

# Прикладная Деловая Динамика



*70 лет Александру Николаевичу Писарчику  
(3 июня 1954 года)*

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Ю. В. Гуляев*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

## ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*И. В. Сысоев*, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*А. Н. Чумаченко*, д. геогр. н., СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

## ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

*В. М. Аникин*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*Б. П. Безручко*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*С. Боккалетти*, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

*А. М. Быков*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*В. А. Вакорин*, Ph.D., Университет Саймона Фрейзера (Ванкувер, Канада)

*С. В. Гонченко*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*Н. С. Гинзбург*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*А. С. Дмитриев*, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*С. А. Кащенко*, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

*А. В. Красков*, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

*Н. В. Кузнецов*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

*Ж. ван Луйтелаар*, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

*А. Люттйоханн*, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

*Г. Г. Малинецкий*, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

*В. В. Матросов*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*И. И. Мохов*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

*А. Б. Нейман*, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

*В. И. Некоркин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*А. С. Пиковский*, доктор наук, Потсдамский университет (Потсдам, Германия)

*А. Н. Писарчик*, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

*А. В. Порубов*, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*В. В. Тучин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

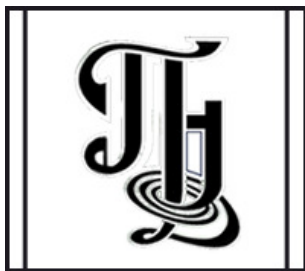
*А. М. Фейгин*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*В. А. Царёв*, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А (Саратов, Россия)

*В. А. Черепенин*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*М. В. Шитикова*, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

*В. Г. Яхно*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений  
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*Научно-технический журнал*

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

- Учредитель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru
- Издатель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (uralpress.ru). Цена свободная

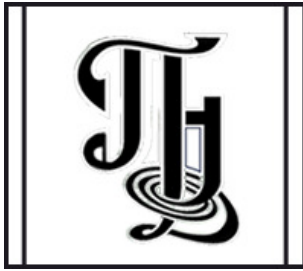
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией М. В. Сысоева  
Редакторы: А. Р. Нигметулина,  
Н. Г. Шаповалова  
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,  
Астраханская, 83. Тел.: +7 (909) 3367208,  
e-mail: andjournal@sgu.ru,  
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 13.05.2024  
Вышел в свет 31.05.2024  
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 15,58 (16,75)  
Тираж 100 экз. Заказ № 73-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского  
университета. Адрес типографии: Россия,  
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8  
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: [sguprint@bk.ru](mailto:sguprint@bk.ru)



**Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy**  
**APPLIED NONLINEAR DYNAMICS**

*Scientific-technical journal*

Published since 1993, 6 issues per year

**The journal was founded by** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

**The publisher of the journal is** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies ([ural-press.ru](http://ural-press.ru))

The journal is Open Access

Head of Editorial office M. V. Sysoeva  
Editors: A. R. Nigmatulina, N. G. Shapovalova  
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,  
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (909) 3367208,  
e-mail: [andjournal@sgu.ru](mailto:andjournal@sgu.ru),  
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 13.05.2024. Published 31.05.2024  
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 15,58 (16,75)  
Edition of 100 copies. Order No. 73-T

Printed by Printing House of Saratov State  
University. Address of Printing House:  
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,  
Russia. Ph.: +7 (8452) 273385, e-mail: [sguprint@bk.ru](mailto:sguprint@bk.ru)



СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОТ РЕДАКТОРА

*Храмов А. Е.* Профессор Александр Писарчик: научные достижения и 70 лет продуктивной деятельности ..... 289

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

*Нгуен Б. Х., Цибулин В. Г.* Схема повышенного порядка точности для моделирования динамики хищника и жертвы на неоднородном ареале ..... 294

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

*Рожнев А. Г., Мельникова М. М., Рыскин Н. М.* Спектральный подход с итерационным уточнением граничных условий излучения для моделирования квазисобственных мод открытых резонаторов гиротронов ..... 305

*Сычев А. В., Постников Е. Б.* О взаимосвязи наблюдаемой динамики колориметрического индикатора с нелинейной динамикой исследуемого популяционного роста в случае микробиологических культур ..... 332

*Фатеев Д. В., Машинский К. В.* Электродинамический метод расчета спектров поглощения плазмонов в прямоугольнике с двумерным электронным газом, возбужденных падающей электромагнитной волной ..... 347

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

*Корнилов М. В., Капустников А. А., Созонов Е. А., Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Режимы синхронизации в кольце нейронов гиппокампа грызунов при лимбической эпилепсии ..... 357

*Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю.* Новый подход к математическому моделированию химических синапсов ..... 376

*Stasenko S. V., Shemagina O. V., Eremin E. V., Yakhno V. G., Parin S. B., Poleyaya S. A.* Using machine learning algorithms to determine the emotional maladjustment of a person by his rhythmogram [Стасенко С. В., Шемагина О. В., Еремин Е. В., Яхно В. Г., Парин С. Б., Полевая С. А. Использование алгоритмов машинного обучения для определения эмоциональной дезадаптации человека по его ритмограмме] ..... 394

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

*Селезнев М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А.* Детектирование сфокусированных пучков поверхностных магнитостатических волн в структурах YIG/Pt ..... 405

**C O N T E N T S**

EDITORIAL

*Hramov A. E.* Professor Alexander Pisarchik: scientific achievements and 70 years of productive activity ..... 289

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

*Nguyen B. H., Tsybulin V. G.* High order accuracy scheme for modeling the dynamics of predator and prey in heterogeneous environment ..... 294

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

*Rozhnev A. G., Melnikova M. M., Ryskin N. M.* Spectral approach with iterative clarification of a radiation boundary conditions for modeling of quasimodes of a gyrotrons open cavities ..... 305

*Sychev A. V., Postnikov E. B.* On the relationship between the observed dynamics of a colorimetric indicator and the nonlinear dynamics of the population growth under study in the case of microbial cultures ..... 332

*Fateev D. V., Mashinsky K. V.* Electrodynamic approach for calculating the absorption spectra of plasmons in a rectangle with a two-dimensional electron gas excited by an incident electromagnetic wave ..... 347

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

*Kornilov M. V., Kapustnikov A. A., Sozonov E. A., Sysoeva M. V., Sysoev I. V.* Synchronization regimes in the ring of rodent hippocampal neurons at limbic epilepsy ..... 357

*Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu.* A new approach to mathematical modeling of chemical synapses ..... 376

*Stasenko S. V., Shemagina O. V., Eremin E. V., Yakhno V. G., Parin S. B., Polevaya S. A.* Using machine learning algorithms to determine the emotional maladjustment of a person by his rhythmogram ..... 394

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

*Seleznev M. E., Dudko G. M., Nikulin Y. V., Khivintsev Y. V., Sakharov V. K., Kozhevnikov A. V., Vysotskii S. L., Filimonov Y. A.* Detection of focused beams of surface magneto-static waves in YIG/Pt structures ..... 405



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(3)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-003106  
EDN: ACBPTE

**Профессор Александр Писарчик:  
научные достижения и 70 лет продуктивной деятельности**

*А. Е. Храмов*

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, Россия

E-mail: ✉ [hramovae@gmail.com](mailto:hramovae@gmail.com)

*Поступила в редакцию 18.03.2024, опубликована 31.05.2024*

*Для цитирования:* Храмов А. Е. Профессор Александр Писарчик: научные достижения и 70 лет продуктивной деятельности // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 289–293. DOI: 10.18500/0869-6632-003106. EDN: ACBPTE

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

3 июня 2024 года исполняется 70 лет Александру Николаевичу Писарчику — блестящему исследователю с мировым именем в области лазерной физики, нелинейной динамики и ее приложений в науках о мозге. Этот юбилей является отличной возможностью взглянуть на его впечатляющий научный путь и вклад в развитие мировой нелинейной науки.

Научная карьера Александра Николаевича началась после окончания физического факультета Белорусского государственного университета. По распределению он попадает в Институт тепло- и массообмена, а затем поступает в аспирантуру Института физики Белорусской академии наук (Минск) в лабораторию молекулярной кинетики, где в 1990 году защищает диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальностям «Оптика» и «Квантовая электроника».

В 1990-х годах Александр Николаевич работает во многих университетах Европы: Либре де Брюссель, Автономный университет Барселоны, Университет Исландии и др. Его научные интересы все больше смещаются в область нелинейной динамики, где глубокое знание квантовой электроники позволяет ему основать новое научное направление, связанное с исследованием нелинейных явлений и их приложений в лазерных системах.

Значительное развитие это направление получает в Центре оптических исследований (Леон, Гуанахуато, Мексика), где в 1999 году в рамках гранта государственного совета по науке и технологиям Мексики его приглашают создать Патримониальную кафедру передового опыта.

В 2001 году его принимают в Систему национальных исследователей Мексики, а через 5 лет удостаивают высшего уровня, что эквивалентно профессорскому званию. Его авторитет и роль в научном сообществе Мексики столь высоки, что в 2010 году всеобщим голосованием мексиканских ученых Александра Николаевича избирают членом Экспертной комиссии Системы национальных исследователей при Государственном комитете по науке и технологиям Мексики.

В 2013 году он выигрывает самый престижный испанский грант Исаака-Перала для создания кафедры вычислительной системной биологии в Центре биомедицинских технологий Мадридского политехнического университета, которой и руководит на протяжении многих лет. С этого момента его научные интересы все больше лежат в области изучения живых систем и наибольший интерес вызывают загадки мозга, поэтому он преимущественно начинает работать над задачами когнитивной нейронауки.

В настоящее время А. Н. Писарчик является заслуженным исследователем в Центре биомедицинских технологий Мадридского технического университета. Отметим, что Александр Николаевич никогда не прерывал тесных плодотворных научных и дружеских связей с российской наукой. Так, в 2016–2019 гг. он работал в НОЦ «Системы искусственного интеллекта и нейротехнологии» Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю. А.,

в 2019–2021 гг. — в Лаборатории нейронауки и когнитивных технологий Университета Иннополис, с 2021 года активно сотрудничает в рамках программы Приоритет-2030 и грантов Российского научного фонда с Балтийским центром нейротехнологий и искусственного интеллекта Балтийского федерального университета им. И. Канта.

Александр Николаевич является главным редактором международного научного журнала *Advances in Biology, Biotechnology and Genetics*, заместителем главного редактора журналов *Applied Science, Discontinuity, Nonlinearity and Complexity, Frontiers in Network Physiology, Biophysical Review and Letters*, а также членом редколлегии журналов *PLoS One, Artificial Intelligence in Health (AIH), Scholarly Journal of Psychology and Behavioral Sciences, Open Life Sciences, Open Electrical and Electronic Engineering Journal*, «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Врач и информационные технологии».

Александр Николаевич опубликовал 4 коллективные монографии [1–4] и 17 глав книг, являлся приглашенным редактором большого числа специальных выпусков журналов и материалов научных конференций. Им опубликовано более 300 научных рецензируемых статей, наиболее цитируемые из которых (по версии Google Scholar) представлены в библиографии к данной статье и отражают широкие научные интересы юбиляра [5–16]. Под его руководством защищены 11 докторских (Ph.D.) диссертаций.



Совместный визит сотрудников Университета Иннополис и А. Н. Писарчика на конференцию NOLTA'2019: между заседаниями секций (декабрь 2019, Куала-Лумпур, Малайзия). Слева направо: А. В. Андреев, В. А. Максименко, А. Н. Писарчик, А. Е. Храмов, С. А. Куркин





А. Н. Писарчик с визитом в Лабораторию нейронауки и когнитивных технологий Университета Иннополис (апрель 2019, Иннополис, Россия). Слева направо: С. А. Куркин, А. А. Бадарин, А. В. Андреев, А. Н. Писарчик, А. Е. Храмов, В. А. Максименко, В. В. Грубов., Е. Н. Пицик и Н. С. Фролов

Профессор Писарчик является членом правления Международного общества физики и контроля (IPACS), Почетным членом Розалинды London Journals Press, а также членом Европейского физического общества, Мексиканского физического общества, Мексиканской академии оптики, Национальной системы экспертов в области науки и техники Мексики, Общества промышленной и прикладной математики (SIAM), Американской ассоциации содействия развитию науки, Нью-Йоркской академии наук, Международного общества оптики и фотоники (SPIE), Института инженеров электротехники и электроники (IEEE), Центра испанской сети биомедицинских исследований (CIBER), Итальянского общества хаоса и сложности (SICC). Он получил различные научные награды, в том числе первую премию Национальной академии наук Беларуси за исследования в области нелинейной динамики сложных систем (1999).

За этим формальным перечислением этапов научной карьеры и научного признания Александра Николаевича скрывается не только выдающийся специалист в своей области, но и прекрасный наставник, вдохновитель, коллега и друг для многих исследователей, работающих в области нелинейной динамики по всему миру. Своими мудрыми советами, глубокими знаниями и бесконечным энтузиазмом он вдохновляет и мотивирует коллег и учеников на постижение новых научных высот.

Александр Николаевич не боится ставить амбициозные цели в новых для него направлениях. Так, в 2014 году он начинает исследования мультстабильного восприятия неоднозначных зрительных стимулов (иллюзий) у человека, что было совершенно новой сферой деятельности в науке. За несколько последующих лет им были получены и опубликованы пионерские результаты в этой области, которые позволили связать шумовые процессы в нейронных ансамблях мозга с механизмами принятия решений человеком, более глубоко понять особенности информационных процессов в мозге при сенсомоторной интеграции, научиться классифицировать состояния мозга по данным нейровизуализациям и т. д.

Для меня огромная честь, что мне посчастливилось вместе с Александром Николаевичем принять участие во многих исследованиях в этом направлении. Я с большой теплотой вспоминаю свои визиты в Центр биомедицинских исследований Мадридского технического университета, где мы проводили совместные эксперименты по бистабильному восприятию с использованием МЭГ-машины, визиты Александра Николаевича в Саратовский технический университет и в Университет Иннополис (Казань) и наши вечерние посиделки у меня на кухне, где мы до глубокой ночи обдумывали новые эксперименты и математические подходы.

За годы активной научной деятельности профессор Писарчик внес огромный вклад в различные аспекты нелинейной динамики, открывая новые горизонты и расширяя наше понимание сложности и неоднозначности мира. Наибольший вклад Александр Николаевич внес в постижение такого важного явления, как мультистабильность в физических и живых системах. Его исследования в этой области позволили связать эффекты в физических системах, в первую очередь, в лазерах, с явлениями, которые мы наблюдаем в живых системах и даже в поведении человека. Как истинный физик Александр Николаевич никогда не ограничивается только эмпирическими подходами и экспериментами, он всегда старается докопаться до сути явления, строит элегантные математические модели, которые позволяют описать и объяснить наблюдаемые физические явления. В частности, результаты его пионерских исследований по управлению мультистабильностью и эффекту когерентного резонанса в физических и живых системах, совместно с работами других авторов, обобщены в обзорных статьях, опубликованных в одном из самых престижных физических журналов [5, 15]. Эти исследования привели к пониманию важности изучения стохастических процессов в нейронной сети головного мозга [16].

Научные достижения Александра Николаевича не только повлияли на развитие конкретных научных направлений, но и проложили путь к инновациям. В частности, здесь можно отметить серию работ А. Н. Писарчика по применению хаотической синхронизации для скрытой передачи информации, в том числе и с использованием лазерных систем [7, 8].

Но какие бы задачи не ставил перед собой Александр Николаевич, он всегда демонстрирует высокий уровень профессионализма, страсть к науке и стремление к постоянному совершенствованию. Он придерживается убеждения, что «истинный ученый должен работать круглосуточно, не застревать надолго на одном направлении, а время от времени менять тему исследований, а также иногда писать монографии».

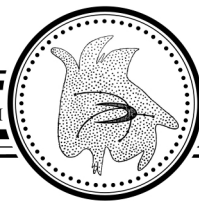
*Коллеги и друзья поздравляют Александра Николаевича с 70-летием и выражают глубокую благодарность за его многогранный и ценный вклад в мировую науку. Мы желаем ему крепкого здоровья, новых научных идей и выдающихся результатов!*

## Список литературы

1. Boccaletti S., Pisarchik A. N., Del Genio C. I., Amann A. Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 264 p. DOI: 10.1017/9781107297111.
2. Pisarchik A. N., Hramov A. E. Multistability in Physical and Living Systems: Characterization and Applications. Cham: Springer, 2022. 424 p. DOI: 10.1007/978-3-030-98396-3.
3. Recent Achievements in Laser Dynamics: Control and Synchronization. Pisarchik A. N. (ed). Kerala: Research Singpost, 2008.
4. Orlando G., Pisarchik A. N., Stoop R. Nonlinearities in Economics: An Interdisciplinary Approach to Economic Dynamics, Growth and Cycles. Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance. Vol. 29. Springer, 2021. 360 p. DOI: 10.1007/978-3-030-70982-2.

5. *Pisarchik A. N., Feudel U.* Control of multistability // *Physics Reports*. 2014. Vol. 540, iss. 4. P. 167–218. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.02.007.
6. *Pisarchik A. N., Jaimes-Reátegui R., Sevilla-Escoboza R., Huerta-Cuellar G., Taki M.* Rogue waves in a multistable system // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107, iss. 27. P. 274101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.274101.
7. *Pisarchik A. N., Zanin M.* (2008). Image encryption with chaotically coupled chaotic maps // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2008. Vol. 237, iss. 20. P. 2638–2648. DOI: 10.1016/j.physd.2008.03.049.
8. *Pisarchik A. N., Flores-Carmona N. J., Carpio-Valadez M.* Encryption and decryption of images with chaotic map lattices // *Chaos*. 2006. Vol. 16, no. 3. 033118. DOI: 10.1063/1.2242052.
9. *Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N.* Physical principles of brain–computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states // *Physics Reports*. 2021. Vol. 918, iss. 6. P. 1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
10. *Chholak P., Niso G., Maksimenko V. A., Kurkin S. A., Frolov N. S., Pitsik E. N., Hramov A. E., Pisarchik A. N.* Visual and kinesthetic modes affect motor imagery classification in untrained subjects // *Scientific Reports*. 2019. Vol. 9, iss. 1. P. 9838. DOI: 10.1038/s41598-019-46310-9.
11. *Maksimenko V. A., Kurkin S. A., Pitsik E. N., Musatov V. Y., Runnova A. E., Efremova T. Y., Hramov A. E., Pisarchik A. N.* Artificial neural network classification of motor-related EEG: An increase in classification accuracy by reducing signal complexity // *Complexity*. 2018. Vol. 2018. P. 1–10. DOI: 10.1155/2018/9385947.
12. *Pisarchik A. N., Goswami B. K.* Annihilation of one of the coexisting attractors in a bistable system // *Physical Review Letters*. 2000. Vol. 84, iss. 7. P. 1423. DOI: 10.1103/PhysRevLett.84.1423.
13. *Pisarchik A. N., Jaimes-Reátegui R., Villalobos-Salazar J. R., Garcia-Lopez J. H., Boccaletti S.* Synchronization of chaotic systems with coexisting attractors // *Physical Review Letters*. 2006. Vol. 96, iss. 24. P. 244102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.244102.
14. *Maksimenko V. A., Pavlov A., Runnova A. E., Nedaivozov V., Grubov V., Koronovskii A., Pchelintseva S. V., Pitsik E. N., Pisarchik A. N., Hramov A. E.* Nonlinear analysis of brain activity, associated with motor action and motor imagery in untrained subjects // *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 91, iss. 9. P. 2803–2817. DOI: 10.1007/s11071-018-4047-y.
15. *Pisarchik A. N., Hramov A. E.* Coherence resonance in neural networks: Theory and experiments // *Physics Reports*. 2023. Vol. 1000, iss. L453–L457. P. 1–57. DOI: 10.1016/j.physrep.2022.11.004.
16. *Писарчик А. Н., Храмов А. Е.* Стохастические процессы в нейронной сети головного мозга и их влияние на восприятие и принятие решений // *Успехи физических наук*. 2023. Т. 193, вып. 12. С. 1298–1324. DOI: 10.3367/UFNe.2022.12.039309.





Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(3)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003105  
EDN: OXPRAL

### Схема повышенного порядка точности для моделирования динамики хищника и жертвы на неоднородном ареале

Б. Х. Нгуен<sup>✉</sup>, В. Г. Цибулин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: ✉kng@sfedu.ru, vgcibulin@sfedu.ru

Поступила в редакцию 26.01.2024, принята к публикации 14.02.2024,

опубликована онлайн 5.04.2024, опубликована 31.05.2024

**Аннотация.** Цель настоящей работы — построение компактной схемы метода конечных разностей для моделирования динамики хищника и жертвы на основе уравнений реакции–диффузии–адвекции с переменными коэффициентами. **Методы.** Для дискретизации пространственно-неоднородной задачи с нелинейными членами таксисного и локального взаимодействия применяется интегро-интерполяционный метод. Плотности видов определяются на основной сетке, а их потоки вычисляются в узлах смещенной сетки. Интегрирование по времени проводится методом Рунге–Кутты высокого порядка. **Результаты.** Для случая одномерного кольцевого ареала на трехточечном шаблоне построена разностная схема, позволяющая повысить порядок точности по сравнению со стандартной схемой второго порядка аппроксимации. Представлены результаты вычислительного эксперимента и проведено сравнение схем для стационарных и нестационарных решений. На основе процесса Эйткена для последовательностей пространственных сеток реализованы вычисления эффективного порядка точности. Рассчитанные значения для предложенной схемы были больше стандартных двух: для диффузионной задачи получались значения не меньше четырех, уменьшение до трех было отмечено при учете направленной миграции. Эти выводы были подтверждены и при расчете нестационарных режимов колебаний. **Заключение.** Полученные результаты демонстрируют эффективность построенной схемы расчета динамики системы хищника и жертвы на неоднородном ареале обитания.

**Ключевые слова:** компактные схемы, неоднородный ареал, системы хищника и жертвы.

**Благодарности.** Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке РФФ, грант № 23-21-00221.

**Для цитирования:** Нгуен Б. Х., Цибулин В. Г. Схема повышенного порядка точности для моделирования динамики хищника и жертвы на неоднородном ареале // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 294–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003105. EDN: OXPRAL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## High order accuracy scheme for modeling the dynamics of predator and prey in heterogeneous environment

B. H. Nguyen✉, V. G. Tsybulin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: ✉kng@sfedu.ru, vgcibulin@sfedu.ru

Received 26.01.2024, accepted 14.02.2024, available online 5.04.2024, published 31.05.2024

**Abstract.** The aim of this work is to develop a compact finite-difference approach for modeling the dynamics of predator and prey based on reaction-diffusion-advection equations with variable coefficients. *Methods.* To discretize a spatially inhomogeneous problem with nonlinear terms of taxis and local interaction, the balance method is used. Species densities are determined on the main grid whereas fluxes are computed at the nodes of the staggered grid. Integration over time is carried out using the high-order Runge-Kutta method. *Results.* For the case of one-dimensional annular interval, the finite-difference scheme on the three-point stencil has been constructed that makes it possible to increase the order of accuracy compared to the standard second-order approximation scheme. The results of computational experiment are presented and comparison of schemes for stationary and non-stationary solutions is carried out. We conduct the calculation of accuracy order basing on the Aitken process for sequences of spatial grids. The calculated values of the effective order accuracy for the proposed scheme were greater than the standard two: for the diffusion problem, values of at least four were obtained. Decrease was obtained when directional migration was taken into account. This conclusion was also confirmed for non-stationary oscillatory regimes. *Conclusion.* The results demonstrate the effectiveness of the derived scheme for dynamics of predator and prey system in a heterogeneous environment.

**Keywords:** compact schemes, heterogeneous environment, predator and prey systems.

**Acknowledgements.** The work was carried out at the Southern Federal University with the support of the Russian Science Foundation, grant No. 23-21-00221.

**For citation:** Nguyen BH, Tsybulin VG. High order accuracy scheme for modeling the dynamics of predator and prey in heterogeneous environment. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(3):294–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003105

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Компактные схемы позволяют повысить порядок разностных аппроксимаций и обеспечить желаемую точность с минимальными вычислительными затратами [1, 2]. Их развитие и применение в задачах акустики, гидро- и аэродинамики описано в статьях, обзоры которых приведены в [3–7]. Для линейных задач порядок аппроксимации устанавливается подстановкой точного решения в разностные аналоги уравнений и прямым разложением в ряд Тейлора [8]. В случае нелинейных задач применяются вычислительные процедуры на сгущающихся сетках типа Ричардсона, Рунге, Эйткена [9]. Существуют подходы, основанные на разностных аппроксимациях по пространству и по времени, а также варианты метода прямых, в которых разностная аппроксимация проводится по пространственным переменным, а по времени используются методы типа Рунге–Кутты. Высокие порядки интеграторов по времени [10] позволяют сосредоточиться только на аппроксимациях по пространственным координатам.

При исследовании моделей популяционной динамики, основанных на уравнениях реакции–диффузии–адвекции, требуется вычислять и анализировать стационарные решения, а также колебательные режимы, особенно для систем, описывающих взаимодействие хищников и жертв [11–14]. Применение схем повышенного порядка точности для проблем математической биологии встречается достаточно редко. В [3] компактная разностная схема высокого порядка

реализована для решения одномерной по пространству задачи реакции–адвекции–диффузии, а в [4] предложена аппроксимация трехмерного уравнения конвекции–диффузии для случая неравномерной сетки. В [5] использовались конечно-разностные аппроксимации по временной и пространственной координатам для уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера. Для решения уравнений реакции-диффузии с переменными коэффициентами и нелинейным источником членом в [6] разработана компактная конечно-разностная схема четвертого порядка. В [7] рассмотрена модель хемотаксиса для системы с кросс-диффузией и логистическим источником.

В данной работе для решения нелинейных уравнений системы хищника и жертвы используется метод прямых аналогично схеме со смещенными сетками, разработанной в [15, 16]. Плотности видов определяются на основной сетке, а их потоки вычисляются в узлах смещенной сетки. Дискретизация задачи для кольцевого ареала проводится на трехточечном шаблоне. Для интегрирования по времени применяется метод Рунге–Кутты высокого порядка.

### 1. Математическая модель хищника и жертвы на неоднородном ареале

Для описания пространственно-временного взаимодействия хищника и жертвы используются уравнения реакции–диффузии–адвекции [11, 13]. В случае одномерного ареала математическая модель может быть записана в виде системы уравнений относительно плотностей жертвы  $u(x, t)$  и хищника  $v(x, t)$  [15, 16]

$$\dot{u} = -q'_1 + F_1, \quad q_1 = -k_1 u' + u\varphi'_1, \quad (1)$$

$$\dot{v} = -q'_2 + F_2, \quad q_2 = -k_2 v' + v\varphi'_2, \quad (2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ , а штрихом — производная по  $x$ . Члены  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) описывают локальное взаимодействие видов на основе функционального отклика Холлинга второго рода, модели роста гиперболического типа для жертвы и линейного закона убьели хищника [17]

$$F_1(u, v) = u \left[ u \left( 1 - \frac{u}{p} \right) - \frac{v}{1 + Cu} \right], \quad F_2(u, v) = v \left[ -\lambda + \frac{Bu}{1 + Cu} \right]. \quad (3)$$

Здесь  $p = p(x)$  — ресурс,  $\lambda$  — коэффициент смертности,  $B$  — прирост хищника в результате контакта с жертвой, а  $C$  позволяет учесть инертность хищника при поиске, поглощении и переработке жертвы.

В выражениях для потоков  $q_i$  (формулы (1)–(2)) первое слагаемое характеризует диффузию, а второе отвечает за направленную миграцию (таксис) [13, 16]. Функция  $\varphi_1$  включает таксис жертвы на неравномерно распределенный вдоль ареала ресурс  $p(x)$ , миграцию от особей своего вида ( $-\beta_{11}u$ ) и от хищника ( $-\beta_{12}v$ ). Функция  $\varphi_2$  описывает таксис хищника на жертву ( $\beta_{21}u$ ) и таксис ( $-\beta_{22}v$ ) от сгущения хищников [16]:

$$\varphi_1 = \alpha p - \beta_{11}u - \beta_{12}v, \quad \varphi_2 = \beta_{21}u - \beta_{22}v. \quad (4)$$

Коэффициенты диффузии  $k_i$  и направленной миграции  $\alpha, \beta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) являются неотрицательными величинами.

Система (1)–(4) дополняется условиями периодичности при  $x = 0$  ( $x = a$ ):

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(a, t), & q_1(0, t) &= q_1(a, t), \\ v(0, t) &= v(a, t), & q_2(0, t) &= q_2(a, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Начальные условия задаются для плотностей видов

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x). \quad (6)$$

## 2. Разностная схема повышенного порядка точности

В работах [15, 16] описана конечно-разностная схема решения задач динамики популяций на основе метода конечных разностей с использованием смещенных сеток для вычисления потоков. Для дискретизации уравнений (1)–(6) по пространственной координате на отрезке  $[0, a]$  вводим равномерную сетку  $x_r = rh$ ,  $r = 0, \dots, n$ ,  $h = a/n$ , в узлах которой вычисляются плотности видов  $u$ ,  $v$  и члены локального взаимодействия  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ . Для вычисления потоков используем смещенную сетку  $x_{r-\frac{1}{2}} = rh - h/2$ ,  $r = 1, \dots, n$ . Далее определяем операторы разностной производной и вычисления среднего

$$(dy)_r = \frac{y_{r+\frac{1}{2}} - y_{r-\frac{1}{2}}}{h}, \quad (\delta y)_r = \frac{y_{r+\frac{1}{2}} + y_{r-\frac{1}{2}}}{2}, \quad (7)$$

$$(dy)_{r-\frac{1}{2}} = \frac{y_r - y_{r-1}}{h}, \quad (\delta y)_{r-\frac{1}{2}} = \frac{y_r + y_{r-1}}{2}. \quad (8)$$

Применим подход [1, 8] для аппроксимации уравнений (1)–(4). Используем интегро-интерполяционный метод (метод баланса) [8] и формулу Симпсона. Проинтегрируем (1) по отрезку  $[x_{r-\frac{1}{2}}, x_{r+\frac{1}{2}}]$ , в узлах смещенной сетки  $x_{r-\frac{1}{2}}$  заменяем производную по времени и  $F_1$  полусуммой значений в соседних узлах основной сетки. В результате имеем

$$0 = \int_{x_{r-\frac{1}{2}}}^{x_{r+\frac{1}{2}}} (-q'_1 - \dot{u} + F_1) dx \approx -q_1(x_{r+\frac{1}{2}}) + q_1(x_{r-\frac{1}{2}}) + (x_{r+\frac{1}{2}} - x_{r-\frac{1}{2}}) [-\Psi \dot{u} + \Psi F_1]_r, \quad (9)$$

где сеточный оператор  $\Psi$  определяется следующей формулой:

$$\Psi y_r = \frac{1}{12} (y_{r-1} + 10y_r + y_{r+1}).$$

Тогда из (9) получаем

$$\Psi \dot{u}_r = -dq_{1,r} + \Psi F_{1,r}, \quad F_{1,r} = F_1(u_r, v_r), \quad r = 1, \dots, n. \quad (10)$$

С использованием второй разностной производной

$$\Lambda y_r = \frac{y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1}}{h^2}, \quad r = 1, \dots, n, \quad (11)$$

уравнение (10) переписывается следующим образом:

$$\left(1 + \frac{h^2}{12} \Lambda\right) \dot{u}_r = -dq_{1,r} + \left(1 + \frac{h^2}{12} \Lambda\right) F_{1,r}, \quad (12)$$

и  $F_{1,r}$  вычисляется по формуле:

$$F_{1,r} = u_r \left[ u_r \left(1 - \frac{u_r}{P_r}\right) - \frac{v_r}{1 + C u_r} \right], \quad P_r = \left[ \frac{1}{h} \int_{x_{r-\frac{1}{2}}}^{x_{r+\frac{1}{2}}} \frac{dx}{p(x)} \right]^{-1}. \quad (13)$$

В результате интегрирования второго уравнения (1) по отрезку  $[x_{r-1}, x_r]$  для потока  $q_i$  получаем

$$q_{1,r-\frac{1}{2}} = (-k_1 du + \delta u d\varphi_1)_{r-\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

С учетом (4), (7) и (8) имеем

$$q_{1,r-\frac{1}{2}} = [-k_1 du + \alpha dp \delta u - \beta_{11} du \delta u - \beta_{12} dv \delta u]_{r-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Аналогично из (2) выводятся уравнения для плотности хищника  $v$

$$\left(1 + \frac{h^2}{12}\Lambda\right) \dot{v}_r = -dq_{2,r} + \left(1 + \frac{h^2}{12}\Lambda\right) F_{2,r}, \quad F_{2,r} = v_r \left[-\lambda_r + \frac{Bu_r}{1 + Cu_r}\right], \quad (16)$$

и выражение для потока  $q_2$  в узлах смещенной сетки дается формулой

$$q_{2,r-\frac{1}{2}} = [-k_2 dv + \beta_{21} dv \delta u - \beta_{22} dv \delta v]_{r-\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

В результате дискретизации по пространственной переменной получается система уравнений с неизвестными  $u_r(t), v_r(t), r = 1, \dots, n$ , соответствующими плотностям распределений популяции  $u, v$  в узлах  $x_r$ . Система (12), (13), (16),  $r = 1, \dots, n$  и (15), (17),  $r = 1, \dots, n$  может быть записана в векторном виде

$$\dot{U} = -M^{-1}D_1 + G_1, \quad \dot{V} = -M^{-1}D_2 + G_2, \quad (18)$$

здесь

$$U = (u_1, \dots, u_n), \quad V = (v_1, \dots, v_n), \\ D_i = [dq_{i,1}, \dots, dq_{i,n}], \quad G_i = [F_{i,1}, \dots, F_{i,n}], \quad i = 1, 2,$$

причем в силу условий периодичности  $u_0 \equiv u_n, u_{n+1} \equiv u_1, v_0 \equiv v_n, v_{n+1} \equiv v_1, q_{i,n+\frac{1}{2}} \equiv q_{i,\frac{1}{2}}$ . Матрица  $M$  размера  $n^2$  имеет вид

$$M = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 10 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 10 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 10 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 10 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Построенная конечномерная модель может быть записана в виде

$$\dot{W} = \Phi(W), \quad W(0) = W_0, \quad (20)$$

здесь  $W = (U, V)$  — вектор значений переменных в узлах сетки. Начальные данные для системы (20) следуют из (6):

$$W_0 = (U_0, V_0) = (u_1^0, \dots, u_n^0, v_1^0, \dots, v_n^0). \quad (21)$$

Для интегрирования системы (20) по времени используется метод Рунге–Кутты высокого порядка (интегратор по времени ode89 из MATLAB). Дискретизация второго порядка точности по пространственной дискретизации получается из (18) при замене  $M$  на единичную матрицу:

$$\dot{U} = -D_1 + G_1, \quad \dot{V} = -D_2 + G_2. \quad (22)$$

### 3. Результаты вычислительных экспериментов

Для оценки точности схем (18) и (22) проведены вычисления стационарных и колебательных режимов системы (1)–(6) при фиксированных значениях следующих параметров:  $k_1 = 0.02$ ,  $k_2 = 0.01$ ,  $B = 4$ ,  $\beta_{12} = \beta_{11} = \beta_{22} = 0$ . Варьировались число узлов по ареалу  $n$ , параметр смертности  $\lambda$ , величина  $C$ , миграционные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta_{21}$ . Распределение ресурса задавалось на интервале  $[0, 1]$  в виде

$$p(x) = 1 - 0.2 \sin 2\pi x + 0.2 \sin 4\pi x. \quad (23)$$

Эксперимент проводился на сетках  $n_i$ ,  $n_{i+1} = 2n_i$ ,  $n_{i+2} = 4n_i$ , и  $W_i$  есть численное решение на сетке  $n_i$ . Эффективный порядок точности  $\eta$  на основе процесса Эйткена ( $h_i = 1/n_i$ ) вычислялся по формуле

$$\eta_i = \log_2 \frac{S_i}{S_{i+1}}, \quad S_i = \|W_i - W_{i-1}\|,$$

где  $S_i$  — нормы разницы между численными решениями  $W$  на сетках  $n_i$  и  $n_{i-1}$ .

В Таблице и на рис. 1, 2 приведены результаты расчетов на установление стационарных решений сосуществующих хищника и жертвы при  $\lambda = 1.1$ ,  $C = 2.5$  для ряда значений миграционных параметров  $\alpha$  и  $\beta_{21}$ . На рис. 1 представлено изменение во времени пространственных распределений при  $\alpha = 0.005$ ,  $\beta_{21} = 0.01$ . Для трех наборов миграционных параметров  $\alpha$  и  $\beta_{21}$  на рис. 2 даны стационарные распределения (a) и вычисленные значения эффективного порядка точности в различные моменты времени (b). Видно, что в зависимости от значений параметров реализуются различающиеся распределения хищника и жертвы. В Таблице столбец *PC2* соответствует расчету порядка  $\eta$  по стандартной схеме второго порядка точности, а *PC4* — вычислениям по схеме повышенного порядка точности. При  $\alpha = 0.001$ ,  $\beta_{21} = 0.005$  значение  $\eta$  почти равно четырем. Отметим, что с увеличением миграционных параметров величина  $\eta$  снижается.

Таблица. Эффективный порядок стандартной схемы (*PC2*) и схемы повышенного порядка точности (*PC4*);  $\lambda = 1.1$ ,  $C = 2.5$ ,  $n_1 = 10$ ,  $n_2 = 20$ ,  $n_3 = 40$  (процесс Эйткена)

Table. Efficient order of standard scheme (*PC2*) and high order scheme (*PC4*);  $\lambda = 1.1$ ,  $C = 2.5$ ,  $n_1 = 10$ ,  $n_2 = 20$ ,  $n_3 = 40$  (Aitken process)

$\alpha$	$\beta_{21}$	<i>PC2</i>	<i>PC4</i>
0.001	0.005	2.054	3.9745
0.005	0.005	2.0588	3.209
0.005	0.01	2.0589	2.9398

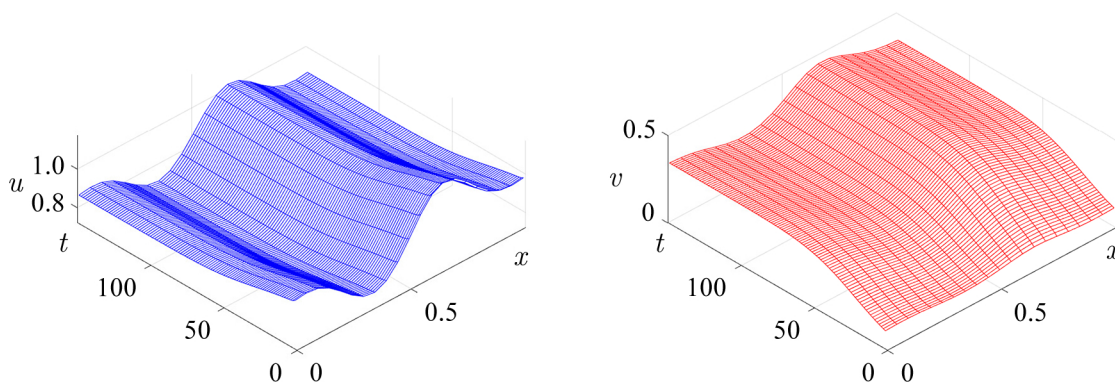


Рис. 1. Пространственно-временное распределение жертвы  $u$  (слева) и хищника  $v$  (справа) для  $\alpha = 0.005$ ,  $\beta_{21} = 0.01$ ,  $\lambda = 1.1$ ,  $C = 2.5$ ,  $n = 20$

Fig. 1. Spatial-temporal distribution of prey  $u$  (left) and predator  $v$  (right) for  $\alpha = 0.005$ ,  $\beta_{21} = 0.01$ ,  $\lambda = 1.1$ ,  $C = 2.5$ ,  $n = 20$

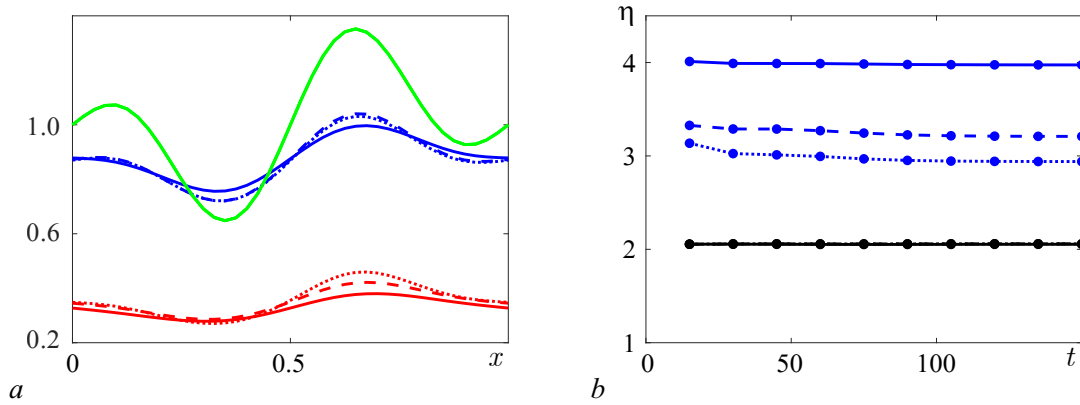


Рис. 2.  $a$  – Стационарные распределения жертвы  $u(x)$  (синие кривые), хищника  $v(x)$  (красные), ресурса  $p(x)$  (зеленая);  $b$  – значения порядка точности в различные моменты времени для  $PC2$  (черные),  $PC4$  (синие):  $\alpha = 0.001$ ,  $\beta_{21} = 0.005$  (сплошные кривые),  $\alpha = 0.005$ ,  $\beta_{21} = 0.005$  (пунктир) и  $\alpha = 0.005$ ,  $\beta_{21} = 0.01$  (точки);  $\lambda = 1.1$ ,  $C = 2.5$  (цвет онлайн)

Fig. 2.  $a$  – Stationary distributions of prey  $u(x)$  (blue curves), predator  $v(x)$  (red), resource  $p(x)$  (green);  $b$  – order of accuracy values at various times for  $PC2$  (black),  $PC4$  (blue):  $\alpha = 0.001$ ,  $\beta_{21} = 0.005$  (solid curves),  $\alpha = 0.005$ ,  $\beta_{21} = 0.005$  (dashed line) and  $\alpha = 0.005$ ,  $\beta_{21} = 0.01$  (dots);  $\lambda = 1.1$ ,  $C = 2.5$  (color online)

При уменьшении коэффициента смертности ( $\lambda = 0.95$ ) стационарное решение сосуществующих хищника и жертвы становится неустойчивым и возникают периодические колебания видов (см. рис. 3), то есть на ареале реализуются бегущие волны плотностей популяций. На рис. 4–7 приведены результаты расчетов колебательных режимов и вычисления эффективных порядков точности на сетках  $n = 12, 24, 48$  при  $\lambda = 0.95$ . На рис. 4, 5 представлены вычисления нормы  $S$  и порядка точности  $\eta$  в различные моменты времени для трех значений  $\alpha$  в случае отсутствия таксиса ( $\beta_{21} = 0$ ). Видно, что норма разности для  $n = 12, 24$  в случае предложенной схемы всегда меньше нормы разности для схемы второго порядка точности при  $n = 24, 48$ , а сравнимые результаты получаются только при использовании сеток  $n = 48, 96$ . Для схемы второго порядка точности на большом временном промежутке  $[0 \dots 1000]$  величина  $S$  увеличивается, и видны

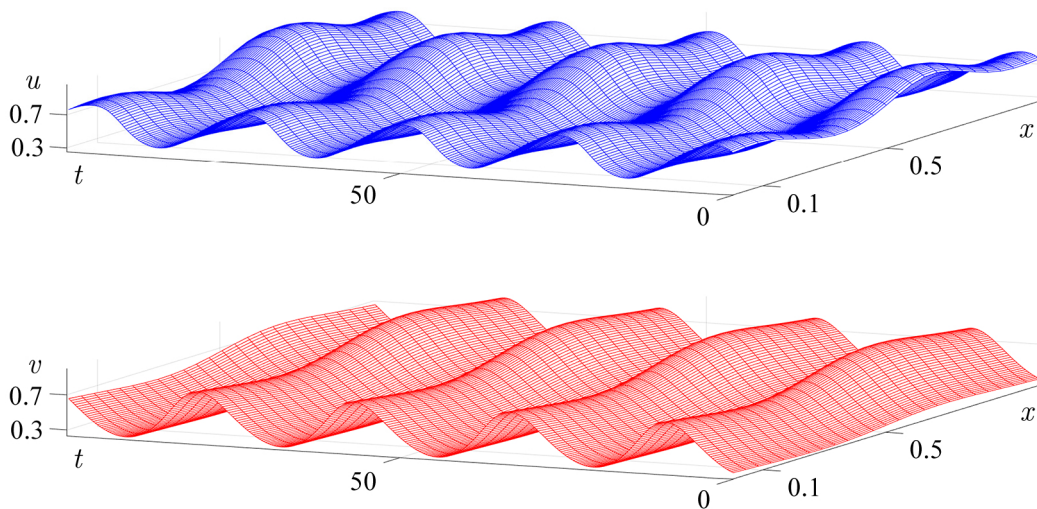


Рис. 3. Пространственно-временное распределение  $u$  (наверху) и  $v$  (внизу) для  $C = 2.5$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta_{21} = 0$ ,  $\lambda = 0.95$ ,  $n = 24$

Fig. 3. Spatial-temporal distribution of  $u$  (top) and  $v$  (bottom) for  $C = 2.5$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta_{21} = 0$ ,  $\lambda = 0.95$ ,  $n = 24$



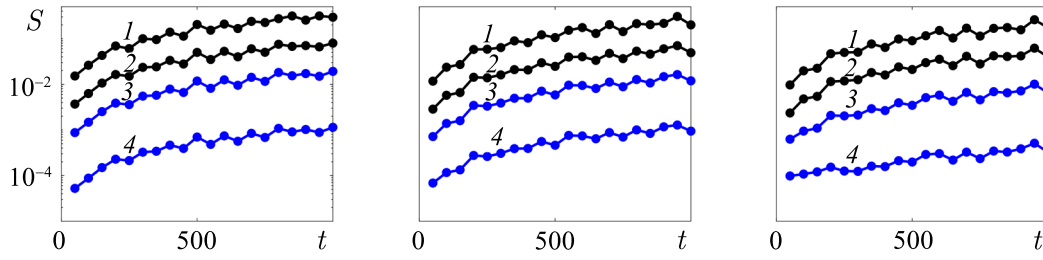


Рис. 4. Графики изменения во времени вычисляемых норм  $S_i$  для  $\alpha = 0.001$  (слева),  $\alpha = 0.005$  (центр),  $\alpha = 0.01$  (справа): схема повышенной точности (синий цвет), схема второго порядка точности (черный),  $n_i = 24$  (кривые 1 и 3),  $n_i = 48$  (2 и 4);  $\beta_{21} = 0$ ,  $\lambda = 0.95$ ,  $C = 2.5$  (цвет онлайн)

Fig. 4 Graphs of changes  $S_i$  over time for  $\alpha = 0.001$  (left),  $\alpha = 0.005$  (center),  $\alpha = 0.01$  (right): high-order accuracy scheme (blue color), second order accuracy scheme (black),  $n_i = 24$  (curves 1 and 3),  $n_i = 48$  (2 and 4);  $\beta_{21} = 0$ ,  $\lambda = 0.95$ ,  $C = 2.5$  (color online)

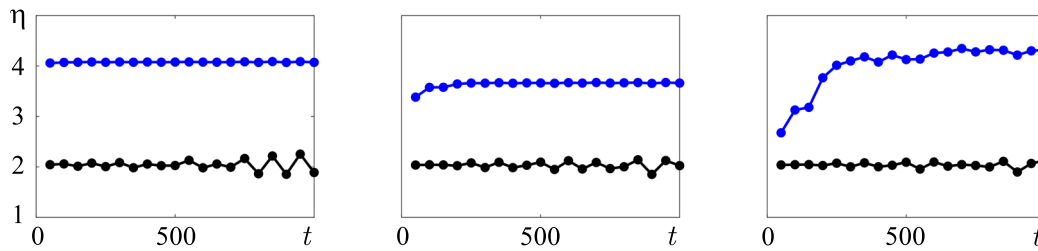


Рис. 5. Графики изменения во времени вычисляемого порядка точности  $\eta$  для  $\alpha = 0.001$  (слева),  $\alpha = 0.005$  (центр),  $\alpha = 0.01$  (справа): схема повышенной точности (синий цвет), схема второго порядка точности (черный);  $\beta_{21} = 0$ ,  $\lambda = 0.95$ ,  $C = 2.5$  (цвет онлайн)

Fig. 5. Graphs of changes  $\eta$  over time for  $\alpha = 0.001$  (left),  $\alpha = 0.005$  (center),  $\alpha = 0.01$  (right): high-order accuracy scheme (blue color), second order accuracy scheme (black);  $\beta_{21} = 0$ ,  $\lambda = 0.95$ ,  $C = 2.5$  (color online)

осцилляции рассчитываемого порядка точности. Это является результатом накапливающейся ошибки при расчете цикла на грубой сетке. Можно также отметить, что для схемы высокого порядка при увеличении миграционного параметра  $\alpha$  требуется некоторое время для установления  $\eta$ . Для задачи с учетом таксиса ( $\beta_{21} = 0.005, 0.01$ ) результаты вычисления порядка точности приведены на рис. 6. При увеличении  $\beta_{21}$  в два раза величина порядка точности меняется незначительно.

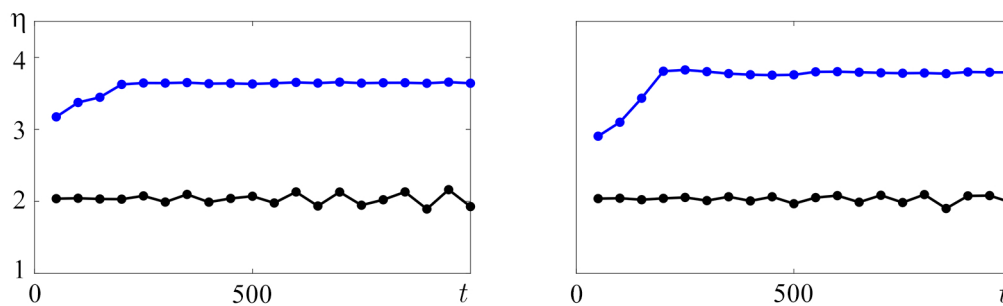


Рис. 6. Изменение во времени порядка точности  $\eta$  для  $\beta_{21} = 0.005$  (слева),  $\beta_{21} = 0.01$  (справа): схема повышенной точности (синий цвет), схема второго порядка точности (черный);  $\alpha = 0.005$ ,  $\lambda = 0.95$ ,  $C = 2.5$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Change in time of the order accuracy  $\eta$  for  $\beta_{21} = 0.005$  (left),  $\beta_{21} = 0.01$  (right): high-order accuracy scheme (blue), second order accuracy scheme (black);  $\alpha = 0.005$ ,  $\lambda = 0.95$ ,  $C = 2.5$  (color online)

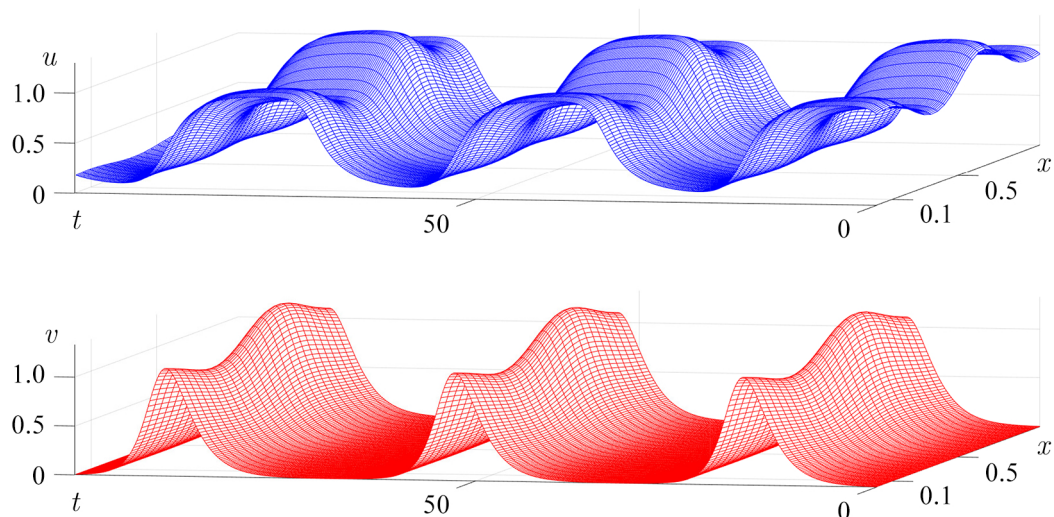


Рис. 7. Пространственно-временное распределение  $u$  (наверху) и  $v$  (внизу) для  $C = 2$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta_{21} = 0$ ,  $\lambda = 0.95$ ,  $n = 24$

Fig. 7. Spatial-temporal distribution of  $u$  (top) and  $v$  (bottom) for  $C = 2$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta_{21} = 0$ ,  $\lambda = 0.95$ ,  $n = 24$

Влияние параметра  $C$  на характер периодических колебаний иллюстрируют рис. 3 и 7. Видно, что для близких значений параметра инертности хищника  $C = 2, 2.5$  реализуются колебательные режимы с разными амплитудами и периодами. Схема повышенного порядка точности позволяет на достаточно грубых сетках ( $n = 24$ ) производить расчеты релаксационных колебаний, когда значительные периоды времени хищник практически отсутствует (см. рис. 7).

### Заключение

В работе предложена простая для реализации компактная численная схема решения системы уравнений параболического типа с нелинейными адвективными и источниковыми членами. Рассмотрена задача о динамике популяций хищника и жертвы на неоднородном кольцевом ареале. Представлены результаты расчетов стационарных распределений видов и колебательных режимов. Рассчитанные значения эффективного порядка точности показали преимущества предложенной схемы по сравнению с классической аппроксимацией второго порядка при расчете стационарных и нестационарных решений. Схема повышенного порядка точности позволяет использовать сетки меньшего размера, что дает выигрыш при вычислении стационарных распределений методом установления и при расчетах нестационарных процессов типа бегущих волн. Это особенно важно при анализе задач популяционной динамики с сильно неоднородными распределениями ресурса на ареале и в случае нескольких пространственных переменных.

### Список литературы

1. Толстых А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990. 232 с.
2. Толстых А. И. Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2015. 350 с.
3. Zhang L., Ge Y. Numerical solution of nonlinear advection diffusion reaction equation using high-order compact difference method // Applied Numerical Mathematics. 2021. Vol. 166. P. 127–145. DOI: 10.1016/j.apnum.2021.04.004.

4. *Deka D., Sen S.* Compact higher order discretization of 3D generalized convection diffusion equation with variable coefficients in nonuniform grids // *Applied Mathematics and Computation.* 2022. Vol. 413, no. 5. P. 126652. DOI: 10.1016/j.amc.2021.126652.
5. *Матус П. П., Утебаев Б. Д.* Компактные и монотонные разностные схемы для обобщенного уравнения Фишера // *Дифференциальные уравнения.* 2022. Т. 58, № 7. С. 947–961. DOI: 10.31857/S037406412207007X.
6. *He M., Liao W.* A compact ADI finite difference method for 2D reaction–diffusion equations with variable diffusion coefficients // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2024. Vol. 436. P. 115400. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115400.
7. *Xu P., Ge Y., Zhang L.* High-order finite difference approximation of the Keller-Segel model with additional self-and cross-diffusion terms and a logistic source // *Networks & Heterogeneous Media.* 2022. Vol. 18, no. 4. P. 1471–1492. DOI: 10.3934/nhm.2023065.
8. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
9. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
10. *Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
11. *Мюррей Дж.* Математическая биология. Т. 2 Пространственные модели и их приложения в биомедицине. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. 1104 с.
12. *Rubin A., Riznichenko G.* Mathematical biophysics. New York: Springer, 2014. 273 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-8702-9.
13. *Cantrell R. S., Cosner C.* Spatial Ecology Via Reaction–Diffusion Equations. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 2003. 428 p. DOI: 10.1002/0470871296.
14. *Malchow H., Petrovskii S. V., Venturino E.* Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation. New York: Chapman and Hall, 2008. 469 p.
15. *Budyansky A. V., Frischmuth K., Tsybulin V. G.* Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat // *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B.* 2019. Vol. 24, no. 2. P. 547–561. DOI: 10.3934/dcdsb.2018196.
16. *Будянский А. В., Цибулин В. Г.* Моделирование многофакторного таксиса в системе «хищник–жертва» // *Биофизика.* 2019. Т. 64, № 2, С. 343–349. DOI: 10.1134/S0006302919020133.
17. *Цибулин В. Г., Ха Т. Д., Зеленчук П. А.* Нелинейная динамика системы хищник-жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* 2021. Т. 29, № 5. С. 751–764. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764.

## References

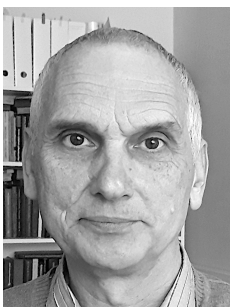
1. Tolstykh AI. Compact Difference Schemes and Their Application in Aerohydrodynamics. Moscow: Nauka; 1990. 232 p. (in Russian).
2. Tolstykh AI. Compact and High-precision Multi-operator Approximations for Partial Differential Equations. Moscow: Nauka; 2015. 350 p. (in Russian).
3. Zhang L, Ge Y. Numerical solution of nonlinear advection diffusion reaction equation using high-order compact difference method. *Applied Numerical Mathematics.* 2021;166:127–145. DOI: 10.1016/j.apnum.2021.04.004.
4. Deka D, Sen S. Compact higher order discretization of 3D generalized convection diffusion equation with variable coefficients in nonuniform grids. *Applied Mathematics and Computation.* 2022;413:126652. DOI: 10.1016/j.amc.2021.126652.
5. Matus PP, Utebaev BD. Compact and monotone difference schemes for the generalized Fisher equation. *Differential Equations.* 2022;58(7):937–951.
6. He M, Liao W. A compact ADI finite difference method for 2D reaction–diffusion equations with

- variable diffusion coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2024;436: 115400. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115400.
7. Xu P, Ge Y, Zhang L. High-order finite difference approximation of the Keller-Segel model with additional self-and cross-diffusion terms and a logistic source. *Networks & Heterogeneous Media*. 2023;18(4):1471–1492. DOI: 10.3934/nhm.2023065.
  8. Samarskii AA. *Theory of Difference Schemes*. Nauka; 1989. 616 p. (in Russian).
  9. Kalitkin NN. *Numerical Methods*. St. Petersburg: BKhVPeterburg; 2011. 592 p. (in Russian).
  10. Hairer E, Norsett SP, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff problems*. Berlin: Springer; 1993. 528 p. DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1.
  11. Murray JD. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. New York: Springer-Verlag; 2003. 814 p. DOI: 10.1007/b98869.
  12. Rubin A, Rznichenko G. *Mathematical Biophysics*. New York: Springer; 2014. 273 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-8702-9.
  13. Cantrell RS, Cosner C. *Spatial Ecology Via Reaction–Diffusion Equations*. Chichester: John Wiley and Sons Ltd; 2003. 428 p. DOI: 10.1002/0470871296.
  14. Malchow H, Petrovskii SV, Venturino E. *Spatio-temporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation*. New York: Chapman and Hall/CRC; 2008. 469 p.
  15. Budyansky AV, Frischmuth K, Tsybulin VG. Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat. *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B*. 2019;24(2):547–561. DOI: 10.3934/dcdsb.2018196.
  16. Budyansky AV, Tsybulin VG. Modeling of multifactor taxis in a predator–prey system. *Biophysics*. 2019;64(2):256–260. DOI: 10.1134/S0006350919020040.
  17. Tsybulin VG, Ha TD, Zelenchuk PA. Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interaction of species. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(5):751–764. (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764.



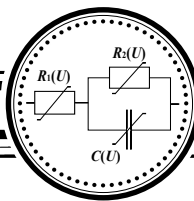
*Нгуен Хоанг Бью* — родился в Куангнам, Вьетнам (1996), окончил Санкт-Петербургский военно-морской институт (2021). Учится в аспирантуре Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а  
 Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ  
 E-mail: kng@sfnu.ru  
 ORCID: 0009-0001-1644-5800



*Цибулин Вячеслав Георгиевич* — родился в Ростове-на-Дону (1956), окончил механико-математический факультет Ростовского государственного университета (1978). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1990) и доктора (2011) физико-математических наук. Заведующий кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета. Занимается вычислительной гидродинамикой, задачами конвекции, популяционной динамики и др. В соавторстве с В. Н. Говорухиным написал книги «Введение в Maple», «Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB и LaTeX».

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а  
 Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ  
 E-mail: vgcibulin@sfnu.ru  
 ORCID: 0000-0003-4812-278X  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 4304



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(3)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003103  
EDN: MXUNCA

## Спектральный подход с итерационным уточнением граничных условий излучения для моделирования квазисобственных мод открытых резонаторов гиротронов

А. Г. Рожнев<sup>1,2</sup>✉, М. М. Мельникова<sup>3,1</sup>, Н. М. Рыскин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

<sup>2</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

<sup>3</sup>ФИЦ Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

E-mail: ✉RozhnevAG@gmail.com, Mafachu@mail.ru, RyskinNM@gmail.com

Поступила в редакцию 30.11.2023, принята к публикации 25.12.2023,

опубликована онлайн 10.04.2024, опубликована 31.05.2024

**Аннотация.** Цель. В статье представлен новый метод численного моделирования квазисобственных колебаний в открытых резонаторах гиротронов — мощных вакуумных генераторах электромагнитных волн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. Резонатор гиротрона имеет форму слабо неоднородного полого круглого металлического волновода. Методы. Предлагаемый подход использует уравнение неоднородной струны с граничными условиями излучения для формулировки нелинейной спектральной краевой задачи, описывающей колебания в резонаторе в пренебрежении связями волн с разными радиальными индексами. С помощью линеаризации по частоте граничных условий излучения нелинейная краевая задача сводится к линейной. Для ее дискретизации используется метод конечных разностей и формулируется линейная обобщенная матричная проблема собственных значений, которая решается методом Арнольди в сочетании с обратным сдвигом собственных значений. Предложен итерационный алгоритм, позволяющий последовательно рассчитывать заданное число частот и добротностей квазисобственных мод колебаний. Результаты. Разработана программа для ЭВМ, написанная на языках Wolfram Language и Fortran, с использованием предложенных в работе алгоритмов. Представлены результаты тестовых расчетов для реальных резонаторов гиротронов, которые демонстрируют высокую точность полученных значений частот, добротностей и распределений полей квазисобственных колебаний в исследованных резонаторах. Заключение. Предложенные в статье методы, алгоритмы и созданная программа могут существенно облегчить процесс разработки гиротронов, предназначенных для различных практических применений и работающих в новых диапазонах частот. Метод итерационного уточнения граничных условий может быть обобщен на случай уравнений линейной теории гиротрона и использован для разработки новых методов анализа стартовых условий мягкого самовозбуждения в гиротронах-генераторах.

**Ключевые слова:** гиротрон, открытый резонатор, высшие продольные моды, комплексные частоты, граничные условия излучения, метод конечных разностей, обобщенная матричная проблема собственных значений, метод Арнольди.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

**Для цитирования:** Рожнев А. Г., Мельникова М. М., Рыскин Н. М. Спектральный подход с итерационным уточнением граничных условий излучения для моделирования квазисобственных мод открытых резонаторов гиротронов // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 305–331. DOI: 10.18500/0869-6632-003103. EDN: MXUNCA

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Spectral approach with iterative clarification of a radiation boundary conditions for modeling of quasimodes of a gyrotrons open cavities

A. G. Rozhnev<sup>1,2</sup>✉, M. M. Melnikova<sup>3,1</sup>, N. M. Ryskin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russia

<sup>2</sup>Saratov State University, Russia

<sup>3</sup>FRC A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉RozhnevAG@mail.ru, Mafashu@mail.ru, RyskinNM@gmail.com

Received 30.11.2023, accepted 25.12.2023, available online 10.04.2024, published 31.05.2024

**Abstract.** *Purpose.* The article presents a new method for numerical simulation of quasi-eigenmode oscillations in open resonators of gyrotrons – powerful vacuum generators of electromagnetic waves in the millimeter and submillimeter ranges. The gyrotron cavity has the shape of a weakly inhomogeneous hollow circular metal waveguide. *Methods.* The proposed approach uses the inhomogeneous string equation with radiation boundary conditions to formulate a nonlinear spectral boundary value problem describing oscillations in a resonator, neglecting the couplings of waves with different radial indices. By linearizing with respect to frequency the radiation boundary conditions, the boundary value problem is reduced to a linear boundary value problem. To discretize this boundary value problem, the finite difference method is used and a linear generalized matrix eigenvalue problem is formulated. This problem is solved by the Arnoldi method with eigenvalues calculation in a shift-invert mode. An iterative algorithm is proposed that makes it possible to sequentially calculate a given number of frequencies and quality factors of quasi-eigenmodes of oscillations. *Results.* The computer program was developed written in the Wolfram Language and Fortran using the algorithms proposed in the work. The results of test calculations for real gyrotron resonators are presented, which demonstrate the high accuracy of the obtained values of frequencies, quality factors and field distributions of quasi-eigenmode oscillations in the studied resonators. *Conclusion.* The methods, algorithms and created program proposed in the article can significantly facilitate the process of developing gyrotrons intended for various practical applications and operating in new frequency ranges. The method of iterative refinement of boundary conditions can be generalized to the case of equations of the linear theory of a gyrotron and used to develop new methods for analyzing the starting conditions for the soft self-excitation in gyrotrons – generators.

**Keywords:** gyrotron, open cavity, high order axial modes, radiation boundary condition, finite difference method, generalized matrix eigenvalue problem, Arnoldi method.

**Acknowledgements.** This study was performed within the framework of a state order to the Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences.

**For citation:** Rozhnev AG, Melnikova MM, Ryskin NM. Spectral approach with iterative clarification of a radiation boundary conditions for modeling of quasimodes of a gyrotrons open cavities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(3):305–331. DOI: 10.18500/0869-6632-003103

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Гиротрон представляет собой источник мощного электромагнитного излучения в СВЧ, субтерагерцевом и терагерцевом диапазонах частот [1–3]. Он находит широкое применение в различных областях науки и техники, таких как нагрев и диагностика плазмы в установках термоядерного синтеза [4, 5], радиоспектроскопия [6–11], медицина [12–15], технологические процессы [16–19], системы связи [20] и другие приложения.

В последнее время особый интерес вызывают различные применения гиротронов, для которых необходимо соблюдение специальных требований, накладываемых на распределение поля рабочей моды вдоль пространства взаимодействия, которое определяется формой резонатора. Например, в гиротронах для термоядерных реакторов с мегаваттным уровнем выходной мощности необходимы резонаторы с малым отношением длины к его радиусу, а также со сверхмалыми отражениями выходного сигнала от устройства вывода назад в область взаимодействия. Выполнение этих условий достигается за счёт многоступенчатого или сверхплавного перехода от области

взаимодействия в выходной рупор с контролируемым законом изменения радиуса резонатора вдоль его оси.

В гиротронах, разрабатываемых для спектроскопических установок, работающих на эффекте ядерного магнитного резонанса с динамической поляризацией ядер, должна быть обеспечена возможность оперативной перестройки частоты генерации в диапазоне 1–2 ГГц [11] и высокая стабильность частоты в течение десятков часов непрерывной работы. Одним из способов перестройки частоты является изменение магнитного поля. При этом меняются условия синхронизма встречной волны в резонаторе с циклотронной волной в электронном пучке, и, как следствие, меняется частота генерации. Распределение поля вдоль системы перестраивается при этом таким образом, что взаимодействие преимущественно происходит с различными продольными модами резонатора. Возможность возбуждения продольных мод высокого порядка обеспечивается выбором подходящего профиля резонатора.

Наконец, ещё одним важным направлением разработки гиротронов является создание источников мощного излучения в терагерцевом диапазоне на частотах от нескольких сотен ГГц до 1.2–1.5 ТГц [21–25]. Для этого используется взаимодействие на высших гармониках циклотронной частоты (второй и третьей). Основной проблемой в этом случае является подавление паразитной генерации на основной гармонике циклотронной частоты. Необходимая селекция мод при этом также достигается выбором профиля резонатора.

При исследовании и разработке современных гиротронов важнейшим инструментом является компьютерное моделирование, в основе которого лежит набор теоретических подходов и моделей различного уровня сложности — от простых одномерных моделей для расчёта свойств колебаний в резонаторе гиротрона без пучка до прямого численного моделирования взаимодействия пучка с электромагнитным полем резонатора с помощью самосогласованного решения уравнений Максвелла и уравнений движения электронов в 2.5D или полной трёхмерной постановке [26–29]. В литературе представлены как компьютерные коды, предназначенные для решения каждой из этих частных задач, так и комплексы программ, состоящие из модулей, в которых реализованы все или большинство из методик, применяемых на разных этапах конструирования гиротронов [30–38].

Одной из важнейших составляющих такого моделирования является расчёт свойств резонатора гиротрона без электронного пучка. К этим свойствам относятся частоты колебаний в резонаторе, их омические и дифракционные добротности, а также распределения компонент электромагнитного поля вдоль резонатора. Резонатор, используемый в классической конструкции гиротрона, представляет собой слабонеоднородный полый круглый металлический волновод, радиус которого слабо меняется вдоль продольной оси. С двух сторон отрезок неоднородного волновода нагружен на рупоры, один из которых сужается на пушечном конце, а другой расширяется на коллекторном конце системы (см. рис. 1). В целом такая структура представляет собой открытый электродинамический резонатор [2, 39–41], в котором могут существовать высокодобротные

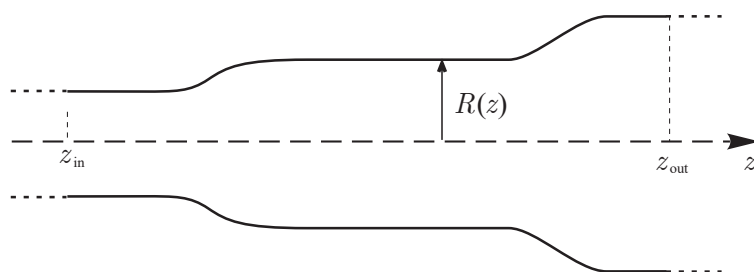


Рис. 1. Открытый резонатор гиротрона в виде слабонеоднородного полого металлического волновода

Fig. 1. Gyrotron cavity as weakly irregular hollow metallic waveguide



электромагнитные колебания, возникающие за счёт отражений волн от переходов однородного участка волновода в рупоры. Эти колебания в открытых электродинамических структурах называются квазисобственными, или комплексными [39], так как они по некоторым своим свойствам отличаются от собственных типов колебаний в закрытых полых металлических резонаторах.

При разработке гиротронов для определения оптимальной формы резонатора приходится многократно решать задачу расчёта свойств колебаний, задавая различные зависимости радиуса неоднородного волновода от продольной координаты. Самая простая и одновременно эффективная модель для расчёта колебаний в открытом резонаторе гиротрона основана на использовании одномерного уравнения неоднородной струны совместно с граничными условиями излучения (ГУИ) на его концах [40]. В этом случае функция  $F(z)$ , относительно которой формулируется краевая задача, описывает распределение комплексной амплитуды поля вдоль оси резонатора. Для  $TE_{mn}$ -моды она является комплексной амплитудой  $H_z$ -компоненты электромагнитного поля, а для  $TM_{mn}$ -моды — комплексной амплитудой  $E_z$ -компоненты поля. Здесь  $m$  и  $n$  — поперечные азимутальный и радиальный индексы моды. В классических гиротронах используются  $TE_{mn}$ -типы колебаний, поэтому далее будут рассматриваться только они. Простота модели, основанной на уравнении неоднородной струны, объясняется тем, что в ней не учитываются малые связи между основной модой и модами с другими значениями радиального индекса  $n$ .

Распределение поля  $F(z)$  в основной части резонатора имеет характерный вид стоячей волны с разным числом вариаций поля вдоль системы. В зависимости от количества вариаций колебания происходят с различными частотами и добротностями. Число вариаций обозначается целым числом  $q$ , а колебания с разными  $q$  называются различными продольными модами открытого резонатора. В целом эти моды обозначаются как  $TE_{mnq}$ .

В области выходного рупора поле имеет вид убегаящей от резонатора волны, которая уносит часть энергии электромагнитного поля в выходной тракт. За счёт этого колебания в резонаторе имеют конечную добротность даже в условиях, когда стенки резонатора изготовлены из идеально проводящего материала. В таком случае эта добротность называется дифракционной и обозначается  $Q_d$ . Если дополнительно учитывать потери за счёт конечной проводимости материала стенок, к дифракционным потерям добавляются омические, и при условии малости обоих типов потерь общая добротность определяется с помощью формулы  $Q_t = (Q_d Q_o) / (Q_d + Q_o)$ , где  $Q_t$  и  $Q_o$  — полная и омическая добротности колебаний соответственно.

Несмотря на кажущуюся простоту подхода, основанного на решении уравнения неоднородной струны, при его численной реализации возникает ряд проблем. Хотя само уравнение является линейным, численное решение полной краевой задачи, описывающей свободные колебания в резонаторе, требует использования итерационных методов, поскольку комплексная частота колебаний, выступающая в данном случае в качестве спектрального параметра, входит нелинейным образом в ГУИ. Для нахождения всех решений в заданной области комплексной плоскости частот приходится привлекать дополнительные теоретические или эмпирические соображения для определения числа мод и задания начальных приближений, необходимых для запуска процесса итераций.

Особенно остро эта проблема возникает при анализе резонаторов со сверхнизкой дифракционной добротностью, используемых в мощных гиротронах субтерагерцевого и терагерцевого диапазонов, поскольку в этом случае регулярность расположения частот разных мод на комплексной плоскости нарушается. При расчёте большого числа продольных мод в исследуемой части спектра могут появляться дополнительные нефизические решения (с малыми добротностями), у которых амплитуда поля резко возрастает в области выходного рупора. Частоты и добротности этих мод оказываются близкими к соответствующим величинам для высших продольных мод, локализованных в центральной части резонатора. При наличии нефизических мод сложно задать разумные начальные приближения из априорных соображений и их приходится находить практически «вручную».

Чаще всего для решения указанной выше краевой задачи используется метод пристрелки [30–38]. В других случаях вместо поиска собственных значений (СЗ) решается задача о возбуждении резонатора внешним гармоническим сигналом, после чего значения частот и добротностей находятся из анализа рассчитанной резонансной кривой [42–45].

В работе [46] был предложен новый подход к поиску комплексных частот колебаний в резонаторе гиротрона, названный спектральным. Его суть заключается в том, что дифференциальные уравнения вместе с граничными условиями сводятся одним из разностных методов (конечных разностей или конечных элементов) к обобщённой матричной задаче собственных значений, в которой в качестве спектрального параметра выступает нормированная отстройка частоты колебаний от критической частоты рабочей моды. В [46] эта методика используется для расчёта условий самовозбуждения в линейном режиме работы гиротрона, но очевидно, что такой же подход в более простом варианте может быть использован для поиска комплексных частот колебаний в резонаторе гиротрона без пучка. Однако при использовании спектрального подхода в форме, предложенной в [46], оказывается, что некоторые элементы матриц обобщённой матричной проблемы сами зависят от спектрального параметра, поэтому в целом она оказывается нелинейной и при ее решении возникают те же сложности, что и в методе пристрелки — необходимость задания начальных приближений для каждого из собственных значений, использование итерационной процедуры, а также задача гарантированного поиска всех мод, частоты которых принадлежат заданной области на комплексной плоскости частот.

В настоящей работе предлагается модифицированный спектральный подход для расчёта комплексных частот мод и распределений их полей в открытом резонаторе гиротрона. Этот подход является обобщением методики из [46] и основан на линеаризации ГУИ по спектральному параметру. Благодаря особенностям геометрии открытого резонатора гиротрона, развиваемый подход позволяет рассчитать комплексную частоту и распределение поля основного продольного типа колебаний с точностью, достаточной для практических применений, путем однократного решения линейной матричной проблемы собственных значений без задания начального приближения. Помимо этого, для расчета каждого следующего высшего типа колебаний в большинстве случаев требуется одно или два дополнительных решения линейной матричной проблемы собственных значений.

Содержание статьи организовано следующим образом. В разделе 1 приведены основные уравнения краевой задачи, описывающей колебания в открытом резонаторе гиротрона. Здесь же излагается методика линеаризации граничных условий излучения, позволяющая свести решение нелинейной спектральной проблемы к последовательности решений линейных спектральных задач. В разделе 2 излагается метод приведения краевой задачи в дифференциальной форме к линейной обобщенной матричной проблеме собственных значений (ОМПСЗ), использующий метод конечных разностей. В разделе 3 приведено описание итерационного алгоритма, позволяющего рассчитывать заданное число комплексных частот и распределений полей квазисобственных типов колебаний в открытом резонаторе. В раздел 4 включены примеры расчёта продольных типов колебаний в открытых резонаторах гиротронов различных диапазонов частот, параметры которых доступны из литературы. В Заключение сформулированы полученные результаты и основные выводы.

## **1. Основные уравнения и линеаризация граничных условий излучения**

Геометрия резонатора гиротрона в виде слабо неоднородного полого металлического волновода показана на рис. 1. Предполагается, что радиус волновода медленно меняется вдоль его оси. В пренебрежении связью между модами волновода с различными радиальными индексами

краевая задача, описывающая колебания электромагнитного поля в резонаторе [40], состоит из уравнения неоднородной струны

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} + h^2(\omega, z)F(z) = 0, \quad (1)$$

и граничных условий излучения, которые ставятся в плоскостях, перпендикулярных оси резонатора и расположенных в однородных частях волноводов слева и справа от основного объёма резонатора:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dF(z)}{dz} - jh(\omega, z)F(z) \right]_{z=z_{\text{in}}} &= 0, \\ \left[ \frac{dF(z)}{dz} + jh(\omega, z)F(z) \right]_{z=z_{\text{out}}} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1)–(2) предполагается зависимость поля от времени вида  $F(z) \sim \exp(j\omega t)$  и введены следующие обозначения:  $F(z)$  – безразмерная комплексная амплитуда  $H_z$ -компоненты электромагнитного поля в резонаторе;  $h(\omega, z)$  – локальное значение продольного волнового числа  $TE_{mn}$ -моды; величина  $h(\omega, z)$  зависит от координаты  $z$  из-за изменения радиуса резонатора  $R(z)$  при смещении вдоль его оси.

В граничных условиях (2) содержатся корни из комплексной функции частоты  $h^2(\omega, z)$ , поэтому необходимо определить правила выбора ветвей этой функции [40]:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [h(\omega, z_{\text{in,out}})] &> 0, \quad \text{если } \operatorname{Re} [h^2(\omega, z_{\text{in,out}})] > 0, \\ \operatorname{Im} [h(\omega, z_{\text{in,out}})] &< 0, \quad \text{если } \operatorname{Re} [h^2(\omega, z_{\text{in,out}})] < 0. \end{aligned}$$

Эти условия основаны на требовании: для любых частот решения уравнения (1) в однородных участках волноводов, лежащих слева и справа от области  $z_{\text{in}} \leq z \leq z_{\text{out}}$ , должны представлять собой волны, переносящие энергию в направлении от центральной части резонатора.

Принимая во внимание малые омические потери в стенках резонатора, можно записать, что  $h^2(\omega, z) = h_r^2(\omega, z) - jh_i^2(\omega, z)$ , где

$$\begin{aligned} h_r^2(\omega, z) &= \omega^2/c^2 - \nu_{mn}^2/R^2(z), \\ h_i^2(\omega, z) &= (1-j)\delta_s \frac{\nu_{mn}^2}{R^3(z)} \left( 1 + \frac{m^2}{\nu_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2 R^2(z)}{c^2 \nu_{mn}^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В этой формуле  $h_r^2(\omega, z)$  – квадрат волнового числа рабочей моды  $TE_{mn}$  в случае идеально проводящих стенок резонатора,  $-jh_i^2(\omega, z)$  – добавка к квадрату волнового числа за счет конечной проводимости стенок,  $J'_m(x)$  – производная функции Бесселя порядка  $m$ ,  $\nu_{mn}$  –  $n$ -й корень уравнения  $J'_m(\nu_{mn}) = 0$ ,  $c$  – скорость света,  $\delta_s = \sqrt{2}/(\mu_0 \omega \sigma)$  – толщина скин-слоя,  $\sigma$  – удельная проводимость материала стенок резонатора,  $\mu_0$  – магнитная постоянная. Выражение для  $h_i^2(\omega, z)$  выводится методом, развитым в [47], оно совпадает с формулами, приведенными в [48, 49].

Запишем  $h_r^2(\omega, z)$  следующим образом:

$$h_r^2(\omega, z) = (\omega^2 - \omega_0^2)/c^2 + \nu_{mn}^2/R_0^2 [1 - R_0^2/R^2(z)],$$

где  $R_0$  – радиус волновода в некотором характерном сечении,  $\omega_0 = \nu_{mn}c/R_0$  – критическая частота рабочей моды в этом сечении. За величину  $R_0$  может быть принят, например, радиус однородной части резонатора или радиус в плоскости перехода из области взаимодействия в расширяющийся рупор, если однородный участок резонатора отсутствует.

Пусть  $L_0$  – характерный размер резонатора, за который можно принять длину однородной части или всю его длину. Полагая  $\omega \approx \omega_0$ , введем безразмерный параметр частоты  $\Omega = (\omega^2 - \omega_0^2)L_0^2/c^2 \approx 2(v_{mn}L_0/R_0)^2(\omega - \omega_0)/\omega_0$ , безразмерные координату  $\zeta = z/L_0$  и функции

$$\delta(\zeta) = (v_{mn}L_0/R_0)^2 \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2(z)}\right),$$

$$d(\zeta) = (1 - j)(v_{mn}L_0/R_0)^2 \frac{\delta_s R_0^2}{R^3(\zeta)} \left(1 + \frac{m^2}{v_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2 R^2(\zeta)}{c^2 v_{mn}^2}\right).$$

Отметим, что  $\delta(\zeta)$  не зависит от частоты  $\omega$ , а  $d(\zeta)$  меняется с изменением частоты очень мало, так как это изменение определяется в основном зависимостью толщины скин-слоя  $\delta_s$  от частоты. В ожидаемом диапазоне значений частот продольных мод этой зависимостью можно пренебречь. Поэтому в формуле для  $d(\zeta)$  можно положить  $\omega = \omega_0$  и считать, что эта функция также не зависит от частоты.

После всех переобозначений уравнения (1)–(2) приобретают вид

$$\frac{d^2 F(\zeta)}{d\zeta^2} + [\Omega + \delta(\zeta) - jd(\zeta)] F(\zeta) = 0 \quad (4)$$

и

$$\left[ \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} - j\sqrt{\Omega + \delta(\zeta) - jd(\zeta)} F(\zeta) \right]_{\zeta=\zeta_{in}} = 0,$$

$$\left[ \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} + j\sqrt{\Omega + \delta(\zeta) - jd(\zeta)} F(\zeta) \right]_{\zeta=\zeta_{out}} = 0. \quad (5)$$

Уравнения (4)–(5) представляют собой краевую задачу типа задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения, решения которой определяют комплексные моды колебаний в открытой электродинамической структуре – резонаторе гиротрона. В качестве спектрального параметра здесь выступает безразмерный параметр частоты  $\Omega$ . Отметим, величина  $\Omega$  нелинейным образом входит в граничные условия (5), поэтому, как было отмечено во Введении, для ее решения приходится использовать итерационный подход.

Ниже излагается метод решения краевой задачи (4)–(5). Положим в уравнениях (4)–(5)  $\Omega = \Omega_0 + \tilde{\Omega}$ , где  $\Omega_0$  – заданная константа, а  $\tilde{\Omega}$  – малая величина в смысле, который будет разъяснён ниже. Тогда квадратные корни в формулах (5) можно разложить в ряд Тейлора по степеням  $\tilde{\Omega}$  и оставить в разложении только два первых слагаемых:

$$\sqrt{\Omega_0 + \tilde{\Omega} + \delta(\zeta_{in,out}) - jd(\zeta_{in,out})} \approx \sqrt{\Omega_0 + \delta(\zeta_{in,out}) - jd(\zeta_{in,out})} +$$

$$+ \frac{\tilde{\Omega}}{2\sqrt{\Omega_0 + \delta(\zeta_{in,out}) - jd(\zeta_{in,out})}}. \quad (6)$$

Затухание в стенках резонатора обычно очень мало, так что выполняется условие  $|\delta(\zeta_{in,out})| \gg |d(\zeta_{in,out})|$ . Учитывая, что радиусы однородных частей волноводов, в которых расположены сечения  $\zeta_{in,out}$ , значительно (на десятки процентов и более) отличаются от радиуса центральной части резонатора, можно считать, что  $|\delta(\zeta_{in,out})| \sim (v_{mn}L_0/R_0)^2$ .

Для современных гиротронов характерные размеры резонатора  $R_0$  и  $L_0$ , а также индексы рабочих мод  $m$  и  $n$  таковы, что относительная отстройка частоты от критической для продольных

мод  $|\omega - \omega_0|/\omega_0 \leq 0.1$ , а параметр  $(v_{mn}L_0/R_0)^2$  принимает значения от  $10^2$  до  $10^4$ . Тогда с большим запасом справедливо неравенство  $|\delta(\zeta_{in,out})| \gg |\Omega|$ . В этом случае всегда можно подобрать параметр  $\Omega_0$  так, чтобы выполнялось соотношение  $|\delta(\zeta_{in,out}) + \Omega_0| \gg |\tilde{\Omega}|$ . Это и есть условие малости параметра  $\tilde{\Omega}$ , при котором в разложении (6) можно не учитывать слагаемые порядка  $\tilde{\Omega}^2$  и выше. В частности, для расчёта нескольких первых продольных мод достаточно положить  $\Omega_0 = 0$ .

Введем обозначения  $\kappa_{in,out} = \sqrt{\Omega_0 + \delta(\zeta_{in,out}) - jd(\zeta_{in,out})}$  и подставим разложение (6) в (4) и (5), в результате чего получим дифференциальное уравнение краевой задачи в виде

$$\frac{d^2 F(\zeta)}{d\zeta^2} + [\Omega_0 + \delta(\zeta) - jd(\zeta)] F(\zeta) = -\tilde{\Omega} F(\zeta). \quad (7)$$

и ГУИ, линейризованные по спектральному параметру  $\Omega$ , в виде

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_{in}} - j\kappa_{in} F(\zeta_{in}) &= \tilde{\Omega} \frac{j}{2\kappa_{in}} F(\zeta_{in}), \\ \left. \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_{out}} + j\kappa_{out} F(\zeta_{out}) &= -\tilde{\Omega} \frac{j}{2\kappa_{out}} F(\zeta_{out}). \end{aligned} \quad (8)$$

В уравнения (7), (8) новый безразмерный параметр частоты  $\tilde{\Omega}$  входит линейным образом, поэтому при их дискретизации будет получена линейная ОМПСЗ, в которой в качестве спектрального параметра выступает  $\tilde{\Omega}$ .

## 2. Дискретизация уравнений краевой задачи

Для получения алгебраических уравнений из уравнений краевой задачи, записанной в дифференциальной форме, можно воспользоваться методами конечных элементов или конечных разностей. Первый из них имеет преимущества, состоящие в том, что он может быть применен для неравномерной сетки, что позволяет существенно уменьшить требования к памяти, а также допускает простое обобщение на случай конечных элементов высокого порядка, что позволяет повысить точность получаемых результатов.

С другой стороны, метод конечных разностей на равномерной сетке в случае одной пространственной координаты предельно прост для понимания и программной реализации. Поэтому здесь будет описан метод дискретизации, базирующийся именно на втором подходе.

Проведем дискретизацию краевой задачи (7)–(8) методом конечных разностей. Для этого введем равномерную сетку на отрезке  $z_{in} \leq z \leq z_{out}$  с шагом  $\Delta z$  и безразмерным шагом  $\Delta \zeta = \Delta z/L_0$ . Число узлов сетки  $N = (z_{out} - z_{in})/\Delta z + 1$ , они нумеруются следующим образом:  $z_1 = z_{in}$ ,  $z_i = z_1 + (i - 1) \cdot \Delta z$ ,  $i = 2, \dots, N - 1$ ,  $z_N = z_{out}$ . Заменяя вторую производную в (7) её симметричной дискретной аппроксимацией во внутренних узлах сетки, получаем соотношения

$$\frac{1}{\Delta \zeta^2} (-F_{i-1} + 2F_i - F_{i+1}) - (\Omega_0 + \delta_i - jd_i) F_i = \tilde{\Omega} F_i, \quad i = 2, \dots, N - 1. \quad (9)$$

В первом и последнем узлах необходимо дополнительно учесть граничные условия (8). Для первого узла имеем уравнение, подобное (9), с  $i = 1$ , а также конечно-разностную форму первого из граничных условий (8)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta \zeta^2} (-F_2 + 2F_1 - F_0) - \kappa_{in}^2 F_1 &= \tilde{\Omega} F_1, \\ \frac{1}{2\Delta \zeta} (F_2 - F_0) - j \left( \kappa_{in} + \tilde{\Omega}/(2\kappa_{in}) \right) F_1 &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из этих формул поле  $F_0$  в фиктивном узле с номером 0, получаем уравнение

$$\left( \frac{1}{\Delta\zeta^2} + \frac{\kappa_{\text{in}}^2}{2} + j \frac{\kappa_{\text{in}}}{\Delta\zeta} \right) F_1 - \frac{1}{\Delta\zeta^2} F_2 = \tilde{\Omega} \left( \frac{1}{2} - \frac{j}{2\kappa_{\text{in}} \Delta\zeta} \right) F_1. \quad (10)$$

Аналогично представляется разностное уравнение для последнего узла с номером  $N$ :

$$-\frac{1}{\Delta\zeta^2} F_{N-1} + \left( \frac{1}{\Delta\zeta^2} + \frac{\kappa_{\text{out}}^2}{2} + j \frac{\kappa_{\text{out}}}{\Delta\zeta} \right) F_N = \tilde{\Omega} \left( \frac{1}{2} - \frac{j}{2\kappa_{\text{out}} \Delta\zeta} \right) F_N. \quad (11)$$

Собирая в нужном порядке формулы (9)–(11), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно значений поля в узлах сетки, которая в матричной форме записывается в виде

$$[\hat{A}(\Omega_0)]\{F\} = \tilde{\Omega}[\hat{B}(\Omega_0)]\{F\}. \quad (12)$$

Здесь  $[\hat{A}(\Omega_0)]$  – трехдиагональная симметричная комплексная матрица порядка  $N \times N$ ,  $[\hat{B}(\Omega_0)]$  – диагональная комплексная матрица порядка  $N \times N$ ,  $\{F\} = [F_1, F_2, \dots, F_N]^T$  – вектор-столбец длиной  $N$ , символ  $T$  – знак операции транспонирования. Выражения для элементов матриц  $[\hat{A}]$  и  $[\hat{B}]$ <sup>1</sup> легко получаются из формул (9)–(11).

### 3. Методика расчета собственных чисел с итерационным уточнением граничных условий излучения

Уравнение (12) представляет собой ОМПСЗ для пары матриц ( $[\hat{A}]$ ,  $[\hat{B}]$ ) [50–52], а  $\tilde{\Omega}$  является собственным значением (собственным числом) для этой задачи. Отметим, что элементы матриц  $[\hat{A}]$  и  $[\hat{B}]$  не зависят от  $\tilde{\Omega}$ , поэтому эта спектральная проблема является линейной и для её решения могут быть использованы стандартные методы вычислительной линейной алгебры. В частности, для запуска алгоритма поиска собственных чисел и собственных векторов этой задачи не требуется специального выбора каких-либо начальных приближений. В большинстве программ, применяемых для численного решения линейных ОМПСЗ, в качестве начальных выступают не приближения для СЗ, а приближения для собственных векторов, компоненты которых выбираются случайным образом.

Порядок матричной задачи (12) в случае большого  $N$  может достигать нескольких тысяч, соответственно, она имеет столько же СЗ, однако из них практический интерес представляет только небольшое число наименьших по модулю СЗ, отвечающих низшим продольным модам. При расчёте комплексных типов колебаний в резонаторе гиротрона их количество чаще всего не превышает десяти или, в редких случаях, двадцати. В этом случае решение задачи (12) может быть эффективно проведено методом Арнольди [51, 52], реализованным в библиотеке ARPACK [53]. Процедуры для решения линейных ОМПСЗ, входящие в эту библиотеку, позволяют рассчитывать нужное количество собственных чисел, лежащих в заданной части спектра, например, ближайших к нулю на комплексной плоскости или имеющих наименьшие положительные значения действительной части и т. д. Использование этого свойства, а также процедуры обратного сдвига собственных чисел, позволяет построить итерационный алгоритм вычисления заданного количества собственных значений нелинейной проблемы (4)–(5).

Процедура обратного сдвига СЗ для уравнения (12) состоит в следующем. Положим в нем  $\tilde{\Omega} = \Omega_s + 1/\lambda$ , перенесем слагаемое, пропорциональное  $\Omega_s$ , в левую сторону и умножим полученное уравнение слева на  $([\hat{A}] - \Omega_s[\hat{B}])^{-1}$ . В результате вместо (12) получим

$$\left( [\hat{A}] - \Omega_s[\hat{B}] \right)^{-1} [\hat{B}]\{F\} = \lambda\{F\}, \quad (13)$$

<sup>1</sup>Далее для краткости будем опускать обозначения зависимостей этих матриц от  $\Omega_0$ .



где  $\lambda = 1/(\tilde{\Omega} - \Omega_s)$ . Соотношение (13) представляет собой уже не обобщённую, а стандартную проблему собственных значений для матрицы  $([\hat{A}] - \Omega_s[\hat{B}])^{-1}[\hat{B}]$ , стоящей в левой части этого уравнения. Если  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  – собственные числа задачи (13), имеющие максимальные по величине положительные действительные части и расположенные в порядке их уменьшения, то  $\tilde{\Omega}_i = \Omega_s + 1/\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  будут представлять собой  $n$  собственных чисел ОМПСЗ (12), удовлетворяющих условию  $\text{Re } \tilde{\Omega}_i > \text{Re } \Omega_s$  и упорядоченных по мере возрастания величин  $\text{Re } \tilde{\Omega}_i$ .

Отметим, что в алгоритме, реализованном в пакете ARPACK для решения стандартной матричной проблемы в виде (13), не требуется вычислять в явном виде матрицу, находящуюся слева в этом уравнении. Вместо этого достаточно иметь две процедуры, одна из которых вычисляет результат умножения произвольного вектора длины  $N$  на матрицу  $[\hat{B}]$ , а вторая возвращает вектор  $\{X\}$  – результат решения линейного уравнения  $([\hat{A}] - \Omega_s[\hat{B}])\{X\} = \{Y\}$  для произвольного вектора  $\{Y\}$  длины  $N$ .

Таким образом, выбирая величину сдвига  $\Omega_s$ , можно рассчитывать требуемое количество собственных значений ОМПСЗ (12) в нужной части спектра. Отметим, что выбор  $\Omega_s$  не влияет на значения получаемых СЗ, а определяет только то, какие именно СЗ для пары матриц  $([\hat{A}], [\hat{B}])$  будут вычислены.

На практике при моделировании колебаний в резонаторе гиротрона, в зависимости от конкретных приложений, возникают две постановки задачи. В первом случае это расчёт комплексной частоты и соответствующего распределения поля в резонаторе только для основной продольной моды колебаний. Знание этих параметров позволяет, используя формулы линейной теории гиротрона в приближении фиксированной структуры поля [2, 54–56], оперативно рассчитать положение зоны колебаний для основной моды на плоскости параметров  $B_0, I_{st}$  (здесь  $B_0$  – магнитное поле,  $I_{st}$  – стартовый ток мягкого возникновения колебаний), а также минимальное значение стартового тока. Во втором случае необходимо достаточно точно рассчитать комплексные частоты и распределения полей для нескольких низших продольных мод. Такая необходимость возникает, например, при разработке гиротронов с перестройкой частоты за счёт изменения магнитного поля (см, например, [6–8]).

Для каждого из этих случаев можно использовать два различных алгоритма решения ОМПСЗ с линеаризацией ГУИ по спектральному параметру. В первом варианте достаточно просто положить в уравнении (12) параметр  $\Omega_0 = 0$  и найти одно собственное число этой задачи с наименьшей действительной частью. Как показывают тесты, проведённые для большого числа резонаторов, рассчитанные при этом параметры колебаний с большой точностью (порядка 6–8 значащих цифр для частоты и 4–6 значащих цифр для добротности) совпадают с результатами решения краевой задачи другими методами, в частности, методом пристрелки. Примеры таких расчётов приведены в следующем разделе.

Во втором варианте для нахождения нескольких продольных мод можно воспользоваться итерационной процедурой, которая позволяет последовательно вычислять заданное число СЗ, начиная с основной моды. При этом комплексная частота первой моды находится с помощью алгоритма из предыдущего абзаца, а начальные приближения для комплексных частот моды с номером  $i > 1$  будут рассчитываться автоматически в процессе итераций, производимых при расчёте моды с номером  $i - 1$ .

Псевдокод алгоритма поиска нескольких собственных значений показан на рис. 2 и состоит в следующем. Пусть собственные числа матричной проблемы (12) выстроены в порядке возрастания их действительных частей, найдено  $i - 1$  первых СЗ и имеется начальное приближение  $\Omega_{i0}$  для СЗ с номером  $i$ . Если сформировать матрицы  $[\hat{A}(\Omega_{i0})]$  и  $[\hat{B}(\Omega_{i0})]$  и сдвиг  $\Omega_s$  задать так, чтобы выполнялось условие  $\text{Re}(\Omega_{i-1}) < \text{Re}(\Omega_s) < \text{Re}(\Omega_{i0})$ , то использование процедуры обратного сдвига для решения матричной задачи в качестве первого рассчитанного СЗ даст улучшенное



```

function OmegaResult = GyrCavIteration[n, Omega0, tol, alpha]
% Input parameter:
%
% Omega0 - lower bound for searching eigenvalues;
% n - number of eigenvalues;
% tol - convergence criterion;
% alpha - parameter for settings the shift for the matrix
%         eigenvalue problem, 0 < alpha < 1;
%
% Result:
%   Complex eigenvalues in array OmegaResult(i), i=1,...n

% initial settings

    OmegaNew = Omega0;
    i = 0;
% cycle for eigenvalues searching
    while i<= n

% cycle for iterative clarification of the eigenvalue
    while true
% Calculation of matrices A and B for a given value OmegaNew
    .....
    OmegaShift = OmegaNew - (1-alpha)*real(OmegaNew);
% Solving the generalized matrix eigenvalue problem (13)
% and finding two eigenvalues lambda(k), k = 1,2 with
% the largest real(lambda), such that real(lambda(1)) >
% real(lambda(2);
    .....
    OmegaPrev = OmegaNew;
    OmegaNew = OmegaNew + OmegaShift + 1/lambda(1);
    OmegaNext = OmegaNew + OmegaShift + 1/lambda(2);

% convergence test
    if abs(OmegaNew-OmegaPrev) < tol*max(abs(OmegaNew), ...
                                         abs(OmegaPrev))

        break;
    end
%
    end % end internal while
% convergence achieved
    OmegaResult(i) = OmegaNew;
% initial value for the next eigenvalue
    OmegaNew = OmegaNext;
    i = i + 1;
    end % end external while
end % end module

```

Рис. 2. Псевдокод функции поиска собственных чисел методом итерационного уточнения линеаризованных ГУИ. Строки из точек должны содержать код, реализующий операции, описанные в предшествующем комментарии

Fig. 2. Pseudocode of the function for eigenvalues searching by iterative clarification of the linearized radiation boundary conditions. The dot lines must contain code that implements the operations described in the previous comment

приближение для  $i$ -го СЗ. При повторении этого процесса происходит сходимость величины  $\Omega_{i0}$  к искомому собственному значению  $\Omega_i$ , при этом на каждой итерации величина  $|\Omega_{i0} - \Omega_i|$  становится все меньше и меньше, быстро стремясь к нулю. Поэтому решение для моды с номером  $i$  линейной ОМПСЗ (12), полученной путем дискретизации краевой задачи с линеаризованными ГУИ (7)–(8), стремится к решению нелинейной спектральной краевой задачи (4)–(5).

Осталось определить, как после расчета СЗ с номером  $i$  задать начальное приближение для поиска следующего СЗ. Здесь можно принять во внимание, что при решении ОМПСЗ методом Арнольди, даже если задан расчет только одного СЗ, всегда рассчитывается их несколько, поэтому на каждой итерации процесса, описанного в предыдущем абзаце, кроме точного значения  $i$ -го собственного числа<sup>2</sup>, естественным образом находится достаточно хорошее приближение для запуска итераций поиска следующего СЗ.

Заметим, что в рассмотренной процедуре на каждой итерации внутреннего цикла алгоритма (см. рис. 2) вычисляется новое, более подходящее значение для величины  $\Omega_0$ , вблизи которой происходит линеаризация ГУИ при выводе уравнений (7)–(8). При этом линеаризованные ГУИ все более и более точно моделируют процессы излучения именно для той моды, которая рассчитывается на данном шаге внешнего цикла процедуры поиска спектра собственных мод. Поэтому предлагаемый подход может быть назван методом расчета мод резонатора с итерационным уточнением граничных условий излучения.

подавляющая часть времени решения ОМПСЗ в коде ARPACK расходуется на вычисление собственных чисел; для расчета собственных векторов требуется значительно меньшее время, поэтому при каждом вызове процедуры из библиотеки ARPACK устанавливается необходимость одновременного вычисления и собственных чисел, и собственных векторов задачи. В результате на выходе всего итерационного процесса получаем заданное количество СЗ и собственных векторов. Компонентами последних являются значения комплексной амплитуды поля вычисленных мод в узлах сетки.

Практические расчеты показывают, что для внутренней сходимости решения для основной моды требуется 3 итерации внутреннего цикла алгоритма (см. рис. 2), а для каждой следующей моды 2 итерации, при этом в каждом случае последняя итерация нужна для проверки сходимости. В целом для расчета  $n$  собственных мод необходимо примерно  $2n + 1$  раз решить ОМПСЗ. Для  $n < 10$  эта величина несоизмеримо меньше требуемого количества решений задачи Коши для дифференциального уравнения (1) в методе пристрелки.

На программу, в которой реализована данная методика, получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [57]. Программа написана на языках программирования Wolfram Mathematica (интерфейс) и Фортран (расчетный модуль) и работает под управлением ОС Windows 10 или Windows 11. Без каких-либо изменений программа может быть перекомпилирована для ОС Linux.

#### 4. Тестовые примеры расчёта резонаторов

В данном разделе содержатся результаты тестовых расчётов резонаторов нескольких гиротронов, работающих в различных диапазонах — от длинноволновой части миллиметрового до субмиллиметрового диапазона длин волн. Для удобства ссылок резонаторы для различных тестовых примеров обозначены номером в табл. 1 и для каждого из них приведены следующие данные: диапазон, тип рабочей моды, проводимость стенок резонатора, используемая в расчётах,

<sup>2</sup>Термин «точное значение СЗ» употребляется здесь в том смысле, что это величина СЗ нелинейной краевой задачи, найденная с учетом погрешности ее дискретизации, критерия сходимости итерационной процедуры и критерия сходимости метода Арнольди в библиотеке ARPACK.

Таблица 1. Резонаторы гиротронов для тестовых расчетов

Table 1. Gyrotron cavities for test calculations

Номер теста	Частота, ГГц	Рабочая мода	Проводимость стенок, См/м	Ссылка на источник
1	391	$TE_{85}$	$3 \cdot 10^7$	[58]
2	140	$TE_{03}$	$\infty$	[37]
3	42	$TE_{03}$	$\infty$	[37]
4	140	$TE_{10,4}$	$\infty$	[37]
5	170	$TE_{34,10}$	$3 \cdot 10^7$	[59]

ссылка на источник. В этих ссылках можно найти полные данные о геометрии резонаторов и других необходимых параметрах. Для всех примеров приведены также результаты моделирования основной или нескольких продольных мод другими способами, что позволяет сделать выводы о точности предлагаемого метода.

Схематические изображения моделируемых в тестах резонаторов, а также значения или обозначения их геометрических размеров приведены на рис. 3. Для резонаторов из тестов 2–5 размеры приведены в табл. 2.

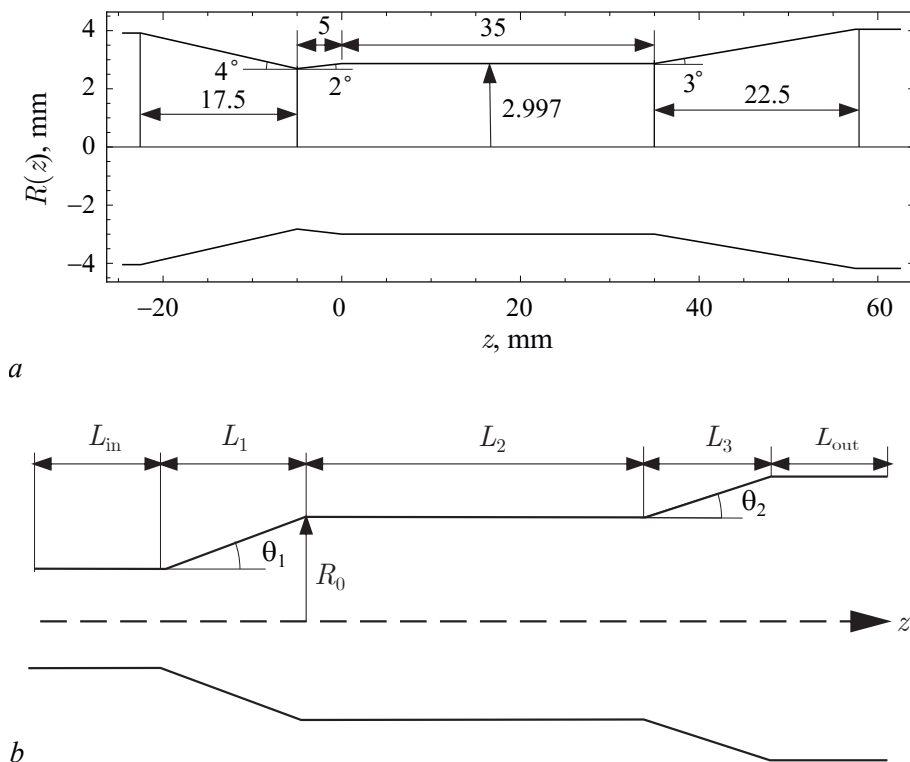


Рис. 3. Профили резонаторов для тестов: *a* — резонатор гиротрона с непрерывной перестройкой частоты для спектроскопических исследований [58]; *b* — профиль резонаторов для тестов из [37, 59]. Все размеры на рис. 3, *a* приведены в мм  
 Fig. 3. Cavities profiles considered in the tests: *a* — cavity for continuous frequency tunable gyrotron for spectroscopy studies [58]; *b* — profile of the cavities for tests from [37, 59]. All dimensions on the figure 3, *a* are given in mm

Таблица 2. Геометрические параметры резонаторов 2–5 с профилем, показанным на рис. 1, b

Table 2. Geometry parameters of the cavities 2–5 with profile shown in fig. 1, b

Параметр	Рабочая частота, рабочая мода			
	140 ГГц, $TE_{03}$	42 ГГц, $TE_{03}$	42 ГГц, $TE_{10,4}$	170 ГГц, $TE_{34,10}$
$L_1$ , мм	18.9	30.0	10.0	8
$L_2$ , мм	10.0	44.0	11.0	13
$L_3$ , мм	10.1	46.0	12.0	16
$\theta_1$ , град	0.5	2.0	5.0	2.8
$\theta_2$ , град	3.0	3.0	3.0	3.5
$R_0$ , мм	3.47	11.57	8.11	20.95

**4.1. Моделирование основных мод колебаний в резонаторах из тестов 1–5.** Сначала рассмотрим результаты расчетов основных типов колебаний для каждого резонатора, представленного в табл. 1. В данном подразделе расчет основной моды производился по упрощенной методике, когда вычислялось единственное СЗ линейной ОМПСЗ (12) с наименьшей величиной  $\text{Re}(\tilde{\Omega})$ , при этом полагалось  $\Omega_0 = 0.0$ . Таким образом, для каждого из резонаторов 1–5 матричная проблема решалась только один раз. Вычисленные таким способом значения частот и добротностей основных мод приведены в табл. 3. Для сравнения в этой же таблице в двух последних колонках показаны соответствующие величины, рассчитанные методом пристрелки с использованием программы [34]. Видно, что для всех резонаторов значения частоты, вычисленные двумя способами, отличаются не более чем на 2 единицы в восьмом знаке, а величины добротностей — не более чем на 3 единицы в четвертом знаке. Эти результаты подтверждают замечание из раздела 3, что в случае расчета только основной моды достаточно использовать упрощенную методику, при этом получаемые результаты для параметров мод демонстрируют очень высокую точность.

Рассчитанные таким способом распределения полей основных мод во всех случаях с графической точностью совпадают с картинками полей, полученных при решении нелинейной спектральной проблемы с помощью итерационной методики. Для некоторых резонаторов примеры этих распределений будут приведены далее.

Таблица 3. Частоты и дифракционные добротности основных типов колебаний для резонаторов гиротронов из тестов 1–5

Table 3. Frequencies and quality factors of the fundamental modes for the gyrotron cavities from tests 1–5

Номер резонатора	Спектральный подход с линеаризацией ГУИ		Метод пристрелки	
	Частота, ГГц	Дифракционная добротность	Частота, ГГц	Дифракционная добротность
1	391.47013	16631.3	391.47013	16630.8
2	140.22593	849.3	140.22592	849.0
3	42.03745	1115.2	42.03745	1115.2
4	140.12867	585.5	140.12869	585.7
5	170.00732	1394.2	170.00731	1394.09

**4.2. Гиротрон на моде  $TE_{85}$  с рабочей частотой 391 ГГц.** В качестве следующего примера рассмотрен резонатор гиротрона из [58], который работает на второй циклотронной гармонике с рабочей частотой 391 ГГц и с непрерывной перестройкой частоты в диапазоне около 2 ГГц. Рабочая мода гиротрона  $TE_{8,5}$ . Прибор предназначен для использования в спектроскопических установках на ядерном магнитном резонансе, использующих эффект динамической поляризации ядер. Необходимая перестройка частоты обеспечивается взаимодействием электронного пучка с полями встречных компонент мод типа  $TE_{85q}$  при изменении магнитного поля. Здесь продольный индекс моды  $q$  меняется в диапазоне  $q = 1...6$ . Зависимость радиуса резонатора от продольной координаты, показанная на рис. 3, а, взята из [58]. Радиус и длина однородной части резонатора равны  $R_0 = 2.997$  мм и  $L_0 = 35$  мм. Принятая в расчётах проводимость стенок резонатора  $\sigma = 3 \times 10^7$  См/м.

Отметим, что для обеспечения перестройки частоты за счёт взаимодействия пучка с различными продольными типами колебаний моды высокого порядка должны обладать сравнительно большой добротностью, чтобы снизить для них пусковой ток. Поэтому резонатор на рис. 3, а имеет большое отношение  $L_0/R_0 \approx 11.7$  и сравнительно большой угол раскрытия расширяющегося рупора на правом конце резонатора. Это обеспечивает значительные отражения волны в волноводе от перехода однородной части резонатора в расширяющийся рупор.

Рассчитанные для этого резонатора значения частот и добротностей продольных мод для  $q = 1...6$  приведены в табл. 4. Во второй и третьей колонках таблицы даны частоты и добротности, полученные с помощью развитого в настоящей статье метода; в двух последних колонках содержатся эти же величины, рассчитанные методом пристрелки с использованием той же программы, что и в предыдущем примере. Рассчитанные двумя методами частоты отличаются не более чем на 2 единицы в 8-й значащей цифре, а добротности — на 1–2 единицы в четвертой значащей цифре. С учетом разных численных подходов, использованных в этих методиках, можно считать, что полученные с их помощью результаты практически совпадают.

Таблица 4. Частоты и добротности продольных мод резонатора гиротрона на рабочей моде  $TE_{85}$  [58]

Table 4. Frequencies and quality factors of the axial modes of the gyrotron cavity with operating mode  $TE_{85}$  [58]

$q$	Спектральный подход с линеаризацией ГУИ		Метод пристрелки	
	Частота, ГГц	Добротность	Частота, ГГц	Добротность
1	391.47013	16631.3	391.47013	16630.8
2	391.53397	13143.0	391.53397	13141.6
3	391.64034	9742.4	391.64034	9740.3
4	391.78919	7156.4	391.78919	7154.2
5	391.98044	5340.3	391.98045	5338.5
6	392.21399	4080.6	392.21401	4079.5

На рис. 4 показаны распределения полей комплексных мод в этом резонаторе. Сплошными черными линиями отображаются модули комплексных амплитуд полей, оранжевыми линиями — их аргументы. Пунктир соответствует профилю резонатора в произвольных единицах. Поля, рассчитанные обоими методами (спектральный подход и метод пристрелки) для всех мод совпадают с графической точностью.

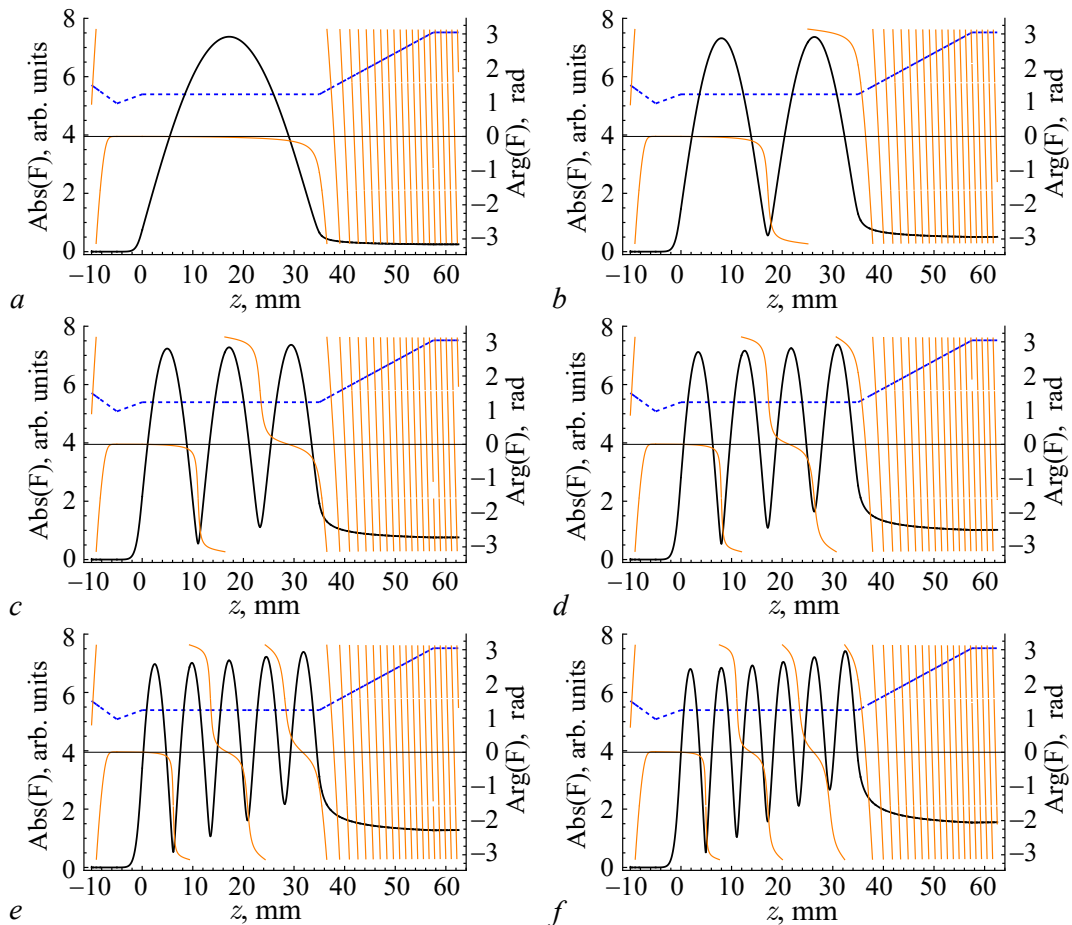


Рис. 4. Распределения полей первых 6 продольных мод резонатора гиротрона с рабочей модой  $TE_{85}$  и частотой диапазона 391 ГГц. Рис. *a-f* отвечают модам с продольными индексами  $q = 1..6$ . Сплошные черные линии — модули комплексной амплитуды поля в произвольных единицах; оранжевые линии — фазы комплексной амплитуды; синий пунктир — профиль резонатора (цвет онлайн)

Fig. 4. Field distributions of the first six high order axial modes of a gyrotron cavity with an operating mode of  $TE_{85}$  and a frequency 391 GHz. Fig. *a-f* correspond to modes with axial indices  $q = 1..6$ . Solid black lines are the modules of the complex amplitude of the field in arbitrary units, orange lines — phases of the complex amplitude, blue dotted line — cavities profile (color online)

**4.3. Резонаторы гиротронов с частотами 42 ГГц и 140 ГГц [37].** В работе [37] описан комплекс программ GYROCOMPU для компьютерного моделирования работы гиротрона в разных режимах, в том числе для расчета параметров полого резонатора без пучка. В качестве тестовых примеров взяты три гиротрона, указанные в табл. 1 под номерами 2–4. Были проведены расчеты этих резонаторов и сравнение полученных результатов с данными из статьи [37]. Результаты сравнения сведены в табл. 5. В ней содержатся значения частот и добротностей основной продольной моды для трех резонаторов, полученные двумя способами: с помощью кода COAXIAL, разработанного ранее О. Думбрайсом, и с помощью кода GYROCOMPU, а также значения этих же величин, рассчитанных с использованием развитой в данной статье методики.

Как следует из табл. 5, значения частот основных мод, полученных с использованием всех трех кодов практически совпадают. Дифракционные добротности, рассчитанные с помощью кода COAXIAL и предлагаемым методом, также совпадают, а программа GYROCOMPU дает для добротностей значения, превышающие результаты двух других программ на 5–10%.



Таблица 5. Сравнение частот и дифракционных добротностей основных типов колебаний резонаторов с данными из [37]

Table 5. Comparison of frequencies and diffraction quality factors of the fundamental axial modes of the cavities with data from [37]

Тип колебаний	GYROCOMPU		COAXIAL		Спектральный подход с линейризацией ГУИ	
	Частота, ГГц	Диф. добротность	Частота, ГГц	Диф. добротность	Частота, ГГц	Диф. добротность
$TE_{031}$	140.223	857.1	140.226	849.0	140.226	849.3
$TE_{031}$	42.037	1136.6	42.037	1115.0	42.037	1115.2
$TE_{10,4,1}$	140.129	588.0	140.129	586.0	140.129	585.7

В статье [37] это различие объясняется различием численных методик, использованных в программах COAXIAL и GYROCOMPU, а не дефектом какого-либо из них.

Спектральным подходом с итерационным уточнением ГУИ также были проведены расчеты частот, добротностей и пространственных распределений для высших продольных мод в резонаторах из тестов 2–4, и полученные результаты сравнивались с результатами метода пристрелки [34]. Для всех резонаторов и для всех рассчитанных продольных мод наблюдается такое же полное согласие этих результатов друг с другом, как и для резонатора из теста 1. Для примера на рис. 5 приведены картины полей первых четырех мод в резонаторе из теста 3. Цвета и начертания различных кривых на этом рисунке аналогичны параметрам кривых, принятым на рис. 4.

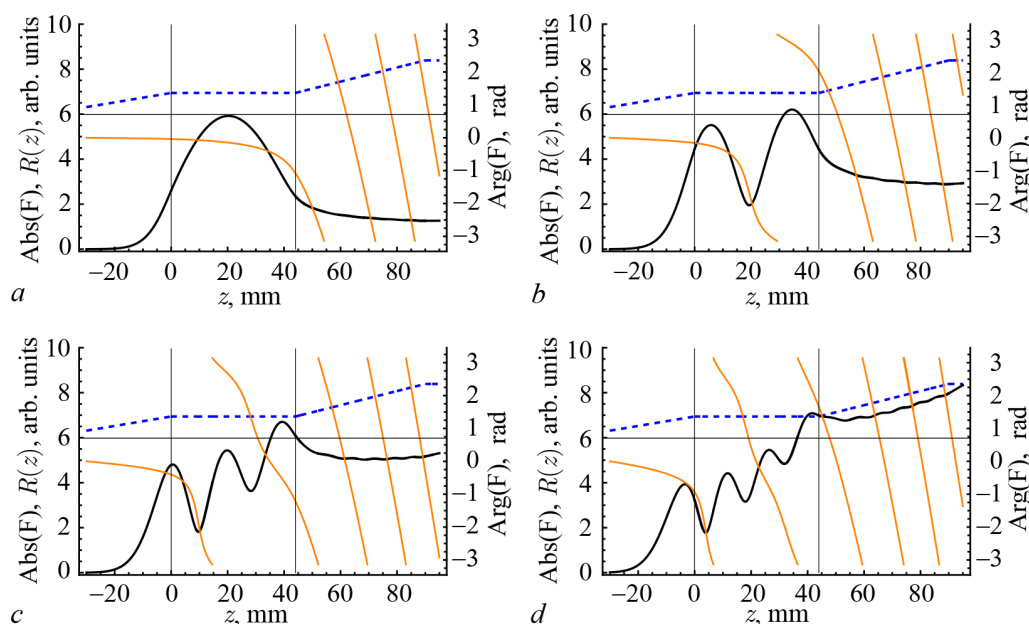


Рис. 5. Распределения полей 4 продольных мод резонатора гиротрона с рабочими модами  $TE_{03q}$  и частотой 42 ГГц. Рис. *a–d* соответствуют модам с продольными индексами  $q = 1...4$ . Сплошные черные линии – модули комплексной амплитуды поля в произвольных единицах, оранжевые линии – фазы комплексной амплитуды; синий пунктир – профиль резонатора (цвет онлайн)

Fig. 5. Fields distributions of four cavity axial modes for gyrotron with operating mode  $TE_{03q}$  and frequency 42 GHz. Figures *a–d* correspond to modes with axial indexes  $q = 1...4$ . Solid curves – modules of the complex field amplitude (arbitrary units), orange curves – phases of the complex field amplitude, blue dashed line – cavities profile (color online)

**4.4. Тестовый пример 5. Резонатор гиротрона для нагрева плазмы [59].** Гиротрон, описанный в [59], разработан как прототип гиротрона для нагрева плазмы. Согласно заявленным в этой статье проектируемым выходным параметрам, он должен генерировать мощность свыше 1 МВт на частоте 170 ГГц с электронным КПД, превышающим 35%. Напряжение и ток равны 78...82 кВ и 40 А соответственно. Рабочая мода резонатора  $TE_{34,10,1}$ .

Экстремальные параметры данного гиротрона требуют тщательного проектирования резонатора. Высокие тепловые нагрузки приводят к необходимости максимального снижения дифракционной добротности рабочей моды колебаний при одновременном сохранении высокого значения омической добротности. Эффективная длина рабочей моды, определенная в [60] формулой

$$L_{\text{eff}} = \frac{\pi}{\sqrt{(2\pi f/c)^2 - (v_{mn}/R_0)^2}},$$

при частоте генерации  $f = 170$  ГГц составляет  $L_{\text{eff}} \approx 18.8$  мм, при этом отношение  $L_{\text{eff}}/R_0 \approx 0.9$  предельно мало. Высокие азимутальный и радиальный индексы рабочей моды и большой радиус резонатора обуславливают большое значение омической добротности, которая, если оценивать ее по известной формуле [2], составляет  $Q_{\text{ohm}} \approx 74420$ .

При таких параметрах резонатора комплексная частота основной моды  $TE_{34,10,1}$  оказывается на комплексной плоскости значительно отделенной от частот мод с более высокими продольными индексами. Это благоприятно сказывается на повышении стартовых токов для этих мод и, следовательно, на устойчивости колебаний на основной моде.

Если использовать метод пристрелки для расчета спектра колебаний, такое разделение комплексных частот приводит к сложности поиска начальных приближений для каждой из этих мод. В то же время, как показывают расчеты, предлагаемый здесь модифицированный спектральный подход легко справляется с этой задачей и вычисляет требуемое количество комплексных частот одну за другой, используя итерационный алгоритм, описанный в разделе 3.

В табл. 6 приведены результаты расчетов частот и добротностей колебаний первых четырех продольных мод рассматриваемого резонатора. Совпадение результатов для двух низших мод, полученных предлагаемым методом и методом прогонки, можно считать хорошим, но с ростом номера моды это совпадение ухудшается. Можно предположить, что это ухудшение объясняется тем, что у данного резонатора имеется значительное сужение волновода на пушечном конце резонатора и на этом участке волна в волноводе становится сильно закритической. В этих условиях уравнение (4) приобретает свойства жесткого дифференциального уравнения [61], в результате чего точность решения задачи Коши в методе прогонки снижается. Однако это предположение нуждается в дополнительной проверке. Распределения полей рассчитываемых мод выглядят аналогично полям на рис. 5 и здесь не приводятся.

Таблица 6. Частоты и дифракционные добротности продольных мод резонатора гиротрона с рабочей частотой 170 GHz [59]

Table 6. Frequencies and diffraction quality factors of HOAM for gyrotron cavity with operating frequency 170 GHz [59]

$q$	Спектральный подход с линеаризацией ГУИ		Метод пристрелки	
	Частота, ГГц	Дифракционная добротность	Частота, ГГц	Дифракционная добротность
1	170.00732	1393.5	170.00731	1394.1
2	170.56715	356.5	170.56692	356.0
3	171.46104	210.9	170.46182	211.6
4	172.41215	154.3	172.40427	152.8

## Заключение

В статье изложен спектральный подход с итерационным уточнением граничных условий излучения для решения краевой задачи, описывающей квазисобственные колебания в открытом резонаторе гиротрона. Метод позволяет рассчитывать спектр продольных квазисобственных мод, что подразумевает расчет их частот, добротностей (дифракционной, омической и полной), а также распределений комплексных амплитуд полей мод.

Главной особенностью метода является то, что при его использовании отпадает необходимость задания начальных приближений для поиска комплексных частот мод, что является основной проблемой при использовании других итерационных способов решения этой задачи, например, метода пристрелки. Более того, если требуется вычисление параметров только основной моды колебаний открытого резонатора, то данная методика позволяет получить их после однократного решения обобщенной матричной проблемы собственных значений, без дополнительных итераций.

Развитая методика может быть обобщена на случай уравнений линейной теории гиротрона и использована для разработки новых методов анализа условий мягкого самовозбуждения в гиротронах-генераторах.

## Список литературы

1. *Flyagin V. A., Gaponov A. V., Petelin M. I., Yulpatov V. K.* The gyrotron // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1977. Vol. 25, no. 6. P. 514–521. DOI: 10.1109/TMTT.1977.1129149.
2. *Nusinovich G. S.* Introduction to the Physics of Gyrotron // Baltimore and London: Johns Hopkins University Press, 2004. 335 p.
3. *Kartikyan M. V., Borie E., Thumm M.* Gyrotrons: High-Power Microwave and Millimeter Wave Technology. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 2003. 228 p.
4. *Thumm M.* Progress on gyrotrons for ITER and future thermonuclear fusion reactors // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2011. Vol. 39, no. 4. P. 971–979. DOI: 10.1109/TPS.2010.2095042.
5. *Glyavin M. Y., Idehara T., Sabchevski S. P.* Development of THz gyrotrons at IAP RAS and FIR UF and their applications in physical research and high-power THz technologies // *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*. 2015. Vol. 5, no. 5. P. 788–797. DOI: 10.1109/TTHZ.2015.2442836.
6. *Hornstein M. K., Bajaj V. S., Griffin R. G., Kreischer K. E., Mastovsky I., Sirigiri J. R., Shapiro M. A., Temkin R. J.* Second harmonic operation at 460 GHz and broadband continuous frequency tuning of a gyrotron oscillator // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2005. Vol. 52, no. 5. P. 798–807. DOI: 10.1109/TED.2005.845818.
7. *Chang T. H., Idehara T., Ogawa I., Agusu L., Kobayashi S.* Frequency tunable gyrotron using backward-wave components // *Journal of Applied Physics*. 2009. Vol. 105, no. 6. P. 063304. DOI: 10.1063/1.3097334.
8. *Torrezan A. C., Han S. T., Mastovsky I., Shapiro M. A., Sirigiri J. R., Temkin R. J., Barnes A. B., Griffin R. G.* Continuous-wave operation of a frequency-tunable 460-GHz second-harmonic gyrotron for enhanced nuclear magnetic resonance // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2010. Vol. 8, no. 6. P. 1150–1159. DOI: 10.1109/TPS.2010.2046617.
9. *Torrezan A. C., Shapiro A. C., Sirigiri J. R., Temkin R. J., Griffin R. G.* Operation of a continuously frequency-tunable second-harmonic CW 330-GHz gyrotron for dynamic nuclear polarization // *IEEE Transaction on Electron Devices*. 2011. Vol. 58, no. 8. P. 2777–2783. DOI: 10.1109/TED.2011.2148721.
10. *Глявин М. Ю., Денисов Г. Г., Запелов В. Е., Кошелев М. А., Третьяков М. Ю., Цветков А. И.*

- Источники мощного терагерцевого излучения для спектроскопии и диагностики различных сред // УФН. 2016. Vol. 186, no. 6. С. 667–677. DOI: 10.3367/UFNr.2016.02.037801.
11. *Sabchevski S., Glyavin M.* Development and application of THz gyrotrons for advanced spectroscopic methods // *Photonics*. 2023. Vol. 12, no. 2. P. 189–207. DOI: 10.3390/photonics10020189.
  12. *Siegel P.H.* Terahertz technology in biology and medicine // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2004. Vol. 52, no. 10. P. 2438–2447. DOI: 10.1109/TMTT.2004.835916.
  13. *Pilosof M., Einat M.* Note: A 95 GHz mid-power gyrotron for medical applications measurements // *Review of Scientific Instruments*. 2015. Vol. 86, no. 1. P. 016113. DOI: 10.1063/1.4906507.
  14. *Cheon H., Yang H.J., Lee S.H., Kim Y.A., Son J.H.* Terahertz molecular resonance of cancer DNA // *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6, no. 1. P. 37103. DOI: 10.1038/srep37103.
  15. *Miyoshi N., Idehara T., Khutoryan E., Fukunaga Y., Bibin A.B., Ito S., Sabchevski S.P.* Combined hyperthermia and photodynamic therapy using a sub-THz gyrotron as a radiation source // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2016. Vol. 37, no. 8. P. 805–814. DOI: 10.1007/s10762-016-0271-z.
  16. *Bykov Y., Ereemeev A., Glyavin M., Kholoptsev V., Luchinin A., Plotnikov G., Denisov A., Bogdashov G., Kalynova V., Semenov N., Zharova N.* 24-84-GHz gyrotron systems for technological microwave applications // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2004. Vol. 32, no. 1. P. 67–72. DOI: 10.1109/TPS.2004.823904.
  17. *Bratman V.L., Bogdashov A.A., Denisov G.G., Glyavin M.Yu., Kalynov Yu.K., Luchinin A.G., Manuilov V.N., Zapevalov V.E., Zavolsky N.A., Zorin V.G.* Gyrotron development for high power THz technologies at IAP RAS // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2012. Vol. 33, no. 7. P. 715–723. DOI: 10.1007/s10762-012-9898-6.
  18. *Aripin H., Mitsudo S., Prima E.S., Sudiana I.N., Tani S., Sako K., Fujii Y., Saito T., Idehara T., Sano S., Purwasasmita B.S., Sabchevski S.* Structural and microwave properties of silica xerogel glass-ceramic sintered by sub-millimeter wave heating using a gyrotron // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2012. Vol. 33, no. 12. P. 1149–1162. DOI: 10.1007/s10762-012-9925-7.
  19. *Glyavin M., Sabchevski S., Idehara T., Mitsudo S.* Gyrotron-Based Technological Systems for Material Processing – Current Status and Prospects // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2020. Vol. 41, no. 8. P. 1022–1037. DOI: 10.1007/s10762-020-00727-w.
  20. *Federici J., Moeller L.* Review of terahertz and subterahertz wireless communications // *Journal of Applied Physics*. 2010. Vol. 107, no. 11. P. 111101. DOI: 10.1063/1.3386413.
  21. *Idehara T., Mitsudo S., Ogawa I.* Development of high-frequency, highly stable gyrotrons as millimeter to submillimeter wave radiation sources // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2004. Vol. 32, no. 3. P. 910–916. DOI: 10.1109/TPS.2004.827599.
  22. *Idehara T., Tsuchiya H., Watanabe O., Agusu L., Mitsudo S.* The first experiment of a THz gyrotron with a pulse magnet // *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 2006. Vol. 27, no. 3. P. 319–331. DOI: 10.1007/S10762-006-9084-9.
  23. *Glyavin M.Yu., Luchinin A.G., Golubiatnikov G.Yu.* Generation of 1.5-kW, 1-THz Coherent radiation from a gyrotron with a pulsed magnetic field // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 100. P. 015101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.015101.
  24. *Bratman V.L., Kalynov Yu.K., Manuilov V.N.* Large-orbit gyrotron operation in the terahertz frequency range // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102. P. 245101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.245101.
  25. *Bandurkin I., Fedotov A., Glyavin M., Idehara T., Malkin A., Manuilov V., Sergeev A., Tsvetkov A., Zaslavsky V., Zotova I.* Development of third-harmonic 1.2-THz gyrotron with intentionally increased velocity spread of electrons // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2020. Vol. 67, no. 10. P. 4432–4436. DOI: 10.1109/TED.2020.3012524.

26. *Botton M., Antonsen T. M., Levush B., Nguyen K. T., Vlasov A. N.* MAGY: A time-dependent code for simulation of slow and fast microwave sources // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1998. Vol. 26, no. 3. P. 882–892. DOI: 10.1109/27.700860.
27. *Stock A., Neudorfer J., Riedlinger M., Pirrung G., Gassner G., Schneider R., Roller S., Munz C. D.* Three-dimensional numerical simulation of a 30-GHz gyrotron resonator with an explicit high-order discontinuous-Galerkin-based parallel article-in-cell method // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2012. Vol. 40, no. 7. P. 1860–1870. DOI: 10.1109/TPS.2012.2195509.
28. *Lin M. C., Smithe D. N., Guss W. C., Temkin R. J.* Hot test of gyrotron cavity interaction using a 3D CFDTD PIC method // In: 15th IEEE International Vacuum Electronics Conference. 22–24 April 2014, Monterey, CA, USA: IEEE, 2014. P. 87–88. DOI: 10.1109/IVEC.2014.6857503.
29. *Розенталь Р. М., Тай Е. М., Тараканов В. П., Фокин А. П.* Использование 2,5-мерного PIC-кода для моделирования гиротронов с несимметричными рабочими модами // *Известия вузов. Радиофизика*. 2022. Т. 65, № 5. С. 420–433. DOI: 10.52452/00213462\_2022\_65\_05\_420.
30. *Fliiflet A. W., Read M. E.* Use of weakly irregular waveguide theory to calculate eigenfrequencies, Q values, and RF field functions for gyrotron oscillators // *International Journal of Electronics Theoretical and Experimental*. 1981. Vol. 51, no. 4. P. 475–484. DOI: 10.1080/00207218108901350.
31. *Borie E., Dumbrajs O.* Calculation of eigenmodes of tapered gyrotron resonators // *International Journal of Electronics*. 1986. Vol. 60, no. 2. P. 143–154. DOI: 10.1080/00207218608920768
32. *Sabchevski S., Idehara T., Saito T., Ogawa I., Mitsudo S., Tatematsu Y.* Physical models and computer codes of the GYROSIM (GYROtron SIMulation) software package // *FIR Center Report FIR FU-99*. 2010. Available from: [http://fir.u-fukui.ac.jp/FIR\\_FU99S.pdf](http://fir.u-fukui.ac.jp/FIR_FU99S.pdf).
33. *Avramides K. A., Pagonakis I. G., Iatrou C. T., Vomvouridis J. L.* EURIDICE: A code-package for gyrotron interaction simulations and cavity design // *EPJ Web of Conferences*. 2012. Vol. 32. P. 04016. DOI: 10.1051/epjconf/20123204016.
34. *Мельникова М. М., Рожнев А. Г.* Программа расчета электродинамических параметров собственных мод в гиротроне с нефиксированной структурой поля // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015615762 от 22 мая 2015 г.
35. *Bera A., Sinha A. K.* A novel approach for computation of high-order axial modes in a gyrotron resonator // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2018. Vol. 65, no. 12. P. 5505–5510. DOI: 10.1109/TED.2018.2877843.
36. *Sawant A., Choi E.* Development of the full package of gyrotron simulation code // *Journal of the Korean Physical Society*. 2018. Vol. 73, no. 11. P. 1750–1759. DOI: 10.3938/jkps.73.1750.
37. *Wang P., Chen X., Xiao H., Dumbrajs O., Qi X., Li L.* GYROCOMPU: Toolbox designed for the analysis of gyrotron resonators // *IEEE Transactions on Plasma Science*. Vol. 48, no. 9. P. 3007–3016. DOI: 10.1109/TPS.2020.3013299.
38. *Semenov E., Zapevalov V., Zuev, A.* Methods for simulation the nonlinear dynamics of gyrotrons / In: Balandin D., Barkalov K., Gergel V., Meyerov I. (eds). *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2020. Communications in Computer and Information Science*. Vol. 1413. Springer. 2021. P. 49–62. DOI: 10.1007/978-3-030-78759-2\_4.
39. *Вайнштейн Л. А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 475 с.
40. *Власов С. Н., Жислин Г. М., Орлова И. М., Петелин М. И., Рогачева Г. Г.* Открытые резонаторы в виде волноводов переменного сечения // *Известия вузов. Радиофизика*. 1969. Т. 12, № 8. С. 1236–1244.
41. *Власов С. Н., Орлова И. М., Петелин М. И.* Резонаторы гиротронов и электродинамическая селекция мод / В сб. *Гиротрон* (под. ред. А.В. Гапонова-Грехова). Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 62–76.
42. *Chu K. R., Kou C. S., Chen J. M., Tsai Y. C., Cheng C., Bor S. S., Chang L. H.* Spectral domain analysis of open cavities // *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 1992. Vol. 13, no. 10. P. 1571–1598. DOI: 10.1007/BF01009236.

43. *Hung C. L., Tsai Y. C., Chu K. R.* A study of open-end cavities by the field-energy method // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1998. Vol. 26, no. 3, P. 931–939. DOI: 10.1109/27.700874.
44. *Hung C. L., Yeh Y. S.* Spectral domain analysis of coaxial cavities // *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 2003. Vol. 24, no. 12. P. 2025–2041. DOI: 10.1023/B:IJIM.0000009758.76835.1f.
45. *Sabchevski S. P., Idehara T.* A numerical study on finite-bandwidth resonances of high-order axial modes (HOAM) in a gyrotron cavity // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2015. Vol. 36, no. 7. P. 628–653. DOI: 10.1007/s10762-015-0161-9.
46. *Genoud J., Tran T. M., Alberti S., Braunmueller F., Hogge J.-Ph., Tran M. Q., Guss W. C., Temkin R. J.* Novel linear analysis for a gyrotron oscillator based on a spectral approach // *Physics of Plasmas*. 2016. Vol. 2, no. 4. P. 043101. DOI: doi.org/10.1063/1.4945611.
47. *Ильинский А. С., Слепян Г. Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: МГУ, 1983. 232 с.
48. *Genoud J., Alberti S., Tran T. M., Le Bars G., Kaminski P., Hogge J. P., Avramidis K. A., Tran M. Q.* Parasitic oscillations in smooth-wall circular symmetric gyrotron beam ducts // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2019. Vol. 40, no. 2. P. 131–149. DOI: 10.1063/1.4945611.
49. *Chu K. R., Chen H. Y., Hung C. L., Chang T. H., Barnett L. R., Chen S. H., Yang T. T., Dialetis D. J.* Theory and experiment of ultrahigh-gain gyrotron traveling wave amplifier // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1999. Vol. 27, no. 2. P. 391–404. DOI: 10.1109/27.772266.
50. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М: Мир, 1983. 384 с.
51. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001. 430 с.
52. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
53. *Lehoucq R. B., Sorensen D. C., Yang C.* ARPACK users' guide: solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods // *Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1997.
54. *Петелин М. И., Юлпатов В. К.* Линейная теория МЦР-монотрона. I. // *Известия Вузов. Радиофизика*. 1975. Т. 18, № 2. С. 290–299.
55. *Петелин М. И.* Самовозбуждение колебаний в гиротроне // В кн. *Гиротрон: Сб. научн. трудов.* (под ред. А.В. Гапонова-Грехова). Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 5–25.
56. *Borie E., Jödicke B.* Comments on the Linear Theory of the Gyrotron // *IEEE Transaction on Plasma Science*. 1988. V. 16, no. 2. P. 116–121. DOI: 10.1109/27.3802.
57. *Рожнев А.Г., Адилова А.Б., Григорьева Н.В., Рыскин Н.М.* Программа расчета свойств продольных мод колебаний в открытом резонаторе гиротрона методом конечных разностей с линейаризованными по спектральному параметру граничными условиями («GyrotronCavityFDM») // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2033613828 от 09 марта 2023 г.
58. *Yamaguchi Y., Tatematsu Y., Saito T., Kuwahara T., Ikeda R., Ogawa I., Idehara T., Dumbrajs O.* Experimental verification of a self-consistent calculation for continuous frequency-tune with a 400 GHz band second harmonic gyro-BWO // In: *38th Int. Conf. on Infr., Mill. and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*. 01-06 September 2013, Mainz, Germany. New York: IEEE, 2013. P. 1–2. DOI: 10.1109/IRMMW-THz.2013.6665445.
59. *Kumar A., Kumar N., Singh U., Khatun H., Vyas V., Sinha A. K.* Design of interaction cavity of a 170-GHz, 1-MW gyrotron for ECRH application // *Vacuum*. 2011. Vol. 86, no. 2. P. 184–188. DOI: 10.1016/j.vacuum.2011.06.002.
60. *Thumm M.* Effective cavity length of gyrotrons // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. Vol. 35. no. 12. P. 1011–1017. DOI: doi.org/10.1007/s10762-014-0102-z.



61. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.

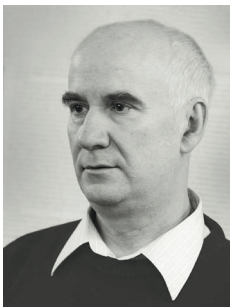
## References

1. Flyagin VA, Gaponov AV, Petelin MI, Yulpatov VK. The gyrotron. IEEE Transactions on microwave theory and techniques. 1977;25(6):514–521. DOI: 10.1109/TMTT.1977.1129149.
2. Nusinovich GS. Introduction to the Physics of Gyrotron. Baltimore and London: Johns Hopkins University Press; 2004. 335 p.
3. Kartikeyan MV, Borie E, Thumm M. Gyrotrons: High-Power Microwave and Millimeter Wave Technology. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag; 2003. 228 p.
4. Thumm M. Progress on gyrotrons for ITER and future thermonuclear fusion reactors. IEEE transactions on plasma science. 2011;39(4):971–979. DOI: 10.1109/TPS.2010.2095042.
5. Glyavin MY, Idehara T, Sabchevski SP. Development of THz gyrotrons at IAP RAS and FIR UF and their applications in physical research and high-power THz technologies. IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology. 2015;5(5):788–797. DOI: 10.1109/TTHZ.2015.2442836.
6. Hornstein MK, Bajaj VS, Griffin RG, Kreisler KE, Mastovsky I, Sirigiri JR, Shapiro MA, Temkin RJ. Second harmonic operation at 460 GHz and broadband continuous frequency tuning of a gyrotron oscillator. IEEE Transactions on Electron Devices. 2005;52(5):798–807. DOI: 10.1109/TED.2005.845818.
7. Chang TH, Idehara T, Ogawa I, Agusu L, Kobayashi S. Frequency tunable gyrotron using backward-wave components. Journal of Applied Physics. 2009;105(6):063304. DOI: 10.1063/1.3097334.
8. Torrezan AC, Han ST, Mastovsky I, Shapiro MA, Sirigiri JR, Temkin RJ, Barnes AB, Griffin RG. Continuous-wave operation of a frequency-tunable 460-GHz second-harmonic gyrotron for enhanced nuclear magnetic resonance. IEEE Transactions on Plasma Science. 2010;8(6):1150–1159. DOI: 10.1109/TPS.2010.2046617.
9. Torrezan AC, Shapiro AC, Sirigiri JR, Temkin RJ, Griffin RG. Operation of a continuously frequency-tunable second-harmonic CW 330-GHz gyrotron for dynamic nuclear polarization. IEEE Transaction on Electron Devices. 2011;58(8):2777–2783. DOI: 10.1109/TED.2011.2148721.
10. Glyavin MYu, Denisov GG, Zapevalov VE, Koshelev MA, Tretyakov MYu, Tsvetkov AI. High power terahertz sources for spectroscopy and material diagnostics. Physics-Uspekhi. 2016; 59(6):595–677. DOI: 10.3367/ufne.2016.02.037801.
11. Sabchevski S, Glyavin M. Development and application of THz gyrotrons for advanced spectroscopic methods. Photonics. 2023;12(2):189–207. DOI: 10.3390/photonics10020189.
12. Siegel PH. Terahertz technology in biology and medicine. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2004;52(10):2438–2447. DOI: 10.1109/TMTT.2004.835916.
13. Pilosof M, Einat M. Note: A 95 GHz mid-power gyrotron for medical applications measurements. Review of Scientific Instruments. 2015;86(1):016113. DOI: 10.1063/1.4906507.
14. Cheon H, Yang HJ, Lee SH, Kim YA, Son JH. Terahertz molecular resonance of cancer DNA // Scientific Reports. 2016;6(1):37103. DOI: 10.1038/srep37103.
15. Miyoshi N, Idehara T, Khutoryan E, Fukunaga Y, Bibin AB, Ito S, Sabchevski SP. Combined hyperthermia and photodynamic therapy using a sub-THz gyrotron as a radiation source. Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2016;37(8):805–814. DOI: 10.1007/s10762-016-0271-z.
16. Bykov Y, Ereemeev A, Glyavin M, Kholoptsev V, Luchinin A, Plotnikov G, Denisov A, Bogdashev G, Kalynova V, Semenov N, Zharova N. 24-84-GHz gyrotron systems for technological microwave applications. IEEE Transactions on Plasma Science. 2004;32(1):67–72. DOI: 10.1109/TPS.2004.823904.

17. Bratman VL, Bogdashov AA, Denisov GG, Glyavin MYu, Kalynov YuK, Luchinin AG, Manuilov VN, Zapevalov VE, Zavolsky NA, Zorin VG. Gyrotron development for high power THz technologies at IAP RAS. *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2012;33(7): 715–723. DOI: 10.1007/s10762-012-9898-6.
18. Aripin H, Mitsudo S, Prima ES, Sudiana IN, Tani S, Sako K, Fujii Y, Saito T, Idehara T, Sano S, Purwasasmita BS, Sabchevski S. Structural and microwave properties of silica xerogel glass-ceramic sintered by sub-millimeter wave heating using a gyrotron. *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2012;33(12):1149–1162. DOI: 10.1007/s10762-012-9925-7.
19. Glyavin M, Sabchevski S, Idehara T, Mitsudo S. Gyrotron-based technological systems for material processing – current status and prospects. *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2020;41(8):1022–1037. DOI: 10.1007/s10762-020-00727-w.
20. Federici J, Moeller L. Review of terahertz and subterahertz wireless communications. *Journal of Applied Physics*. 2010;107(11):111101. DOI: 10.1063/1.3386413.
21. Idehara T, Mitsudo S, Ogawa I. Development of high-frequency, highly stable gyrotrons as millimeter to submillimeter wave radiation sources. *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2004;32(3):910–916. DOI: 10.1109/TPS.2004.827599.
22. Idehara T, Tsuchiya H, Watanabe O, Agusu L, Mitsudo S. The first experiment of a THz gyrotron with a pulse magnet. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 2006;27(3):319–331. DOI: 10.1007/S10762-006-9084-9.
23. Glyavin MYu, Luchinin AG, Golubiatnikov GYu. Generation of 1.5-kW, 1-THz Coherent Radiation from a Gyrotron with a Pulsed Magnetic Field. *Phys. Rev. Lett.* 2008;100:015101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.015101.
24. Bratman VL, Kalynov YuK, Manuilov VN. Large-orbit gyrotron operation in the terahertz frequency range. *Phys. Rev. Lett.* 2009;102:245101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.245101.
25. Bandurkin I, Fedotov A, Glyavin M, Idehara T, Malkin A, Manuilov V, Sergeev A, Tsvetkov A, Zaslavsky V, Zotova I. Development of third-harmonic 1.2-THz gyrotron with intentionally increased velocity spread of electrons. *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2020;67(10):4432–4436. DOI: 10.1109/TED.2020.3012524.
26. Botton M, Antonsen TM, Levush B, Nguyen KT, Vlasov AN. MAGY: A time-dependent code for simulation of slow and fast microwave sources. *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1998;26(3):882–892. DOI: 10.1109/27.700860.
27. Stock A, Neudorfer J, Riedlinger M, Pirrung G, Gassner G, Schneider R, Roller S, Munz CD. Three-dimensional numerical simulation of a 30-GHz gyrotron resonator with an explicit high-order discontinuous-Galerkin-based parallel article-in-cell method. *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2012;40(7):1860–1870. DOI: 10.1109/TPS.2012.2195509.
28. Lin MC, Smithe DN, Guss WC, Temkin RJ. Hot test of gyrotron cavity interaction using a 3D CFDTD PIC method. 15th IEEE International Vacuum Electronics Conference. 2014. P. 87–88. IEEE. DOI: 10.1109/IVEC.2014.6857503.
29. Rozental RM, Tai EM, Tarakanov VP, Fokin AP. Using the 2.5-dimensional PIC code for simulating gyrotrons with nonsymmetric operating modes. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2023;65(5–6):384–396. DOI: 10.1007/s11141-023-10221-7.
30. Fliflet AW, Read ME. Use of weakly irregular waveguide theory to calculate eigenfrequencies, Q values, and RF field functions for gyrotron oscillators. *International Journal of Electronics Theoretical and Experimental*. 1981;51(4):475–484. DOI: 10.1080/00207218108901350.
31. Borie E, Dumbrajs O. Calculation of eigenmodes of tapered gyrotron resonators // *International Journal of Electronics*. 1986;60(2):143–154. DOI: 10.1080/00207218608920768.

32. Sabchevski S, Idehara T, Saito T, Ogawa I, Mitsudo S, Tatematsu Y. Physical models and computer codes of the GYROSIM (GYROtron SIMulation) software package [Electronic resource]. FIR Center Report FIR FU-99. 2010. Available from: [http://fir.u-fukui.ac.jp/FIR\\_FU99S.pdf](http://fir.u-fukui.ac.jp/FIR_FU99S.pdf).
33. Avramides KA, Pagonakis IG, Iatrou CT, Vomvoridis JL. EURIDICE: A code-package for gyrotron interaction simulations and cavity design. EPJ Web of Conferences. 2012;32:04016. DOI: 10.1051/epjconf/20123204016.
34. Melnikova MM, Rozhnev AG. Program for calculation of the eigenmodes electrodynamic parameter in the gyrotron with nonfixed field structure // Certificate of state registration of a computer program no. 2015615762, 22 May. 2015. (in Russian).
35. Bera A, Sinha AK. A novel approach for computation of high-order axial modes in a gyrotron resonator. IEEE Transactions on Electron Devices. 2018;65(12):5505–5510. DOI: 10.1109/TED.2018.2877843.
36. Sawant A, Choi E. Development of the full package of gyrotron simulation code. Journal of the Korean Physical Society. 2018;73(11):1750–1759. DOI: 10.3938/jkps.73.1750.
37. Wang P, Chen X, Xiao H, Dumbrajs O, Qi X, Li L. GYROCOMPU: Toolbox designed for the analysis of gyrotron resonators. IEEE Transactions on Plasma Science. 2020;48(9):3007–3016. DOI: 10.1109/TPS.2020.3013299.
38. Semenov E, Zapevalov V, Zuev A. Methods for Simulation the nonlinear dynamics of gyrotrons. In: Balandin D, Barkalov K, Gergel V, Meyerov I. (eds). Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2020. Communications in Computer and Information Science. Vol. 1413. Springer. 2021. P. 49–62. DOI: 10.1007/978-3-030-78759-2\_4.
39. Vainshtein LA. Open Resonators and Open Waveguides. Golem Press; 1969. 439 p.
40. Vlasov SN, Zhisllin GM, Orlova IM, Petelin MI, Rogacheva GG. Irregular waveguides as open resonators. Radiophysics and Quantum Electronics. 1969;12(8):972–978.
41. Vlasov CN, Orlova IM, Petelin MI. Gyrotron cavities and electrodynamic mode selection. In: Gaponov-Grekhov AV, editor. Gyrotron. Gorky, USSR: Inst. Appl. Phys. Acad. Sci. USSR; 1981:62–76 (in Russian).
42. Chu KR, Kou CS, Chen JM, Tsai YC, Cheng C, Bor SS, Chang LH. Spectral domain analysis of open cavities. International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 1992;13(10):1571–1598. DOI: 10.1007/BF01009236.
43. Hung CL, Tsai YC, Chu KR. A study of open-end cavities by the field-energy method. IEEE Transactions on Plasma Science. 1998;26(3):931–939 DOI: 10.1109/27.700874.
44. Hung CL, Yeh YS. Spectral domain analysis of coaxial cavities. International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 2003;24(12):2025–2041. DOI: 10.1023/B:IJIM.0000009758.76835.1f.
45. Sabchevski SP, Idehara T. A numerical study on finite-bandwidth resonances of high-order axial modes (HOAM) in a gyrotron cavity. Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2015;36(7):628–653. DOI: 10.1007/s10762-015-0161-9.
46. Genoud J, Tran TM, Alberti S, Braunmueller F, Hogge J-Ph, Tran MQ, Guss WC, Temkin RJ. Novel linear analysis for a gyrotron oscillator based on a spectral approach. Physics of Plasmas. 2016;2(4):043101. DOI: doi.org/10.1063/1.4945611.
47. Ilinskiĭ AS, Slepyan GYa. Oscillations and waves in a electrodynamic structures with losses. Moscow: Moscow State University; 1983. 232 p. (in Russian).
48. Genoud J, Alberti S, Tran TM, Le Bars G, Kaminski P, Hogge JP, Avramidis KA, Tran MQ. Parasitic oscillations in smooth-wall circular symmetric gyrotron beam ducts. Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2019;40(2):131–149. DOI: 10.1063/1.4945611.
49. Chu KR, Chen HY, Hung CL, Chang TH, Barnett LR, Chen SH, Yang TT, Dialetis DJ. Theory

- and experiment of ultrahigh-gain gyrotron traveling wave amplifier. *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1999;27(2):391–404. DOI: 10.1109/27.772266.
50. Parlett BN. *The Symmetric Eigenvalue Problem*. First ed. NJ, USA: Prentice-Hall, Englewood Cliffs; 1980. 368 p.
  51. Demmel JW. *Applied Numerical Linear Algebra*. Ca, USA: University of California; 1997. 419 p.
  52. Golub GH, Van Loan CF *Matrix Computations*. 3th ed. Baltimore & London: John Hopkins University Press; 1996. 694 p.
  53. Lehoucq RB, Sorensen DC, Yang C. *ARPACK users' guide: solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1997.
  54. Petelin MI, Yulpatov VK. Linear theory of a monotron cyclotron-resonance maser. I. *Radiophys Quantum Electron*. 1975;18(2):212–219. DOI: doi.org/10.1007/BF01036881.
  55. Petelin MI. Self-excitation of oscillations in a gyrotron. In: Gaponov-Grekhov AV, editor. *Collected papers*. Gorki: Inst. Appl. Phys. USSR Academy of Science; 1981. P. 5–25.
  56. Borie E, Jodicke B. Comments on the Linear Theory of the Gyrotron. *IEEE Transaction on Plasma Science*. 1988;16(2):116–121. DOI: 10.1109/27.3802.
  57. Rozhnev AG, Adilova AB, Grigorieva NV, Ryskin NM. A program for calculating the properties of axial oscillation modes in an open gyrotron cavity by the finite difference method with boundary conditions linearized in the spectral parameter («GyrotronCavityFDM»). Certificate of state registration of a computer program № 2033613828, 09 May, 2023 (in Russian).
  58. Yamaguchi Y, Tatematsu Y, Saito T, Kuwahara T, Ikeda R, Ogawa I, Idehara T, Dumbrajs O. Experimental verification of a self-consistent calculation for continuous frequency-tune with a 400 GHz band second harmonic gyro-BWO. In: *Proceedings of the 38th Int. Conf. on Infr., Mill. and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*. 01-06 September 2013, Mainz, Germany. New York: IEEE; 2013. P. 1–2. DOI: 10.1109/IRMMW-THz.2013.6665445.
  59. Kumar A, Kumar N, Singh U, Khatun H, Vyas V, Sinha AK. Design of interaction cavity of a 170-GHz, 1-MW gyrotron for ECRH application. *Vacuum*. 2011;86(2):184–188. DOI: 10.1016/j.vacuum.2011.06.002.
  60. Thumm M. Effective cavity length of gyrotrons. *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2014;35(12):1011–1017. DOI: doi.org/10.1007/s10762-014-0102-z.
  61. Hairer E, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Second Revised ed. Berlin: Springer-Verlag; 1996. 614 p.



*Рожнев Андрей Георгиевич* — родился в Саратове (1959). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика» (1981). С 1981 года работал в НИИ механики и физики СГУ, затем в НИИ естественных наук СГУ. С 2002 преподаёт на кафедре нелинейной физики СГУ в должности доцента. С 2017 года работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН в должности старшего научного сотрудника. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2017, СГУ). Научные интересы — вакуумная электроника СВЧ, вакуумная микроэлектроника, нелинейная теория колебаний и волн, вычислительная электродинамика, фотоника, метаматериалы. Опубликовал свыше 100 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
 им. В. А. Котельникова РАН  
 E-mail: RozhnevAG@gmail.com  
 ORCID: 0000-0003-4687-1357  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 29273

*Рожнев А. Г., Мельникова М. М., Рыскин Н. М.*  
 Известия вузов. ПНД, 2024, т. 32, № 3

*Мельникова Мария Михайловна* — родилась в 1991 году. Окончила факультет нелинейных процессов (2013), аспирантуру СГУ имени Н. Г. Чернышевского (2018). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2018, СГУ) по направлению «Радиофизика». Работает научным сотрудником лаборатории мощных СВЧ систем для ускорительных приложений, ИПФ РАН (Нижний Новгород), а также является научным сотрудником СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов связана с исследованием явлений стабилизации и перестройки частоты в гиротронах, конкуренции мод, численным моделированием процессов генерации в гиротроне. Автор более 60 научных трудов, в том числе более 30 статей в журналах, индексируемых в Scopus и Web of Science.

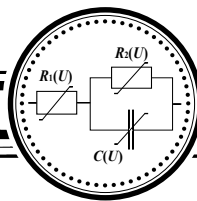


Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46  
Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: Mafachu@mail.ru  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1053565

*Рыскин Никита Михайлович* — окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата (1996) и доктора физико-математических наук (2005). Главный научный сотрудник, заведующий лабораторией Саратовского филиала ИРЭ РАН. Заведующий кафедрой динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: ryskinm@info.sgu.ru  
ORCID: 0000-0001-8501-6658  
AuthorID (eLibrary.Ru): 29838



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(3)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003095  
EDN: QXBPBF

### О взаимосвязи наблюдаемой динамики колориметрического индикатора с нелинейной динамикой исследуемого популяционного роста в случае микробиологических культур

А. В. Сычев✉, Е. Б. Постников

Курский государственный университет, Россия

E-mail: ✉sychev\_av@kursksu.ru, postnikov@kursksu.ru,

Поступила в редакцию 21.11.2023, принята к публикации 18.12.2023,

опубликована онлайн 25.03.2024, опубликована 31.05.2024

**Аннотация.** Резазуриновый тест является одним из наиболее распространенных подходов к изучению роста и метаболической активности микроорганизмов. Он основан на изменении цвета синего индикатора (резазурина) на его розовую восстановленную форму (резоруфин) в результате процесса восстановления, катализируемого метаболической активностью. При этом для количественной характеристики процесса необходимо учитывать тот факт, что регистрируются результаты химического превращения, которые могут отличаться от лежащей в основе кинетики роста популяции. **Цель.** Основной целью данной работы является последовательное моделирование обоих взаимосвязанных нелинейных процессов роста, направленное на получение аналитического решения, зависящего от специфики и параметров биологических и химических составляющих, и его сравнение с кривыми, полученными экспериментально. **Методы.** Изменение концентрации индикатора выведено в предположении логистического роста бактерий, катализирующих рассматриваемую однонаправленную химическую реакцию, и сопоставлено с фотометрически регистрируемой кривой роста для популяции лактобактерий. **Результаты.** Выявлено, что кривая биохимического роста также будет логистической только в случае специально согласованных кинетических параметров и емкости среды. В противном случае для аппроксимации наблюдаемой динамики необходимо использовать другую функциональную форму. **Заключение.** Таким образом, основной вывод состоит в том, что необходимо обратить внимание на важность различия кривых роста, лежащих в основе микробного и наблюдаемого химического роста. Их разница влияет на величину скорости роста популяции, которая является целью подобных тестов, и, следовательно, для регрессии экспериментальных данных необходимо использовать соответствующую функциональную форму.

**Ключевые слова:** резазурин, резоруфин, клеточная активность, популяционная динамика.

**Для цитирования:** Сычев А. В., Постников Е. Б. О взаимосвязи наблюдаемой динамики колориметрического индикатора с нелинейной динамикой исследуемого популяционного роста в случае микробиологических культур // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 332–346. DOI: 10.18500/0869-6632-003095. EDN: QXBPBF

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).



## On the relationship between the observed dynamics of a colorimetric indicator and the nonlinear dynamics of the population growth under study in the case of microbial cultures

A. V. Sychev<sup>✉</sup>, E. B. Postnikov

Kursk State University, Russia

E-mail: ✉sychev\_av@kursksu.ru, postnikov@kursksu.ru,

Received 21.11.2023, accepted 18.12.2023, available online 25.03.2024, published 31.05.2024

**Abstract.** The resazurin test is one of the most widespread approaches for studying the growth and metabolic activity of microorganisms. It is based on the colour change of the blue indicator, resazurin, to its pink reduced form, resorufin due to the reduction process catalyzed by the metabolic activity. At the same time, the quantitative characterization of the process needs to take into account the fact that one registers the results of the chemical transformation, which can differ from the underlying kinetics of the population growth. *Purpose.* The principal goal of this work is a sequential modelling of both coupled nonlinear growth processes aimed at obtaining the closed-form solution depending on the specificity and parameters of biological and chemical counterparts and its comparison with the curves obtained experimentally. *Methods.* The indicator concentration change is derived under the assumption of the logistic bacterial growth catalyzing the unidirectional chemical reaction considered and compared with the photometrically registered growth curve for a population of lactobacteria. *Results.* It is revealed that the biochemical growth curve will be logistic too only in the case of specially coordinated kinetic parameters and the systems' carrying capacity. Otherwise, another functional form should be used to approximate the observable dynamics. *Conclusion.* Thus, the main conclusion consists of drawing attention to the importance of distinguishing between the underlying microbial and observable chemical growth curves. Their difference affects the value of the population growth rate, which is the target of such tests, and, therefore, the proper functional form should be used for the experimental data regression.

**Keywords:** resazurin, resorufin, cellular activity, population dynamics.

**For citation:** Sychev AV, Postnikov EB. On the relationship between the observed dynamics of a colorimetric indicator and the nonlinear dynamics of the population growth under study in the case of microbial cultures. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(3):332–346. DOI: 10.18500/0869-6632-003095

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Колориметрические и спектрофотометрические методы, основанные на регистрации изменения цвета (или флуоресценции) индикатора, добавленного в жидкую среду, с культивируемыми в ней микроорганизмами, в настоящее время занимают место среди основных способов характеристики популяционного роста в фундаментальной и прикладной микробиологии [1, 2]. Это связано прежде всего с тем, что такой подход существенно проще, чем визуальный микроскопический подсчет индивидуальных микроорганизмов или колониеобразующих единиц (КОЕ), и является более надежным, чем регистрация мутности среды по ее суммарной оптической плотности (ОП), так как последний подход не различает активно делящиеся, жизнеспособные и нежизнеспособные организмы. Напротив, специально подобранные индикаторы реагируют на фермент-субстратные реакции внутри живой клетки, дыхательную активность и/или другие типы метаболической активности, позволяя решать требуемые задачи по определению популяционной динамики микроорганизмов [3]. Сегодня особое внимание данные методы привлекают в контексте разработки систем дистанционного мониторинга [4], позволяющих проводить автоматизированную запись

и передачу данных о бактериальной контаминации, скрининге отклика на антибактериальные средства и т. п.

Однако при этом следует отметить фундаментальную разницу между определенным ростом популяции микроорганизмов, модельное описание которого строится на основе хорошо разработанных нелинейных дифференциальных уравнений (Ферхюльста, Гомперца и других), верифицированных на основе методов прямого подсчета КОЕ [5–7], и наблюдаемой динамикой, которая обусловлена как биохимическими реакциями, так и зависимостью между количественными параметрами выбранной цветовой шкалы и концентрациями форм индикаторного вещества.

Известные методы, устанавливающие подобное соответствие, в основном оперируют эмпирическими зависимостями, как правило, базирующимися на подборе концентраций реагентов таким образом, чтобы наблюдалась линейная корреляция между микроскопическим счетом КОЕ или же определением ОП и фотометрической кривой при фильтрации изображения в выбранном узком интервале длин волн, приблизительно соответствующих интересующему цвету индикатора [8]. Может быть также использовано соответствие изменения цвета индикатора времени порога детектирования присутствия микроорганизмов, стартующих рост и размножение с различной начальной концентрацией [9], изменение величины главных компонентов в заданном цветовом пространстве [10] или корреляция, установленная путем машинного обучения [11, 12]. Число же работ, посвященных соответствующему анализу на основе математических моделей, оперирующих связанными динамическими системами, весьма ограничено.

Простая кинетическая модель, комбинирующая линейные кинетические уравнения со связанными параметрами для роста популяции и изменения оптической плотности, была рассмотрена в работе [13]. Существенно более сложная система, учитывающая редукцию питательной среды, выявляемую колориметрическим анализом, и соответствующий рост биомассы на основе эмпирически подобранных уравнений и параметров, использовалась в численной модели биореактора в работе [14]. В работе [15] было показано на основе эксперимента, что различное начальное разведение микобактериальной культуры может приводит к изменению типа дифференциального уравнения, описывающего динамику флуоресценции индикаторной среды в ходе популяционного роста, с модели Ферхюльста на модель Гомперца, и предложено качественное объяснение за счет различного соотношения кинетических констант популяционной динамики и фотохимической кинетики. Ряд кинетических моделей, связывающих доступный для регистрации цветовой отклик индикатора резазурина с процессами биохимической кинетики, приведен в обзоре [16].

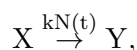
Таким образом, основной целью данной работы является построение последовательности моделей от популяционного роста бактериальной культуры до регистрируемой динамики цвета индикатора, в качестве которого выступает резазурин (7-гидрокси-3Н-феноксазин-3-он-10-оксид, известный также под коммерческим названием Alamar Blue), который при взаимодействии с митохондриальными и цитоплазматическими редуктазами живой клетки восстанавливается в розовый резорурфин (7-гидрокси-3Н-феноксазин-3-он) с дальнейшей возможной трансформацией в бесцветный дигидрорезорурфин (7-гидрокси-1,2-дигидро-3Н-феноксазин-3-он). Данный индикатор является одним из основных реагентов в современных микробиологических исследованиях жизнеспособности клеточных культур [2, 17]. Для его восстановительной реакции хорошо исследована химическая кинетика [18, 19]. Кроме того, для данной реакции в настоящее время установлено соответствие концентрационных зависимостей, полученных путем спектрального анализа, колориметрическим и фотометрическим характеристикам [20]. Использование лактобактерий в качестве модельной культуры основывается на детальном исследовании соответствующей динамики популяционного роста с помощью широкого набора классических нелинейных дифференциальных уравнений на основе метода подсчета КОЭ [6].

## 1. Модель связанной популяционной и химической кинетики

Кинетика реакции восстановления резазурина, катализируемой реагентом  $R$ , идет согласно схеме [18, 19]



где  $X$  — резазурин,  $Y$  — резорурфин,  $Z$  — дигидрорезорурфин, являющийся нефлуоресцентным прозрачным веществом. Этот второй обратимый этап, как правило, не используется для теста жизнедеятельности микроорганизмов, поэтому если пренебречь переходом резорурфина в дигидрорезорурфин и рассматривать только реакцию первого порядка, катализируемую числом микроорганизмов  $N(t)$  с коэффициентом пропорциональности (скоростью необратимой химической реакции)  $k$ ,



то для концентраций ( $x$  и  $y$  соответственно) имеем

$$\frac{dx}{dt} = -kN(t)x, \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = kN(t)x, \quad (3)$$

с начальными условиями  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = 0$  и законом сохранения  $x + y = x_0$ , где  $x_0$  — начальная концентрация резазурина; начальная концентрация резорурфина в рассматриваемом случае равна нулю.

Из интегрирования (2) по методу разделения переменных следует, что

$$\ln \left( \frac{x}{x_0} \right) = -k \int_0^t N(t) dt. \quad (4)$$

Таким образом, искомого решения — кинетическая кривая роста концентрации индикатора — может являться нетривиальной функцией времени в зависимости от временной эволюции численности микроорганизмов и имеет вид

$$y(t) = x_0 \left( 1 - e^{-k \int_0^t N(t) dt} \right). \quad (5)$$

Заметим, что решение (5) зависит от времени даже в том случае, когда популяция является постоянной по численности, но жизнеспособной, то есть  $N = N_s = \text{const}$ , и концентрация регистрируемого резорурфина растет, экспоненциально приближаясь к стационару как

$$y(t) = x_0 \left( 1 - e^{-kN_s t} \right). \quad (6)$$

Таким образом, тривиальный факт наличия временной зависимости изменения концентрации индикатора от времени не свидетельствует о наличии роста микробиологической культуры и говорит лишь о ее жизнеспособности. При этом известно существенное для практических фармакологических приложений наблюдение [21] о различии минимальной ингибирующей концентрации лекарства (МИК) (концентрации, приводящей к гибели патогенных микроорганизмов) и стационарной концентрации, при которой скорости роста гибели организмов сравниваются,

что приводит к возникновению стационарной, но жизнеспособной популяции. Временная зависимость, отраженная в решении (6), говорит о том, что оба случая (стационарная концентрация лекарства и концентрация, существенно не достигающая МИК) ведут к изменению показаний индикатора и более точный вывод должен базироваться не на факте их роста, а на более точном анализе соответственной функциональной зависимости (см. далее). Специфический вариант такого поведения был также отмечен в работе [15], где кривая роста микобактерий туберкулеза на определенном временном интервале складывалась из последовательности участков кривых вида (6), причем только их начальные и конечные точки укладываются на классическую кривую роста микроорганизмов Ферхюльста. Такое поведение привело к интерпретации роста микобактериальной культуры как синхронизированных моментов делений, между которыми численность колоний не меняется, как и следует из (6).

Второй фактор, который необходимо принять во внимание: выход кривой роста индикаторного вещества на стационар не обязательно означает выход на стационар роста микробиологической культуры, так как это может происходить просто вследствие исчерпания количества индикатора. В частности, это можно наглядно продемонстрировать, подставив в уравнение (5) функцию неограниченного роста популяции  $N(t) = N_0 \exp(rt)$  с начальным значением  $N_0$  и константой размножения  $r$ , что дает исключительно быстро (двойная экспонента) выходящую на стационар кривую роста индикатора

$$y(t) = x_0 \left( 1 - e^{-kN_0[e^{rt}-1]} \right). \quad (7)$$

Поэтому рассмотрим теперь в деталях более реалистичный случай роста численности микроорганизмов, который удовлетворяет классическому уравнению логистического роста — уравнению Ферхюльста

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) \quad (8)$$

с начальной численностью  $N(0) = N_0$ , константой популяционного роста  $r$ , емкостью среды  $K$ , и имеет решение

$$N(t) = \frac{N_0 e^{rt}}{\frac{N_0}{K} (e^{rt} - 1) + 1} \equiv \frac{K e^{rt}}{e^{rt} + (K/N_0 - 1)}. \quad (9)$$

Подставляя логистическую функцию (9) в решение для концентрации субстрата (4), приходим к интегралу

$$\int_0^t N(t) dt = \int_0^t \frac{N_0 e^{rt}}{\frac{N_0}{K} (e^{rt} - 1) + 1} dt,$$

который берется в аналитической форме, и получаем

$$\ln \left( \frac{x}{x_0} \right) = -\frac{kK}{r} \ln \left[ \frac{e^{rt} + (K/N_0 - 1)}{K/N_0} \right].$$

В результате решения для временной эволюции концентраций резазурина и резорурфина имеют вид

$$x = x_0 \left[ \frac{K/N_0}{e^{rt} + (K/N_0 - 1)} \right]^{\frac{kK}{r}} \quad (10)$$

и

$$y = x_0 \left( 1 - \left[ \frac{K/N_0}{e^{rt} + (K/N_0 - 1)} \right]^{\frac{kK}{r}} \right) \quad (11)$$

соответственно.

Очевидно, что ни одно из них не является логистической функцией, хотя выражение (10) можно рассматривать как решение нелинейного уравнения Ричардса [22] для обратного времени,

$$\frac{dx}{dt} = -x_0 k K \left( \frac{x}{x_0} \right) \left( 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{r}{kK}} \left[ 1 - \frac{N_0}{K} \right] \right), \quad (12)$$

известное также как уравнение обобщенного логистического роста.

Сомножитель в квадратных скобках можно выразить через  $x$  исходя из (10):

$$\frac{dx}{dt} = -x_0 k N_0 \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{kK}{r} + 1} e^{rt} \equiv -x_0 k N_0 \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{r}{kK} + 1} e^{rt}.$$

Оставшийся экспоненциальный множитель опять можно выразить из (10), и, в силу закона сохранения  $x + y = x_0$ , решение (11), соответствующее кривой роста концентрации резорфуфина, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dy}{dt} = x_0 k K \left( 1 - \frac{y}{x_0} \right) \left( 1 - \left( 1 - \frac{y}{x_0} \right)^{\frac{r}{kK}} \left[ 1 - \frac{N_0}{K} \right] \right). \quad (13)$$

Однако кривая роста концентрации индикатора (11) допускает частный случай для комбинации параметров  $kK/r = 1$ , при котором рассматриваемая функция принимает вид

$$y_V = x_0 \frac{[e^{rt} - 1]}{[e^{rt} - 1] + [(K/N_0 + 1) - 1]}. \quad (14)$$

Сравнение формул (9) и (14) показывает, что они имеют аналогичную дробно-рациональную структуру с заменой экспоненциальной функции времени в (9) на сдвинутую экспоненциальную в (14), а также сдвинутыми на ту же единицу отношениями конечной и начальной численности популяций. Первый сдвиг естественным образом следует из того, что в начальный момент резорфуфина, в отличие от микроорганизмов, в системе нет, и решение для его концентрации обязано быть сдвинуто в ноль. Сдвиг асимптотического стационара, по сути, следствие того же различия. К данному выводу о редукции обобщенного логистического роста к стандартному можно прийти и непосредственно подставив  $kK/r = 1$  в уравнение (13), которое действительно принимает форму уравнения Ферхюльста для переменной  $1 - y$ , записанного для обратного времени (в силу симметричности логистической кривой относительно точки перегиба и асимптотик по времени формальное направление времени не влияет на характерную форму логистической кривой).

Так как экспоненциальная функция является достаточно быстро растущей, то для времен, заметно превышающих обратную величину характерной константы роста микроорганизмов ( $t \gg r^{-1}$ ), вычитаемой единицей можно пренебречь, то есть получить именно логистическую функцию Ферхюльста

$$\tilde{y}_V = x_0 \frac{e^{rt}}{e^{rt} + [(K/N_0 + 1) - 1]}, \quad (15)$$

растущую с той же константой размножения, что исследуемая популяция, но выходящую на значение насыщения, соответствующее максимальной концентрации индикатора, резорфуфина, при его полной конверсии из резазурина. Учитывая связь между константой роста  $r$  и временем удвоения популяции  $T_d = \ln(2)r^{-1}$ , видно, что регрессия при помощи функции логистического роста применима как минимум после нескольких характерных времен деления.

Рис. 1 иллюстрирует данные выводы, показывая, что в специальном случае  $kK/r = 1$  кривая роста концентрации резорфуфина практически неотличима от кривой популяционного роста после примерно пяти циклов клеточного деления и может быть адекватно использована для

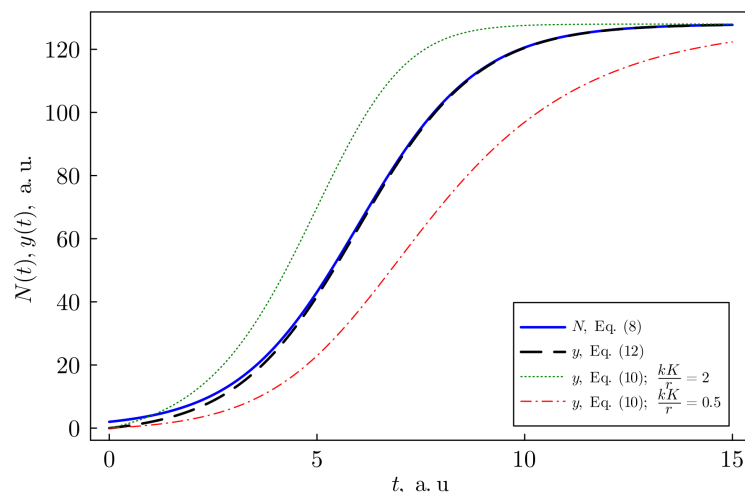


Рис. 1. Иллюстрация сравнения хода кинетических кривых популяционного роста и роста регистрируемой концентрации резазурина при различных значениях контролирующего параметра  $kK/r$ . Начальные условия  $N_0 = 2$ ,  $y(0) = 0$ ; асимптотические стационарные значения согласованы по величине для наглядности:  $K = x_0 = 128$ , константа роста  $r = \ln(2)$  выбрана таким образом, что характерное время удвоения популяции соответствует единице времени  $T_d = 1$

Fig. 1. An illustration comparing the kinetic curves for population growth and the growth of the recorded resazurin concentration at different values of the control parameter  $kK/r$ . Initial conditions are  $N_0 = 2$ ,  $y(0) = 0$ ; the asymptotic stationary values are matched in magnitude for clarity:  $K = x_0 = 128$ , the growth constant  $r = \ln(2)$  is chosen in such a way that the characteristic time of population doubling corresponds to the time unit  $T_d = 1$

характеризации процесса (в принципе, учитывая достаточно малое расхождение кривых и то, что реальные экспериментальные данные имеют определенную погрешность, для их регрессии может быть использована логистическая кривая и после примерно трех циклов деления). На практике данное соответствие кривой конверсии резазурина популяционной кривой, определенной непосредственным подсчетом числа бактериальных колоний, было выявлено для резазуринового теста для стандартных клеточных культур [23] и в сравнении с альтернативными методами контроля метаболической активности жизнеспособных штаммов *M. tuberculosis* [24]. Однако отмечается, что данное наблюдение требует соблюдения определенных условий для концентраций культуры и реагентов, что подтверждает сделанный вывод о необходимости согласования параметров.

При  $kK/r > 1$  быстрая конверсия резазурина в резорурфин приводит к выходу регистрируемой кривой на насыщение гораздо раньше, чем происходит стабилизация популяционного роста, так как фактически в системе не остается реагента. Напротив, при  $kK/r < 1$  наблюдается упомянутый выше (см. уравнение (6)) эффект того, что стабилизированная жизнеспособная популяция продолжает осуществлять дыхательную активность, что приводит к восстановлению еще остающегося в системе резазурина в резорурфин, концентрация которого растет с течением времени.

## 2. Анализ экспериментальных данных на основе популяционно-химической модели

### 2.1. Материалы и методы эксперимента.

В качестве микробиологических объектов была выбрана микробная масса живого антагонистически активного штамма лактобактерий (*Lactobacillus plantarum* 8P-A3 или *Lactobacillus fermentum* 90T-C4) с добавлением компонентов защитной среды высушивания (желатин, сахароза, молоко) (АО НПО «Микроген», Москва, Россия). Данные компоненты также обеспечивают растущую культуру питательными веществами при разведении суспензии водой. Вследствие этого дополнительной питательной среды не применялось. Сухие лактобактерии (КОЕ не менее  $1 \cdot 10^{10}$  в 15 г лиофилизата) разводили в 250 мл



дистиллированной воды, после чего выдерживали при непрерывном перемешивании в течение 30 минут для равномерного распределения микроорганизмов во всем объеме. Затем была приготовлена серия из 11 образцов суспензий лактобактерий, каждый объемом по 10 мл от исходной концентрации до разбавления в 11 раз. К каждому из растворов добавляли по 1 мл разбавленного раствора резазурина. В качестве контроля использовали 10 мл прокипяченной дистиллированной воды с эквивалентным количеством красителя.

Приготовление основного раствора индикатора (натриевой соли резазурина): дистиллированную воду кипятили в течение 5 минут и затем охлаждали до  $(25 \pm 2)^\circ\text{C}$ , после чего добавляли  $(0.055 \pm 0.001)$  г натриевой соли резазурина (Sigma-Aldrich (Burlington, MA, USA), содержание красителя более 75%). Смесь тщательно перемешивали до полного растворения красителя. Раствор резазурина разбавляли 1 : 3 с дистиллированной водой. Концентрация резазурина в рабочем растворе составляла 0.00067 моль/л.

Для получения фотометрических кривых в течение 72 часов использовали портативный микробиологический анализатор (ПМА) [25] (Патент RU 2 779 840 C1) с периодичностью регистрации данных — каждые 15 мин. Анализ, представленный в работе [20], свидетельствует о существовании линейной зависимости между концентрацией резорурфина и регистрируемой освещенностью фотоэлементов в режиме до перехода на этап конверсии резорурфина в дигидрорезорурфин. Таким образом, показания прибора отражают изменение количества продукта химической реакции  $y$ .

**2.2. Результаты и их обсуждение.** Рис. 2, *a* показывает пример изменения цвета индикатора в ряду лунок микробиологического планшета для одного момента времени после начала измерений при условии различной начальной концентрации лактобактерий. Видно, что данный интервал начальных разведений за 72 часа хода процесса приводит к полному варианту колориметрических реакций (1): от практически неизменного синего цвета контроля через порозовение до полностью прозрачного раствора, свидетельствующего о полной конверсии в дигидрорезорурфин. В связи с этим отметим, что в рамках модели, ограниченной необратимым переходом резазурина в резорурфин, варианты кинетики быстрого обесцвечивания (разведения более чем  $(1/7)$ ) детально не анализируются.

На рис. 2, *b* для каждой из ячеек планшета зеленые и малиновые маркеры отображают показания ПМА, нормированные на величину освещенности в начальный момент времени для коррекции ее вариабельности по площади планшета. В силу примененной нормировки  $y(0)/y_0 = 1$ , в то время как отсутствие резорурфина в системе представляет собой его нулевую концентрацию, фитирование данных решением уравнения Ферхюльста должно осуществляться со сдвигом на константу  $d$ , то есть

$$\frac{y}{y_0} = \frac{K - d}{1 + e^{-r'(t-t_m)}} + d, \quad (16)$$

где  $t_m$  — момент времени, соответствующий половинному росту.

Заметим, что модель логистического роста (16) по определению требует ненулевого (для  $y/y_0 - d$ ) начального значения, так как кинетика Ферхюльста является автокаталитической. Кроме того, из рис. 2, *b* видно, что для ряда ячеек планшета детектируется определенное падение освещенности в течение первых часов после начала эксперимента, связанное с испарением жидкости, конденсирующейся на верхней крышке планшета, что снижает прозрачность последней. Вследствие этого, при проведении нелинейной регрессии с целевой функцией (16), параметр  $d$  также подлежит определению, чтобы принять во внимание эффект нормировки с учетом конденсата. Нелинейная регрессия с использованием функции (11) также проводится с аддитивным введением сдвига кривой на постоянную величину.

Кроме того, видно, что, начиная с разведения  $(1/10)$ , характер роста сигнала претерпевает изменения, что связано со вторым шагом реакции (1). Поэтому для последующей регрессии

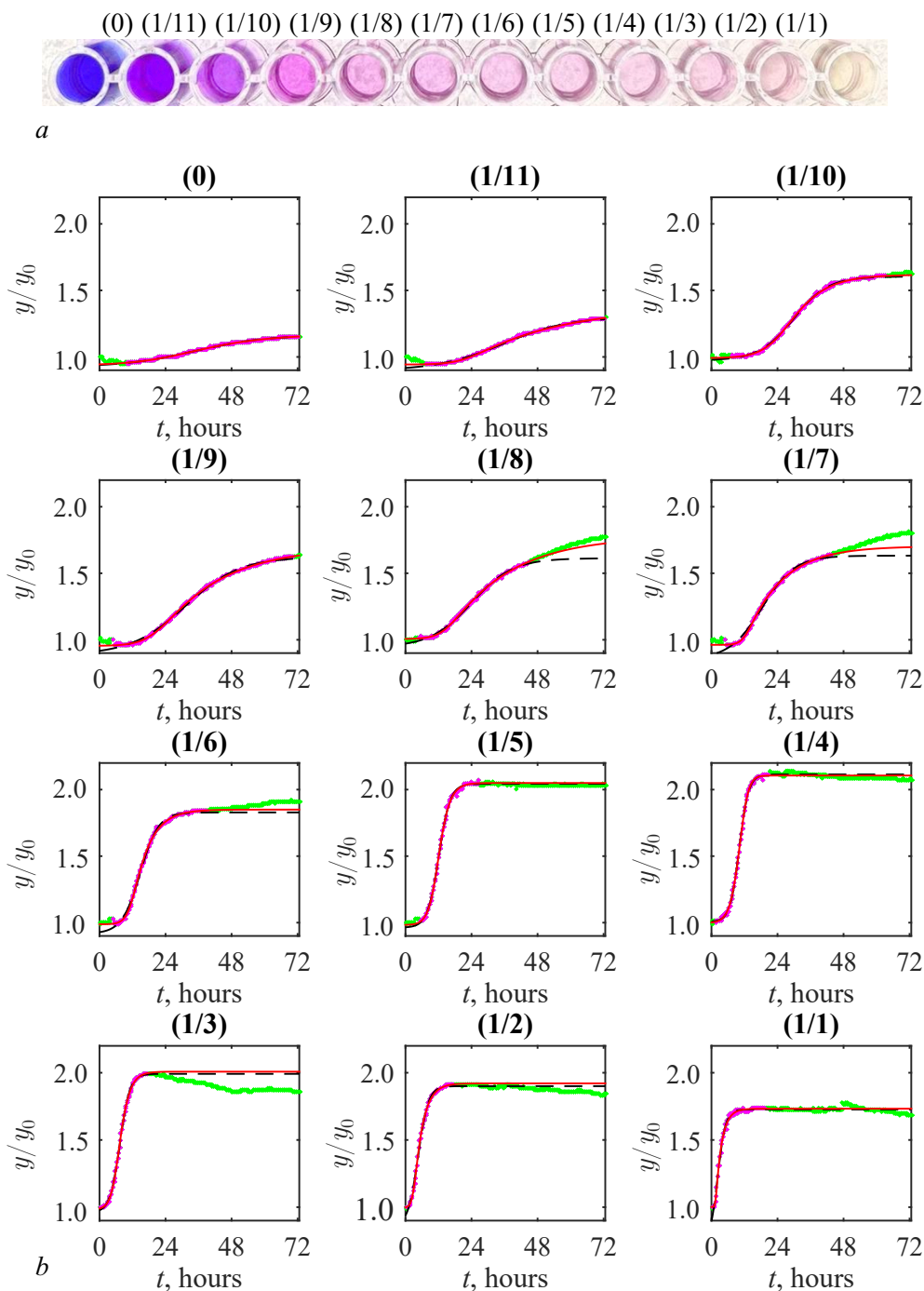


Рис. 2. *a* — Фотография лунок микробиологического планшета, сделанная через 72 часа после начала эксперимента; над каждой из лунок подписано относительное начальное разведение в долях от  $4 \cdot 10^8$  КОЕ; обозначение (0) соответствует резазуриновому контролю без добавления культуры. *b* — Фотометрические данные, полученные с помощью ПМА, нормированные на начальную освещенность (малиновые (использованные для последующего фитинга) и зеленые маркеры); фиты данных логистической кривой (черная штриховая линия) и решением уравнения популяционно-химической модели (сплошная красная линия) (цвет онлайн)

Fig. 2. *a* — A photo of microbiology plate wells taken 72 h after the start of the experiment; the relative initial dilutions in fractions of  $4 \cdot 10^8$  COU are designated above each well; designation (0) corresponds to the resazurin control without culture addition. *b* — Photometric data obtained with PMA normalized to the initial illumination (magenta (used for the subsequent fitting) and green markers); data fitted by a logistic curve (black dashed line) and by solving the population-chemistry model equation (solid red line) (color online)

использована только часть данных, отвечающая активному переходному процессу (соответствующие им маркеры выделены малиновым цветом).

Из полученных экспериментальных данных (см. рис. 2, *b* для субпанели (0)) можно заметить, что контрольный раствор показывает небольшой рост. Это можно объяснить массопереносом метаболитов лактобактерий или лиофилизирующих веществ раствора, часть которых могла попасть в лунку с чистым резазурином через конденсат, образовавшийся на поверхности крышки планшета. Их следовые количества могут приводить к реакции восстановления резазурина, в особенности при условии воздействия света, регулярно освещающего планшет во время регистрации фотометрических данных [26, 27]. Однако этот рост концентрации резорурфина достаточно незначителен, и даже через длительное время после начала эксперимента колориметрические характеристики раствора не имеют существенного изменения, и он остается синим. Такая интерпретация поддерживается наблюдением за динамикой отклика самого разбавленного раствора лактобактерий (1/11), который демонстрирует практически эквивалентный рост до момента, когда бактерии вступают в активную фазу роста (примерно через 65 часов) и их количества достаточно для увеличения заметной динамики жизнедеятельности. Данное сравнение будет обсуждено ниже.

Разведения (1/10) и (1/9) показывают практически идеальное наложение экспериментальных значений на кривую химической кинетики восстановления резазурина и кривую роста, соответствующую решению уравнения Ферхюльста в пределах разрешения графика, и выход на стационарное значение к моменту окончания эксперимента. Переход резазурина в резорурфин в данных случаях наглядно виден по насыщенному розовому цвету на фотографиях соответствующих ячеек (см. рис. 2, *a*) на момент выхода кривых на насыщение (см. рис. 2, *b*).

С другой стороны, (1/8), (1/7) и (1/6) ложатся на логистическую кривую только до определенного момента. Последняя (равно как и функция (11)) демонстрирует насыщение, в то время как фотометрические данные показывают возникновение новой фазы более быстрого роста. Он соответствует быстрому просветлению среды в ячейках за счет реакции восстановления резорурфина до дигидрорезорурфина, что приводит к значительному разбавлению среды прозрачным продуктом. Это также наглядно заметно на рис. 2, *a*.

Наконец, в лунках (1/5)–(1/1) выход на насыщение фотометрического сигнала проходит настолько быстро, что двухэтапность процесса не просматривается. Фактически при таких количествах катализаторов (метаболитов жизнедеятельности лактобактерий) реакции восстановления идут параллельно, и происходит быстрое просветление раствора. Более того, при начальных разведениях (1/4)–(1/2) видно уменьшение фотометрического сигнала вместо его стационарности. Это связано с помутнением среды и уменьшением интенсивности светопропускания раствора из-за появления большого количества лактобактерий, то есть с прямым изменением оптической плотности, не связанным уже с химическими индикаторными процессами (среда остается прозрачной).

В пределах разрешения графиков рис. 2, *b* кривая (16) и сдвинутая кривая (11) хорошо фитуют данные, но при этом видно, что значения насыщения существенно (примерно в полтора раза) выше, чем для случая порозовевших ячеек. Однако данные случаи находятся за пределами области применения модели, оперирующей только с одной необратимой реакцией, и далее не будут рассматриваться.

Следует отметить, что видимое разрешение на графиках рис. 2, *b* достаточно грубое и детальное обсуждение вопроса о воспроизведении сигмоидальных кривых роста фотометрических кривых решением модельных уравнений требует представления данных более чувствительных к типу кинетических кривых. Данный анализ представлен на рис. 3. Он основан на линеаризации кривой, заданной функцией (16) в полулогарифмическом представлении

$$-\ln \left( \frac{K - d}{y/y_0 - d} - 1 \right) = r't_m - r't, \quad (17)$$

где сдвиг получившейся прямой  $r't_m$  определяется начальными условиями, а наклон  $r'$  задает скорость роста, соответствующую логистическому уравнению.

Рис. 3 демонстрирует соответствующий вид данных и их аппроксимаций (на интервале регрессии) для тех лунок, для которых не наблюдается быстрого обесцвечивания за счет второго этапа реакции. В данном представлении существенная приближенность регрессии логистической функцией (16) становится явно заметной: даже в центральной области наилучшего приближения маркеры, соответствующие экспериментальным данным, расположены волнообразно вокруг фитующей прямой. На начальном же и конечном участках интервала отклонения пути расположения маркеров от прямой становятся весьма существенными. При этом сплошные линии, отвечающие решению (11), принимающему во внимание оба процесса — популяционного роста и химической реакции индикатора — аккуратно проходят по существенно нелинейной кривой расположения экспериментальных данных.

Следует отметить, что даже сходный одинаковый средний наклон аппроксимирующих линейных участков не свидетельствует об одинаковой скорости популяционного роста, определенного двумя методами, хотя и приводит к одинаковым качественным заключениям. Прежде всего, следует обратить внимание на кривые (0) и (1/11), для которых величина наклонов, во-первых, меньше, чем для прочих, а во-вторых, она практически совпадает для контроля и наибольшего разведения. Это свидетельствует о том, что выдвинутое выше предположение, что повышение фотометрического сигнала для этих ячеек связано не с размножением лактобактерий, а с возможными побочными химическими реакциями. Дополнительный аргумент состоит в том, что для случая (1/11) в конечные моменты времени ( $t > 65$  ч) начинается отклонение от прямой вверх, связанное с превышением численностью лактобактерий порога нечувствительности и соответственным влиянием на конверсию резазурина метаболических процессов в жизнеспособных клетках. Дальнейшие зависимости соответствуют ситуации, когда индикаторную реакцию катализируют именно метаболические процессы при росте популяции микроорганизмов, а не сопутствующие вещества в растворе, что видно по тому, что три зависимости — для начальных разведений (1/10), (1/8), (1/7) — проявляют приблизительно одинаковую характерную скорость роста, определяемую близким наклоном прямолинейных участков в полулогарифмических координатах. Параллельный же сдвиг между ними отвечает различным начальным условиям, что полностью соответствует

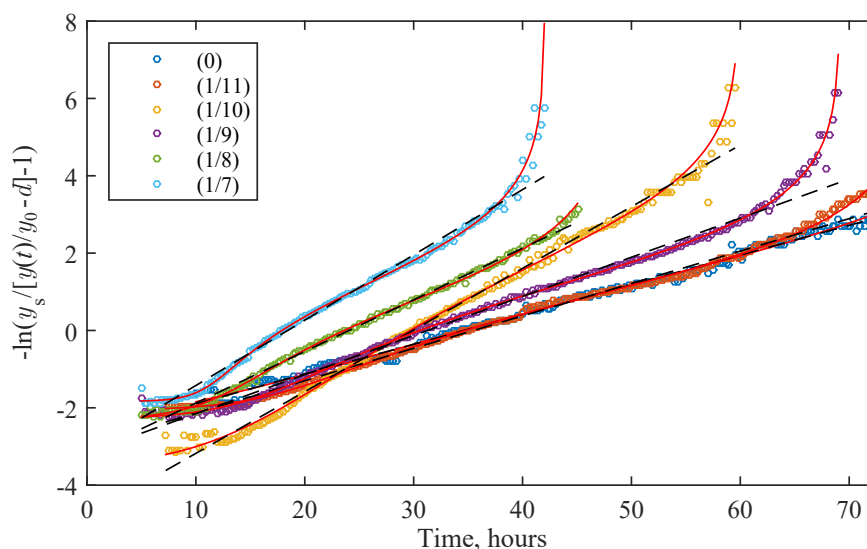


Рис. 3. Экспериментальные данные (точки); химическая кинетика резазурина (сплошная линия); уравнение Ферхюльста (прерывистая линия) (цвет онлайн)

Fig. 3. Experimental data (circles); chemical kinetics of resazurin (solid line); Verhulst equation (dashed line) (color online)

обсуждаемым кинетическим моделям. Меньший наклон для разведения (1/10) может быть связан с индивидуальными особенностями той части культуры, которая попала в данную ячейку (по соответствующему графику на рис. 2, *b* также видна специфика более медленного роста, все еще не приводящего за 72 ч к началу перехода к дигидрорезорурфиновому этапу реакции).

Однако величина скорости популяционного роста сама по себе различна по данным модели Ферхюльста и более полной популяционно-химической модели. Модель Ферхюльста дает  $r' = (0.15 \pm 0.018) \text{ ч}^{-1}$ , в то время как модель (11) дает значения  $r_{(1/10)} = 0.21 \text{ ч}^{-1}$ ,  $r_{(1/8)} = 0.33 \text{ ч}^{-1}$ ,  $r_{(1/7)} = 0.67 \text{ ч}^{-1}$  при степенных показателях  $(kK/r)_{(1/10)} = 0.52$ ,  $(kK/r)_{(1/8)} = 0.13$  и  $(kK/r)_{(1/7)} = 0.11$ . Таким образом, можно видеть, что эти показатели существенно отличаются от единицы, то есть модель, учитывающая факт регистрации химического процесса, а не размножения микроорганизмов непосредственно, неэквивалентна решению уравнения Ферхюльста, несмотря на сходство динамики в области точки перегиба фиксируемой кривой роста (но существенное различие на этапах начала и конца роста индикаторной кривой конверсии резазурина в резорурфин).

Различие в скоростях популяционного роста для различных начальных разведений может быть обусловлено рядом факторов. Одним из них является различная концентрация питательной среды, которая добавлялась вместе с культурой и разводилась в той же пропорции, то есть концентрация в расчете на объем ячейки планшета различалась, возрастая от ячейки (1/10) до (1/7). Более существенным фактором является возможная зависимость от начальной концентрации лактобактерий в силу влияния последней на продолжительность лаг-фазы динамики роста [28]. Современные исследования [29, 30] аргументируют существование необходимости учета эффекта кворума, следствием которого является меньшая характерная скорость роста культуры за счет продления лаг-фазы при малых концентрациях колониеобразующих единиц, что соответствует увеличению констант от  $r_{(1/10)}$  до  $r_{(1/7)}$ .

Вместе с тем значения этих констант соответствуют интервалу величин, найденных в ряде известных работ, обращавшихся к непосредственному подсчету колониеобразующих единиц лактобактерий или же оптической плотности их взвеси, предварительно откалиброванной на значения при прямом подсчете. Для температурного интервала 20...30°C, соответствующего нашему эксперименту, параметр роста варьируется в интервале 0.30...0.65  $\text{ч}^{-1}$  [31, 32] в зависимости от условий среды роста, что соответствует  $r_{(1/8)}$  и  $r_{(1/7)} = 0.67$  с учетом экспериментальной погрешности. Величина  $r_{(1/10)}$  находится ниже этого интервала, но с учетом отмеченного выше эффекта снижения скорости роста при больших начальных разведениях и вариабельности роста в целом рассогласование не является критичным. Вместе с тем применение модели Ферхюльста дает существенно заниженное значение, что свидетельствует в пользу релевантности именно модифицированного подхода.

Таким образом, разработка более детальных моделей, учитывающих многообразие популяционных, биофизических и химических процессов, открывает перспективы для более ясного понимания всего комплекса взаимосвязанных процессов, обуславливающих видимый индикаторный отклик на рост культуры микроорганизмов.

## Заключение

Таким образом, основной вывод данной работы заключается в привлечении внимания к необходимости при использовании индикаторных сред четко разделять наблюдаемую кинетику измерения регистрируемого сигнала и истинную кинетику популяционного роста. Несмотря на то, что получаемые данные могут быть аппроксимированы классическими сигмоидальными кривыми (такими как зависимости Ферхюльста, Гомперца и т. п.), как минимум часть параметров

данных кривых, в особенности характерная константа роста, может не соответствовать реальной скорости роста микроорганизмов в силу того, что процесс включает в себя не только увеличение концентрации последних, но и непосредственно химическую реакцию трансформации реагента. В особенности это существенно для случая быстрорастущих культур, для которых скорости обоих процессов сопоставимы. Результатом этого является необходимость оперировать моделью, включающей одновременно в себя нелинейность системы и нестационарность ее параметров.

В данной работе путем последовательного применения описанной методологии получены зависимости решений типа Гомперца (двойная экспоненциальная зависимость) и Ричардса (обобщенный логистический рост) как кинетические кривых, соответствующих экспоненциальному и простому логистическому росту популяции в индикаторной среде. При этом зависимость обобщенного логистического роста может быть на достаточно протяженном интервале времени редуцирована к логистическому росту при надлежащем выборе соотношения между кинетическими константами размножения популяции, химической реакцией индикатора и емкостью среды. Возможность подобного согласования объясняет известную эмпирически прямую пропорциональность между концентрацией резорфина и количеством колониеобразующих единиц при резазуриновом тесте микобактериальных культур и обосновывает рекомендации по строгому соблюдению условий проведения данного теста специфичных для различных видов и штаммов микобактерий. Отклонение же от полученного безразмерного критерия приводит к необходимости использования более общей функциональной зависимости, что продемонстрировано на практическом примере обработки данных по тестированию роста быстрорастущей культуры лактобактерий.

## References

1. Riss TL, Moravec RA, Niles AL, Duellman S, Benink HA, Worzella TJ, Minor L. Cell viability assays. In: Assay Guidance Manual [Internet]. Bethesda, MD: Eli Lilly & Company and the National Center for Advancing Translational Sciences; 2016. Available from: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK144065/>.
2. Präbst K, Engelhardt H, Ringgeler S, Hübner H. Basic colorimetric proliferation assays: MTT, WST, and Resazurin. In: Gilbert DF, Friedrich O, editors. Cell Viability Assays: Methods and Protocols. New York, NY: Humana Press; 2017. P. 1–17. DOI: 10.1007/978-1-4939-6960-9\_1.
3. Kim D-M, Yoo S-M. Colorimetric systems for the detection of bacterial contamination: Strategy and applications. Biosensors. 2022;12(7):532. DOI: 10.3390/bios12070532.
4. Zhang X, Jiang X, Hao Z, Qu K. Advances in online methods for monitoring microbial growth. Biosensors and Bioelectronics. 2019;126:433–447. DOI: 10.1016/j.bios.2018.10.035.
5. Monod J. The growth of bacterial cultures. Annual Review of Microbiology. 1949;3:371–394. DOI: 10.1146/annurev.mi.03.100149.002103.
6. Zwietering MH, Jongenburger I, Rombouts FM, van't Riet K. Modeling of the bacterial growth curve. Applied and Environmental Microbiology. 1990;56(6):1875–1881. DOI: 10.1128/aem.56.6.1875-1881.1990.
7. Peleg M, Corradini MG. Microbial growth curves: What the models tell us and what they cannot. Critical Reviews in Food Science and Nutrition. 2011;51(10):917–945. DOI: 10.1080/10408398.2011.570463.
8. Gerlier D, Thomasset N. Use of MTT colorimetric assay to measure cell activation. Journal of Immunological Methods. 1986;94(1–2):57–63. DOI: 10.1016/0022-1759(86)90215-2.
9. Garland JL, Mills AL. Classification and characterization of heterotrophic microbial communities on the basis of patterns of community-level sole-carbon-source utilization. Applied and Environmental Microbiology. 1991;57(8):2351–2359. DOI: 10.1128/aem.57.8.2351-2359.1991.
10. Lonsdale CL, Taba B, Queralto N, Lukaszewski RA, Martino RA, Rhodes PA, Lim SH. The



- use of colorimetric sensor arrays to discriminate between pathogenic bacteria. *PLoS ONE*. 2013;8(5):e62726. DOI: 10.1371/journal.pone.0062726.
11. Worth RM, Espina L. ScanGrow: Deep learning-based live tracking of bacterial growth in broth. *Frontiers in Microbiology*. 2022;13:900596. DOI: 10.3389/fmicb.2022.900596.
  12. Thanasirikul C, Patumvan A, Lipsky D, Bovonsombut S, Singjai P, Boonchieng E, Chitov T. Rapid assessment and prediction of microbiological quality of raw milk using machine learning based on RGB-colourimetric resazurin assay. *International Dairy Journal*. 2023;146:105750. DOI: 10.1016/j.idairyj.2023.105750.
  13. Lindstrom JE, Barry RP, Braddock JF. Microbial community analysis: a kinetic approach to constructing potential C source utilization patterns. *Soil Biology and Biochemistry*. 1998;30(2):231–239. DOI: 10.1016/S0038-0717(97)00113-2.
  14. Gómez-Acata RV, Neria-González MI, Aguilar-López R. Robust software sensor design for the state estimation in a sulfate-reducing bioreactor. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2016;50(1):67–75. DOI: 10.1134/S0040579516010036.
  15. Lavrova AI, Dogonadze MZ, Sychev AV, Manicheva OA, Postnikov EB. Ensemble density-dependent synchronization of mycobacterial growth: BACTEC MGIT 960 fluorescence-based analysis and mathematical modelling of coupled biophysical and chemical processes. *AIMS Microbiology*. 2022;8(2):208–226. DOI: 10.3934/microbiol.2022017.
  16. Njoku DI, Guo Q, Dai W, Chen JL, Mao G, Sun Q, Sun H, Peng Y-K. The multipurpose application of resazurin in micro-analytical techniques: Trends from the microbial, catalysis and single molecule detection assays. *TrAC Trends in Analytical Chemistry*. 2023;167:117288. DOI: 10.1016/j.trac.2023.117288.
  17. Rampersad SN. Multiple applications of Alamar Blue as an indicator of metabolic function and cellular health in cell viability bioassays. *Sensors*. 2012;12(9):12347–12360. DOI: 10.3390/s120912347.
  18. Candeias LP, MacFarlane DPS, McWhinnie SLW, Maidwell NL, Roeschlaub CA, Sammes PG, Whittlesey R. The catalysed NADH reduction of resazurin to resorufin. *Journal of the Chemical Society, Perkin Transactions 2*. 1998;(11):2333–2334. DOI: 10.1039/A806431H.
  19. Chen JL, Steele TWJ, Stuckey DC. Modeling and application of a rapid fluorescence-based assay for biotoxicity in anaerobic digestion. *Environmental Science & Technology*. 2015;49(22):13463–13471. DOI: 10.1021/acs.est.5b03050.
  20. Sychev AV, Lavrova AI, Dogonadze MZ, Postnikov EB. Establishing compliance between spectral, colourimetric and photometric indicators in Resazurin reduction test. *Bioengineering*. 2023;10(8):962. DOI: 10.3390/bioengineering10080962.
  21. Mouton JW, Vinks AA. Pharmacokinetic/pharmacodynamic modelling of antibacterials in vitro and in vivo using bacterial growth and kill kinetics. *Clinical Pharmacokinetics*. 2005;44(2):201–210. DOI: 10.2165/00003088-200544020-00005.
  22. Richards FJ. A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*. 1959;10(2):290–301. DOI: 10.1093/jxb/10.2.290.
  23. AlamarBlue<sup>®</sup> Assay [Internet]. U.S. Patent No. 5,501,959. PI-DAL1025/1100Rev 1.0. 2008. 27 p. Available from: [https://tools.thermofisher.com/content/sfs/manuals/PI-DAL1025-1100\\_TlamarBlueRev1.1.pdf](https://tools.thermofisher.com/content/sfs/manuals/PI-DAL1025-1100_TlamarBlueRev1.1.pdf).
  24. Von Groll A, Martin A, Portaels F, da Silva PEA, Palomino JC. Growth kinetics of *Mycobacterium tuberculosis* measured by quantitative resazurin reduction assay: a tool for fitness studies. *Brazilian Journal of Microbiology*. 2010;41(2):300–303. DOI: 10.1590/S1517-83822010000200006.
  25. Sychev AV, Belenkov RN, Ukolov DN, Budaev AV, Lavrova AI, Postnikov EB. Revealing kinetics of chemical transitions in colorimetric indicators of microorganisms growth based on photometric data from a portable microbiological analyser. In: *Proc. SPIE*. Vol. 12194. *Computational Biophysics and Nanobiophotonics*. SPIE; 2022. P. 121940Z. DOI: 10.1117/12.2625794.

26. Neufeld BH, Tapia JB, Lutzke A, Reynolds MM. Small molecule interferences in Resazurin and MTT-based metabolic assays in the absence of cells. *Analytical Chemistry*. 2018;90(11):6867–6876. DOI: 10.1021/acs.analchem.8b01043.
27. Fukushima RS, Weimer PJ, Kunz DA. Photocatalytic interaction of Resazurin N-oxide with cysteine optimizes preparation of anaerobic culture media. *Anaerobe*. 2002;8(1):29–34. DOI: 10.1006/anae.2001.0405.
28. Baranyi J, Roberts TA. A dynamic approach to predicting bacterial growth in food. *International Journal of Food Microbiology*. 1994;23(3–4):277–294. DOI: 10.1016/0168-1605(94)90157-0.
29. Rickett LM, Pullen N, Hartley M, Zipfel C, Kamoun S, Baranyi J, Morris RJ. Incorporating prior knowledge improves detection of differences in bacterial growth rate. *BMC Systems Biology*. 2015;9:60. DOI: 10.1186/s12918-015-0204-9.
30. Atolia E, Cesar S, Arjes HA, Rajendram M, Shi H, Knapp BD, Khare S, Aranda-Díaz A, Lenski RE, Huang KC. Environmental and physiological factors affecting high-throughput measurements of bacterial growth. *MBio*. 2020;11(5):e01378-20. DOI: 10.1128/mBio.01378-20.
31. Giraud E, Lelong B, Raimbault M. Influence of pH and initial lactate concentration on the growth of *Lactobacillus plantarum*. *Applied Microbiology and Biotechnology*. 1991;36(1):96–99. DOI: 10.1007/BF00164706.
32. da Silva APR, Longhi DA, Dalcanton F, de Aragão GMF. Modelling the growth of lactic acid bacteria at different temperatures. *Brazilian Archives of Biology and Technology*. 2018;61: e18160159. DOI: 10.1590/1678-4324-2018160159.



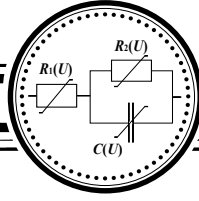
*Сычев Александр Владимирович* — родился в Железногорске Курской области (1996). Окончил с отличием магистратуру естественно-географического факультета Курского государственного университета по направлению «Химия» (2020). С 2020 года — аспирант кафедры физики и нанотехнологий. Область научных интересов — биофизика, электронная и оптическая микроскопия, физика жидкости, физическая химия.

Россия, 305000 Курск, Радищева, 33  
 Курский государственный университет  
 E-mail: sychev\_av@kursksu.ru  
 ORCID: 0000-0002-6116-6915  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1163621



*Постников Евгений Борисович* — родился в Курске (1977). Окончил Курский государственный педагогический университет (1998). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2000) и доктора физико-математических наук (2011). Заведующий отделом теоретической физики НИЦ физики конденсированного состояния и профессор кафедры физики и нанотехнологий Курского государственного университета. Область научных интересов — математическое моделирование в биофизике, транспортные процессы в сложных средах, физика жидкости.

Россия, 305000 Курск, Радищева, 33  
 Курский государственный университет  
 E-mail: postnikov@kursksu.ru  
 ORCID: 0000-0001-7904-1881  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 137444



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(3)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003100  
EDN: RRNDFW

## Электродинамический метод расчета спектров поглощения плазмонов в прямоугольнике с двумерным электронным газом, возбужденных падающей электромагнитной волной

Д. В. Фатеев<sup>1,2</sup>✉, К. В. Машинский<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

<sup>2</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия  
E-mail: ✉fateevedv@yandex.ru, konstantin-m92@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.11.2023, принята к публикации 30.01.2024,  
опубликована онлайн 22.03.2024, опубликована 31.05.2024

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — разработка электродинамического метода вычисления плазмонного спектра в трехмерной структуре с двумерным электронным газом при возбуждении падающей электромагнитной волной. **Методы.** Разработанный метод основан на решении интегральных уравнений, сформированных относительно индуцированных токов в проводящих частях трехмерной структуры. **Результаты.** Исследованы сходимость метода и время расчета. Выявлены условия сходимости расчета высших плазмонных резонансов в прямоугольной структуре с двумерным электронным газом. Исследовано нормальное падение произвольно поляризованной электромагнитной волны на прямоугольник с двумерным газом. Рассчитаны спектры сечений поглощения, экстинкции, прямого и обратного рассеяния падающей волны. **Заключение.** Выяснено, что в прямоугольной структуре, содержащей двумерный электронный газ, спектр плазмонных резонансов модифицируется по сравнению с устоявшимися двумерными моделями постановки задачи, в которых структура предполагается бесконечной и однородной в одном из направлений. Установлено, что падающая волна наиболее эффективно возбуждает фундаментальные плазмонные моды. Плазмонные моды демонстрируют сильное накопление заряда на краях прямоугольника, что существенно влияет на резонансные частоты возбуждения плазмонных мод.

**Ключевые слова:** метод интегральных уравнений, плазмон, двумерный электронный газ, терагерцы.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 22-19-00611.

**Для цитирования:** Фатеев Д. В., Машинский К. В. Электродинамический метод расчета спектров поглощения плазмонов в прямоугольнике с двумерным электронным газом, возбужденных падающей электромагнитной волной // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 347–356. DOI: 10.18500/0869-6632-003100. EDN: RRNDFW

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Electrodynamic approach for calculating the absorption spectra of plasmons in a rectangle with a two-dimensional electron gas excited by an incident electromagnetic wave

D. V. Fateev<sup>1,2</sup>✉, K. V. Mashinsky<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia

<sup>2</sup>Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Russia

E-mail: ✉ fateevdv@yandex.ru, konstantin-m92@yandex.ru

Received 22.11.2023, accepted 30.01.2024, available online 22.03.2024, published 31.05.2024

**Abstract.** The purpose of this research is to develop an electrodynamic method for calculating the plasmon spectrum in a three-dimensional structure with a two-dimensional electron gas excited by an incident electromagnetic wave. *Methods.* The developed method is based on solving integral equations formed with respect to induced currents in the conducting parts of a three-dimensional structure. *Results.* The convergence of the method and the calculation time were studied. The conditions for the convergence of calculations of higher plasmon resonances in a rectangular structure with a two-dimensional electron gas are determined. The normal incidence of an arbitrarily polarized electromagnetic wave on a rectangle with a two-dimensional gas is studied. The spectra of the absorption, extinction, forward and back scattering cross sections of the incident wave are calculated. *Conclusion.* It is found that in a rectangular structure containing a two-dimensional electron gas, the spectrum of plasmon resonances is modified in comparison with established by two-dimensional models of problem formulation, in which the structure is assumed to be infinite and homogeneous in one of the directions. It has been established that the incident wave most effectively excites fundamental plasmon modes. Plasmonic modes exhibit strong charge accumulation at the edges of the rectangle, which significantly affects the resonant excitation frequencies of plasmonic modes.

**Keywords:** integral equations method, plasmon, two-dimensional electron gas, terahertz.

**Acknowledgements.** This work was supported by Russian Science Foundation Grant No. 22-19-00611.

**For citation:** Fateev DV, Mashinsky KV. Electrodynamic approach for calculating the absorption spectra of plasmons in a rectangle with a two-dimensional electron gas excited by an incident electromagnetic wave. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(3):347–356. DOI: 10.18500/0869-6632-003100

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

В последнее время появился широкий интерес к созданию терагерцевых (ТГц) устройств с использованием двумерных плазмонов как для локализации и усиления электромагнитных полей, так и для использования нелинейных свойств плазмонов [1]. Традиционно двумерный электронный газ образуется при формировании квантовой ямы в зоне проводимости полупроводниковых гетероструктур. Известно, что в полевых транзисторах микронных и субмикронных размеров с двумерным электронным каналом возможно возбуждение двумерных плазмонов терагерцевого диапазона [2]. Основываясь на свойствах двумерных плазменных волн, теоретические исследования ТГц плазмонных эффектов решаются в двумерной постановке задачи, в которой и считают направление, перпендикулярное распространению плазмона, бесконечным и однородным [3, 4]. Такая постановка задачи значительно упрощает решение как дисперсионных задач, так и задач о возбуждении плазмонов внешней электромагнитной волной. Упрощенный двумерный подход может быть применим к плазмонным структурам, размер которых в направлении, поперечном направлению распространения плазмона, на порядок и более превышает длину волны терагерцевого плазмона. Принципиально миллиметровые размеры экспериментально достижимы в плазмонных

структурах, созданных на основе полупроводниковых гетероструктур. При типичной микронной длине волны терагерцевого плазмона размеры полупроводниковых гетероструктур могут достигать нескольких миллиметров [5]. Однако размеры создаваемых плазмонных структур часто сравнимы с размерами коротковолновых плазмонов, а связь с длинной электромагнитной волной осуществляется с помощью дополнительных антенн. В структурах таких размеров влияние краевых эффектов наведенных полей на отклик становится значительным, а иногда и доминирующим. Несмотря на невозможность описания краевых эффектов в двумерном подходе, с его помощью были описаны новые плазмонные физические эффекты, такие как плазмон-плазмонное рассеяние [3, 6], увеличение эффективной длины волны в плазмонных резонаторах и радиационное затухание плазмонов. В этом случае для решения проблемы возбуждения плазмонных мод в резонаторе двумерных электронных систем необходим учет электромагнитного запаздывания. Наиболее исследованными трехмерными структурами являются плазмонные структуры с симметричной формой резонатора двумерной системы в виде круглого диска (или кольца) [7–12]. Значительно меньше работ посвящено возбуждению плазмонов в прямоугольном двумерном электронном резонаторе [13–15]. Прямоугольный резонатор имеет пониженную симметрию по сравнению с геометрией диска (или кольца), поэтому теоретическое рассмотрение становится более сложным. Теоретические подходы, применяемые для изучения плазмонных возбуждений в прямоугольных плазмонных резонаторах, используют либо коммерческие численные решатели [14–16], либо упрощающие аппроксимации [13]. К сожалению, методы конечных элементов сталкиваются с серьезными трудностями при применении к задачам, в которых задействованы электромагнитные процессы сильно разных масштабов. Именно такие трудности возникают при исследовании плазмонных структур, в которых длина терагерцевой электромагнитной волны и длина волны плазмона отличаются на два порядка величины.

В данной работе разработан алгоритм расчета и исследованы особенности спектров плазмонов, возбужденных нормально падающей электромагнитной волной, в прямоугольнике с двумерным электронным газом.

## 1. Метод

Исследовано возбуждение двумерных токов в прямоугольнике с двумерным электронным газом, на плоскость которого нормально падает электромагнитная волна произвольной поляризации. Длина прямоугольника в направлении  $OX$  обозначается как  $w$ , ширина в направлении  $OY$  —  $l$ , а волна падает на прямоугольник в направлении  $OZ$  по направлению из среды 1 в среду 2. Плоскость  $OXY$  разделяет два полупространства с разными диэлектрическими проницаемостями.

Разработанный метод состоит из следующих этапов. На первом этапе электрические и магнитные поля рассеянных волн раскладываются в двойной пространственный интеграл Фурье в направлениях  $OX$  и  $OY$ , а зависимость Фурье-компонент от координаты  $z$  считается экспоненциальной. Для примера показана  $E_x$ -компонента электрического поля

$$E_x^{(1,2)}(x, y, z, t) = \exp(-i\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{x,q_x,q_y}^{(1,2)} \exp\left(ik_{z,q_x,q_y}^{(1,2)} z\right) \exp(iq_y y) \exp(iq_x x) dq_x dq_y, \quad (1)$$

где  $q_x$  и  $q_y$  — компоненты волновых векторов Фурье-гармоник в плоскости прямоугольника,  $k_{z,q_x,q_y}^{(1,2)}$  — поперечные компоненты волновых векторов Фурье-гармоник в средах и  $\omega$  — круговая частота волны. Уравнения Максвелла решаются в полубесконечных диэлектрических средах, окружающих прямоугольник с двумерным электронным газом. Для сшивания решений в диэлектрических средах используются граничные условия для компонент электрического и магнитного

полей в плоскости двумерного газа. С использованием закона Ома, в котором двумерный электронный газ описывается проводимостью Друде  $\sigma$  [3], сформированы интегральные уравнения для токов  $j_x$  и  $j_y$  в двумерном газе:

$$j_x(x, y) = \sigma \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-w/2}^{w/2} j_x(x', y') G_{q_x, q_y}^{xx}(x, x', y, y') dx' dy' + \sigma \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-w/2}^{w/2} j_y(x', y') G_{q_x, q_y}^{xy}(x, x', y, y') dx' dy' + \sigma Z_{0x} E_{in, x}, \quad (2)$$

$$j_y(x, y) = \sigma \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-w/2}^{w/2} j_x(x', y') G_{q_x, q_y}^{yx}(x, x', y, y') dx' dy' + \sigma \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-w/2}^{w/2} j_y(x', y') G_{q_x, q_y}^{yy}(x, x', y, y') dx' dy' + \sigma Z_{0y} E_{in, y},$$

где  $G_{q_x, q_y}^{mn}(x, x', y, y')$  – ядра интегральных уравнений,  $m, n = x, y$ ,  $Z_{0x}$  и  $Z_{0y}$  – коэффициенты связи с падающей волной,  $E_{in, x}$  и  $E_{in, y}$  – компоненты амплитуды электрического поля падающей волны. Система интегральных уравнений (2) решается методом Галеркина путем разложения искомых токов  $j_x$  и  $j_y$  в ряды по полиномам Лежандра по направлениям  $x$  и  $y$ . Это позволяет преобразовать систему интегральных уравнений в бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения токов. С учетом сходимости, разложение неизвестных токов в двойной ряд по полиномам Лежандра обрывается до полинома порядка  $N$

$$j_x(\chi'_x, \xi'_y) = \sum_{n, n_1=0}^N \beta_{n, n_1}^{(x)} P_{n_1}(\xi'_y) P_n(\chi'_x), \quad (3)$$

$$j_y(\chi'_x, \xi'_y) = \sum_{n, n_1=0}^N \beta_{n, n_1}^{(y)} P_{n_1}(\xi'_y) P_n(\chi'_x),$$

где  $P_n(\chi'_x)$  – полиномы Лежандра,  $\beta_{n, n_1}^{(x, y)}$  – коэффициенты разложения токов,  $(\chi'_x, \xi'_y)$  – пространственные координаты  $(x, y)$ , приведенные к отрезку  $[-1, 1]$ . Каждое слагаемое в правой части уравнения с неизвестным током (2) создает  $N^2$  алгебраических уравнений и, соответственно,  $N^2$  неизвестных коэффициентов разложения. Матрица алгебраической системы состоит из элементов вида

$$M_{n_1, r_1, n, r} = \sigma \frac{lw}{4\pi^2} i^{r_1+r} i^{n+n_1} (-1)^{n+n_1} W_{n_1, r_1, n, r} - \frac{\delta_{nr}}{2r+1} \frac{\delta_{n_1 r_1}}{2r_1+1}, \quad (4)$$

где

$$W_{n_1, r_1, n, r} = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{n_1}^{(s)}\left(q_y \frac{a}{2}\right) J_{r_1}^{(s)}\left(q_y \frac{a}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} Z(q_x, q_y) J_n^{(s)}\left(q_x \frac{w}{2}\right) J_r^{(s)}\left(q_x \frac{w}{2}\right) dq_x dq_y, \quad (5)$$

где  $Z(q_x, q_y)$  – адмиттансы системы, вычисленные из уравнений Максвелла;  $J_n^{(s)}\left(q_x \frac{w}{2}\right)$  – сферические функции Бесселя;  $(q_x, q_y)$  – волновые векторы в Фурье-представлении;  $n, n_1$  – индексы

строк матричных элементов,  $r, r_1$  — индексы столбцов элементов матрицы (индексы  $n, n_1, r, r_1$  принимают значения от 0 до  $N$ ). Полный размер квадратной матрицы  $M$  системы уравнений составляет  $2N^2$ .

Полученная система алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения токов  $\beta_{n,n_1}^{(x,y)}$  решается методом исключения Гаусса путем приведения матрицы системы к треугольному виду. Рассчитанные индуцированные токи (3) позволяют определить резонансные электродинамические свойства прямоугольника с двумерным электронным газом.

Для вычисления энергетических характеристик взаимодействия электромагнитной волны и прямоугольника двумерного газа необходимо представить поля рассеянных волн вперед и назад как сумму полей отраженного от однородной границы раздела сред и рассеянного поля. Для примера записана компонента электрического поля в 1-ой среде

$$E_x(x, y, z) = E_{x,R} \exp\left(ik_{z,0,0}^{(1)}z\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{x,q_x,q_y} \exp\left(ik_{z,q_x,q_y}^{(1)}z\right) \exp(iq_y y) dq_y \exp(iq_x x) dq_x, \quad (6)$$

где  $E_{x,R}$  — электрическое поле волны, отраженной от однородной границы раздела сред, а  $\tilde{E}_{x,q_x,q_y}$  — амплитуды Фурье-компонент электрического поля рассеянной волны назад. Средний поток мощности Умова–Пойнтинга будет описывать уходящие рассеянные прямоугольником волны

$$P_{zR,T} = 2\pi^2 \iint_{\pm\omega\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0\mu_0}} \left( \tilde{E}_{x,q_x,q_y} \tilde{H}_{y,q_x,q_y}^* - \tilde{E}_{y,q_x,q_y} \tilde{H}_{x,q_x,q_y}^* \right) dq_y dq_x. \quad (7)$$

Исключая потоки волн отраженных и прошедших через границу раздела сред и используя уравнения Максвелла, потоки рассеянного излучения прямоугольником назад  $P_{zR}$  и  $P_{zT}$  вперед запишем как

$$P_{zR,T} = 2\pi^2 \iint_{\pm\omega\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0\mu_0}} \frac{\left| \tilde{E}_{x,q_x,q_y} \right|^2 (\varepsilon_0\varepsilon_{1,2}\mu_0\omega^2 - q_y^2) + \left| \tilde{E}_{y,q_x,q_y} \right|^2 (\varepsilon_0\varepsilon_{1,2}\mu_0\omega^2 - q_x^2)}{k_{z1,2}^* \mu_0 \omega} dq_y dq_x + \\ + 2\pi^2 \iint_{\pm\omega\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0\mu_0}} \frac{2\text{Re} \left( \tilde{E}_{x,q_x,q_y} \tilde{E}_{y,q_x,q_y}^* \right) q_y q_x}{k_{z1,2}^* \mu_0 \omega} dq_y dq_x. \quad (8)$$

Поглощенная электромагнитная мощность в прямоугольнике осциллирующими токами может быть вычислена как

$$A = \text{Re} \left( \frac{1}{\sigma(\omega)} \right) \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-l/2}^{l/2} \left( |j_x(x, y)|^2 + |j_y(x, y)|^2 \right) dx dy, \quad (9)$$

а плотность потока мощности падающей волны определяется выражением

$$P_{in} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{\mu_0}} \left( |E_{in,x}|^2 + |E_{in,y}|^2 \right). \quad (10)$$

Полученные энергетические характеристики позволяют вычислить сечение поглощения  $\alpha_{CS} = A/P_{in}$ , сечение рассеяния вперед  $\alpha_T = P_{zT}/P_{in}$ , сечение рассеяния назад  $\alpha_R = P_{zR}/P_{in}$  и сечение экстинкции  $\alpha_{CS} = (A + |P_{zT}| + |P_{zR}|) / P_{in}$ .



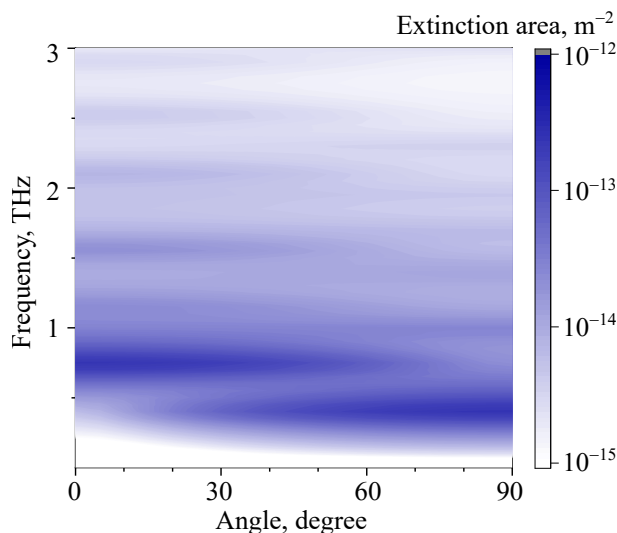


Рис. 1. Зависимость спектра площади сечения экстинкции от угла поляризации электрического поля нормально падающей волны в прямоугольнике с размерами  $w = 1$  мкм,  $l = 2$  мкм. Двумерный газ описывается проводимостью Друде со следующими параметрами: время релаксации импульса электрона 1 пс, концентрация электронов  $2 \cdot 10^{11}$  см $^{-2}$  и эффективная масса электрона  $0.067m_e$  (цвет онлайн)

Fig. 1. Dependence of the extinction cross-sectional area spectrum on the polarization angle of the electric field of a normally incident wave in a rectangle with dimensions  $w = 1 \mu\text{m}$ ,  $l = 2 \mu\text{m}$ . A two-dimensional gas is described by Drude conductivity with the following parameters: electron momentum relaxation time 1 ps, electron density  $2 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$  and effective electron mass  $0.067m_e$  (color online)

также приводит к значительному замедлению вычислений по сравнению с одномерным интегрированием при решении двумерных задач. В связи с этим время расчета каждого матричного элемента трехмерной задачи также растет квадратично по сравнению с двумерной задачей. Вычисленная площадь экстинкции прямоугольника с двумерным газом (рис. 1) получена при выполнении оптической теоремы с погрешностью в 0.1%. Поиск сходимости решения показал необходимость учета 12 полиномов Лежандра в разложении токов для исследования первых четырех плазменных резонансов для достижения погрешности 0.1%. Для выполнения расчетов создана программа на языке программирования Фортран. Расчеты проведены на персональном компьютере с 10-ядерным процессором, что позволило рассчитать свойства системы на заданной частоте за 15 секунд.

## 2. Результаты и обсуждение

С использованием разработанного электродинамического подхода были вычислены индуцированные поля и токи в структуре, рассчитаны спектры сечения прямого и обратного рассеяния (рис. 2), сечение поглощения и сечение экстинкции (см. рис. 2) для прямоугольника двумерного газа на основе гетероструктуры AlGaAs с размерами  $w = 1$  мкм,  $l = 2$  мкм (типичные экспериментальные структуры продемонстрированы в работах [5, 17]).

Рассчитанное сечение поглощения имеет резонансный характер, что соответствует возбуждению в структуре различных плазменных мод. Для идентификации возбужденных плазменных

Сходимость результатов вычисления резонансных характеристик определяется сравнением рассчитанных индуктивных токов, полученных при последовательном увеличении размера матрицы системы. Отдельным необходимым условием является сходимость расчета матричных элементов, каждый из которых представляет собой двойное интегрирование в пространстве волновых векторов по направлениям  $q_x$  и  $q_y$ . Численное интегрирование каждого коэффициента производится с учетом сходимости и с разбиением интеграла в волновом пространстве на два — внутри светового конуса при  $q_x, q_y \leq \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}$  и вне светового конуса при  $q_x, q_y > \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  — наибольшая диэлектрическая проницаемость окружающих сред. Такое разбиение необходимо, так как в субволновых структурах излучающиеся и затухающие индуцированные поля имеют пространственные масштабы, различающиеся на порядок и более. Основным отличием разработанного метода от используемого в двумерных задачах является существенное замедление вычислений из-за увеличения размера матрицы  $N^2$  при увеличении числа полиномов Лежандра по сравнению с размером матрицы  $N$  в двумерных задачах. Двойное интегрирование в пространстве импульсов при вычислении матричных элементов

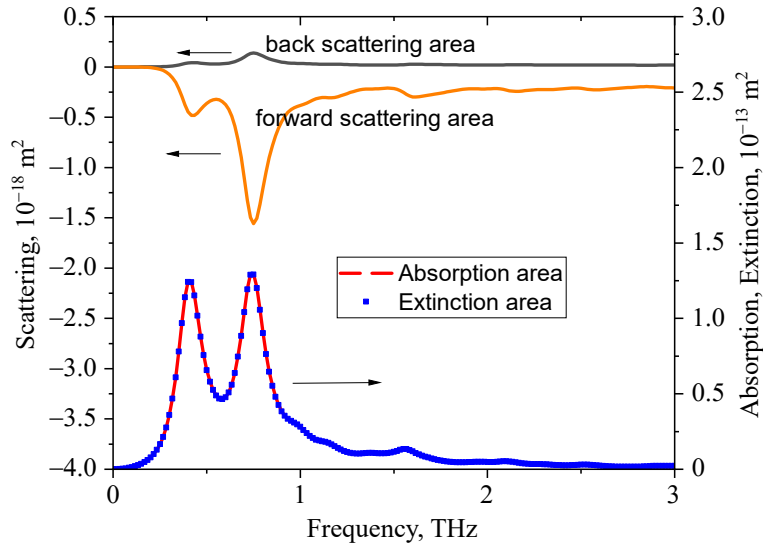


Рис. 2. Спектры сечения поглощения (красная кривая), сечения экстинкции (синие точки), сечения обратного рассеяния (черная кривая) и сечения прямого рассеяния (зеленая кривая) для прямоугольника с размерами  $w = 1 \text{ мкм}$ ,  $l = 2 \text{ мкм}$ . Двумерный газ описывается проводимостью Друде со следующими параметрами: время релаксации импульса электрона 1 пс, концентрация электронов  $2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$  и эффективная масса электрона 0.067. Вектор электрического поля падающей волны направлен под углом 45 градусов относительно оси OX (цвет онлайн)

Fig. 2. Spectra of the absorption cross section (red curve), extinction cross section (blue dots), backscattering cross section (black curve) and forward scattering cross section (green curve) for a rectangle with dimensions  $w = 1 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $l = 2 \text{ }\mu\text{m}$ . A two-dimensional gas is described by Drude conductivity with the following parameters: electron momentum relaxation time 1 ps, electron concentration  $2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  and effective electron mass 0.067. The electric field vector of the incident wave is directed at an angle of 45 degrees relative to the OX axis (color online)

мод можно использовать модель резонатора с идеально отражающими границами. В такой модели волновой вектор плазмонной моды будет иметь дискретные значения  $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ , где  $q_x = \frac{\pi}{w}p$  — по направлению  $x$  и  $q_y = \frac{\pi}{l}p_1$  — по направлению  $y$ ,  $p$  и  $p_1$  — целые числа. Следовательно, каждой плазмонной моде в прямоугольнике можно приписать два индекса  $(p, p_1)$ .

Для идентификации мод построены мгновенные распределения плотности заряда, осциллирующего в прямоугольнике с двумерным газом. Для этого с использованием уравнения непрерывности вычислено распределение линейной плотности заряда для плазмонного резонанса в прямоугольнике с двумерным газом:

$$\rho = -\frac{i}{\omega} \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} \right). \quad (11)$$

Построены распределения плотности заряда на частотах плазмонного резонанса 0.4009 ТГц, 0.7342 ТГц, 0.9675 ТГц и 1.551 ТГц (рис. 3), которые позволяют сделать выводы о структуре плазмонных мод и идентифицировать их с помощью модели дискретизации волнового числа. Плазмону на частоте 0.4009 ТГц соответствуют индексы (0,1), на частоте 0.7342 ТГц — (1,0), на частоте 0.9675 ТГц — (2,1), а на частоте 1.551 ТГц — (1,2). Логарифмический график спектров экстинкции и поглощения показывает, что в прямоугольнике наиболее эффективно возбуждаются фундаментальные плазмонные моды с индексами (0,1) и (1,0), тогда как для высших плазмонных резонансов сечение экстинкции падает на порядок и более. На рис. 3 видно сильное накопление заряда на краях прямоугольника, что существенно влияет на резонансные частоты плазмонных мод по сравнению с частотами, предсказываемыми упрощенными моделями. Такое накопление заряда

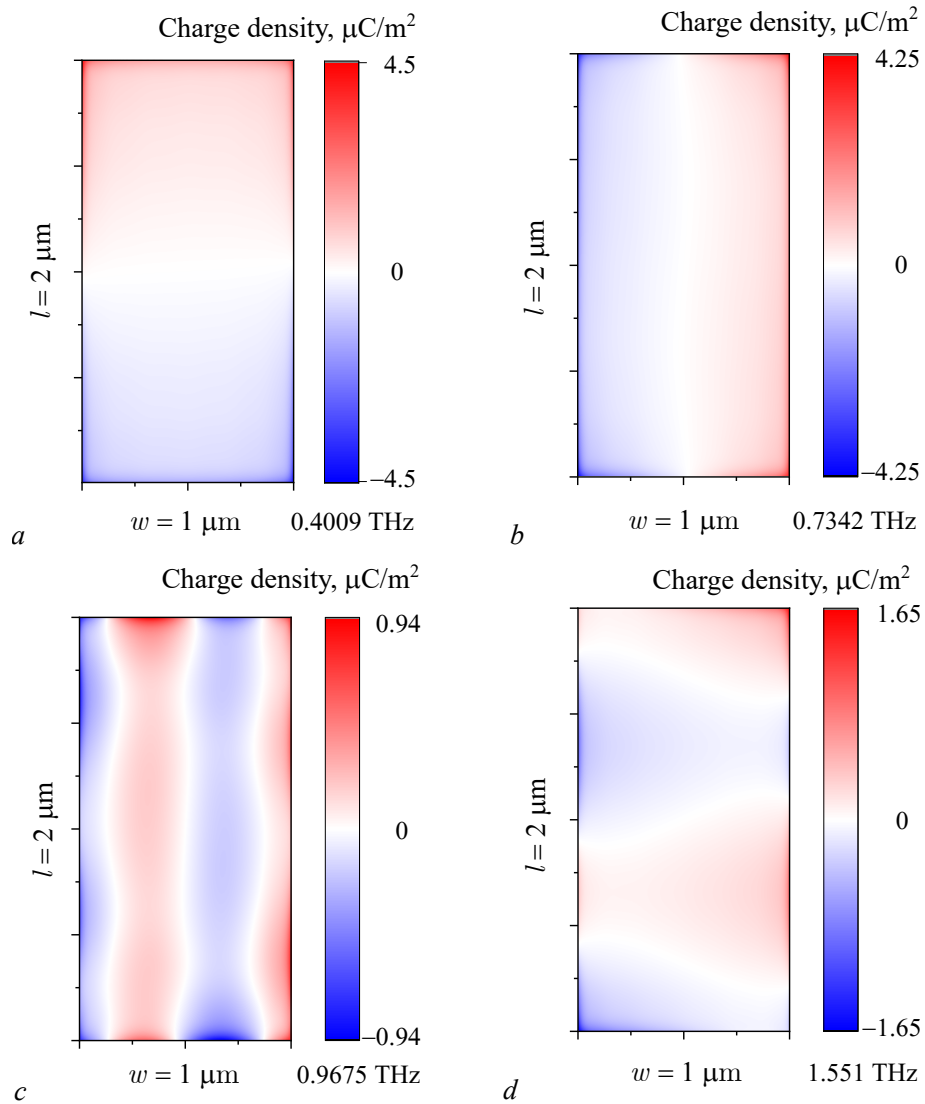


Рис. 3. Распределение плотности заряда в плоскости прямоугольника с двумерным электронным газом в плазмонных резонансах, соответствующих резонансам на рис. 1 на частотах 0.4009 ТГц (a), 0.7342 ТГц (b), 0.9675 ТГц (c) и 1.551 ТГц (d) (цвет онлайн)

Fig. 3. Charge density distribution in the plane of a rectangle with a two-dimensional electron gas in plasmon resonances corresponding to resonances in Fig. 1 at frequencies of 0.4009 THz (a), 0.7342 THz (b), 0.9675 THz (c) and 1.551 THz (d) (color online)

связано с увеличением электрического поля на границах прямоугольника с двумерным электронным газом и приводит к значительному выходу поля за границы прямоугольника, что уменьшает резонансные частоты возбуждения плазмонных мод. Разработанный алгоритм позволяет более точно предсказывать электромагнитные свойства прямоугольника с двумерным электронным газом по сравнению с коммерческими программами, основанными на методе конечных элементов, поскольку не требует помещения исследуемой системы в область решения. И, следовательно, моды области решения не подмешиваются к истинным решениям рассматриваемой системы. Предложенный алгоритм позволяет исследовать многослойные трехмерные структуры и решать задачи с пространственной дисперсией в двумерном электронном газе, не решаемые методами конечных элементов.

## Заключение

Таким образом, в данной работе разработан алгоритм расчета токов, наведенных электромагнитной волной в прямоугольнике с двумерным электронным газом. Найдены условия сходимости алгоритма и проведено сравнение его быстродействия в сравнении с аналогичным алгоритмом для вычисления плазмонных свойств в двумерной постановке задачи. Рассчитаны сечения поглощения и экстинкции, а также пространственные распределения плотности заряда в плазмонных резонансах. Установлено, что падающая волна наиболее эффективно возбуждает фундаментальные плазмонные моды с индексами (0,1) и (1,0). Плазмонные моды демонстрируют сильное накопление заряда на краях прямоугольника, что существенно влияет на резонансные частоты возбуждения плазмонных мод.

## References

1. Popov VV. Plasmon excitation and plasmonic detection of terahertz radiation in the grating-gate field-effect-transistor structures. *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2011;32:1178–1191. DOI: 10.1007/s10762-011-9813-6.
2. Meziani YM, Handa H, Knap W, Otsuji T, Sano E, Popov VV, Tsymbalov GM, Coquillat D, Teppe F. Room temperature terahertz emission from grating coupled two-dimensional plasmons. *Applied Physics Letters*. 2008;92(20):201108. DOI: 10.1063/1.2919097.
3. Popov VV, Polischuk OV, Shur MS. Resonant excitation of plasma oscillations in a partially gated two-dimensional electron layer. *Journal of Applied Physics*. 2005;98(3):033510. DOI: 10.1063/1.1954890.
4. Fateev DV, Mashinsky KV, Polischuk OV, Popov VV. Excitation of propagating plasmons in a periodic graphene structure by incident terahertz waves. *Physical Review Applied*. 2019;11(6):064002. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.11.064002.
5. Marem'yanin KV, Ermolaev DM, Fateev DV, Morozov SV, Maleev NA, Zemlyakov VE, Gavrilenko VI, Popov VV, Shapoval SYu. Wide-aperture detector of terahertz radiation based on GaAs/InGaAs transistor structure with large-area slit grating gate. *Technical Physics Letters*. 2010;36:365–368. DOI: 10.1134/S106378501004022X.
6. Popov VV, Tsymbalov GM, Shur MS, Knap W. The resonant terahertz response of a slot diode with a two-dimensional electron channel. *Semiconductors*. 2005;39(1):142–146. DOI: 10.1134/1.1852665.
7. Allen SJ, Jr, Stormer HL, Hwang JCM. Dimensional resonance of the two-dimensional electron gas in selectively doped GaAs/AlGaAs heterostructures. *Phys. Rev. B*. 1983;28:4875. DOI: 10.1103/PhysRevB.28.4875.
8. Fetter AL. Magnetoplasmons in a two-dimensional electron fluid: Disk geometry. *Physical Review B*. 1986;33(8):5221. DOI: 10.1103/PhysRevB.33.5221.
9. Dahl C, Kotthaus JP, Nickel H, Schlapp W. Magnetoplasma resonances in two-dimensional electron rings. *Physical Review B*. 1993;48:15480. DOI: 10.1103/PhysRevB.48.15480.
10. Mikhailov S. Radiative decay of collective excitations in an array of quantum dots. *Physical Review B*. 1996;54(15):10335. DOI: 10.1103/PhysRevB.54.10335.
11. Kovalskii VA, Gubarev SI, Kukushkin IV, Mikhailov SA, Smet JH, von Klitzing K, Wegscheider W. Microwave response of two-dimensional electron rings. *Physical Review B*. 2006;73(19):195302. DOI: 10.1103/physrevb.73.195302.
12. Rodionov DA, Zagorodnev IV. Oscillations in radiative damping of plasma resonances in a gated disk of a two-dimensional electron gas. *Physical Review B*. 2022;106(23):235431. DOI: 10.1103/PhysRevB.106.235431.
13. Zarezin AM, Mylnikov D, Petrov AS, Svintsov D, Gusikhin PA, Kukushkin IV, Muravev VM.

- Plasmons in a square of two-dimensional electrons. *Physical Review B*. 2023;107(7):075414. DOI: 10.1103/PhysRevB.107.075414.
14. Dawood A, Park SJ, Parker-Jervis R, Wood C, Li L, Linfield EH, Davies AG, Cunningham JE, Sydoruk O. Effect of mesa geometry on low-terahertz frequency range plasmons in two-dimensional electron systems. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2022;55:015103. DOI: 10.1088/1361-6463/ac2401.
  15. Mylnikov D, Svintsov D. Limiting capabilities of two-dimensional plasmonics in electromagnetic wave detection. *Physical Review Appl.* 2022;17(6):064055. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.17.064055.
  16. Nikitin AY, Alonso-González P, Vélez S, Mastel S, Centeno A, Pesquera A, Zurutuza A, Casanova F, Hueso LE, Koppens FHL, Hillenbrand R. Real-space mapping of tailored sheet and edge plasmons in graphene nanoresonators. *Nat. Photonics*. 2016;10:239. DOI: 10.1038/nphoton.2016.44.
  17. Popov VV, Yermolaev DM, Maremyanin KV, Zemlyakov VE, Maleev NA, Gavrilenko VI, Bespalov VA, Yegorkin VI, Ustinov VM, Shapoval SYu. Detection of terahertz radiation by tightly concatenated InGaAs field-effect transistors integrated on a single chip. *Applied Physics Letters*. 2014;104(16):163508. DOI: 10.1063/1.4873540.



*Фатеев Денис Васильевич* — родился в Саратове (1983). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Физика» (2005). Кандидат физико-математических наук (2008, СГУ). Работает на кафедре общей, теоретической и компьютерной физики Саратовского государственного университета в должности доцента. Научные интересы — терагерцевое излучение, математическое моделирование, электромагнитное моделирование. Опубликовал свыше 100 научных работ по указанным направлениям.

Россия, 410054 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники  
 и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
 E-mail: fateevdv@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0003-1406-5385  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 179002



*Машинский Константин Викторович* — родился в Саратове (1992). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Физика» (2014). Работает в лаборатории фотоники Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — терагерцевое излучение, математическое моделирование, электромагнитное моделирование. Опубликовал свыше 30 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410054 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники  
 и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
 E-mail: konstantin-m92@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0002-0724-6391  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 983332



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(3)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003113  
EDN: DFZESJ

### Режимы синхронизации в кольце нейронов гиппокампа грызунов при лимбической эпилепсии

М. В. Корнилов<sup>1,2</sup>✉, А. А. Капустников<sup>1,2</sup>, Е. А. Созонов<sup>2</sup>, М. В. Сысоева<sup>1</sup>, И. В. Сысоев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

<sup>2</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: ✉kornilovmv@gmail.com, anton.kapustnikov.02@mail.ru, infagot@gmail.com,  
bobrichkek@mail.ru, ivssci@gmail.com

Поступила в редакцию 19.11.2023, принята к публикации 18.02.2024,  
опубликована онлайн 7.05.2024, опубликована 31.05.2024

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — рассмотреть кольцевую структуру из нейронов гиппокампа, которая может быть ответственна за генерацию основного ритма при лимбической эпилепсии. **Методы.** Уравнения модели решались численно. Чтобы определить области существования колебательных и возбудимых режимов для отдельного нейрона, был сделан бифуркационный анализ по параметру проводимости утечки. Запаздывание в связях моделировалось инерционностью синапса без введения явной задержки. Для определения пределов устойчивости генерации разрывались некоторые связи, а также вводилась расстройка по параметрам между нейронами в кольце. **Результаты.** В модели отдельного нейрона обнаружена область бистабильности, при которой устойчивый фокус сосуществует с циклом. В кольце обнаружены два основных режима синхронизации. Один из них наследует частоту индивидуальных колебаний при малом относительно периода фазовом сдвиге между отдельными нейронами. Во втором режиме частота зависит от числа нейронов, а фазовый сдвиг между соседними нейронами равен отношению периода к числу нейронов в кольце. Второй режим с различными частотами может реализовываться как для параметров отдельного нейрона, соответствующих бистабильному режиму, так и для параметров, когда для отдельного нейрона существует только устойчивый фокус. При малой расстройке (порядка 2% по абсолютной величине) по параметрам второй синхронный режим сохраняется. **Заключение.** Показано, что в математической модели кольца нейронов гиппокампа, где для отдельных нейронов учтены все основные существенные токи, а их параметры могут различаться, в относительно широкой области по параметру проводимости утечки существует колебательный режим, частота которого определяется длиной кольца и синаптической проводимостью, а не параметрами отдельного нейрона. При этом небольшое изменение синаптической проводимости может приводить к резкому (в 2–7 раз) изменению частоты генерации.

**Ключевые слова:** модель Ходжкина–Хаксли, нейронные сети, коллективная динамика, гиппокамп, пирамидный нейрон, эпилепсия.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 19-72-10030-П, <https://rscf.ru/project/19-72-10030/>.

**Для цитирования:** Корнилов М. В., Капустников А. А., Созонов Е. А., Сысоева М. В., Сысоев И. В. Режимы синхронизации в кольце нейронов гиппокампа грызунов при лимбической эпилепсии // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 357–375. DOI: 10.18500/0869-6632-003113. EDN: DFZESJ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Synchronization regimes in the ring of rodent hippocampal neurons at limbic epilepsy

M. V. Kornilov<sup>1,2</sup>✉, A. A. Kapustnikov<sup>1,2</sup>, E. A. Sozonov<sup>2</sup>, M. V. Sysoeva<sup>1</sup>, I. V. Sysoev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russia

<sup>2</sup>Saratov State University, Russia

E-mail: ✉kornilovmv@gmail.com, anton.kapustnikov.02@mail.ru, infagot@gmail.com,  
bobrichkek@mail.ru, ivssci@gmail.com

Received 19.11.2023, accepted 18.02.2024, available online 7.05.2024, published 31.05.2024

**Abstract.** This study *aims* to consider an ensemble of hippocampal neurons coupled in a ring, which may be responsible for generation of the primary rhythm at limbic epilepsy. *Methods.* Model equations were solved numerically. To determine the areas of oscillatory and excitable regime existence for a single neuron, the bifurcation analysis for the leakage conductivity parameter was performed. The coupling delays was not implemented directly, instead, inertia in the synapse was introduced. To determine the stability of generation some couplings were removed and parameter detuning was introduced. *Results.* In the single neuron model the bistability region was detected, in which a stable focus coexists with a limit cycle. Two main synchronous regimes were detected. The first regime inherits frequency of individual oscillator, with a relatively small phase shift between oscillators in the ring. The frequency of the second regime depends on the number of neurons in the ring, with the phase shift between neighbor oscillators being equal to ratio of oscillation period and number of neurons. This second regime can occur both for the parameters corresponding to bistable regime in the individual neuron and for the parameters at which the only existing attractor is stable focus. The second synchronous regime is preserved for parameter detuning of 2% from their absolute values. *Conclusion.* It was shown that in the mathematical model of the ring of hippocampal neurons, where all the main significant currents are taken into account for individual neurons, and their parameters can vary, there is an oscillatory mode, the frequency of which is determined by the length of the ring and synaptic conductivity, rather than by the parameters individual neuron. In this case, a small change in synaptic conductivity can lead to a sharp (2–7 times) change in the generation frequency.

**Keywords:** Hodgkin–Huxley model, neural networks, collective dynamics, hippocampus, pyramidal neuron, epilepsy.

**Acknowledgements.** This study was supported by Russian Science Foundation, grant No. 19-72-10030-П, <https://rscf.ru/project/19-72-10030/>.

**For citation:** Kornilov MV, Kapustnikov AA, Sozonov EA, Sysoeva MV, Sysoev IV. Synchronization regimes in the ring of rodent hippocampal neurons at limbic epilepsy. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(3):357–375. DOI: 10.18500/0869-6632-003113

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Эпилепсия — комплекс различной природы функциональных нарушений, приводящих к сбоям в нормальной работе мозга. Общим местом всех форм эпилепсии является генерация относительно синхронной, высокоамплитудной патологической электромагнитной активности нейронами одной или нескольких систем мозга, например, таламокортикальной или лимбической. Различные формы эпилепсии имеют разную этиологию (происхождение) и различаются как по задействованным в генерации патологической активности областям, так и по сценарию возникновения и развития эпилептической активности [1]. В связи с этим моделирование различных типов эпилепсии с точки зрения теории динамических систем — это разные задачи, и описание эпилептической активности при конкретной форме может быть достигнуто за счёт привлечения специфических понятий. Так, для моделирования абсансной эпилепсии важна структура связей



в таламокортикальной сети, при этом таламус и кору нельзя рассматривать изолированно: колебания возникают сразу во всей системе. Пик-волновые разряды при абсансной эпилепсии являются сильно нелинейными колебаниями со специфической формой и спектром, сохраняющимися на протяжении всего разряда. Поэтому большое число работ посвящено главным образом воспроизведению этих особенностей [2]. При этом важно, что процессы в мозге, ответственные за прекращение патологической активности, до сих пор не обнаружены, что привело к созданию ряда моделей пик-волновых разрядов на основе понятия о переходных процессах [3, 4] в отличие от более ранних моделей, построенных на переключении между аттракторами, один из которых отвечает за нормальную, а второй — за эпилептиформную активность [2, 5]. В то же время при лимбической эпилепсии патологическая активность первоначально и долгое время сосредоточена внутри гиппокампа, и важным является вопрос о том, как формируется и эволюционирует основной ритм, поскольку частота и форма колебаний сильно меняются в процессе разряда и могут даже качественно отличаться у разных субъектов [6]. При этом распространение патологической активности за пределы первичной сети гиппокампа (вторичная генерализация) — это отдельный процесс, который может происходить через месяцы и годы после формирования первичного генератора патологической активности и имеет свои механизмы [7].

В работе [8] было показано, что генератор эпилептиформной активности может быть реализован в виде кольца нейронов, каждый из которых находится в подпороговом неколебательном режиме, а итоговая активность есть функция связей и времени запаздывания в синапсе: возбуждённый внешним входом (другим нейроном, не входящим в колебательное кольцо) импульс последовательно пробегает по всем клеткам кольца и снова возбуждает первый нейрон и т. д. Предложенная в [8] модель имела ряд недостатков, а именно:

- для описания отдельного нейрона были использованы уравнения Ходжкина–Хаксли в их исходной форме, в то время как клетки гиппокампа имеют значительную специфику и описываются более сложными моделями с большим числом уравнений, другими значениями параметров и отличными нелинейными функциями [9];
- запаздывание было добавлено в функцию связи напрямую для простоты, в то время как в действительности запаздывание — это функция инерционности синапса;
- все нейроны в кольце были идентичны по параметрам.

Рассмотрение запаздывания как линии задержки в радиотехническом генераторе позволило в работах [8, 10] исследовать большой набор режимов и получить аналитическую зависимость частоты генерации от задержки и времени запаздывания. Но если говорить об исходной биологической системе, то важно понять, в каких пределах может меняться запаздывание — эти пределы важны для понимания того, какие частоты могут быть достигнуты. Идентичность нейронов в кольце очевидно способствует синхронизации колебаний с лагом, равным в рассмотренных случаях  $T/D$ , где  $T$  — период колебаний, а  $D$  — число осцилляторов в кольце. Но в реальной системе все нейроны будут разными, и важно знать, насколько устойчивым окажется исследованный режим. Таким образом, решение всех этих вопросов необходимо для подтверждения принципиальной возможности существования обнаруженных в [8, 10] режимов в сетях гиппокампа, чему и посвящена данная работа.

## 1. Модель

**1.1. Модель узла.** В качестве узла сети использовалась однокомпарментная (однокамерная) модель Ходжкина–Хаксли [11], написанная в соответствии с [12, 13] для пирамидных клеток поля СА3 гиппокампа (1). Следует отметить, что при записи уравнений существуют два основных

подхода к размерности параметров ёмкости и проводимости. Первый подход: значения пишутся для всего нейрона целиком, как будто он является сосредоточенным элементом (можно также считать, что параметры соответствуют результату интегрирования по площади всего нейрона). Второй подход: записываются удельные проводимости и ёмкости на единицу площади [9], что может быть полезно, например, при переходе от однокомpartmentных к многокомpartmentным моделям. В данной работе мы используем интегрированные величины, поскольку значения взяты нами из работы [13].

$$C \frac{dV_i}{dt} = -I_{\text{Nai}} - I_{\text{Cai}} - I_{\text{Ca(low)}_i} - I_{\text{K(DR)}_i} - I_{\text{K(A)}_i} - I_{\text{K(AHP)}_i} - I_{\text{K(C)}_i} - I_{\text{Li}} - I_{\text{Syn}_i}, \quad (1)$$

где  $V_i$  – потенциал на мембране  $i$ -го нейрона,  $t$  – размерное время,  $C$  – ёмкость мембраны (в данной работе  $C = 0.1$  мкФ). Токи ионных каналов расписаны ниже.

$I_{\text{Na}}$  – натриевый ток:

$$\begin{aligned} I_{\text{Nai}} &= g_{\text{Nai}} m_i^2 h_i (V_i - V_{\text{Nai}}), \\ \frac{dm_i}{dt} &= \alpha_m(V_i)(1 - m_i) - \beta_m(V_i)m_i, \\ \frac{dh_i}{dt} &= \alpha_h(V_i)(1 - h_i) - \beta_h(V_i)h_i, \end{aligned}$$

где максимальная электрическая проводимость натриевого канала  $\bar{g}_{\text{Na}} = 1.0$  мкСм, равновесный потенциал (потенциал реверсии) натриевого канала  $\bar{V}_{\text{Na}} = 50.0$  мВ. Для  $\bar{g}_{\text{Na}}$  и  $\bar{V}_{\text{Na}}$  указаны средние величины, так как далее в работе в том числе будет описан эксперимент с расстройкой по этим параметрам.  $m, h$  – воротные переменные натриевого канала,  $\alpha$  и  $\beta$  – функции открытия и закрытия воротных переменных (переходов):

$$\begin{aligned} \alpha_m(V_i) &= \frac{-0.32(V_i + 51.9)}{\exp(-(V_i + 51.9)/4) - 1}, & \beta_m(V_i) &= \frac{0.28(V_i + 24.9)}{\exp((V_i + 24.9)/5) - 1}, \\ \alpha_h(V_i) &= 0.128 \exp(-(V_i + 48)/18), & \beta_h(V_i) &= \frac{4}{1 + \exp(-(V_i + 25)/5)}. \end{aligned}$$

$I_{\text{Ca}}$  – кальциевый ток:

$$\begin{aligned} I_{\text{Cai}} &= g_{\text{Cai}} s_i^2 r_i (V_i - V_{\text{Cai}}), \\ \frac{ds_i}{dt} &= \alpha_s(V_i)(1 - s_i) - \beta_s(V_i)s_i, \\ \frac{dr_i}{dt} &= \alpha_r(V_i)(1 - r_i) - \beta_r(V_i)r_i, \end{aligned}$$

где  $\bar{g}_{\text{Ca}} = 0.13$  мкСм,  $\bar{V}_{\text{Ca}} = 75.0$  мВ,  $s, r$  – воротные переменные натриевого канала, функции переходов:

$$\begin{aligned} \alpha_s(V_i) &= \frac{0.2}{1 + \exp(-0.072V_i)}, & \beta_s(V_i) &= \frac{0.0025(V_i + 13.9)}{\exp((V_i + 13.9)/5) - 1}, \\ \alpha_r(V_i) &= \begin{cases} \frac{\exp(-(V_i + 65)/20)}{1600} & (V_i > -65), \\ 0.000625 & (V_i \leq -65), \end{cases} \\ \beta_r(V_i) &= \begin{cases} \frac{0.005 - 8\alpha_r(V_i)}{8} & (V_i > -65), \\ 0 & (V_i \leq -65), \end{cases} \end{aligned}$$

$I_{Ca(low)}$  — низкопороговый кальциевый ток:

$$I_{Ca(low)_i} = g_{Ca(low)_i} s_{Ca(low)_i}^2 r_{Ca(low)_i} (V_i - V_{Ca_i}),$$

$$\frac{ds_{Ca(low)_i}}{dt} = \alpha_{s_{Ca(low)}}(V_i) (1 - s_{Ca(low)_i}) - \beta_{s_{Ca(low)}}(V_i) s_{Ca(low)_i},$$

$$\frac{dr_{Ca(low)_i}}{dt} = \alpha_{r_{Ca(low)}}(V_i) (1 - r_{Ca(low)_i}) - \beta_{r_{Ca(low)}}(V_i) r_{Ca(low)_i},$$

где  $\bar{g}_{Ca(low)} = 0.03$  мкСм,  $\bar{V}_{Ca} = 75.0$  мВ,  $s_{Ca(low)}, r_{Ca(low)}$  — воротные переменные, функции переходов:

$$\alpha_{s_{Ca(low)}}(V_i) = \frac{1.6}{1 + \exp(-0.072(V_i + 40))}, \quad \beta_{s_{Ca(low)}}(V_i) = \frac{0.02(V_i + 53.9)}{\exp((V_i + 53.9)/5) - 1},$$

$$\alpha_{r_{Ca(low)}}(V_i) = \begin{cases} \frac{\exp(-(V_i + 105)/20)}{200}, & (V_i > -105) \\ 0.005, & (V_i \leq -105) \end{cases}$$

$$\beta_{r_{Ca(low)}}(V_i) = \begin{cases} 0.005 - \alpha_{r_{Ca(low)}}(V_i), & (V_i > -105) \\ 0, & (V_i \leq -105) \end{cases}$$

$I_{K(DR)}$  — быстрый калиевый ток задержанного выпрямления:

$$I_{K(DR)_i} = g_{K(DR)_i} n_i (V_i - V_{K_i}),$$

$$\frac{dn_i}{dt} = \alpha_n(V_i)(1 - n_i) - \beta_n(V_i)n_i,$$

где  $\bar{g}_{K(DR)} = 0.08$  мкСм,  $\bar{V}_K = -80$  мВ,  $n$  — воротная переменная, константы переходов:

$$\alpha_n(V_i) = \frac{-0.016(V_i + 29.9)}{\exp(-(V_i + 29.9)/5) - 1}, \quad \beta_n(V_i) = 0.25 \exp(-(V_i + 45)/40).$$

$I_{K(A)}$  — калиевый ток А-типа:

$$I_{K(A)_i} = g_{K(A)_i} a_i b_i (V_i - V_{K_i}),$$

$$\frac{da_i}{dt} = \alpha_a(V_i)(1 - a_i) - \beta_a(V_i)a_i,$$

$$\frac{db_i}{dt} = \alpha_b(V_i)(1 - b_i) - \beta_b(V_i)b_i,$$

где  $\bar{g}_{K(A)} = 0.17$  мкСм,  $\bar{V}_K = -80$  мВ,  $a, b$  — воротные переменные, константы переходов:

$$\alpha_a(V_i) = \frac{-0.02(V_i + 51.9)}{\exp(-(V_i + 51.9)/10) - 1}, \quad \beta_a(V_i) = \frac{0.0175(V_i + 24.9)}{\exp((V_i + 24.9)/10) - 1},$$

$$\alpha_b(V_i) = 0.0016 \exp(-(V_i + 78)/18), \quad \beta_b(V_i) = \frac{0.05}{1 + \exp(-(V_i + 54.9)/5)}.$$

$I_{K(\text{АНР})}$  — медленный кальций-зависимый калиевый ток после гиперполяризации:

$$I_{K(\text{АНР})i} = g_{K(\text{АНР})i} q_i (V_i - V_{K_i}),$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \alpha_q(V_i)(1 - q_i) - \beta_q(V_i)q_i,$$

где  $\bar{g}_{K(\text{АНР})} = 0.07$  мкСм,  $\bar{V}_K = -80$  мВ,  $q$  — воротная переменная, функции переходов:

$$\alpha_q(V_i) = \begin{cases} 0, & ((\chi_i - 140) < 0) \\ 0.00002(\chi_i - 140), & (0 \leq (\chi_i - 140) < 500) \\ 0.01, & (500 \leq (\chi_i - 140)) \end{cases}$$

$$\beta_q(V_i) = 0.001.$$

$I_{K(\text{С})}$  — быстрый кальций-зависимый калиевый ток:

$$I_{K(\text{С})i} = g_{K(\text{С})i} \min(1, \chi_i/250) c_i (V_i - V_{K_i}),$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \alpha_c(V_i)(1 - c_i) - \beta_c(V_i)c_i,$$

$$\frac{d\chi_i}{dt} = -\phi I_{\text{Ca}i} - \beta_\chi \chi_i,$$

где  $\bar{g}_{K(\text{С})} = 0.366$  мкСм,  $\bar{V}_K = -80$  мВ,  $\phi = 50$  мс<sup>-1</sup>,  $\beta_\chi = 0.075$  мс<sup>-1</sup>,  $c, \chi$  — воротные переменные, константы переходов:

$$\alpha_c(V_i) = \begin{cases} \frac{1}{18.975} \exp(((V_i + 55)/11) - ((V_i + 58.5)/27)) & (V_i \leq -15), \\ 2 \exp(-(V_i + 58.5)/27) & (V_i > -15), \end{cases}$$

$$\beta_c(V_i) = \begin{cases} 2 \exp(-(V_i + 58.5)/27) - \alpha_c(V_i) & (V_i \leq -15), \\ 0 & (V_i > -15), \end{cases}$$

$I_L$  — ток утечки:

$$I_{L_i} = g_{L_i}(V_i - V_{L_i}),$$

где проводимость утечки  $\bar{g}_L$  менялась в зависимости от положения нейрона в сети, равновесный потенциал утечки  $\bar{V}_L = -65$  мВ.

$I_{\text{syn}}$  — синаптический ток:

$$I_{\text{syn}_i} = g_{\text{syn}_i}(V_i - V_{\text{syn}_i}) \sum p_j, \quad (2)$$

где проводимость возбуждающего синапса  $\bar{g}_{\text{syn}}$  изменялась в ходе экспериментов, равновесный потенциал возбуждающего синапса  $\bar{V}_{\text{syn}} = 0$  мВ,  $p_j$  — воротные переменные, относящиеся к пресинаптическим нейронам:

$$\frac{dp_j}{dt} = \alpha_p \frac{(1 - p_j)}{1 + \exp(-(V_j - 2)/5)} - \beta_p p_j, \quad (3)$$

константы переходов  $\alpha_p = 1.1$  мс<sup>-1</sup> и  $\beta_p = 0.19$  мс<sup>-1</sup>,  $V_j$  — потенциал пресинаптического нейрона.

**1.2. Модель сети.** Нейроны были замкнуты в кольцо, связаны однонаправленной возбуждающей связью (рис. 1). Количество элементов менялось от 2 до 35. Параметры нейронов кольца были установлены таким образом, что одиночный элемент находился в неколебательном подпороговом режиме. Стартующий нейрон №0 находился в колебательном режиме. Со стартующего нейрона №0 на нейрон кольца №1 подавалось кратковременное воздействие (длительность воздействия  $w$  менялась в диапазоне  $[100; 500]$  мс).

Математическая модель синапса (2, 3) была взята из [9]. В отличие от ранее опубликованных работ [8, 10] дополнительного временного запаздывания в формулу синапса не вносилось. Вместо этого использовалась собственная инерционность модели. На рис. 2 показаны временные реализации потенциала на мембране одного из нейронов кольца  $V_1$  и значений воротной переменной  $p$  того же нейрона (она пропорциональна потенциалу на аксоне этого нейрона), а также потенциал на мембране следующего нейрона в кольце  $V_2$ . Показано одно колебание после пропуска 6 с от начала эксперимента, то есть после пропуска всех переходных процессов и установления колебательного режима в кольце. Результаты приведены при значении синаптической проводимости  $\bar{g}_{syn} = 2.5 \cdot 10^{-3}$  мкСм. Исследование прохождения сигнала через синапс при других значениях  $\bar{g}_{syn}$  позволило определить, что чем больше значение синаптической проводимости, тем меньше запаздывание между временными реализациями двух соседних нейронов.

Здесь и далее система уравнений как для отдельного нейрона, так и для кольца решалась методом Рунге–Кутты порядка 5(4), при котором шаги делаются в соответствии с формулой 5-го порядка, но ошибка контролируется по 4-ому порядку точности. Для этого использовалась реализация из пакета `scipy.integrate` [14]. Сопоставление с результатами интегрирования системы уравнений методом Адамса 8-го порядка точности показало незначительные расхождения в длине переходного процесса, не влияющие на характеристики установившегося режима.

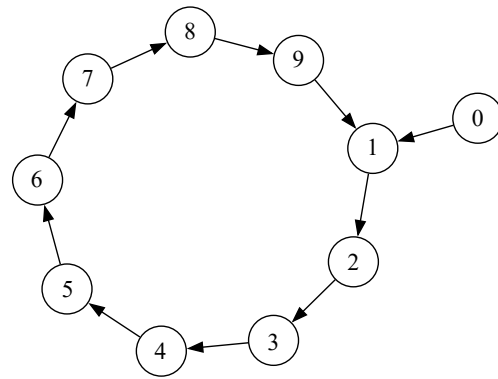


Рис. 1. Структура рассматриваемой сети из нейронов гиппокампа. Нейрон №0 используется только для запуска колебательной активности и в генерации ритма непосредственно не участвует

Fig. 1. The structure of the considered network of hippocampal neurons. Neuron No.0 is used only to trigger oscillatory activity and is not directly involved in rhythm generation

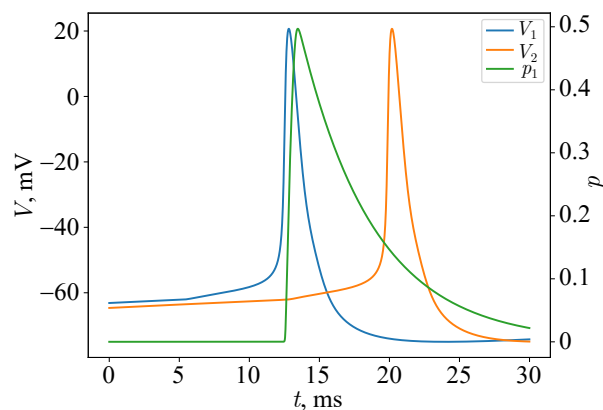


Рис. 2. Инерционность синапса. Синей линией показано изменение значения потенциала на мембране пресинаптического нейрона от времени  $V_1(t)$ , зелёной линией — зависимость воротной переменной пресинаптического нейрона от времени  $p(t)$ , оранжевой линией — изменение значения потенциала на мембране постсинаптического нейрона от времени  $V_2(t)$ ,  $\bar{g}_{syn} = 2.5 \cdot 10^{-3}$  мкСм,  $w = 100$  мс (цвет онлайн)

Fig. 2. Synapse inertia. The blue line shows the change in the value of the potential on the presynaptic neuron membrane on time  $V_1(t)$ . The green line shows the dependence of the gate variable of the presynaptic neuron on time  $p(t)$ . The orange line shows the change in the value of the potential on the postsynaptic neuron membrane on time  $V_2(t)$ ,  $\bar{g}_{syn} = 2.5 \cdot 10^{-3}$   $\mu$ S,  $w = 100$  ms (color online)

## 2. Результаты

**2.1. Динамика изолированного нейрона.** Для диагностики пределов существования колебательного и возбудимого режимов был проведён частичный бифуркационный анализ модели по параметру проводимости утечки  $g_L$ , поскольку этот параметр наиболее явно отвечает за потери в системе. Для этого была построена зависимость частоты и амплитуды колебаний от проводимости утечки  $g_L$  для одного изолированного нейрона (рис. 3) для двух различных начальных условий по переменной  $V$ : близкого к равновесному потенциалу  $V(t=0) = -62$  мВ и вызванного внешним импульсом  $V(t=0) = 20$  мВ. Начальные условия для всех остальных переменных были выставлены соответствующими устойчивому положению равновесия, наблюдаемому при  $g_L = 0.040$  мкСм. Из рис. 3, *b* видно, что на отрезке  $g_L \in [0.0376; 0.0404]$  мкСм имеется бистабильность: устойчивая точка, достигаемая при  $V(t=0) = -62$  мВ, сосуществует с колебательным режимом, который может быть получен при  $V(t=0) = 20$  мВ. При этом

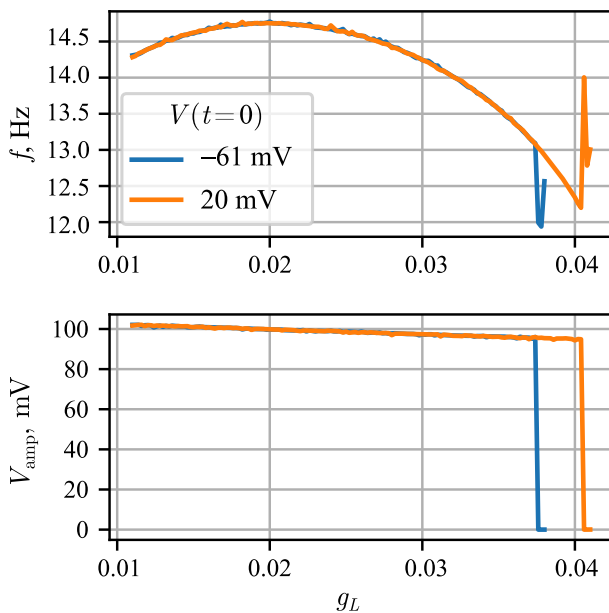


Рис. 3. Зависимость основной частоты и амплитуды колебаний при изменении проводимости утечки  $g_L$  для одного изолированного нейрона (цвет онлайн)

Fig. 3. The dependence of the main oscillation frequency and amplitude with a change in the leakage conductance  $g_L$  for one uncoupled node (color online)

**2.2. Сеть из однородных элементов.** Сначала рассматривалась сеть, состоящая из идентичных нейронов, то есть без расстройки по параметрам. Уравнения модели решались при разных значениях проводимости синапса  $\bar{g}_{syn}$ , что в некотором роде можно считать аналогом коэффициента связи между элементами сети  $k$  из работы [8]. Параметр  $\bar{g}_{syn}$  менялся в диапазоне  $[2 \cdot 10^{-3}; 4 \cdot 10^{-3}]$  мкСм.

На рис. 4, *a* показана зависимость частоты колебаний в кольце  $f$  от количества нейронов в сети  $D$  при разных значениях синаптической проводимости  $\bar{g}_{syn}$  для проводимости утечки  $g_L = 0.040$  мкСм. При малом  $D$  наблюдается квазисинхронный режим (см. рис. 5, *a*), частота которого не зависит от количества нейронов в сети и силы связи. Этот режим — прямой наследник цикла в отдельном нейроне, сосуществующего с устойчивым фокусом, он имеет ту же частоту

сам колебательный режим является наследником (амплитуда и частота меняются непрерывно при уменьшении  $g_L$ ) колебательного режима, существующего при меньших значениях  $g_L$ . Такая ситуация может быть объяснена тем, что при  $0.0374 < g_L < 0.0376$  происходит субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, в результате чего из неустойчивого фокуса рождается неустойчивый цикл, а фокус приобретает устойчивость. Далее при  $g_L \approx 0.0406$  устойчивый цикл исчезает, причём его амплитуда перед этим конечна, что может быть объяснено его слиянием с неустойчивым циклом.

В ранее опубликованных работах [8, 10] генерация в кольце всегда рассматривалась при параметрах отдельного нейрона, соответствующих возбудимому режиму (устойчивому фокусу). Но наличие бистабильности на отрезке  $g_L \in [0.0376; 0.0404]$  мкСм подтолкнуло нас к тому, чтобы рассматривать систему при двух разных  $g_L$ : 0.040 мкСм и 0.043 мкСм, чтобы определить, насколько сосуществующий с устойчивым фокусом предельный цикл может исказить динамику в кольце.



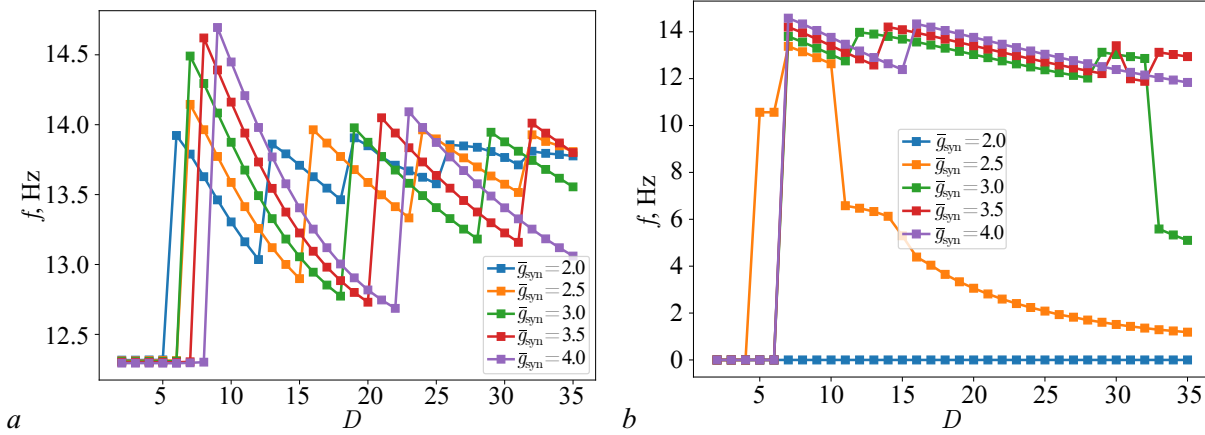


Рис. 4. Зависимость частоты колебаний в кольце  $f$  от количества нейронов в сети  $D$  при разных значениях синаптической проводимости  $\bar{g}_{\text{syn}}$ .  $w = 100$  мс. Проводимость утечки:  $a - \bar{g}_L = 0.040$  мкСм,  $b - \bar{g}_L = 0.043$  мкСм (цвет онлайн)

Fig. 4. The dependence of the oscillation frequency in the ring  $f$  on the number of neurons in the network  $D$  at different values of synaptic conductance  $\bar{g}_{\text{syn}}$ .  $w = 100$  ms. Leakage conductance:  $a - \bar{g}_L = 0.040 \mu S$ ,  $b - \bar{g}_L = 0.043 \mu S$  (color online)

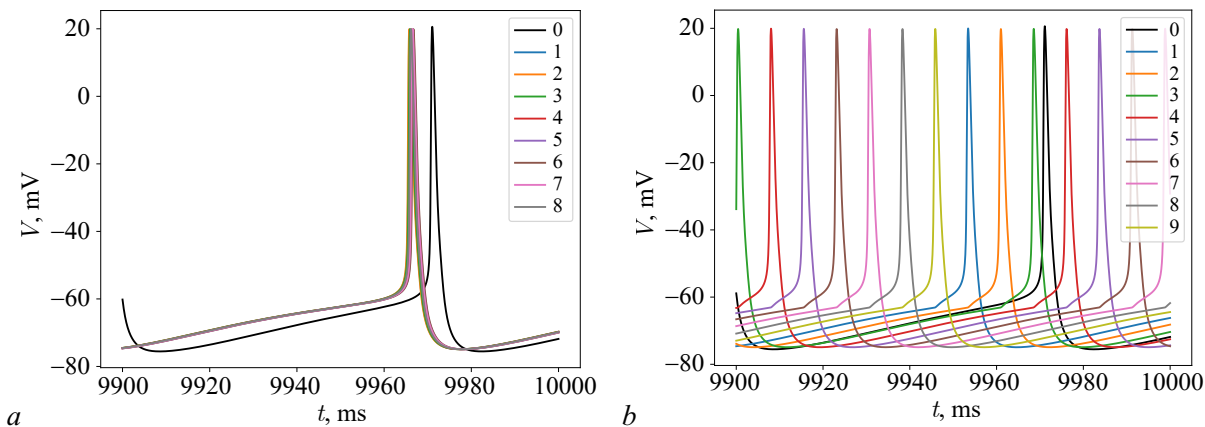


Рис. 5. Временные реализации при  $\bar{g}_{\text{syn}} = 4.0 \cdot 10^{-3}$  мкСм,  $w = 100$  мс.  $a -$  количество нейронов в кольце  $D = 8$ .  $b -$  количество нейронов в кольце  $D = 9$  (цвет онлайн)

Fig. 5. Time series at  $\bar{g}_{\text{syn}} = 4.0 \cdot 10^{-3} \mu S$ ,  $w = 100$  ms.  $a -$  the number of neurons in the ring  $D = 8$ .  $b -$  the number of neurons in the ring  $D = 9$  (color online)

и амплитуду. Наблюдаемый при этом временной лаг между нейронами в кольце обусловлен конечной инерционностью синапса. Нейроны в формируемой пачке как бы выстраиваются один за другим, причём впереди по времени идёт тот нейрон, на который пришёл возбуждающий импульс, а затем все прочие по порядку следования в кольце с малым временным лагом. Квазисинхронный режим, близкий к режиму полной синхронизации, разрушается с увеличением  $D$ . Чем меньше синаптическая проводимость  $\bar{g}_{\text{syn}}$ , тем меньше область его существования: для  $\bar{g}_{\text{syn}} = 2$  он исчезает уже при  $D = 6$ , в то время как для  $\bar{g}_{\text{syn}} = 4$  — только при  $D = 9$ . Это наблюдение естественным образом согласуется с общей теорией [15], поскольку синаптическая проводимость у рассматриваемой модели играет роль силы связи.

При больших значениях  $D$  наблюдается семейство режимов, качественно сходных с режимами, наблюдавшимися в работах [8, 10] (см. рис. 5, *b*). В них все осцилляторы сдвинуты по фазе один относительно другого на равные промежутки таким образом, что суммарный сдвиг по кольцу составляет  $2\pi$ , то есть сумма сдвигов по времени соответствует периоду колебаний. Частота колебаний падает с ростом числа осцилляторов. Однако такие режимы оказываются устойчивы только в узком диапазоне частот. Видно, что с ростом количества нейронов частота вначале нелинейно падает (кривая для  $\bar{g}_{\text{syn}} = 4$  близка к гиперболе), затем резко скачком возрастает и опять начинает падать. Причём чем меньше  $\bar{g}_{\text{syn}}$ , то есть чем ближе нейроны к колебательному режиму, тем чаще (по оси абсцисс) происходят скачки. Ранее скачки в зависимости  $f(D)$  наблюдались в кольце из нейронов ФитцХью–Нагумо в работе [10], но там возрастание частоты было более значительным: при первом скачке она поднималась примерно вдвое, что соответствовало режиму, когда по кольцу одновременно распространяются два импульса в противофазе. В данной системе импульс остаётся один.

Для проводимости утечки  $\bar{g}_L = 0.043$  мкСм, при которой цикл для отдельного нейрона уже разрушился, зависимости  $f(D)$  имеют существенные отличия. Для  $\bar{g}_{\text{syn}} = 2$  колебания вообще не возбуждаются. Вероятно, сила связей в кольце недостаточна, чтобы компенсировать затухание. При  $\bar{g}_{\text{syn}} \geq 3$  наблюдаются режимы, качественно похожие на то, что имело место при  $\bar{g}_L = 0.04$  мкСм, имеются и скачки частоты. Наиболее интересная динамика наблюдается при  $\bar{g}_{\text{syn}} = 2.5$ , начиная с  $D \geq 11$ . При переходе от  $D = 10$  к  $D = 11$  частота резко падает с 12.5 до 6.5 Гц и продолжает далее снижаться с ростом  $D$  до менее чем 2 Гц при  $D > 25$ . Аналогичные изменения  $f(D)$  наблюдаются и для  $\bar{g}_{\text{syn}} = 3$ , но при очень большом числе нейронов в кольце: начиная с  $D = 33$ . Таким образом, относительно небольшое уменьшение синаптической проводимости между значениями 3 и 2 мкСм могут приводить сначала к резкому падению частоты генерации, а потом и к гибели колебаний. Именно такое поведение фиксировалось ранее в некоторых нейрофизиологических экспериментах [16, 17].

**2.3. Устойчивость системы к изменениям архитектуры связей.** Вопрос о природе режимов, возникающих в кольце, нельзя считать решённым без исследования того, как на возбуждение влияет изменение структуры связей, в первую очередь отключение и прерывание некоторых из них.

Первый вопрос, который был поставлен: что будет, если после воздействия все связи разорвать (занулить  $g_{\text{syn}}$ )? Особенно важно понимать это в бистабильном режиме, например, при  $g_L = 0.04$ . В приведённом на рис. 6, *a* примере сверху показано (временной ряд сразу после воздействия), что за время в 100 мс воздействия успевают последовательно возбудиться 7 нейронов, после чего воздействие отключается, как и связи между ними. Видно, что при этом оставшиеся три нейрона не возбуждаются, а возбуждённые нейроны перестраиваются в режим собственных колебаний, который из-за отличия по параметру  $g_L$  от стартового нейрона (обозначен чёрным) имеет другую, более низкую частоту (см. рис. 3, *b*), что хорошо видно на рис. 6, *a* снизу (ряд после длинного переходного процесса), где чёрный импульс нулевого нейрона ( $g_L = 0.35$ ) сначала следует за сиреневым импульсом седьмого нейрона, а потом уже обгоняет его (в середине графика при  $t \approx 9.9$  ms).

Если при прерывании воздействия разорвать не все связи, а только одну (между 4-ым и 5-ым нейронами на рис. 6, *b*), кольцо превращается в цепочку. Поскольку возбуждённые внешним воздействием нейроны успевают привести в колебательный режим оставшиеся, в результате формируется пачка импульсов, где первым идёт нейрон, перед которым разорвана связь, а последним — его сосед, после которого связь разорвана. При этом сама частота колебаний по-прежнему наследуется от предельного цикла отдельного нейрона, но связь в цепочке приводит к синхронизации по фазе с фиксированным сдвигом, обусловленным инерционностью в синапсе.

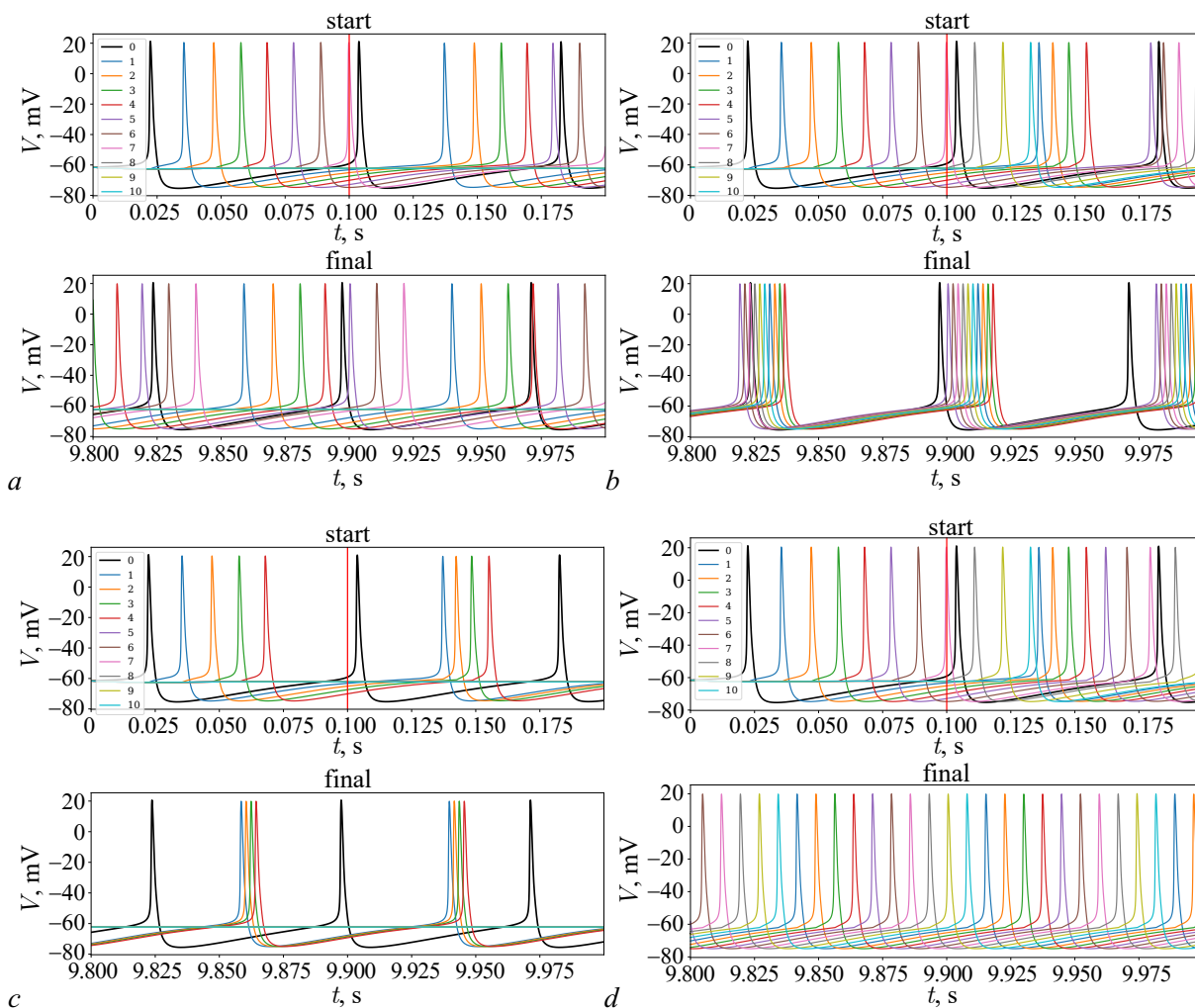


Рис. 6. Временные реализации колебаний в кольце из 10 нейронов сразу после возбуждения колебаний (верхний рисунок в каждом фрагменте) и через 10 с (установившийся режим — нижний рисунок) (цвет онлайн)

Fig. 6. Time series of oscillations in a ring of 10 neurons immediately after the excitation of oscillations (upper figure in each fragment) and after 10 seconds (steady-state mode — lower figure in each fragment) (color online)

Если же связь между нейронами была разорвана изначально (см. рис. 6, c), возбудится только часть цепочки до разрыва, но все возбуждённые нейроны по-прежнему сгруппируются ровно с тем же запаздыванием, что и на рис. 6, b.

Наконец, если все связи в кольце сохраняются, в нём выстраивается режим, частота которого зависит как от собственных параметров отдельного нейрона, так и от количества нейронов в кольце. Это хорошо видно на рис. 6, d, что вначале, сразу после возбуждения, расстояние по времени между спайками соседних нейронов больше, чем в установившемся режиме. При этом временной сдвиг между десятым и первым нейронами оказывается слишком малым, что и приводит к дальнейшей подстройке колебаний.

**2.4. Сеть с расстройкой по параметрам.** Чтобы понять пределы устойчивости обнаруженных в кольце колебательных режимов, была введена небольшая расстройка по всем параметрам, кроме  $C$  (произвольное изменение этого параметра невозможно, поскольку фактически ведёт к перенормировке времени в первом уравнении системы (1)),  $g_L$  (всегда использовалось значение

$g_L = 0.043$  мкСм) и  $V_0 = 0$  — порядка 2% по абсолютной величине. Расстройка вводилась случайно. В действительности не ясно, насколько такая расстройка соответствует распределению у реальных клеток мозга. Основные результаты по изучению разброса значений параметров для нейронов гиппокампа, в том числе поля СА3, известны в первую очередь для морфологических, а не электрофизиологических параметров [18]. Тем не менее введение расстройки важно для понимания того, не являются ли наблюдаемые режимы вырожденными.

Значения параметров для нейронов с расстройками генерировались случайно в заданном диапазоне  $\pm 2\%$  по каждому из параметров  $g_{Na}$ ,  $g_{Ca}$ ,  $g_{Ca(low)}$ ,  $g_{K(DR)}$ ,  $g_{K(A)}$ ,  $g_{K(ANP)}$ ,  $g_{K(C)}$ ,  $V_{Na}$ ,  $V_{Ca}$ ,  $V_K$ ,  $V_{syn}$ ,  $V_L$ ,  $\phi$  и  $\beta_\chi$ . Всего было сгенерировано 600 наборов параметров. Из них были отобраны 35 нейронов, демонстрировавших бистабильный режим (несмотря на то, что исходно значение  $g_L = 0.043$  мкСм соответствовало режиму с одним аттрактором), и 35 нейронов, демонстрировавших возбудимый режим с единственным аттрактором в виде устойчивого фокуса. Для тех и других были построены зависимости частоты генерации  $f$  от числа нейронов в кольце  $D$  при различных значениях синаптической проводимости  $g_{syn}$  по аналогии с рис. 4 — см. рис. 7.

Сопоставление рис. 4, а и рис. 7, а позволяет сделать вывод, что для случая нейронов, находившихся в бистабильном режиме, введение расстройки по параметрам качественно ни на что не влияет: по-прежнему имеется минимальное значение числа нейронов, в данном случае  $D = 8$ , при котором режим квазисинхронных колебаний разрушается, а далее частота зависит от числа элементов в сети примерно по гиперболе с перескоками, обусловленными тем, что общий частотный диапазон должен быть в пределах 13...14.7 Гц. Для возбудимых нейронов (см. рис. 4, б) зависимость выглядит сложнее. Никакого резкого падения частоты, как на рис. 4, б для  $g_{syn} = 2.5$ , на нейронах с расстройкой не наблюдается. Вместе с тем, если понизить  $g_{syn}$ , то при значениях  $2.2 \leq g_{syn} \leq 2.4$  мкСм при относительно больших  $D$  (от 24 для  $g_{syn} = 2.2$  мкСм до 27 для  $g_{syn} = 2.4$  мкСм) наблюдается резкое падение частоты до 2 Гц и менее,

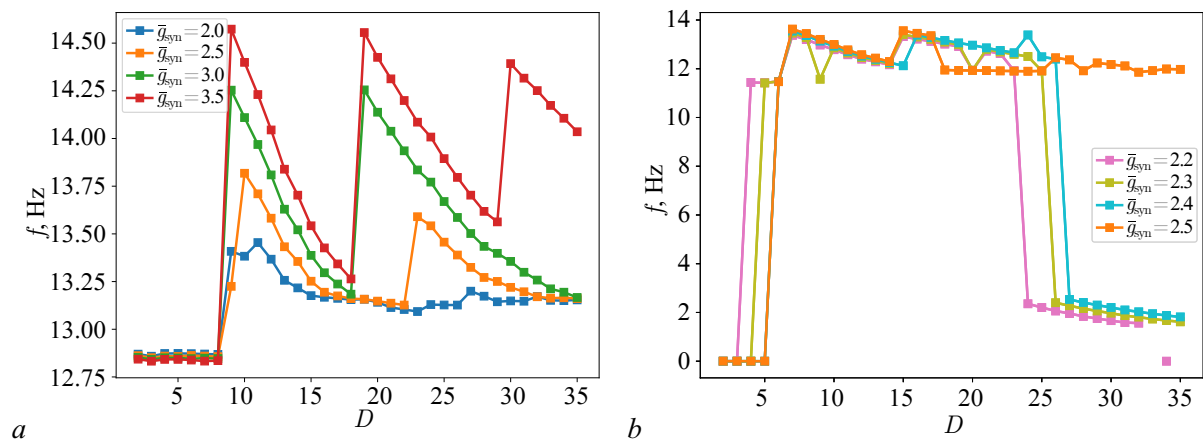


Рис. 7. Зависимость частоты колебаний в кольце  $f$  от количества нейронов в сети  $D$  при разных значениях синаптической проводимости  $\bar{g}_{syn}$  для нейронов, расстроенных по параметрам.  $w = 100$  мс. Проводимость утечки:  $g_L = 0.043$  мкСм. Фрагмент (а) построен для нейронов, находившихся в бистабильном режиме, фрагмент (б) построен для нейронов, находившихся в чисто возбудимом режиме с единственным аттрактором в виде устойчивого фокуса (цвет онлайн)

Fig. 7. The dependence of the oscillation frequency in the ring  $f$  on the number of neurons in the network  $D$  at different values of synaptic conductance  $g_{syn}$ .  $w = 100$  ms. Leakage conductance:  $g_L = 0.043$   $\mu$ S. Subplot (a) was constructed for the ring composed from bistable neurons, subplot (b) was constructed for the ring of excitable neurons (the only attractor in the form of stable focus was available) (color online)

как и для случая идентичных нейронов, но при большей синаптической проводимости. Такое поведение зависимости  $f(D)$  при различных  $g_{\text{syn}}$  указывает на то, что неидентичность нейронов приводит к уменьшению области существования искомого режима и необходимости для его достижения уменьшать синаптическую проводимость, то есть в иных терминах силу связи. Тем не менее режим медленных колебаний, частота которых определяется исключительно числом осцилляторов в сети и проводимостью связи и не имеет отношения к частотам автономных колебаний нейрона, оказывается структурно устойчив даже при вариации 14 параметров. Это позволяет надеяться, что резкое переключение частоты колебаний в кольце нейронов гиппокампа, возникающее при относительно небольшом изменении синаптической проводимости (в нашем случае между значениями 2.4 мкСм и 2.5 мкСм) является физиологичным и действительно может определять переходы между различными стадиями лимбического эпилептического разряда.

### Заключение

Математическое моделирование сигналов мозга при лимбической (височной) эпилепсии — сложная задача в первую очередь потому, что сами по себе эти сигналы могут быть очень различны. Наиболее известны результаты применения макроскопического подхода, когда эпилептическая активность описывается в целом, а отдельные нейроны не моделируются [19]. При том, что полученные в работе [19] временные ряды весьма неплохо соответствуют различным типам эпилептиформной активности при фокальных приступах, всё же такой подход является скорее феноменологическим, поскольку игнорирует главную причину возникновения фокальной эпилепсии — наличие малых нейронных ансамблей (контуров), имеющих специфическую патологическую структуру [20]. Существуют отдельные попытки рассмотрения лимбической эпилепсии с точки зрения мезомасштабных моделей [21], в том числе с точки зрения возможного контроля поведения (предотвращение или купирования разрядов) [22]. Однако достигнутые к настоящему моменту результаты носят сильно предварительный характер в первую очередь из-за сложности моделируемого явления и многообразия типов активности при лимбической эпилепсии.

В данной работе мы следуем ранее предложенному нами подходу [8, 10] — разбить весь процесс моделирования на части. В первую очередь нужно смоделировать эпилептический фокус, который в большинстве случаев находится в гиппокампе [23]. Это может быть очень малая сеть буквально из нескольких или нескольких десятков нейронов. Его единственная функция — задавать основной ритм патологической активности. При этом наличие и распространённость дальних связей в гиппокампе, в том числе в его формации СА3 [24], предполагает, что такой контур может сформироваться не в каком-то конкретном месте, а быть частично распределён по всему гиппокамп, что отвечает представлениям о повторном возникновении эпилепсии после удаления эпилептического фокуса [25].

Ранее в работах [8, 10] нами была предложена относительно простая математическая модель генератора основной частоты эпилептиформной активности, представляющего собою кольцо нейронов с односторонними связями. Численное и радиотехническое моделирование показало, что такой генератор может эффективно перестраивать свою частоту в зависимости от числа элементов в кольце и времени запаздывания в связях. При этом в качестве моделей отдельных нейронов были использованы относительно простые уравнения ФитцХью–Нагумо в [10] или Ходжкина–Хаксли в оригинальном виде в [8], то есть модели, не отражающие специфику нейронов гиппокампа. При мезомасштабном моделировании свойства отдельных нейронов не так важны и определяющим фактором является сетевая структура, поскольку каждый узел в сети в реальности представляет большое число сходных по параметрам узлов [26, 27]. Напротив, в случае моделирования эпилептического фокуса в гиппокампе мы реально имеем дело с микромасштабным моделированием,



то есть с соотношением числа модельных и реальных нейронов, близким к 1:1. При таком соотношении выбор модели для отдельного нейрона становится ключевым фактором. Поэтому в данной работе была поставлена цель определить, какие свойства предложенной ранее кольцевой структуры могут быть эффективно повторены с использованием моделей, воспроизводящих все основные токи в пирамидах поля СА3 гиппокампа. Одна из ключевых особенностей такого моделирования — отказ от явного учёта запаздывания в синапсе и переход к уравнениям для синаптической переменной, где роль запаздывания выполняет инерционность.

Чтобы динамика сети определялась главным образом числом элементов в кольце и параметрами связи, нужно, чтобы отдельные нейроны находились в возбудимом режиме. Иначе собственная частота генерации отдельного нейрона будет сильно ограничивать возможности перестройки по частоте в кольцевом генераторе. Поэтому был проведён бифуркационный анализ для отдельного нейрона по параметру проводимости утечки  $g_L$ , который показал, что при переходе от колебательного режима к возбудимому происходят две бифуркации: сначала субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, в результате которой из неустойчивого фокуса рождается цикл, а сам фокус становится устойчивым (в системе наблюдаются бистабильность и жёсткое возбуждение колебаний), а затем — бифуркация слияния устойчивого и неустойчивого циклов, в результате чего устойчивый фокус остаётся единственным аттрактором.

Численное исследование зависимости частоты колебаний в кольце от количества нейронов в ней в бистабильном режиме показало, что частота может меняться в относительно узком диапазоне 12.7...14.8 Гц. Это связано с существованием колебательного аттрактора для отдельного нейрона. Этот режим остаётся стабильным и при расстройке нейронов кольца по параметрам на величину порядка 2% от их абсолютного значения. Однако такое поведение может быть интересно только для моделирования относительно плавного изменения частоты на некоторых стадиях эпилептического приступа. Более интересным является режим, достигаемый при некоторых значениях синаптической проводимости для моделей, когда отдельный нейрон имеет единственный аттрактор. Он характеризуется резким падением частоты с увеличением числа элементов в кольце выше определённого уровня так, что можно достигнуть частот в 2 Гц и ниже, характерных для фазы депрессии после разряда. В таком режиме колебаний период действительно почти линейно зависит от числа нейронов, как это было в моделях, предложенных ранее в [8, 10]. При этом становится ясно, что наиболее перспективный с точки зрения физиологии механизм вариации частоты колебаний заключается не в изменении числа нейронов в кольце или времени запаздывания в синапсе, а в изменении синаптической проводимости  $g_{syn}$ , которое может приводить как к резкому падению или росту частоты генерации в несколько раз (например, с 14 Гц до 2 Гц), так и к гибели колебаний (что может соответствовать прекращению разряда) при дальнейшем падении  $g_{syn}$ .

## Список литературы

1. Scheffer I. E., Berkovic S., Capovilla G., Connolly M. B., French J., Guilhoto L., Hirsch E., Jain S., Mathern G. W., Moshé S. L., Nordli D. R., Perucca E., Tomson T., Wiebe S., Zhang Y.-H., Zuberi S. M. ILAE classification of the epilepsies: Position paper of the ILAE Commission for Classification and Terminology // *Epilepsia*. 2017. Vol. 58, no. 4. P. 512–521. DOI: 10.1111/epi.13709.
2. Suffczynski P., Kalitzin S., Lopes Da Silva F. H. Dynamics of non-convulsive epileptic phenomena modeled by a bistable neuronal network // *Neuroscience*. 2004. Vol. 126, no. 2. P. 467–484. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2004.03.014.
3. Medvedeva T. M., Sysoeva M. V., Lüttjohann A., van Luijckelaar G., Sysoev I. V. Dynamical mesoscale model of absence seizures in genetic models // *PLoS ONE*. 2020. Vol. 15, no. 9. P. e239125. DOI: 10.1371/journal.pone.0239125.

4. *Kapustnikov A. A., Sysoeva M. V., Sysoev I. V.* Transient dynamics in a class of mathematical models of epileptic seizures // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2022. Vol. 109. P. 106284. DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.106284.
5. *Taylor P. N., Wang Y., Goodfellow M., Dauwels J., Moeller F., Stephani U., Baier G.* A Computational study of stimulus driven epileptic seizure abatement // *PLoS ONE*. 2014. Vol. 9, no. 12. P. e114316. DOI: 10.1371/journal.pone.0114316.
6. *Bertram E. H.* The functional anatomy of spontaneous seizures in a rat model of chronic limbic epilepsy // *Epilepsia*. 1997. Vol. 38, no. 1. P. 95–105. DOI: 10.1111/j.1528-1157.1997.tb01083.x.
7. *Blumenfeld H., Varghese G. I., Purcaro M. J., Motelow J. E., Enev M., McNally K. A., Levin A. R., Hirsch L. J., Tikofsky R., Zubal I. G., Paige A. L., Spencer S. S.* Cortical and subcortical networks in human secondarily generalized tonic-clonic seizures // *Brain*. 2009. Vol. 132, no. 4. P. 999–1012. DOI: 10.1093/brain/awp028.
8. *Kornilov M. V., Sysoev I. V.* Mathematical model of a main rhythm in limbic seizures // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, no. 5. P. 1233. DOI: 10.3390/math11051233.
9. *Mysin I. E., Kitchigina V. F., Kazanovich Y. B.* Phase relations of theta oscillations in a computer model of the hippocampal CA1 field: Key role of Schaffer collaterals // *Neural Networks*. 2019. Vol. 116. P. 119–138. DOI: 10.1016/j.neunet.2019.04.004.
10. *Егоров Н. М., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Кольцевой генератор нейроподобной активности с перестраиваемой частотой // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2023. Т. 31, № 1. С. 103-120. DOI: 10.18500/0869-6632-003025.
11. *Hodgkin A., Huxley A.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *The Journal of Physiology*. 1952. Vol. 117, no. 4. P. 500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
12. *Tateno K., Hayashi H., Ishizuka S.* Complexity of spatiotemporal activity of a neural network model which depends on the degree of synchronization // *Neural Network*. 1998. Vol. 11, no. 6. P. 985–1003. DOI: 10.1016/s0893-6080(98)00086-0.
13. *Yoshida M., Hayashi H.* Emergence of sequence sensitivity in a hippocampal CA3–CA1 model // *Neural Networks*. 2007. Vol. 20, no. 6. P. 653–667. DOI: 10.1016/j.neunet.2007.05.003.
14. *Virtanen P., Gommers R., Oliphant T. E., Haberland M., Reddy T., Cournapeau D., Burovski E., Peterson P., Weckesser W., Bright J., van der Walt S. J.* SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python // *Nature methods*. 2020. Vol. 17, no. 3. P. 261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
15. *Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 493 с.
16. *Senhadji L., Wendling F.* Epileptic transient detection: wavelets and time-frequency approaches // *Neurophysiologie Clinique/Clinical Neurophysiology*. 2002. Vol. 32, no. 3. P. 175–192. DOI: 10.1016/S0987-7053(02)00304-0.
17. *Sobayo T., Fine A. S., Gunnar E., Kazlauskas C., Nicholls D., Mogul D. J.* Synchrony Dynamics Across Brain Structures in Limbic Epilepsy Vary Between Initiation and Termination Phases of Seizures // *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 2013. Vol. 60, no. 3. P. 821–829. DOI: 10.1109/TBME.2012.2189113.
18. *Scorcioni R., Lazarewicz M. T., Ascoli G. A.* Quantitative morphometry of hippocampal pyramidal cells: differences between anatomical classes and reconstructing laboratories // *Journal of Comparative Neurology*. 2004. Vol. 473, no. 2. P. 177–193. DOI: 10.1002/cne.20067.
19. *Wendling F., Bartolomei F., Bellanger J. J., Chauvel P.* Epileptic fast activity can be explained by a model of impaired GABAergic dendritic inhibition // *European Journal of Neuroscience*. 2002. Vol. 15, no. 9. P. 1499–1508. DOI: 10.1046/j.1460-9568.2002.01985.x.



20. Paz J. T., Huguenard J. R. Microcircuits and their interactions in epilepsy: Is the focus out of focus? // *Nature Neuroscience*. 2015. Vol. 18. P. 351–359. DOI: 10.1038/nn.3950.
21. Myers M. H., Kozma R. Mesoscopic neuron population modeling of normal/epileptic brain dynamics // *Cognitive neurodynamics*. 2018. Vol. 12. P. 211–223. DOI: 10.1007/s11571-017-9468-7.
22. Alexander A., Maroso M., Soltesz I. Organization and control of epileptic circuits in temporal lobe epilepsy // *Progress in brain research*. 2016. Vol. 226. P. 127–154. DOI: 10.1016/bs.pbr.2016.04.007.
23. Toyoda I., Bower M. R., Leyva F., Buckmaster P. S. Early activation of ventral hippocampus and subiculum during spontaneous seizures in a rat model of temporal lobe epilepsy // *Journal of Neuroscience*. 2013. Vol. 33, no. 27. P. 11100–11115. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0472-13.2013.
24. Muller R. U., Stead M., Pach J. The hippocampus as a cognitive graph // *The Journal of general physiology*. 1996. Vol. 107, no. 6. P. 663–694. DOI: 10.1085/jgp.107.6.663.
25. Petrik S., San Antonio-Arce V., Steinhoff B. J., Syrbe S., Bast T., Scheiwe C., Brandt A., Beck J., Schulze-Bonhage A. Epilepsy surgery: Late seizure recurrence after initial complete seizure freedom // *Epilepsia*. 2021. Vol. 62, no. 5. P. 1092–1104. DOI: 10.1111/epi.16893.
26. Medvedeva T. M., Sysoeva M. V., van Luijtelaaar G., Sysoev I. V. Modeling spike-wave discharges by a complex network of neuronal oscillators // *Neural Networks*. 2018. Vol. 98. P. 271–282. DOI: 10.1016/j.neunet.2017.12.002.
27. Gerster M., Berner R., Sawicki J., Zakharova A., Hlinka J., Lehnertz K., Schöll E. FitzHugh–Nagumo oscillators on complex networks mimic epileptic-seizure-related synchronization phenomena // *Chaos*. 2020. Vol. 30. P. 123130. DOI: 10.1063/5.0021420.

## References

1. Scheffer IE, Berkovic S, Capovilla G, Connolly MB, French J, Guilhoto L, Hirsch E, Jain S, Mathern GW, Moshé SL, Nordli DR, Perucca E, Tomson T, Wiebe S, Zhang Y-H, Zuberi SM. ILAE classification of the epilepsies: Position paper of the ILAE Commission for Classification and Terminology. *Epilepsia*. 2017;58(4):512–521. DOI: 10.1111/epi.13709.
2. Suffczynski P, Kalitzin S, Lopes Da Silva FH. Dynamics of non-convulsive epileptic phenomena modeled by a bistable neuronal network. *Neuroscience*. 2004;126(2):467–484. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2004.03.014.
3. Medvedeva TM, Sysoeva MV, Lüttjohann A, van Luijtelaaar G, Sysoev IV. Dynamical mesoscale model of absence seizures in genetic models. *PLoS ONE*. 2020;15(9):e239125. DOI: 10.1371/journal.pone.0239125.
4. Kapustnikov AA, Sysoeva MV, Sysoev IV. Transient dynamics in a class of mathematical models of epileptic seizures. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2022;109:106284. DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.106284.
5. Taylor PN, Wang Y, Goodfellow M, Dauwels J, Moeller F, Stephani U, Baier G. A computational study of stimulus driven epileptic seizure abatement. *PLoS ONE*. 2014;9(12):e114316. DOI: 10.1371/journal.pone.0114316.
6. Bertram EH. The functional anatomy of spontaneous seizures in a rat model of chronic limbic epilepsy. *Epilepsia*. 1997;38(1):95–105. DOI: 10.1111/j.1528-1157.1997.tb01083.x.
7. Blumenfeld H, Varghese GI, Purcaro MJ, Motelow JE, Enev M, McNally KA, Levin AR, Hirsch LJ, Tikofsky R, Zupal IG, Paige AL, Spencer SS. Cortical and subcortical networks in human secondarily generalized tonic-clonic seizures. *Brain*. 2009;132(4):999–1012. DOI: 10.1093/brain/awp028.
8. Kornilov MV, Sysoev IV. Mathematical model of a main rhythm in limbic seizures. *Mathematics*. 2023;11(5):1233. DOI: 10.3390/math11051233.

9. Mysin IE, Kitchigina VF, Kazanovich YB. Phase relations of theta oscillations in a computer model of the hippocampal CA1 field: Key role of Schaffer collaterals. *Neural Networks*. 2019;116: 119–138. DOI: 10.1016/j.neunet.2019.04.004.
10. Egorov NM, Sysoeva MV, Ponomarenko VI, Kornilov MV, Sysoev IV. Ring generator of neuron-like activity with tunable frequency. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(1): 103–120. DOI: 10.18500/0869-6632-003025.
11. Hodgkin A, Huxley A. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*. 1952;117(4):500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
12. Tateno K, Hayashi H, Ishizuka S. Complexity of spatiotemporal activity of a neural network model which depends on the degree of synchronization. *Neural Network*. 1998;11(6):985–1003. DOI: 10.1016/s0893-6080(98)00086-0.
13. Yoshida M, Hayashi H. Emergence of sequence sensitivity in a hippocampal CA3–CA1 model. *Neural Networks*. 2007;20(6):653–667. DOI: 10.1016/j.neunet.2007.05.003.
14. Virtanen P, Gommers R, Oliphant TE, Haberland M, Reddy T, Cournapeau D, Burovski E, Peterson P, Weckesser W, Bright J, van der Walt SJ. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature methods*. 2020;17(3):261–272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
15. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
16. Senhadji L, Wendling F. Epileptic transient detection: wavelets and time-frequency approaches. *Neurophysiologie Clinique/Clinical Neurophysiology*. 2002;32(3):175–192. DOI: 10.1016/S0987-7053(02)00304-0.
17. Sobayo T, Fine AS, Gunnar E, Kazlauskas C, Nicholls D, Mogul DJ. Synchrony Dynamics Across Brain Structures in Limbic Epilepsy Vary Between Initiation and Termination Phases of Seizures. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 2013;60(3):821–829. DOI: 10.1109/TBME.2012.2189113.
18. Scorioni R, Lazarewicz MT, Ascoli GA. Quantitative morphometry of hippocampal pyramidal cells: differences between anatomical classes and reconstructing laboratories. *Journal of Comparative Neurology*. 2004;473(2):177–193. DOI: 10.1002/cne.20067.
19. Wendling F, Bartolomei F, Bellanger JJ, Chauvel P. Epileptic fast activity can be explained by a model of impaired GABAergic dendritic inhibition. *European Journal of Neuroscience*. 2002;15(9):1499–1508. DOI: 10.1046/j.1460-9568.2002.01985.x.
20. Paz JT, Huguenard JR. Microcircuits and their interactions in epilepsy: Is the focus out of focus? *Nature Neuroscience*. 2015;18:351–359. DOI: 10.1038/nn.3950.
21. Myers MH, Kozma R. Mesoscopic neuron population modeling of normal/epileptic brain dynamics. *Cognitive neurodynamics*. 2018;12:211–223. DOI: 10.1007/s11571-017-9468-7.
22. Alexander A, Maroso M, Soltesz I. Organization and control of epileptic circuits in temporal lobe epilepsy. *Progress in brain research*. 2016. Vol. 226. P. 127–154. DOI: 10.1016/bs.pbr.2016.04.007.
23. Toyoda I, Bower MR, Leyva F, Buckmaster PS. Early activation of ventral hippocampus and subiculum during spontaneous seizures in a rat model of temporal lobe epilepsy. *Journal of Neuroscience*. 2013;33(27):11100–11115. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0472-13.2013.
24. Muller RU, Stead M, Pach J. The hippocampus as a cognitive graph. *The Journal of general physiology*. 1996;107(6):663–694. DOI: 10.1085/jgp.107.6.663.
25. Petrik S, San Antonio-Arce V, Steinhoff BJ, Syrbe S, Bast T, Scheiwe C, Brandt A, Beck J, Schulze-Bonhage A. Epilepsy surgery: Late seizure recurrence after initial complete seizure freedom. *Epilepsia*. 2021;62(5):1092–1104. DOI: 10.1111/epi.16893.

26. Medvedeva TM, Sysoeva MV, van Luijtelaaar G, Sysoev IV. Modeling spike-wave discharges by a complex network of neuronal oscillators. *Neural Networks*. 2018;98:271–282. DOI: 10.1016/j.neunet.2017.12.002.
27. Gerster M, Berner R, Sawicki J, Zakharova A, Hlinka J, Lehnertz K, Schöll E. FitzHugh–Nagumo oscillators on complex networks mimic epileptic-seizure-related synchronization phenomena. *Chaos*. 2020;30:123130. DOI: 10.1063/5.0021420.



*Корнилов Максим Вячеславович* — родился в Саратове (1988). Окончил Лицей математики и информатики (2005), механико-математический факультет (2009, бакалавр математики) и факультет nano- и биомедицинских технологий (2011, магистр техники и технологии) Саратовского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2015, СГУ). Доцент кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ имени Н. Г. Чернышевского, старший научный сотрудник СФ ИПЭ им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — анализ временных рядов, математическое моделирование биологических процессов, автоматическое распознавание изображений, компьютерное зрение. Автор 12 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
 им. В. А. Котельникова РАН  
 Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский государственный  
 университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: kornilovmv@gmail.com  
 ORCID: 0000-0003-1634-9007  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 681980



*Капустников Антон Александрович* — родился в Саратове (2002). Окончил Институт физики СГУ имени Н. Г. Чернышевского (2023, бакалавр) по направлению «Биотехнические системы и технологии». С 2020 года техник СФ ИПЭ им. В. А. Котельникова РАН. С 2023 года ассистент кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ имени Н. Г. Чернышевского. Магистрант факультета компьютерных наук и информационных технологий по направлению «Информатика и вычислительная техника». Научные интересы — моделирование биологических процессов, анализ сигналов биологической природы, наука о сетях, нейронаука. Автор 5 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
 им. В. А. Котельникова РАН  
 Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский государственный  
 университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: anton.kapustnikov.02@mail.ru  
 ORCID: 0000-0002-9846-5556  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1088487



*Созонов Евгений Александрович* — родился в Ханты-Мансийске (1999). Окончил Институт физики СГУ имени Н. Г. Чернышевского (2022, бакалавр) по направлению «Биотехнические системы и технологии». Магистрант факультета компьютерных наук и информационных технологий по направлению «Информатика и вычислительная техника».

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский государственный  
 университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: infagot@gmail.com  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1240473



*Сысоева Марина Вячеславовна* — родилась в Саратове (1987). Бакалавр (2009, СГУ) и магистр (2011, СГУ) техники и технологии по направлению «Биомедицинская инженерия». Защитила диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальностям «Биофизика» и «Радиофизика» (2015, СГУ) и доктора физико-математических наук по специальностям «Радиофизика» и «Биофизика» (2023, СГТУ). Доцент по специальности «Радиофизика» (2021, СГТУ). Старший научный сотрудник СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, радиотехническое моделирование. Автор 46 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: bobrichkek@mail.ru  
ORCID: 0000-0003-4228-9124  
AuthorID (eLibrary.Ru): 651344



*Сысоев Илья Вячеславович* — родился в Саратове (1983). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по специальности «Физика» (2004). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007, СГУ) и доктора физико-математических наук (2019, ИРЭ) по специальности «Радиофизика». Доцент по специальности «Радиофизика» (2020, СГУ), профессор по специальности «Радиофизика» (2024, СГУ). Профессор кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ, старший научный сотрудник СФ ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН. Заместитель главного редактора журнала «Известия вузов. ПНД». Научные интересы — исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор 96 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: ivssci@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-9203-5504  
AuthorID (eLibrary.Ru): 128457



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(3)

Научная статья  
УДК 517.926

DOI: 10.18500/0869-6632-003099  
EDN: RJHLMQ

## Новый подход к математическому моделированию химических синапсов

Д. С. Глызин, С. Д. Глызин<sup>✉</sup>, А. Ю. Колесов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия  
E-mail: glyzin@gmail.com, ✉glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru  
Поступила в редакцию 13.05.2023, принята к публикации 15.01.2024,  
опубликована онлайн 22.03.2024, опубликована 31.05.2024

**Аннотация.** Целью данной работы является исследование новой математической модели кольцевой нейронной сети с однонаправленными химическими связями, представляющей собой сингулярно возмущенную систему дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием. **Методы.** С помощью сочетания аналитических и численных методов изучаются вопросы о существовании и устойчивости в этой системе специальных периодических решений — так называемых бегущих волн. **Результаты.** Предложенные методы позволяют показать, что изучаемая кольцевая система допускает растущее с ростом числа осцилляторов в сети число устойчивых бегущих волн. **Заключение.** В настоящей статье нами переосмыслен и уточнен предложенный ранее способ математического моделирования химических синапсов. Удалось в полном объеме учесть, с одной стороны, требование вольтерровской структуры соответствующих уравнений и, с другой стороны, гипотезу о насыщающей проводимости. Это позволяет соблюсти принцип единообразия: новая математическая модель строится на тех же принципах, что и предложенная ранее модель электрических синапсов.

**Ключевые слова:** кольцевая нейронная сеть, химические синапсы, релаксационные циклы, асимптотика, устойчивость.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>.

**Для цитирования:** Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Новый подход к математическому моделированию химических синапсов // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 376–393. DOI: 10.18500/0869-6632-003099. EDN: RJHLMQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## A new approach to mathematical modeling of chemical synapses

*D. S. Glyzin, S. D. Glyzin<sup>✉</sup>, A. Yu. Kolesov*

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Russia  
 E-mail: glyzin@gmail.com, ✉glyzin@uniyar.ac.ru, kolesov@uniyar.ac.ru  
 Received 13.05.2023, accepted 15.01.2024, available online 22.03.2024,  
 published 31.05.2024

**Abstract.** *The purpose* of this work is to study a new mathematical model of a ring neural network with unidirectional chemical connections, which is a singularly perturbed system of differential-difference equations with delay. *Methods.* A combination of analytical and numerical methods is used to study the existence and stability of special periodic solutions in this system, the so-called traveling waves. *Results.* The proposed methods make it possible to show that the ring system under study allows the number of stable traveling waves to increase with the number of oscillators in the network. *Conclusion.* In this article, we rethink and refine the previously proposed method of mathematical modeling of chemical synapses. On the one hand, it was possible to fully take into account the requirement of the Volterra structure of the corresponding equations and, on the other hand, the hypothesis of saturating conductivity. This makes it possible to observe the principle of uniformity: the new mathematical model is based on the same principles as the previously proposed model of electrical synapses.

**Keywords:** circular neural network, chemical synapses, relaxation cycles, asymptotics, stability.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00209), <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>.

**For citation:** Glyzin DS, Glyzin SD, Kolesov AYu. A new approach to mathematical modeling of chemical synapses. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(3):376–393. DOI: 10.18500/0869-6632-003099

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### 1. Описание объекта исследования

Одним из основополагающих принципов построения математических моделей нейронных систем является так называемая гипотеза об эквивалентности. Суть этой гипотезы в том, что мы априори предполагаем эквивалентность биологического нейрона некоторому физическому генератору с сосредоточенными параметрами. В свою очередь, упомянутый генератор моделируется нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений или аналогичной системой с запаздыванием. А поскольку колебания мембранного потенциала носят заведомо релаксационный характер, то соответствующая система, как правило, оказывается сингулярно возмущенной.

Упомянутый выше принцип лежит в основе известной модели Ходжкина–Хаксли [1] и многих других математических моделей изолированного нейрона (см. монографию [2] и содержащуюся в ней подробную библиографию). В настоящей работе, придерживаясь гипотезы об эквивалентности, в качестве модели отдельного нейрона мы используем скалярное нелинейное дифференциальное уравнение с запаздыванием вида

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u \quad (1)$$

для мембранного потенциала  $u = u(t) > 0$ . Здесь параметр  $\lambda > 0$ , характеризующий скорость

протекания электрических процессов в нейроне, предполагается большим, точка — дифференцирование по  $t$ , а функция  $f(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ,  $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$ , обладает свойствами:

$$f(0) = 1, \quad f(u) = -a + O\left(\frac{1}{u}\right), \quad uf'(u) = O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u^2 f''(u) = O\left(\frac{1}{u}\right) \quad (2)$$

при  $u \rightarrow +\infty$ , где  $a = \text{const} > 0$ . Примером такой функции служит

$$f(u) = \frac{1 - u}{1 + u/a}. \quad (3)$$

Поскольку в предлагаемом ниже способе моделирования химических синапсов уравнение (1) берется за основу, то имеет смысл остановиться вкратце на истории его возникновения и свойствах. В связи с этим обратим внимание на то обстоятельство, что наш подход к моделированию нейронной активности опирается на идеи, принадлежащие Ю. С. Колесову [3] и В. В. Майорову [4], а именно, в монографии [3] описан общий принцип математического моделирования биологических процессов с помощью специальных систем с запаздыванием вольтерровского типа, аналогичных известному уравнению Хатчинсона [5]. Далее, в работе [4] на основе этого принципа и идеи запаздывающей проводимости с насыщением в качестве модели отдельного нейрона было предложено некоторое уравнение с запаздыванием, аналогичное (1). И наконец, в статье [6] после надлежащей доработки упомянутое уравнение приобрело требуемый вид (1), (2).

Следует также отметить, что ранее безотносительно к нейродинамическим приложениям уравнение (1) рассматривалось в работе [7] как одно из возможных обобщений уравнения Хатчинсона. В указанной работе установлено, что при всех  $\lambda \gg 1$  оно допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл  $u(t, \lambda) > 0$ ,  $u(0, \lambda) \equiv 1$  периода  $T(\lambda)$ , удовлетворяющий предельным соотношениям:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T(\lambda) = T_0, \quad \max_{0 \leq t \leq T(\lambda)} |x(t, \lambda) - x_0(t)| = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

где  $T_0 = (1 + a)t_0$ ,  $t_0 = 1 + 1/a$ ,  $x(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln(u(t, \lambda))$ , а  $T_0$ -периодическая функция  $x_0(t)$  задается равенствами

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - a(t - 1) & \text{при } 1 \leq t \leq t_0 + 1, \\ t - T_0 & \text{при } t_0 + 1 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t). \quad (5)$$

Наглядное представление о релаксационных свойствах (4) этого цикла дает его график на плоскости  $(t, u)$ , построенный численно для случая (1), (3) при  $\lambda = 5$ ,  $a = 2$  (рис. 1), а также график функции (5) (рис. 2).

Обратимся теперь к интересующему нас вопросу о моделировании химических синапсов и напомним, что соответствующая попытка уже предпринималась ранее в статье [8]. Точнее говоря, в [8] был предложен некоторый подход к указанной проблеме, в основе которого лежала подходящим образом модифицированная идея быстрой пороговой модуляции.

Феномен быстрой пороговой модуляции (fast threshold modulation или ФТМ), впервые описанный в работах [9, 10], представляет собой специальный способ связи динамических систем. Характерная особенность этого способа состоит в том, что правые части соответствующих дифференциальных уравнений меняются скачкообразно при переходе некоторых управляющих переменных через свои критические значения. В нейронных системах идея ФТМ реализуется, как правило, следующим образом.



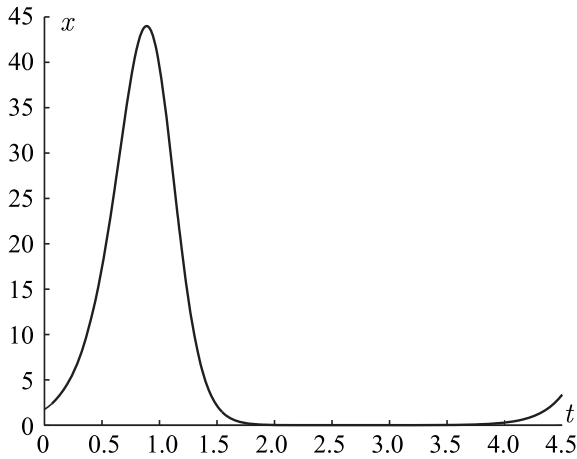


Рис. 1. График решения  $x(t)$  уравнения (1) с функцией (3) при  $\lambda = 5$ ,  $a = 2$

Fig. 1. Graph of the solution  $x(t)$  of the equation (1) with the function  $f(u)$  satisfying the formula (3) for  $\lambda = 5$ ,  $a = 2$

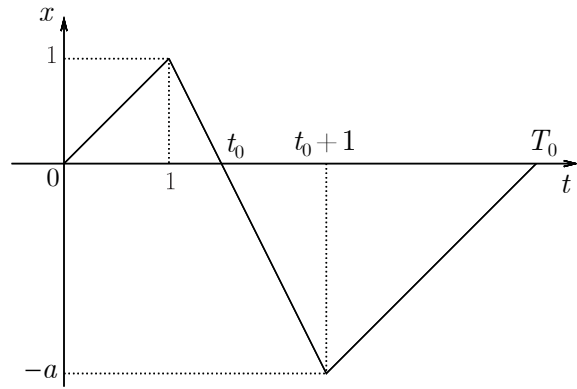


Рис. 2. График функции  $x_0(t)$  при  $a = 2$

Fig. 2. Graph of the function  $x_0(t)$  for  $a = 2$

Предположим, что напряжение  $u = u(t)$  и сила тока  $v = v(t)$  в отдельной нейронной клетке удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \dot{u} = f(u, v), \quad \dot{v} = g(u, v). \quad (6)$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  — малый параметр, а на правые части  $f, g \in C^\infty$  наложены стандартные ограничения [11, с. 45–55], обеспечивающие существование устойчивого релаксационного цикла. Типовым примером модели (6) служит известная система ФитцХью–Нагумо [12].

Рассмотрим далее простейшую сеть, состоящую из двух синаптически связанных нейронов. В этом случае согласно выработанным к настоящему времени представлениям (см., например, [13]) соответствующие им электрические переменные  $(u_j, v_j)$ ,  $j = 1, 2$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u}_1 &= f(u_1, v_1) + b s_2(u_2)(u_* - u_1), & \dot{v}_1 &= g(u_1, v_1), \\ \varepsilon \dot{u}_2 &= f(u_2, v_2) + b s_1(u_1)(u_* - u_2), & \dot{v}_2 &= g(u_2, v_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $b$  — положительный параметр, характеризующий максимальную проводимость синапса,  $u_*$  — потенциал покоя (или потенциал Нернста), а функции  $s_j(u_j)$ ,  $j = 1, 2$  — постсинаптические проводимости, зависящие от пресинаптических потенциалов  $u_j$ .

Следует отметить, что существует несколько различных способов выбора функций  $s_j(u_j)$ , описание которых можно найти в [13]. Мы же, руководствуясь идеей ФТМ, остановимся на простейшем из них, а именно, будем считать, что

$$s_j(u_j) = H(u_j - u_{**}), \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad (8)$$

где  $u_{**}$  — порог, начиная с которого одна клетка влияет на другую. Например, если  $u_1 < u_{**}$ , то первый нейрон не действует на второй, а если  $u_1 > u_{**}$ , то действует.

Предположим теперь, что имеет место однонаправленное синаптическое взаимодействие в сети из  $m$ ,  $m \geq 2$  нейронов, объединенных в кольцо. Если допустить, что каждый отдельно

взятый нейрон моделируется уравнением (1), то мы можем, руководствуясь описанной выше методикой, перейти от (1) к аналогичной (7) системе

$$\dot{u}_j = \lambda f(u_j(t-1))u_j + b s_{j-1}(u_{j-1})(u_* - u_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

где  $u_0 = u_m$ ,  $s_0 = s_m$ , а функции  $s_j$  заданы равенствами (8).

Приведенная модель (9) имеет право на существование. Однако, на наш взгляд, в данной ситуации следует отказаться от общепринятых представлений. Первый шаг в этом направлении был сделан в статье [8], где вместо (9) рассматривалась система

$$\dot{u}_j = [\lambda f(u_j(t-1)) + b g(u_{j-1}) \ln(u_*/u_j)]u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad u_0 = u_m, \quad (10)$$

в которой  $b = \text{const} > 0$ ,  $u_* = \exp(\sigma\lambda)$ ,  $\sigma = \text{const} \in \mathbb{R}$ , а функция  $g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$  такова, что

$$\begin{aligned} g(u) > 0 \quad \forall u > 0, \quad g(0) = 0; \quad g(u) = 1 + O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u g'(u) = O\left(\frac{1}{u}\right), \\ u^2 g''(u) = O\left(\frac{1}{u}\right) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Мотивы, по которым в [8] мы остановили свой выбор на системе (10), состояли в следующем. Во-первых, при переходе от (9) к (10) общий качественный характер синаптической связи сохраняется, поскольку в обоих случаях соответствующие связующие слагаемые  $b s_{j-1}(u_{j-1})(u_* - u_j)$  и  $b g(u_{j-1})u_j \ln(u_*/u_j)$  меняют знак с «+» на «-» при увеличении потенциалов  $u_j$  и при прохождении их через критическое значение  $u_*$ . Во-вторых, в соответствии с методикой работ [3,4] система (10) имеет требуемую вольтерровскую структуру.

Однако со временем стало понятно, что и система (10) нуждается в некоторой доработке. Связано это с тем, что фигурирующая в (10) функция  $\ln(u_*/u)$  не удовлетворяет гипотезе о насыщающей проводимости, согласно которой все входящие в модель нелинейности должны стремиться при  $u \rightarrow +\infty$  к конечным пределам.

Для того чтобы исправить положение, перейдем от (10) к системе

$$\dot{u}_j = \lambda [f(u_j(t-1)) + b g(u_{j-1})h(u_j/u_*)]u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad u_0 = u_m. \quad (12)$$

Здесь функция  $h(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$  обладает аналогичными (2), (11) свойствами:

$$\begin{aligned} h(u) > 0 \quad \text{при } 0 \leq u < 1, \quad h(u) < 0 \quad \text{при } u > 1, \quad h(1) = 0, \quad h'(1) < 1, \\ h(0) = 1, \quad h(u) = -c + O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u h'(u) = O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u^2 h''(u) = O\left(\frac{1}{u}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

при  $u \rightarrow +\infty$ , где  $c = \text{const} > 0$ .

Свойства (13) гарантируют, что  $\text{sign } h(u) = \text{sign}(\ln(1/u))$  при всех  $u > 0$ , а значит, качественный характер связей в моделях (10) и (12) идентичен. Имеет место для  $h(u)$  и требуемое свойство насыщения. Однако уместно сделать еще одно нетривиальное допущение, а именно, будем считать, что для каждого уравнения из (12) соответствующий потенциал покоя  $u_*$ , предполагавшийся постоянным, теперь зависит от времени и совпадает с  $u_{j-1}(t)$ . Тем самым приходим к системе

$$\dot{u}_j = \lambda [f(u_j(t-1)) + b g(u_{j-1})h(u_j/u_{j-1})]u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad u_0 = u_m, \quad (14)$$

где, напомним, функции  $f, g, h$  обладают свойствами (2), (11), (13) соответственно,  $b = \text{const} > 0$ ,  $\lambda \gg 1$ . Данная система и есть интересующая нас новая математическая модель химических синапсов.

Завершая описание объекта исследования, заметим, что предложенная в данной статье модель (14) вполне аналогична рассмотренной в [14] математической модели электрических синапсов, то есть соблюден так называемый принцип единообразия. Именно ради этого принципа и была осуществлена в (12) замена  $u_*$  на  $u_{j-1}$ .

## 2. Бегущие волны релейной системы

Характерной особенностью системы (14) является то обстоятельство, что после замен  $x_j = \varepsilon \ln u_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ,  $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$  и последующего стремления параметра  $\varepsilon$  к нулю она допускает некоторый предельный объект. Действительно, указанные замены преобразуют ее к виду

$$\dot{x}_j = \mathcal{F}(x_j(t-1), \varepsilon) + b \mathcal{G}(x_{j-1}, \varepsilon) \mathcal{H}(x_j - x_{j-1}, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (15)$$

где  $x_0 = x_m$ ,

$$\mathcal{F}(x, \varepsilon) = f\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right), \quad \mathcal{G}(x, \varepsilon) = g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right), \quad \mathcal{H}(x, \varepsilon) = h\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right). \quad (16)$$

Заметим далее, что в силу свойств (2), (11), (13) для функций (16) при любом фиксированном  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$  выполняются предельные равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}(x, \varepsilon) &= 1 - (a+1)H(x), & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{G}(x, \varepsilon) &= H(x), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}(x, \varepsilon) &= 1 - (c+1)H(x), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $H(x)$  — функция из (8).

Соотношения (17) свидетельствуют о том, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  исходная система (15) переходит в релейную систему

$$\dot{x}_j = 1 - (a+1)H(x_j(t-1)) + b H(x_{j-1})[1 - (c+1)H(x_j - x_{j-1})], \quad 1 \leq j \leq m, \quad (18)$$

где  $x_0 = x_m$ . В свою очередь, наличие предельного объекта (18) существенно облегчает проблему отыскания аттракторов системы (15) и позволяет, в частности, применить к ней общие результаты из [15] о соответствии между грубыми циклами релейной и релаксационной систем. Ниже упомянутые результаты используются для нахождения специальных периодических движений — так называемых бегущих волн.

Согласно общепринятой терминологии бегущей волной с номером  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq m-1$  будем называть специальное периодическое решение системы (15), допускающее представление

$$x_j = x(t + (j-1)\Delta), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (19)$$

Здесь  $\Delta = \text{const} > 0$  — некоторый фазовый сдвиг, а функция  $x(t)$  — периодическое решение вспомогательного уравнения

$$\dot{x} = \mathcal{F}(x(t-1), \varepsilon) + b \mathcal{G}(x(t-\Delta), \varepsilon) \mathcal{H}(x - x(t-\Delta), \varepsilon) \quad (20)$$

периода  $T = m\Delta/k$ . Аналогичное определение бегущей волны сохраняется и для релейной системы (18), но в этом случае  $x(t)$  — периодическое решение периода  $T = m\Delta/k$  вспомогательного уравнения

$$\dot{x} = 1 - (a+1)H(x(t-1)) + b H(x(t-\Delta))[1 - (c+1)H(x - x(t-\Delta))]. \quad (21)$$

Как оказывается, для релейной системы (18) бегущие волны (19) при надлежащем выборе параметров  $a, b, c, k, m$  могут быть найдены явно. Для того чтобы убедиться в этом, проанализируем уравнение (21), а именно, установим факт существования у него в подходящем диапазоне параметров  $a, b, c, \Delta$  некоторого периодического решения  $x = x_*(t, \Delta)$  периода  $T_* = T_*(\Delta)$ .

Предполагая выполненным условие  $\Delta > 1$ , в фазовом пространстве  $C[-\Delta, 0]$  непрерывных при  $-\Delta \leq t \leq 0$  скалярных функций  $\varphi(t)$  введем в рассмотрение специальное семейство  $\varphi_{\tau_1, \tau_2}(t)$  начальных условий для уравнения (21). Это семейство зависит от двух вспомогательных параметров  $\tau_1, \tau_2$ , удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \tau_1 < \frac{a}{a+b+1} \tau_2, \quad \tau_2 < 1, \quad \frac{a}{b+1} + \tau_2 + 1 < \Delta < \tau_2 + 1 + a. \quad (22)$$

Сами же функции  $\varphi_{\tau_1, \tau_2}(t)$  задаются формулой

$$\varphi_{\tau_1, \tau_2}(t) = \begin{cases} t + \Delta - \tau_1 + a(\tau_2 - \tau_1) & \text{при } -\Delta \leq t \leq -\Delta + \tau_1, \\ -a(t + \Delta - \tau_2) & \text{при } -\Delta + \tau_1 \leq t \leq -\Delta + \tau_2 + 1, \\ -a + t + \Delta - \tau_2 - 1 & \text{при } -\Delta + \tau_2 + 1 \leq t \leq -\Delta + \tau_3, \\ (b+1)t & \text{при } -\Delta + \tau_3 \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$\tau_3 = \Delta + \frac{1}{b}(\Delta - \tau_2 - 1 - a). \quad (24)$$

Обратим внимание, что в силу соотношений (22)–(24) справедливы неравенства

$$-\Delta < -\Delta + \tau_1 < -\Delta + \tau_2 < -\Delta + \tau_2 + 1 < -\Delta + \tau_3 < 0, \quad (25)$$

$$\varphi_{\tau_1, \tau_2}(t) > 0 \quad \text{при } -\Delta \leq t < -\Delta + \tau_2, \quad \varphi_{\tau_1, \tau_2}(t) < 0 \quad \text{при } -\Delta + \tau_2 < t < 0,$$

а значит, график любой функции  $\varphi_{\tau_1, \tau_2}(t)$  из нашего семейства имеет вид, показанный на рис. 3.

Обозначим через  $x = x_{\tau_1, \tau_2}(t)$ ,  $t \geq 0$  решение уравнения (21) с начальным условием  $\varphi_{\tau_1, \tau_2}(t)$ ,  $-\Delta \leq t \leq 0$ , а через  $t = T > 0$  – второй положительный корень уравнения  $x_{\tau_1, \tau_2}(t) = 0$  (если он существует). Как будет показано ниже, при некоторых дополнительных ограничениях на  $a, b, c, \Delta$  и на параметры  $\tau_1, \tau_2$  функция  $x_{\tau_1, \tau_2}(t+T)$ ,  $-\Delta \leq t \leq 0$  совпадает с  $\varphi_{\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2}(t)$ , где новые параметры  $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$  линейно зависят от  $\tau_1, \tau_2$ . Более того, соответствующее отображение  $(\tau_1, \tau_2) \mapsto (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$  имеет единственную неподвижную точку  $(\tau_1^*(\Delta), \tau_2^*(\Delta))$ . Что же касается искомого периодического решения  $x_*(t, \Delta)$  уравнения (21), то само оно и его период  $T_*(\Delta)$  задаются соотношениями

$$x_*(t, \Delta) = x_{\tau_1, \tau_2}(t)|_{\tau_1=\tau_1^*(\Delta), \tau_2=\tau_2^*(\Delta)}, \quad (26)$$

$$T_*(\Delta) = T|_{\tau_1=\tau_1^*(\Delta), \tau_2=\tau_2^*(\Delta)}.$$

Для того чтобы реализовать описанную выше программу действий, проинтегрируем уравнение (21) методом шагов, а именно, будем последовательно рассматривать различные промежутки времени и получать для интересующего нас решения  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  на этих промежутках некоторые явные формулы.

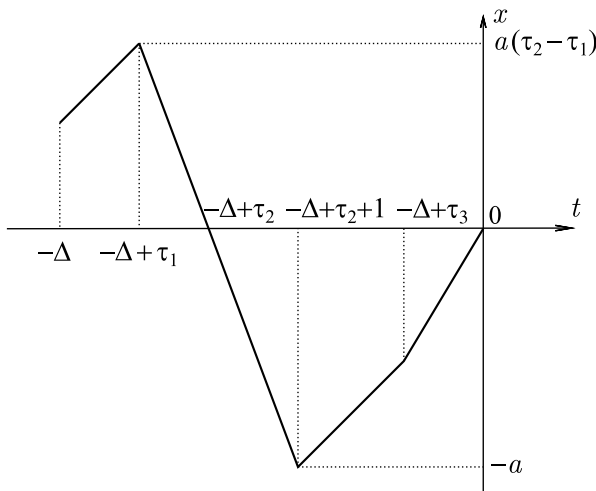


Рис. 3. График функции  $\varphi_{\tau_1, \tau_2}(t)$  из семейства (23) при условиях (22), (24), (25)

Fig. 3. Graph of function  $\varphi_{\tau_1, \tau_2}(t)$  from the family (23) under conditions (22), (24), (25)

На первом шаге обратимся к промежутку

$$0 \leq t < t_*, \quad t_* = \frac{a}{a+b+1} \tau_2. \quad (27)$$

В этом случае в силу неравенств (22), (25) имеем

$$t-1 \in [-1, t_*-1) \subset (-\Delta + \tau_2, 0), \quad x(t-1) = \varphi_{\tau_1, \tau_2}(t-1) < 0,$$

а значит,  $H(x(t-1)) \equiv 0$ . Далее, учитывая вытекающее из (22), (27) неравенство  $\tau_1 < t_*$ , приходим к формуле

$$x(t-\Delta) = \varphi_{\tau_1, \tau_2}(t-\Delta) = \begin{cases} t - \tau_1 + a(\tau_2 - \tau_1) & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_1, \\ -a(t - \tau_2) & \text{при } \tau_1 \leq t \leq t_*. \end{cases} \quad (28)$$

А отсюда и из (25) автоматически следует, что  $x(t-\Delta) > 0$ ,  $H(x(t-\Delta)) \equiv 1$ . И, наконец, в случае функции  $x(t) - x(t-\Delta)$  мы априори считаем выполненным неравенство

$$x(t) - x(t-\Delta) < 0 \quad \forall t \in [0, t_*]. \quad (29)$$

Принимая во внимание перечисленные факты, приходим к выводу, что на первом шаге рассмотрению подлежит задача Коши

$$\dot{x} = b + 1, \quad x|_{t=0} = \varphi_{\tau_1, \tau_2}(0) = 0.$$

Тем самым на промежутке (27) решение  $x = x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  задается равенством

$$x = (b+1)t. \quad (30)$$

Следует, однако, напомнить, что это равенство выведено в предположении (29). Но из формул (28), (30) нетрудно вывести, что упомянутое априорное условие действительно выполняется.

Второй шаг связан с рассмотрением интервала

$$t_* < t < t_{**}, \quad t_{**} = \tau_2. \quad (31)$$

Отметим сразу, что в точке  $t = t_*$  решение  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  доопределяется по непрерывности, то есть  $x_{\tau_1, \tau_2}(t_*) = (b+1)t_*$ . Учитывая это обстоятельство, приходим к выводу, что при  $t = t_*$  соответствующее неравенство из (29) обращается в строгое равенство. Поэтому уместно предположить, что в точке  $t = t_*$  происходит переключение и

$$x(t) - x(t-\Delta) > 0 \quad \forall t \in (t_*, t_{**}). \quad (32)$$

Проанализируем далее знаки функций  $x(t-1)$ ,  $x(t-\Delta)$ . Как и в предыдущем случае, для первой из них имеем

$$t-1 \in (t_*-1, t_{**}-1) \subset (-\Delta + \tau_2, 0), \quad x(t-1) = \varphi_{\tau_1, \tau_2}(t-1) < 0, \quad H(x(t-1)) \equiv 0.$$

Вторая же на промежутке (31) задается формулой

$$x(t-\Delta) = \varphi_{\tau_1, \tau_2}(t-\Delta) = -a(t - t_{**}), \quad (33)$$

из которой, в свою очередь, следует, что  $x(t-\Delta) > 0$ ,  $H(x(t-\Delta)) \equiv 1$ .

Приведенные факты свидетельствуют о том, что на интервале (31) имеем дело с задачей Коши

$$\dot{x} = 1 - bc, \quad x|_{t=t_*} = (b+1)t_*,$$

а значит, в этом случае для решения  $x = x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  справедливо равенство

$$x = (b+1)t_* - (bc-1)(t-t_*). \quad (34)$$

Объединяя его с (33), приходим к выводу, что

$$x(t) - x(t-\Delta) = (a+1-bc)(t-t_*) \quad \forall t \in [t_*, t_{**}).$$

Тем самым априорное требование (32), при котором была получена формула (34), заведомо справедливо при условии (которое всюду ниже считаем выполненным)

$$bc < a+1. \quad (35)$$

Добавим еще, что, как обычно, в точке  $t = t_{**}$  решение  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  доопределяется по непрерывности, а условие (35) гарантирует, что

$$x_{\tau_1, \tau_2}(t_{**}) = \frac{(b+1)(a+1-bc)}{a+b+1} t_{**} > 0. \quad (36)$$

Прежде чем перейти к последующему построению решения  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$ , сделаем одно полезное наблюдение. Поскольку в силу (25) справедливо неравенство  $x(t-\Delta) < 0$  при  $t \in (t_{**}, \Delta)$ , то автоматически  $H(x(t-\Delta)) \equiv 0$ . Тем самым на промежутке  $(t_{**}, \Delta)$  вместо (21) рассмотрению подлежит более простое уравнение

$$\dot{x} = 1 - (a+1)H(x(t-1)). \quad (37)$$

На третьем шаге обратимся к интервалу

$$t_{**} < t < 1 \quad (38)$$

и заметим, что согласно (25) при указанных  $t$  справедливы соотношения  $x(t-1) < 0$ ,  $H(x(t-1)) \equiv 0$ . А отсюда и из (36), (37) заключаем, что на промежутке времени (38) решение  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  задается формулой

$$x = t - t_{**} + \frac{(b+1)(a+1-bc)}{a+b+1} t_{**}, \quad (39)$$

а в точке  $t = 1$  доопределяется по непрерывности.

Перед рассмотрением очередного промежутка времени положим

$$t_{***} = 1 + \frac{1}{a} \left( 1 - t_{**} + \frac{(b+1)(a+1-bc)}{a+b+1} t_{**} \right) > 1 \quad (40)$$

и будем считать выполненным очередное условие

$$t_{***} + 1 < \Delta. \quad (41)$$

Четвертый шаг связан с интервалом

$$1 < t < t_{***} + 1, \quad (42)$$

на котором в силу (41) по-прежнему имеем дело с уравнением (37). Более того, предполагаем априори, что при указанных значениях времени

$$x(t-1) > 0. \quad (43)$$

Принимая во внимание условие (43), из (37), (39), (40) заключаем, что здесь для решения  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  имеет место равенство

$$x = -a(t - t_{***}). \quad (44)$$

Далее, объединяя формулу (44) с уже полученными ранее формулами для  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  на первых трех шагах (см. (30), (34), (39)), приходим к выводу о справедливости на промежутке времени (42) требуемого условия (43). Тем самым равенство (44) обретает законную силу, а в точке  $t = t_{***} + 1$  по непрерывности получаем

$$x_{\tau_1, \tau_2}(t_{***} + 1) = -a. \quad (45)$$

На пятом шаге обратимся к интервалу

$$t_{***} + 1 < t < \Delta, \quad (46)$$

считая, что при указанных  $t$  справедливо неравенство

$$x(t-1) < 0. \quad (47)$$

Далее, учитывая в (37) вытекающее из (47) тождество  $H(x(t-1)) \equiv 0$  и дополняя получившееся уравнение начальным условием (45), для  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  приходим к очередной формуле

$$x = t - t_{***} - a - 1. \quad (48)$$

Предположим, что выполнено условие

$$\Delta < t_{***} + a + 1. \quad (49)$$

Тогда в силу формул (44), (48) автоматически выполняется и априорное требование (47). Тем самым на интервале (46) равенство (48) действительно имеет место и по непрерывности

$$x_{\tau_1, \tau_2}(\Delta) = \Delta - t_{***} - a - 1 < 0. \quad (50)$$

Прежде чем перейти к заключительному этапу построения решения  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$ , введем в рассмотрение величину

$$T = \Delta + \frac{1}{b+1} (t_{***} + a + 1 - \Delta), \quad (51)$$

предполагая дополнительно, что

$$\Delta + t_{**} < T < \Delta + 1. \quad (52)$$

Подчеркнем, что согласно (51) условие (49) означает, что  $T > \Delta$ . Таким образом, требования (52) более сильные, чем ограничение (49).

На шестом шаге рассмотрим промежуток

$$\Delta < t \leq T \quad (53)$$

в предположении о выполнении неравенств

$$x(t) \leq 0, \quad x(t-1) < 0, \quad x(t-\Delta) > 0. \quad (54)$$



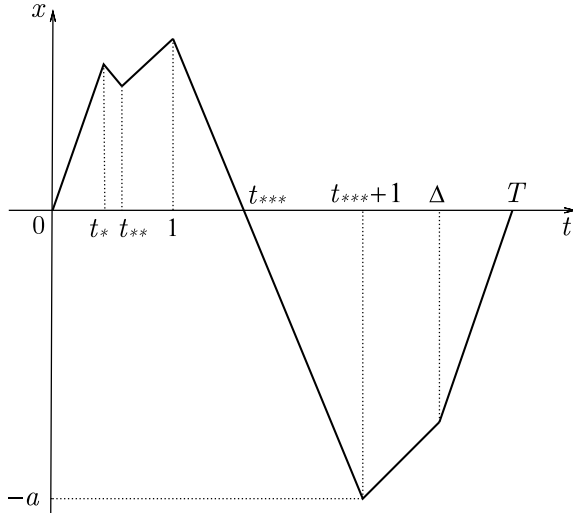


Рис. 4. График  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  на отрезке  $0 \leq t \leq T$

Fig. 4. Graph of function  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  for  $t \in [0, T]$

Далее, учитывая информацию (54) в правой части уравнения (21) и опираясь на формулы (50), (51), для отыскания  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  приходим к задаче Коши

$$\dot{x} = b + 1, \quad x|_{t=\Delta} = (b + 1)(\Delta - T).$$

Таким образом, в случае (53) решение  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  имеет вид

$$x = (b + 1)(t - T). \quad (55)$$

Что же касается априорных условий (54), то их справедливость гарантируют неравенства (52), формула (55) и уже полученные ранее явные выражения для  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  на предыдущих пяти шагах (см. (30), (34), (39), (44), (48)).

Наглядное представление о процессе построения решения  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  уравнения (21) дает рис. 4, где показан график  $x_{\tau_1, \tau_2}(t)$  на отрезке  $0 \leq t \leq T$ . Из этого графика и из условий (52),

в частности, следует, что функция  $x_{\tau_1, \tau_2}(t + T)$  имеет на отрезке  $-\Delta \leq t \leq 0$  ровно три излома (как и исходное начальное условие  $\varphi_{\tau_1, \tau_2}(t)$ ). Более того, опираясь на соотношения (39), (44), (48), (55), нетрудно заметить, что  $x_{\tau_1, \tau_2}(t + T) = \varphi_{\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2}(t)$ ,  $-\Delta \leq t \leq 0$ , где

$$\bar{\tau}_1 = 1 + \Delta - T, \quad \bar{\tau}_2 = \Delta + t_{***} - T. \quad (56)$$

Покажем теперь, что отображение  $(\tau_1, \tau_2) \mapsto (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$ , порожденное соотношениями (56), имеет единственную неподвижную точку  $(\tau_1^*(\Delta), \tau_2^*(\Delta))$ . С этой целью подставим в (56) явные формулы для  $t_{***}$  и  $T$  (см. (40), (51)). В результате после некоторых преобразований приходим к выводу, что компоненты интересующей нас неподвижной точки задаются равенствами

$$\tau_1^*(\Delta) = \frac{1}{b + 1} \left( \Delta + b - a - \frac{1}{a} - 1 \right) + \frac{b(a - c(b + 1))}{a(b + 1)(a + b + 1)} \tau_2^*(\Delta), \quad (57)$$

$$\tau_2^*(\Delta) = \frac{a + b + 1}{a(a + 1)(b + 1) + b(a + cb(b + 1))} (a\Delta - (a + 1)(a - b)). \quad (58)$$

Подведем некоторый итог. Обозначим через  $\Omega_1$  совокупность всевозможных наборов параметров  $(a, b, c, \Delta)$ , удовлетворяющих условиям (22), (35), (41), (52), в которых  $\tau_1, \tau_2$  заданы равенствами (57), (58). Из проделанных выше построений вытекает следующая

**Теорема 1.** При любом наборе  $(a, b, c, \Delta) \in \Omega_1$  уравнение (21) имеет периодическое решение  $x = x_*(t, \Delta)$  периода  $T_*(\Delta)$ , задающееся формулами (26), (57), (58). Более того, для  $T_*(\Delta)$  справедливы соотношения

$$T_*(\Delta) = \theta_1 \Delta + \theta_2, \quad \theta_1 = \frac{b}{b + 1} \left( 1 + \frac{a - c(b + 1)}{a(a + 1)(b + 1) + b(a + cb(b + 1))} \right), \quad (59)$$

$$\theta_2 = \frac{a + 1}{a(b + 1)} \left( a + 1 - \frac{(a - b)b(a - c(b + 1))}{a(a + 1)(b + 1) + b(a + cb(b + 1))} \right).$$

Установленная теорема позволяет получить в явном виде некоторые бегущие волны релейной системы (18). Для того чтобы сделать это, фиксируем произвольно натуральное  $k : 1 \leq k \leq m - 1$  и, опираясь на формулы (59), из уравнения  $T_*(\Delta) = m\Delta/k$  найдем

$$\Delta_*^{(m,k)} = \frac{\theta_2}{m/k - \theta_1}. \quad (60)$$

Далее, через  $\Omega_2$  обозначим множество наборов  $(a, b, c, m, k)$ , для которых

$$m/k - \theta_1 \neq 0, \quad \Delta_*^{(m,k)} > 0, \quad (a, b, c, \Delta)|_{\Delta=\Delta_*^{(m,k)}} \in \Omega_1, \quad (61)$$

где  $\Delta_*^{(m,k)}$  — величина (60). Нетрудно заметить, что при условиях (61) система (18) допускает бегущую волну вида (19) с номером  $k$ . Эта волна задается равенствами

$$x_j = x_*^{(m,k)}(t + (j - 1)\Delta_*^{(m,k)}), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (62)$$

где  $x_*^{(m,k)}(t) = x_*(t, \Delta)|_{\Delta=\Delta_*^{(m,k)}}$ , и имеет период  $T_*^{(m,k)} = m\Delta_*^{(m,k)}/k$ .

### 3. Бегущие волны релаксационной системы

Перейдем теперь к вопросу о существовании аналогичной (62) бегущей волны у исходной релаксационной системы (15). Для этого сначала обратимся к соответствующему вспомогательному уравнению (20). Аналогом теоремы 1 здесь является следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Предположим, что фигурирующие в (16) функции  $f(u)$ ,  $g(u)$ ,  $h(u)$  удовлетворяют условиям монотонности*

$$f'(u) < 0, \quad g'(u) > 0, \quad h'(u) < 0 \quad \forall u \geq 0. \quad (63)$$

Тогда по любому набору параметров  $(a, b, c, \Delta) \in \Omega_1$  можно указать такое достаточно малое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при указанных  $a, b, c, \Delta$  и при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  уравнение (20) допускает периодическое решение  $x_*(t, \varepsilon, \Delta)$ ,  $x_*(0, \varepsilon, \Delta) \equiv 0$  периода  $T_*(\varepsilon, \Delta)$  с асимптотикой

$$T_*(\varepsilon, \Delta) = T_*(\Delta) + O(\varepsilon), \quad \max_{t \in [0, T_*(\varepsilon, \Delta)]} |x_*(t, \varepsilon, \Delta) - x_*(t, \Delta)| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (64)$$

Здесь  $x_*(t, \Delta)$  — периодическое решение уравнения (21) периода  $T_*(\Delta)$ , доставляемое теоремой 1.

Поскольку доказательство сформулированной теоремы базируется на общих результатах из [15], то ограничимся лишь описанием общей его схемы, состоящей из трех этапов.

На первом этапе зафиксируем достаточно малые  $\sigma_0, \sigma_1 > 0$  и введем в рассмотрение множество  $S$  начальных функций  $\varphi(t) \in C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$ , удовлетворяющих условиям

$$|\varphi(t) - x_*(t, \Delta)| \leq \sigma_1 \quad \text{при} \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad \varphi(-\sigma_0) = -(b + 1)\sigma_0.$$

Далее, обозначим через  $x_\varphi(t, \varepsilon, \Delta)$ ,  $t \geq -\sigma_0$  — решение уравнения (20) с произвольной начальной функцией  $\varphi \in S$ . Опираясь на условия монотонности (63) и аппарат дифференциальных неравенств, удастся показать, что второй положительный корень  $t = T_\varphi(\varepsilon, \Delta)$  уравнения

$x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon, \Delta) = -(b+1)\sigma_0$  существует и является простым. Тем самым на  $S$  корректно определен оператор последования Пуанкаре

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi(\varepsilon, \Delta), \varepsilon, \Delta), \quad -\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0 \quad (65)$$

со значениями в  $C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$ . Полное доказательство факта существования и простоты второго положительного корня уравнения для определения оператора Пуанкаре  $\Pi_\varepsilon(\varphi)$  приведено, например, в статьях [14] и [16]. Это доказательство с незначительными изменениями технического характера переносится и на рассматриваемый случай. Учитывая, что соответствующие выкладки довольно громоздки, они здесь не приводятся.

На втором этапе введем в рассмотрение решение  $\bar{x}(t, \varepsilon, \Delta)$  уравнения (20) с начальной функцией  $x_*(t, \Delta)$ ,  $-\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ . Асимптотическое интегрирование соответствующей задачи Коши приводит к выводу, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют место асимптотические равенства

$$T_\varphi(\varepsilon, \Delta)|_{\varphi=x_*(t, \Delta)} = T_*(\Delta) + O(\varepsilon), \quad \max_{t \in [0, T_\varphi(\varepsilon, \Delta)]} |\bar{x}(t, \varepsilon, \Delta) - x_*(t, \Delta)| = O(\varepsilon). \quad (66)$$

Соотношения (66) означают, что функция  $x = \bar{x}(t, \varepsilon, \Delta)$  является приближенным (с точностью до  $O(\varepsilon)$ ) периодическим решением уравнения (20).

На третьем этапе рассмотрим линейный оператор

$$A(\varepsilon, \Delta) = \partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)|_{\varphi=x_*(t, \Delta)} : C_0[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C_0[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \quad (67)$$

где  $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$  — производная Фреше оператора (65),

$$C_0[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] = \{\varphi(t) \in C[-\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] : \varphi(-\sigma_0) = 0\}.$$

Асимптотический анализ отвечающего уравнению (20) линейного уравнения в вариациях на решении  $x = \bar{x}(t, \varepsilon, \Delta)$  позволяет заключить, что оператор (67) допускает простое вещественное собственное значение  $\lambda = \lambda_0(\varepsilon)$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_0(\varepsilon) = \frac{b^2(a - c(b + 1))}{a(b + 1)(a + b + 1)} < 1. \quad (68)$$

Остальной же спектр этого оператора лежит в шаре  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(\varepsilon)\}$ , где  $r(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Подводя итог, отметим, что соотношения (66)–(68) гарантируют применимость к уравнению  $\Pi_\varepsilon(\varphi) - \varphi = 0$  в точке  $(\varepsilon, \varphi) = (0, x_*(t, \Delta))$  теоремы о неявном отображении. Тем самым оператор (65) допускает неподвижную точку  $\varphi_*(t, \varepsilon, \Delta) \in S$ , асимптотически близкую к  $x_*(t, \Delta)$ . Ясно также, что в исходном уравнении (20) этой неподвижной точке соответствует периодическое решение, которое после надлежащего сдвига по времени перейдет в искомое периодическое решение  $x_*(t, \varepsilon, \Delta)$  с асимптотикой (64).

Из первого равенства (64) очевидным образом следует, что в случае

$$(a, b, c, m, k) \in \Omega_2 \quad (69)$$

при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  уравнение  $T_*(\varepsilon, \Delta) = m\Delta/k$  допускает решение

$$\Delta_*^{(m, k)}(\varepsilon) = \Delta_*^{(m, k)} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (70)$$

В свою очередь, подставляя соотношение (70) в  $x_*(t, \varepsilon, \Delta)$ , получаем функцию  $x_*^{(m,k)}(t, \varepsilon)$ , периодическую с периодом  $T_*^{(m,k)}(\varepsilon) = m\Delta_*^{(m,k)}(\varepsilon)/k$ . А это значит, что нами построена бегущая волна системы (15) вида

$$x_j = x_*^{(m,k)}(t + (j - 1)\Delta_*^{(m,k)}(\varepsilon), \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (71)$$

В принципе, вопрос об устойчивости цикла (71) может быть решен теоретически (см., например, [8, 17]). Однако получающиеся на этом пути формулы не удается проанализировать аналитическими методами. В связи с этим нами предпринята серия численных экспериментов, состоящая из двух этапов.

На первом этапе фиксируются параметры  $a = 2, b = 1, c = 2$  и при изменении числа осцилляторов  $m$  от 10 до 50 выясняется, при каких значениях  $k$  для набора параметров  $(a, b, c, m, k)$  справедливо включение (69). Выбор величин  $a, b, c$  в значительной степени случаен, единственное требование состоит в том, чтобы при различных значениях количества осцилляторов  $m$ , число устойчивых бегущих волн было по возможности большим.

На рис. 5 изображена зависимость величины  $N(m)$ , определяемой числом подходящих значений  $k$ , от параметра  $10 \leq m \leq 50$ . Оказалось, что  $N(m)$  растет с ростом  $m$  по близкому к линейному закону.

На втором этапе для наборов параметров, которым соответствуют бегущие волны, численно интегрируется релейная система уравнений с запаздыванием (18). Нами используется метод VODE, который проверяет задачу на жесткость и для нежестких задач представляет собой неявный метод Адамса, а для жестких — метод из класса BDF (backward differentiation formulas) (см., [18]). В качестве начальных условий для этой системы выбираются функции (62) при  $-1 \leq t \leq 0$  с добавлением малого случайного возмущения. Напомним, что эти функции известны нам в явном виде. На основании результатов этого интегрирования делается вывод об устойчивости или неустойчивости бегущей волны с номером  $k$ .

Вычисления показали, что для числа осцилляторов  $m$  от 5 до 20 оказывается устойчивой лишь одна из имеющихся бегущих волн. При  $m \geq 21$  удается получить две устойчивые волны. Большого числа сосуществующих устойчивых волн в рамках данного эксперимента получить

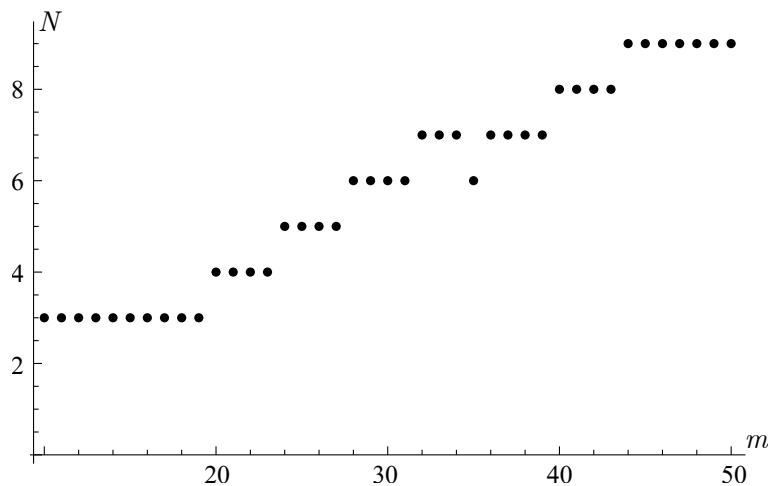


Рис. 5. Число  $N(m)$  устойчивых бегущих волн (71) (подходящих значений  $k$ ) при  $10 \leq m \leq 50$

Fig. 5. Number  $N(m)$  of stable traveling waves (71) (suitable values of  $k$ ) at  $10 \leq m \leq 50$

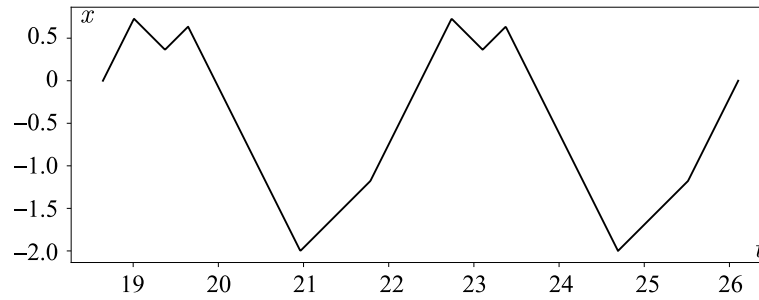


Рис. 6. Зависимость от  $t$  первой компоненты  $x_1(t)$  устойчивой бегущей волны системы (18) при  $m = 19$  и  $k = 16$

Fig. 6. Dependence on  $t$  of the first component  $x_1(t)$  of a stable traveling wave of the system (18) for  $m = 19$  and  $k = 16$

не удалось. В то же время численный счет показал, что релейная система (18), а значит, и релаксационная система (15), имеют и другие устойчивые периодические режимы.

На рис. 6 изображена зависимость от  $t$  первой компоненты  $x_1(t)$  устойчивой бегущей волны системы (18) при  $m = 19$  и  $k = 16$ , все остальные компоненты решения этой системы представляют собой ту же самую функцию  $x_1(t)$  с соответствующим номеру волны сдвигом (см. формулу (71)).

### Заключение

В настоящей статье мы переосмыслили и уточнили предложенный в [8] способ математического моделирования химических синапсов. В отличие от модели (10), в новой ее версии (14) в полном объеме учтены требования вольтерровской структуры соответствующих уравнений и гипотеза о насыщающей проводимости. Кроме того, как уже отмечалось выше, соблюден и так называемый принцип единообразия: новая математическая модель (14) аналогична предложенной в [14] модели электрических синапсов.

Завершая рассмотрение модели (14), отметим две нерешенные задачи. Первая из них связана с пороговым значением  $u = u_{**}$  из (8). В случае системы (14) мы изначально считали, что аналог этого значения равен единице. Если же это не так, то вместо (14) приходим к системе

$$\dot{u}_j = \lambda [f(u_j(t-1)) + b g(u_{j-1}/u_{**}) h(u_j/u_{j-1})] u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (72)$$

где  $u_0 = u_m$ ,  $u_{**} = \exp(\lambda d)$ ,  $d = \text{const} \in \mathbb{R}$ .

Как и в случае (14), системе (72) отвечает аналогичная (18) релейная система

$$\dot{x}_j = 1 - (a+1)H(x_j(t-1)) + b H(x_{j-1} - d)[1 - (c+1)H(x_j - x_{j-1})], \quad 1 \leq j \leq m, \quad (73)$$

где  $x_0 = x_m$ . Представляет интерес проблема отыскания устойчивых бегущих волн сначала у предельного объекта (73), а затем и у исходной системы (72). Ясно, что по аналогии с проделанным в данной работе анализом, сформулированная проблема вполне может быть решена посредством надлежащего сочетания аналитических и численных методов.

Другая нерешенная задача состоит в исследовании аттракторов аналогичной (14) полностью связанной сети взаимодействующих нейронов. Соответствующая математическая модель имеет вид

$$\dot{u}_j = \lambda \left[ f(u_j(t-1)) + b \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m g(u_s) h(u_j/u_s) \right] u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (74)$$

где функции  $f$ ,  $g$ ,  $h$  те же самые, что и в (14),  $b = \text{const} > 0$ ,  $\lambda \gg 1$ . Согласно общим результатам из [16, 19] в системе (74) могут существовать как периодические режимы двухкластерной синхронизации, так и бегущие волны. Проблемы отыскания указанных периодических движений пока не решены.

### Список литературы

1. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *Journal of Physiology*. 1952. Vol. 117. P. 500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
2. *Ижикевич Е. М.* Динамические системы в нейронауке. Геометрия возбудимости и пачечной активности. М.; Ижевск: Ижевский ин-т компьютерных исследований, 2018. 520 с.
3. *Колесов А. Ю., Колесов Ю. С.* Релаксационные колебания в математических моделях экологии. Тр. МИАН, 199. М.: Наука, 1993. 126 с.
4. *Майоров В. В., Мышкин И. Ю.* Математическое моделирование нейронной сети на основе уравнений с запаздыванием // *Матем. моделирование*. 1990. Vol. 2, no. 11. С. 64–76.
5. *Hutchinson G. E.* Circular causal systems in ecology // *Ann. N. Y. Acad. of Sci.* 1948. Vol. 50, no. 4. С. 221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
6. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // *УМН*. 2015. Т. 70, №3(423). С. 3–76.
7. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Об одной модификации уравнения Хатчинсона // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Vol. 50, no. 12. С. 2099–2112.
8. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Об одном способе математического моделирования химических синапсов // *Дифференц. уравнения*. 2013. Vol. 49, no. 10. С. 1227–1244. DOI: 10.1134/S0374064113100014.
9. *Somers D., Kopell N.* Rapid synchronization through fast threshold modulation // *Biol. Cybern.* 1993. Vol. 68. P. 393–407. DOI: 10.1007/BF00198772.
10. *Kopell N., Somers D.* Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions // *J. Math. Biol.* 1995. Vol. 33. P. 261–280. DOI: 10.1007/BF00169564.
11. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 248 с.
12. *FitzHugh R. A.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical J.* 1961. Vol. 1. P. 445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
13. *Terman D., Borisyuk A, Friedman A, Ermentrout B.* An Introduction to Dynamical Systems and Neuronal Dynamics // *Tutorials in Mathematical Biosciences I. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. P. 21–68. DOI: 10.1007/978-3-540-31544-5\_2.
14. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю.* Об одном способе математического моделирования электрических синапсов // *Дифференц. уравнения*. 2022. Vol. 58, no. 7. С. 867–881. DOI: 10.31857/S0374064122070019.
15. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Реле с запаздыванием и его  $C^1$ -аппроксимация // В сб.: *Динамические системы и смежные вопросы: К 60-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова*. Тр. МИАН. 1997. Vol. 216. С. 126–153.
16. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю.* Бегущие волны в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2022. Vol. 62, no. 1. С. 71–89. DOI: 10.31857/S0044466922010070.
17. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Явление буферности в кольцевых генных сетях // *ТМФ*. 2016. Vol. 187, no. 3. С. 560–579. DOI: 10.4213/tmf9052.
18. *Brown P. N., Byrne G. D., and Hindmarsh A. C.* VODE: A Variable Coefficient ODE Solver // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1989. Vol. 10, no. 5. P. 1038–1051. DOI: 10.1137/0910062.

19. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Периодические режимы двухкластерной синхронизации в полносвязных сетях нелинейных осцилляторов // ТМФ. 2022. Т. 212, № 2. С. 213–233. DOI: 10.4213/tmf10191.

## References

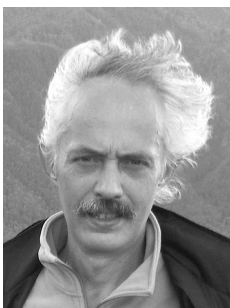
1. Hodgkin AL, Huxley AF. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Journal of Physiology*. 1952;117:500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
2. Izhikevich Eugene M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. Cambridge, Massachusetts, USA: The MIT Press; 2007. 464 p.
3. Kolesov AY, Kolesov YS. Relaxational oscillations in mathematical models of ecology. *Proc. Steklov Inst. Math*. 1995;199:1–126.
4. Maiorov VV, Myshkin IY. Mathematical modeling of a neuron net on the basis of the equation with delays. *Math. Models Comput. Simul*. 1990;2(11):64–76 (in Russian).
5. Hutchinson GE. Circular causal systems in ecology // *Ann. N. Y. Acad. of Sci*. 1948;50(4): 221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
6. Glyzin SD, Kolesov AYu, Rozov NKh. Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons. *Russian Math. Surveys*. 2015;70(3):383–452. DOI: 10.1070/RM2015v070n03ABEH 004951.
7. Kolesov AYu, Mishchenko EF, Rozov NKh. A modification of Hutchinson’s equation. *Comput. Math. Math. Phys*. 2010;50(12):1990–2002. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
8. Glyzin SD, Kolesov AYu, Rozov NKh. On a method for mathematical modeling of chemical synapses. *Differential Equations*. 2015;70(3):383–452. DOI: 10.1134/S0012266113100017.
9. Somers D, Kopell N. Rapid synchronization through fast threshold modulation. *Biol. Cybern*. 1993;68:393–407. DOI: 10.1007/BF00198772.
10. Kopell N, Somers D. Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions. *J. Math. Biol*. 1995;33:261–280. DOI: 10.1007/BF00169564.
11. Mishchenko EF, Rozov NKh. *Differential Equations with Small Parameters and Relaxation Oscillations*. New York, NY: Springer; 1980. 228 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-9047-7.
12. FitzHugh RA. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical J*. 1961;1(6):445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
13. Terman D. An Introduction to Dynamical Dystems and Neuronal Dynamics. In: *Tutorials in Mathematical Biosciences I. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2005. P. 21–68. DOI: 10.1007/978-3-540-31544-5\_2.
14. Glyzin SD, Kolesov AYu. On a Method of Mathematical Modeling of Electrical Synapses. *Diff Equat*. 2022;58:853–868. DOI: 10.1134/S0012266122070011.
15. Kolesov AYu, Mishchenko EF, Rozov NKh. Relay with delay and its  $C^1$ -approximation. *Proc. Steklov Inst. Math*. 1997;216:119–146.
16. Glyzin SD, Kolesov AYu. Traveling waves in fully coupled networks of linear oscillators. *Comput. Math. Math. Phys*. 2022;62(1):66–83. DOI: 10.1134/S0965542522010079.
17. Glyzin SD, Kolesov AYu, Rozov NKh. Buffering in cyclic gene networks. *Theoret. and Math. Phys*. 2016;187(3):935–951. DOI: 10.1134/S0040577916060106.
18. Brown PN, Byrne GD, Hindmarsh AC. VODE: A Variable Coefficient ODE Solver // *SIAM J. Sci. Stat. Comput*. 1989;10(5):1038–1051. DOI: 10.1137/0910062.
19. Glyzin SD, Kolesov AYu. Periodic two-cluster synchronization modes in fully coupled networks of nonlinear oscillators. *Theor. Math. Phys*. 2022;212:1073–1091. DOI: 10.1134/S0040577922080049.





*Глызин Дмитрий Сергеевич* — родился в Ярославле (1983), окончил Ярославский государственный университет (2004). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2006). Область научных интересов: нелинейная динамика, математическое моделирование.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14  
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова  
E-mail: glyzin@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-0701-622X  
AuthorID (eLibrary.Ru): 749418



*Глызин Сергей Дмитриевич* — родился в Новгородской области (1957), окончил Ярославский государственный университет (1979). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ВГУ (1991) и доктора физико-математических наук в НИЯУ МИФИ (2009) в области теории нелинейных колебаний. Профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей. Опубликовал более 100 научных работ. Приказом Министерства образования и науки награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования». Заместитель главного редактора научного журнала «Моделирование и анализ информационных систем».

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14  
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова  
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, glyzin.s@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-6403-4061  
AuthorID (eLibrary.Ru): 35140



*Колесов Андрей Юрьевич* — родился в городе Старый Оскол Белгородской области (1961). Окончил Ярославский государственный университет (1984). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1988) и доктора физико-математических наук (1991) в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН в области дифференциальных уравнений и динамических систем. Профессор кафедры дифференциальных уравнений. Опубликовал более 200 научных работ, среди которых 6 монографий.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14  
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова  
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru  
ORCID: 0000-0001-5066-0881  
AuthorID (eLibrary.Ru): 5544



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(3)

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003098

### Using machine learning algorithms to determine the emotional maladjustment of a person by his rhythmogram\*

S. V. Stasenko<sup>1</sup>✉, O. V. Shemagina<sup>2</sup>, E. V. Eremin<sup>1</sup>, V. G. Yakhno<sup>2</sup>,  
S. B. Parin<sup>1</sup>, S. A. Polevaya<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>Federal Research Center A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics  
of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉stasenko@neuro.nnov.ru, olgashemagina@gmail.com, eugenevc@gmail.com,  
yakhno@appl.sci-nnov.ru, parins@mail.ru, s453383@mail.ru

Received 10.10.2023, accepted 8.11.2023, available online 15.03.2024, published 31.05.2024

**Abstract.** The purpose of this study is to explore the feasibility of identifying emotional maladjustment using machine learning algorithms. *Methods.* Electrocardiogram data were gathered using an event-telemetry approach, employing a software and hardware setup comprising a compact wireless ECG sensor (HxM; Zephyr Technology, USA) and a smartphone equipped with specialized software. For constructing the classifier, the following algorithms were employed: logistic regression, easy ensemble, and gradient boosting. The performance of these algorithms was assessed using the f1 metric. *Results.* It is demonstrated that employing dynamic spectra of the original signals enhances the classification accuracy of the model compared to using the original rhythmograms. *Conclusion.* A method is proposed for automatically determining the level of emotional maladaptation based on an individual's cardiorythmogram. Information from a portable heart sensor, worn by an individual, is transmitted via Bluetooth to a mobile device. Here, the level of emotional maladaptation is assessed through a pre-trained neural network algorithm. When considering a neural network algorithm, it is recommended to employ a classifier trained on spectrograms.

**Keywords:** machine-learning algorithms, electrocardiogram, emotional disadaptation, data analysis.

**Acknowledgements.** The work in terms of collecting and data preprocessing was supported by the Russian Ministry of Science and Education project number 075-15-2021-634, the work in term of data analysis was supported by the frames of the Governmental Project of the Institute of Applied Physics RAS, project No. FFUF-2021-0014, the work in terms of developing the conceptual scheme of the experiment was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project number 22-18-20075).

**For citation:** Stasenko SV, Shemagina OV, Eremin EV, Yakhno VG, Parin SB, Polevaya SA. Using machine learning algorithms to determine the emotional maladjustment of a person by his rhythmogram. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(3):394–404. DOI: 10.18500/0869-6632-003098

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

\*The paper presents materials of a talk given at the conference «Nonlinear dynamics in cognitive research – 2023».

## Использование алгоритмов машинного обучения для определения эмоциональной дезадаптации человека по его ритмограмме\*

С. В. Стасенко<sup>1</sup>✉, О. В. Шемагина<sup>2</sup>, Е. В. Еремин<sup>1</sup>, В. Г. Яхно<sup>2</sup>,  
С. Б. Парин<sup>1</sup>, С. А. Полевая<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского, Россия

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики  
им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

E-mail: ✉ stasenko@neuro.nnov.ru, olgashemagina@gmail.com, eugenevc@gmail.com,  
yakhno@appl.sci-nnov.ru, parins@mail.ru, s453383@mail.ru

Поступила в редакцию 10.10.2023, принята к публикации 8.11.2023,  
опубликована онлайн 15.03.2024, опубликована 31.05.2024

**Аннотация.** Целью настоящего исследования является изучение возможности определения эмоциональной дезадаптации с использованием алгоритмов машинного обучения. **Методы.** Сбор данных электрокардиограммы осуществлялся с помощью событийно-телеметрического метода с использованием программно-аппаратного комплекса, состоящего из миниатюрного беспроводного датчика ЭКГ (HxM; Zephyr Technology, USA) и смартфона со специализированным программным обеспечением. Для построения классификатора были использованы логистическая регрессия, easy ensemble и gradient boosting. Оценка производительности алгоритмов проводилась с использованием f1-метрики. **Результаты.** Показано, что точность классификации модели выше при использовании динамических спектров сигналов, чем при использовании исходных ритмограмм. **Заключение.** Предложен метод определения в автоматическом режиме уровня эмоциональной дезадаптации по кардиоритмограмме человека. Данные с портативного кардиодатчика, закрепленного на человеке, передаются по каналу Bluetooth на мобильное устройство, где при помощи предобученного нейросетевого алгоритма определяется уровень эмоциональной дезадаптации. В качестве нейросетевого алгоритма целесообразно использовать классификатор, обученный на основе спектрограмм.

**Ключевые слова:** алгоритмы машинного обучения, электрокардиограмма, эмоциональная дезадаптация, анализ данных.

**Благодарности.** Работа по сбору и предобработке данных выполнена при поддержке проекта Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2021-634), работа по анализу данных профинансирована Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № FFUF-2021-0014, работа по разработке концептуальной схемы эксперимента выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект номер 22-18-20075).

**Для цитирования:** Стасенко С. В., Шемагина О. В., Еремин Е. В., Яхно В. Г., Парин С. Б., Полевая С. А. Использование алгоритмов машинного обучения для определения эмоциональной дезадаптации человека по его ритмограмме // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 394–404. DOI: 10.18500/0869-6632-003098. EDN: RHZIPK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Introduction

The COVID-19 pandemic has highlighted the connection between pathological conditions and the increased risk of cognitive impairment, which includes SARS, chronic stress, inflammatory syndromes, and coagulation disorders [1]. Subsequently, it was discovered that the SARS-CoV-2 virus can induce significant systemic health alterations in patients, resulting in a post-COVID syndrome characterized by a broad spectrum of symptoms and varying durations [2, 3]. Frequently reported long COVID symptoms include fatigue, memory issues, breathlessness, sleep disturbances, headaches, loss of taste or smell,

\* Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях — 2023».

muscle weakness, fever, cognitive dysfunction, and mental health challenges [4–7]. The development of new methods and approaches to the rapid diagnosis of chronic stress is an urgent task, considering the current epidemiological (Covid-19) situation [8–10]. Psychological stress plays a pivotal role in the development of numerous physical and neurological diseases. The term “stress” is commonly used to refer to both a potent adverse physical and/or psychogenic external environmental impact, and to a state of psychophysiological stress that emerges under such influences, initially aiding a person in adapting to new environmental conditions. Chronic stress, as a long-term psychophysiological burden, can trigger the manifestation or exacerbation of disease symptoms, act as a risk factor, or worsen the severity of the disease. Emotional overstrain reduces an individual’s productivity and the quality of work performed. The clinical implications of chronic emotional stress intersect with neuropsychic anxiety and depressive disorders, significantly diminishing the quality of life for individuals [11]. Primarily, chronic emotional stress has adverse effects on health, and indirectly induces unfavorable endocrine, neuromuscular, and autonomic changes [12]. Daily mental stress underlies many prevalent and serious illnesses, including hypertension, strokes, heart attacks, cancer, and more.

While the cause of acute mental stress is primarily linked to unexpected negative external influences and life changes, the development of chronic stress is largely influenced by a person’s personal characteristics and the inadequate functioning of their psychological adaptation mechanisms. The initial step to overcoming chronic emotional stress involves an individual acknowledging that they are in a state of mental overstrain. Emotions are subjective, and diagnosing them depends on a person’s ability to accurately comprehend and articulate them. However, this ability isn’t equally developed in all individuals [13]. Therefore, establishing a system for swiftly assessing emotional disadaptation in everyday life holds significance in promptly diagnosing emotional overstrain and exhaustion. Providing individuals with information about their current biological state enables timely feedback, indicating the level of their mental stress. This feedback allows them to temporarily alleviate this stress by engaging in physical activity or other pursuits. Special attention is required for individuals who have limited awareness of their emotional state’s nuances.

## 1. Methods

The task of diagnosing a person’s psychophysiological state and the extent of emotional disadaptation, based on the user’s physiological data, is addressed through the method of recording emotional disadaptation using the cardiogram. This method involves employing a mobile ECG sensor, with the sensor’s data transmitted to a mobile application. The application utilizes a neural network algorithm that was previously trained during the calibration phase to automatically classify cardiogram data based on the level of disadaptation (refer to Figure 1). In this developed system, the markers for emotional disadaptation are versatile and don’t necessitate individual calibration for each user. This holds true as long as the algorithm for classifying RR intervals according to disadaptation levels has been pre-trained using a database containing an ample number of distinct user records.

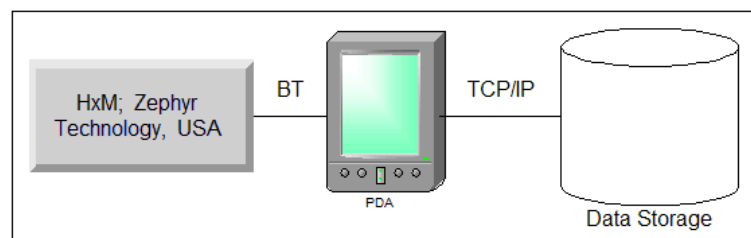


Fig. 1. Diagram of the System for Recording Emotional Disadaptation Levels through Cardiogram

During the calibration phase, a database is compiled, encompassing sequences of RR intervals derived from ECG data of distinct users. This data is concurrently collected alongside the completion of a questionnaire containing four sets of verbal descriptors delineating emotions based on valence (positive/negative) and activity level (tension/relaxation). These descriptors correspond to four fundamental personal needs:

- Security,
- Independence,
- Achievement,
- Unity.

**1.1. Methodology for measuring the level of emotional disadaptation.** The dynamics of the psychophysiological system are assessed using a parallel monitoring scheme that involves tracking parameters of autonomic regulation through electrocardiogram data and conducting tests based on a methodology for determining the level of emotional disadaptation (UED) [14,15]. Next, we will describe the methodology in greater detail.

The method for assessing an individual's emotional disadaptation is based on presenting the patient with four groups of verbal characteristics that reflect various emotional states and the degree of their expression. The analysis involves the verbal characteristics chosen by the individual and their assessment using a point scale. This method includes the presentation of four groups of adjectives that reflect the degree of satisfaction of four fundamental personal needs: security, independence, achievement, and unity-closeness. To evaluate the degree of satisfaction of the basic personal need for security, the following system of adjectives and points is employed:

- “calm, peaceful, serene” – 0 points;
- “wary, worried, excited” – 1 point;
- “anxious, frightened, frightened” – 2 points;
- “tortured, tormented, despairing” – 3 points.

To assess the degree of satisfaction of the basic personal need for independence, the following system of adjectives and points is used:

- “lightened, liberated, liberated” – 0 points;
- “hot, indignant, angry” – 1 point;
- “preoccupied, overloaded, overstressed” – 2 points;
- “depressed, oppressed, constrained” – 3 points.

For the basic personal need of achievement, the following system of adjectives and points is applied:

- “satisfied, joyful, proud” – 0 points;
- “motivated, inspired, inspired” – 1 point;
- “overexcited, frantic, inflated” – 2 points;
- “exhausted, devastated, indifferent” – 3 points.

To assess the degree of satisfaction of the basic personal need for unity, the following system of adjectives and points is used:

- “delighted, pleased, prosperous” – 0 points;
- “interested, enthusiastic, admiring” – 1 point;
- “upset, hurt, disappointed” – 2 points;
- “abandoned, lonely, sad” – 3 points.

Each basic personal need is evaluated using a circular scale divided into four equal quadrants intersected by two perpendicular lines at a 45° angle to the horizontal. At each intersection of these lines with the circle, three adjectives are placed, reflecting different degrees of satisfaction of the basic

personal need under examination. When the individual selects words that correspond to their condition, a mark is made on the circular scale. The mark may either align with the group of words chosen or, when two different groups of words are selected, fall on a circle or segment between those groups.

Based on the location of this mark, the number of points scored by the individual for each of the four basic personal needs is determined as follows: 1) If the mark is on the border between quadrants, the higher of the two values is assigned; 2) If the mark is in the center of the circle, it is excluded from the analysis.

Then, the average score for all four basic personal needs is calculated. The degree of emotional maladjustment is judged based on this average score:

- 0 points: No emotional disadaptation, physiological relaxation;
- 1 point: Mild emotional disadaptation, physiological stress;
- 2 points: Moderately expressed emotional disadaptation, pathological tension;
- 3 points: Pronounced emotional disadaptation, pathological relaxation.

Telemetric measurements of the electrocardiogram were conducted using a software and hardware complex comprising a compact wireless ECG sensor (HxM; Zephyr Technology, USA) along with a smartphone equipped with specialized software (refer to Figure 1).

Based on the gathered data from different users or an individual user, the algorithm for classifying the sequence of RR intervals was trained, incorporating labels denoting the user's degree of emotional disadaptation.

The pre-trained classification algorithm is subsequently applied to novel RR interval sequence data to autonomously ascertain the level of disadaptation, eliminating the need for a questionnaire.

**1.2. Data for constructing a classifier.** In constructing the classifier, data obtained from users' heart rhythmograms were utilized (refer to Figure 2). Each data entry corresponded to the level of emotional disadaptation, as determined through a questionnaire. The compiled database encompasses a total of 2222 distinct records.

Each entry consists of a collection of files with the following content:

- *rr\_filter.csv* – Depicts the correlation between the RR-interval value (*RR\_filter*) and time (in milliseconds) within the 5-minute period before the test for emotional disadaptation level determination. This file also includes the time of test completion,
- *info.csv* – Contains data such as the start time of recording (*time*), post ID (*session\_id*), subject identifier (*person\_id*), age (*old*) and the gender of the subject (*gender*),
- *uad.csv* – encompasses time stamps for the test's initiation (*ms\_begin*) and conclusion (*ms\_end*) measured in milliseconds from the recording's start time), the test result indicating varying degrees of satisfaction regarding the four fundamental personal needs—safety, independence, achievement, unity-closeness (U1; U2; U3; U4), the subjective emotional disadaptation level, and the average satisfaction level of the four fundamental personal needs (*medium*).

The time required for subjects to complete the test varied, leading to differing durations of the recorded data. This variability could be inconvenient for the algorithms used in classifier construction. To address this, all records were segmented into sections of 100 samples, commencing from the end of each record. This approach was chosen as the segments coinciding with the time of questionnaire completion were deemed the most informative. Fragments of records containing fewer than 100 samples were disregarded.

All data were standardized and classified into two categories: records featuring an emotional disadaptation level of 0 or 1, as determined by questionnaire results, were categorized as class 0, signifying an absence of disadaptation. Conversely, the remaining records belonged to class 1, indicating the presence of emotional disadaptation.



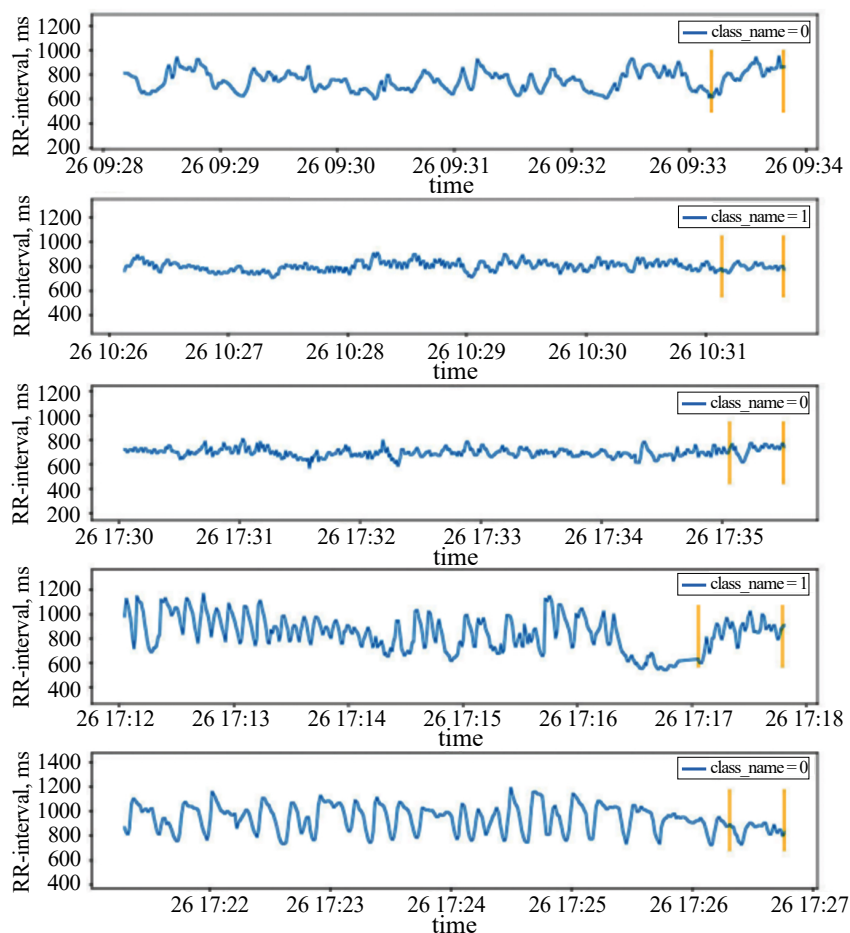


Fig. 2. Examples of cardiograms are provided. The yellow markers signify the interval during which the test is conducted. The graph indicates the classification belonging to a specific class (*class\_name*) (color online)

**1.3. Machine-learning algorithms.** The subsequent algorithms were employed for constructing the classifiers.

1. Logistic regression [16] — is a method for constructing a classifier based on linear models of the following type:  $\hat{y}(w, x) = w_0 + w_1x_1 + \dots + w_px_p$ , where  $\hat{y}(w, x)$  is the predicted value. The task of training a linear classifier is to adjust the weight vector  $w$  based on the sample  $X^m$ . In logistic regression, for this, the problem of empirical risk minimization is solved with a special type of loss function:  $\min_{w,c} \frac{1}{2}w^T w + C \sum_{i=1}^n \log(\exp(-y_i(X_i^T w + c)) + 1)$ . To address the optimization problem, the Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm is employed.
2. Easy ensemble [17] — the concept involves training an ensemble of classifiers, each independently determining the classification of an object into a specific class. The ultimate decision is reached through a voting process. This algorithm is particularly applicable to unbalanced data. Training the classifiers involves the entire minority class along with a subset of the majority class. The key parameters of the ensemble include the number of learners (set to 10 in our case) and the algorithm used for training each classifier within the ensemble (we use AdaBoost [19]).
3. Gradient boosting [18] — the concept involves amalgamating multiple weak classifiers that rely on decision trees to form a robust classifier.

These algorithms are implemented in the Scikit-learn library [20] and the Imbalanced-learn library [21].



## 2. Results

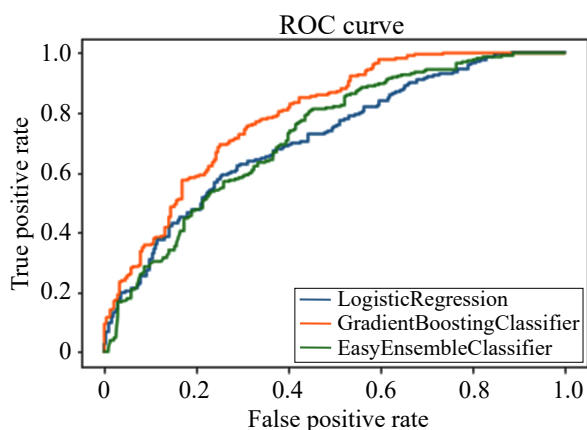


Fig. 3. Classification results based on ROC curves for three classification algorithms: logistic regression, gradient boosting, and EasyEnsembleClassifier (color online)

80% of the generated database was utilized for training the classifiers. The remaining 20% constituted the test sample. During the testing phase, the records requiring classification were segmented into segments of 100 samples each. For each segment, the classifier rendered a decision, and the ultimate decision was established as the arithmetic mean of the class label values for each segment. Rounding was conducted according to conventional mathematical rounding rules.

The outcomes of the classifiers constructed using the aforementioned algorithms are presented in (refer to Figure 3).

As evident from the graph above, the classifier based on gradient boosting exhibited the most favorable performance (refer to Figure 4).

	precision	recall	f1-score	support
0	0.75	0.66	0.70	243
1	0.69	0.77	0.73	235
accuracy			0.72	478
macro avg	0.72	0.72	0.71	478
weighted avg	0.72	0.72	0.71	478

Fig. 4. Precision-Recall Table for Gradient Boosting Classification

**2.1. Utilizing dynamic spectra for classifier construction.** The drawback of employing the original rhythmogram recordings is the challenge of achieving temporal synchronization, particularly when segmenting records. Thus, transitioning to a feature space capable of mitigating this limitation appeared logical.

For constructing a classifier rooted in dynamic spectra, the initial signal was partitioned into segments comprising 300 samples each. The spectrum was computed within a window of 100 samples. By incrementing the window by 1 count and computing the spectrum anew within the adjusted window, a spectrogram was generated (refer to Figures 5 and 6).

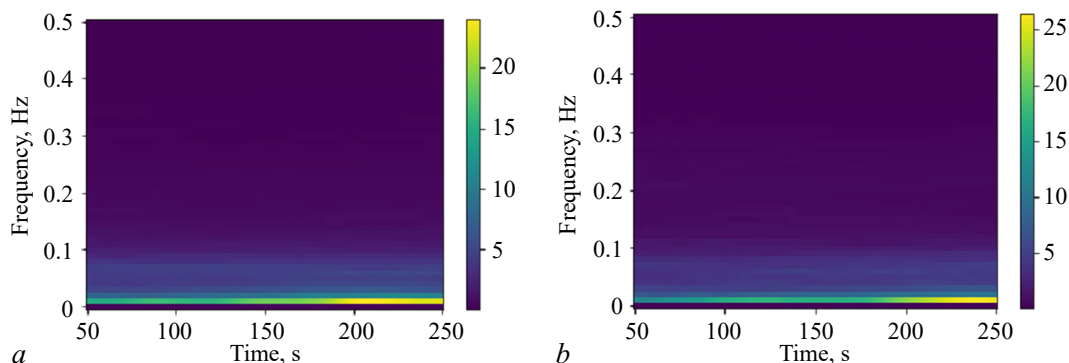


Fig. 5. Averaged spectrogram for training sample records: *a* – belonging to class 0, *b* – belonging to class 1 (color online)

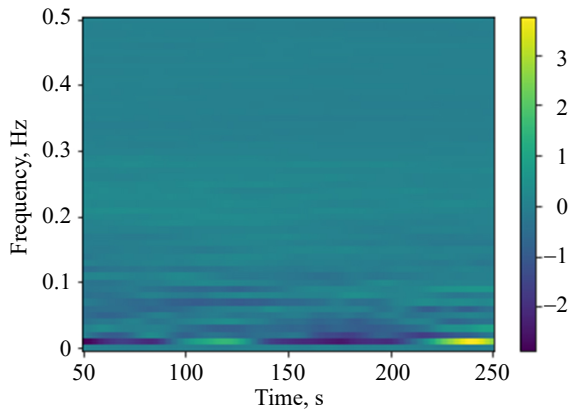


Fig. 6. Difference spectrogram (color online)

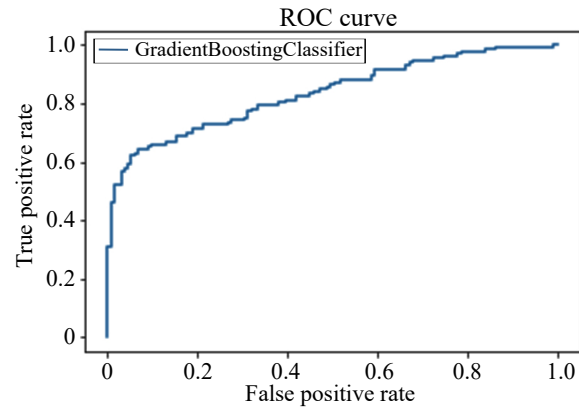


Fig. 7. Classification results based on the ROC curve for the classification algorithm built on spectrograms – gradient boosting

	precision	recall	f1-score	support
0	0.73	0.85	0.78	131
1	0.82	0.68	0.74	132
accuracy			0.76	263
macro avg	0.77	0.76	0.76	263
weighted avg	0.77	0.76	0.76	263

Fig. 8. Precision-Recall Table for Gradient Boosting Classification built on spectrograms

To construct a classifier based on spectrograms, each spectrogram is transformed into a row vector. As our chosen classification algorithm, we opt for the well-established GradientBoostingClassifier.

The performance outcome of the constructed classifier surpasses that of the classifier utilizing the original rhythmograms (refer to Figures 7 and 8).

### Conclusion

In this paper, we propose a novel method for assessing the level of emotional disadaptation through an individual’s cardiogram. This determination occurs automatically. Information from a portable heart sensor, affixed to an individual, is transmitted via Bluetooth to a mobile device, where the level of emotional disadaptation is ascertained using a pre-trained neural network algorithm. When employing a neural network algorithm, it is recommended to utilize a classifier trained on spectrograms rather than the raw cardiogram data.

### References

1. Miskowiak KW, Johnsen S, Sattler SM, Nielsen S, Kunalan K, Rungby J, Lapperre T, Porsberg CM. Cognitive impairments four months after COVID-19 hospital discharge: Pattern, severity and association with illness variables. *European Neuropsychopharmacology*. 2021;46:39–48. DOI: 10.1016/j.euroneuro.2021.03.019.
2. Baig AM. Chronic COVID syndrome: Need for an appropriate medical terminology for long-COVID and COVID long-haulers. *J. Med. Virol.* 2021;93(5):2555–2556. DOI: 10.1002/jmv.26624.

3. Yelin D, Wirtheim E, Vetter P, Kalil AC, Bruchfeld J, Runold M, Guaraldi G, Mussini C, Gudiol C, Pujol M, Bandera A, Scudeller L, Paul M, Kaiser L, Leibovici L. Long-term consequences of COVID-19: research needs. *The Lancet Infectious Diseases*. 2020;20(10):1115–1117. DOI: 10.1016/S1473-3099(20)30701-5.
4. Chen C, Hauptert SR, Zimmermann L, Shi X, Fritsche LG, Mukherjee B. Global prevalence of post-coronavirus disease 2019 (COVID-19) condition or long COVID: A meta-analysis and systematic review. *The Journal of Infectious Diseases*. 2022;226(9):1593–1607. DOI: 10.1093/infdis/jiac136.
5. Alkodaymi MS, Omrani OA, Fawzy NA, Shaar BA, Almamlouk R, Riaz M, Obeidat M, Obeidat Y, Gerberi D, Taha RM, Kashour Z, Kashour T, Berbari EF, Alkattan K, Tleyjeh IM. Prevalence of post-acute COVID-19 syndrome symptoms at different follow-up periods: a systematic review and meta-analysis. *Clinical Microbiology and Infection*. 2022;28(5):657–666. DOI: 10.1016/j.cmi.2022.01.014.
6. Stasenکو SV, Kazantsev VB. Covid olfactory dysfunction model. In: 2023 Fifth International Conference Neurotechnologies and Neurointerfaces (CNN). IEEE; 2023. P. 82–85.
7. Stasenکو SV. Mean-field model of tripartite synapse with infected glial cells. In: 2023 Fifth International Conference Neurotechnologies and Neurointerfaces (CNN). IEEE; 2023. P. 78–81.
8. Song M. Psychological stress responses to COVID-19 and adaptive strategies in China. *World Development*. 2020;136:105107. DOI: 10.1016/j.worlddev.2020.105107.
9. Stasenکو SV, Hramov AE, Kazantsev VB. Loss of neuron network coherence induced by virus-infected astrocytes: a model study. *Scientific Reports*. 2023;13(1):6401. DOI: 10.1038/s41598-023-33622-0.
10. Stasenکو SV, Kovalchuk AV, Eremin EV, Drugova OV, Zarechnova NV, Tsirkova MM, Permyakov SA, Parin SB, Polevaya SA. Using machine learning algorithms to determine the post-COVID state of a person by their rhythmogram. *Sensors*. 2023;23(11):5272. DOI: 10.3390/s23115272.
11. Aleksandrovsky YA. *Borderline Mental Races Construction*. Moscow: Medicina; 2000. 496 p. (in Russian).
12. Parfenov VA, Yakhno NN. *General Neurology*. Moscow: MIA; 2000. 209 p. (in Russian).
13. Wise TN, Mann LS, Shay L. Alexithymia and the five-factor model of personality. *Comprehensive Psychiatry*. 1992;33(3):147–151. DOI: 10.1016/0010-440x(92)90023-j.
14. Runova EV, Grigoreva VN, Bakhchina AV, Parin SB, Shishalov IS, Kozhevnikov VV, Nekrasova MM, Karatushina DI, Grigoreva KA, Polevaya SA. Vegetative correlates of conscious representation of emotional stress. *Modern Technologies in Medicine*. 2013;5(4):69–76.
15. Grigorieva VN, Tkhostov AS. A method for assessing emotional new human condition. Patent No. 2291720.2007 Russian Federation, IPC A61M21/00: appl. 08.09.2005: publ. 20.01.2007. Assignee: Nizhny Novgorod State Medical Academy of the Federal Agency for Health and Social Development. 23 p. (in Russian).
16. Hosmer DW, Lemeshow S. *Applied Logistic Regression*. 2nd ed. New York, Chichester: Wiley; 2002. 392 p. DOI: 10.1002/0471722146.
17. Liu X-Y, Wu J, Zhou Z-H. Exploratory undersampling for class-imbalance learning. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*. 2009;39(2):539–550. DOI: 10.1109/TSMCB.2008.2007853.
18. Hastie T, Tibshirani R, Friedman J. Boosting and additive trees. In: *The Elements of Statistical Learning*. Springer Series in Statistics. New York: Springer; 2009. P. 337–387. DOI: 10.1007/978-0-387-84858-7\_10.
19. Schapire RE. Explaining AdaBoost. In: Schölkopf B, Luo Z, Vovk V, editors. *Empirical Inference*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2013. P. 37–52. DOI: 10.1007/978-3-642-41136-6\_5.

20. Kramer O. Scikit-learn. In: Machine Learning for Evolution Strategies. Vol. 20 of Studies in Big Data. Cham: Springer; 2016. P. 45–53. DOI: 10.1007/978-3-319-33383-0\_5.
21. Lemaître G, Nogueira F, Aridas CK. Imbalanced-learn: A python toolbox to tackle the curse of imbalanced datasets in machine learning. The Journal of Machine Learning Research. 2017; 18(1):1–5.



*Стасенко Сергей Викторович* — родился в 1988 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского. Кандидат физико-математических наук (2017). Доцент кафедры нейротехнологий ННГУ. Область научных интересов: математическая биофизика, математическое моделирование живых систем, моделирование нейрон-астроцитарного и нейрон-ВКМ взаимодействий, спайковые нейронные сети и анализ данных.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: stasenko@neuro.nnov.ru  
 ORCID: 0000-0002-3032-5469  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 655311



*Шемагина Ольга Владимировна* — кандидат технических наук. Научный сотрудник лаборатории автоволновых процессов ИПФ РАН. Область научных интересов: машинное обучение, анализ данных, математическое моделирование.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
 Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН  
 E-mail: olgashemagina@gmail.com  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 13394



*Еремин Евгений Викторович* — родился в Горьком (1977). Окончил радиофизический факультет ННГУ по направлению «Физика в медицине и экологии». Младший научный сотрудник кафедры психофизиологии факультета социальных наук ННГУ им. Лобачевского. Автор более 30 научных публикаций в российских и международных изданиях. Область научных интересов: физика, математика, анализ сердечного ритма.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: eugenevc@gmail.com  
 ORCID: 0000-0001-5707-6063  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 128231



*Яхно Владимир Григорьевич* — родился в 1947 году. Доктор физико-математических наук. Заведующий лабораторией в Институте прикладной физики РАН (Нижний Новгород). Научные интересы связаны с исследованием процессов самоорганизации в распределенных неравновесных системах и применением автоволновых представлений для моделирования процессов обработки сенсорных сигналов, развития компьютерных алгоритмов кодирования сложных изображений (разработка биометрических систем); рассмотрением характерных процессов в модельных системах, имитирующих функционирование живых систем. Имеет более 200 научных публикаций (в том числе 2 монографии и 10 патентов).

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
 Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН  
 E-mail: yakhno@appl.sci-nnov.ru  
 ORCID: 0000-0002-4689-472X  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 18659



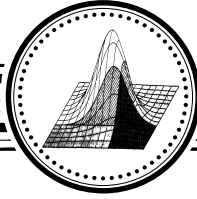
*Парин Сергей Борисович* — родился в Перми (1952). Окончил биологический факультет Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1979). После окончания ГГУ (ныне ННГУ) работает в том же университете, в настоящее время заведует лабораторией когнитивной психофизиологии факультета социальных наук. Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата биологических наук в Институте физиологии им. А. А. Богомольца АН УССР (Киев, 1986) и доктора биологических наук в МГУ (2011) в области физиологии. Опубликовал более 150 научных статей по физиологии экстремальных состояний, нейробиологии, когнитивной психофизиологии, математическому моделированию когнитивных процессов. Автор оригинальной концепции нейрохимических механизмов экстремальных состояний.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: parins@mail.ru  
ORCID: 0000-0001-5721-8762  
AuthorID (eLibrary.Ru): 94923



*Полевая Софья Александровна* — родилась в Горьком (1964). Окончила биологический факультет Горьковского государственного университета (1986). Защитила диссертации на соискание ученой степени кандидата биологических наук (ННГУ, 1997) и доктора биологических наук (ИТЭБ, 2009). В настоящее время заведует кафедрой психофизиологии Нижегородского государственного университета. Научные интересы: физика когнитивных систем, алгоритмы кодирования и распознавания сенсорной информации, динамика функциональных состояний, разработка информационных технологий для персонализированной диагностики и оптимизаций когнитивного потенциала и адаптационных процессов. Автор более 300 научных публикаций и 10 патентов РФ.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: s453383@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-3896-787X  
AuthorID (eLibrary.Ru): 77263



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(3)

Научная статья  
УДК 537.86

DOI: 10.18500/0869-6632-003104  
EDN: MYWMNM

### Детектирование сфокусированных пучков поверхностных магнитостатических волн в структурах YIG/Pt

М. Е. Селезнев<sup>1,2</sup>✉, Г. М. Дудко<sup>1</sup>, Ю. В. Никулин<sup>1,2</sup>, Ю. В. Хивинцев<sup>1,2</sup>, В. К. Сахаров<sup>1,2</sup>,  
А. В. Кожевников<sup>1</sup>, С. Л. Высоцкий<sup>1,2</sup>, Ю. А. Филимонов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

<sup>2</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉mixanich94@mail.ru, dugal\_2010@hotmail.com, yvnikulin@gmail.com, khivintsev@gmail.com,  
valentin@sakharov.info, kzhavl@gmail.com, vysotsl@gmail.com, yuri.a.filimonov@gmail.com

Поступила в редакцию 13.12.2023, принята к публикации 2.02.2024,

опубликована онлайн 10.04.2024, опубликована 31.05.2024

**Аннотация.** Цель работы — с помощью обратного спинового эффекта Холла экспериментально исследовать детектирование сфокусированных пучков поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) в интегральных тонкопленочных микроструктурах YIG(3.9 мкм)/Pt(4 нм), где фокусировка обеспечивалась за счет криволинейной формы возбуждающей антенны. Провести сравнение со случаем детектирования ПМСВ, возбуждаемых прямолинейной антенной. **Методы.** Эксперименты выполнялись с макетом типа линии задержки на основе структуры YIG/Pt. Исследовались амплитудно-частотные характеристики макета YIG/Pt и частотная зависимость ЭДС ( $V(f)$ ), наводимая в платине. **Результаты.** Показано, что на частотах  $f$  вблизи длинноволновой границы спектра ПМСВ величина ЭДС  $V(f)$  генерируемой сфокусированной ПМСВ, может в разы превышать значения  $V(f)$  в случае возбуждения ПМСВ обычной (прямой) антенной. При этом в коротковолновой части спектра, наоборот, величина ЭДС, генерируемая сфокусированным пучком ПМСВ, оказывается заметно меньше. Такое поведение связано с хроматической абберацией фокусирующих антенн ПМСВ, проявляющейся в частотной зависимости фокусного расстояния антенны, что подтверждается результатами проведенного микромагнитного моделирования. Показано, что падение сигнала ЭДС, генерируемого сфокусированным пучком ПМСВ, в коротковолновой части спектра связано с выходом фокуса на участок структуры, не покрытой пленкой Pt. При этом рост  $V(f)$  в длинноволновой области спектра ПМСВ объясняется увеличением погонной плотности мощности ПМСВ и формированием каустик под пленкой Pt. **Заключение.** Полученные результаты могут быть применимы для разработки высокочувствительных детекторов спиновых волн и создания устройств спиновой логики.

**Ключевые слова:** структуры YIG/Pt, фокусирующие антенны, поверхностные магнитостатические волны, обратный спиновый эффект Холла, микромагнитное моделирование.

**Благодарности.** Работа поддержана грантом РФФ № 22-19-00500.

**Для цитирования:** Селезнев М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А. Детектирование сфокусированных пучков поверхностных магнитостатических волн в структурах YIG/Pt // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 405–418. DOI: 10.18500/0869-6632-003104. EDN: MYWMNM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Detection of focused beams of surface magnetostatic waves in YIG / Pt structures

M. E. Seleznev<sup>1,2</sup>✉, G. M. Dudko<sup>1</sup>, Y. V. Nikulin<sup>1,2</sup>, Y. V. Khivintsev<sup>1,2</sup>, V. K. Sakharov<sup>1,2</sup>,  
A. V. Kozhevnikov<sup>1</sup>, S. L. Vysotskii<sup>1,2</sup>, Y. A. Filimonov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

<sup>2</sup>Saratov State University, Russia

E-mail: ✉mixanich94@mail.ru, dugal\_2010@hotmail.com, yvnikulin@gmail.com, khivintsev@gmail.com,  
valentin@sakharov.info, kzhav1@gmail.com, vysotsl@gmail.com, yuri.a.filimonov@gmail.com

Received 13.12.2023, accepted 2.02.2024, available online 10.04.2024, published 31.05.2024

**Abstract.** The purpose of this work is to experimentally study, using the inverse spin Hall effect (ISHE), the detection of focused beams of magnetostatic surface waves (MSSW) in integrated YIG (3.9  $\mu\text{m}$ )/Pt (4 nm) thin-film microstructures, where the focusing effect was ensured by the curvilinear shape of the exciting antenna. Make a comparison with the case of detecting MSSWs excited by a rectilinear antenna. **Methods.** Experiments were carried out using the delay line structures based on the YIG/Pt. The amplitude-frequency characteristics of the YIG/Pt structure and the frequency dependence of the EMF ( $V(f)$ ) induced in platinum were studied. **Results.** It was shown that at frequencies  $f$  near the long-wavelength limit of the MSSW spectrum, the magnitude of the EMF  $V(f)$  generated by a focused MSSW can be several times higher than the values of  $V(f)$  in the case of MSSW excitation by a common (straight) antenna. In this case, in the short-wavelength part of the spectrum, on the contrary, the magnitude of the EMF generated by the focused MSSW beam turns out to be noticeably smaller. This behavior is associated with chromatic aberration of the focusing antenna for the MSSW, which manifests itself in the frequency dependence of the focal length of the antenna, which is confirmed by the results of micromagnetic modeling. It is shown that the drop in the EMF signal generated by a focused MSSW beam in the short-wavelength part of the spectrum is associated with the focus reaching the area of the YIG not covered with the Pt film. In this case, the increase in  $V(f)$  in the long-wavelength region of the MSSW spectrum is explained by an increase in the linear power density of the MSSW and the formation of caustics under the Pt film. **Conclusion.** Obtained results can be used for the development of highly sensitive spin wave detectors and the creation of spin logic devices.

**Keywords:** YIG / Pt structures, focusing antennas, magnetostatic surface waves, inverse spin Hall effect, micromagnetic modeling.

**Acknowledgements.** The work was supported by RSF grant No. 22-19-00500.

**For citation:** Seleznev ME, Dudko GM, Nikulin YV, Khivintsev YV, Sakharov VK, Kozhevnikov AV, Vysotskii SL, Filimonov YA. Detection of focused beams of surface magnetostatic waves in YIG / Pt structures. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(3):405–418. DOI: 10.18500/0869-6632-003104

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Задачи генерации, переноса и детектирования спиновых токов (токов углового момента электрона) являются ключевыми для спинтроники [1–7]. При этом особый интерес с точки зрения разработки энергоэффективной элементной базы представляют структуры на основе пленок железиттриевого граната (YIG) и платины (Pt), где перенос спинового тока может осуществляться спиновыми волнами (СВ) без участия движения зарядов. Эффекты распространения и интерференции СВ в магнитных микроструктурах могут быть использованы для построения энергоэффективных логических устройств [8, 9], а также для специальной обработки данных, такой как распознавание образов [10, 11], простая факторизация [12], визуализация магнитных частиц [13], спектральный анализ [14]. Разрабатываются также вычислительные алгоритмы, которые используют формирование интерференционной картины между когерентными волновыми

Селезнёв М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К.,  
Кожевников А. В., Высокский С. Л., Филимонов Ю. А.



фронтами для реализации небулевых вычислений [10, 11, 15–18] и методы обработки магнитных изображений на принципах спин-волновой Фурье-оптики [19].

Реализация таких функциональных спин-волновых устройств обработки информации может быть основана на принципах спин-волновой оптики, что предполагает интеграцию элементов спин-волновой оптики (призм, линз, зеркал, сплиттеров) с магнитными пленками [17–22]. При этом становится актуальной задача интеграции с магнитными пленками излучателей и приемников СВ, способных эффективно генерировать и детектировать направленные пучки СВ, сформированные без геометрических ограничений на волноведущую среду. Для этой цели могут быть использованы как точечные источники СВ [17, 23–28], так и специально сконструированные фокусирующие антенны СВ [21, 29–32].

В структурах спинтроники типа YIG/Pt для возбуждения и детектирования СВ могут применяться методы, основанные на генерации и детектировании спинового тока [3–7]. В таких структурах может осуществляться взаимное преобразование спинового и электрического токов за счет эффектов электрон-магнитного рассеяния на границе YIG/Pt [33]. При этом постоянный электрический ток в пленке платины за счет спинового эффекта Холла может приводить к генерации СВ [33, 34], а за счет обратного спинового эффекта Холла (ОСЭХ) можно осуществлять обратное преобразование спинового тока в электрический [33, 35]. До сих пор детектирование СВ с помощью ОСЭХ исследовалось при возбуждении СВ прямолинейными микрополосковыми антеннами, когда эффекты фокусировки СВ отсутствовали [36–43]. Целью данной работы является исследование детектирования сфокусированных пучков поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) в структурах YIG/Pt.

Отметим, что конструкция фокусирующих антенн СВ зависит от характера дисперсии СВ. Фокусирующие элементы для СВ с изотропной дисперсией, такие как прямые объемные СВ в нормально намагниченной пленке феррита, имеют вогнутую форму относительно фокуса [21] по аналогии с традиционной оптикой. Напротив, для волн с анизотропной дисперсией, таких как ПМСВ или обратные объемные магнитостатические волны (ООМСВ) в касательно намагниченных пленках, форма фокусирующих элементов выпуклая [21, 32]. В данной работе будет исследовано детектирование в структуре YIG/Pt пучков ПМСВ, сфокусированных с помощью криволинейной микрополосковой антенны. Кроме того, мы сопоставим эффективность детектирования ПМСВ при возбуждении криволинейной и прямолинейной антеннами.

## 1. Исследуемая структура и методика эксперимента

Эксперименты выполнялись со структурами YIG/Pt типа линии задержки ПМСВ, микрофотография которых приведена на рис. 1, а. Структуры формировались на поверхности пленки YIG толщиной  $d_{YIG} \approx 3.9$  мкм, намагниченностью насыщения  $4\pi M_0 \approx 1750$  Гс, эпитаксиально выращенной на подложке гадолиний-галлиевого граната с кристаллографической ориентацией (111). На поверхности пленки YIG методами магнетронного распыления, фотолитографии и ионного травления формировались пары антенн (1 и 2) с контактными площадками для подключения СВЧ микрозондов, между которыми находилась область, покрытая пленкой Pt. Одна из антенн имела форму прямой микрополоски длиной  $a = 300$  мкм, апертурой  $b = 250$  мкм и шириной  $c = 4$  мкм (рис. 1, б). Другая антенна была фокусирующей и имела выпуклую в сторону пленки Pt криволинейную форму с радиусом закругления  $R = 300$  мкм, апертурой  $b = 250$  мкм и шириной  $c = 4$  мкм (рис. 1, в). Форма фокусирующей антенны рассчитывалась методом, указанным в работе [44]. Пленка платины имела длину  $L = 620$  мкм, ширину  $w = 200$  мкм и толщину  $d_{Pt} = 4$  нм. К пленке платины изготавливались медные контакты (3 и 4) для измерения электродвижущей силы (ЭДС)  $V$ , генерируемой в платине за счет ОСЭХ. Макет помещался в зазор электромагнита так,

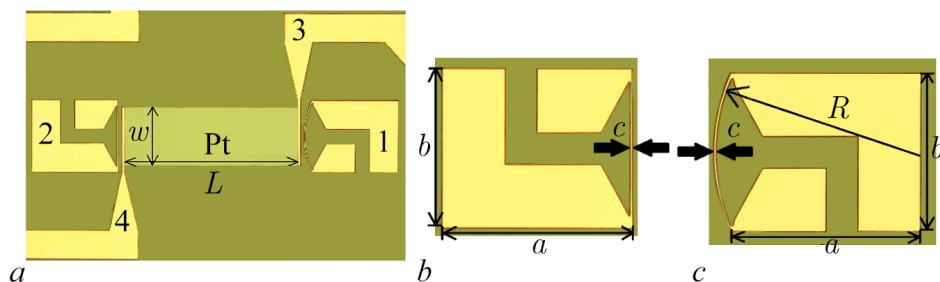


Рис. 1. *a* – Линия задержки ПМСВ на основе структуры YIG/Pt, где 1 и 2 – пара антенн для возбуждения и приема ПМСВ, 3 и 4 – контакты для измерения ЭДС в Pt пленке длиной  $L = 620$  мкм и шириной  $w = 200$  мкм; *b* – форма прямолинейной антенны апертурой  $b = 250$  мкм и шириной  $c = 4$  мкм, длина контактной площадки  $a = 300$  мкм; *c* – форма криволинейной антенны апертурой  $b = 250$  мкм, шириной  $c = 4$  мкм и радиусом кривизны  $R = 300$  мкм, длина контактной площадки  $a = 300$  мкм

Fig. 1. *a* – The delay line structure for MSSW on the base of YIG/Pt sample where 1 and 2 – a pair of antennas for MSSW excitation and reception, 3 and 4 – contacts for EMF measurement in Pt film with the length  $L = 620$   $\mu\text{m}$  and width  $w = 200$   $\mu\text{m}$ ; *b* – the form of straight-line antenna with the aperture  $b = 250$   $\mu\text{m}$  and width  $c = 4$   $\mu\text{m}$ , the length of the contact pad  $a = 300$   $\mu\text{m}$ ; *c* – the form of curvilinear antenna with the aperture  $b = 250$   $\mu\text{m}$ , width  $c = 4$   $\mu\text{m}$  and radius of curvature  $R = 300$   $\mu\text{m}$ , the length of the contact pad  $a = 300$   $\mu\text{m}$

что магнитное поле  $\vec{H}$  было направлено касательно к пленке YIG и параллельно прямолинейной микрополоске, что отвечало геометрии возбуждения ПМСВ [45].

Измерения проводились по методике, изложенной в работах [40–43]. Проводилось сравнение частотных зависимостей ЭДС  $V(f)$ , полученных при возбуждении ПМСВ фокусирующим (см. рис. 1, *c*) и прямолинейным (см. рис. 1, *b*) преобразователями. При этом учитывалось, что из-за невзаимности распространения ПМСВ было необходимо вместе со сменой входной антенны изменить направление магнитного поля  $\vec{H}$  на противоположное, чтобы в обоих случаях ПМСВ распространялась вдоль границы YIG/Pt.

## 2. Результаты и обсуждение

На рис. 2, *a* представлены частотные зависимости коэффициента передачи  $S_{12}$ , измеренные при  $P_{\text{in}} = -20$  дБм и  $H = 939$  Э в структурах YIG/Pt, где одна из антенн имеет криволинейную форму и фокусирует ПМСВ (кривая 1) и где обе антенны прямолинейные (кривая 2). Из рисунка можно видеть, что амплитуда сигнала ПМСВ, прошедшего через макет, на частотах  $f < f^* \approx 4.9$  ГГц в случае возбуждения фокусирующей антенной оказывается выше на величину  $\approx 8$  дБ, чем в макете с прямолинейными антеннами. Это связано с тем, что фокусирующие антенны ПМСВ характеризуются хроматической абберацией, проявляющейся в зависимости фокусного расстояния антенны от частоты [21]. В диапазоне частот  $f < f^* \approx 4.9$  ГГц фокусировка препятствует расплыванию пучка ПМСВ и большая часть ее мощности достигает выходной антенны. На частотах  $f > f^*$  происходит обратная ситуация – наблюдается лучшее прохождение ПМСВ для случая прямолинейной антенны. Это связано с тем, что по мере роста частоты  $f$  положение фокуса смещается к возбуждающей антенне и каустики, которые за точкой фокуса переносят значительную часть мощности ПМСВ, огибают выходную антенну (см. также рис. 3).

На рис. 2, *b* приведены частотные зависимости ЭДС  $V$ , измеренные при  $P_{\text{in}} = -10$  дБм в структуре YIG/Pt, где возбуждение ПМСВ осуществлялось фокусирующей (кривая 1) или прямолинейной (кривая 2) антеннами. Отметим осциллирующий характер кривых 1 и 2, что связано с сингулярностями ван Хофа в плотности состояний  $\eta(f)$  в спектре ПМСВ на частотах

Селезнёв М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К.,  
Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А.

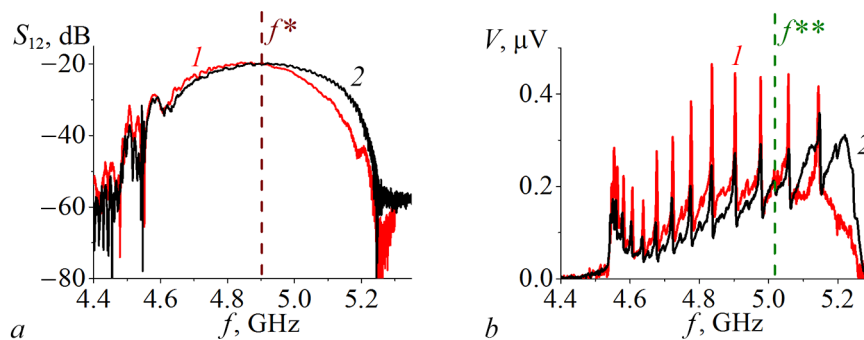


Рис. 2. Результаты измерений частотных зависимостей коэффициента передачи  $S_{12}$  (a) и ЭДС  $V$  (b) при  $P_{\text{in}} = -20$  и  $-10$  дБм соответственно, где кривые 1 и 2 отвечают случаям возбуждения ПМСВ фокусирующей и прямолинейной антеннами; положения частот  $f^*$  на рис. a и  $f^{**}$  на рис. b, на которых происходит «выравнивание» значений кривых 1 и 2, показаны пунктирными линиями

Fig. 2. Results of the measurements of frequency dependencies of the transmission coefficient  $S_{12}$  (a) and EMF  $V$  (b) at  $P_{\text{in}} = -20$  and  $-10$  dBm respectively, where curves 1 and 2 correspond to the cases of MSSW excitation by focusing and straight antennas; frequency positions  $f^*$  in fig. a and  $f^{**}$  in fig. b, at which “equalization” of curves 1 and 2 happens, are shown by dash lines

дипольно-обменных резонансов и подробнее обсуждалось в работе [42]. Из рисунка можно видеть, что на частотах  $f < f^{**} \approx 5.05$  ГГц в случае фокусирующей антенны величина сигнала  $V$  была больше на 10–20 % относительно случая прямолинейной антенны. На частоте  $f^{**}$  происходило выравнивание значений  $V$  кривых 1 и 2, а на частотах  $f > f^{**}$  ЭДС оказывалась больше в случае прямолинейной антенны. Для того чтобы объяснить такое поведение зависимости  $V(f)$ , обратимся к рис. 3.

На рис. 3 приведены результаты микромагнитного моделирования двумерных карт распределения Фурье-амплитуды волнового поля ПМСВ в плоскости XY в окрестности фокусирующей антенны (отмечена как 1) на частотах  $f = 4.65 \dots 4.9$  ГГц и при  $H = 960$  Э, полученные с помощью ООММФ [46]. Моделирование проводилось согласно подходу работы [32] при параметрах, отвечающих эксперименту. Из рис. 3 можно видеть, что возбуждение ПМСВ криволинейной антенной

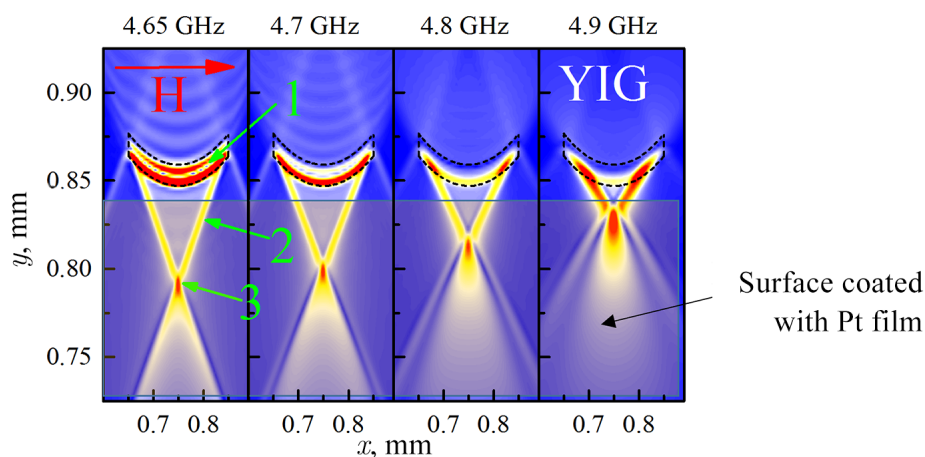


Рис. 3. Распределение Фурье-амплитуды поля ПМСВ, возбуждаемой фокусирующей (1) антенной в плоскости XY на частотах  $f = 4.65 \dots 4.9$  ГГц, где 2 – формируемые каустики, 3 – положение фокуса ПМСВ (цвет онлайн)

Fig. 3. Distribution of Fourier-amplitude of MSSW field excited by focusing antenna (1) in XY plane at frequencies  $f = 4.65 \dots 4.9$  GHz where 2 – formed caustics, 3 – position of MSSW focus (color online)

Селезнёв М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К.,  
Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А.

Известия вузов. ПНД, 2024, т. 32, № 3

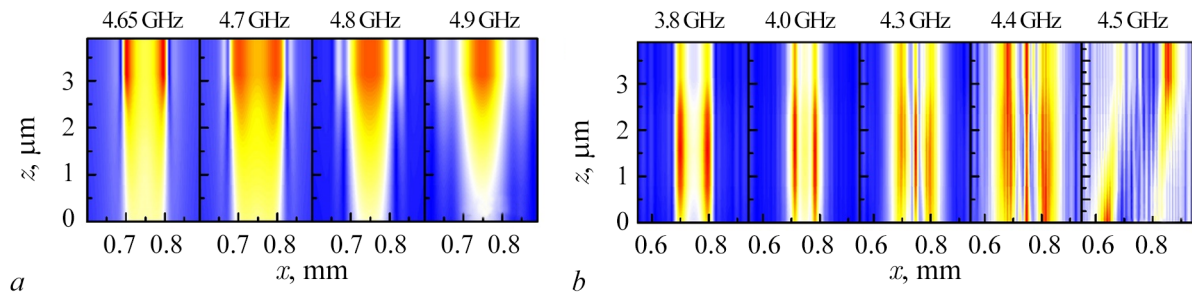


Рис. 4. Распределение Фурье-амплитуды поля ПМСВ (a) и ООМСВ (b), возбуждаемых фокусирующей антенной в плоскости XZ (цвет онлайн)

Fig. 4. Distribution of Fourier-amplitude of MSSW (a) and BVMSW (b) field excited by focusing antenna in XZ plane (color online)

приводит к фокусировке ПМСВ, при этом с ростом частоты  $f$  положение фокуса (отмечено как 3 на рис. 3) смещается ближе к фокусирующей антенне, но остается на участке пленки YIG, покрытом Pt. На частотах  $f > 4.9$  ГГц положение фокуса находится между антенной и областью пленки YIG, покрытой Pt. С ростом частоты ПМСВ увеличивается угол между направлениями оси  $y$  и каустиками (отмечены как 2 на рис. 3), формируемыми при фокусировке.

Отметим, что распространение каустик ПМСВ, формируемых на краях антенны, взаимно относительно оптической оси антенны. Это следует из результатов микромагнитного моделирования распространения ПМСВ, амплитуда которой на нескольких частотах в плоскости XZ сечения пленки YIG показана на рис. 4, a. В случае обратных объемных магнитостатических волн (ООМСВ) характер распространения каустик кардинально отличается. Это можно видеть из рис. 4, b. Особенно ярко невзаимность проявляется для частоты  $f = 4.5$  ГГц. Распределение амплитуд «левой» и «правой» каустик относительно оптической оси невзаимно — максимумы их амплитуд находятся вблизи разных поверхностей пленки YIG.

Таким образом, отмеченный ранее рост величины сигнала ЭДС на частотах  $f < f^{**}$  может быть связан с двумя причинами: 1) с формируемыми каустиками, которые отражают рост плотности состояний  $\eta(f)$  в спектре ПМСВ, что схоже со случаем дипольно-обменных резонансов; 2) фокусировка ПМСВ приводит к росту плотности погонной мощности ПМСВ, что эквивалентно случаю увеличения уровня входной мощности  $P_{in}$ .

### Заключение

Таким образом, на примере структур YIG/Pt показана возможность детектирования с помощью ОСЭХ сфокусированных пучков ПМСВ, возбуждаемых фокусирующим криволинейным преобразователем. Проведено сопоставление частотных зависимостей ЭДС  $V(f)$ , наводимых на контактах к Pt, в условиях фокусировки ПМСВ и при возбуждении прямолинейным преобразователем. Отмечено, что на величину  $V(f)$ , генерируемую сфокусированными ПМСВ, существенно влияет хроматическая аберрация фокусирующей антенны. Показано, что фокусировка ПМСВ приводит к росту сигнала ЭДС относительно случая прямолинейной антенны на тех частотах  $f < f^{**}$ , при которых положение фокуса ПМСВ находится на участке структуры, покрытом Pt. На частотах  $f > f^{**}$ , при которых положение фокуса находится между антенной и областью YIG, покрытой Pt, сигнал ЭДС, наоборот, падает. Указанный рост ЭДС на частотах  $f < f^{**}$  может быть связан с увеличением погонной плотности мощности ПМСВ и каустиками, формируемыми при фокусировке, которые отражают рост плотности состояний  $\eta(f)$  в спектре ПМСВ, что должно приводить к усилению процессов электрон-магнонного рассеяния.

Селезнёв М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К.,  
Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А.

## Список литературы

1. Никитов С. А., Калябин Д. В., Лисенков И. В., Славин А. Н., Барабаненков Ю. Н., Осокин С. А., Садовников А. В., Бегинин Е. Н., Морозова М. А., Шараевский Ю. П., Филимонов Ю. А., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л., Сахаров В. К., Павлов Е. С. Магноника — новое направление спинтроники и спин-волновой электроники. УФН. 2015. Т. 185, № 10. С. 1099–1128. DOI: 10.3367/UFNr.0185. 201510m.1099.
2. Никитов С. А., Сафин А. Р., Калябин Д. В., Садовников А. В., Бегинин Е. Н., Лозунов М. В., Морозова М. А., Одинцов С. А., Осокин С. А., Шараевская А. Ю., Шараевский Ю. П., Кирилюк А. И. Диэлектрическая магноника — от гигагерцев к терагерцам. УФН. 2020. Т. 190, № 10. С. 1009–1040. DOI: 10.3367/UFNr.2019.07.038609.
3. Chumak A. A., Vasyuchka V. I., Serga A. A., Hillebrands B. Magnon spintronics. *Nature Phys.* 2015. Vol. 11. P. 453–461. DOI: doi:10.1038/nphys3347.
4. Demidov V. E., Urazhdin S., Loubens G., Klein O., Cros V., Anane A., Demokritov S. O. Magnetization oscillations and waves driven by pure spin currents. *Phys. Rep.* 2017. Vol. 673. P. 1–31. DOI: 10.1016/j.physrep.2017.01.001.
5. Althammer M. Pure spin currents in magnetically ordered insulator/normal metal heterostructures // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2018. Vol. 51, no. 31. P. 313001. DOI: 10.1088/1361-6463/aaca89.
6. Demidov V. E., Urazhdin S., Anane A., Cros V., Demokritov S. O. Spin-orbit-torque magnonics. *Journal of Applied Physics.* 2020. V. 127, no. 17. P. 170901. DOI: 10.1063/5.0007095.
7. Brataas A., van Wees B., Klein O., de Loubens G., Viret M. Spin insulatronics // *Physics Reports.* 2020. Vol. 885. P. 1–27. DOI: 10.1016/j.physrep.
8. Mahmoud A., Ciubotaru F., Vanderveken F., Chumak A. V., Hamdioui S., Adelman C., Cotofana S. Introduction to spin wave computing. *J. Appl. Phys.* 2020. Vol. 128, no. 16. 161101. DOI: 10.1063/5.0019328.
9. Chumak A. V., Kabos P., Wu M., Abert C., Adelman C., Adeyeye A. O., Akerman J., Aliev F. G., Anane A., Awad A., Back C. H., Barman A., Bauer G. E. W., Becherer M., Beginin E. N., Bittencourt V. A. S. V., Blanter Y. M., Bortolotti P., Boventer I., Bozhko D. A., Bunyaev S. A., Carmiggelt J. J., Cheenikundil R. R., Ciubotaru F., Cotofana S., Csaba G., Dobrovolskiy O. V., Dubs C., Elyasi M., Fripp K. G., Fulara H., Golovchinsky I. A., Gonzalez-Ballster C., Graczyk P., Grundler D., Gruszecki P., Gubbiotti G., Guslienko K., Haldar A., Hamdioui S., Hertel R., Hillebrands B., Hioki T., Houshang A., Hu C.-M., Huebl H., Huth M., Iacocca E., Jungfleisch M. B., Kakazei G. N., Khitun A., Khymyn R., Kikkawa T., Klaui M., Klein O., Klos J. W., Knauer S., Koraltan S., Kostylev M., Krawczyk M., Krivorotov I. N., Kruglyak V. V., Lachance-Quirion D., Ladak S., Lebrun R., Li Y., Linder M., Macedo R., Mayr S., Melkov G. A., Mieszczak S., Nakamura Y., Nembach H. T., Nikitin A. A., Nikitov S. A., Novosad V., Otalora J. A., Otani Y., Papp A., Pigeau B., Pirro P., Porod W., Porrati F., Qin H., Rana B., Reimann T., Reinte F., Romero-Isart O., Ross A., Sadovnikov A. V., Safin A. R., Saitoh E., Schmidt G., Schultheiss H., Schultheiss K., Serga A. A., Sharma S., Shaw J. M., Suess D., Surzhenko O., Szulc K., Taniguchi T., Urbanek M., Usami K., Ustinov A. B., van der Sar T., van Dijken S., Vasyuchka V. I., Verba R., Viola Kusminskiy S., Wang Q., Weides M., Weiler M., Wintz S., Wolski S. P., Zhang X. Advances in Magnetism Roadmap on Spin-Wave Computing. *IEEE Transactions on Magnetism.* 2022. Vol. 58, no. 6. P. 0800172. DOI: 10.1109/TMAG.2022.3149664.
10. Khitun A. Magnonic holographic devices for special type data processing. *J. Appl. Phys.* 2013. Vol. 113, no. 16. P. 164503. DOI: 10.1063/1.4802656.
11. Gertz F., Kozhevnikov A., Filimonov Y., Nikonov D. E., Khitun A. Magnonic holographic memory: From proposal to device. *IEEE J. Explor. Solid-State Comput. Devices Circuits.* 2015. Vol. 1, P. 67–75. DOI: 10.1109/JXCDC.2015.2461618.
12. Khivintsev Y., Ranjbar M., Gutierrez D., Chiang H., Kozhevnikov A., Filimonov Y., Khitun A. Prime factorization using magnonic holographic devices. *J. Appl. Phys.* 2016. Vol. 120, no. 12. P. 123901. DOI: 10.1063/1.4962740.

Селезнёв М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К., Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А.

13. *Gutierrez D., Chiang H., Bhowmick T., Volodchenkov A. D., Ranjbar M., Liu G., Jiang C., Warren C., Khivintsev Y., Filimonov Y. Garay J., Lake R., Balandin A. A., Khitun A.* Magnonic holographic imaging of magnetic microstructures. *JMMM*. 2017. Vol. 428. P. 348–356. DOI: 10.1016/j.jmmm.2016.12.022.
14. *Papp A., Porod W., Csurgay A. I., Csaba G.* Nanoscale spectrum analyzer based on spin-wave interference. *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7. P. 9245. DOI: 10.1038/s41598-017-09485-7.
15. *Csaba G., Papp A., Porod W.* Holographic Algorithms for On-Chip, Non-Boolean Computing // 17th International Workshop on Computational Electronics (IWCE 2014). Paris, France, 2014. P. 33–34. DOI: 10.1109/IWCE.2014.6865814.
16. *Csaba G., Papp A., Porod W.* Perspectives of using spin waves for computing and signal processing. *Phys. Lett. A*. 2017. V. 381. P. 1471. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.02.042.
17. *Macia F., Kent A. D., Hoppensteadt F. C.* Spin-wave interference patterns created by spin-torque nano-oscillators for memory and computation. *Nanotechnology*. 2011. Vol. 22. P. 095301. DOI: 10.1088/0957-4484/22/9/095301.
18. *Csaba G., Papp A., Porod W.* Spin-wave based realization of optical computing primitives. *J. Appl. Phys.* 2014. Vol. 115, no. 17. P. 17C741. DOI: 10.1063/1.4868921.
19. *Vogel M., Hillebrands B., von Freymann G.* Spin-Wave Optical Elements: Towards Spin-wave Fourier Optics. arXiv:1906.02301v1 [physics.app-ph]
20. *Papp A., Csaba G.* Lens Design for Computing With Anisotropic Spin Waves. *IEEE Magn. Lett.* 2018. Vol. 9. P. 3706405. DOI: 10.1109/LMAG.2018.2872127.
21. *Ваишковский А. В., Стальмахов А. В., Шахназарян Д. Г.* Формирование, отражение и преломление пучков магнитостатических волн. *Известия вузов. Физика*. 1988. № 11. С. 57–75. DOI: 10.1007/BF00893543.
22. *Davies C. S., Kruglyak V. V.* Graded-index magnonics. *Low Temperature Physics*. 2015. Vol. 41. P. 760–766. DOI: 10.1063/1.4932349.
23. *Schneider T., Serga A. A., Chumak A. V., Sandweg C. W., Trudel S., Wolff S., Kostylev M. P., Tiberkevich V. S., Slavin A. N., Hillebrands B.* Nondiffractive subwavelength wave beams in a medium with externally controlled anisotropy. *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 104. P. 197203. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.197203.
24. *Ulrichs H., Demidov V. E., Demokritov S. O., Urazhdin S.* Spin-torque nano-emitters for magnonic applications. *Appl. Phys. Lett.* 2012. Vol. 100. P. 162406. DOI: 10.1063/1.4704563.
25. *Gieniusz R., Ulrichs H., Bessonov V. D., Guzowska U., Stognii A. I., Maziewski A.* Single antidot as a passive way to create caustic spin-wave beams in yttrium iron garnet films. *Appl. Phys. Lett.* 2013. Vol. 102. P. 102409. DOI: 10.1063/1.4795293
26. *Gieniusz R., Bessonov V. D., Guzowska U., Stognii A. I., Maziewski A.* An antidot array as an edge for total non-reflection of spin waves in yttrium iron garnet films. *Appl. Phys. Lett.* 2014. Vol. 104, no. 8. P. 082412. DOI: 10.1063/1.4867026.
27. *Mansfeld S., Topp J., Martens K., Toedt J. N., Hansen W., Heitmann D., Mendach S.* Spin Wave Diffraction and Perfect Imaging of a Grating. *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 108. P. 047204. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.047204.
28. *Choi S., Lee K. -S., Kim S. -K.* Spin-wave interference. *Appl. Phys. Lett.* 2006. Vol. 89, no. 6. P. 062501. DOI: 10.1063/1.2259813.
29. *Gruszecki P., Kasprzak M., Serebryannikov A. E., Krawczyk M., Śmigaj W.* Microwave excitation of spin wave beams in thin ferromagnetic films. *Sci. Rep.* 2016. Vol. 6. P. 22367. DOI: 10.1038/srep22367.
30. *Körner H. S., Stigloher J., Back C. H.* Excitation and tailoring of diffractive spin-wave beams in NiFe using nonuniform microwave antennas. *Phys. Rev. B*. 2017. Vol. 96. P. 100401(R). DOI: 10.1103/PhysRevB.96.100401.

*Селезнёв М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К.,  
Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А.*  
Известия вузов. ПНД, 2024, т. 32, № 3



31. Loayza N., Jungfleisch M. B., Hoffmann A., Bailleul M., Vlaminck V. Fresnel diffraction of spin waves. *Phys. Rev. B*. 2018. Vol. 98. P. 144430. DOI: 10.1103/PhysRevB.98.144430.
32. Madami M., Khivintsev Y., Gubbiotti G., Dudko G., Kozhevnikov A., Sakharov V., Stal'makhov A., Khitun A., Filimonov Y. Nonreciprocity of backward volume spin wave beams excited by the curved focusing transducer. *Appl. Phys. Lett.* 2018. Vol. 113, no. 15. P. 152403. DOI: 10.1063/1.5050347.
33. Kajiwara Y., Harii K., Takahashi S., Ohe J., Uchida K., Mizuguchi M., Umezawa H., Kawai H., Ando K., Takanashi K., Maekawa S., Saitoh E. Transmission of electrical signals by spin-wave interconversion in a magnetic insulator. *Nature*. 2010. Vol. 464. P. 262–266. DOI: 10.1038/nature08876.
34. Collet M., de Milly X., d'Allivy Kelly O., Naletov V. V., Bernard R., Bortolotti P., Ben Youssef J., Demidov V. E., Demokritov S. O., Prieto J. L., Muñoz M., Cros V., Anane A., de Loubens G., Klein O. Generation of coherent spin-wave modes in yttrium iron garnet microdiscs by spin-orbit torque. *Nat Commun*. 2016. Vol. 7. P. 10377. DOI: 10.1038/ncomms10377.
35. Uchida K. -I., Adachi H., Ota T., Nakayama H., Maekawa S., Saitoh E. Observation of longitudinal spin-Seebeck effect in magnetic insulators. *Appl. Phys. Lett.* 2010. Vol. 97, no. 17. P. 172505. DOI: 10.1063/1.3507386.
36. Chumak A. V., Serga A. A., Jungfleisch M. B., Neb R., Bozhko D. A., Tiberkevich V. S., Hillebrands B. Direct detection of magnon spin transport by the inverse spin Hall effect. *Appl. Phys. Lett.* 2012. Vol. 100, no. 8. P. 082405. DOI: 10.1063/1.3689787.
37. d'Allivy Kelly O., Anane A., Bernard R., Ben Youssef J., Hahn C., Molpeceres A. H., Carrétéro C., Jacquet E., Deranlot C., Bortolotti P., Lebourgeois R., Mage J. -C., de Loubens G., Klein O., Cros V., Fert A. Inverse spin Hall effect in nanometer-thick yttrium iron garnet/Pt system. *Appl. Phys. Lett.* 2013. Vol. 103, no. 8. P. 082408. DOI: 10.1063/1.4819157 .
38. Balinsky M., Ranjbar M., Haidar M., Dürrenfeld P., Dumas R. K., Khartsev S., Slavin A., Åkerman J. Spin pumping and the inverse spin Hall effect via magnetostatic surface spin-wave modes in YIG/Pt bilayers. *IEEE Magn. Lett.* 2015. Vol. 6. P. 3000604. DOI: 10.1109/LMAG.2015.2471276.
39. Balinsky M., Chiang H., Gutierrez D., Khitun A. Spin wave interference detection via inverse spin Hall effect. *Appl. Phys. Lett.* 2021. Vol. 118, no. 24. P. 242402. DOI: 10.1063/5.0055402.
40. Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л., Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Павлов Е. С., Филимонов Ю. А. Влияние трехмагнонных распадов на генерацию ЭДС поверхностными магнитостатическими волнами в интегральных структурах ЖИГ–Pt. *Известия вузов. ПНД*. 2022. Т. 30, № 5. С. 617–643. DOI: 10.18500/0869-6632-003008.
41. Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Сахаров В. К., Хивинцев Ю. В., Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А. Влияние резонансного взаимодействия поверхностных магнитостатических волн с обменными модами на генерацию ЭДС в структурах YIG/Pt. *ЖТФ*. 2021. Т. 91, № 10. P. 1504–1508. DOI: 10.21883/JTF.2021.10.51363.136-21.
42. Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л., Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А. Влияние параметрической неустойчивости на спиновую накачку дипольно-обменными поверхностными магнитостатическими волнами в структурах ЖИГ–Pt. *Известия вузов. ПНД*. 2023. Т. 31, № 2. С. 225–242. DOI: 10.18500/0869-6632-003032.
43. Никулин Ю. В., Высоцкий С. Л., Селезнев М. Е., Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Хивинцев Ю. В., Филимонов Ю. А. Частотная зависимость смешанной спиновой проводимости структур YIG/Pt при спиновой накачке ПМСВ. *ФТТ*. 2023. Т. 65, № 6. С. 967–972. DOI: 10.21883/FTT.2023.06.55652.10H.
44. Дудко Г. М., Кожевников А. В., Сахаров В. К., Стальмахов А. В., Филимонов Ю. А., Хивинцев Ю. В. Расчет фокусирующих преобразователей спиновых волн методом микромагнитно-



го моделирования. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2018. Т. 18, № 2. С. 92–102. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-2-92-102.

45. Damon R., Eshbach J. Magnetostatic modes of a ferromagnetic slab. J. Phys.Chem. Sol. 1961. Vol. 19, no. 3–4. P. 308–320. DOI: 10.1016/0022-3697(61)90041-5.
46. Donahue M.J., Porter D. G. OOMMF user's guide, version 1.0. Interagency Report NIST 6376. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, 1999. DOI: 10.6028/NIST.IR.6376.

## References

1. Nikitov SA, Kaliabin DV, Lisenkov IV, Slavin AN, Barabanenkov YuN, Osokin SA, Sadovnikov AV, Beginin EN, Morozova MA, Sharaevskii YuP, Filimonov YA, Khivintsev YV, Vysotskii SL, Sakharov VK, Pavlov ES. Magnonics: a new research area in spintronics and spin wave electronics. Phys. Usp. 2015;58(10):1002–1028. DOI: 10.3367/UFNr.0185. 201510m.1099.
2. Nikitov SA, Safin AR, Kalyabin DV, Sadovnikov AV, Beginin EN, Logunov MV, Morozova MA, Odintsov SA, Osokin SA, Sharaevskaya AYU, Sharaevsky YuP, Kirilyuk AI. Dielectric magnonics: from gigahertz to terahertz. Phys. Usp. 2020;63:945–974. DOI: 10.3367/UFNe.2019.07.038609.
3. Chumak AA, Vasyuchka VI, Serga AA, Hillebrands B. Magnon spintronics. Nature Phys. 2015; 11:453. DOI: doi:10.1038/nphys3347.
4. Demidov VE, Urazhdin S, Loubens G, Klein O, Cros V, Anane A, Demokritov SO. Magnetization oscillations and waves driven by pure spin currents. Phys. Rep. 2017;673:1–31. DOI: 10.1016/j.physrep.2017.01.001.
5. Althammer M. Pure spin currents in magnetically ordered insulator/normal metal heterostructures. J. Phys. D: Appl. Phys. 2018;51:313001. DOI: 10.1088/1361-6463/aaca89.
6. Demidov VE, Urazhdin S, Anane A, Cros V, Demokritov SO. Spin–orbit–torque magnonics. Journal of Applied Physics. 2020;127(17):170901. DOI: 10.1063/5.0007095.
7. Brataas A., van Wees B., Klein O., de Loubens G., Viret M. Spin insulatronics. Physics Reports. 2020;885:1–27. DOI: 10.1016/j.physrep.
8. Mahmoud A, Ciubotaru F, Vanderveken F, Chumak AV, Hamdioui S, Adelman C, Cotofana S. Introduction to spin wave computing. J. Appl. Phys. 2020;128(16):161101. DOI: 10.1063/5.0019328.
9. Chumak AV, Kabos P, Wu M, Abert C, Adelman C, Adeyeye AO, Akerman J, Aliev FG, Anane A, Awad A, Back CH, Barman A, Bauer GEW, Becherer M, Beginin EN, Bittencourt VASV, Blanter YM, Bortolotti P., Boventer I, Bozhko DA, Bunyaev SA, Carmiggelt JJ, Cheenikundil RR, Ciubotaru F, Cotofana S, Csaba G, Dobrovolskiy OV, Dubs C, Elyasi M, Fripp KG, Fulara H, Golovchnsiy IA, Gonzalez-Ballster C, Graczyk P, Grundler D, Gruszecki P, Gubbiotti G, Gusliencko K, Haldar A, Hamdioui S, Hertel R, Hillebrands B, Hioki T, Houshang A, Hu CM, Huebl H, Huth M, Iacocca E, Jungfleisch MB, Kakazei GN, Khitun A, Khymyn R, Kikkawa T, Klau M, Klein O, Klos JW, Knauer S, Koraltan S, Kostylev M, Krawczyk M, Krivorotov IN, Kruglyak VV, Lachance-Quirion D, Ladak S, Lebrun R, Li Y, Linder M, Macedo R, Mayr S, Melkov GA, Mieszczak S, Nakamura Y, Nembach HT, Nikitin AA, Nikitov SA, Novosad V, Otalora JA, Otani Y, Papp A, Pigeau B, Pirro P, Porod W, Porrati F, Qin H, Rana B, Reimann T, Reinte F, Romero-Isart O, Ross A, Sadovnikov AV, Safin AR, Saitoh E, Schmidt G, Schultheiss H, Schultheiss K, Serga AA, Sharma S, Shaw JM, Suess D, Surzhenko O, Szulc K, Taniguchi T, Urbanek M, Usami K, Ustinov AB, van der Sar T, van Dijken S, Vasyuchka VI, Verba R, Kusminskiy SV, Wang Q, Weides M, Weiler M, Wintz S, Wolski SP, Zhang X. Advances in Magnetics Roadmap on Spin-Wave Computing. IEEE Transactions on Magnetics. 2022;58(6): 0800172. DOI: 10.1109/TMAG.2022.3149664.
10. Khitun A. Magnonic holographic devices for special type data processing. J. Appl. Phys. 2013;113(16):164503. DOI: 10.1063/1.4802656.
11. Gertz F, Kozhevnikov A, Filimonov Y, Nikonov DE, Khitun A. Magnonic holographic memory:

*Селезнёв М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К.,  
Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А.*

- From proposal to device. IEEE J. Explor. Solid-State Comput. Devices Circuits. 2015;1:67–75. DOI: 10.1109/JXCDC.2015.2461618.
12. Khivintsev Y, Ranjbar M, Gutierrez D, Chiang H, Kozhevnikov A, Filimonov Y, Khitun A. Prime factorization using magnonic holographic devices. J. Appl. Phys. 2016;120(12):123901. DOI: 10.1063/1.4962740.
  13. Gutierrez D, Chiang H, Bhowmick T, Volodchenkov AD, Ranjbar M, Liu G, Jiang C, Warren C, Khivintsev Y, Filimonov Y, Garay J, Lake R, Balandin AA, Khitun A. Magnonic holographic imaging of magnetic microstructures. JMMM. 2017;428:348–356. DOI: 10.1016/j.jmmm.2016.12.022.
  14. Papp A, Porod W, Csurgay AI, Csaba G. Nanoscale spectrum analyzer based on spin-wave interference. Sci. Rep. 2017;7:9245. DOI: 10.1038/s41598-017-09485-7.
  15. Csaba G, Papp A, Porod W. Holographic Algorithms for On-Chip, Non-Boolean Computing. In: Proceedings of the 17th International Workshop on Computational Electronics (IWCE 2014). 2014, Paris, France. P. 33–34. DOI: 10.1109/IWCE.2014.6865814.
  16. Csaba G, Papp A, Porod W. Perspectives of using spin waves for computing and signal processing. Phys. Lett. A. 2017;381:1471. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.02.042.
  17. Macia F, Kent AD, Hoppensteadt FC. Spin-wave interference patterns created by spin-torque nano-oscillators for memory and computation. Nanotechnology. 2011;22:095301. DOI: 10.1088/0957-4484/22/9/095301.
  18. Csaba G., Papp A., Porod W. Spin-wave based realization of optical computing primitives. J. Appl. Phys. 2014;115(17):17C741. DOI: 10.1063/1.4868921.
  19. Vogel M, Hillebrands B, von Freymann G. Spin-Wave Optical Elements: Towards Spin-wave Fourier Optics. arXiv:1906.02301v1 [physics.app-ph]
  20. Papp A, Csaba G. Lens Design for Computing With Anisotropic Spin Waves. IEEE Magn. Lett. 2018;9:3706405. DOI: 10.1109/LMAG.2018.2872127.
  21. Vashkovskii AV, Stalmakhov AV, Shakhnazaryan DG. Forming, reflection and refraction of magnetostatic waves beams. Soviet Physics Journal. 1988;31:908–915. DOI: 10.1007/BF00893543.
  22. Davies CS, Kruglyak VV. Graded-index magnonics. Low Temperature Physics. 2015;41:760–766. DOI: 10.1063/1.4932349.
  23. Schneider T, Serga AA, Chumak AV, Sandweg CW, Trudel S, Wolff S, Kostylev MP, Tiberkevich VS, Slavin AN, Hillebrands B. Nondiffractive subwavelength wave beams in a medium with externally controlled anisotropy. Phys. Rev. Lett. 2010;104:197203. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.197203.
  24. Ulrichs H, Demidov VE, Demokritov SO, Urazhdin S. Spin-torque nano-emitters for magnonic applications. Appl. Phys. Lett. 2012;100:162406. DOI: 10.1063/1.4704563.
  25. Gieniusz R, Ulrichs H, Bessonov VD, Guzowska U, Stognii AI, Maziewski A. Single antidot as a passive way to create caustic spin-wave beams in yttrium iron garnet films. Appl. Phys. Lett. 2013;102:102409. DOI: 10.1063/1.4795293
  26. Gieniusz R, Bessonov VD, Guzowska U, Stognii AI, Maziewski A. An antidot array as an edge for total non-reflection of spin waves in yttrium iron garnet films. Appl. Phys. Lett. 2014;104(8):082412. DOI: 10.1063/1.4867026.
  27. Mansfeld S, Topp J, Martens K, Toedt JN, Hansen W, Heitmann D, Mendach S. Spin Wave Diffraction and Perfect Imaging of a Grating. Phys. Rev. Lett. 2012;108:047204. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.047204.
  28. Choi S, Lee KS, Kim SK. Spin-wave interference. Appl. Phys. Lett. 2006;89(6):062501. DOI: 10.1063/1.2259813.
  29. Gruszecki P, Kasprzak M, Serebryannikov AE, Krawczyk M, Śmigaj W. Microwave excitation of spin wave beams in thin ferromagnetic films. Sci. Rep. 2016;6: 22367. DOI: 10.1038/srep22367.
  30. Körner HS, Stigloher J, Back CH. Excitation and tailoring of diffractive spin-wave beams in NiFe using nonuniform microwave antennas. Phys. Rev. B. 2017;96:100401(R). DOI: 10.1103/PhysRevB.96.100401.

31. Loayza N, Jungfleisch MB, Hoffmann A, Bailleul M, Vlaminck V. Fresnel diffraction of spin waves. *Phys. Rev. B.* 2018;98:144430. DOI: 10.1103/PhysRevB.98.144430.
32. Madami M, Khivintsev Y, Gubbiotti G, Dudko G, Kozhevnikov A, Sakharov V, Stal'makhov A, Khitun A, Filimonov Y. Nonreciprocity of backward volume spin wave beams excited by the curved focusing transducer. *Appl. Phys. Lett.* 2018;113(15):152403. DOI: 10.1063/1.5050347.
33. Kajiwara Y, Harii K, Takahashi S, Ohe J, Uchida K, Mizuguchi M, Umezawa H, Kawai H, Ando K, Takanashi K, Maekawa S, Saitoh E. Transmission of electrical signals by spin-wave in-ter-conversion in a magnetic insulator. *Nature.* 2010;464:262–266. DOI: 10.1038/nature08876.
34. Collet M, de Milly X, d'Allivy Kelly O, Naletov VV, Bernard R, Bortolotti P, Ben Youssef J, Demidov VE, Demokritov SO, Prieto JL, Muñoz M, Cros V, Anane A, de Loubens G, Klein O. Generation of coherent spin-wave modes in yttrium iron garnet microdiscs by spin-orbit torque. *Nat Commun.* 2016;7:10377. DOI: 10.1038/ncomms10377.
35. Uchida KI, Adachi H, Ota T, Nakayama H, Maekawa S, Saitoh E. Observation of longitudinal spin-Seebeck effect in magnetic insulators. *Appl. Phys. Lett.* 2010;97(17):172505. DOI: 10.1063/1.3507386.
36. Chumak AV, Serga AA, Jungfleisch MB, Neb R, Bozhko DA, Tiberkevich VS, Hillebrands B. Direct detection of magnon spin transport by the inverse spin Hall effect. *Appl. Phys. Lett.* 2012;100(8):082405. DOI: 10.1063/1.3689787.
37. d'Allivy Kelly O, Anane A, Bernard R, Ben Youssef J, Hahn C, Molpeceres AH, Carrétéro C, Jacquet E, Deranlot C, Bortolotti P, Lebourgeois R, Mage JC, de Loubens G, Klein O, Cros V, Fert A. Inverse spin Hall effect in nanometer-thick yttrium iron garnet/Pt system. *Appl. Phys. Lett.* 2013;103(8):082408. DOI: 10.1063/1.4819157.
38. Balinsky M, Ranjbar M, Haidar M, Dürrenfeld P, Dumas RK, Khartsev S, Slavin A, Åkerman J. Spin pumping and the inverse spin Hall effect via magnetostatic surface spin-wave modes in YIG/Pt bilayers. *IEEE Magn. Lett.* 2015;6:3000604. DOI: 10.1109/LMAG.2015.2471276.
39. Balinsky M, Chiang H, Gutierrez D, Khitun A. Spin wave interference detection via inverse spin Hall effect. *Appl. Phys. Lett.* 2021;118(24): 242402. DOI: 10.1063/5.0055402.
40. Seleznev ME, Nikulin YV, Khivintsev YV, Vysotskii SL, Kozhevnikov AV, Sakharov VK, Dudko GM, Pavlov ES, Filimonov YA. Influence of three-magnon decays on electromotive force generation by magnetostatic surface waves in integral YIG – Pt structures. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(5):617–643. DOI: 10.18500/0869-6632-003008.
41. Seleznev ME, Nikulin YV, Sakharov VK, Khivintsev YV, Kozhevnikov AV, Vysotskii SL, Filimonov YA. Influence of the resonant interaction of surface magnetostatic waves with exchange modes on the EMF generation in YIG/Pt structures. *Technical Physics.* 2022;92(13):2074–2077. DOI: 10.21883/TP.2022.13.52224.136-21.
42. Seleznev ME, Nikulin YV, Khivintsev YV, Vysotskii SL, Kozhevnikov AV, Sakharov VK, Dudko GM, Filimonov YA. Influence of parametric instability on spin pumping by dipole-exchange magnetostatic surface waves in YIG–Pt structures. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(2):225–242. DOI: 10.18500/0869-6632-003032.
43. Nikulin YV, Vysotskii SL, Seleznev ME, Kozhevnikov AV, Sakharov VK, Dudko GM, Khivintsev YV, Filimonov YA. Frequency dependence of the spin mixing conductance of YIG/Pt structures upon MSSW spin pumping. *Phys. Solid State.* 2023;65(6):926–931. DOI: 10.21883/PSS.2023.06.56103.10H.
44. Dudko GM, Kozhevnikov AV, Saharov VK, Stalmahov AV, Filimonov YA, Khivintsev YV. Calculation of Focusing Spin Wave Transducers Using the Method of Micromagnetic Simulation. *Izvestiya of Saratov University. Physics.* 2018;18(2):92–102. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-2-92-102.
45. Damon R, Eshbach J. Magnetostatic modes of a ferromagnetic slab. *J. Phys.Chem. Sol.* 1961; (3–4):308–320. DOI: 10.1016/0022-3697(61)90041-5.

*Селезнёв М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К.,  
Кожевников А. В., Высоккий С. Л., Филимонов Ю. А.*

46. Donahue MJ, Porter DG. OOMMF user's guide, version 1.0. Interagency Report NIST 6376. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, 1999. DOI: 10.6028/NIST.IR.6376.



*Селезнёв Михаил Евгеньевич* — родился в г. Заречном (1994), окончил факультет нано- и био-медицинских технологий (СГУ, 2017) и аспирантуру (СГУ, 2022). Работает в Саратовском филиале ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН в должности младшего научного сотрудника. Научные интересы: магнетика и спинтроника, магнитные материалы, физика полупроводников, физика твердого тела. Имеет ряд публикаций по указанным направлениям.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: mixanich94@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-7359-3201  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1031873



*Дудко Галина Михайловна* — родилась в Свердловске (1961). Окончила физический факультет Саратовского университета им. Н. Г. Чернышевского (1983). Кандидат физико-математических наук (2002). Область научных интересов: нелинейная динамика магнито-статических волн, микромагнитное моделирование динамики намагниченности в ферромагнитных нано- и микроструктурах. Имеет более 30 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: dugal\_2010@hotmail.com  
ORCID: 0000-0002-7083-4399  
AuthorID (eLibrary.Ru): 39883



*Никулин Юрий Васильевич* — родился в Саратове (1982), окончил Саратовский государственный университет (2004). После окончания СГУ работает в СФИРЭ им. В. А. Котельникова РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области физической электроники и материаловедения (СГУ, 2014). Опубликовал 28 научных статей по направлениям, указанным выше.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: yvnikulin@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-2957-5468  
AuthorID (eLibrary.Ru): 168029



*Хивинцев Юрий Владимирович* — родился в 1975 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского (1998). Кандидат физико-математических наук (2004). Ведущий научный сотрудник лаборатории магнитоэлектроники Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН и доцент Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. Область научных интересов – магнитные колебания и волны, СВЧ-электроника.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: khivintsev@gmail.com  
AuthorID (eLibrary.Ru): 39882

*Селезнёв М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К.,  
Кожневиков А. В., Высоцкий С. Л., Филлимонов Ю. А.*

Известия вузов. ПНД, 2024, т. 32, № 3



*Сахаров Валентин Константинович* — родился в пос. Соколовый Саратовской области (1986). Окончил Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2008) и аспирантуру ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (2011). В настоящее время работает научным сотрудником лаборатории магнитоэлектроники СВЧ Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: спин-волновые явления в магнитных микро- и наноструктурах, СВЧ-электроника. Имеет 17 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: valentin@sakharov.info  
ORCID: 0000-0001-7168-1198  
AuthorID (eLibrary.Ru): 818546



*Кожевников Александр Владимирович* — родился в Саратове (1962), окончил Саратовский государственный университет (1984). Работает в Саратовском филиале ИРЭ РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (2011) в области нелинейных спиновых волн. Опубликовал 23 научных статьи.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: kzhavl@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-8904-475X  
AuthorID (eLibrary.Ru): 27013



*Высоцкий Сергей Львович* — родился в Саратове (1955), окончил Саратовский политехнический институт (1977). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики (СГУ, 1994). Ведущий научный сотрудник лаборатории магнитоэлектроники Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Автор более 60 научных работ.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: vysotsl@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-3151-9297  
AuthorID (eLibrary.Ru): 27015



*Филимонов Юрий Александрович* — родился в Куйбышеве (1955). Окончил факультет физической и квантовой электроники МФТИ (1979). Доктор физико-математических наук (2008), профессор по специальности «Физика магнитных явлений» (2012). Директор Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы: магноники и спинтроника, магнитные материалы и структуры, электронная компонентная база. Имеет более 120 публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: fil@soire.renet.ru  
ORCID: 0000-0002-2645-6669  
AuthorID (eLibrary.Ru): 18696

*Селезнёв М. Е., Дудко Г. М., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Сахаров В. К.,  
Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А.*  
Известия вузов. ПНД, 2024, т. 32, № 3

## EDITOR-IN-CHIEF

*Yu. V. Gulyaev*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

## DEPUTY EDITORS

*I. V. Sysoev*, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. N. Chumachenko*, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

## EDITORIAL BOARD

*V. M. Anikin*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*B. P. Bezruchko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*S. Boccaletti*, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

*A. M. Bykov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

*V. A. Vakorin*, Ph.D., Simon Fraser University (Vancouver, Canada)

*S. V. Gonchenko*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*N. S. Ginzburg*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. S. Dmitriev*, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*S. A. Kashchenko*, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

*A. V. Kraskov*, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

*N. V. Kuznetsov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

*G. van Luijelaar*, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

*A. Lüttjohann*, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

*G. G. Malinetskii*, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

*V. V. Matrosov*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*I. I. Mokhov*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

*A. B. Neiman*, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

*V. I. Nekorkin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. S. Pkovsky*, Dr. rer. Nat. habil., Professor, University of Potsdam (Potsdam, Germany)

*A. N. Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

*A. V. Porubov*, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

*V. V. Tuchin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. M. Feigin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*V. A. Tsarev*, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

*V. A. Cherepenin*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*M. V. Shitikova*, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

*V. G. Yakhno*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >