\gamma_{RES} - 1.6\sigma_{RES} = -0.09$ для другой пары временных рядов позволяют сделать вывод о значительном влиянии ритма дыхания на вариабельность интервалов артериального давления в данном примере.

До болевого воздействия фазовая синхронизация отсутствовала в 100% анализируемых временных рядов между флуктуациями дыхательного ритма и вариабельностью артериального давления, между вариабельностью нейрональной активности и вариабельностью артериального давления, а также между дыхательным ритмом и вариабельностью нейрональной активности. Усредненные значения индекса фазовой синхронизации удовлетворяли условию $\rho < 0.06$ и были, соответственно, равны $\rho_{BPV-NAV} = 0.23 \pm 0.06$, $\rho_{RES-BPV} = 0.31 \pm 0.07$, $\rho_{NAV-RES} = 0.19 \pm 0.05$.

Болевое воздействие привело к возникновению фазовой синхронизации между временными рядами NAV и BPV в 43% данных (13 из 30), в 36% (11 из 30) между временными рядами RES и BPV и в 33% (10 из 30) между временными рядами NAV и RES. Значения индекса фазовой синхронизации для этих данных удовлетворяли условию $\rho > 0.06$ и были равны $\rho_{BPV-NAV} = 0.78 \pm 0.12$, $\rho_{RES-BPV} = 0.81 \pm 0.14$, $\rho_{NAV-RES} = 0.76 \pm 0.11$.

В связи с этим направление связи определялось только для временных рядов, для которых фазовая синхронизация отсутствовала и индекс синхронизации удовлетворял условию $\rho < 0.6$. Усредненные значения индекса фазовой синхронизации в этом случае равны соответственно $\rho_{BPV-NAV} = 0.18 \pm 0.03$ для 57% данных (17 из 30), $\rho_{RES-BPV} = 0.22 \pm 0.05$ для 64% данных (19 из 30) и $\rho_{NAV-RES} = 0.26 \pm 0.06$ для 67% данных (20 из 30).

В Таблице представлены усредненные характеристики взаимосвязи $\Delta MCR(BPV|NAV)$, $\Delta MCR(RES|BPV)$, $\Delta MCR(NAV|RES)$, $\gamma_{NAV} - 1.6\sigma_{NAV}$, $\gamma_{BPV} - 1.6\sigma_{BPV}$, $\gamma_{RES} - 1.6\sigma_{RES}$ до и во время болевого воздействия.

Эти усредненные показатели вычислены для 28 пар временных рядов до воздействия и 16 пар временных рядов во время воздействия, для которых выполнялось условие $\rho < 0.6$ и для которых были получены статистически значимые значения показателя асимметрии связи ΔMCR после применения статистического теста с созданием суррогатных временных рядов.

Оценка погрешности в Таблице для ΔMCR соответствует среднеквадратическому отклонению по проанализированным временным рядам, а оценки погрешностей для данных с применением метода фазового моделирования соответствуют средним значениям оценок σ_{NAV} , σ_{BPV} , σ_{RES} , полученным по формулам из работы [33], указанным в Приложении.

Асимметрия связи до болевого воздействия выявлена между временными рядами NAV и BPV для 77% данных (22 из 28) с помощью анализа совместных рекуррентностей. Усредненное значение показателя асимметрии связи $\Delta MCR(BPV|NAV) = 0.12 \pm 0.03$ свидетельствует о преобладающем влиянии в этих данных вариабельности артериального давления на вариабельность нейрональной активности.

С помощью моделирования фазовой динамики для 72% данных (20 из 28) NAV и BPV получены оценки $\gamma_{NAV} - 1.6\sigma_{NAV} = 0.11 \pm 0.03$ и $\gamma_{BPV} - 1.6\sigma_{BPV} = -0.06 \pm 0.02$, также указывающие на однонаправленное влияние вариабельности артериального давления на вариабельность нейрональной активности в этих данных с вероятностью ошибки не более 0.05.

Для остальных анализируемых данных связь между временными рядами NAV и BPV была определена как симметричная. Это связано с тем, что различия в показателях $MCR(NAV|BPV)$

Таблица. Усредненные характеристики взаимосвязи $\Delta\text{MCR}(\text{BPV}|\text{NAV})$, $\Delta\text{MCR}(\text{RES}|\text{BPV})$, $\Delta\text{MCR}(\text{NAV}|\text{RES})$, $\gamma_{\text{NAV}} - 1.6\sigma_{\text{NAV}}$, $\gamma_{\text{BPV}} - 1.6\sigma_{\text{BPV}}$, $\gamma_{\text{RES}} - 1.6\sigma_{\text{RES}}$ до и во время болевого воздействия

Table. Averaged coupling characteristics $\Delta\text{MCR}(\text{BPV}|\text{NAV})$, $\Delta\text{MCR}(\text{RES}|\text{BPV})$, $\Delta\text{MCR}(\text{NAV}|\text{RES})$, $\gamma_{\text{NAV}} - 1.6\sigma_{\text{NAV}}$, $\gamma_{\text{BPV}} - 1.6\sigma_{\text{BPV}}$, $\gamma_{\text{RES}} - 1.6\sigma_{\text{RES}}$ before and during pain exposure

	до воздействия	до воздействия	при воздействии	при воздействии
	BPV→NAV	BPV – NAV	BPV→NAV	BPV – NAV
$\Delta\text{MCR}(\text{BPV} \text{NAV})$	0.12 ± 0.03	0.03 ± 0.01	0.17 ± 0.04	0.05 ± 0.02
$\gamma_{\text{NAV}} - 1.6\sigma_{\text{NAV}}$	0.11 ± 0.03	0.08 ± 0.02	0.15 ± 0.04	0.07 ± 0.02
$\gamma_{\text{BPV}} - 1.6\sigma_{\text{BPV}}$	< 0	0.07 ± 0.02	< 0	0.08 ± 0.02
	RES→BPV	RES – BPV	RES→BPV	RES – BPV
$\Delta\text{MCR}(\text{RES} \text{BPV})$	0.16 ± 0.04	0.04 ± 0.01	0.21 ± 0.04	0.06 ± 0.02
$\gamma_{\text{BPV}} - 1.6\sigma_{\text{BPV}}$	0.17 ± 0.05	0.09 ± 0.02	0.13 ± 0.03	0.12 ± 0.03
$\gamma_{\text{RES}} - 1.6\sigma_{\text{RES}}$	< 0	0.06 ± 0.02	< 0	0.13 ± 0.04
	RES→NAV	RES – NAV	RES→NAV	RES – NAV
$\Delta\text{MCR}(\text{NAV} \text{RES})$	-0.18 ± 0.05	0.05 ± 0.01	-0.13 ± 0.04	0.03 ± 0.01
$\gamma_{\text{RES}} - 1.6\sigma_{\text{RES}}$	< 0	0.12 ± 0.03	< 0	0.09 ± 0.02
$\gamma_{\text{NAV}} - 1.6\sigma_{\text{NAV}}$	0.16 ± 0.05	0.13 ± 0.03	0.21 ± 0.06	0.11 ± 0.03

и $\text{MCR}(\text{BPV}|\text{NAV})$ незначительны и значение показателя асимметрии связи близко к нулю: $\Delta\text{MCR}(\text{BPV}|\text{NAV}) = 0.03 \pm 0.01$, а обе оценки показателей направления связи положительны: $\gamma_{\text{NAV}} - 1.6\sigma_{\text{NAV}} = 0.08 \pm 0.02$, $\gamma_{\text{BPV}} - 1.6\sigma_{\text{BPV}} = 0.07 \pm 0.02$. Таким образом, результаты применения обоих методов позволяют сделать вывод о взаимозависимости ритмов нервной и сердечно-сосудистой систем не более чем в 23% анализируемых данных.

Однонаправленная связь до болевого воздействия также определена между временными рядами RES и BPV для 76% данных (21 из 28) с помощью анализа совместных рекуррентностей (усредненное значение показателя асимметрии связи $\Delta\text{MCR}(\text{RES}|\text{BPV}) = 0.16 \pm 0.04$) и для 72% данных (20 из 28) с помощью моделирования фазовой динамики (оценки показателей связей $\gamma_{\text{BPV}} - 1.6\sigma_{\text{BPV}} = 0.17 \pm 0.05$, $\gamma_{\text{RES}} - 1.6\sigma_{\text{RES}} = -0.11 \pm 0.04$). Эти результаты свидетельствуют о влиянии флуктуаций дыхательного ритма на вариабельность артериального давления в этих данных.

Для остальных временных рядов RES и BPV связь является симметричной, поскольку усредненное значение показателя асимметрии связи $\Delta\text{MCR}(\text{RES}|\text{BPV}) = 0.04 \pm 0.01$ и обе оценки показателей направления связи положительны: $\gamma_{\text{BPV}} - 1.6\sigma_{\text{BPV}} = 0.09 \pm 0.02$, $\gamma_{\text{RES}} - 1.6\sigma_{\text{RES}} = 0.06 \pm 0.02$. Для этих данных характерно взаимозависимое влияние ритма дыхательной системы и флуктуаций артериального давления.

Для временных рядов NAV и RES до болевого воздействия однонаправленная связь обнаружена в 65% данных (18 из 28) с помощью анализа совместных рекуррентностей ($\Delta\text{MCR}(\text{NAV}|\text{RES}) = -0.18 \pm 0.05$) и для 61% данных (17 из 28) с помощью моделирования фазовой динамики ($\gamma_{\text{RES}} - 1.6\sigma_{\text{RES}} = -0.14 \pm 0.04$, $\gamma_{\text{NAV}} - 1.6\sigma_{\text{NAV}} = 0.16 \pm 0.05$). Такая связь имеет отношение к влиянию флуктуаций дыхательного ритма на вариабельность нейрональной активности. Для остальных анализируемых данных связь между временными рядами NAV и RES является симметричной ($\Delta\text{MCR}(\text{NAV}|\text{RES}) = 0.05 \pm 0.01$ и $\gamma_{\text{RES}} - 1.6\sigma_{\text{RES}} = 0.12 \pm 0.03$,

$\gamma_{NAV} - 1.6\sigma_{NAV} = 0.13 \pm 0.03$). В этих случаях ритмы нервной и дыхательной систем оказываются взаимозависимыми.

Во время болевого воздействия в серии данных, в которых фазовая синхронизация отсутствовала, также в большинстве случаев выявлена однонаправленная связь с тем же направлением связи между проанализированными временными рядами, что и до воздействия, то есть качественное изменение направления связи не обнаружено. Преобладающее влияние BPV→NAV выявлено для 75% анализируемых данных (12 из 16), воздействие RES→BPV обнаружено для 81% данных (13 из 16), влияние RES→NAV оказалось характерным для 63% данных (10 из 16) с помощью анализа совместных рекуррентностей и для 69% (11 из 16), 63% (12 из 16), 56% (9 из 16) анализируемых данных с помощью моделирования фазовой динамики.

Таким образом, оценки вычисленных показателей направленности связей между экспериментально полученными слабозашумленными временными рядами с узкополосной фильтрацией для выделения компонент variability интервалов нейрональной активности и артериального давления с основными частотами, близкими к частоте дыхательного ритма, позволила определить различные варианты взаимосвязей. При этом влияние флуктуаций дыхательного ритма на variability нейрональной активности и артериальное давление и влияние variability артериального давления на нейронную активность ретикулярной формации продолговатого мозга оказались выявлены для большего числа анализируемых данных.

Преимущественное влияние ритма дыхания на variability артериального давления согласуется с данными, описанными в работах, где указывается, что дыхательный ритм часто контролирует ритм сердечно-сосудистой системы [7,8,37]. Отсутствие выраженного влияния нервной системы в большинстве анализируемых данных может быть связано с анестезией, снижающей влияние болевой чувствительности на дыхательную и сердечно-сосудистую системы [4,36].

Заключение

Цель исследования состояла в применении двух методов нелинейной динамики, связанных с моделированием фазовой динамики слабосвязанных и слабозашумленных периодических процессов и с вычислением условных вероятностей рекуррентностей временных рядов, для выявления характеристик взаимосвязи между временными рядами, извлеченными из физиологических ритмов.

Анализируемые временные ряды соответствовали флуктуациям дыхательного ритма, кри-вым variability артериального давления и variability интервалов нейрональной активности продолговатого мозга крыс.

Предварительное применение этих методов к хорошо изученной модели двух взаимодействующих осцилляторов с известными свойствами фазовой синхронизации для проверки устойчивости методов к шуму подтвердило правильное определение направления связи обоими методами при слабом зашумлении при относительно больших коэффициентах связи и снижение возможности выявления направления связи с помощью метода фазового моделирования при нарастании зашумления, но возможность правильного определения направления связи с помощью анализа совместных рекуррентностей.

Результаты применения двух методов для вычисления оценок показателей направления связей между экспериментально полученными слабозашумленными временными рядами с узкополосной фильтрацией и с основными частотами, близкими к частоте дыхания, оказались достаточно согласованными. В большинстве анализируемых данных с низким коэффициентом фазовой синхронизации обнаружена однонаправленная связь, в которой флуктуации дыхательного ритма влияют на variability нейрональной активности и артериальное давление, а variability артериального давления влияет на нейронную активность ретикулярной формации продолговатого мозга.

1. Вычисление несмещенной оценки γ_X величины c_X^2 , оценки дисперсии $\sigma_{\gamma_X}^2$ для γ_X и оценки дисперсии шума $\sigma_{\varepsilon_X}^2$ для сигнала x и аналогичные вычисления для сигнала y выполняются в соответствии с формулами, приведенными в [32]:

$$\gamma_X = c_X^2 - r_x = c_X^2 - \sum_k n_k^2 \sigma_{X,k}^2, \quad (19)$$

где оценка $\sigma_{X,k}^2$ дисперсии коэффициентов $a_{X,k}$ многочленов функции $F_X(\phi_X, \phi_Y, a_X)$ определяется

$$\sigma_{X,k}^2 = \frac{2\sigma_{\varepsilon_X}^2}{N} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{b-1} (1 - j/b) \cos [(m_k a_{X,1} + n_k a_{Y,1})j/b] \exp [-(m_k^2 \sigma_{\varepsilon_X}^2 + n_k^2 \sigma_{\varepsilon_Y}^2)j/2b] \right], \quad (20)$$

где $k = 1, \dots, L$, где L – число коэффициентов многочлена, $b = \tau/\Delta t$, оценка $\sigma_{\varepsilon_X}^2$ дисперсии шума:

$$\sigma_{\varepsilon_X}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left[[\phi_X(t_i + \tau) - \phi_X(t_i)] - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\phi_X(t_i + \tau) - \phi_X(t_i)] \right]^2. \quad (21)$$

2. Оценка дисперсии $\sigma_{\gamma_X}^2$ для величины γ_X :

$$\sigma_{\gamma_X}^2 = \sum_k n_k^4 \sigma_{a_{X,k}^2}^2, \quad (22)$$

если $\gamma_X > 5 \sum_k n_k^4 \sigma_{a_{X,k}^2}^2$,

$$\sigma_{\gamma_X}^2 = 0.5 \sum_k n_k^4 \sigma_{a_{X,k}^2}^2, \quad (23)$$

если $\gamma_X \leq \sum_k n_k^4 \sigma_{a_{X,k}^2}^2$, где

$$\sigma_{a_{X,k}^2}^2 = 2\sigma_{X,k}^4 + 4[a_{X,k}^2 - \sigma_{X,k}^2]\sigma_{X,k}^2, \quad (24)$$

если $a_{X,k}^2 - \sigma_{X,k}^2 \geq 0$,

$$\sigma_{a_{X,k}^2}^2 = 2\sigma_{X,k}^4, \quad (25)$$

если $a_{X,k}^2 - \sigma_{X,k}^2 < 0$.

Список литературы

1. Kiselev A. R., Mironov S. A., Karavaev A. S., Kulminskiy D. D., Skazkina V. V., Borovkova E. I., Shvartz V. A., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. A comprehensive assessment of cardiovascular autonomic control using photoplethysmograms recorded from the earlobe and fingers // *Physiol Meas.* 2016. Vol. 37, iss. 4. P. 580–595. DOI: 10.1088/0967-3334/37/4/580.
2. Хорев В. С., Ишбулатов Ю. М., Лапшева Е. Е., Киселев А. Р., Гриднев В. И., Безручко Б. П., Бутенко А. А., Пономаренко В. И., Караваяев А. С. Диагностика направленной связи контуров регуляции кровообращения по временным рядам математической модели сердечно-сосудистой системы человека // *Информационно-управляющие системы.* 2018. Т. 1, № 92. С. 42–48. DOI: 10.15217/issn1684-8853.2018.1.42.

3. *Rosenblum M. G., Cimponeriu L., Bezerianos A., Patzak A., Mrowka R.* Identification of coupling direction: application to cardiorespiratory interaction // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65, iss. 4. P. 041909. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041909.
4. *Shiogai Y., Stefanovska A., McClintock P. V. E.* Nonlinear dynamics of cardiovascular ageing // *Phys. Rep.* 2010. Vol. 488, iss. 2–3. P. 51–110. DOI: 10.1016/j.physrep.2009.12.003.
5. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64, iss. 4. P. 045202. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.045202.
6. *Bahraminasab A., Ghasemi F., Stefanovska A., McClintock P. V., Kantz H.* Direction of coupling from phases of interacting oscillators: a permutation information approach // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 100, iss. 8. P. 084101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.084101.
7. *Mrowka R., Cimponeriu L., Patzak A., Rosenblum M. G.* Directionality of coupling of physiological subsystems: age-related changes of cardiorespiratory interaction during different sleep stages in babies // *Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol.* 2003. Vol. 285, iss. 6. P. R1395–R1401. DOI: 10.1152/ajpregu.00373.2003.
8. *Ocon A. J., Medow M. S., Taneja I., Stewart J. M.* Respiration drives phase synchronization between blood pressure and RR interval following loss of cardiovagal baroreflex during vasovagal syncope // *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 2011. Vol. 300, iss. 2. P. H527–H540. DOI: 10.1152/ajpheart.00257.2010.
9. *Dick T. E., Hsieh Y. H., Dhingra R. R., Baekey D. M., Galán R. F., Wehrwein E., Morris K. F.* Cardiorespiratory coupling: common rhythms in cardiac, sympathetic, and respiratory activities // *Prog. Brain Res.* 2014. Vol. 209. P. 191–205. DOI: 10.1016/B978-0-444-63274-6.00010-2.
10. *Hlavackova-Schindler K., Palus M., Vejmelka M., Bhattacharya J.* Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis // *Phys. Rep.* 2007. Vol. 441, iss. 1. P. 1–46. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.12.004.
11. *Smirnov D. A.* Quantifying causal couplings via dynamical effects: A unifying perspective // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 90, iss. 6. P. 062921. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.062921.
12. *Faes L., Nollo G., Chon K.* Assessment of Granger causality by nonlinear model identification: application to short-term cardiovascular variability // *Ann. Biomed. Eng.* 2008. Vol. 36. P. 381–395. DOI: 10.1007/s10439-008-9441-z.
13. *Schreiber T.* Measuring information transfer // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, iss. 2. P. 461–464. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.461.
14. *Baccala L. A., Sameshima K.* Partial directed coherence: A new concept in neural structure determination // *Biol. Cybern.* 2001. Vol. 84, iss. 6. P. 463–474. DOI: 10.1007/PL00007990.
15. *Навроцкая Е. В., Смирнов Д. А., Безручко Б. П.* Восстановление структуры связей в ансамбле осцилляторов по записям колебаний через моделирование фазовой динамики // *Известия вузов. ПНД.* 2019. Т. 27, № 1. С. 41–52. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-1-41-52.
16. *Сидак Е. В., Смирнов Д. А., Безручко Б. П.* Оценки времени запаздывания связи между осцилляторами по временным реализациям фаз колебаний при различных свойствах фазовой динамики // *Радиотехника и электроника.* 2017. Т. 62, № 3. С. 248–258. DOI: 10.7868/S0033849417030196.
17. *Romano M. C., Thiel M., Kurths J., Grebogi C.* Estimation of the direction of the coupling by conditional probabilities of recurrence // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76, iss. 3. P. 036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.036211.
18. *Marwan N., Zou Y., Wessel N., Riedl M., Kurths J.* Estimating coupling directions in the cardiorespiratory system using recurrence properties // *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2013. Vol. 371. P. 20110624. DOI: 10.1098/rsta.2011.0624.
19. *Pereda E., Quiroga R. Q., Bhattacharya J.* Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals // *Prog. Neurobiol.* 2005. Vol. 77, iss. 1–2. P. 1–37. DOI: 10.1016/j.pneurobio.2005.10.003.

20. Sysoeva M. V., Sitnikova E., Sysoev I. V., Bezruchko B. P., van Luijtelaaar G. Application of adaptive nonlinear Granger causality: Disclosing network changes before and after absence seizure onset in a genetic rat model // *J. Neurosci. Methods*. 2014. Vol. 226. P. 33–41. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2014.01.028.
21. Сысоева М. В., Кузнецова Г. Д., Сысоев И. В. Моделирование сигналов электроэнцефалограмм крыс при абсансной эпилепсии в приложении к анализу связанности между отделами мозга // *Биофизика*. 2016. Т. 61, № 4. С. 782–792.
22. Smirnov D. A., Barnikol U. B., Barnikol T. T., Bezruchko B. P., Hauptmann C., Buhrle C., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Tass P. A. The generation of Parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis // *Europhysics Letters*. 2008. Vol. 83, iss. 2. P. 20003. DOI: 10.1209/0295-5075/83/20003.
23. Сысоева М. В., Сысоев И. В. Математическое моделирование динамики энцефалограммы во время эпилептического припадка // *Письма в ЖТФ*. 2012. Т. 38, № 3. С. 103–110.
24. Mokhov I. I., Smirnov D. A. El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices // *Geophys. Res. Lett.* 2006. Vol. 33, iss. 3. P. L03708. DOI: 10.1029/2005GL024557.
25. Мохов И. И., Смирнов Д. А., Наконечный П. И., Козленко С. С., Куртс Ю. Взаимосвязь явлений Эль-Ниньо / Южное колебание и индийского муссона // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2012. Т. 48, № 1. С. 56–66.
26. Дик О. Е. Анализ синхронизации между временными рядами, полученными от анестезированных крыс во время болевого воздействия // *Известия вузов. ПНД*. 2024. Т. 32, № 2. С. 209–222. DOI: 10.18500/0869-6632-003093.
27. Marwan N., Romano M. C., Thiel M., Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex systems // *Phys. Rep.* 2007. Vol. 438, iss. 5–6. P. 237–329. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001.
28. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick 1980. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 898 / ed. by Rand D., Young L. S. Berlin: Springer, 1981. P. 366–381. DOI: 10.1007/BFb0091924.
29. Kennel M. B., Brown R., Abarbanel H. D. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 45, iss. 6. P. 3403–3411. DOI: 10.1103/physreva.45.3403.
30. Fraser A. M., Swinney H. L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information // *Phys. Rev. A*. 1986. Vol. 33, iss. 2. P. 1134–1140. DOI: 10.1103/physreva.33.1134.
31. Kurths J., Romano M. C., Thiel M., Osipov G. V., Ivanchenko M. V., Kiss I. Z., Hudson J. L. Synchronization analysis of coupled noncoherent oscillators // *Nonlinear Dyn.* 2006. Vol. 44. P. 135–149. DOI: 10.1007/s11071-006-1957-x.
32. Smirnov D. A., Bezruchko B. P. Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68. P. 046209. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.046209.
33. Смирнов Д. А. Диагностика слабой связанности между автоколебательными системами по коротким временным рядам: метод и приложения // *Радиотехника и электроника*. 2006. Т. 51, № 5. С. 569–579.
34. Смирнов Д. А., Бодров М. Б., Безручко Б. П. Оценка связанности между осцилляторами по временным рядам путем моделирования фазовой динамики: пределы применимости метода // *Известия вузов. ПНД*. 2004. Т. 12, № 6. С. 79–92. DOI: 10.18500/0869-6632-2004-12-6-79-92.
35. Daubechies I., Lu J., Wu H. T. Synchrosqueezed wavelet transforms: An empirical mode decomposition-like tool // *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 2011. Vol. 30, iss. 2. P. 243–261. DOI: 10.1016/j.acha.2010.08.002.
36. Thiel M., Romano M. C., Kurths J., Rolfs M., Kliegl R. Generating surrogates from recurrences //

Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci. 2008. Vol. 366, iss. 1865. P. 545–557. DOI: 10.1098/rsta.2007.2109.

37. *Stefanovska A., Haken H., McClintock P.V.E., Hozic M., Bajrovic F., Ribaric S.* Reversible transitions between synchronization states of the cardiorespiratory system // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. P. 4831–4834. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.4831.
38. *Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Bespyatov A.B., Bodrov M.B., Gridnev V.I.* Deriving main rhythms of the human cardiovascular system from the heartbeat time series and detecting their synchronization // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2005. Vol. 23, iss. 4. P. 1429–1438. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.06.041.
39. *Dick O.E., Glazov A.L.* Revealing the coupling directionality and synchronization between time series from physiological data by analysis of joint recurrences // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2023. Vol. 173. P. 113768. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113768.

References

1. Kiselev AR, Mironov SA, Karavaev AS, Kulminskiy DD, Skazkina VV, Borovkova EI, Shvartz VA, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. A comprehensive assessment of cardiovascular autonomic control using photoplethysmograms recorded from the earlobe and fingers. *Physiol. Meas.* 2016;37(4):580–595. DOI: 10.1088/0967-3334/37/4/580.
2. Khorev VS, Ishbulatov JM, Lapsheva EE, Kiselev AR, Gridnev VI, Bezruchko BP, Butenko AA, Ponomarenko VI, Karavaev AS. Diagnostics of directional coupling between blood circulation regulation loops using analysis of time series of mathematical model of human cardiovascular system. *Information and Control Systems.* 2018;1:42–48. DOI: 10.15217/issn1684-8853.2018.1.42.
3. Rosenblum MG, Cimponeriu L, Bezerianos A, Patzak A, Mrowka R. Identification of coupling direction: application to cardiorespiratory interaction. *Phys. Rev. E.* 2002;65(4):041909. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041909.
4. Shiogai Y, Stefanovska A, McClintock PVE. Nonlinear dynamics of cardiovascular ageing. *Phys. Rep.* 2010;488(2–3):51–110. DOI: 10.1016/j.physrep.2009.12.003.
5. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S. Detecting direction of coupling in interacting oscillators. *Phys. Rev. E.* 2001;64(4):045202. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.045202.
6. Bahraminasab A, Ghasemi F, Stefanovska A, McClintock PV, Kantz H. Direction of coupling from phases of interacting oscillators: a permutation information approach. *Phys. Rev. Lett.* 2008;100(8):084101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.084101.
7. Mrowka R, Cimponeriu L, Patzak A, Rosenblum MG. Directionality of coupling of physiological subsystems: age-related changes of cardiorespiratory interaction during different sleep stages in babies. *Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol.* 2003;285(6):R1395–R1401. DOI: 10.1152/ajpregu.00373.2003.
8. Ocon AJ, Medow MS, Taneja I, Stewart JM. Respiration drives phase synchronization between blood pressure and RR interval following loss of cardiovagal baroreflex during vasovagal syncope. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 2011;300(2):H527–H540. DOI: 10.1152/ajpheart.00257.2010.
9. Dick TE, Hsieh YH, Dhingra RR, Baekey DM, Galán RF, Wehrwein E, Morris KF. Cardiorespiratory coupling: common rhythms in cardiac, sympathetic, and respiratory activities. *Prog Brain Res.* 2014;209:191–205. DOI: 10.1016/B978-0-444-63274-6.00010-2.
10. Hlavackova-Schindler K, Palus M, Vejmelka M, Bhattacharya J. Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis. *Phys. Rep.* 2007;441(1):1–46. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.12.004.
11. Smirnov DA. Quantifying causal couplings via dynamical effects: A unifying perspective. *Phys. Rev. E.* 2014;90(6):062921. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.062921.

Дик О. Е.

12. Faes L, Nollo G, Chon K. Assessment of Granger causality by nonlinear model identification: application to short-term cardiovascular variability. *Ann. Biomed. Eng.* 2008;36:381–395. DOI: 10.1007/s10439-008-9441-z.
13. Schreiber T. Measuring information transfer. *Phys. Rev. Lett.* 2000;85(2):461–464. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.461.
14. Baccala LA, Sameshima K. Partial directed coherence: A new concept in neural structure determination. *Biol. Cybern.* 2001;84(6):463–474. DOI: 10.1007/PL00007990.
15. Navrotskaya EV, Smirnov DA, Bezruchko BP. Reconstruction of the structure of connections in an ensemble of oscillators from recordings of oscillations through modeling of phase dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2019;27(1):41–52. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-1-41-52.
16. Sidak EV, Smirnov DA, Bezruchko BP. Estimation of the time delay of coupling between oscillators from time realizations of oscillation phases for different properties of phase dynamics. *Journal of Communications Technology and Electronics.* 2017;62(3):241–250. DOI: 10.1134/S1064226917030196.
17. Romano MC, Thiel M, Kurths J, Grebogi C. Estimation of the direction of the coupling by conditional probabilities of recurrence. *Phys. Rev. E.* 2007;76(3):036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.036211.
18. Marwan N, Zou Y, Wessel N, Riedl M, Kurths J. Estimating coupling directions in the cardio-respiratory system using recurrence properties. *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2013;371:20110624. DOI: 10.1098/rsta.2011.0624.
19. Pereda E, Quiroga RQ, Bhattacharya J. Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals. *Prog. Neurobiol.* 2005;77(1–2):1–37. DOI: 10.1016/j.pneurobio.2005.10.003.
20. Sysoeva MV, Sitnikova E, Sysoev IV, Bezruchko BP, van Luijtelaa G. Application of adaptive nonlinear Granger causality: Disclosing network changes before and after absence seizure onset in a genetic rat model. *J. Neurosci. Methods.* 2014;226:33–41. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2014.01.028.
21. Sysoeva MV, Kuznetsova GD, Sysoev IV. The modeling of rat EEG signals in absence epilepsy in the analysis of brain connectivity. *Biophysics.* 2016;61(4):661–669. DOI: 10.1134/S0006350916040230.
22. Smirnov DA, Barnikol UB, Barnikol TT, Bezruchko BP, Hauptmann C, Buhrle C, Maarouf M, Sturm V, Freund H-J, Tass PA. The generation of parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis. *Europhysics Letters.* 2008;83(2):20003. DOI: 10.1209/0295-5075/83/20003.
23. Sysoeva MV, Sysoev IV. Mathematical modeling of encephalogram dynamics during epileptic seizure. *Tech. Phys. Lett.* 2012;38(2):151–154. DOI: 10.1134/S1063785012020137.
24. Mokhov II, Smirnov DA. El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices. *Geophys. Res. Lett.* 2006;33(3):L03708. DOI: 10.1029/2005GL024557.
25. Mokhov II, Smirnov DA, Nakonechny PI, Kozlenko SS, Kurths J. Relationship between El-Niño/Southern Oscillation and the Indian monsoon. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics.* 2012;48(1):47–56. DOI: 10.1134/S0001433812010082.
26. Dick OE. Synchronization analysis of time series obtained from anesthetized rats during painful action *Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(2):209–222. DOI: 10.18500/0869-6632-003093.
27. Marwan N, Romano MC, Thiel M, Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Phys. Rep.* 2007;438(5–6):237–329. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001.
28. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand D, Young LS, editors. *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick 1980. *Lecture Notes in Mathematics.* Vol. 898. Berlin: Springer; 1981. P. 366–381. DOI: 10.1007/BFb0091924.
29. Kennel MB, Brown R, Abarbanel HD. Determining embedding dimension for phase-space

- reconstruction using a geometrical construction. Phys. Rev. A. 1992;45(6):3403–3411. DOI: 10.1103/physreva.45.3403.
30. Fraser AM, Swinney HL. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. Phys. Rev. A. 1986;33(2):1134–1140. DOI: 10.1103/physreva.33.1134.
 31. Kurths J, Romano MC, Thiel M, Osipov GV, Ivanchenko MV, Kiss IZ, Hudson JL. Synchronization analysis of coupled noncoherent oscillators. Nonlinear Dyn. 2006;44:135–149. DOI: 10.1007/s11071-006-1957-x.
 32. Smirnov DA, Bezruchko BP. Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series. Phys. Rev. E. 2003;68:046209. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.046209.
 33. Smirnov DA. Characterization of weak coupling between self-oscillation systems from short time series: Technique and applications. Journal of Communications Technology and Electronics. 2006;51(5):534–544. DOI: 10.1134/S106422690605007X.
 34. Smirnov DA, Bodrov MB, Bezruchko BP. Estimation of coupling between oscillations from time series via phase dynamics modeling: limits of method. Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics. 2004;12(6):79–92. DOI: 10.18500/0869-6632-2004-12-6-79-92.
 35. Daubechies I, Lu J, Wu HT. Synchrosqueezed wavelet transforms: An empirical mode decomposition-like tool. Appl. Comput. Harmon. Anal. 2011;30(2):243–261. DOI: 10.1016/j.acha.2010.08.002.
 36. Thiel M, Romano MC, Kurths J, Rolf M, Kliegl R. Generating surrogates from recurrences. Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci. 2008;366(1865):545–557. DOI: 10.1098/rsta.2007.2109.
 37. Stefanovska A, Haken H, McClintock PVE, Hozic M, Bajrovic F, Ribaric S. Reversible transitions between synchronization states of the cardiorespiratory system. Phys Rev Lett. 2000;85:4831–4834. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.4831.
 38. Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Bespyatov AB, Bodrov MB, Gridnev VI. Deriving main rhythms of the human cardiovascular system from the heartbeat time series and detecting their synchronization. Chaos, Solitons and Fractals. 2005;23(4):1429–1438. DOI: 10.1016/j.chaos.2004.06.041.
 39. Dick OE, Glazov AL. Revealing the coupling directionality and synchronization between time series from physiological data by analysis of joint recurrences. Chaos, Solitons and Fractals. 2023;173:113768. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113768.



Дик Ольга Евгеньевна — родилась в Междуреченске (1962). Окончила физический факультет Ленинградского государственного университета по направлению «Биофизика» (1985). Защитила диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Биофизика» (1992, МГУ) и доктора биологических наук по специальности «Физиология» (2018, ФИН РАН). С 1988 года работает в лаборатории interoception Института физиологии им. И. П. Павлова РАН. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, нелинейная динамика. Опубликовала свыше 90 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 199034 Санкт-Петербург, наб. Макарова, 6
Институт физиологии им. И. П. Павлова РАН
E-mail: dickviola@gmail.com
ORCID: 0000-0001-5056-1779
AuthorID (eLibrary.Ru): 17280



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003159
EDN: NDICVN

Маркеры состояния пациентов после ортодонтического воздействия: применение рекуррентного анализа к данным ЭЭГ, полученным при выполнении когнитивных тестов

А. О. Сельский[✉], Е. П. Емельянова, Е. Е. Дрождева

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉selskii@yandex.ru, meretari@yandex.ru, drozhdeva.e@bk.ru

Поступила в редакцию 12.09.2024, принята к публикации 20.12.2024,
опубликована онлайн 16.01.2025, опубликована 30.05.2025

Аннотация. Цель настоящего исследования — изучить различия рекуррентных показателей, построенных по сигналам электроэнцефалографии пациентов после ортодонтического воздействия во время выполнения когнитивных тестов. В зависимости от типа воздействия (установка брекетов или элайнеров) выделить в каналах маркеры, по которым можно в дальнейшем определить силу стресса от ортодонтического вмешательства для последующей коррекции лечения. **Методы.** Для изучения данных электроэнцефалографии использовался рекуррентный анализ. В частности, строились рекуррентные показатели для каждого канала каждого пациента. **Результаты.** Продemonстрированы каналы, в которых изменения рекуррентных показателей при различном типе ортодонтического воздействия наибольшие. Для этих каналов описана динамика рекуррентных показателей в них для выделения некоторых маркеров стресса и боли, которые испытывает пациент. **Заключение.** В ходе исследования построены рекуррентные показатели по данным электроэнцефалографии пациентов после ортодонтического воздействия. Показано, что наиболее заметные отличия для пациентов разных групп демонстрируют височные и затылочные каналы (O1, O2, T3, T4, T5, T6). Таким образом, значения рекуррентных показателей этой группы каналов следует использовать в качестве маркера состояния пациента.

Ключевые слова: рекуррентный анализ, ортодонтия, электроэнцефалография, маркеры, инклюзия.

Благодарности. Работа поддержана Российским научным фондом, проект No. 23-72-01021.

Для цитирования: Сельский А. О., Емельянова Е. П., Дрождева Е. Е. Маркеры состояния пациентов после ортодонтического воздействия: применение рекуррентного анализа к данным ЭЭГ, полученным при выполнении когнитивных тестов // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. 399–411. DOI: 10.18500/0869-6632-003159. EDN: NDICVN

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Markers of patients' condition after orthodontic treatment: application of recurrent analysis to EEG data obtained during cognitive tests

A. O. Selskii[✉], E. P. Emelyanova, E. E. Drozhdeva

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉selskii.ao@gmail.com, meretari@yandex.ru, drozhdeva.e@bk.ru

Received 12.09.2024, accepted 20.12.2024, available online 16.01.2025, published 30.05.2025

Abstract. The purpose of this study — is to study the differences in recurrent indicators based on electroencephalography signals of patients after orthodontic treatment during cognitive tests. Depending on the type of impact (installation of braces or aligners), identify markers in the canals, which can be used to further determine the strength of stress from orthodontic intervention for subsequent correction of treatment. *Methods.* Recurrence analysis was used to study electroencephalography data. In particular, recurrent indicators were constructed for each channel of each patient. *Results.* The channels in which changes in recurrent indicators with different types of orthodontic influence are the greatest are demonstrated. For these channels, the dynamics of recurrent indicators in them is described to highlight some markers of stress and pain experienced by the patient. *Conclusion.* In the course of the study, recurrent indices were constructed based on the electroencephalography data of patients after orthodontic treatment. It was shown that the highest differences in patients of different groups were demonstrated by the temporal and occipital canals (O1, O2, T3, T4, T5, T6). Thus, the value of recurrent indices of this group of indices should be used as a marker of the patient's condition.

Keywords: recurrent analysis, orthodontics, electroencephalography, markers, inclusion.

Acknowledgements. The work was supported by the Russian Science Foundation, project No. 23-72-01021.

For citation: Selskii AO, Emelyanova EP, Drozhdeva EE. Markers of patients' condition after orthodontic treatment: application of recurrent analysis to EEG data obtained during cognitive tests. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(3):399–411. DOI: 10.18500/0869-6632-003159

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Одной из важных, но мало изученных проблем является вопрос о влиянии длительного лечения на состояние пациента [1]. Особенно данная проблема важна в случае, если лечение сопровождается дискомфортом или болевыми ощущениями. Именно такая ситуация часто возникает при ортодонтическом лечении [2]. На сегодняшний день продолжительность лечения может весьма сильно варьироваться: от нескольких лет при традиционной ортодонтии для взрослых пациентов до нескольких месяцев при использовании новаторских подходов, включающих хирургические вмешательства (например, остеотомия, кортикотомия и пр.), дополняемых физиотерапевтическими методами воздействий [3, 4]. Несмотря на явное преимущество сокращения времени ношения ортодонтических аппаратов, связанное со снижением их отрицательного влияния на зубы и околозубные ткани, возникают вопросы об адаптационных возможностях челюстно-лицевого аппарата и окружающих его тканей для быстрой перестройки данной системы при ускорении коррекции [5]. В настоящей статье предпринята попытка расширить для специалистов данной области спектр объективных диагностических возможностей в оценке наблюдения за адаптационными процессами пациентов, а именно: будет использован анализ электроэнцефалографических записей в процессе определения когнитивного статуса пациента для выделения и описания объективных диагностических критериев (биофизических маркеров) адаптационных процессов организма.

Для анализа в ходе экспериментальных записей пациенты проходили когнитивные тесты, так как в некоторых исследованиях было отмечено, что длительное воздействие боли и стресса приводят к снижению когнитивных функций [6]. В качестве самих тестов использовались хорошо известные в области нейронаук задачи на счет, запоминание, концентрацию внимания, к примеру,

таблицы Шульте [7, 8]. Всего в каждом эксперименте было четыре разных теста, чтобы оценить влияние ортодонтического воздействия на различные когнитивные функции. Кроме того, чтобы отследить динамику изменения рекуррентных показателей, эксперимент для каждого пациента проводился трижды. Первый раз — до установки брекет-системы или элайнеров. Второй раз — сразу после ортодонтического вмешательства. Третий эксперимент проводился спустя некоторое время после второго и призван продемонстрировать возникшие в результате длительного стресса изменения.

В настоящее время активно исследуются вопросы направленности связи при адаптации активности мозга и восстановления здоровья ротовой полости [9]. В частности, работы по наложению окклюзионных шин продемонстрировали значительные изменения в сенсомоторной коре [10], кроме того, работы [11] показали, что установка имплантатов меняет активность фронтальных зон, не затрагивая сенсомоторные зоны. Показано, что когнитивные функции человека, такие как память, гнозис и праксис, снижаются из-за потери нормальной окклюзии, связанной с удалением зубов и/или жевательной дисфункцией [12]. В то же время можно уверенно утверждать, что активность головного мозга и когнитивный статус пациента демонстрируют существенные, хорошо изученные взаимосвязи и корреляции [13, 14]. Кроме того, ортодонтические операции могут сопровождаться болевыми ощущениями, а продолжительное лечение, кроме того, накапливающимся стрессом, которые могут приводить к снижению когнитивных функций [6].

В качестве основного метода анализа данных ЭЭГ в настоящей работе предлагается использовать сравнение рекуррентных показателей. Данный метод имеет ряд преимуществ, которые делают его весьма востребованным для задач, связанных с анализом физиологических сигналов [15–17]. Во-первых, рекуррентный анализ не требует сложных вычислений, что экономит время проведения расчетов, снижает вероятность появления ошибок, позволяет впоследствии легко перейти к системам, работающим в реальном времени, а не в режиме постобработки [18]. Во-вторых, рекуррентный анализ позволяет работать с существенно нелинейными и хаотическими сигналами и сравнивать их между собой с минимальными нормировками, так как метод не зависит от амплитудных характеристик сигнала и подсчитывает только число возвратов на фиксированном временном ряду [15]. Кроме того, рекуррентные показатели являются довольно устойчивыми в статистическом смысле в рамках одного эксперимента или теста, что позволяет работать даже с малыми статистическими выборками данных [19].

Цель настоящего исследования — изучение различий рекуррентных показателей, построенных по сигналам электроэнцефалографии пациентов после ортодонтического воздействия во время выполнения когнитивных тестов. В зависимости от типа воздействия (установка брекетов или элайнеров) выделить в каналах маркеры, по которым можно в дальнейшем определить силу стресса от ортодонтического вмешательства для последующей коррекции лечения.

1. Методика

1.1. Описание нейрофизиологического эксперимента. Испытуемые добровольно участвовали в эксперименте на бесплатной основе. Все испытуемые подписали информированное согласие на участие в клиническом исследовании, получили все необходимые разъяснения по поводу исследования и дали согласие на последующую публикацию результатов исследования. Собранные экспериментальные данные обрабатывались с учетом конфиденциальности и анонимности участников исследования. Все процедуры, выполненные в исследованиях с участием людей, соответствовали Хельсинкской декларации 1964 года и ее более поздним поправкам. Все клинические данные и дизайн клинического исследования были одобрены местным комитетом по этике исследований.

Таблица. Разделение пациентов на группы по типу лечения и соответствующей силе ортодонтического воздействия

Table. Dividing patients into groups according to the type of treatment and the corresponding strength of orthodontic influence

№	Type of treatment	Group
1	Braces	#1
2	Braces	#1
3	Braces	#1
4	14,15,24,25	#2
5	13,23,14,24	#2
6	16,17,26,27	#2
7	11,21,22	#3
8	23,14,16	#3

Использовались следующие каналы: O1, O2, Oz, P3, P4, Pz, C3, C4, Cz, F3, F4, F7, F8, Fr1, Fr2, T3, T4, T5, T6. Сигналы ЭЭГ фильтровались с полосой пропускания 0.1...40 Гц и дискретизировались с частотой 500 Гц и $\Delta t = 0.002$ с, а также приводились к среднему нулевому значению. Запись каждого канала ЭЭГ можно рассматривать как отдельный одномерный сигнал $x(t_i)$.

В настоящей работе для всестороннего исследования ортодонтического воздействия на активность мозга пациентов была предложена следующая схема проведения экспериментальных записей: первая запись проводилась примерно за две недели до ортодонтической операции по установке брекетов или элайнеров. Второй эксперимент — сразу после установки аппарата. Третий раз пациент проходил эксперимент примерно через две недели после ортодонтического воздействия. Схема хронологической последовательности экспериментов указана на рис. 1.

Каждый эксперимент представляет собой последовательность из четырех когнитивных тестов, см. рис. 1. В первом тесте необходимо нажимать в порядке убывания на кружки от числа 25 к числу 1. При правильном нажатии кружки исчезают, что упрощает задачу по ходу прохождения теста. Вторым тестом идет задача на запоминание расположения точек в квадратном поле из шестнадцати ячеек. Пациент должен запомнить конфигурацию точек, которую ему демонстрируют, а затем повторить ее в пустом поле на планшете. Третьим тестом служат таблицы Шульте. Этот тест похож на первый, однако для таблиц Шульте сложность теста не меняется в процессе его прохождения. Четвертый тест представляет собой задание на счет. Пациенту демонстрируют различное число квадратов, а он должен посчитать, четным было их число или нечетным, и нажать соответствующую кнопку на пульте.

1.2. Рекуррентный анализ. Одним из методов нелинейной динамики, применяемым для анализа различных данных, является рекуррентный анализ, который позволяет установить взаимосвязи и корреляции между сигналами в сложных распределенных системах [21]. Данный метод нашел применение в широком диапазоне задач обработки нелинейных и хаотических сигналов различной природы [22]. Сам алгоритм расчета отличается простотой [23], что делает его перспективным для работы с большими данными и обработкой сигналов в реальном времени. Рассмотрим сигнал $x(t)$, значения которого известны в моменты времени t_i , где $i = 1, \dots, n$.

В текущее исследование были включены данные 8 испытуемых, распределенных по трем группам. В первую группу вошли пациенты, которым устанавливались брекеты. Вторая группа состояла из пациентов, которым были установлены элайнеры на четыре зуба. В последней группе пациентам были установлены элайнеры на три зуба. Хотя основное внимание будет уделяться общим закономерностям и деление на группы из-за их малого размера скорее условно, полезно рассмотреть также отличия между данными группами пациентов. Данные о разбиении на группы и проводимом лечении собраны в Таблице. Для элайнеров в Таблице указаны номера зубов, на которые устанавливается аппарат.

Регистрация электрической активности головного мозга проводилась по стандартной схеме 10–20 [20], устанавливались 19 каналов.

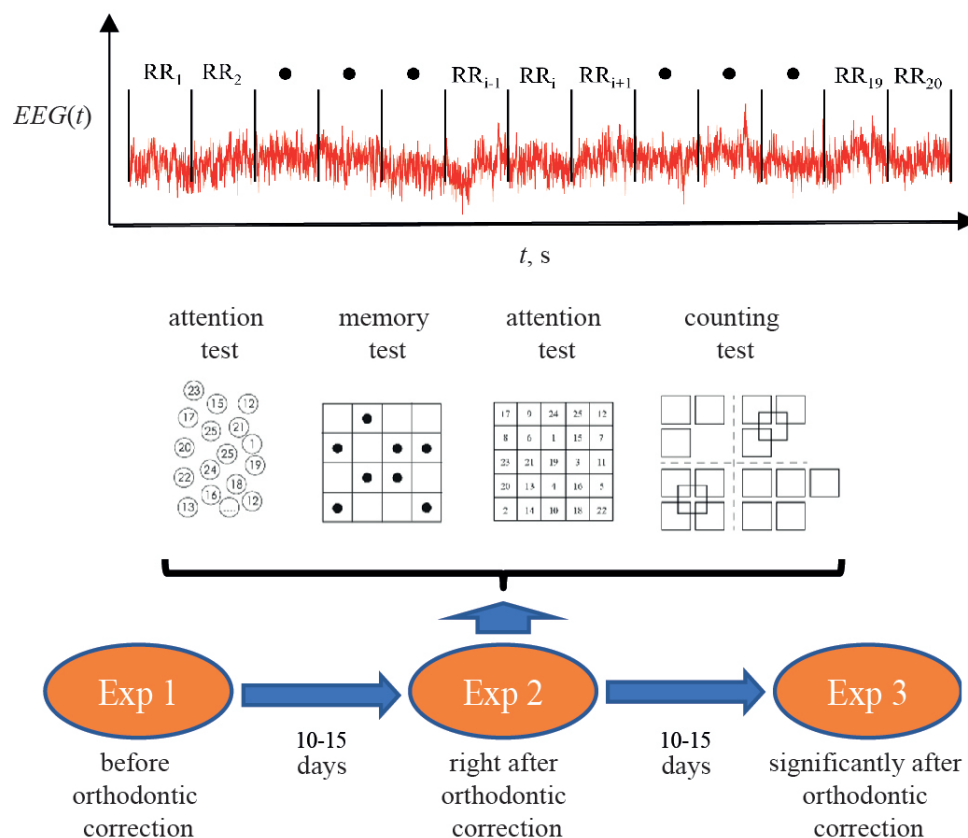


Рис. 1. Схематичное изображение разбиения исходного сигнала на несколько интервалов, по которым проводился расчет рекуррентных показателей. Проводимые в рамках каждого эксперимента тесты: два на внимание, по одному на запоминание и счет. Общая схема эксперимента: первый — за 10–15 дней до ортодонтической операции, второй — в день после операции, третий — спустя 10–15 дней после операции

Fig. 1. Schematic representation of the division of the initial signal into several intervals, by which the calculation of recurrent indicators was carried out. Tests carried out within the framework of each experiment: two for attention, one for memorization and counting. General scheme of the experiment: the first — 10–15 days before orthodontic surgery, the second — on the day after the surgery, the third — 10–15 days after the surgery

Для него можно построить рекуррентную матрицу по следующему правилу:

$$R_{i,j} = \theta(\varepsilon - \|x(t_i) - x(t_j)\|), \quad (1)$$

где $R_{i,j}$ — элемент рекуррентной матрицы для сигнала x ; t_i и t_j — моменты времени t ; θ — функция Хевисайда, которая принимает нулевое значение для отрицательных аргументов и единичное при неотрицательных. Таким образом, если в момент времени t_j сигнал вернулся в ε -окрестность значения сигнала в момент времени t_i , то в рекуррентной матрице будет 1. Пороговое значение $\varepsilon = 0.02$ является ключевым параметром метода, обеспечивающего необходимую точность. Слишком большое значение параметра приведет к тому, что динамических повторов в сигнале будет слишком много и рекуррентная диаграмма окажется почти целиком заполнена. Уменьшение параметра, напротив, приводит к тому, что точек почти не будет. В обоих случаях теряется ценная информация о динамике системы. В рамках настоящей работы значение параметра ε было рассчитано эмпирически так, чтобы плотность точек на рекуррентной диаграмме составляла около 1% (в соответствии с [24]) для подавляющего большинства исследуемых сигналов ЭЭГ.

Для оценки количества повторов в сигнале используется рекуррентный показатель, являющийся суммой всех ненулевых значений рекуррентной матрицы, нормированной на ее размер [12].

Рекуррентный показатель может быть рассчитан для каждого анализируемого сигнала x по всей длине временного ряда или по небольшому временному фрагменту. Из-за очень большого объема данных в сигналах электроэнцефалографии рекуррентный показатель часто стоит рассчитывать для относительно небольших временных фрагментов. Поэтому для длительных записей имеет смысл разделить сигнал на несколько частей и посчитать рекуррентные показатели для каждой части отдельно. При этом нормировка рекуррентного показателя на размер рекуррентной матрицы дает возможность корректно сравнивать рекуррентные показатели фрагментов сигнала различной длительности.

Схема деления записи ЭЭГ на части показана на рис. 1. Для расчета рекуррентных показателей вся запись когнитивных тестов разбивалась на двадцать отрезков одинаковой длительности. Отличие в длительности записей ЭЭГ в разных экспериментах и у разных испытуемых нивелируется нормировкой на длину фрагмента при расчете рекуррентного показателя. Кроме записей когнитивных тестов, в полученные двадцать фрагментов входят и две записи состояния покоя с закрытыми глазами. Кроме удобства расчета, такая схема позволяет оценить, как изменяется активность головного мозга в процессе прохождения когнитивного теста. Таким образом, для каждого пациента было проанализировано по три экспериментальных записи, где для каждого канала было рассчитано 20 рекуррентных показателей RR^i . Для сравнения динамики рекуррентных показателей между пациентами и между разными экспериментальными записями необходимо провести некоторую нормировку полученных показателей. С этой целью были найдены для каждого эксперимента и каждого канала среднее значение рекуррентного показателя, а в качестве нормированного значения используется разность между текущим значением и средним.

$$NRR_i = RR^i - \overline{RR}, \overline{RR} = \frac{1}{20} \sum RR^i. \quad (2)$$

Кроме того, в описанной процедуре проведения экспериментов первый эксперимент — до ортодонтического воздействия — может служить в некотором смысле нормальной реакцией пациента на когнитивный тест. Показатель может быть индивидуальным и отличаться в рамках одной группы. Поэтому, кроме нормировки на среднее значение, приведенное выше, будем рассматривать вторую нормировку на средний рекуррентный показатель в первом эксперименте:

$$1NRR_i = NRR_i - \frac{1}{20} \sum NRR^{i1}, \quad (3)$$

где RR^{i1} — рекуррентные показатели в первом эксперименте для данного канала этого пациента.

В ходе работы показатели NRR_i и $1NRR_i$ были рассчитаны для каждого канала каждого пациента, чтобы провести в дальнейшем поиск статистических закономерностей по группам пациентов.

2. Результаты

Так как изменения активности головного мозга при длительном лечении могут носить не только общий, но и локальный характер, необходимо рассматривать изменение статистических закономерностей рекуррентных показателей между экспериментами отдельно для всех 19 каналов сигнала ЭЭГ. Такую информацию проще предоставить и анализировать графически в виде следующего рисунка — рис. 2. Из рисунка видно, что для первой группы распределение рекуррентных показателей от эксперимента к эксперименту визуально не изменяется. Сохраняются значения среднего и медианы, а также разброс показателей.

Для второй группы эксперимент, проводимый сразу после ортодонтического воздействия, мало отличается от эксперимента до воздействия, за исключением нескольких каналов — O1, O2,

T6 — для которых рекуррентные показатели второго эксперимента имеют немного меньший разброс. А вот разброс рекуррентных показателей для третьего эксперимента во второй группе существенно возрастает. Если для остальных экспериментов медиана и среднее примерно равны, то для третьего эксперимента значение среднего заметно превосходит медиану.

Для третьей группы наблюдаются похожие результаты, за тем исключением, что чаще разброс рекуррентных показателей для первого эксперимента больше разброса для второго эксперимента. Особенно заметным становится рост разброса рекуррентных показателей в третьем эксперименте для каналов в височных областях — T3, T4, T5, T6.

Рис. 2 построен по нормировке на среднее значение для каждого канала каждого пациента в конкретном эксперименте. При этом значение рекуррентного показателя, соответствующего прохождению когнитивных тестов, может быть индивидуальной характеристикой и должно учитываться отдельно. Для этой цели будет проведена дополнительная нормировка на среднее значение рекуррентного показателя для данного канала данного пациента во время прохождения первого эксперимента. Так как первый эксперимент проводился до ортодонтического воздействия, значение рекуррентных показателей в этом эксперименте будем считать типичным для данного

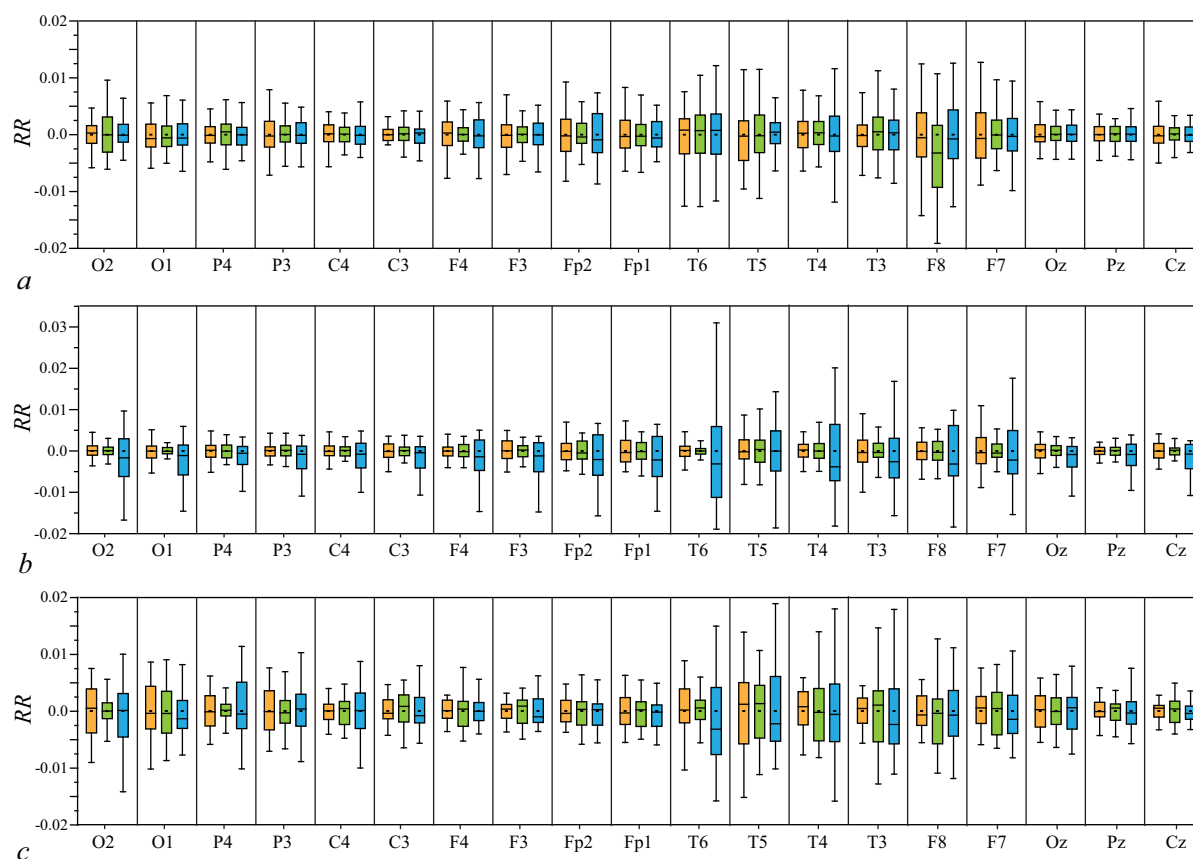


Рис. 2. Характеристики распределения нормированных рекуррентных показателей NRR_i пациентов в первой (a), второй (b) и третьей (c) группах в зависимости от канала ЭЭГ и номера эксперимента: оранжевым цветом — первый эксперимент (до ортодонтического воздействия), зеленым цветом — второй (сразу после) и синим цветом — третий (спустя 10–15 дней после воздействия) (цвет онлайн)

Fig. 2. Characteristics of the distribution of normalized recurrent rates NRR_i of patients in the first (a), second (b) and third (c) groups depending on the EEG channel and experiment number: orange is the first experiment (before orthodontic treatment), green is the second (immediately after) and blue third color (10–15 days after exposure) (color online)

пациента. На рис. 3 представлены найденные статистические закономерности для такой нормировки. Значения для первого эксперимента не приводятся, так как они становятся малоинформативными.

Как и предполагалось, в этом случае разница становится заметнее. Более других отличия заметны в тех же каналах — T3, T4, T5, T6. Можно уверенно сказать, что, используя локальные записи каналов T5 и T6 во время выполнения когнитивного теста, можно отличать пациентов, которым сделали операцию по установке ортодонтического аппарата. В случае, если с течением времени и силой ортодонтического воздействия разброс рекуррентных показателей в данных каналах будет возрастать, то это может являться эффективным маркером, который показывает то, насколько сильно лечение влияет на пациента, чтобы скорректировать лечение.

Кроме этого, новая нормировка показывает интересный тренд, связанный со сравнением разных групп пациентов во втором и третьем эксперименте. Если для пациентов второй группы (установка элайнеров на 4 зуба) нет четкого увеличения разброса рекуррентных показателей для одного из экспериментов, то для двух других групп тенденции очевидны. Так, у первой группы (пациенты с брекетами) разброс во втором эксперименте куда заметнее,

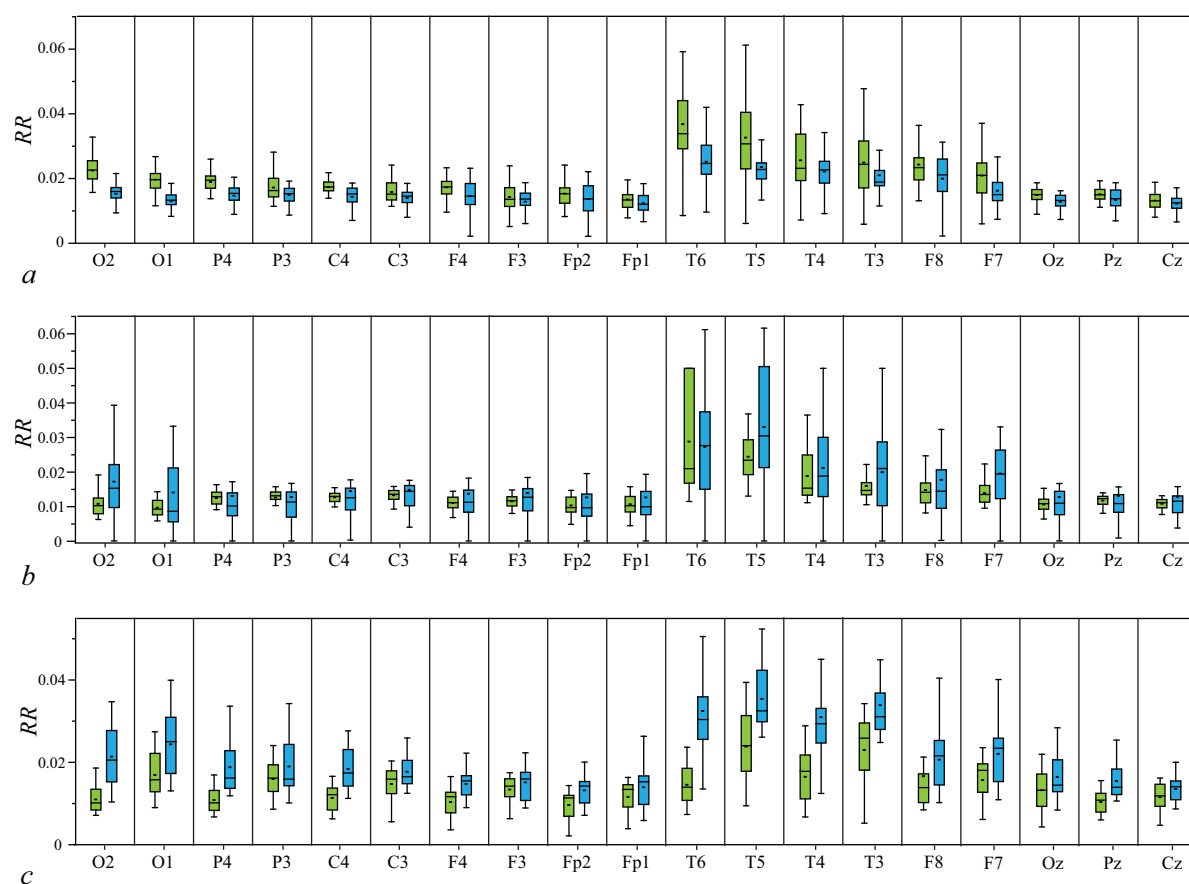


Рис. 3. Характеристики распределения нормированных рекуррентных показателей $1NNRR_i$ пациентов в первой (a), второй (b) и третьей (c) группах в зависимости от канала ЭЭГ и номера эксперимента: зеленым цветом — второй (сразу после) и синим цветом — третий (спустя 10–15 дней после воздействия) (цвет онлайн)

Fig. 3. Characteristics of the distribution of normalized recurrent rates $1NNRR_i$ of patients in the first (a), second (b) and third (c) groups depending on the EEG channel and experiment number: green is the second (immediately after) and blue third color (10–15 days after exposure) (color online)

чем для третьего эксперимента. А у пациентов третьей группы, наоборот, разброс возрастает для третьего эксперимента.

Такое поведение может быть объяснено тем, что пациенты по-разному переносят операцию по установке ортодонтического аппарата. Для пациентов с брекетами их установка является сильным шоком, после которого привыкание к брекетам проходит с меньшим напряжением. А вот для пациентов с элайнерами на три зуба стресс, связанный с привыканием к ортодонтическому аппарату, выше, чем стресс непосредственно после установки элайнеров. Для пациентов второй группы стресс примерно одинаковый, если судить по разбросу рекуррентных показателей в каналах T5, T6. Если данное предположение верно, то при дальнейшем наблюдении за пациентами рекуррентные показатели начнут вести себя схожим образом для всех групп пациентов. Данную особенность, безусловно, нужно учитывать при анализе записей ЭЭГ для корректирования лечения у пациентов с разным типом ортодонтического воздействия.

Заключение

Целью настоящего исследования было изучение различий рекуррентных показателей, построенных по сигналам ЭЭГ пациентов после ортодонтического воздействия во время выполнения когнитивных тестов. В зависимости от типа воздействия (установка брекетов или элайнеров) необходимо было выделить в каналах маркеры, по которым можно в дальнейшем определить силу стресса от ортодонтического вмешательства для последующей коррекции лечения.

Полученные результаты показали, что оценки статистических закономерностей рекуррентных показателей в височных каналах во время прохождения когнитивного теста достаточно, чтобы получить маркеры для оценки состояния пациентов. В некотором роде полученные результаты коррелируют с работой [25], где, однако, сходные результаты были продемонстрированы с применением существенно более сложных методов, включая анализ отдельных частотных диапазонов с помощью вейвлетного преобразования. Нормировка на первый эксперимент (до установки ортодонтического аппарата) позволяет хорошо различить воздействия разного типа по оценке стресса на установку аппарата и его ношение.

Для использования обоих полученных результатов для создания эффективных маркеров оценки степени стресса при ношении ортодонтического аппарата с целью коррекции лечения необходимо увеличить как число пациентов в выборке, так и время наблюдения за пациентами. Однако в данной статье убедительно показано, что создание подобных маркеров на базе выделения и анализа рекуррентного показателя при прохождении серий когнитивных тестов возможно и представляет большой интерес для исследователей в области ортодонтии и нейронаук.

Список литературы

1. Bulut O. C., Wallner F., Oladokun D., Kayser C., Plath M., Schulz E., Plinkert P. K., Baumann I. Long-term quality of life changes after primary septorhinoplasty // *Qual Life Res.* 2018. Vol. 27, no. 4. P. 987–991. DOI: 10.1007/s11136-017-1761-8.
2. de Araujo C. M., Schroder A. G. D., de Araujo B. M. M., Cavalcante-Leao B. L., Stechman-Neto J., Zeigelboim B. S., Santos R. S., Guariza-Filho O. Impact of orthodontic-surgical treatment on quality of life: a meta-analysis // *European Journal of Orthodontics.* 2020. Vol. 42, no. 3. P. 281–289. DOI: 10.1093/ejo/cjz093.
3. Parkin N. A., Almutairi S., Benson P. E. Surgical exposure and orthodontic alignment of palatally displaced canines: can we shorten treatment time? // *Journal of Orthodontics.* 2019. Vol. 46. P. 54–59. DOI: 10.1177/1465312519841384.
4. Zimmo N., Saleh M. H., Mandelaris G. A., Chan H. L., Wang H. L. Corticotomy-Accelerated Orthodontics: A Comprehensive Review and Update // *Compend. Contin. Educ. Dent.* 2017. Vol. 38, no. 1. P. 17–25.

5. *Dab S., Chen K., Flores Mir C.* Short- and long-term potential effects of accelerated osteogenic orthodontic treatment: A systematic review and meta-analysis // *Journal of Orthodontics*. 2019. Vol. 22, no. 2. P. 61–68. DOI: 10.1111/ocr.12272.
6. *Zhuravlev M., Novikov M., Parsamyan R., Selskii A., Runnova A.* The objective assessment of event-related potentials: An influence of chronic pain on ERP parameters // *Neurosci Bull*. 2023. Vol. 39, no. 7. P. 1105–1116. DOI: 10.1007/s12264-023-01035-8.
7. *Makarov V. V., Zhuravlev M. O., Runnova A. E., Protasov P., Maksimenko V. A., Frolov N. S., Pisarchik A. N., Hramov A. E.* Betweenness centrality in multiplex brain network during mental task evaluation // *Phys. Rev. E*. 2018. Vol. 98. P. 062413. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.062413.
8. *Maksimenko V. A., Runnova A. E., Zhuravlev M. O., Protasov P., Kulandin R., Khramova M. V., Pisarchik A. N., Hramov A. E.* Human personality reflects spatio-temporal and time-frequency EEG structure // *PloS One*. 2018. Vol. 13, no. 9. P. e0197642. DOI: 10.1371/journal.pone.0197642.
9. *Miyamoto I., Yoshida K., Bessho K.* Shortened dental arch and cerebral regional blood volume: an experimental pilot study with optical topography // *Cranio*. 2009. Vol. 27. P. 94–100. DOI: 10.1179/crn.2009.015.
10. *Kordass B., Lucas C., Huetzen D., Zimmermann C., Gedrange T., Langner S., Domin M., Hosten N.* Functional magnetic resonance imaging of brain activity during chewing and occlusion by natural teeth and occlusal splints // *Ann. Anat.* 2007. Vol. 189. P. 371–376. DOI: 10.1016/j.aanat.2007.02.027.
11. *Morokuma M.* Influence of the functional improvement of complete dentures on brain activity // *Nihon Hotetsu Shika Gakkai Zasshi*. 2008. Vol. 52. P. 194–199. DOI: 10.2186/jjps.52.194.
12. *Ono Y., Yamamoto T., Kubo K. Y., Onozuka M.* Occlusion and brain function: mastication as a prevention of cognitive dysfunction // *J. Oral. Rehabil.* 2010. Vol. 37, no. 8. P. 624–640. DOI: 10.1111/j.1365-2842.2010.02079.x.
13. *Zanetti M., Faes L., Nollo G., De Cecco M., Pernice R., Maule L., Pertile M., Fornaser A.* Information Dynamics of the Brain, Cardiovascular and Respiratory Network during Different Levels of Mental Stress // *Entropy*. 2019. Vol. 21, no. 3. P. 275. DOI: 10.3390/e21030275.
14. *Pollatos O., Schandry R., Auer D. P., Kaufmann C.* Brain structures mediating cardiovascular arousal and interoceptive awareness // *Brain Research*. 2007. Vol. 1141. P. 178–187. DOI: 10.1016/j.brainres.2007.01.026.
15. *Yang Y. X., Gao Z. K., Wang X. M., Li Y. L., Han J. W., Marwan N., Kurths J.* A recurrence quantification analysis-based channel-frequency convolutional neural network for emotion recognition from EEG // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 8. P. 085724. DOI: 10.1063/1.5023857.
16. *Chou E. F., Khine M., Lockhart T., Soangra R.* Effects of ECG data length on heart rate variability among young healthy adults // *Sensors*. 2021. Vol. 21, no. 18. P. 6286. DOI: 10.3390/s21186286.
17. *Terrill P. I., Wilson S. J., Suresh S., Cooper D. M., Dakin C.* Characterising non-linear dynamics in nocturnal breathing patterns of healthy infants using recurrence quantification analysis // *Computers in biology and medicine*. 2013. Vol. 43, no. 4. P. 231–239. DOI: 10.1016/j.combiomed.2013.01.005.
18. *Parro V. C., Valdo L.* Sleep-wake detection using recurrence quantification analysis // *Chaos*. 2018. Vol. 28, no. 8. P. 085706. DOI: 10.1063/1.5024692.
19. *Jenkins B. N., Hunter J. F., Richardson M. J., Conner T. S., Pressman S. D.* Affect variability and predictability: Using recurrence quantification analysis to better understand how the dynamics of affect relate to health // *Emotion*. 2020. Vol. 20, no. 3. P. 391–402. DOI: 10.1037/emo0000556.
20. *Rojas G. M., Alvarez C., Montoya C. E., de la Iglesia-Vayá M., Cisternas J. E., Gálvez M.* Study of resting-state functional connectivity networks using EEG electrodes position as seed // *Front. Neurosci.* 2018. Vol. 12. P. 235. DOI: 10.3389/fnins.2018.00235.

21. Acharya U. R., Sree S. V., Swapna G., Martis R. J., Suri J. S. Automated EEG analysis of epilepsy: A review // *Knowledge-Based Systems*. 2013. Vol. 45. P. 147–165. DOI: 10.1016/j.knosys.2013.02.014.
22. Acharya U. R., Sree S. V., Chattopadhyay S., Yu W., Ang P. C. Application of recurrence quantification analysis for the automated identification of epileptic EEG signals // *International Journal of Neural Systems*. 2011. Vol. 21, no. 3. P. 199–211. DOI: 10.1142/S0129065711002808.
23. Eckmann J.-P., Kamphorst S. O., Ruelle D. Recurrence plots of dynamical systems // *Europhysics Letters*. 1987. Vol. 4, no. 9. P. 973–977. DOI: 10.1209/0295-5075/4/9/004.
24. Marwan N., Romano M. C., Thiel M., Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex systems // *Physics Reports*. 2007. Vol. 438, iss. 5–6. P. 237–329. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001.
25. Zhuravlev M., Suetenkova D., Parsamyan R., Runnova A., Simonyan M., Nasrullaev R., Kiselev A., Suetenkov D. Changes in EEG oscillatory patterns due to acute stress caused by orthodontic correction // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2024. Vol. 233. P. 505–518. DOI: 10.1140/epjs/s11734-023-01064-4.

References

1. Bulut OC, Wallner F, Oladokun D, Kayser C, Plath M, Schulz E, Plinkert PK, Baumann I. Long-term quality of life changes after primary septorhinoplasty. *Qual Life Res*. 2018;27(4):987–991. DOI: 10.1007/s11136-017-1761-8.
2. de Araujo CM, Schroder AGD, de Araujo BMM, Cavalcante-Leao BL, Stechman-Neto J, Zeigelboim BS, Santos RS, Guariza-Filho O. Impact of orthodontic-surgical treatment on quality of life: a meta-analysis. *European Journal of Orthodontics*. 2020;42(3):281–289. DOI: 10.1093/ejo/cjz093.
3. Parkin NA, Almutairi S, Benson PE. Surgical exposure and orthodontic alignment of palatally displaced canines: can we shorten treatment time? *Journal of Orthodontics*. 2019;46:54–59. DOI: 10.1177/1465312519841384.
4. Zimmo N, Saleh MH, Mandelaris GA, Chan HL, Wang HL. Corticotomy-Accelerated Orthodontics: A Comprehensive Review and Update. *Compend. Contin. Educ. Dent*. 2017;38(1):17–25.
5. Dab S, Chen K, Flores Mir C. Short- and long-term potential effects of accelerated osteogenic orthodontic treatment: A systematic review and meta-analysis. *Journal of Orthodontics*. 2019;22(2): 61–68. DOI: 10.1111/ocr.12272.
6. Zhuravlev M, Novikov M, Parsamyan R, Selskii A, Runnova A. The objective assessment of event-related potentials: An influence of chronic pain on ERP parameters. *Neurosci. Bull*. 2023;39(7):1105–1116. DOI: 10.1007/s12264-023-01035-8.
7. Makarov VV, Zhuravlev MO, Runnova AE, Protasov P, Maksimenko VA, Frolov NS, Pisarchik AN, Hramov AE. Betweenness centrality in multiplex brain network during mental task evaluation. *Phys. Rev. E*. 2018;98:062413. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.062413.
8. Maksimenko VA, Runnova AE, Zhuravlev MO, Protasov P, Kulanin R, Khramova MV, Pisarchik AN, Hramov AE. Human personality reflects spatio-temporal and time-frequency EEG structure. *PloS One*. 2018;13(9):e0197642. DOI: 10.1371/journal.pone.0197642.
9. Miyamoto I, Yoshida K, Bessho K. Shortened dental arch and cerebral regional blood volume: an experimental pilot study with optical topography. *Cranio*. 2009;27:94–100. DOI: 10.1179/crn.2009.015.
10. Kordass B, Lucas C, Huetzen D, Zimmermann C, Gedrange T, Langner S, Domin M, Hosten N. Functional magnetic resonance imaging of brain activity during chewing and occlusion by natural teeth and occlusal splints. *Ann. Anat*. 2007;189:371–376. DOI: 10.1016/j.aanat.2007.02.027.
11. Morokuma M. Influence of the functional improvement of complete dentures on brain activity. *Nihon Hotetsu Shika Gakkai Zasshi*. 2008;52:194–199. DOI: 10.2186/jjps.52.194.

12. Ono Y, Yamamoto T, Kubo KY, Onozuka M. Occlusion and brain function: mastication as a prevention of cognitive dysfunction. *J. Oral Rehabil.* 2010;37(8):624–640. DOI: 10.1111/j.1365-2842.2010.02079.x.
13. Zanetti M, Faes L, Nollo G, De Cecco M, Pernice R, Maule L, Pertile M, Fornaser A. Information Dynamics of the Brain, Cardiovascular and Respiratory Network during Different Levels of Mental Stress. *Entropy.* 2019;21(3):275. DOI: 10.3390/e21030275.
14. Pollatos O, Schandry R, Auer DP, Kaufmann C. Brain structures mediating cardiovascular arousal and interoceptive awareness. *Brain Research.* 2007;1141:178–187. DOI: 10.1016/j.brainres.2007.01.026.
15. Yang YX, Gao ZK, Wang XM, Li YL, Han JW, Marwan N, Kurths J. A recurrence quantification analysis-based channel-frequency convolutional neural network for emotion recognition from EEG. *Chaos.* 2018;28(8):085724. DOI: 10.1063/1.5023857.
16. Chou EF, Khine M, Lockhart T, Soangra R. Effects of ECG Data Length on Heart Rate Variability among Young Healthy Adults. *Sensors.* 2021;21(18):6286. DOI: 10.3390/s21186286.
17. Terrill PI, Wilson SJ, Suresh S, Cooper DM, Dakin C. Characterising non-linear dynamics in nocturnal breathing patterns of healthy infants using recurrence quantification analysis. *Computers in Biology and Medicine.* 2013;43(4):231–239. DOI: 10.1016/j.compbimed.2013.01.005.
18. Parro VC, Valdo L. Sleep-wake detection using recurrence quantification analysis. *Chaos.* 2018;28(8):085706. DOI: 10.1063/1.5024692.
19. Jenkins BN, Hunter JF, Richardson MJ, Conner TS, Pressman SD. Affect variability and predictability: Using recurrence quantification analysis to better understand how the dynamics of affect relate to health. *Emotion.* 2020;20(3):391–402. DOI: 10.1037/emo0000556.
20. Rojas GM, Alvarez C, Montoya CE, de la Iglesia-Vayá M, Cisternas JE, Gálvez M. Study of Resting-State Functional Connectivity Networks Using EEG Electrodes Position As Seed. *Front. Neurosci.* 2018;12:235. DOI: 10.3389/fnins.2018.00235.
21. Acharya UR, Sree SV, Swapna G, Martis RJ, Suri JS. Automated EEG analysis of epilepsy: A review. *Knowledge-Based Systems.* 2013;45:147–165. DOI: 10.1016/j.knosys.2013.02.014.
22. Acharya UR, Sree SV, Chattopadhyay S, Yu W, Ang PC. Application of recurrence quantification analysis for the automated identification of epileptic EEG signals. *International Journal of Neural Systems.* 2011;21(3):199–211. DOI: 10.1142/S0129065711002808.
23. Eckmann J-P, Kamphorst SO, Ruelle D. Recurrence Plots of Dynamical Systems. *Europhysics Letters.* 1987;4(9):973–977. DOI: 10.1209/0295-5075/4/9/004.
24. Marwan N, Romano MC, Thiel M, Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports.* 2007;438(5–6):237–329. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001.
25. Zhuravlev M, Suetenkova D, Parsamyan R, Runnova A, Simonyan M, Nasrullaev R, Kiselev A, Suetenkov D. Changes in EEG oscillatory patterns due to acute stress caused by orthodontic correction. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2024;233:505–518. DOI: 10.1140/epjs/s11734-023-01064-4.



Сельский Антон Олегович — окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2011). Кандидат физико-математических наук (2014). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ (с 2017). Область научных интересов — междисциплинарное направление нейронауки, включающее в себя анализ сложных сигналов различной биомедицинской природы и разработку новых методов и подходов к анализу таких сигналов.

Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
 E-mail: selskii@yandex.ru
 ORCID: 0000-0003-3175-895X
 AuthorID (eLibrary.Ru): 643422



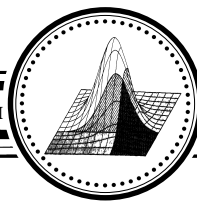
Емельянова Елизавета Петровна — окончила СГУ (2022) по направлению «Прикладные математика и физика». Область научных интересов — междисциплинарное направление нейронауки, включающее в себя анализ сложных нелинейных сигналов различной биомедицинской природы и разработку новых методов и подходов к анализу таких сигналов.

Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: meretari@ya.ru
ORCID: 0000-0001-5535-8921
AuthorID (eLibrary.Ru): 1153331



Дрождева Евгения Евгеньевна — окончила Саратовский областной базовый медицинский колледж по специальности «Медицинская сестра» (2020). В настоящее время обучается в СГМУ им. В. И. Разумовского по специальности «Педиатрия». Работает в СГУ им. Н. Г. Чернышевского в должности лаборанта-исследователя. Область научных интересов — междисциплинарное направление нейронауки, включающее в себя анализ сложных сигналов различной биомедицинской природы и разработка новых методов и подходов к анализу таких сигналов.

Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: drozhdeva.e@bk.ru
ORCID: 0009-0008-5361-378X
AuthorID (eLibrary.Ru): 1258683



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3)

Научная статья
УДК 530.182.1

DOI: 10.18500/0869-6632-003156
EDN: LVTTLP

Динамика кинка в модели φ^4 с двумя протяженными примесями

М. И. Фахретдинов✉, Е. Г. Екомасов

Уфимский университет науки и технологий, Россия
E-mail: ✉fmi106tf@gmail.com, ekomasoveg@gmail.com

Поступила в редакцию 11.11.2024, принята к публикации 27.11.2024,
опубликована онлайн 10.12.2024, опубликована 30.05.2025

Аннотация. Цель настоящего исследования — с помощью численных методов рассмотреть задачу нелинейной динамики кинков для уравнения φ^4 в модели с двумя одинаковыми протяженными «примесями» (или пространственной неоднородностью потенциала). **Методы.** Для численного решения модели φ^4 с неоднородностями использовался метод прямых для уравнений в частных производных. Кинк запускался в направлении неоднородностей с разными начальными скоростями. Изменялось также расстояние между двумя примесями. Исследовалась траектория кинка после взаимодействия с примесями. Для нахождения частот колебаний кинка после взаимодействия с пространственными неоднородностями используется дискретное преобразование Фурье. **Результаты.** Описано взаимодействие между кинком и двумя одинаковыми протяженными примесями, описываемыми функциями прямоугольного вида. Определены возможные сценарии динамики кинка с учетом резонансных эффектов в зависимости от величины параметров системы и начальных условий. Найдены критические и резонансные скорости движения кинка в зависимости от параметров примеси и расстояния между ними. Значительные различия наблюдаются в динамике кинка при взаимодействии с отталкивающими и притягивающими примесями. Установлено, что среди найденных сценариев динамики кинка для случая протяженных примесей прямоугольного вида есть сценарии резонансной динамики кинка, полученные ранее для случая одной протяженной примеси, например, квазитуннелирование и отталкивание от притягивающего потенциала. **Заключение.** Проведен анализ влияния параметров системы и начальных условий на возможные сценарии динамики кинка. Найдены критические и резонансные скорости кинка как функции от параметров примеси и расстояния между ними.

Ключевые слова: кинк, уравнение φ^4 , примесь, численное моделирование.

Для цитирования: Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г. Динамика кинка в модели φ^4 с двумя протяженными примесями // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. 412–425. DOI: 10.18500/0869-6632-003156. EDN: LVTTLP

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Kink dynamics in the φ^4 model with two extended impurities

M. I. Fakhretdinov[✉], E. G. Ekomasov

Ufa University of Science and Technology, Russia

E-mail: [✉]fmi106tf@gmail.com, ekomasoveg@gmail.com

Received 11.11.2024, accepted 27.11.2024, available online 10.12.2024, published 30.05.2025

Abstract. The purpose of this study is to use numerical methods to consider the problem of nonlinear kink dynamics for the φ^4 equation in a model with two identical extended “impurities” (or spatial inhomogeneity of the potential). *Methods.* The φ^4 model with inhomogeneities was numerically solved using the method of lines for partial differential equations. The kink was launched in the direction of the inhomogeneities with different initial velocities. The distance between the two impurities was also varied. The kink trajectory after interaction with the impurities was studied. The discrete Fourier transform was used to find the oscillation frequencies of the kink after interaction with spatial inhomogeneities. *Results.* The interaction between the kink and two identical extended impurities described by rectangular functions is described. Possible scenarios of kink dynamics are determined, taking into account resonance effects, depending on the magnitude of the system parameters and initial conditions. Critical and resonant velocities of the kink motion are found depending on the impurity parameters and the distance between them. Significant differences are observed in the kink dynamics when interacting with repulsive and attractive impurities. It is established that among the found scenarios of kink dynamics for the case of extended rectangular impurities, there are scenarios of resonant kink dynamics obtained earlier for the case of one extended impurity, for example, quasi-tunneling and repulsion from an attractive potential. *Conclusion.* An analysis of the influence of system parameters and initial conditions on possible scenarios of kink dynamics is carried out. Critical and resonant kink velocities are found as functions of the impurity parameters and the distance between them.

Keywords: kink, φ^4 equation, impurity, numerical simulation.

For citation: Fakhretdinov MI, Ekomasov EG. Kink dynamics in the φ^4 model with two extended impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(3):412–425. DOI: 10.18500/0869-6632-003156

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Уравнение Клейна-Гордона и его модификации — одно из нелинейных дифференциальных уравнений, часто исследуемых и используемых в различных приложениях. Уравнение φ^4 , относящееся к классу уравнений Клейна-Гордона [1], широко используется, например, во многих областях физики: от космологии и физики элементарных частиц до биофизики и теории конденсированного состояния [1–5]. Новый импульс к изучению этого уравнения в последние годы придало использование его для описания физических процессов в графене [6, 7]. Кинк уравнения φ^4 отличается от кинка другого типа уравнения Клейна-Гордона — уравнения синус-Гордона (УСГ) [8] — наличием внутренней моды колебаний [1]. Эта колебательная степень свободы может накапливать энергию и периодически отдавать ее, что приводит к возникновению резонансов во взаимодействиях кинк-антикинк [2, 9–11] и кинк-примесь [2, 12, 13], а также стимулировать образование пары кинк-антикинк [14]. Кинк модели φ^4 с возбужденными внутренними модами колебаний получил название воблинг-кинк [1, 15]. В уравнении φ^4 [16–20] кинки и антикинки не могут просто проходить друг через друга. Численно было установлено, что при больших скоростях кинк и антикинк неупруго отражаются друг от друга, теряя энергию. При более низких скоростях кинк и антикинк связывались в долгоживущее колебательное состояние, напоминающее бризер синус-Гордона, но медленно затухающее.

Для уравнения φ^4 пока не найдены локализованные в пространстве решения в виде солитонов и бризеров. Для аналитического нахождения бризера модели φ^4 были попытки использовать разложение в ряд по малому параметру ϵ [14, 15]. Было обнаружено, что в континуальной теории существуют только «наноптеронные» решения (осциллирующие решения с бесконечной энергией, с осциллирующими хвостами малой амплитуды, уходящими в бесконечность). Считается

в настоящее время [1], что бризер модели φ^4 — всего лишь один из примеров «слабо нелокальных» уединенных волн. «Нелокальный», потому что пространственная локализация, присущая классическому определению «уединенной» волны, нарушается квазисинусоидальным излучением, неограниченным по пространству. «Слабо», потому что амплитуда излучения очень мала. Существует «ядро» бризера модели φ^4 — это центральная часть волны с большой амплитудой. Везде за пределами ядра есть «крылья», в которых преобладают крошечные синусоидальные пульсации. Причиной нелокальности такой волны, названной наноптероном [1, с. 166], является резонанс между бризером и волновой модой линеаризованной безграничной системы [1]. Найдено также [21] долгоживущее нелинейное метастабильное связанное состояние трех кинков — «тритон». Этот объект является продуктом симметричного столкновения двух кинков и антикинка.

Для применения модели φ^4 в практических приложениях часто нужно модифицировать уравнение, внося в него дополнительные слагаемые, или считать коэффициенты функциями от координат и времени [1, 2, 22–27]. Например, часто рассматривают наличие примесей, то есть неоднородности параметра перед потенциалом. Для УСГ эта задача разработана достаточно хорошо. Рассмотрена динамика кинка и генерация локализованных волн для моделей с точечной и протяженной примесью, одной и многими примесями, изучено влияние функции, описывающей неоднородность параметра [8, 28–33]. Для модели φ^4 с примесями пока сделано намного меньше. Было показано, что одиночные точечные примеси способны рассеивать или захватывать кинки, а также генерировать локализованную примесную моду [1]. В [34] рассмотрена динамика кинков для модели с одиночными протяженными примесями, имеющими пространственные профили Гаусса или Лоренца. В [26] была подробно исследована структура динамического кинка и влияние параметров примеси прямоугольного вида на резонансную скорость отражения от одиночной притягивающей примеси. Показано не только качественное согласие полученных результатов со случаем точечных примесей, но и существенное количественное влияние профиля примеси на форму локализованной примесной моды и рассеяние кинков на примесях. В [27] рассмотрена динамика солитонов на протяженной одиночной примеси прямоугольного вида. Для УСГ было показано ранее [33, 35], что наличие двух примесей приводит к появлению новых коллективных эффектов и существенно влияет на динамику кинка. В данной работе рассмотрена динамика кинка для модели φ^4 с двумя протяженными примесями прямоугольного вида и проведено сравнение полученных результатов с уже известными для УСГ.

1. Основные уравнения и метод решения

Рассмотрим некоторое скалярное поле $u(x, t)$, для которого уравнение движения в одномерном случае имеет вид

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)(u^2 - 1)u = 0, \quad (1)$$

где $K(x)$ — некоторая функция от координаты x , учитывающая наличие примеси в системе. При $K(x) = 1$ уравнение (1) является уравнением модели φ^4 и имеет решение в виде кинка [1]:

$$u(x, t) = \tanh \frac{x - v_0 t}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}, \quad (2)$$

где v_0 — начальная скорость кинка, $0 \leq v_0 < 1$, x_0 — начальное положение кинка.

Для случая протяженных примесей и произвольного вида функции $K(x)$ уравнение (1) можно решить только численно. Рассмотрим для определенности случай $K(x)$, хорошо исследованный для УСГ, в виде двух одинаковых протяженных примесей [26], который описывается формулой:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < -\frac{W}{2}, \quad \frac{W}{2} < x < d - \frac{W}{2}, \quad x > d + \frac{W}{2}, \\ 1 - \Delta K, & -\frac{W}{2} \leq x \leq \frac{W}{2}, \quad -\frac{W}{2} + d \leq x \leq \frac{W}{2} + d, \end{cases} \quad (3)$$

где d — расстояние между примесями, W — ширина примесей, ΔK — глубина примесей (см. рис. 1). Как показано для точечных примесей ранее [1], если $\Delta K > 0$, то примесь является эффективной потенциальной ямой для кинка, при $\Delta K < 0$ — потенциальным барьером (рис. 1).

Уравнение (1) с пространственной неоднородностью вида (3) решалось численно методом линий [36] на интервале $-60 \leq x \leq 60$, $0 \leq t \leq 1000$. Шаг по координате равен 0.025. Шаг по времени автоматически выбирался программой расчета, чтобы обеспечить абсолютную точность интегрирования получившейся системы дифференциальных уравнений 10^{-8} . В качестве начального решения при $t = 0$ брался кинк вида (2), имеющий координату $x_0 = -10$. Он запускался с разными начальными скоростями v_0 в направлении примеси, и наблюдалась его динамика. Использовались граничные условия Неймана. На границах используемой численной схемы заложено сильное трение, позволяющее по прошествии некоторого времени счета избавиться от излучения свободных волн, возникающих при взаимодействии кинка с примесью и границами расчетной схемы.

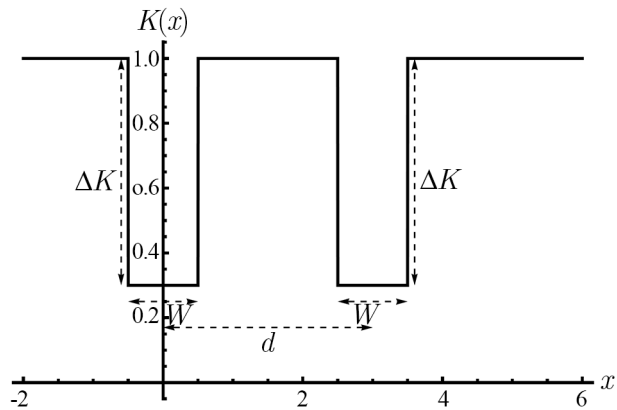


Рис. 1. Зависимость $K(x)$ вида (3)

Fig. 1. Dependence $K(x)$ of the form (3)

2. Результаты

2.1. Случай потенциального барьера. Динамика кинка. Рассмотрим вначале случай $\Delta K < 0$ при значениях параметров: $d = 5.0$, $\Delta K = -0.5$, $W = 1.0$. В отличие от случая одной протяженной примеси [26, 27], когда было найдено два возможных сценария динамики кинка, в данном случае получены четыре возможных сценария движения кинка. Возможные сценарии движения кинка показаны на рис. 2. Пунктирной линией на рис. 2 показаны центры прямоугольных примесей (барьеров). Кинк может отразиться от первого барьера и возвратиться назад (кривая 1 на рис. 2). Это, как правило, происходит при малых скоростях. При превышении некоторого порога начальной скорости кинка v_0 , обычно называемого критической скоростью, кинк v_{cr} начинает проходить оба барьера (кривая 2 на рис. 2). При некотором узком диапазоне начальных скоростей возможны два варианта динамики кинка: кинк может пройти первый барьер, отразиться от второго барьера и, пройдя еще раз первый барьер, вернуться назад (кривая 3 на рис. 2), либо кинк, пройдя первый барьер, начинает колебаться между двумя барьерами (кривая 4 на рис. 2). Траектории 3 и 4 возникают в небольшом диапазоне начальной скорости $v_0 \approx 0.46$.

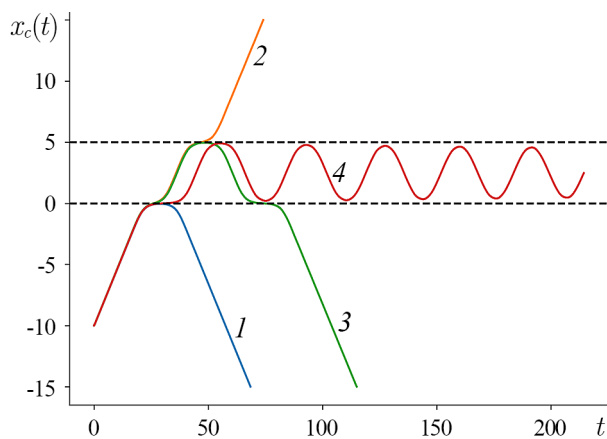


Рис. 2. Различные сценарии динамики кинка: 1 — отражение от барьеров, $v_0 = 0.4580$; 2 — прохождение барьеров, $v_0 = 0.4615$; 3 — отражение от второго барьера, $v_0 = 0.4610$; 4 — колебания между барьерами, $v_0 = 0.4584$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Various scenarios of kink dynamics: 1 — reflection from barriers, $v_0 = 0.4580$; 2 — passing barriers, $v_0 = 0.4615$; 3 — reflection from the second barrier, $v_0 = 0.4610$; 4 — oscillations between barriers, $v_0 = 0.4584$ (color online)

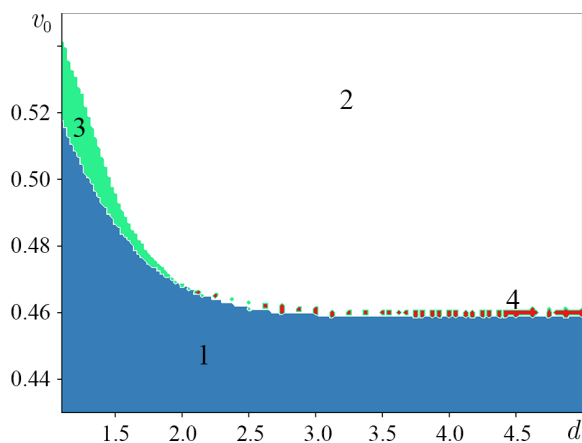


Рис. 3. Различные сценарии динамики кинка в зависимости от расстояния между барьерами и начальной скорости: 1 — отражение от барьеров; 2 — прохождение барьеров; 3 — отражение от второго барьера; 4 — колебания между барьерами (цвет онлайн)

Fig. 3. Different scenarios of kink dynamics depending on the distance between barriers and initial speed: 1 — reflection from barriers; 2 — passing barriers; 3 — reflection from the second barrier; 4 — oscillations between barriers (color online)

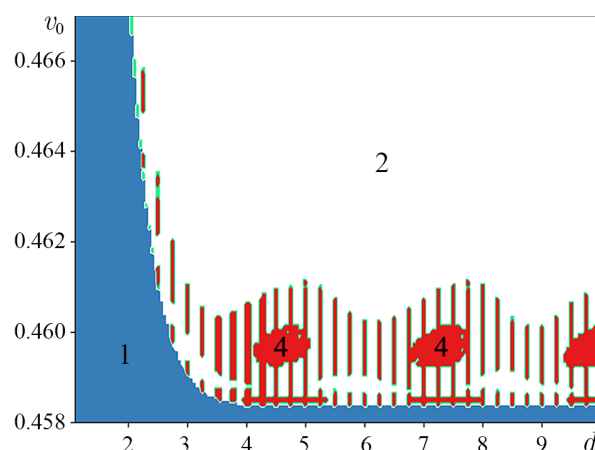


Рис. 4. Различные сценарии динамики кинка в зависимости от расстояния между барьерами и начальной скорости в области критической скорости $v_0 \approx 0.46$: 1 — отражение от барьеров; 2 — прохождение барьеров; 4 — колебания между барьерами (цвет онлайн)

Fig. 4. Various scenarios of kink dynamics depending on the distance between the barriers and the initial velocity in the critical velocity region $v_0 \approx 0.46$: 1 — reflection from barriers; 2 — passing barriers; 4 — oscillations between barriers (color online)

Отметим, что это значение скорости совпадает с точностью до тысячных с минимальной скоростью $v_{cr} = 0.46$, необходимой кинку для прохождения одной протяженной примеси [26]. Отметим, что всегда после взаимодействия с примесью начальный кинк вида (2) превращается в вобблинг-кинк (кинк с возбужденной внутренней модой колебаний), как и для случая одной примеси, рассмотренный ранее [27].

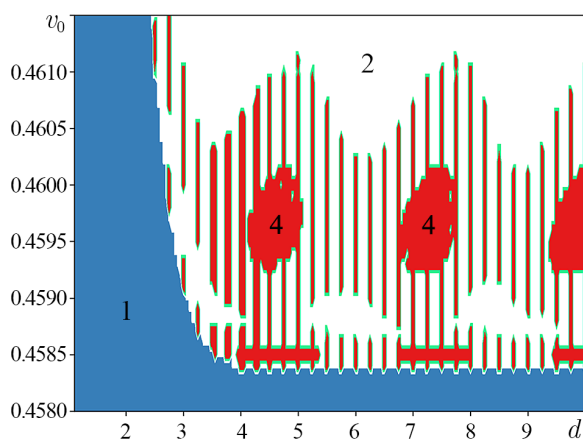


Рис. 5. Увеличенная часть рис. 4 при $4 < d < 10$: 1 — отражение от барьеров; 2 — прохождение барьеров; 4 — колебания между барьерами (цвет онлайн)

Fig. 5. Enlarged part of fig. 4 for $4 < d < 10$: 1 — reflection from barriers; 2 — passing barriers; 4 — oscillations between barriers (color online)

Зависимость режима динамики кинков от начальной скорости и расстояния между центрами барьеров d показана на рис. 3. Области 1–4 соответствуют траекториям 1–4 на рис. 2. При малых расстояниях между барьерами $d < 2$ есть переходная зона от отражения от барьеров к прохождению, при которой кинк проходит первый барьер и отражается от второго (кривая 3, рис. 2). При увеличении расстояния между барьерами в районе $v_0 = 0.46$ кинк начинает колебаться между барьерами (кривая 4, рис. 2). Рисунок получен с шагом по начальной скорости 0.001 и шагом по d , равным 0.05.

Области, в которых кинк колеблется между барьерами, имеют довольно сложную структуру, как показано на рис. 4 и рис. 5. Эти рисунки получены с шагом по начальной скорости 0.0001 и шагом по d , равным 0.05.

Зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 после взаимодействия с потенциальными барьерами имеет вид, представленный на рис. 6. Конечная скорость кинка находилась следующим образом. После взаимодействия с примесями в виде потенциальных барьеров кинк движется практически всегда с постоянной скоростью, и его конечную скорость v_f можно найти линейной аппроксимацией траектории $X_c(t) = X_0 + v_f t$. Изменяя начальную скорость кинка, можно получить $v_f(v_0)$ — зависимость конечной скорости кинка от начальной.

Видно, что для $v_0 < v_{cr}$ взаимодействие кинка с примесью практически упругое, хотя на кинке и возбуждается внутренняя мода колебаний. Заметное отличие величин начальных и конечных скоростей возникает после прохождения кинком двух примесей только при скоростях чуть больших v_{cr} и больших величинах параметра ΔK . Это можно объяснить тем, что в этом случае после столкновения с высоким барьером возбуждаются за счет кинетической энергии кинка внутренние моды колебаний, и он начинает сильно излучать объёмные волны, что заметно влияет на величину его скорости. При достаточно больших скоростях $v_0 > 0.7$ взаимодействие кинка с примесью опять практически упругое, так как при такой большой скорости кинк не успевает отдать много кинетической энергии на возбуждение внутренних мод колебаний. В области примесей при этом колебаний не наблюдается.

Более подробно траектория координаты центра кинка, колеблющегося между барьерами, показана на рис. 7 для параметров $d = 5.0$, $v_0 = 0.46$. Эти колебания сопровождаются возбуждением внутренних мод колебаний кинка и излучением кинком малоамплитудных волн. Частота колебаний кинка между барьерами для данных параметров равна примерно 0.21 (см. рис. 8), и видно, что существует только одна частота. Возбуждение локализованных на примеси колебаний при пининге, отражении или прохождении кинка не наблюдалось.

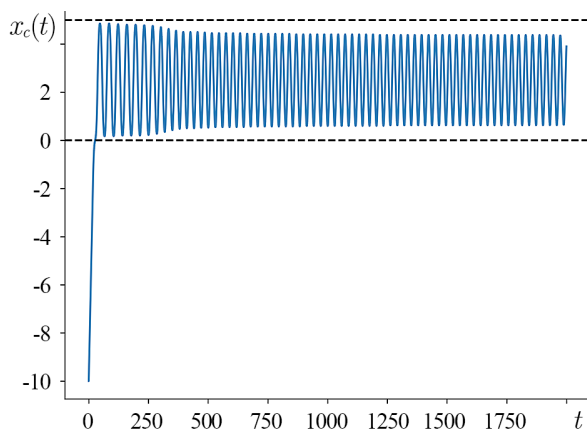


Рис. 7. Зависимость координаты центра кинка от времени ($d = 5.0$, $v_0 = 0.46$)

Fig. 7. Dependence of the kink center coordinates on time ($d = 5.0$, $v_0 = 0.46$)

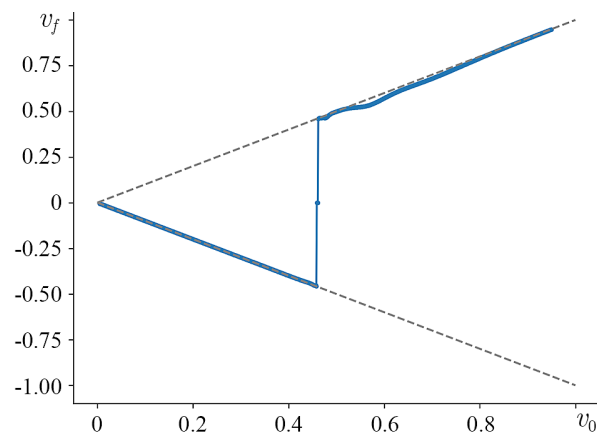


Рис. 6. Зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 после взаимодействия с потенциальными барьерами. Пунктирными линиями построены прямые $v_f = v_0$, $v_f = -v_0$

Fig. 6. Dependence of the final kink velocity v_f on the initial velocity v_0 after interaction with potential barriers. The dotted lines show the straight lines $v_f = v_0$, $v_f = -v_0$

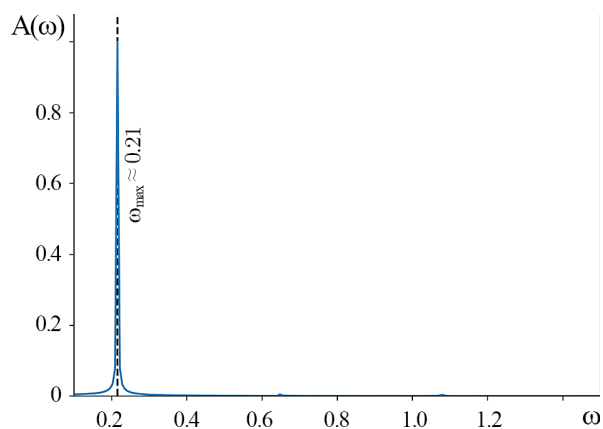


Рис. 8. Преобразование Фурье колебаний координаты центра кинка от времени ($d = 5.0$, $v_0 = 0.46$)

Fig. 8. Fourier transform of oscillations of the kink center coordinates versus time ($d = 5.0$, $v_0 = 0.46$)

2.2. Случай потенциальной ямы. Динамика кинка. Пусть теперь $\Delta K > 0$, например, $\Delta K = 0.7$, $W = 1.0$. Рассмотрим возможные сценарии динамики кинка, изменяя расстояние d между примесями и начальную скорость кинка (рис. 9). Главное отличие взаимодействия кинка с примесью типа потенциальной ямы от примеси типа барьера, как и для случая уравнения синус-Гордона [2, 8], заключается в том, что взаимодействие кинка с ямой — неупругое. Как и для случая потенциального барьера, на кинке возбуждается внутренняя мода колебаний, то есть образуется вобблинг-кинк. В центре примесей возникают локализованные колебания, которые сильно влияют на динамику кинка.

Наблюдались следующие сценарии динамики кинка: колеблется между двумя примесями (см. рис. 9 кривая 1 ($d = 1.5$, $v_0 = 0.2$)); колеблется то в области первой примеси, то в области второй, и может перескакивать между примесями (см. рис. 9 кривая 6 ($d = 2.1$, $v_0 = 0.06$)); захватывается первой примесью (при малых начальных скоростях кинка см. кривая 2 рис. 9); захватывается второй примесью (кривая 3 рис. 9); резонансно отражается от притягивающего потенциала (кривая 4 рис. 9); проходит обе примеси (кривая 5 рис. 9).

Из рис. 9 следует, что конечная скорость кинка v_f при данных параметрах примеси определяется величиной его начальной скорости. Так, если кинк движется по траекториям 1, 2, 3, 6 рис. 9, то вследствие излучения он в конце концов остановится на первой или второй примеси, и его конечная скорость будет $v_f = 0$. Конечная скорость кинка при движении по траекториям 4 и 5 рис. 9 после взаимодействия с примесями в виде потенциальных ям находится аналогично методике, описанной в параграфе 2.1.

При фиксированном расстоянии между примесями — $d = 5.1$ и $\Delta K = 0.7$, $W = 1.0$, изменяя начальную скорость кинка v_0 с шагом 0.001, можно рассчитать зависимость конечной скорости

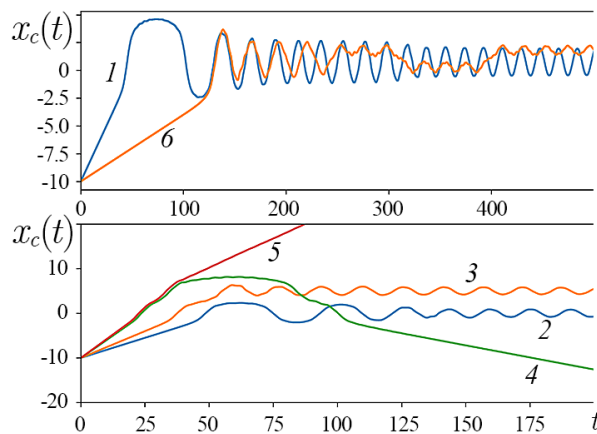


Рис. 9. Различные сценарии динамики кинка: 1 — колебания между двумя примесями ($d = 1.5$, $v_0 = 0.2$); 2 — захват на первой примеси ($d = 5.0$, $v_0 = 0.18$); 3 — захват на второй примеси ($d = 5.0$, $v_0 = 0.24$); 4 — резонансное отражение ($d = 5.0$, $v_0 = 0.4$); 5 — прохождение примесей ($d = 5.0$, $v_0 = 0.42$); 6 — перескоки между первой и второй примесью ($d = 2.1$, $v_0 = 0.06$) (цвет онлайн)

Fig. 9. Various kink dynamics scenarios: 1 — oscillations between two impurities ($d = 1.5$, $v_0 = 0.2$); 2 — capture on the first impurity ($d = 5.0$, $v_0 = 0.18$); 3 — capture on the second impurity ($d = 5.0$, $v_0 = 0.24$); 4 — resonant reflection ($d = 5.0$, $v_0 = 0.4$); 5 — passing impurities ($d = 5.0$, $v_0 = 0.42$); 6 — jumps between the first and second impurity ($d = 2.1$, $v_0 = 0.06$) (color online)

кинка от начальной (рис. 10). Для других параметров примеси, как показали численные расчеты, вид $v_f(v_0)$ будет аналогичным. Из рис. 10 видно, что при малых скоростях конечная скорость кинка равна нулю, так как наблюдаем его пининг на первой или второй примеси. Есть некоторая критическая величина начальной скорости v_{cr} , при превышении величины которой кинк проходит обе примеси. При заданных параметрах неоднородности $v_{cr} = 0.411$. Имеется на рис. 10 значение отрицательной скорости (при $v_0 = 0.408$), которое соответствует резонансному отражению от притягивающего потенциала, как и для рассмотренного ранее случая одной примеси [1, 13, 26]. При данном сценарии после взаимодействия с примесями кинк медленно движется в обратном направлении. Также в определенных диапазонах начальной скорости возможно прохождение кинком обеих примесей при скорости ниже v_{cr} . Найдено два таких диапазона начальных скоростей. Аналогично работе [26] можно назвать это явление квазитуннелированием.

В [1, 13, 26] для случая одной примеси было показано, что резонансное отражение проявляется в очень узком диапазоне

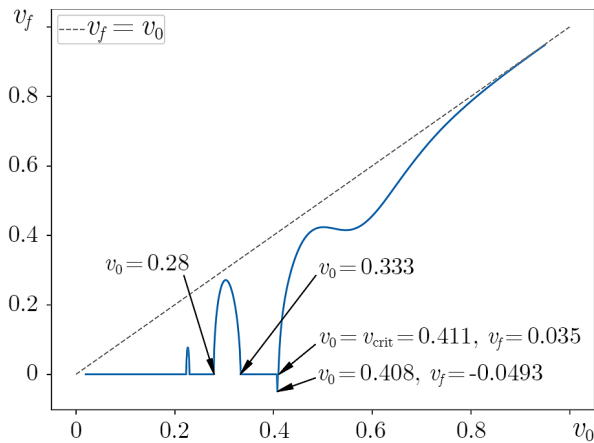


Рис. 10. Зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 при шаге по начальной скорости 0.001

Fig. 10. Dependence of the final kink velocity v_f on the initial velocity v_0 at an initial velocity step of 0.001

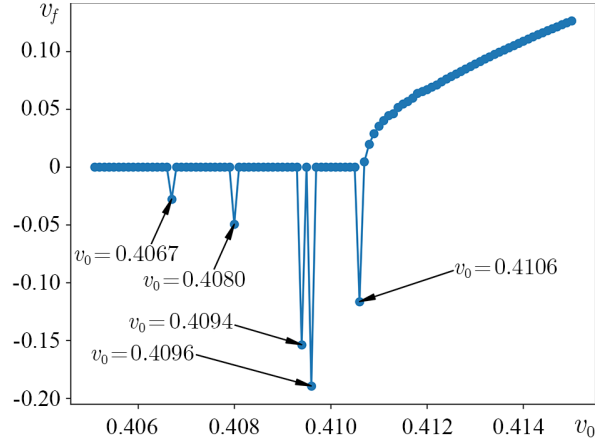


Рис. 11. Зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 при шаге по начальной скорости 0.0001. Область поиска резонансного отражения 0.4-0.42

Fig. 11. Dependence of the final kink velocity v_f on the initial velocity v_0 at an initial velocity step of 0.0001. Search area for resonant reflection 0.4-0.42

скоростей и их количество увеличивается при приближении к величине критической скорости. Для верификации результатов резонансного взаимодействия была построена зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 при уменьшенном на порядок шаге по начальной скорости — 0.0001 (см. рис. 11) вблизи области точки критической скорости v_{cr} . В этом случае на графике добавилось еще 5 диапазонов начальной скорости, в которых возникает резонансное отражение.

Рассмотрим первое из новых значений «резонансной» начальной скорости $v_0 = 0.4067$ (см. рис. 11). Если взять и опять уменьшить масштаб и рассмотреть начальные скорости уже с шагом по 0.00001 вблизи $v_0 = 0.4067$, можно получить следующую зависимость (см. рис. 12). Для остальных значений «резонансных» скоростей шага по начальной скорости, равного 0.00001, уже не хватает, но можно предположить, что зависимость будет также иметь подобный вид при уменьшении шага. В целом можно сделать вывод, что для двух протяженных примесей, по сравнению со случаем одной примеси [26], области резонансного отражения намного меньше по величине этих областей меньше, и для их нахождения при расчетах требуется меньший шаг по начальной скорости, что существенно затрудняет их нахождение.

Критическая скорость v_{cr} кинка зависит от параметров примеси и от расстояния d

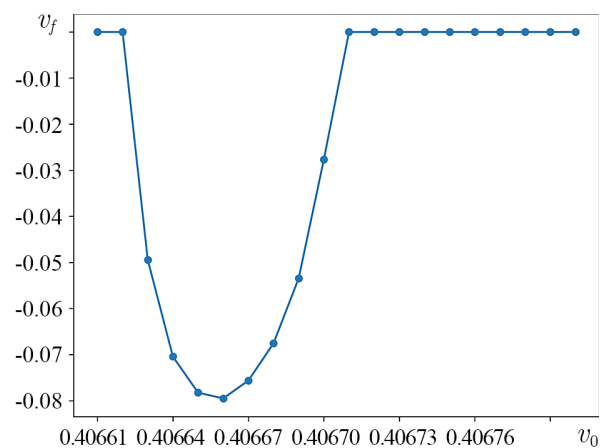


Рис. 12. Зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 при шаге по начальной скорости 0.00001. Область резонансного отражения 0.4067. Остальные окна еще намного меньше и требуют еще более мелкого шага для отрисовки

Fig. 12. Dependence of the final kink velocity v_f on the initial velocity v_0 at a step of initial velocity of 0.00001. The resonant reflection region is 0.4067. The remaining windows are still much smaller and require even smaller steps to draw

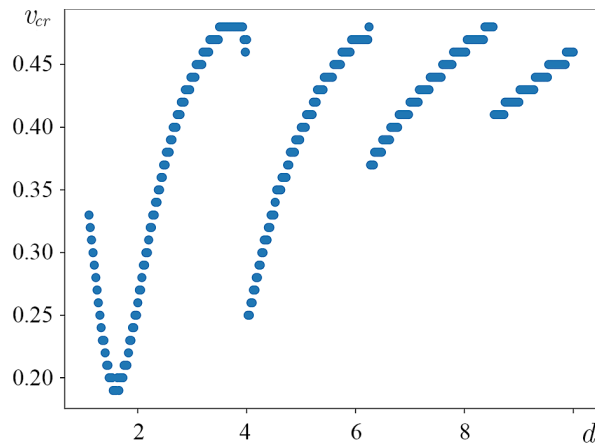


Рис. 13. Зависимость критической скорости кинка v_{cr} от расстояния между примесями

Fig. 13. Dependence of the critical kink velocity v_{cr} on the distance between impurities

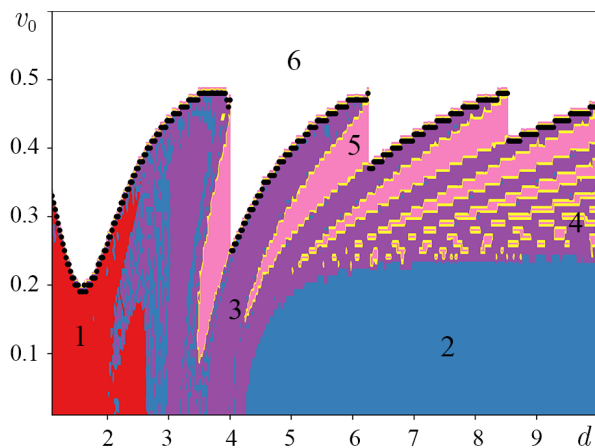


Рис. 14. Диаграмма возможных режимов динамики кинка в зависимости от начальной скорости кинка v_0 и расстояния d между протяженными примесями. Черными маркерами показаны значения критической скорости (цвет онлайн)

Fig. 14. Diagram of possible regimes of kink dynamics depending on the initial kink velocity v_0 and the distance d between extended impurities. Black markers show the critical speed values (color online)

скорости (рис. 13) хорошо ложится на диаграмму режимов динамики кинка (рис. 14). Черными маркерами показаны значения критической скорости, взятые из рис. 13.

Заключение

Определены и описаны возможные сценарии динамики кинка с учетом резонансных эффектов. Показано, что динамика кинка в (1+1)-мерной модели ϕ^4 с двумя протяженными примесями содержит новые сценарии его динамики по сравнению со случаем одной протяженной примеси.

между примесями. Методом половинного деления получена зависимость критической скорости кинка от d . Она представлена на рис. 13.

Построим диаграмму возможных сценариев динамики кинка в зависимости от начальной скорости v_0 и расстояния между примесями d (см. рис. 14). На этом рисунке цифра 1 — колебания кинка между двумя примесями, 2 — захват на первой примеси, 3 — захват на второй примеси, 4 — резонансное отражение, 5 — прохождение кинка через примеси при скорости ниже v_{cr} — квазитуннелирование, 6 — прохождение кинка через две примеси. Диаграмма для областей параметров, определяющих вид сценария динамики кинка, имеет «лепестковый» вид. При одном и том же значении параметра d при изменении начальной скорости кинка могут иметь место как различные, так и одинаковые сценарии его динамики. При постоянной начальной скорости, только меняя расстояние между примесями, также можно получить как разные, так и одинаковые сценарии динамики кинка. Так, при небольшом значении d кинк колеблется между примесями, при увеличении величины параметра d (примерно от 2 до 4) кинк хаотично останавливается то на первой, то на второй примеси. При дальнейшем увеличении $d > 4$ уже видны четкие границы разделения областей притяжения первой и второй ямы. Видно, что резонансное отражение возникает на границах лепестков (получены отдельные значения, найденные при шаге вычисления диаграммы $\Delta d = 0.01$ и $\Delta v_0 = 0.01$). Можно предположить, что если бы мы могли найти точную формулу лепестка $F(v_0, d)$ для заданных параметров примесей, то все величины начальных скоростей для резонансного отражения будут лежать на его границе. Можно заметить также, что зависимость критической

В случае примесей, которые являются потенциальными барьерами для кинка, как и в случае УСГ, он, в зависимости от начальной скорости, может либо отражаться от них, либо проходить через них, либо колебаться между ними. Его взаимодействие с примесями носит в этом случае в основном упругий характер. Для примесей, являющихся потенциальными ямами для кинка, в зависимости от начальной скорости, как и в случае УСГ, найдены следующие сценарии его динамики: захват; резонансное отражение или прохождение при скоростях меньше критической; прохождение при скоростях больше критической. Взаимодействие кинка с примесями носит в этом случае неупругий характер, связанный с затратами его энергии на возбуждение локализованных на примесях волн. Резонансное отражение и прохождение связано с возможностью резонансного взаимодействия кинка с локализованными волнами, возбуждаемыми в области примесей. Найдены зависимости критических и резонансных скоростей кинка в зависимости от параметров примеси. Построена диаграмма возможных сценариев динамики кинка в зависимости от начальной скорости и расстояния между примесями.

Список литературы

1. Kevrekidis P., Cuevas-Maraver J. A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future. Cham: Springer, 2019. 311 p. DOI: 10.1007/978-3-030-11839-6.
2. Белова Т. И., Кудрявцев А. Е. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // Успехи физических наук. 1997. Т. 167, № 4. С. 377–406. DOI:10.3367/UFNr.0167.199704b.0377.
3. Schneider T., Stoll E. Molecular-dynamics study of a three-dimensional one-component model for distortive phase transitions // Phys. Rev. B. 1978. Vol. 17, no. 3. P. 1302–1322. DOI: 10.1103/PhysRevB.17.1302.
4. Bishop A. R. Defect states in polyacetylene and polydiacetylene // Solid State Communications. 1980. Vol. 33, no. 9. P. 955–960. DOI: 10.1016/0038-1098(80)90289-6.
5. Rice M. J., Mele E. J. Phenomenological theory of soliton formation in lightly-doped polyacetylene // Solid State Communications. 1980. Vol. 35, no. 6. P. 487–491. DOI: 10.1016/0038-1098(80)90254-9.
6. Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the φ^4 field model // Phys. Rev. B. 2017. Vol. 96, no. 9. P. 094306. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306.
7. Yamaletdinov R. D., Romańczukiewicz T., Pershin Y. V. Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects // Carbon. 2019. Vol. 141. P. 253–257. DOI:10.1016/j.carbon.2018.09.032.
8. Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P., Williams F. The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer, 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
9. Belova T. I., Kudryavtsev A. E. Quasi-periodic orbits in the scalar classical $\lambda\varphi^4$ field theory // Physica D. 1988. Vol. 32, no. 1. P. 18–26. DOI: 10.1016/0167-2789(88)90085-1.
10. Marjaneh A. M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S. V., Zomorrodian M. E. High energy density in the collision of N kinks in the φ^4 model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Vol. 49. P. 30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
11. Takyi I., Weigel H. Collective coordinates in one-dimensional soliton models revisited // Phys. Rev. D. 2016. Vol. 94, no. 8, P. 085008. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.085008.
12. Malomed B. A. Perturbative analysis of the interaction of a φ^4 kink with inhomogeneities // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. Vol. 25, no. 4. P. 755–764. DOI: 10.1088/0305-4470/25/4/015.
13. Fei Z., Kivshar Y. S., Vázquez L. Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, no. 8. P. 5214–5220. DOI: 10.1103/physreva.46.5214.

14. *Romańczukiewicz T.* Creation of kink and antikink pairs forced by radiation // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006. Vol. 39, no. 13. P. 3479–3494. DOI: 10.1088/0305-4470/39/13/022.
15. *Alonso Izquierdo A., Queiroga-Nunes J., Nieto L. M.* Scattering between wobbling kinks // *Phys. Rev. D.* 2021. Vol. 103, no. 4. P. 045003. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.045003.
16. *Ablowitz M. J., Kruskal M. D., Ladik J. F.* Solitary Wave Collisions // *SIAM J. Appl. Math.* 1979. Vol. 36, no. 3. P. 428–437. DOI: 10.1137/0136033.
17. *Goodman R. H., Haberman R.* Kink-antikink collisions in the ϕ^4 Equation: The n-bounce resonance and the separatrix map // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2005. Vol. 4, no. 4. P. 1195–1228. DOI: 10.1137/050632981.
18. *Gani V. A., Kudryavtsev A. E., Lizunova M. A.* Kink interactions in the $(1 + 1)$ -dimensional ϕ^6 model // *Phys. Rev. D.* 2014. Vol. 89, no. 12, P. 125009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125009.
19. *Marjaneh A. M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S. V., Zomorrodian M. E.* High energy density in the collision of N kinks in the ϕ^4 model // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2017. Vol. 49. P. 30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
20. *Yan H., Zhong Y., Liu Y. X., Maeda K.* Kink-antikink collision in a Lorentz-violating ϕ^4 model // *Phys. Lett. B.* 2020. Vol. 807. P. 135542. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135542.
21. *Getmanov B. S.* Связанные состояния солитонов в модели теории поля ϕ_2^4 // *Письма в ЖЭТФ.* 1976. Т. 24, № 5. P. 323–327.
22. *Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G., Fatykhov M. A., Javidan K.* Effect of the ϕ^4 kink's internal mode at scattering on a PT-symmetric defect // *JETP Lett.* 2015. Vol. 101, no. 7. P. 497–502. DOI: 10.1134/S0021364015070140.
23. *Saadatmand D., Javidan K.* Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory // *Braz. J. Phys.* 2013. Vol. 43, no. 1-2. P. 48–56. DOI: 10.1007/s13538-012-0113-y.
24. *Arash G.* Dynamics of ϕ^4 kinks by using adomian decomposition method // *American Journal of Numerical Analysis.* 2016. Vol. 4, no. 1. P. 8–10. DOI: 10.12691/ajna-4-1-2.
25. *Kälbermann G.* Soliton tunneling // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, no. 6. P. R6360–R6362. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.R6360.
26. *Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Y., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G.* Kink Dynamics in the ϕ^4 model with extended impurity // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2023. Vol. 19, no. 3. P. 303–320. DOI: 10.20537/nd230603.
27. *Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Y., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G.* Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the ϕ^4 model // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024. Vol. 20, no. 1. P. 15–26. DOI: 10.20537/nd231206.
28. *Екомасов Е. Г., Самсонов К. Ю., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В.* Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми примесями // *Известия вузов. ПНД.* 2022. Т. 30, № 6. С. 749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
29. *González J. A., Bellorín A., García-Ñustes M. A., Guerrero L. E., Jiménez S., Vázquez L.* Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations // *Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 381, no. 24. P. 1995–1998. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.042.
30. *Гумеров А. М., Екомасов Е. Г., Муртазин Р. Р., Назаров В. Н.* Трансформация солитонов уравнения синус-Гордона в моделях с переменными коэффициентами и затуханием // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2015. Т. 55, № 4. С. 631–640. DOI: 10.7868/S0044466915040031.
31. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Murtazin R. R.* Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities // *Math. Methods in App. Sciences.* 2016. Vol. 40, no. 17. P. 6178–6186. DOI: 10.1002/mma.3908.

32. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V.* Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017. Vol. 312. P. 198–208. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.013.
33. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N.* Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // *Braz. J. Phys.* 2018. Vol. 48, no. 6. P. 576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
34. *Lizunova M. A., Kager J., de Lange S., van Wezel J.* Kinks and realistic impurity models in φ^4 -theory // *Int. J. Mod. Phys. B*. 2022. Vol. 36, no. 05. P. 2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500424.
35. *Екомасов Е. Г., Кудрявцев Р. В., Самсонов К. Ю., Назаров В. Н., Кабанов Д. К.* Динамика кинка уравнения синус-Гордона в модели с тремя одинаковыми притягивающими или отталкивающими примесями // *Известия вузов. ПНД*. 2023. Т. 31, № 6. С. 693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069.
36. *Schiesser W. E.* The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. New York: Academic Press, 2012. 326 p.

References

1. Kevrekidis P, Cuevas-Maraver J. A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future. Cham: Springer; 2019. 311 p. DOI: 10.1007/978-3-030-11839-6.
2. Belova TI, Kudryavtsev AE. Solitons and their interactions in classical field theory. *Phys. Usp.* 1997;40(4):359–386. DOI: 10.1070/pu1997v040n04abeh000227.
3. Schneider T, Stoll E. Molecular-dynamics study of a three-dimensional one-component model for distortive phase transitions. *Phys. Rev. B*. 1978;17(3):1302–1322. DOI: 10.1103/PhysRevB.17.1302.
4. Bishop AR. Defect states in polyacetylene and polydiacetylene. *Solid State Communications*. 1980;33(9):955–960. DOI: 10.1016/0038-1098(80)90289-6.
5. Rice MJ, Mele EJ. Phenomenological theory of soliton formation in lightly-doped polyacetylene. *Solid State Communications*. 1980;35(6):487–491. DOI: 10.1016/0038-1098(80)90254-9.
6. Yamaletdinov RD, Slipko VA, Pershin YV. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the φ^4 field model. *Phys. Rev. B*. 2017;96(9):094306. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306.
7. Yamaletdinov RD, Romańczukiewicz T, Pershin YV. Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects. *Carbon*. 2019;141:253–257. DOI: 10.1016/j.carbon.2018.09.032.
8. Cuevas-Maraver J, Kevrekidis P, Williams F. The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer; 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
9. Belova TI, Kudryavtsev AE. Quasi-periodic orbits in the scalar classical $\lambda\varphi^4$ field theory. *Physica D*. 1988;32(1):18–26. DOI: 10.1016/0167-2789(88)90085-1.
10. Marjaneh AM, Saadatmand D, Zhou K, Dmitriev SV, Zomorrodian ME. High energy density in the collision of N kinks in the φ^4 model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017;49:30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
11. Takyi I, Weigel H. Collective coordinates in one-dimensional soliton models revisited. *Phys. Rev. D*. 2016;94(8):085008. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.085008.
12. Malomed BA. Perturbative analysis of the interaction of a φ^4 kink with inhomogeneities. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1992;25(4):755–764. DOI: 10.1088/0305-4470/25/4/015.
13. Fei Z, Kivshar YS, Vázquez L. Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model. *Phys. Rev. A*. 1992;46(8):5214–5220. DOI: 10.1103/physreva.46.5214.

14. Romanczukiewicz T. Creation of kink and antikink pairs forced by radiation. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006;39(13):3479–3494. DOI: 10.1088/0305-4470/39/13/022.
15. Alonso Izquierdo A, Queiroga-Nunes J, Nieto LM. Scattering between wobbling kinks. *Phys. Rev. D.* 2021;103(4):045003. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.045003.
16. Ablowitz MJ, Kruskal MD, Ladik JF. Solitary wave collisions. *SIAM J. Appl. Math.* 1979;36(3):428–437. DOI: 10.1137/0136033.
17. Goodman RH, Haberman R. Kink-antikink collisions in the ϕ^4 equation: the n-bounce resonance and the separatrix map. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2005;4(4):1195–1228. DOI: 10.1137/050632981.
18. Gani VA, Kudryavtsev AE, Lizunova MA. Kink interactions in the $(1 + 1)$ -dimensional ϕ^6 model. *Phys. Rev. D.* 2014;89(12):125009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125009.
19. Marjaneh AM, Saadatmand D, Zhou K, Dmitriev SV, Zomorrodian ME. High energy density in the collision of N kinks in the ϕ^4 model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2017;49:30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
20. Yan H, Zhong Y, Liu YX, Maeda K. Kink-antikink collision in a Lorentz-violating ϕ^4 model. *Phys. Lett. B.* 2020;807:135542. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135542.
21. Getmanov BS. Bound states of solitons in the ϕ_2^4 field theory model. *Sov. Phys. JETP Lett.* 1976;24:291–294.
22. Saadatmand D, Dmitriev SV, Borisov DI, Kevrekidis PG, Fatykhov MA, Javidan K. Effect of the ϕ^4 kink's internal mode at scattering on a PT-symmetric defect. *JETP Lett.* 2015;101(7):497–502. DOI: 10.1134/S0021364015070140.
23. Saadatmand D, Javidan K. Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory. *Braz. J. Phys.* 2013;43(1-2):48–56. DOI: 10.1007/s13538-012-0113-y.
24. Arash G. Dynamics of ϕ^4 Kinks by Using Adomian Decomposition Method. *American Journal of Numerical Analysis.* 2016;4(1):8–10. DOI: 10.12691/ajna-4-1-2.
25. Kälbermann G. Soliton tunneling. *Phys. Rev. E.* 1997;55(6):R6360–R6362. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.R6360.
26. Fakhretdinov MI, Samsonov KY, Dmitriev SV, Ekomasov EG. Kink dynamics in the ϕ^4 model with extended impurity. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2023;19(3):303–320. DOI: 10.20537/nd230603.
27. Fakhretdinov MI, Samsonov KY, Dmitriev SV, Ekomasov EG. Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the ϕ^4 model. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024;20(1):15–26. DOI: 10.20537/nd231206.
28. Ekomasov EG, Samsonov KY, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three attracting impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(6):749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
29. González JA, Bellorín A, García-Ñustes MA, Guerrero LE, Jiménez S, Vázquez L. Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations. *Phys. Lett. A.* 2017;381(24):1995–1998. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.042.
30. Gumerov AM, Ekomasov EG, Murtazin RR, Nazarov VN. Transformation of sine-Gordon solitons in models with variable coefficients and damping. *Comput. Math. and Math. Phys.* 2015;55(4):628–637. DOI: 10.1134/S096554251504003X.
31. Ekomasov EG, Gumerov AM, Murtazin RR. Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities. *Math. Methods Appl. Sci.* 2016;40(17):6178–6186. DOI: 10.1002/mma.3908.
32. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2017;312:198–208. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.013.
33. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV, Dmitriev SV, Nazarov VN. Multisoliton dynamics in the Sine-Gordon model with two point impurities. *Braz. J. Phys.* 2018;48(6):576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.

34. Lizunova MA, Kager J, de Lange S, van Wezel J. Kinks and realistic impurity models in φ^4 -theory. Int. J. Mod. Phys. B. 2022;36(05):2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500424.
35. Ekomasov EG, Kudryavtsev RV, Samsonov KY, Nazarov VN, Kabanov DK. Kink dynamics of the sine-Gordon equation in a model with three identical attracting or repulsive impurities. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(6):693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069.
36. Schiesser WE. The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. New York: Academic Press; 2012. 326 p.



Екомасов Евгений Григорьевич — родился в с. Анучино Приморского края (1958). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (1980). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Физика магнитных явлений» (1991, МГУ) и доктора физико-математических наук по специальности «Физика конденсированного состояния» (2005, ЧелГУ). Профессор кафедры теоретической физики Уфимского университета науки и технологий. Награжден Нагрудным знаком «Почетный работник высшего образования РФ» (2011) и Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ (2008). Область исследовательских интересов — теоретическая и математическая физика, физика конденсированного состояния, спинтроника, вычислительная физика. Опубликовал более 200 научных и методических работ.

Россия, Республика Башкортостан, 450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32
 Башкирский государственный университет
 E-mail: ekomasoveg@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-6194-3358
 AuthorID (eLibrary.Ru): 29060



Фахретдинов Марат Ирекович — родился в Уфе (1984). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (2007). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Теоретическая физика». Доцент кафедры теоретической физики Уфимского университета науки и технологий. Область исследовательских интересов — нелинейные волны, вычислительная физика. Опубликовал около 50 научных и методических работ.

Россия, Республика Башкортостан, 450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32
 Башкирский государственный университет
 E-mail: fmi106tf@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-5338-2933
 AuthorID (eLibrary.Ru): 586430



Подписка на печатную версию

Подписной индекс издания 73498

Оформить подписку на печатную версию можно
в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru)

Журнал выходит 6 раз в год

Цена свободная

Электронная версия журнала находится

в открытом доступе (andjournal.sgu.ru)

Все статьи журнала публикуются на условиях лицензии
CC-BY 4.0 (Creative Commons Attribution 4.0 International
License)

Адрес редакции (редакционно-издательский отдел):

410012 Саратов, ул. Большая Казачья, 112А, ауд. 301

Тел.: +7(927)-625-9020 (зав. редакцией)

E-mail: andjournal@sgu.ru

Website: andjournal.sgu.ru

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. N. Chumachenko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

MANAGING EDITOR

M. V. Sysoeva, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

S. Boccaletti, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

A. M. Bykov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

N. S. Ginzburg, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

O. I. Kanakov, Ph.D., Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

A. V. Kraskov, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

N. V. Kuznetsov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

G. van Luijelaar, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

A. Lüttjohann, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

I. I. Mokhov, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

A. B. Neiman, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

V. I. Nekorkin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

V. V. Tuchin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

E. Ya. Frisman, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute for Complex Analysis of Regional Problems of the RAS (Birobidzhan, Russia)

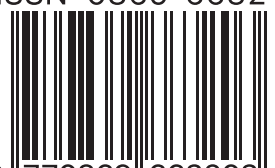
V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

V. A. Cherepenin, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >