

ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

# Трикладная Деловая Динамика



*50 лет Алексею Александровичу Короновскому  
(16 декабря 1972 года)*

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Ю. В. Гуляев*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

## ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*И. В. Сысоев*, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*А. Н. Чумаченко*, д. геогр. н., СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

## ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

*В. М. Аникин*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*Б. П. Безручко*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*С. Боккалетти*, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

*А. М. Быков*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*В. А. Вакорин*, Ph.D., Университет Саймона Фрейзера (Ванкувер, Канада)

*С. В. Гонченко*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*Н. С. Гинзбург*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*А. С. Дмитриев*, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*С. А. Кащенко*, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

*А. В. Красков*, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

*Н. В. Кузнецов*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

*П. С. Ланда*, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М. В. Ломоносова (Москва, Россия)

*Ж. ван Луйтелаар*, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

*А. Люттйоханн*, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

*Г. Г. Малинецкий*, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

*В. В. Матросов*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*И. И. Мохов*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

*А. Б. Нейман*, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

*В. И. Некоркин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*А. С. Пиковский*, доктор наук, Потсдамский университет (Потсдам, Германия)

*А. Н. Писарчик*, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

*А. В. Порубов*, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*Ю. М. Романовский*, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М. В. Ломоносова (Москва, Россия)

*В. В. Тучин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

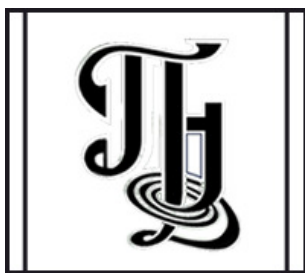
*А. М. Фейгин*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*В. А. Царёв*, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А (Саратов, Россия)

*В. А. Черепенин*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*М. В. Шитикова*, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

*В. Г. Яхно*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений  
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*Научно-технический журнал*

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

**Учредитель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

**Издатель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (uralpress.ru). Цена свободная

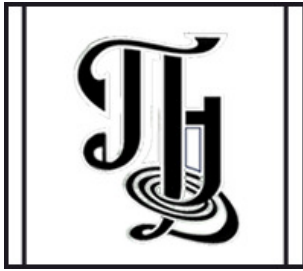
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией М. В. Сысоева  
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова  
Оформление А. А. Токмачевой  
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,  
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,  
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,  
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 14.11.2022  
Вышел в свет 30.11.2022  
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 13,95 (14,7)  
Тираж 100 экз. Заказ № 153-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского  
университета. Адрес типографии: Россия,  
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8  
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: [sguprint@bk.ru](mailto:sguprint@bk.ru)



**Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy**  
**APPLIED NONLINEAR DYNAMICS**

*Scientific-technical journal*

Published since 1993, 6 issues per year

**The journal was founded by** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

**The publisher of the journal is** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies ([ural-press.ru](http://ural-press.ru))

The journal is Open Access

Head of Editorial office M. V. Sysoeva  
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova  
Design of A. A. Tokmacheva  
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,  
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (8452) 523864,  
+7 (909) 3367208, e-mail: [andjournal@sgu.ru](mailto:andjournal@sgu.ru),  
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 14.11.2022. Published 30.11.2022  
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 13,95 (14,7)  
Edition of 100 copies. Order No. 153-T

Printed by Printing House of Saratov State  
University. Address of Printing House:  
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,  
Russia. Ph.: +7 (8452) 273385, e-mail: [sguprint@bk.ru](mailto:sguprint@bk.ru)

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

ОТ РЕДАКТОРА

*Москаленко О. И.* К юбилею Алексея Александровича Короновского ..... 673

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС.  
КВАНТОВЫЙ ХАОС

*Москаленко О. И., Евстифеев Е. В.* О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора ..... 676

*Тюрюкина Л. В.* Динамика системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели в случае отрицательных значений параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации ..... 685

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Эшмаматова Д. Б., Таджиева М. А., Ганиходжаев Р. Н.* Критерии существования внутренних неподвижных точек дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры с однородными турнирами..... 702

*Шабунин А. В.* Гибридная SIRS-модель распространения инфекций..... 717

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

*Рамазанов И. Р., Корнеев И. А., Слепнев А. В., Вадивасова Т. Е.* Синхронизация волн возбуждения в двухслойной сети нейронов ФитцХью–Нагумо при шумовой модуляции параметров межслойной связи ..... 732

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

*Екомасов Е. Г., Самсонов К. Ю., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В.* Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми притягивающими примесями ..... 749

НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ. МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA

*Гришин С. В., Ремпен И. С., Перченко М. И.* К 70-летию кафедры электроники, колебаний и волн ..... 766

PERSONALIA

*Розенблюм М. Г.* Памяти Полины Соломоновны Ланда ..... 785

**C O N T E N T S**

EDITORIAL

*Moskalenko O. I.* On the anniversary of Alexey A. Koronovskii..... 673

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.  
QUANTUM CHAOS

*Moskalenko O. I., Evstifeev E. V.* On existence of multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled systems with complex topology of attractor..... 676

*Turukina L. V.* Dynamics of the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model in the case of negative values of parameters that have the meaning of dissipation coefficients 685

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

*Eshmamatova D. B., Tadzhieva M. A., Ganikhodzhaev R. N.* Criteria for internal fixed points existence of discrete dynamic Lotka–Volterra systems with homogeneous tournaments..... 702

*Shabunin A. V.* Hybrid SIRS model of infection spread..... 717

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

*Ramazanov I. R., Korneev I. A., Slepnev A. V., Vadivasova T. E.* Synchronization of excitation waves in a two-layer network of FitzHugh–Nagumo neurons with noise modulation of interlayer coupling parameters..... 732

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

*Ekomasov E. G., Samsonov K. Yu., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V.* Nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three attracting impurities..... 749

SCIENCE FOR EDUCATION. METHODOICAL PAPERS. HISTORY. PERSONALIA

*Grishin S. V., Rempen I. S., Perchenko M. I.* To the 70th anniversary of the Department of Electronics, Oscillations and Waves..... 766

PERSONALIA

*Rosenblum M. G.* To the memory of Polina S. Landa ..... 785



## К юбилею Алексея Александровича Короновского

*О. И. Москаленко*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

*Поступила в редакцию 28.10.2022, опубликована 30.11.2022*

*Для цитирования:* Москаленко О. И. К юбилею Алексея Александровича Короновского // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 673–675. DOI: 10.18500/0869-6632-003019. EDN: CRLFBL

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

16 декабря 2022 года свой 50-летний юбилей отмечает Алексей Александрович Короновский — выдающийся ученый, доктор физико-математических наук, профессор, в настоящее время занимающий должности проректора по научной работе и цифровому развитию и заведующего кафедрой физики открытых систем Института физики Саратовского государственного университета.

*Коллеги и друзья сердечно поздравляют Алексея Александровича с Днем рождения и желают ему крепкого здоровья, всяческих успехов в личной жизни и профессиональной деятельности, новых научных свершений и открытий!*

Алексей Александрович Короновский с отличием окончил кафедру электроники, колебаний и волн физического факультета Саратовского государственного университета в 1995 году и в тот же год поступил в очную аспирантуру на ту же кафедру. В 1997 году он досрочно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.03 «Радиофизика» на тему «Сложная динамика простых радиофизических систем с кусочно-линейными элементами (модели, вычислительный и натурный эксперимент)» под руководством члена-корреспондента РАН, профессора Дмитрия Ивановича Трубецкого, а спустя 10 лет — докторскую диссертацию на тему «Синхронное поведение, сложная динамика и переходные процессы в автоколебательных системах и эталонных моделях нелинейной теории колебаний» по той же специальности.

Профессиональная деятельность Алексея Александровича в Саратовском государственном университете началась в 1997 году, сначала в должности ассистента (1997–1999), а затем

доцента (1999–2008) и профессора (2008–2010) кафедры электроники, колебаний и волн физического факультета, а затем факультета нелинейных процессов. В 2010 году в связи с открытием на факультете нелинейных процессов новой кафедры — кафедры физики открытых систем — А. А. Короновский перешел на эту кафедру сначала в качестве профессора, а в 2016 году был избран заведующим этой кафедрой. С марта 2000 по ноябрь 2013 года Алексей Александрович являлся заместителем декана факультета нелинейных процессов по учебной работе, а с 2013 года наряду с учебной и научной деятельностью стал выполнять административные функции сначала в качестве начальника научно-исследовательской части (2013–2014) и начальника управления научной деятельности (2014–2016), а затем проректора по научно-исследовательской работе (2016–2021) и проректора по научной работе и цифровому развитию (с 2021 г. по н. в.) СГУ.

Мое знакомство с Алексеем Александровичем началось еще в школьные годы. Именно благодаря ему я узнала про факультет нелинейных процессов нашего университета, на котором я училась, а потом работала долгие годы вплоть до его объединения с двумя другими факультетами в Институт физики, где в составе той же кафедры я продолжаю работать и по сей день. Не будет преувеличением сказать, что именно Алексей Александрович является тем человеком, который помог мне выбрать правильный путь, определиться с интересным направлением научных исследований и сформироваться как ученому в целом.

Научные интересы Алексея Александровича лежат в области нелинейной динамики и ее проявлений в различных сферах человеческой деятельности. Первые его работы были направлены на разработку и анализ моделей экономических, демографических и социальных процессов; исследование сложной динамики, перехода к хаосу, процессов мультистабильности и управления в системах с малым числом степеней свободы; исследование хаотической динамики и образования структур в пространственно-распределенных системах; изучение переходных процессов в системах с малым числом степеней свободы и распределенных автоколебательных системах. В последнее время научные интересы А. А. Короновского сместились в сторону исследования хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; приложений вейвлетного анализа к задачам нелинейной динамики; обработки и анализа данных нейрофизиологической природы и др. Алексей Александрович является автором более 20 монографий, около 500 научных статей в центральных рецензируемых отечественных и зарубежных научных журналах, индексируемых международными базами данных Web of Science и Scopus, его работы активно цитируются как в нашей стране, так и за рубежом, о чем свидетельствуют его высокие наукометрические показатели в зарубежных базах данных научного цитирования. Наиболее востребованные публикации А. А. Короновского, характеризующиеся наибольшим (как правило, более 100) числом цитирований по данным Scopus, приведены в Списке литературы к данной статье [1–12].

Результаты научной деятельности Алексея Александровича поддержаны различными грантовыми программами и фондами. Он является единственным в университете четырехкратным победителем конкурсов Российского научного фонда, а также руководителем научных проектов, поддержанных Минобрнауки России и Российским фондом фундаментальных исследований.

У Алексея Александровича много благодарных учеников. Многие из них уже стали кандидатами и докторами наук и продолжают проводить научные исследования как в Саратовском университете, так и в вузах других городов страны. На текущий момент времени под руководством А. А. Короновского защищено 8 кандидатских диссертаций и 1 докторская диссертация. Алексей Александрович и в настоящее время продолжает руководить научными работами студентов и аспирантов.

В этот день очень хочется пожелать Алексею Александровичу, чтобы административная работа не мешала ему продолжать заниматься научными исследованиями, а его ученики постоянно радовали его уже своими новыми успехами и достижениями.



## Список литературы

1. *Hramov A. E., Koronovskii A. A.* An approach to chaotic synchronization // *Chaos*. 2004. Vol. 14, no. 3. P. 603–610. DOI: 10.1063/1.1775991.
2. *Павлов А. Н., Храмов А. Е., Короновский А. А., Ситникова Е. Ю., Макаров В. А., Овчинников А. А.* Вейвлет-анализ в нейродинамике // *УФН*. 2012. Т. 182, № 9. С. 905–939. DOI: 10.3367/UFNr.0182.201209a.0905.
3. *Hramov A. E., Koronovskii A. A.* Generalized synchronization: A modified system approach // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 71, no. 6. P. 067201. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.067201.
4. *Maksimenko V. A., Makarov V. V., Bera B. K., Ghosh D., Dana S. K., Goremyko M. V., Frolov N. S., Koronovskii A. A., Hramov A. E.* Excitation and suppression of chimera states by multiplexing // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94, no. 5. P. 052205. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052205.
5. *Sitnikova E., Hramov A. E., Koronovsky A. A., van Luijtelaar G.* Sleep spindles and spike-wave discharges in EEG: Their generic features, similarities and distinctions disclosed with Fourier transform and continuous wavelet analysis // *Journal of Neuroscience Methods*. 2009. Vol. 180, no. 2. P. 304–316. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2009.04.006.
6. *Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Hramov A. E.* Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise // *Physics Letters A*. 2010. Vol. 374, no. 29. P. 2925–2931. DOI: 10.1016/j.physleta.2010.05.024.
7. *Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // *УФН*. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281–1310. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200912c.1281.
8. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I.* Generalized synchronization onset // *Europhysics Letters*. 2005. Vol. 72, no. 6. P. 901–907. DOI: 10.1209/epl/i2005-10343-4.
9. *Sitnikova E., Hramov A. E., Grubov V., Koronovsky A. A.* Time-frequency characteristics and dynamics of sleep spindles in WAG/Rij rats with absence epilepsy // *Brain Research*. 2014. Vol. 1543. P. 290–299. DOI: 10.1016/j.brainres.2013.11.001.
10. *Maksimenko V. A., van Heukelum S., Makarov V. V., Kelderhuis J., Lüttjohann A., Koronovskii A. A., Hramov A. E., van Luijtelaar G.* Absence seizure control by a brain computer interface // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7, no. 1. P. 2487. DOI: 10.1038/s41598-017-02626-y.
11. *Hramov A. E., Koronovskii A. A.* Time scale synchronization of chaotic oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2005. Vol. 206, no. 3–4. P. 252–264. DOI: 10.1016/j.physd.2005.05.008.
12. *van Luijtelaar G., Hramov A., Sitnikova E., Koronovskii A.* Spike-wave discharges in WAG/Rij rats are preceded by delta and theta precursor activity in cortex and thalamus // *Clinical Neurophysiology*. 2011. Vol. 122, no. 4. P. 687–695. DOI: 10.1016/j.clinph.2010.10.038.




Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Научная статья  
УДК 517.9


DOI: 10.18500/0869-6632-003013

EDN: LSEQWO

### О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора

О. И. Москаленко , Е. В. Евстифеев

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com, evstifeev@mail.ru

Поступила в редакцию 3.06.2022, принята к публикации 6.07.2022,  
опубликована онлайн 14.10.2022, опубликована 30.11.2022

**Аннотация.** Целью работы является исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. В качестве объектов исследования выбраны однонаправленно связанные системы Лоренца, а для диагностики синхронного режима использован модифицированный метод вспомогательной системы. *Результатом* работы является доказательство наличия мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора. Для этого в работе получены бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний взаимодействующих систем Лоренца при значении параметра связи, соответствующем реализации в исследуемой системе режима перемежающейся обобщенной синхронизации, а также рассчитана зависимость меры мультистабильности от величины параметра связи. Показано, что в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации мера мультистабильности оказывается положительной, что является дополнительным подтверждением наличия мультистабильности в данном случае.

**Ключевые слова:** обобщенная синхронизация, мультистабильность, системы со сложной топологией аттрактора, перемежаемость, метод вспомогательной системы.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — докторов наук (проект № МД-18.2022.1.2).

**Для цитирования:** Москаленко О. И., Евстифеев Е. В. О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 676–684. DOI: 10.18500/0869-6632-003013. EDN: LSEQWO

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## On existence of multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled systems with complex topology of attractor

O. I. Moskalenko, E. V. Evstifeev

Saratov State University, Russia

E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com, evstifeev@mail.ru

Received 3.06.2022, accepted 6.07.2022, available online 14.10.2022,  
published 30.11.2022

**Abstract.** Aim of this work is to study the possibility of existence of multistability near the boundary of generalized synchronization in systems with complex attractor topology. Unidirectionally coupled Lorentz systems have been chosen as an object of study, and a modified auxiliary system method has been used to detect the presence of the synchronous regime. Result of the work is a proof of the presence of multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled systems with a complex topology of attractor. For this purpose, the basins of attraction of the synchronous and asynchronous states of interacting Lorenz systems have been obtained for the value of the coupling parameter corresponding to the realization of the intermittent generalized synchronization regime in the system under study, and the dependence of the multistability measure on the value of the coupling parameter has also been calculated. It is shown that in the regime of intermittent generalized synchronization the measure of multistability turns out to be positive, which is an additional confirmation of the presence of multistability in this case.

**Keywords:** generalized synchronization, multistability, systems with complex topology of attractor, intermittency, auxiliary system approach.

**Acknowledgements.** This work was financially supported by the Grant Council of the President of the Russian Federation for the state support of young Russian scientists – doctors of sciences (project No. MD-18.2022.1.2).

**For citation:** Moskalenko OI, Evstifeev EV. On existence of multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled systems with complex topology of attractor. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(6):676–684. DOI: 10.18500/0869-6632-003013

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

Мультистабильность является универсальным явлением, характерным для систем различной природы [1]. Под мультистабильностью подразумевается сосуществование в фазовом пространстве динамической системы нескольких аттракторов, выбор которых зависит от начальных условий этой системы. Впервые термин «мультистабильность» был введен в рассмотрение в работе [2], посвященной зрительному восприятию. Позднее мультистабильность была обнаружена почти во всех областях науки и техники, включая электронику, оптику, механику и биологию.

В настоящее время явление мультистабильности достаточно хорошо изучено применительно к автономной и неавтономной динамике исследуемых систем (см., например, [3–7] и др.). Однако анализ синхронной динамики взаимодействующих систем и явлений вблизи границ различных типов синхронизации с позиций мультистабильности до настоящего времени детально не проводился, хотя и существуют работы, направленные на изучение мультистабильности при разрушении синхронных режимов с точки зрения бифуркационного анализа в дискретных отображениях, генетических элементах, лазерных системах и ансамблях связанных осцилляторов (см., например, [8–12]).

Среди известных типов синхронизации наименее изученным с точки зрения мультистабильности является режим обобщенной хаотической синхронизации [13–15]. Этот режим означает установление связи между состояниями взаимодействующих систем в виде функционала и может наблюдаться как в случае однонаправленной, так и взаимной связи между этими системами. В обоих случаях вблизи границы обобщенной синхронизации наблюдается перемежающееся поведение, причем тип перемежаемости, реализуемый в данном случае, не зависит от характера связи между системами, а определяется топологией аттракторов взаимодействующих систем:

в системах с относительно простой топологией (с аттрактором ленточного типа) имеет место перемежаемость типа «on – off» [16, 17], в то время как в осцилляторах со сложной (двулистной) структурой наблюдается перемежаемость перескоков [18, 19]. Для систем с относительно простой топологией аттрактора недавно обнаружено наличие мультистабильности в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации [20, 21], в то время как вблизи границы этого режима в системах с более сложной структурой аттрактора подобные исследования до настоящего времени не проводились.

Поэтому целью настоящей работы является изучение возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора.

В качестве объекта исследования выбраны две однонаправленно связанные системы Лоренца [22]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ \dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1, \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\ \dot{z}_2 &= -b z_2 + x_2 y_2, \end{aligned} \tag{1}$$

(где  $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$  – векторы состояний взаимодействующих ведущей и ведомой систем,  $\sigma = 10$ ,  $b = 2$ ,  $r_1 = 40$  и  $r_2 = 35$  – управляющие параметры,  $\varepsilon$  – параметр связи), находящиеся вблизи границы обобщенной синхронизации. Для диагностики обобщенной синхронизации в данном случае традиционно используется метод вспомогательной системы [23], суть которого сводится к введению в рассмотрение дополнительной, так называемой вспомогательной системы  $\mathbf{x}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ , идентичной по управляющим параметрам ведомой системе, но стартовой с других начальных условий, принадлежащих бассейну притяжения того же самого аттрактора. Вспомогательная система Лоренца имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \sigma(y_3 - x_3) + \varepsilon(x_1 - x_3), \\ \dot{y}_3 &= r_3 x_3 - y_3 - x_3 z_3, \\ \dot{z}_3 &= -b z_3 + x_3 y_3, \end{aligned} \tag{2}$$

и рассматривается исключительно в совокупности с уравнением (1). Если обобщенная синхронизация между ведущим  $\mathbf{x}_1$  и ведомым  $\mathbf{x}_2$  осцилляторами отсутствует, то ведомая  $\mathbf{x}_2$  и вспомогательная  $\mathbf{x}_3$  системы будут эволюционировать на одном и том же аттракторе, но при этом в один и тот же момент времени их поведение будет совершенно различным ( $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_3$ ). В режиме обобщенной синхронизации ввиду установления функциональной связи между состояниями ведущей  $\mathbf{x}_1$  и ведомой  $\mathbf{x}_2$  систем, а также ведущей  $\mathbf{x}_1$  и вспомогательной  $\mathbf{x}_3$  систем, состояния ведомой и вспомогательной систем после завершения переходного процесса должны стать идентичными (то есть,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3$  в любой момент времени).

Как показали проведенные расчеты, режим обобщенной синхронизации в системе (1) возникает при  $\varepsilon = 11.5$ . Ниже границы этого режима, как отмечалось выше, наблюдается перемежающееся поведение. В данном случае функциональная связь между состояниями взаимодействующих систем устанавливается не всегда, а только в определенные интервалы времени, называемые ламинарными фазами или фазами синхронного поведения систем. В остальные моменты времени, называемые турбулентными всплесками, режим обобщенной синхронизации не наблюдается. Таким образом, в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации наблюдается чередование фаз синхронного и асинхронного поведения взаимодействующих систем, а для диагностики этого режима также возможно использовать метод вспомогательной системы. Для этого необходимо

проанализировать разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем и определить длительности характерных фаз поведения.

В то же самое время, как показывают проведенные исследования, при фиксированных начальных условиях ведущей и вспомогательной систем и различных начальных условиях ведомой системы в системе (1)–(2) в один и тот же момент времени могут наблюдаться как одинаковые, так и различные (синхронные или асинхронные) фазы поведения, что свидетельствует о наличии мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в данном случае. Для иллюстрации вышесказанного на рис. 1 приведены бассейны притяжения ведомой системы Лоренца (1), полученные в различные моменты времени при значении параметра связи  $\varepsilon = 8.8$ , соответствующем режиму перемежающейся обобщенной синхронизации. Начальные условия для ведущей (1) и вспомогательной (2) систем, как отмечалось выше, всегда выбирались фиксированными, а для ведомой системы координата  $y_2$  фиксировалась, а координаты  $x_2, z_2$  варьировались, как указано на рисунке. На рис. 1 темный цвет соответствует фазам синхронного поведения (в смысле обобщенной синхронизации), светлый – асинхронным. Белый цвет отвечает вылету изображающей точки на бесконечность. Из рисунков видно, что во все рассмотренные моменты времени вблизи границы обобщенной синхронизации в исследуемой системе имеет место мультистабильность.

Для количественной характеристики степени мультистабильности и диагностики обобщенной синхронизации с учетом этой особенности необходимо рассмотреть ансамбль ведомых осцилляторов Лоренца, находящихся под воздействием одной и той же ведущей системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ \dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1, \\ \dot{x}_2^i &= \sigma(y_2^i - x_2^i) + \varepsilon(x_1 - x_2^i), \\ \dot{y}_2^i &= r_2 x_2^i - y_2^i - x_2^i z_2^i, \\ \dot{z}_2^i &= -b z_2^i + x_2^i y_2^i, \end{aligned} \quad (3)$$

с теми же значениями управляющих параметров, что и для системы (1)–(2), и отличающимися

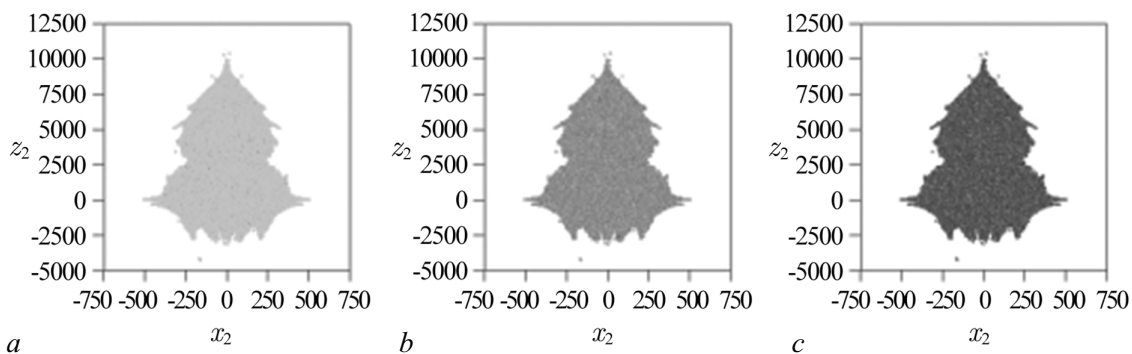


Рис. 1. Бассейны притяжения синхронных и асинхронных состояний ведомой системы Лоренца (1), находящейся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации с ведущей системой, при значении параметра связи  $\varepsilon = 8.8$  на плоскости начальных условий  $(x_2, z_2)$  ( $y_2 = 1.1$ ), полученные в различные моменты времени:  $t = 20000$  (a),  $40000$  (b),  $70000$  (c). Темный цвет соответствует реализации в фиксированный момент времени режима обобщенной синхронизации в системе (1), светлый цвет относится к асинхронному режиму. Белый цвет отвечает вылету изображающей точки на бесконечность

Fig. 1. Basins of attraction of synchronous and asynchronous states of the response Lorenz system (1) being un the intermittent generalized synchronization regime with the drive system for the coupling parameter value  $\varepsilon = 8.8$  on the plane of initial conditions  $(x_2, z_2)$  ( $y_2 = 1.1$ ) obtained in different moments of time:  $t = 20000$  (a),  $40000$  (b),  $70000$  (c). Dark color corresponds to the realization the generalized synchronization regime in system (1) for a fixed moment of time, light color refers to the asynchronous regime. White color corresponds to the going the representation point to infinity

значениями начальных условий ведомых систем, равномерно распределенными по аттракторам этих систем. Здесь  $i = 1 \dots N$ ,  $N = 4000$  — число элементов в ансамбле,  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\mathbf{x}_2^i = (x_2^i, y_2^i, z_2^i)$  — векторы состояний взаимодействующих ведущей и ведомой систем, соответственно. Диагностику обобщенной синхронизации в данном случае целесообразно проводить при помощи модифицированного метода вспомогательной системы, предложенного в работе [21], согласно которому необходимо провести сравнение состояний ведомых систем между собой (фактически, сравнивать состояния ведомой и вспомогательной систем при различных начальных условиях) и произвести расчет так называемой меры мультистабильности в зависимости от величины параметра связи. В роли меры мультистабильности по аналогии с работой [21] выступает вероятность наблюдения асинхронного режима, вычисляемая как

$$P_a = 1 - \sum_{i=1}^N \frac{n(\mathbf{x}_2^i)}{N(N-1)}, \quad (4)$$

где  $n(\mathbf{x}_2^i)$  — число систем, состояния которых в данный момент времени совпадают с состоянием  $i$ -го осциллятора. Совпадение состояний двух ведомых систем между собой, как отмечалось выше, согласно классическому методу вспомогательной системы [23], означает, что они находятся в режиме обобщенной синхронизации с ведущей системой. Тогда понятно, что если все ведомые системы находятся в режиме обобщенной синхронизации с ведущей системой, то  $P_a = 0$ . Аналогично, если для всех систем в данный момент времени наблюдается асинхронное поведение, то  $P_a = 1$ . Интерес представляет промежуточный вариант, когда только часть систем демонстрирует синхронное поведение, а остальная часть находится в асинхронном режиме. В данном случае  $P_a \in (0, 1)$ , а вблизи границы обобщенной синхронизации имеет место мультистабильность.

На рис. 2 представлена зависимость усредненной по времени вероятности наблюдения асинхронного режима

$$P = \int_0^T P_a(t) dt, \quad (5)$$

полученной для системы (3), от параметра связи  $\varepsilon$ . Видно, что по мере увеличения параметра связи мера мультистабильности монотонно уменьшается от 1 до 0, отражая переход от асинхронного состояния к режиму обобщенной синхронизации, а вблизи границы возникновения синхронного

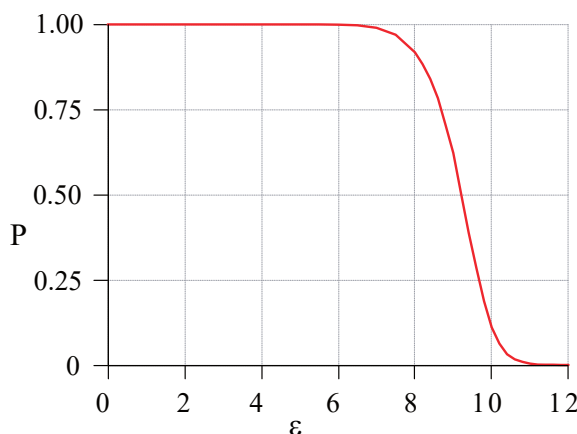


Рис. 2. Зависимость меры мультистабильности  $P$  от параметра связи  $\varepsilon$ , полученной при помощи модифицированного метода вспомогательной системы для системы (3)

Fig. 2. Dependence of the multistability measure  $P$  on the coupling parameter  $\varepsilon$  obtained by means of the modified auxiliary system method for the system (3)

режима эта мера отлична от нуля, что является дополнительным подтверждением наличия мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в исследуемой системе.

Таким образом, в настоящей работе на примере однонаправленно связанных систем Лоренца показано, что на границе обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора имеет место мультистабильность. Сделанные выводы подтверждены при помощи построения карт бассейнов притяжения синхронных и асинхронных состояний взаимодействующих систем, а также путем расчета меры мультистабильности в зависимости от величины параметра связи. Установлено, что по аналогии с системами с относительно простой топологией аттрактора в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации систем с относительно сложной структурой мера мультистабильности оказывается положительной, что доказывает наличие мультистабильности в данном случае.

## Список литературы

1. *Pisarchik A. N., Feudel U.* Control of multistability // *Physics Reports*. 2014. Vol. 540, no. 4. P. 167–218. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.02.007.
2. *Attneave F.* Multistability in perception // *Sci. Am.* 1971. Vol. 225, no. 6. P. 63–71. DOI: 10.1038/scientificamerican1271-62.
3. *Безручко Б. П., Селезнев Е. П., Смирнов Е. В.* Эволюция бассейнов притяжения аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода // *Письма в ЖТФ*. 1995. Т. 21, № 8. С. 12–17.
4. *Eschenazi E., Solari H. G., Gilmore R.* Basins of attraction in driven dynamical systems // *Phys. Rev. A*. 1989. Vol. 39, no. 5. P. 2609–2627. DOI: 10.1103/PhysRevA.39.2609.
5. *Moreno-Bote R., Rinzel J., Rubin N.* Noise-induced alternations in an attractor network model of perceptual bistability // *Journal of Neurophysiology*. 2007. Vol. 98, no. 3. P. 1125–1139. DOI: 10.1152/jn.00116.2007.
6. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2008. Vol. 18, no. 6. P. 1607–1626. DOI: 10.1142/S0218127408021233.
7. *Поздняков М. В., Савин А. В.* Особенности мультистабильных режимов несимметрично связанных логистических отображений // *Известия вузов. ПНД*. 2010. Т. 18, № 5. С. 44–53. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-5-44-53.
8. *Postnov D. E., Vadivasova T. E., Sosnovtseva O. V., Balanov A. G., Anishchenko V. S., Mosekilde E.* Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization // *Chaos*. 1999. Vol. 9, no. 1. P. 227–232. DOI: 10.1063/1.166394.
9. *Carvalho R., Fernandez B., Vilela Mendes R.* From synchronization to multistability in two coupled quadratic maps // *Phys. Lett. A*. 2001. Vol. 285, no. 5–6. P. 327–338. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00370-X.
10. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* Multistability formation and synchronization loss in coupled Hénon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63, no. 5. P. 056212. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.056212.
11. *Pikovsky A., Popovych O., Maistrenko Y.* Resolving clusters in chaotic ensembles of globally coupled identical oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, no. 4. P. 044102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.044102.
12. *Campos-Mejía A., Pisarchik A. N., Arroyo-Almanza D. A.* Noise-induced on–off intermittency in mutually coupled semiconductor lasers // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2013. Vol. 54. P. 96–100. DOI: 10.1016/j.chaos.2013.06.006.
13. *Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, no. 2. P. 980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.

14. *Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Hramov A. E.* Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 84, no. 3. P. 037201. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.037201.
15. *Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Hramov A. E., Boccaletti S.* Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 86, no. 3. P. 036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036216.
16. *Hramov A. E., Koronovskii A. A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Europhys. Lett.* 2005. Vol. 70, no. 2. P. 169–175. DOI: 10.1209/epl/i2004-10488-6.
17. *Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Pivovarov A. A., Evstifeev E. V.* Intermittent route to generalized synchronization in bidirectionally coupled chaotic oscillators // *Chaos.* 2020. Vol. 30, no. 8. P. 083133. DOI: 10.1063/5.0007156.
18. *Москаленко О. И., Короновский А. А., Ханадеев В. А.* Метод выделения характерных фаз поведения в системах со сложной топологией аттрактора, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации // *Известия вузов. ПНД.* 2020. Т. 28, № 3. С. 274–281. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-274-281.
19. *Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Pivovarov A. A., Khanadeev V. A., Hramov A. E., Pisarchik A. N.* Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization // *Phys. Rev. E.* 2020. Vol. 102, no. 1. P. 012205. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012205.
20. *Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Selskii A. O., Evstifeev E. V.* On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems // *Chaos.* 2021. Vol. 31, no. 8. P. 083106. DOI: 10.1063/5.0055302.
21. *Москаленко О. И., Короновский А. А., Сельский А. О., Евстифеев Е. В.* Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима // *Письма в ЖТФ.* 2022. Т. 48, № 2. С. 3–6. DOI: 10.21883/PJTF.2022.02.51910.18985.
22. *Zheng Z., Wang X., Cross M. C.* Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65, no. 5. P. 056211. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.056211.
23. *Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M. M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53, no. 5. P. 4528–4535. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4528.

## References

1. Pisarchik AN, Feudel U. Control of multistability. *Physics Reports.* 2014;540(4):167–218. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.02.007.
2. Attneave F. Multistability in perception. *Sci. Am.* 1971;225(6):63–71. DOI: 10.1038/scientificamerican1271-62.
3. Bezruchko BP, Seleznev EP, Smirnov EV. Evolution of basins of attractors of symmetrically coupled systems with period doubling. *Tech. Phys. Lett.* 1995;21(8):12–17 (in Russian).
4. Eschenazi E, Solari HG, Gilmore R. Basins of attraction in driven dynamical systems. *Phys. Rev. A.* 1989;39(5):2609–2627. DOI: 10.1103/PhysRevA.39.2609.
5. Moreno-Bote R, Rinzal J, Rubin N. Noise-induced alternations in an attractor network model of perceptual bistability. *Journal of Neurophysiology.* 2007;98(3):1125–1139. DOI: 10.1152/jn.00116.2007.
6. Feudel U. Complex dynamics in multistable systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2008;18(6):1607–1626. DOI: 10.1142/S0218127408021233.
7. Pozdnyakov MV, Savin AV. Multistable regimes in asymmetrically coupled period-doubling



- systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2010;18(5):44–53 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-5-44-53.
8. Postnov DE, Vadivasova TE, Sosnovtseva OV, Balanov AG, Anishchenko VS, Mosekilde E. Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization. *Chaos*. 1999;9(1):227–232. DOI: 10.1063/1.166394.
  9. Carvalho R, Fernandez B, Vilela Mendes R. From synchronization to multistability in two coupled quadratic maps. *Phys. Lett. A*. 2001;285(5–6):327–338. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00370-X.
  10. Astakhov V, Shabunin A, Uhm W, Kim S. Multistability formation and synchronization loss in coupled Hénon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism. *Phys. Rev. E*. 2001;63(5):056212. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.056212.
  11. Pikovsky A, Popovych O, Maistrenko Y. Resolving clusters in chaotic ensembles of globally coupled identical oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2001;87(4):044102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.044102.
  12. Campos-Mejía A, Pisarchik AN, Arroyo-Almanza DA. Noise-induced on–off intermittency in mutually coupled semiconductor lasers. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2013;54:96–100. DOI: 10.1016/j.chaos.2013.06.006.
  13. Rulkov NF, Sushchik MM, Tsimring LS, Abarbanel HDI. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*. 1995;51(2):980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.
  14. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Hramov AE. Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization. *Phys. Rev. E*. 2011;84(3):037201. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.037201.
  15. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Hramov AE, Boccaletti S. Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks. *Phys. Rev. E*. 2012;86(3):036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036216.
  16. Hramov AE, Koronovskii AA. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators. *Europhys. Lett.* 2005;70(2):169–175. DOI: 10.1209/epl/i2004-10488-6.
  17. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Pivovarov AA, Evstifeev EV. Intermittent route to generalized synchronization in bidirectionally coupled chaotic oscillators. *Chaos*. 2020;30(8):083133. DOI: 10.1063/5.0007156.
  18. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Khanadeev VA. Method for characteristic phase detection in systems with complex topology of attractor being near the boundary of generalized synchronization. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(3):274–281 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-274-281.
  19. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Pivovarov AA, Khanadeev VA, Hramov AE, Pisarchik AN. Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization. *Phys. Rev. E*. 2020;102(1):012205. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012205.
  20. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Selskii AO, Evstifeev EV. On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems. *Chaos*. 2021;31(8):083106. DOI: 10.1063/5.0055302.
  21. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Selskii AO, Evstifeev EV. A method to detect the characteristics of intermittent generalized synchronization based on calculation of probability of the synchronous regime observation. *Tech. Phys. Lett.* 2022;48(1):49–52. DOI: 10.21883/PJTF.2022.02.51910.18985.
  22. Zheng Z, Wang X, Cross MC. Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. E*. 2002;65(5):056211. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.056211.
  23. Abarbanel HDI, Rulkov NF, Sushchik MM. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. *Phys. Rev. E*. 1996;53(5):4528–4535. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4528.

*Москаленко Ольга Игоревна* — родилась в Саратове (1984), окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006), кандидат физико-математических наук (2008), доцент (2012), доктор физико-математических наук (2017). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ, начальник управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов — исследование классической и хаотической синхронизации и явлений, имеющих место на ее границе, в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов и характеристики перемежаемости; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях; разработка методов анализа поведения систем по временным рядам и их применение к живым системам. Автор около 200 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах, нескольких монографий и патентов на изобретения и полезные модели.



Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-5727-5169  
AuthorID (eLibrary.Ru): 150252

*Евстифеев Евгений Валентинович* — окончил бакалавриат (2019) и магистратуру (2021) факультета нелинейных процессов (ныне Института физики) СГУ. На данный момент является аспирантом кафедры физики открытых систем первого года обучения. Область научных интересов — параллельные вычисления на графических ускорителях, численное решение задач нелинейной динамики и хаоса, хаотическая синхронизация, показатели Ляпунова. Автор семи статей в отечественных и зарубежных рецензируемых научных журналах, участник всероссийских и международных научных конференций.



Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: evstifeev@mail.ru  
ORCID: 0000-0001-7474-1926



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Научная статья  
УДК 517.9:621.373.7

DOI: 10.18500/0869-6632-003015  
EDN: EXLIBY

### **Динамика системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели в случае отрицательных значений параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации**

*Л. В. Тюрюкина*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН, Россия  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: turukinalv@yandex.ru

*Поступила в редакцию 20.06.2022, принята к публикации 22.08.2022,  
опубликована онлайн 7.11.2022, опубликована 30.11.2022*

**Аннотация.** Цель настоящей работы — численное исследование системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели, описывающих возникновение хаоса при параметрическом взаимодействии трех мод в неравновесной среде с кубической нелинейностью, в случае, когда параметры, имеющие смысл коэффициентов диссипации, принимают отрицательные значения. Указанные модели демонстрируют богатую динамику, во многом отличающуюся от той, что наблюдалась для них же, но в случае положительных значений параметров. **Методы.** Исследование основано на численном решении дифференциальных уравнений, а также их численном бифуркационном анализе с помощью программы MatCont. **Результаты.** Для исследуемых моделей построены карты динамических режимов на плоскости управляющих параметров, зависимости показателя Ляпунова от параметра, аттракторы и их бассейны притяжения. На плоскости параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации, численно найдены и построены бифуркационные линии для положения равновесия и предельного цикла периода один. Для обеих моделей проведено сопоставление динамики, наблюдаемой в случае, когда параметры, имеющие смысл коэффициентов диссипации, принимают отрицательные значения, с наблюдавшейся в случае, когда указанные параметры принимают положительные значения. И показано, что в первом случае пространство параметров имеет более простое устройство. **Заключение.** Детально исследованы система Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенная модель в случае, когда параметры, имеющие смысл коэффициентов диссипации, принимают отрицательные значения. Показано, что по сравнению со случаем положительных значений указанных параметров, имеется ряд существенных отличий. Например, появляется новый тип хаотического аттрактора, исчезает мультистабильность, не связанная с внутренней симметрией системы, и т. д. Полученные результаты являются новыми, так как система Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенная модель впервые подробно исследовались в области отрицательных значений параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации.

**Ключевые слова:** модель Рабиновича–Фабриканта, обобщенная модель Рабиновича–Фабриканта, хаотические аттракторы, бифуркационный анализ, показатели Ляпунова.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-12-00121, <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

**Для цитирования:** Тюрюкина Л. В. Динамика системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели в случае отрицательных значений параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 685–701. DOI: 10.18500/0869-6632-003015. EDN: EXLIBY

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Dynamics of the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model in the case of negative values of parameters that have the meaning of dissipation coefficients

L. V. Turukina

Saratov Branch of Kotelnikov Institute  
of Radioengineering and Electronics of RAS, Russia  
Saratov State University, Russia  
E-mail: turukinalv@yandex.ru  
Received 20.06.2022, accepted 22.08.2022,  
available online 7.11.2022, published 30.11.2022

**Abstract.** Purpose of this work is a numerical study of the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model, which describe the occurrence of chaos during the parametric interaction of three modes in a nonequilibrium medium with cubic nonlinearity, in the case when the parameters that have the meaning of dissipation coefficients take negative values. These models demonstrate a rich dynamics that differs in many respects from what was observed for them, but in the case of positive values of the parameters. **Methods.** The study is based on the numerical solution of the differential equations, and their numerical bifurcation analysis using the MatCont program. **Results.** For investigated models we present a charts of dynamic regimes in the control parameters plane, Lyapunov exponents depending on the parameters, attractors and their basins. On the parameters plane, which have the meaning of dissipation coefficients, bifurcation lines and points are numerically found. They are plotted for equilibrium point and period one limit cycle. For both models we compared dynamics observed in the case when the parameters that have the meaning of dissipation coefficients take negative values, with the one observed in the case when these parameters take positive values. And it is shown that in the first case parameter space has a simpler structure. **Conclusion.** The Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model were studied in detail in the case when the parameters which have the meaning of dissipation coefficients take negative values. It is shown that there are a number of differences in comparison with the case of positive values of these parameters. For example, a new type of chaotic attractor appears, multistability that is not related to the symmetry of the system disappears, etc. The obtained results are new, since the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model were studied in detail for the first time in the region of negative values of parameters which have the meaning of dissipation coefficients.

**Keywords:** Rabinovich–Fabrikant model, generalized Rabinovich–Fabrikant model, chaotic attractors, Lagrange formalism, bifurcation analysis, multistability.

**Acknowledgements.** Research was carried out under support of the Russian Science Foundation (project no. 21-12-00121), <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

**For citation:** Turukina LV. Dynamics of the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model in the case of negative values of parameters that have the meaning of dissipation coefficients. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(6):685–701. DOI: 10.18500/0869-6632-003015

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

В 1979 году М. И. Рабинович и А. Л. Фабрикант исследовали задачу о модуляционной неустойчивости при параметрическом взаимодействии мод в неравновесной диссипативной среде с кубической нелинейностью и со спектрально узким усилением [1]. Авторы записали нелинейное параболическое комплексное уравнение, которое представляет собой обобщение известной модели Ландау. Далее они предположили дискретность пространственного спектра решений в резонансном случае для периодических граничных условий. Кроме того, в спектральный интервал, в котором среда является активной, попадают всего три моды — основная и два ее сателлита, возникающие в результате модуляционной неустойчивости. В итоге для рассматриваемой задачи ими была получена следующая система:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= 2\sigma a_1 a_2 a_0^* \exp(-i\Delta\omega t) + \gamma_0 a_0 + \sigma a_0(|a_0|^2 + 2|a_1|^2 + 2|a_2|^2), \\ \dot{a}_{1,2} &= 2\sigma a_{2,1} a_0^2 \exp(i\Delta\omega t) - \nu_{1,2} a_0 + \sigma a_{1,2}(2|a_0|^2 + |a_{1,2}|^2 + 2|a_{2,1}|^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $a_0$  — комплексная амплитуда основной моды,  $a_{1,2}$  — комплексные амплитуды спутников;  $\gamma_0$  — коэффициент диссипации для основной моды, а  $\nu_{1,2}$  — коэффициенты диссипации для спутников;  $\Delta\omega$  — частотная расстройка, заданная как  $\Delta\omega = 2\omega_0 - \omega_1 - \omega_2$ , где  $\omega_0$  — частота основной моды, а  $\omega_{1,2}$  — частоты спутников;  $\sigma$  — параметр, характеризующий нелинейность в системе,  $t$  — безразмерное время. Последняя при условии, что основная мода доминирует над спутниками ( $a_0 \gg a_1 = a_2$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ), была сведена к действительной трехмерной модели:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(z - 1 + x^2) + \gamma x, \\ \dot{y} &= x(3z + 1 - x^2) + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(\nu + xy),\end{aligned}\tag{2}$$

где  $x, y, z$  — динамические переменные ( $x$  и  $y$  пропорциональны  $\sqrt{a_0}$ , а  $z - a_1$ ), а  $\gamma$  и  $\nu$  — параметры, имеющие смысл коэффициентов диссипации ( $\gamma = \gamma_0$ ).

Как показали исследования последних лет [2–11], система (1) демонстрирует богатую динамику: регулярные и хаотические аттракторы разной топологии, мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы разных типов, и т. д. Так, например, в работе [2] авторы исследовали разнообразные аттракторы системы (1): положения равновесия, периодические циклы и хаотические аттракторы, а также гетероклинические орбиты, соединяющие положения равновесия с устойчивыми циклами и хаотическими аттракторами. А в работах [3–5] исследовались хаотические аттракторы системы (1) для различных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$ . Авторы показали, что в системе Рабиновича–Фабриканта (1) наблюдаются типологически разные хаотические аттракторы. При этом в работах [3, 4] основное внимание уделено так называемым «скрытым аттракторам» и «виртуальным» седлам. В работе [6] авторы предложили аналоговую схему, которая описывается моделью (1), и провели ее подробное исследование: бифуркационные диаграммы, фазовые портреты, отображения «первого возврата» и т. д. В работе [7] авторы рассматривали механизм стабилизации хаотической системы в окрестности неустойчивых точек равновесия на примере нескольких систем, в том числе системы Рабиновича–Фабриканта (1).

В работе [8] подробно численно исследована система Рабиновича–Фабриканта (1): построены карты динамических режимов, зависимости показателей Ляпунова, аттракторы и бассейны их притяжения, найдены линии основных бифуркаций неподвижных точек и предельного цикла. Также в указанной работе приведены примеры периодических и хаотических аттракторов разной топологии и показано, что система (1) демонстрирует мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы разных типов или топологий. И, наконец, в работе [9] авторы рассмотрели и подробно численно исследовали случай трехмодового взаимодействия в присутствии диссипации с кубической нелинейностью общего вида<sup>1</sup>. Используя формализм Лагранжа, авторы работы [9] записали обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка для действительных переменных. В предположении, что система находится в окрестности резонанса, по описанной в работе [1] методологии была получена система, представляющая собой обобщение модели Рабиновича–Фабриканта (1) на случай кубической нелинейности общего вида:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= [p(x^2 + z) + q(-y^2 + 3z) - 1]y + \gamma x, \\ \dot{y} &= [p(-x^2 + 3z) + q(y^2 + z) + 1]x + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(\nu + (p + q)xy).\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь  $x, y, z$  — динамические переменные,  $\gamma$  и  $\nu$  — параметры, идентичные параметрам модели Рабиновича–Фабриканта, а  $p$  и  $q$  — параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие в системе. При этом, как показано в работе [9], система (2) полностью совпадает с системой (1), если  $p = 1.0$  и  $q = 0$ .

<sup>1</sup>Напомним, что в работе [1] авторами рассматривался частный случай кубической нелинейности, который отвечал комплексному параболическому уравнению.

Отметим, что модели (1) и (2) носят в определенном смысле универсальный характер, так как они применимы к системам различной физической природы, в которых имеет место трехмодовое взаимодействие в присутствии кубической нелинейности. Например, в таких, как волны Толлмина–Шлихтинга в гидродинамических течениях [12], ветровые волны на воде [13], волны в химических средах с диффузией [14], радиотехнические системы, которые допускают как аналоговое моделирование, так и реализацию в радиотехническом устройстве [8], и т. д.

В настоящей работе проведено подробное численное исследование систем (1) и (2) для случая, когда параметры  $\gamma$  и  $\nu$  принимают отрицательные значения. Такой выбор параметров обусловлен тем, что во всех указанных выше работах исследования проводились исключительно для положительных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$ . А так как в уравнениях (1) перед слагаемыми, задающими диссипацию, стоят разные знаки, то это означает, что у основной моды диссипация отрицательная, а у сателлитов — положительная. В случае отрицательных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  ситуация сменится на противоположную: у основной моды диссипация станет положительной, а у сателлитов — отрицательной. Таким образом, знак параметров  $\gamma$  и  $\nu$  определяет, на какой частоте осуществляется накачка энергии, а на какой — ее отбор. При этом в работах [3,4,6] отмечалось, что хотя отрицательные значения параметров  $\gamma$  и  $\nu$  и не имеют физического смысла применительно к задаче, сформулированной в работе [1], для них система Рабиновича–Фабриканта (1) также будет демонстрировать нетривиальную динамику и хаотический аттрактор нового типа. Последний в работе [3] назван как «Gramophon-like chaotic attractor». С другой стороны, системы (1) и (2) можно рассматривать как эталонные модели, описывающие сложную динамику и хаос. И, как следствие, параметры, присутствующие в уравнениях, могут принимать любые разумные значения. Таким образом, можно ожидать, что представленные в данной работе результаты дополняют результаты перечисленных выше работ, в первую очередь [8,9], создавая полную картину динамического поведения систем (1) и (2).

### 1. Динамика системы Рабиновича–Фабриканта в случае отрицательных значений параметров $\gamma$ и $\nu$

Сначала рассмотрим динамику системы Рабиновича–Фабриканта (1). Пусть параметры  $\gamma$  и  $\nu$  принимают отрицательные значения. Построим для нее карту динамических режимов и ее увеличенные фрагменты на плоскости параметров  $(\nu, \gamma)$  (рис. 1). Такая карта строится при сканировании плоскости параметров, когда в каждой ее точке численно определяется тип наблюдаемого

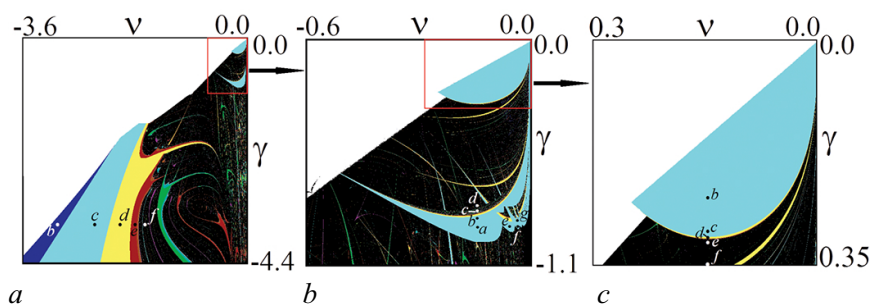


Рис. 1. Карта динамических режимов (a) и ее увеличенные фрагменты (b, c) системы Рабиновича–Фабриканта (1) на плоскости параметров  $(\nu, \gamma)$ . На фрагменте a буквами обозначены точки, в которых построены аттракторы, представленные на рис. 2. На фрагментах b, c — аттракторы, представленные на рис. 3, 5 (цвет онлайн)

Fig. 1. Chart of dynamical regimes (a) and its enlarged fragments (b, c) of the Rabinovich–Fabrikant model (1) at  $(\nu, \gamma)$  parameter plane. On fragment a, the letters indicate the points where the attractors shown in Fig. 2 are plotted. On fragments b, c, the letters indicate the points where the attractors shown in Fig. 3 and Fig. 5 are plotted (color online)

режима, который обозначается соответствующим цветом. На картах (см. рис. 1) цветом выделены следующие режимы: темно-синий цвет отвечает положению равновесия, голубой — предельному циклу периода 1, желтый — циклу периода 2, красный — циклу периода 4, и т. д., черный цвет отвечает хаотическому режиму, а белым цветом обозначена область «убегания траекторий на бесконечность». Указанные периоды циклов определяются стандартным образом с помощью сечения Пуанкаре.

На карте (рис. 1, *a*) можно выделить две области, отличающиеся своим устройством. Первая расположена в нижней части карты (параметр  $\gamma < -1.5$ ). Здесь наблюдаются разнообразные области периодических режимов и хаоса. Для лучшего понимания наблюдаемой в указанной области динамики для системы Рабиновича–Фабриканта (1) построены зависимости показателей Ляпунова от параметра  $\nu$  и аттракторы в нескольких точках пространства параметров (рис. 2). Из рисунка следует, что если зафиксировать значение параметра  $\gamma$ , например  $\gamma = -3.8$ , и менять значение параметра  $\nu$ , двигаясь по плоскости параметров слева направо, то сначала, при больших по модулю отрицательных значениях параметра  $\nu$ , все три показателя Ляпунова отрицательные (рис. 2, *a*), а в фазовом пространстве рассматриваемой системы наблюдаются два симметрично расположенные и переходящие друг в друга при одновременной замене  $x \rightarrow -x$  и  $y \rightarrow -y$

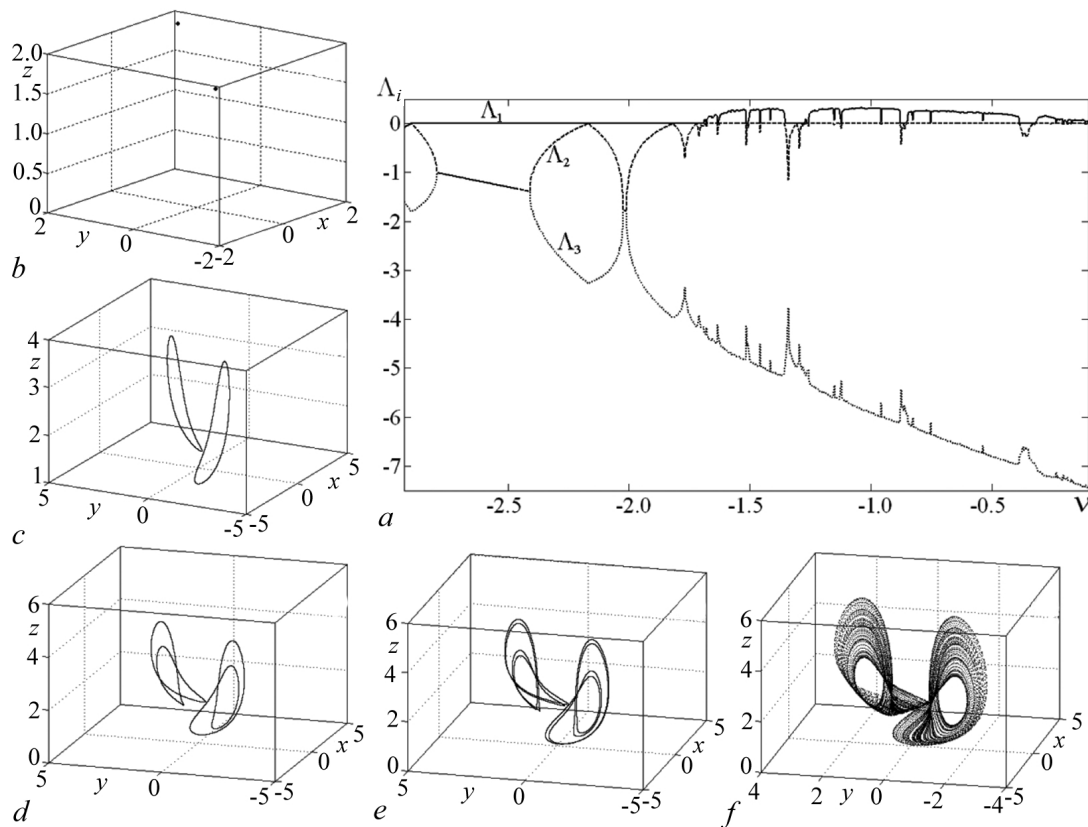


Рис. 2. *a* — Зависимость показателей Ляпунова системы Рабиновича–Фабриканта (1) от параметра  $\nu$  для  $\gamma = -3.8$ . *b–f* — Аттракторы системы Рабиновича–Фабриканта (1), построенные для следующих значений параметров:  $\gamma = -3.8$  и  $\nu = -2.9$  (*b*),  $\nu = -2.2$  (*c*),  $\nu = -2.0$  (*d*),  $\nu = -1.8$  (*e*) и  $\nu = -1.5$  (*f*). Точки, в которых построены аттракторы, отмечены на рис. 1, *a* соответствующими буквами

Fig. 2. *a* — Graphs of Lyapunov exponents of the Rabinovich–Fabrikant system (1) on the parameter  $\nu$  at  $\gamma = -3.8$ . *b–f* — Attractors of the Rabinovich–Fabrikant system (1) at  $\gamma = -3.8$  and  $\nu = -2.9$  (*b*),  $\nu = -2.2$  (*c*),  $\nu = -2.0$  (*d*),  $\nu = -1.8$  (*e*) and  $\nu = -1.5$  (*f*). In Fig. 1, *a* the points at which the attractors plotted are marked by the corresponding letters

положения равновесия (рис. 2, b). Отметим, что системы (1) и (2) обладают свойством симметрии относительно одновременной замены переменных

$$\begin{aligned}x &\rightarrow -x, \\y &\rightarrow -y.\end{aligned}\tag{4}$$

Это свойство приводит к тому, что в фазовом пространстве рассматриваемых систем будет наблюдаться либо симметрично расположенная пара аттракторов (когда один аттрактор переходит в другой при замене (3)), либо один симметричный аттрактор (который при замене (3) переходит сам в себя)<sup>2</sup>. При увеличении параметра  $\nu$  (модуль параметра  $\nu$  уменьшается) старший показатель Ляпунова становится нулевым, а два оставшиеся показателя по-прежнему отрицательные. Это отвечает тому, что в системе рождается симметричная пара предельных циклов периода 1 (рис. 2, c). Если и дальше увеличивать параметр  $\nu$ , то будет наблюдаться последовательность бифуркаций удвоения периода (рис. 2, d, e), пока, наконец, старший показатель Ляпунова не станет положительным (см. рис. 2, a) и в системе не возникнет симметричная пара хаотических аттракторов (рис. 2, f). Точки, в которых построены аттракторы, отмечены на рис. 1, a соответствующими буквами.

Таким образом, при достаточно больших отрицательных значениях параметра  $\gamma$  динамика системы Рабиновича–Фабриканта качественно такая же, что наблюдалась для нее же в случае, когда параметры  $\gamma$  и  $\nu$  были положительными, а параметр  $\gamma > 0.8$  [8]. Однако, если в случае положительных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  ширина областей периодических и хаотического режимов с ростом параметра  $\gamma$  уменьшалась, то теперь она увеличивается (см. рис. 1, a).

Вторая область располагается при небольших, по модулю, значениях параметров  $\gamma$  и  $\nu$  и более детально представлена на увеличенных фрагментах (рис. 1, b, c). На ней наблюдается несколько областей предельного цикла периода 1, внутри которых имеет место переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Все эти области, как будет показано далее, отличаются топологией наблюдаемого внутри них предельного цикла периода 1.

Рассмотрим сначала область, представленную на рис. 1, c. На рис. 3 представлены график зависимости показателей Ляпунова системы (1) от параметра  $\gamma$  и ее аттракторы, построенные в некоторых точках, отмеченных на рис. 1, c соответствующими буквами. Вначале внутри этой области система (1) демонстрирует симметричный предельный цикл периода 1, который переходит сам в себя при замене  $x \rightarrow -x$  или  $y \rightarrow -y$  (рис. 3, b). Отметим, что ранее такой тип симметрии ни в системе Рабиновича–Фабриканта, ни в ее обобщенной модели не наблюдался. При уменьшении параметра  $\gamma$  (модуль параметра  $\gamma$  увеличивается) этот цикл претерпевает бифуркацию потери симметрии и становится неустойчивым, а вместо него рождается симметричная пара предельных циклов периода 1 (рис. 3, c). Особенно хорошо эти изменения заметны на проекциях указанных циклов на плоскости  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  и  $(y, z)$ , которые представлены на рис. 4, a, b. Для удобства восприятия циклы переходящие друг в друга, на рис. 3, 4 и на аналогичных им рисунках, изображены красным и синим цветами. В дальнейшем на базе каждого из циклов периода 1, представленных на рис. 3, c, будет наблюдаться каскад бифуркаций удвоения периода, соответствующие циклы периода 2 представлены на рис. 3, d, пока в системе не возникнет хаотический аттрактор (рис. 3, e, f). При этом сначала он будет иметь ту же топологию, что и предельный цикл периода 1 (сравним рис. 3, c и 3, e, а также рис. 4, b и 4, c), а потом в результате кризиса топология хаотического аттрактора изменится (см. рис. 3, f). Отметим, что хаотический аттрактор такого типа, как показан на рис. 3, f, ранее в системе Рабиновича–Фабриканта или ее обобщенной модели не наблюдался. В работе [3] аттракторы такой конфигурации назвали «Gramophon-like chaotic attractor». Выбор названия, очевидно, обусловлен видом проекции аттрактора на плоскость  $(x, y)$  (рис. 4, d).

<sup>2</sup>В дальнейшем при описании наблюдаемых в рассматриваемых системах аттракторов будем использовать выражения «симметричная пара...» или «симметричный...» подразумевая симметрию, заданную формулой (3).



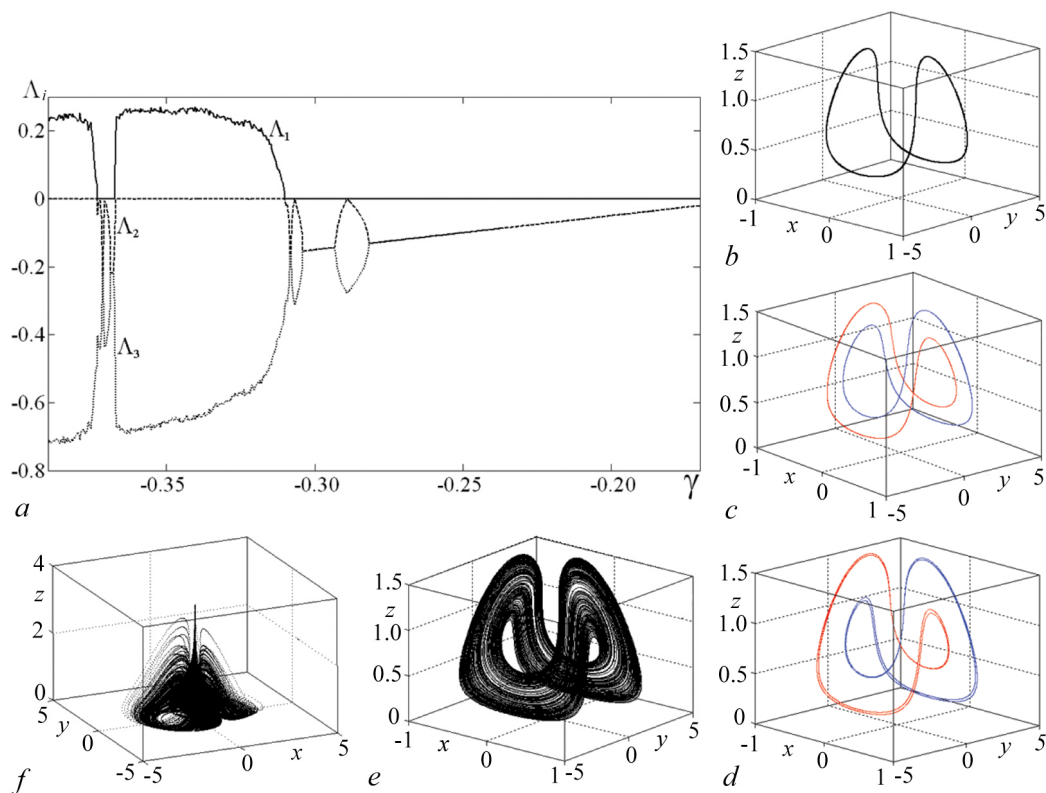


Рис. 3. *a* – Зависимость показателей Ляпунова системы Рабиновича–Фабриканта (1) от параметра  $\gamma$  для  $\nu = -0.15$ . *b–f* – Аттракторы системы Рабиновича–Фабриканта (1), построенные для следующих значений параметров:  $\nu = -0.15$  и  $\gamma = -0.24$  (*b*),  $\gamma = -0.29$  (*c*),  $\gamma = -0.307$  (*d*),  $\gamma = -0.313$  (*e*) и  $\gamma = -0.32$  (*f*). Точки, в которых построены аттракторы, отмечены на рис. 1, *c* соответствующими буквами (цвет онлайн)

Fig. 3. *a* – Graphs of Lyapunov exponents of the Rabinovich–Fabrikant system (1) on the parameter  $\gamma$  at  $\nu = -0.15$ . *b–f* – Attractors of the Rabinovich–Fabrikant system (1) at  $\nu = -0.15$  and  $\gamma = -0.24$  (*b*),  $\gamma = -0.29$  (*c*),  $\gamma = -0.307$  (*d*),  $\gamma = -0.313$  (*e*) and  $\gamma = -0.32$  (*f*). In Fig. 1, *c* the points at which the attractors plotted are marked by the corresponding letters (color online)

Теперь рассмотрим нижнюю часть представленного на рис. 1, *b* фрагмента карты динамических режимов системы Рабиновича–Фабриканта (1). Здесь наблюдается несколько структур цикла периода 1. На рис. 5 представлены периодические и хаотические аттракторы, построенные для некоторых из этих структур. Точки, в которых они построены, отмечены на рис. 1, *b* соответствующими буквами. А на рис. 4, *e–j* представлены проекции некоторых из этих аттракторов на плоскости  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  и  $(y, z)$ . В самой левой структуре система (1) демонстрирует симметричный предельный цикл периода 1 (рис. 5, *a*, рис. 4, *e*). Как и в описанном выше случае, он сначала теряет симметрию, порождая симметричную пару предельных циклов периода 1 (рис. 5, *b*, рис. 4, *f*). Эти циклы в дальнейшем претерпевают каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого рождается хаотический аттрактор, который сначала имеет топологию предельного цикла (рис. 5, *c*), а потом топологию типа «Gramophone» (рис. 5, *d*, рис. 4, *g*). В остальных структурах будет аналогичная динамика. Отличия будут лишь в топологии предельного цикла периода 1. Так, во второй слева структуре для системы (1) сразу будет наблюдаться симметричная пара предельных циклов периода 1 (рис. 5, *e* и рис. 4, *h*). В третьей слева структуре опять будет один симметричный предельный цикл периода 1 (рис. 5, *f* и рис. 4, *i*), который перед бифуркацией удвоения периода потеряет симметрию (рис. 5, *g* и рис. 4, *j*). Таким образом, в рассматриваемой области будет наблюдаться чередование структур, одна из которых отвечает симметричному предельному циклу периода 1, а вторая – симметричной паре предельных циклов периода 1.

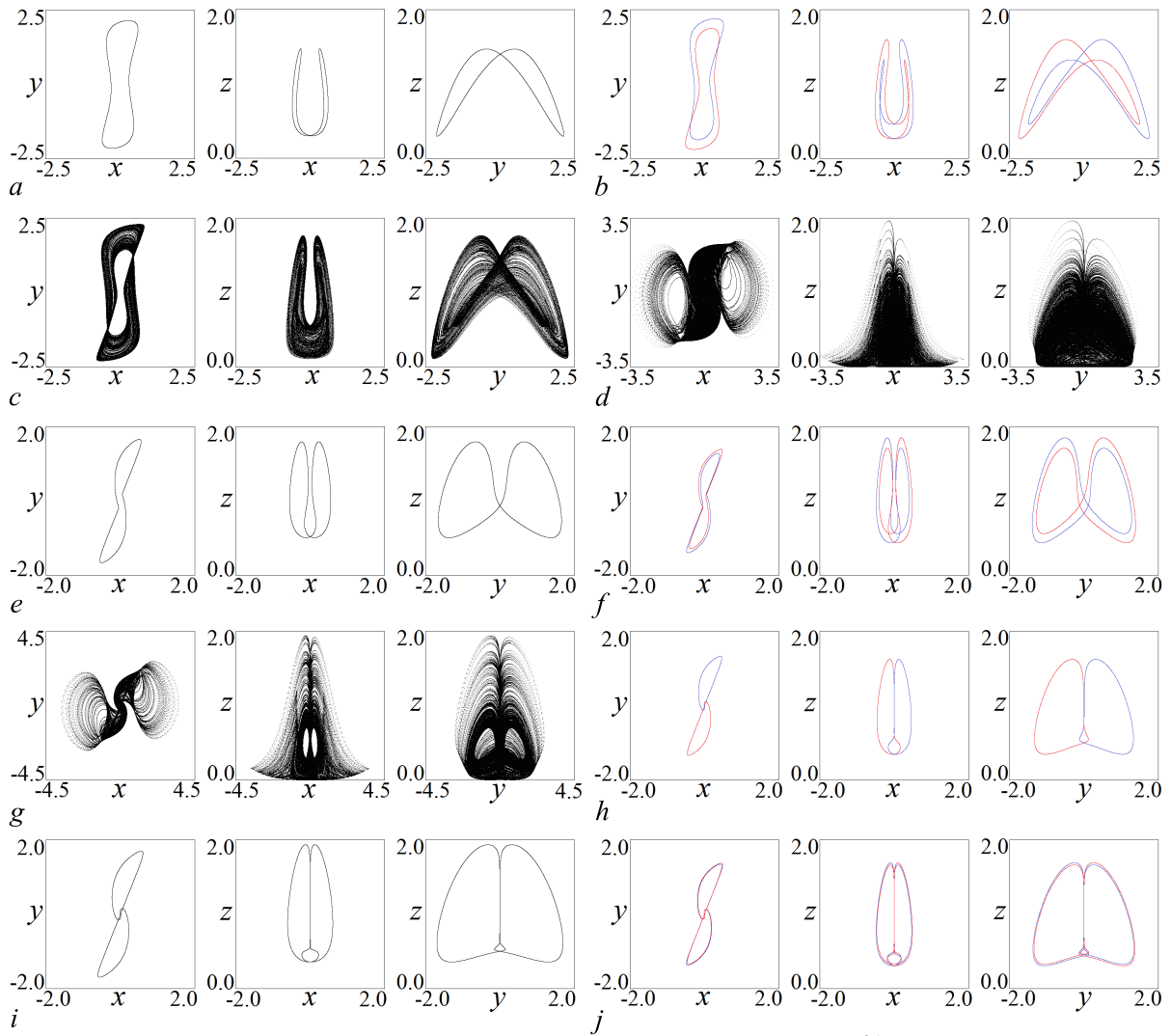


Рис. 4. Проекция аттракторов системы Рабиновича–Фабриканта (1) на плоскости  $(x, y)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, z)$ , построенные для следующих значений параметров:  $\nu = -0.15, \gamma = -0.24$  (a);  $\nu = -0.15, \gamma = -0.29$  (b);  $\nu = -0.15, \gamma = -0.313$  (c);  $\nu = -0.15, \gamma = -0.32$  (d);  $\gamma = -0.9, \nu = -0.15$  (e);  $\gamma = -0.87, \nu = -0.15$  (f);  $\gamma = -0.8, \nu = -0.15$  (g);  $\gamma = -0.9, \nu = -0.06$  (h);  $\gamma = -0.9, \nu = -0.04$  (i);  $\gamma = -0.87, \nu = -0.04$  (j). Соответствующие трехмерные аттракторы представлены на рис. 3 для фрагментов a–d и на рис. 5 для фрагментов e–j (цвет онлайн)

Fig. 4. Attractors projections of the Rabinovich–Fabrikant system (1) at  $\nu = -0.15$  and  $\gamma = -0.24$  (a),  $\nu = -0.15$  and  $\gamma = -0.29$  (b),  $\nu = -0.15$  and  $\gamma = -0.313$  (c),  $\nu = -0.15$  and  $\gamma = -0.32$  (d),  $\gamma = -0.9$  and  $\nu = -0.15$  (e),  $\gamma = -0.87$  and  $\nu = -0.15$  (f),  $\gamma = -0.8$  and  $\nu = -0.15$  (g),  $\gamma = -0.9$  and  $\nu = -0.06$  (h),  $\gamma = -0.9$  and  $\nu = -0.04$  (i),  $\gamma = -0.87$  and  $\nu = -0.04$  (j). Corresponding three-dimensional attractors are shown in fig. 3 for case a–d and in fig. 5 for case e–j (color online)

На рис. 6 представлены сечения типичных бассейнов притяжения аттракторов системы (1) плоскостью  $z_0 = \text{Const}$ . На рис. 6, a показаны бассейны для случая, когда в системе (1) реализуется симметричная пара предельных циклов периода 1, представленных на рис. 2, b. Из рисунка видно, что бассейны большие, хотя с ростом значения динамической переменной  $z_0$  их размер немного уменьшается; внутри бассейнов нет областей «убегания траектории на бесконечность», что было типично в случае положительных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  [8], а их граница устроена довольно сложным образом. Отметим, что для всех других аттракторов из этой области (нижняя часть карты динамических режимов), как периодических, так и хаотических, бассейны притяжения будут такими же, как и в рассмотренном случае.

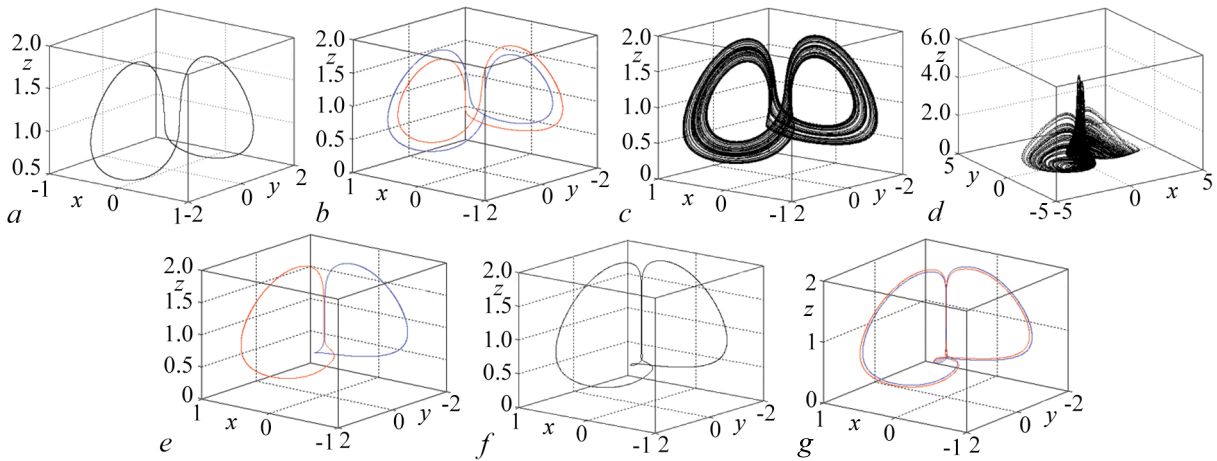


Рис. 5. Аттракторы системы Рабиновича–Фабриканта (1), построенные для следующих значений параметров:  $\gamma = -0.9$ ,  $\nu = -0.15$  (a);  $\gamma = -0.87$ ,  $\nu = -0.15$  (b);  $\gamma = -0.83$ ,  $\nu = -0.15$  (c);  $\gamma = -0.8$ ,  $\nu = -0.15$  (d);  $\gamma = -0.9$ ,  $\nu = -0.06$  (e);  $\gamma = -0.88$ ,  $\nu = -0.06$  (f);  $\gamma = -0.86$ ,  $\nu = -0.06$  (g). Точки, в которых построены аттракторы, отмечены на рис. 1, b соответствующими буквами (цвет онлайн)

Fig. 5. Attractors of the Rabinovich–Fabrikant system (1) at  $\gamma = -0.9$  and  $\nu = -0.15$  (a),  $\gamma = -0.87$  and  $\nu = -0.15$  (b),  $\gamma = -0.83$  and  $\nu = -0.15$  (c),  $\gamma = -0.8$  and  $\nu = -0.15$  (d),  $\gamma = -0.9$  and  $\nu = -0.06$  (e),  $\gamma = -0.88$  and  $\nu = -0.06$  (f),  $\gamma = -0.86$  and  $\nu = -0.06$  (g). In Fig. 1, b the points at which the attractors plotted are marked by the corresponding letters (color online)

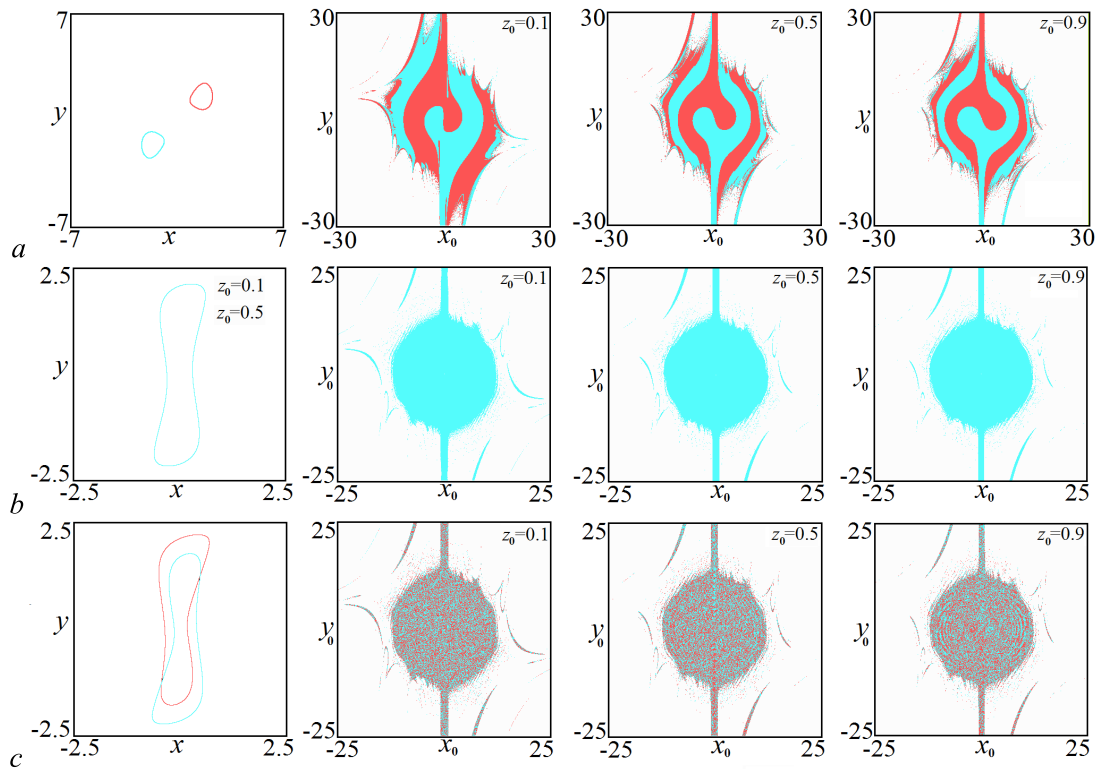


Рис. 6. Сечения бассейнов притяжения аттракторов системы Рабиновича–Фабриканта (1) плоскостью  $z_0 = \text{Const}$ , построенные для следующих значений параметров  $\gamma = -3.8$ ,  $\nu = -2.2$  (a);  $\gamma = -0.24$ ,  $\nu = -0.15$  (b);  $\gamma = -0.29$ ,  $\nu = -0.15$  (c). Бассейны окрашены в тот же цвет, что и соответствующие аттракторы (цвет онлайн)

Fig. 6. Sections of the basins of the attractors by the  $z_0 = \text{Const}$  plane plotted for the Rabinovich–Fabrikant system (1),  $\gamma = -3.8$  and  $\nu = -2.2$  (a),  $\gamma = -0.24$  and  $\nu = -0.15$  (b),  $\gamma = -0.29$  and  $\nu = -0.15$  (c). The basin is colored to the same color as the attractors (color online)

На рис. 6, *b* представлены бассейны для симметричного предельного цикла периода 1, показанного на рис. 3, *b*, а на рис. 6, *c* — для симметричной пары предельных циклов периода 1, показанных на рис. 3, *c*. В обоих случаях бассейны имеют одинаковый размер, который не меняется с ростом значения динамической переменной  $z_0$ , и форму в виде окружности со сложно устроенной границей и двумя вертикальными полосами. При этом во втором случае (см. рис. 6, *c*) точки, стартовав из которых траектория приходит на один или другой цикл, заполняют бассейн хаотическим образом. А значит, даже малое изменение начальных значений динамических переменных приведет к тому, что система (1) будет «перескакивать» с одного аттрактора на другой. Для всех остальных аттракторов, независимо от их периода, из этой же области (область небольших значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$ ) бассейны притяжения будут такими же, как на рис. 6, *b* и рис. 6, *c*.

## 2. Динамика обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта в случае отрицательных значений параметров $\gamma$ и $\nu$

Теперь рассмотрим динамику обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта (2) в случае, когда параметры  $\gamma$  и  $\nu$  принимают отрицательные значения. Для начала построим для нее карты динамических режимов на плоскости  $(p, q)$  для нескольких значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$ . Соответствующие карты представлены на рис. 7. На этих и на всех последующих картах используется та же цветовая палитра, что и на рис. 1.

На представленных выше картах, так же, как и в случае положительных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  [9], наблюдаются области периодических и хаотических режимов, представляющие собой выходящие из начала координат расширяющиеся лучи, а сами карты обладают симметрией относительно линии  $p = -q$ . Однако, если при положительных значениях параметров  $\gamma$  и  $\nu$ , на плоскости  $(p, q)$  наблюдалась универсальная структура областей периодических и хаотических режимов, не зависящая от параметров  $\gamma$  и  $\nu$ , то теперь это не так. При вариации параметров  $\gamma$  и  $\nu$ ,

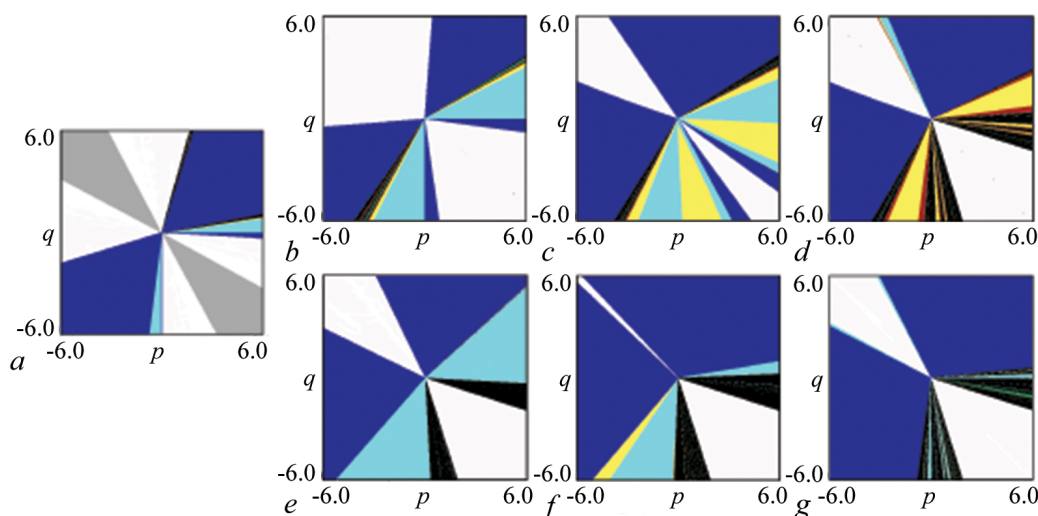


Рис. 7. *a* — Карта динамических режимов системы Рабиновича–Фабриканта (1) на плоскости  $(p, q)$ .  $\gamma = 0.96$  и  $\nu = 1.5$ . Рисунок взят из работы [9]. *b–g* — Карты динамических режимов обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта (2) на плоскости параметров  $(p, q)$ . Параметры  $\gamma$  и  $\nu$  принимают следующие значения:  $\gamma = -3.8$ ,  $\nu = -2.9$  (*b*);  $\gamma = -3.8$ ,  $\nu = -2.2$  (*c*);  $\gamma = -3.8$ ,  $\nu = -1.5$  (*d*);  $\gamma = -0.24$ ,  $\nu = -0.15$  (*e*);  $\gamma = -0.35$ ,  $\nu = -0.15$  (*f*);  $\gamma = -0.9$ ,  $\nu = -0.15$  (*g*) (цвет онлайн)

Fig. 7. *a* — Chart of dynamical regimes of the Rabinovich–Fabrikant system (1) at  $(p, q)$  parameter plane. A figure is taken from the work [9]. *b–g* — Charts of dynamical regimes of the general model (2) at  $(p, q)$  parameter plane.  $\gamma = -3.8$  and  $\nu = -2.9$  (*b*),  $\gamma = -3.8$  and  $\nu = -2.2$  (*c*),  $\gamma = -3.8$  and  $\nu = -1.5$  (*d*),  $\gamma = -0.24$  and  $\nu = -0.15$  (*e*),  $\gamma = -0.35$  and  $\nu = -0.15$  (*f*),  $\gamma = -0.9$  and  $\nu = -0.15$  (*g*) (color online)

карта динамических режимов обобщенной модели (2) меняется, временами довольно сильно. Одни области становятся уже, другие — шире, а некоторые и вообще исчезают. Еще одно отличие состоит в том, что если в случае положительных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  в обобщенной модели наблюдался режим, представляющий собой инвариантное (устойчивое) множество в виде окружности, целиком лежащее в плоскости  $z = 0$  (область этого режима располагалась на карте динамических режимов вдоль линии  $p = -q$ , внутри области «убегания траектории на бесконечность» и окрашена в серый цвет), то в случае отрицательных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  указанный режим не наблюдается.

Теперь рассмотрим устройство карты динамических режимов обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта (2) на плоскости  $(\nu, \gamma)$ . Так как в рассматриваемом случае на плоскости параметров  $(p, q)$  не наблюдается никакой универсальной структуры, то будем строить карты динамических режимов обобщенной модели (2), выбирая параметры  $p$  и  $q$  так, чтобы обойти по плоскости  $(p, q)$  начало координат против часовой стрелки стартовав из точки 1, как показано на рис. 8, а. Соответствующие карты динамических режимов представлены на рис. 8, b–h.

В точке 1 значения параметров  $p = 0.9$  и  $q = -0.1$ . Карта динамических режимов системы (2) для данного случая показана на рис. 8, b и представляет собой сильно искаженную картину, характерную для системы Рабиновича–Фабриканта (1) (см. рис. 1, a). На ней так же, как и ранее, наблюдаются области различных периодических и хаотических режимов, но сами области сильно изменили свою конфигурацию и стали меньше, а некоторые области периодических режимов вообще исчезли. В первую очередь речь идет об областях, наблюдавшихся при небольших значениях параметров  $\gamma$  и  $\nu$ . В точке 2 (рис. 8, a), значения параметров  $p = 1.0$  и  $q = 0$ . Соответствующая карта динамических режимов системы (2) представлена на рис. 8, c и будет полностью идентична той, что наблюдалась для системы (1) (сравним рис. 8, c и рис. 1, a). Что не удивительно, так как, как отмечалось ранее (см. Введение), именно при этих значениях параметров уравнения системы (2) превращаются в уравнения системы (1).

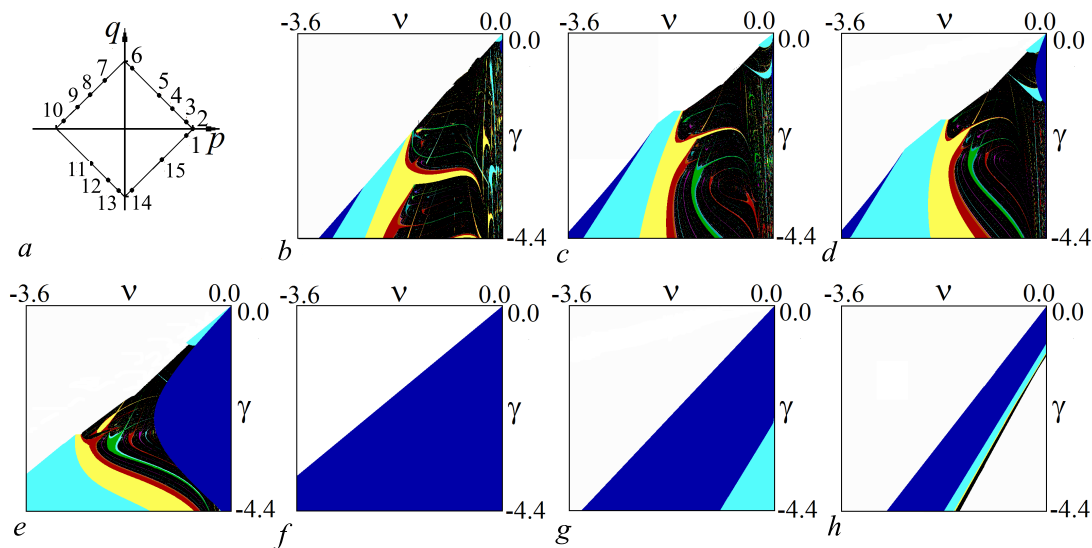


Рис. 8. а — Плоскость  $(p, q)$  с указанием точек, в которых строятся карты динамических режимов (b–h) обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта (2) на плоскости параметров  $(\nu, \gamma)$ . Параметры  $p$  и  $q$  принимают следующие значения:  $p = 0.9, q = -0.1$  (b);  $p = 1, q = 0$  (c);  $p = 0.9, q = 0.1$  (d);  $p = 0.7, q = 0.3$  (e);  $p = 0.5, q = 0.5$  (f);  $p = 0.1, q = 0.9$  (g);  $p = -0.3, q = 0.7$  (h) (цвет онлайн)

Fig. 8. a —  $(p, q)$  parameter plane. The points at which charts of dynamical regimes plotted are shown in this plane. b–h — Charts of dynamical regimes of the general model (2) at  $(\nu, \gamma)$  parameter plane. Parameters  $p, q$  values:  $p = 0.9$  and  $q = -0.1$  (b),  $p = 1$  and  $q = 0$  (c),  $p = 0.9$  and  $q = 0.1$  (d),  $p = 0.7$  and  $q = 0.3$  (e),  $p = 0.5$  and  $q = 0.5$  (f),  $p = 0.1$  and  $q = 0.9$  (g),  $p = -0.3$  and  $q = 0.7$  (h) (color online)

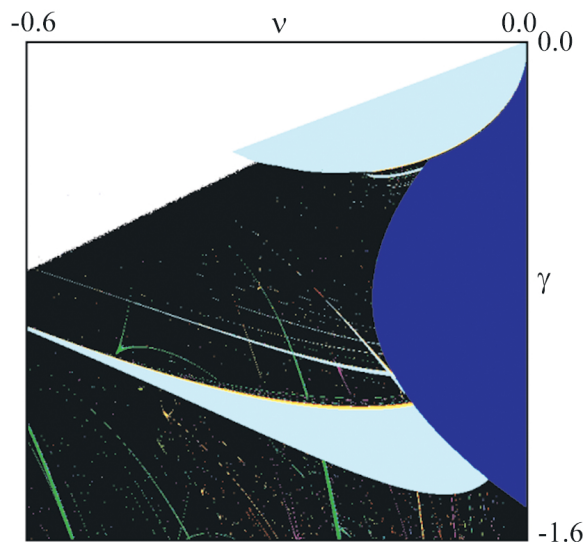


Рис. 9. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта (2) на плоскости параметров  $(v, \gamma)$  для  $p = 0.9$  и  $q = 0.1$  (цвет онлайн)

Fig. 9. Enlarged fragment of the chart of dynamical regimes of the general model (2) at  $(v, \gamma)$  parameter plane,  $p = 0.9$  and  $q = 0.1$  (color online)

Теперь перейдем в точку 3. Для нее параметры  $p$  и  $q$  равны, соответственно  $p = 0.9$  и  $q = 0.1$ . Карта динамических режимов для данного случая представлена на рис. 8, *d*. Рассмотрим этот случай более подробно. На рис. 9 представлен увеличенный фрагмент указанной выше карты динамических режимов. Из сравнения рис. 1, *a* с рис. 8, *d*, а рис. 1, *b* с рис. 9 видно, что если область больших значений параметров  $\gamma$  и  $v$  (нижняя часть карты) практически не изменилась, единственное отличие состоит в том, что области предельных циклов периода 1 и 2 стали шире, то область небольших значений параметров  $\gamma$  и  $v$  демонстрирует заметные изменения. Во-первых, в области небольших значений параметров  $\gamma$  и  $v$ , около правой границы, появилась еще одна область, отвечающая новому положению равновесия. Как будет показано далее, эта область не вытесняет наблюдавшиеся при данных значения параметров режимы, а накладывается на них. Как следствие, в рассматриваемой области в обобщенной модели

(2) будет иметь место мультистабильность: в фазовом пространстве будут сосуществовать симметричная пара новых положений равновесия и либо предельные циклы, либо хаотический аттрактор. Последнее зависит от конкретных значений параметров  $\gamma$  и  $v$ . При этом топология предельных циклов и хаотического аттрактора будет такой же, как и в случае системы (1). А вот устройство бассейнов притяжения изменится и не будет зависеть от периода сосуществующих аттракторов. Например, на рис. 10, *a* представлен бассейн для случая, когда в фазовом пространстве сосуществуют симметричная пара положений равновесия и хаотический аттрактор. Из рисунка видно, что большая часть бассейна хаотически заполнена точками, стартовав из которых траектория придет либо в одно из положений равновесия (соответствующие точки окрашены в синий и зеленый цвет), либо на хаотический аттрактор (соответствующие точки окрашены в голубой цвет). И лишь в окрестности начала координат, что хорошо видно на увеличенном фрагменте сечения бассейна, построенного для  $z_0 = 0.5$ , будут наблюдаться небольшие «острова» бассейнов притяжения положений равновесия (см. рис. 10, *a*). Причем с ростом  $z_0$  эти «острова» будут уменьшаться, пока совсем не исчезнут. Второе отличие карты динамических режимов, построенной для обобщенной модели (2), от карты, построенной для системы (1), состоит в том, что области всех периодических режимов сдвинуты вниз по параметру  $\gamma$  (сравним рис. 1, *b* с рис. 9).

Теперь вернемся к описанию того, как меняются карты динамических режимов обобщенной модели (2) на плоскости  $(v, \gamma)$  при движении на плоскости  $(p, q)$  вдоль маршрута, показанного на рис. 8, *a*. При переходе из точки 3 в точку 4 ( $p = 0.7$  и  $q = 0.3$ ) область нового положения равновесия будет увеличиваться в размере (см. рис. 8, *e*), пока, наконец, в точке 5 ( $p = 0.5$  и  $q = 0.5$ ) не останется только область, отвечающая новому положению равновесия (см. рис. 8, *f*)<sup>3</sup>. Далее в точке 6 ( $p = 0.1$  и  $q = 0.9$ ), помимо области нового положения равновесия будет

<sup>3</sup> Отметим, что область «убегания траектории на бесконечность» будет присутствовать на всех картах динамических режимов, представленных на рис. 8. Поэтому при описании наблюдаемых на картах изменений она упоминаться не будет.

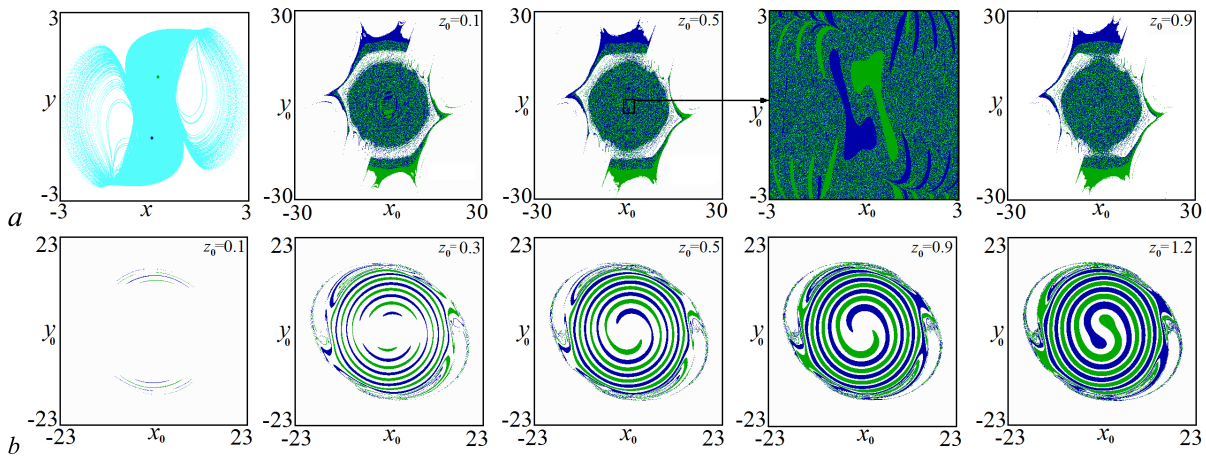


Рис. 10. Сечения бассейнов притяжения аттракторов обобщенной модели (2) плоскостью  $z_0 = \text{Const}$ , построенные для следующих значений параметров  $p = 0.9, q = 0.1, \gamma = -0.4, \nu = -0.1$  (a) и  $p = -0.3, q = 0.7, \gamma = -2.0, \nu = -0.9$  (b). Бассейны окрашены в тот же цвет, что и соответствующие аттракторы (цвет онлайн)

Fig. 10. Sections of the basins of the attractors by the  $z_0 = \text{Const}$  plane plotted for the general model (2),  $p = 0.9, q = 0.1, \gamma = -0.4, \nu = -0.1$  (a) and  $p = -0.3, q = 0.7, \gamma = -2.0, \nu = -0.9$  (b). The basin is colored to the same color as the attractors (color online)

наблюдаться область, отвечающая предельному циклу периода 1 (см. рис. 8, g). После чего, при движении из точки 6 в точку 7 ( $p = -0.3$  и  $q = 0.7$ ), последовательно будут появляться области, отвечающие предельным циклам все большего и большего периода. Пока, наконец, в точке 7 не появится область, отвечающая хаотическому режиму (см. рис. 8, h). При этом все наблюдаемые на этой карте области имеют вид узких, особенно в случае предельных циклов и хаоса, полос. Отметим, что для всех наблюдаемых режимов бассейны притяжения будут одинаковы и будут иметь вид, показанный на рис. 10, b. На этом рисунке представлены бассейны для случая, когда в фазовом пространстве наблюдается симметричная пара положений равновесия. Видно, что при небольших  $z_0$  бассейны представляют собой узкие дуги, которые с ростом  $z_0$  соединяются, образуя спираль. С ростом  $z_0$  число витков спирали будет уменьшаться, а их толщина — увеличиваться (см. рис. 10, b). Как оказалось, при дальнейшем движении по выбранному маршруту показанные на рис. 8, h полосы будут становиться все уже и уже, пока полностью не исчезнут, и в точке 8 ( $p = -0.5$  и  $q = 0.5$ ) в обобщенной системе Рабиновича–Фабриканта (2) будет наблюдаться лишь «убегание траектории на бесконечность».

Если далее продолжить движение по плоскости параметров ( $p, q$ ) согласно указанному выше маршруту, то трансформация карт динамических режимов пойдет в обратном порядке. А именно, в точке 9 будет наблюдаться картина, представленная на рис. 8, h, в точке 10 — на рис. 8, g, в точке 11 — на рис. 8, f и т. д. В точке 15 так же, как и в точке 8 будет наблюдаться лишь «убегание траектории на бесконечность».

### 3. Бифуркационный анализ системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели

В заключение исследования для системы Рабиновича–Фабриканта (1) и ее обобщенной модели (2) был проведен бифуркационный анализ с помощью программы *MatCont*. Были численно найдены и построены линии основных бифуркаций для положений равновесия и предельных циклов периода 1. Соответствующие бифуркационные диаграммы представлены на рис. 11. Они хорошо согласуются с картами динамических режимов, построенными для системы (1) и системы (2) для тех же значений параметров и представленными на рис. 1, рис. 8, d и рис. 9.

Сначала рассмотрим бифуркационную диаграмму для системы Рабиновича–Фабриканта (1). Она показана на рис. 11, а. Из диаграммы следует, что в области больших значений параметра  $\gamma$  ( $\gamma < -2$ ) при движении по плоскости слева направо сначала на линии SN в результате седло-узловой бифуркации рождаются устойчивое и неустойчивое положения равновесия. Далее устойчивое положение равновесия становится неустойчивым на линии H, в результате бифуркации Андронова–Хопфа. При этом в системе рождается устойчивый предельный цикл, период которого удваивается на линии бифуркации удвоения периода PD (рис. 11, а, левый фрагмент). Как следует из вида карты динамических режимов (рис. 1, а), далее будет иметь место каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого в системе (1) возникает хаотический аттрактор.

В области меньших значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  наблюдается несколько областей существования предельного цикла периода 1 (см. рис. 11, а, правый фрагмент). Верхняя область ограничена линиями бифуркации удвоения периода PD, которая представляет собой замкнутую кривую, и обратной бифуркацией Неймарка–Сакера NS. А нижние области (на правом фрагменте рис. 11, а показано две таких области) ограничены линиями седло-узловой бифуркации предельных циклов

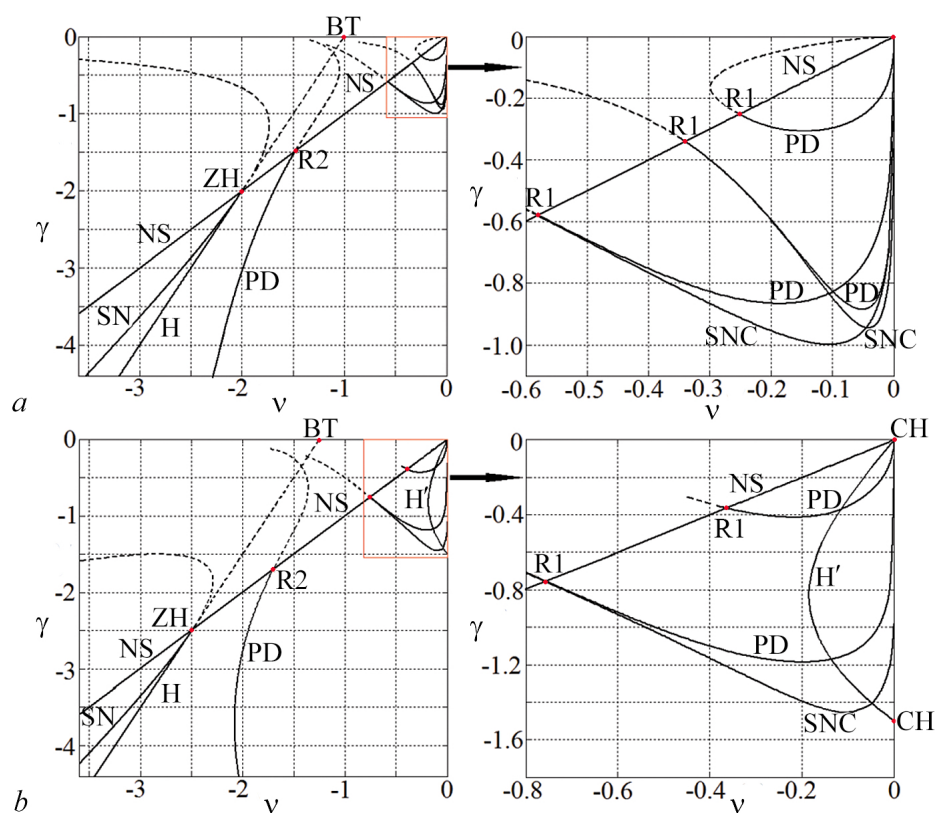


Рис. 11. Бифуркационные линии и точки системы Рабиновича–Фабриканта (1) (а) и ее обобщенной модели (2) для случая  $p = 0.9$  и  $q = 0.1$  (b) на плоскости  $(\nu, \gamma)$ . SN – седло-узловая бифуркация неподвижной точки, SNC – седло-узловая бифуркация предельных циклов, H – прямая бифуркация Андронова–Хопфа, H' – обратная бифуркация Андронова–Хопфа, PD – бифуркация удвоения периода предельных циклов, NS – обратная бифуркация Неймарка–Сакера, ZH – точка пересечения линии касательной бифуркации неподвижной точки и линии бифуркации Андронова–Хопфа (точка бифуркации Zero–Hopf), R1 – резонанс 1 : 1, R2 – резонанс 1 : 2, BT – точка бифуркации Богданова–Тakens. Сплошными линиями показаны бифуркации устойчивых режимов, а пунктирными – неустойчивых

Fig. 11. Bifurcations lines and points of the Rabinovich–Fabrikant system (1) and its general model (2) at  $p = 0.9$  and  $q = 0.1$  on the  $(\nu, \gamma)$  parameter plane. SN is saddle-node bifurcation of the stable point, SNC is saddle-node bifurcation of the limit cycle, H is direct Hopf bifurcation, H' is inverse Hopf bifurcation, PD is period doubling bifurcation of the limit cycle, NS is inverse Neimark–Saker bifurcation, ZH is Zero–Hopf bifurcation point, R1 is resonance 1:1, R2 is resonance 1:2, BT is Bogdanov–Takens bifurcation point. The bifurcation lines corresponded unstable regimes are indicated by dotted lines



SNC и бифуркации удвоения периода PD. Отметим, что области периодического и хаотического поведения ограничены линией обратной бифуркацией Неймарка–Сакера NS, на которой есть точки бифуркаций коразмерности два, такие как ZH — точка бифуркации Zero–Hopf,  $R1$  — резонанс  $1 : 1$ ,  $R2$  — резонанс  $1 : 2$ .

Теперь рассмотрим бифуркационную диаграмму для обобщенной модели системы Рабиновича–Фабриканта (2). Она представлена на рис. 11, b. Из сопоставления рис. 11, a и рис. 11, b следует, что в целом бифуркационная картина обобщенной модели (2) идентична той, что наблюдается в системе Рабиновича–Фабриканта (1) за исключением двух отличий имеющих место при небольших значениях параметров  $\gamma$  и  $\nu$ . Первое отличие состоит в том, что линия бифуркации удвоения периода PD, ограничивающая верхнюю область предельного цикла периода 1, в обобщенной модели не является замкнутой кривой (см. рис. 11, b, правый фрагмент). Второе — в том, что в обобщенной модели (2), в области небольших значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$ , наблюдается линия бифуркации, которой не было в системе Рабиновича–Фабриканта. Это линия  $H'$ , которая отвечает обратной бифуркации Андронова–Хопфа и на которой рождается устойчивое положение равновесия и неустойчивый предельный цикл (см. рис. 11, b, правый фрагмент).

### Заключение

В настоящей работе были численно с помощью методов теории динамического хаоса исследованы система Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенная модель в случае, когда параметры  $\gamma$  и  $\nu$ , имеющие смысл коэффициентов диссипации, принимают отрицательные значения. Для обеих систем были построены карты динамических режимов, аттракторы и их проекции, типичные для данных систем бассейны притяжения аттракторов. Найдены основные бифуркации положений равновесия и предельных циклов периода один. Проведено сопоставление системы Рабиновича–Фабриканта с ее обобщенной моделью, а также с результатами, полученными ранее для случая положительных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$ .

Исследование показало, что в обеих исследуемых моделях в пространстве параметров наблюдаются области, отвечающие устойчивым положениям равновесия, предельным циклам различных периодов и хаотическим аттракторам. При этом так же, как и в случае положительных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$ , все аттракторы, независимо от типа и периода, возникают либо парами, переходящими друг в друга при одновременной замене  $x \rightarrow -x$  и  $y \rightarrow -y$ , либо если аттрактор один, то он обладает симметрией относительно той же замены переменных. То есть в системе имеет место мультистабильность, связанная с внутренней симметрией систем. А вот мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы различных периодов и топологии, характерная для случая, когда параметры  $\gamma$  и  $\nu$  принимают положительные значения, в случае отрицательных значений указанных параметров в системе Рабиновича–Фабриканта отсутствует полностью. А в ее обобщенной модели наблюдается лишь в области небольших значений параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации.

Также исследование показало, что в случае отрицательных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  в системе Рабиновича–Фабриканта и в ее обобщенной модели наблюдается хаотический аттрактор типа «Graftophone», который при положительных значениях указанных параметров не наблюдался. Кроме того, в случае отрицательных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  бассейны притяжения всех аттракторов имеют практически одинаковое устройство: они существенно больше, чем в случае положительных значений этих параметров, и не содержат областей, отвечающих «убеганию траектории на бесконечность».

Еще одно отличие. Если в случае положительных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  в обобщенной модели плоскость параметров, характеризующих нелинейность системы, имела универсальное устройство, то в случае отрицательных значений указанных параметров это не так. Хотя качественно устройство плоскости параметров, характеризующих нелинейность системы,

для отрицательных значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  такое же, как в случае положительных значений, но оно довольно сильно меняется при вариации параметров.

Таким образом, можно отметить, что настоящая работа дополняет работы [8, 9] формируя полную картину динамики системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели для любых значений входящий в них параметров.

### Список литературы

1. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1979. Т. 77, № 2. С. 617–629.
2. Danca M.-F., Feckan M., Kuznetsov N., Chen G. Looking more closely to the Rabinovich-Fabrikant system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, no. 2. P. 1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
3. Danca M.-F. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 86, no. 2. P. 1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.
4. Danca M.-F., Kuznetsov N., Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 88, no. 1. P. 791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
5. Luo X., Small M., Danca M.-F., Chen G. On a dynamical system with multiple chaotic attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, no. 9. P. 3235–3251. DOI: 10.1142/S0218127407018993.
6. Danca M.-F., Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, no. 10. P. 3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
7. Srivastava M., Agrawal S. K., Vishal K., Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system // Applied Mathematical Modelling. 2014. Vol. 38, no. 13. P. 3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
8. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В. Сложная динамика и хаос в модельной системе Рабиновича–Фабриканта // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2019. Т. 19, № 1. С. 4–18. DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
9. Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В. Обобщенная система Рабиновича–Фабриканта: уравнения и динамика // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 7–29. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29.
10. Liu Y., Yang Q., Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 234, no. 1. P. 101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
11. Agrawal S. K., Srivastava M., Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems // Nonlinear Dynamics. 2012. Vol. 69, no. 4. P. 2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
12. Hocking L. M., Stewartson K. On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance // Proc. R. Soc. Lond. A. 1972. Vol. 326, no. 1566. P. 289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
13. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // В кн.: Нелинейные волны / под. ред. Гапонова-Грехова А. В. М.: Наука, 1979. С. 68–104.
14. Kuramoto Y., Yamada T. Turbulent state in chemical reactions // Progress of Theoretical Physics. 1976. Vol. 56, no. 2. P. 679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.

### References

1. Rabinovich MI, Fabrikant AL. Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media. Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1979;77(2):617–629 (in Russian).

2. Danca MF, Feckan M, Kuznetsov N, Chen G. Looking more closely to the Rabinovich-Fabrikant system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2016;26(2):1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
3. Danca MF. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system. *Nonlinear Dynamics*. 2016;86(2):1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.
4. Danca MF, Kuznetsov N, Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system. *Nonlinear Dynamics*. 2017;88(1):791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
5. Luo X, Small M, Danca MF, Chen G. On a dynamical system with multiple chaotic attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2007;17(9):3235–3251. DOI: 10.1142/S0218127407018993.
6. Danca MF, Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2004;14(10):3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
7. Srivastava M, Agrawal SK, Vishal K, Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system. *Applied Mathematical Modelling*. 2014;38(13):3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
8. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Turukina LV. Complex dynamics and chaos in the Rabinovich–Fabrikant model. *Izvestiya of Saratov University. Physics*. 2019;19(1):4–18 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
9. Kuznetsov SP, Turukina LV. Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(1):7–29 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29.
10. Liu Y, Yang Q, Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010;234(1):101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
11. Agrawal SK, Srivastava M, Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems. *Nonlinear Dynamics*. 2012;69(4):2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
12. Hocking LM, Stewartson K. On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1972;326(1566):289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
13. Andronov AA, Fabrikant AL. Landau damping, wind waves, and whistler. In: Gaponov-Grekhov AV, editor. *Nonlinear Waves*. Moscow: Nauka; 1979. P. 68–104 (in Russian).
14. Kuramoto Y, Yamada T. Turbulent state in chemical reactions. *Progress of Theoretical Physics*. 1976;56(2):679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.



*Турюкина Людмила Владимировна* родилась в Саратове (1977). Окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2000). По окончании аспирантуры защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (СГУ, 2003), имеет звание доцента по специальности «Радиофизика» (2009). В настоящее время работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. По совместительству работает доцентом на кафедре динамических систем Института физики СГУ на базе СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Имеет более 50 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН  
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: turukinalv@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0002-4221-8900  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 39405



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003012  
EDN: OGSBSV

### Критерии существования внутренних неподвижных точек дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры с однородными турнирами

Д. Б. Эшмаматова<sup>1</sup>✉, М. А. Таджиева<sup>1,2</sup>, Р. Н. Ганиходжаев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан

<sup>2</sup>Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: ✉24dil@mail.ru, mohbonut@mail.ru, rganikhodzhaev@gmail.com

Поступила в редакцию 27.05.2022, принята к публикации 4.07.2022,  
опубликована онлайн 19.10.2022, опубликована 30.11.2022

**Аннотация.** Цель работы заключается в изучении динамики асимптотического поведения траекторий дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры с однородными турнирами, действующих в произвольном  $(m - 1)$ -мерном симплексе. Известно, что динамическая система — это объект либо процесс, для которого однозначно определяется понятие состояния, как совокупность некоторых величин в данный момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течением времени. В вопросах популяционной генетики, биологии, экологии, эпидемиологии и экономики, в основном, используют системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающие эволюцию исследуемого процесса. Так как при исследовании жизненных явлений часто применяют уравнения Лотки–Вольтерры, основная цель работы состоит в изучении траекторий дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры с помощью элементов теории графов. **Методы.** В работе для квадратичных отображений Лотки–Вольтерры построены карты неподвижных точек, которые позволяют описать динамику рассматриваемых систем. **Результаты.** С помощью карт неподвижных точек дискретной динамической системы, в частном случае даны критерии существования неподвижных точек с нечетными ненулевыми координатами, и эти результаты о расположении неподвижных точек систем Лотки–Вольтерры соответственно обобщены на случай произвольного симплекса. Основными результатами являются теоремы 5–9, которые позволяют описывать динамику этих систем, возникающих в ряде генетических, эпидемиологических и экологических моделей. **Заключение.** Результаты, полученные в работе, дают подробное описание динамики траекторий отображений Лотки–Вольтерры с однородными турнирами. Карта неподвижных точек выделяет конкретную область в симплексе, наиболее важную и интересную для изучения динамики этих отображений. Полученные результаты применимы в задачах экологии, например, для описания и изучения круговорота биогенов.

**Ключевые слова:** квадратичное отображение Лотки–Вольтерры, симплекс, граф, турнир, однородный турнир, неподвижная точка, карта неподвижных точек, циклическая тройка, транзитивная тройка и кососимметрическая матрица.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках научного исследования ОТ-Ф4-31 «Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады на симплексах» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2017–2020 гг.).

**Для цитирования:** Эшмаматова Д. Б., Таджиева М. А., Ганиходжаев Р. Н. Критерии существования внутренних неподвижных точек дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры с однородными турнирами // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 702–716. DOI: 10.18500/0869-6632-003012. EDN: OGSBSV

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Criteria for internal fixed points existence of discrete dynamic Lotka–Volterra systems with homogeneous tournaments

D. B. Eshmamatova<sup>1</sup>✉, M. A. Tadzhieva<sup>1,2</sup>, R. N. Ganikhodzhaev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Tashkent State Transport University, Uzbekistan

<sup>2</sup>National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: ✉24dil@mail.ru, mohbonut@mail.ru, rganikhodzhaev@gmail.com

Received 27.05.2022, accepted 4.07.2022, available online 19.10.2022, published 30.11.2022

**Abstract.** Purpose of the work is to study the dynamics of the asymptotic behavior of trajectories of discrete Lotka–Volterra dynamical systems with homogeneous tournaments operating in an arbitrary  $(m - 1)$ -dimensional simplex. It is known that a dynamic system is an object or a process for which the concept of a state is uniquely defined as a set of certain quantities at a given time, and a law describing the evolution of initial state over time is given. Mainly in questions of population genetics, biology, ecology, epidemiology and economics, systems of nonlinear differential equations describing the evolution of the process under study often arise. Since the Lotka–Volterra equations often arise in life phenomena, the main purpose of the work is to study the trajectories of discrete dynamical Lotka–Volterra systems using elements of graph theory. **Methods.** In the paper cards of fixed points are constructed for quadratic Lotka–Volterra mappings, that allow describing the dynamics of the systems under consideration. **Results.** Using cards of fixed points of a discrete dynamical system, criteria for the existence of fixed points with odd nonzero coordinates are given in a particular case, and these results on the location of fixed points of Lotka–Volterra systems are generalized accordingly in the case of an arbitrary simplex. The main results are theorems 5–9, which allow us to describe the dynamics of these systems arising in a number of genetic, epidemiological and ecological models. **Conclusion.** The results obtained in the paper give a detailed description of the dynamics of the trajectories of Lotka–Volterra maps with homogeneous tournaments. The map of fixed points highlights a specific area in the simplex that is most important and interesting for studying the dynamics of these maps. The results obtained are applicable in environmental problems, for example, to describe and study the cycle of biogens.

**Keywords:** quadratic Lotka–Volterra mapping, simplex, graph, tournament, homogeneous tournament, fixed point, fixed point map, cyclic triple, transitive triple and skew-symmetric matrix.

**Acknowledgements.** The work was performed in the framework of the scientific study OT-F4-31 “Noncommutative modules, Leibniz algebras and polynomial cascades on simplices” of the Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan (2017–2020).

**For citation:** Eshmamatova DB, Tadzhieva MA, Ganikhodzhaev RN. Criteria for internal fixed points existence of discrete dynamic Lotka–Volterra systems with homogeneous tournaments. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(6): 702–716. DOI: 10.18500/0869-6632-003012

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Динамическая система как математический объект служит моделью для различного рода природных систем. В вопросах экономики, популяционной генетики, в частности в эпидемиологии, эволюцию описывают системы нелинейных дифференциальных уравнений. В этих разделах природных явлений часто применяют уравнения Лотки–Вольтерры.

Рассмотрим отображение  $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , заданное равенствами [1,2]

$$x'_k = x_k \left( 1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m},$$

где  $Vx = (x'_1, \dots, x'_m)$  и  $A = (a_{ki})$  – кососимметрическая матрица. Это отображение при условии  $|a_{ki}| \leq 1$  называется отображением Лотки–Вольтерры [3,4].

## 1. Методика

Пусть  $Y$  — конечное непустое множество, а  $M$  — некоторое множество неупорядоченных пар  $(x, y)$ , где  $x, y \in Y$ , причем  $x \neq y$ . Тогда пара  $(Y, M)$  называется графом.

Элементы  $Y$  называются вершинами, если же  $(x, y) \in M$ , то  $(x, y)$  называется ребром графа  $(Y, M)$ , вершины  $x$  и  $y$  в этом случае называются смежными.

Два графа  $(Y_1, M_1)$  и  $(Y_2, M_2)$  называются изоморфными, если существует биекция  $Y_1$  на  $Y_2$ , сохраняющая смежность вершин.

Граф — полный, если любые две различные вершины являются смежными. Если каждое ребро снабжено направлением, то граф называется ориентированным. Турнир — это полный ориентированный граф.

Классификации турниров с заданным числом вершин с точностью до изоморфизмов посвящены работы [5, 6]. Например, с точностью до изоморфизма существуют только два турнира с тремя вершинами (рис. 1).

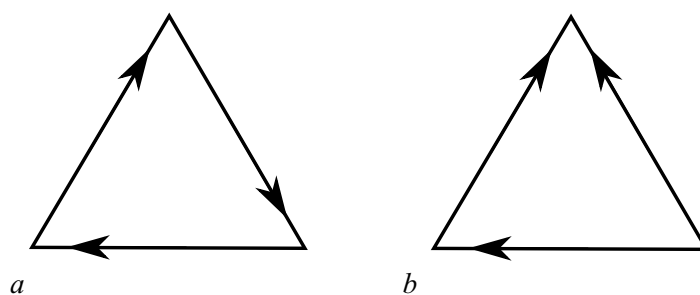


Рис. 1. Виды турниров при  $m = 3$ :  $a$  — циклическая тройка,  $b$  — транзитивная тройка

Fig. 1. Types of tournaments at  $m = 3$ :  $a$  — cyclic triple,  $b$  — transitive triple

Пусть  $x_1, x_2$  — вершины турнира. Запись  $x_1 \rightarrow x_2$  означает, что ребро, соединяющее  $x_1$  и  $x_2$ , направлено от  $x_1$  к  $x_2$ . Конечная последовательность вершин  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_p$  называется маршрутом, если  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Цикл — это замкнутый маршрут, то есть  $x_p = x_1$ .

Турнир называется сильным, если для любых вершин  $x, y \in Y$  существует маршрут с началом  $x$  и концом  $y$ .

Известно [7], что турнир — сильный тогда и только тогда, когда в нем существует цикл длины  $|Y|$  ( $|Y|$  — количество элементов  $Y$ ).

Турнир, не имеющий циклов, называется транзитивным. Естественным образом определяется понятие подтурнира. (В определениях мы следуем терминологии, принятой в работах [3, 8, 9].)

**Определение 1.** Турнир называется однородным, если любой его подтурнир является либо сильным, либо транзитивным.

Очевидно, при  $|Y| \leq 3$  любой турнир однороден.

Известно [9], что при  $|Y| = 4$  существуют четыре попарно неизоморфных турнира, вид которых представлен на рис. 2.

Следовательно, любой турнир, содержащий изоморфный подтурнир (либо  $c$ , либо  $d$ ), не может быть однородным.

**Теорема 1.** Пусть  $|Y| \geq 4$ . Любой турнир с вершинами  $Y$ , не содержащий подтурниров, изоморфных  $c$  или  $d$ , однороден.

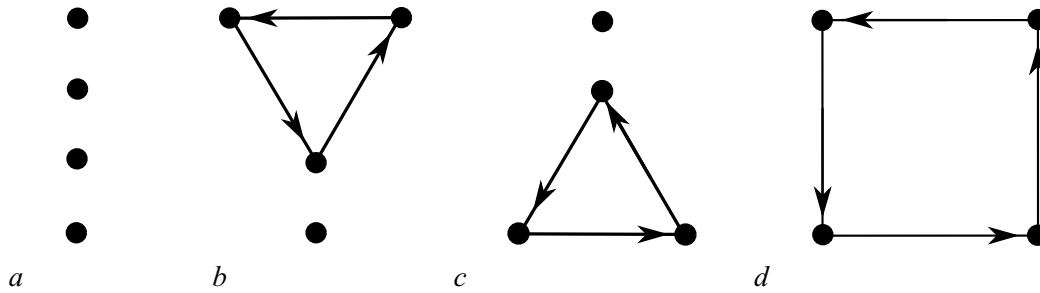


Рис. 2. Эта иллюстрация турниров приведена в [7]. Здесь во всех неуказанных ребрах направления идут сверху вниз:  $a$  – транзитивный турнир,  $b$  – сильный турнир,  $c$  и  $d$  являются не сильными, не транзитивными

Fig. 2. This illustration of the tournaments is given in [7]. Here, in all unspecified edges, the directions go from top to bottom:  $a$  – transitive tournament,  $b$  – strong tournament.  $c$  and  $d$  are not strong, not transitive

**Доказательство.** Если турнир не сильный, то в нем существует подтурнир, не являющийся ни сильным, ни транзитивным. В этом случае [6] вершины подтурнира можно разбить на два непересекающихся и непустых класса так, что все стрелки (ребра) направлены из одного класса в другой, причем хотя бы один из классов образует сильный подтурнир. Сильный подтурнир всегда содержит циклическую тройку. Тогда эта циклическая тройка вместе с любой вершиной из другого класса образует подтурнир с четырьмя вершинами, изоморфный либо  $c$ , либо  $d$ .  $\square$

Пусть  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  и  $\alpha \subset I$  – непустое подмножество  $I$ .

**Определение 2.** Два подтурнира турнира с вершинами из  $\alpha \subset I$  и  $\beta \subset I$  называются смежными, если  $|\alpha| = |\beta|$ , причем пересечение этих подтурниров имеет количество вершин, равное  $|\alpha| - 1$ .

Пусть  $e_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \dots, \delta_{mk})$ ,  $k = 1, \dots, m$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, есть стандартный базис в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда

$$S^{m-1} = \text{co}\{e_1, \dots, e_m\} = \{x = (x_1, \dots, x_m) : \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0\}$$

называется симплексом. Ясно, что  $S^{m-1}$  – выпуклый компакт размерности  $m - 1$ .

Для любого непустого  $\alpha \subset I$  положим

$$\Gamma_\alpha = \text{co}\{e_i : i \in \alpha\}.$$

$\Gamma_\alpha$  называется  $(|\alpha| - 1)$ -мерной гранью симплекса  $S^{m-1}$ . Очевидно, любая грань  $S^{m-1}$  также является симплексом.

Понятие смежности для граней  $S^{m-1}$  определим так же, как для подтурниров турнира. Две грани, имеющие равные размерности, считаются смежными, если их пересечение имеет размерность на 1 меньше, чем исходные. Например, два ребра смежны только лишь тогда, когда у них есть общая вершина.

Пусть  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, m$  – вещественная кососимметрическая матрица, действующая в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда  $Ax$  и  $x$  ортогональны, то есть  $(Ax, x) = 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}^m$ . Легко доказать, что верно и обратное утверждение. Если  $(Ax, x) = 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}^m$ , то матрица  $A$  кососимметрична.

Для  $\alpha \subset I$  положим  $A_\alpha = (a_{ij})$ , где  $i, j \in \alpha$ . В этом случае  $A_\alpha$  называется главной подматрицей матрицы. Ясно, что  $A_\alpha$  также кососимметрична. Пусть  $|A_\alpha|$  – определитель матрицы  $A$ . Очевидно,  $|A_\alpha| = 0$ , если  $|\alpha|$  – нечетно, и  $|A_\alpha| \geq 0$ , если  $|\alpha|$  – четно.

Если  $x = (x_1, \dots, x_m)$  и  $y = (y_1, \dots, y_m)$  – точки из  $\mathbb{R}^m$ , то  $x \geq y$  означает, что  $x_i \geq y_i$  для всех  $i = \overline{1, m}$ .

**Теорема 2.** Если  $A$  – кососимметрическая матрица, то

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\}$$

– непустой выпуклый многогранник.

**Доказательство.** Сведем доказательство к лемме Шпернера [8], утверждающей, что если замкнутые множества  $F_1, \dots, F_m$  таковы, что

$$\Gamma_\alpha \subset \bigcup_{i \in \alpha} F_i$$

для всех  $\alpha \subset I$ , то  $\bigcap_{i=1}^m F_i \neq \emptyset$ .

Пусть  $F_k = \{x \in S^{m-1} : \sum_{i=1}^m a_{ki}x_i \geq 0\}$ ,  $k = 1, \dots, m$  и  $f_k(x) = \sum_{i=1}^m a_{ki}x_i$ .

Ясно, что  $F_k$  – замкнутые выпуклые множества. Так как  $A$  кососимметрична, то

$$f_k(e_k) = a_{kk} = 0.$$

Следовательно,  $e_k \in F_k$  при  $k = 1, \dots, m$ .

Пусть  $\alpha = \{1, 2, \dots, t\}$  и  $x \in \Gamma_\alpha$  представлен в виде  $x = \sum_{i=1}^t \lambda_i e_i$ , где  $\lambda_i \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$ .

Тогда

$$\begin{cases} f_1(x) = \lambda_2 a_{12} + \lambda_3 a_{13} + \dots + \lambda_t a_{1t}, \\ f_2(x) = \lambda_1 a_{21} + \lambda_3 a_{23} + \dots + \lambda_t a_{2t}, \\ \dots, \\ f_t(x) = \lambda_1 a_{t1} + \lambda_2 a_{t2} + \dots + \lambda_{t-1} a_{tt-1}, \end{cases} \quad (1)$$

поскольку  $a_{kk} = 0$ .

Умножив в системе (1) первое равенство на  $\lambda_1$ , второе на  $\lambda_2$  и т. д., затем суммируя получившиеся равенства, в силу кососимметричности  $A_\alpha$ , получим

$$\sum_{i=1}^t \lambda_i f_i(x) = 0. \quad (2)$$

Поскольку  $\lambda_i \geq 0$  и хотя бы одно  $\lambda_i$  положительно, то из (2) следует, что по крайней мере одно из чисел  $f_1(x), \dots, f_t(x)$  неотрицательно. Следовательно,

$$\Gamma_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^t F_i.$$

Таким образом,  $P = \bigcap_{i=1}^m F_i$  – непустое множество.

То, что  $P$  – выпуклый многогранник, очевидным образом следует из того, что  $F_k$  – замкнутая часть полупространства, а  $S^{m-1}$  – выпуклый многогранник.  $\square$

**Следствие 1.**  $Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\}$  – непустой выпуклый многогранник.

Действительно, в теореме 2 достаточно заменить матрицу  $A$  на  $-A$ .

**Пример 1.** Если  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , тогда  $Q = (1, 0)$  и  $P = (0, 1)$ .



**Пример 2.** Если  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , тогда  $P = Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

**Пример 3.** Если  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , тогда  $P = (0, \lambda, 1 - \lambda)$ , где  $0 \leq \lambda \leq 1$  и  $Q = (1, 0, 0)$ .

**Пример 4.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0.5 & -1 \\ 1 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ -1 & 1 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$ ,

тогда  $P = Q = (0.2\lambda; 0.15\lambda + 0.25; 0.5 - 0.1\lambda; 0.25 - 0.25\lambda)$ , где  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

**Определение 3.**  $A = (a_{ki})$  называется кососимметрической матрицей общего положения, если  $|A_\alpha| > 0$  для всех  $\alpha \subset I$  таких, что  $|\alpha|$  — четное число.

Легко заметить, что в примерах 3 и 4 матрица  $A$  не является матрицей общего положения.

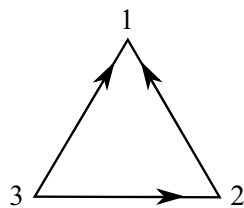
**Теорема 3.** Множество всех кососимметрических матриц общего положения открыто и всюду плотно в множестве всех кососимметрических матриц.

**Доказательство.** Теорема доказана в работе [1]. □

В частности, если  $|\alpha| = 2$ ,  $\alpha = \{k, i\}$ , то  $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a_{ki} \\ -a_{ki} & 0 \end{pmatrix}$ . Поэтому  $|A_\alpha| > 0$  означает, что  $a_{ki} \neq 0$  при всех  $k \neq i$ , что позволяет построить турнир, соответствующий матрице  $A$ .

Понятие турнира можем ввести наряду с кососимметрической матрицей, соответствующей отображению Лотки–Вольтерры [1, 4]. Элементы множества  $I = \{1, \dots, m\}$  отметим в виде точек и соединим точку  $k$  с точкой  $i$  стрелкой, направленной из  $k$  в  $i$ , если  $a_{ki} < 0$ , и наоборот, если  $a_{ki} > 0$ . Полученный ориентированный граф назовём турниром [3, 8, 9].

Например, кососимметрической матрице  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  соответствует турнир



Ясно, что в этом примере  $A$  — матрица общего положения, а турнир является транзитивной тройкой.

**Теорема 4.** Если  $A$  — кососимметрическая матрица общего положения, то множества  $P$  и  $Q$  состоят из единственной точки.

**Доказательство.** Пусть  $P$  имеет более чем одну точку, следовательно,  $P$  — бесконечное множество. Поскольку число граней  $S^{m-1}$  конечно, то некоторая грань  $\Gamma_\alpha$  имеет не менее двух точек из  $P$ , причем эти точки внутренние для  $\Gamma_\alpha$ .

а) Пусть эти точки принадлежат внутренности  $S^{m-1}$ , то есть у них все координаты положительны. Так как

$$Ax \geq 0 \text{ и } (Ax, x) = 0,$$

то  $Ax = 0$ , поскольку все  $x_i > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Аналогично  $Ay = 0$ , где  $y \in P$ , и все координаты  $y$  положительны. Ясно, что две различные точки из симплекса линейно независимы. Поэтому  $\dim \text{Ker} A \geq 2$ . Так как  $A$  — матрица общего положения, то  $\dim \text{Ker} A \leq 1$ . Получаем противоречие.

б) Если  $P$  содержится в некоторой грани  $\Gamma_\alpha$ , то вместо  $A$  рассмотрим  $A_\alpha$ . Ясно, что  $A_\alpha$  — также кососимметрическая матрица общего положения размерности  $|\alpha| \times |\alpha|$ . Если  $x \in \Gamma_\alpha$ , то  $x_\alpha$  та же точка  $x$ , но только лишь с координатами из  $\alpha$ . Тогда из  $Ax \geq 0$  следует  $A_\alpha x_\alpha \geq 0$  при условии, что  $x \in \Gamma_\alpha$ . Следовательно, случай б) сводится к случаю а).  $\square$

## 2. Результаты

Пусть  $A = (a_{ij})$  — произвольная кососимметрическая матрица с условием  $a_{ij} \neq 0$  при  $i \neq j$ . Рассмотрим отображение  $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , заданное равенствами

$$x'_k = x_k \left( 1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где  $Vx = (x'_1, \dots, x'_m)$ .

Известно [1], что для  $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  необходимо и достаточно, чтобы  $|a_{ki}| \leq 1$  при всех  $k, i = 1, \dots, m$ , причем  $V$  является гомеоморфизмом  $S^{m-1}$  на себя. Так как из  $x_k = 0$  следует, что  $x'_k = 0$ , то любая грань  $\Gamma_\alpha$  симплекса  $S^{m-1}$  инвариантна, то есть  $V(\Gamma_\alpha) = \Gamma_\alpha$ , в частности, все вершины  $S^{m-1}$  — неподвижные точки.

Отображение (3) при  $|a_{ki}| \leq 1$  называется отображением Лотки–Вольтерры. Далее рассматриваем  $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  только лишь как отображение, переводящее распределение вероятностей системы из  $m$  видов также в распределение вероятностей. Поскольку  $a_{ij} \neq 0$  при  $i \neq j$ , построим турнир  $T$ , соответствующий матрице  $A$ .

**Теорема 5.** Если грань  $\Gamma_\alpha$  симплекса  $S^{m-1}$  имеет внутреннюю (относительно грани) неподвижную точку, то подтурнир турнира  $T$  с вершинами из  $\alpha$  является сильным.

**Доказательство.** Так как все грани  $S^{m-1}$  инвариантны относительно  $V$ , то можно считать, что  $\Gamma_\alpha = S^{m-1}$ , то есть  $\alpha = I = \{1, \dots, m\}$ . Допустим, что  $T$  — не сильный турнир. Тогда [1, 3] множество  $I$  можно разбить на два непустых класса так, что ребро, соединяющее две вершины из различных классов, всегда направлено из первого класса во второй.

Пусть  $I_1 = \{1, 2, \dots, t\}$  и  $I_2 = \{t+1, t+2, \dots, m\}$ , тогда  $a_{ij} < 0$  при всех  $i \in I_1$  и  $j \in I_2$ .

Согласно (3) выпишем первые  $t$  координат:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \left( 1 + \sum_{i=1}^t a_{1i} x_i + \sum_{i=t+1}^m a_{1i} x_i \right), \\ x'_2 = x_2 \left( 1 + \sum_{i=1}^t a_{2i} x_i + \sum_{i=t+1}^m a_{2i} x_i \right), \\ \dots, \\ x'_t = x_t \left( 1 + \sum_{i=1}^t a_{ti} x_i + \sum_{i=t+1}^m a_{ti} x_i \right). \end{cases} \quad (4)$$

Суммируя эти равенства, получим

$$\sum_{j=1}^t x'_j = \sum_{j=1}^t x_j + \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^t a_{ji} x_j x_i + \sum_{j=t+1}^m a_{ji} x_i x_j, \quad (5)$$

где второе слагаемое в правой части равно нулю, так как подматрица матрицы  $A$ , соответствующая  $I_1$ , кососимметрична. Для всех внутренних точек  $x_i > 0$ , поэтому

$$\sum_{j=t+1}^m a_{ji} x_i x_j < 0.$$

Следовательно, из (5) получаем

$$\sum_{j=1}^t x'_j < \sum_{j=1}^t x_j \quad (6)$$

для всех внутренних точек симплекса  $S^{m-1}$ . Тогда  $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  не может иметь внутренних неподвижных точек. Получаем противоречие.  $\square$

**Следствие 2.** Если подтурнир  $T_\alpha$ , соответствующий грани  $\Gamma_\alpha$ , транзитивен, то  $V$  на  $\Gamma_\alpha$  не имеет неподвижных точек кроме вершин этой грани.

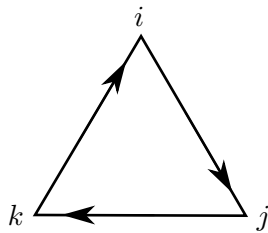
**Теорема 6.** Для существования неподвижной точки  $V$  с тремя положительными координатами, скажем  $x_i, x_j, x_k$ , необходимо и достаточно, чтобы подтурнир  $T$  с вершинами  $i, j$  и  $k$  был изоморфен циклической тройке.

**Доказательство.** Необходимость следует из теоремы 5. Для доказательства достаточности возьмём сужение  $V$  на грань  $\Gamma_\alpha$

$$x'_i = x_i(1 - a_{ij}x_j + a_{ik}x_k),$$

$$x'_j = x_j(1 + a_{ij}x_j - a_{jk}x_k),$$

$$x'_k = x_k(1 - a_{ik}x_i + a_{jk}x_j),$$



где  $\alpha = \{i, j, k\}$ , причем  $a_{ij}, a_{ik}, a_{jk}$  положительны.

Тогда отображение  $V$  на  $\Gamma_\alpha$  имеет единственную внутреннюю неподвижную точку с координатами

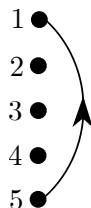
$$\left( \frac{a_{jk}}{a_{ij} + a_{ik} + a_{jk}}, \frac{a_{ik}}{a_{ij} + a_{ik} + a_{jk}}, \frac{a_{ij}}{a_{ij} + a_{ik} + a_{jk}} \right).$$

$\square$

Пусть  $|Y| = 5$ , тогда динамическая система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 + a_{15}x_5), \\ x_2' = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5), \\ x_3' = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5), \\ x_4' = x_4(1 + a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 - a_{45}x_5), \\ x_5' = x_5(1 - a_{15}x_1 + a_{25}x_2 + a_{35}x_3 + a_{45}x_4). \end{cases}$$

Соответствующий турнир имеет вид:



Здесь существует три сильных подтурнира с тремя вершинами — это  $\overline{125}$ ,  $\overline{135}$  и  $\overline{145}$ . Все эти подтурниры — сильные и смежные, так как пересечение любого из двух — одномерное ребро.

Рассмотрим для граней  $\alpha = \{1, 2, 5\}$  и  $\beta = \{1, 3, 5\}$ ,  $\gamma = \alpha \cup \beta = \{1, 2, 3, 5\}$  сужение матрицы  $A$ :

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & a_{15} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{35} \\ -a_{15} & a_{25} & a_{35} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель матрицы, получим  $|A_\gamma| = (a_{13}a_{25} - a_{12}a_{35} + a_{15}a_{23})^2$ , выражения в скобке обозначим через  $\Delta_1 = a_{13}a_{25} - a_{12}a_{35} + a_{15}a_{23}$ .

Отображение, соответствующее вышеприведенной матрице  $A_\gamma$  имеет вид (сужение отображения на грань  $\Gamma_\gamma$ ):

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + a_{15}x_5), \\ x_2' = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{25}x_5), \\ x_3' = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{35}x_5), \\ x_5' = x_5(1 - a_{15}x_1 + a_{25}x_2 + a_{35}x_3). \end{cases}$$

На этой грани  $\Gamma_\gamma$  существуют неподвижные точки с координатами

$$x_\alpha = \left( \frac{a_{25}}{a_{12} + a_{25} + a_{15}}; \frac{a_{15}}{a_{12} + a_{25} + a_{15}}; 0; \frac{a_{12}}{a_{12} + a_{25} + a_{15}} \right),$$

$$x_\beta = \left( \frac{a_{35}}{a_{13} + a_{35} + a_{15}}; 0; \frac{a_{15}}{a_{13} + a_{35} + a_{15}}; \frac{a_{13}}{a_{13} + a_{35} + a_{15}} \right).$$

Для того чтобы найти множества  $P$  и  $Q$ , находим  $A_\gamma x_\alpha$  и  $A_\gamma x_\beta$ :

$$A_\gamma x_\alpha = \frac{1}{a_{12} + a_{25} + a_{15}} \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & a_{15} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{35} \\ -a_{15} & a_{25} & a_{35} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{25} \\ a_{15} \\ 0 \\ a_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12} + a_{15} + a_{25}} (0; 0; \Delta_1; 0),$$

$$A_\gamma x_\beta = \frac{1}{a_{13} + a_{15} + a_{35}} (0; -\Delta_1; 0; 0).$$

Здесь  $A_\gamma$  — матрица общего положения, так как  $\Delta_1 \neq 0$ .

Если  $\Delta_1 > 0$  тогда  $A_\gamma x_\alpha \geq 0$  и  $A_\gamma x_\beta \leq 0$ , значит неподвижные точки  $x_\alpha$  и  $x_\beta$  составляют пару  $(P, Q)$  на грани  $\Gamma_\gamma$ . Это означает, что направление ставится от точки  $P = x_\alpha$  к точке  $Q = x_\beta$ . Если же  $\Delta_1 < 0$ , тогда получаем обратное.

Теперь перейдем к другим смежным граням. Пусть  $\alpha = \{1, 2, 5\}$  и  $\beta = \{1, 4, 5\}$ , тогда  $\gamma = \alpha \cup \beta = \{1, 2, 4, 5\}$ . Здесь сужение матрицы  $A$  на  $\Gamma_\gamma$  имеет вид:

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & 0 & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{14} & a_{24} & 0 & -a_{45} \\ -a_{15} & a_{25} & a_{45} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим также  $|A_\gamma| = (a_{14}a_{25} - a_{12}a_{45} + a_{15}a_{24})^2$  и  $\Delta_2 = a_{14}a_{25} - a_{12}a_{45} + a_{15}a_{24}$ .

Сужение отображения на этой грани  $\Gamma_\gamma = \Gamma_{1245}$  имеет две неподвижные точки  $x_\alpha = x_{125}$  и  $x_\beta = x_{145}$ .

Для каждой из этих точек определяем их характер, для этого находим

$$A_\gamma x_\alpha = \frac{1}{a_{12} + a_{15} + a_{25}} (0; 0; \Delta_2; 0),$$

$$A_\gamma x_\beta = \frac{1}{a_{14} + a_{15} + a_{45}} (0; -\Delta_2; 0; 0).$$

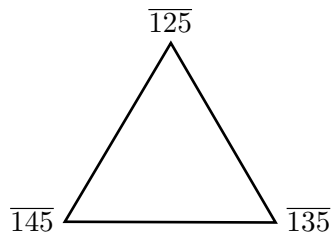
Если  $\Delta_2 > 0$ , тогда  $P = x_\alpha$  и  $Q = x_\beta$ , и, наоборот, если  $\Delta_2 < 0$ , тогда  $P = x_\beta$  и  $Q = x_\alpha$ . Перейдем к последнему, пусть  $\alpha = \{1, 3, 5\}$ ,  $\beta = \{1, 4, 5\}$ , тогда  $\gamma = \alpha \cup \beta = \{1, 3, 4, 5\}$ . Сделав те же вычисления, получим

$$A_\gamma x_\alpha = \frac{1}{a_{13} + a_{15} + a_{35}} (0; 0; \Delta_3; 0),$$

$$A_\gamma x_\beta = \frac{1}{a_{14} + a_{15} + a_{45}} (0; -\Delta_3; 0; 0).$$

Здесь  $\Delta_3 = a_{14}a_{35} - a_{13}a_{45} + a_{15}a_{34}$  — определитель сужения матрицы  $A_\gamma$ . Если  $\Delta_3 > 0$ , тогда  $P = x_\alpha$ ,  $Q = x_\beta$  и обратное, если  $\Delta_3 < 0$ , тогда  $P = x_\beta$ ,  $Q = x_\alpha$ .

В итоге для полного исследования картины траекторий внутренних точек симплекса мы получили подтурнир, который назовем картой неподвижных точек. Здесь карта неподвижных точек имеет вид,



в котором направления на ребрах определяются знаками  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Здесь мы получим всего  $2^3 = 8$  случаев карт неподвижных точек (рис. 3), среди которых есть изоморфные [6].

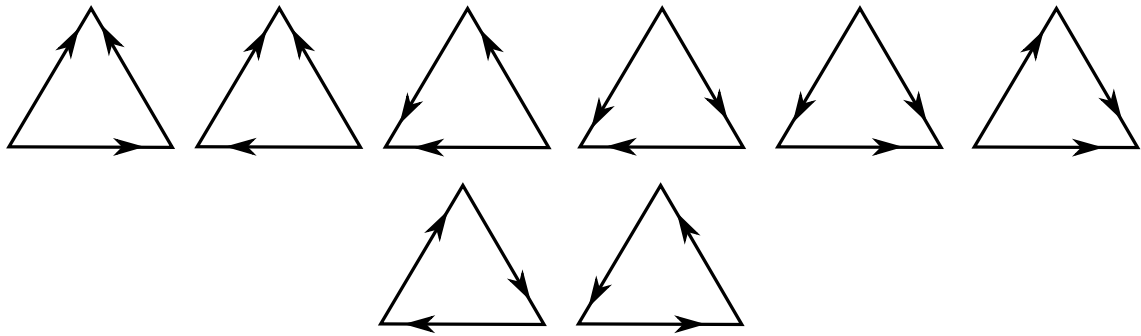
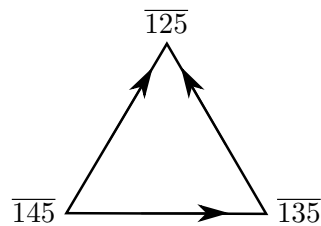


Рис. 3. Все виды карт при  $m = 3$

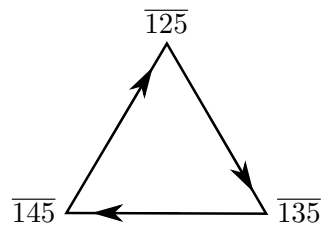
Fig. 3. All types of cards at  $m = 3$

Из рисунка мы видим, что первые 6 случаев изоморфны; эти тройки называются транзитивными. Для этих шести случаев остановимся на следующем виде:



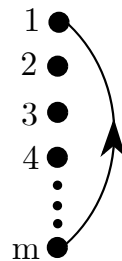
**Лемма 1.** Если  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют разные знаки, тогда в карте неподвижных точек образуется транзитивная тройка, и симплекс  $S^4$  не имеет внутренних неподвижных точек.

Перейдем к последним двум случаям из рис. 3. Эти два случая изоморфны, поэтому мы остановимся на любом из них, например,



**Лемма 2.** Если знаки всех  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) совпадают, тогда в карте образуется гамильтонов цикл (сильная тройка), и в симплексе  $S^4$  существует внутренняя неподвижная точка.

Обобщим полученное в предыдущем разделе на  $|Y| = m$ . Соответствующий турнир, согласно [7], имеет вид



Далее, в кососимметрической матрице  $A$  общего положения выпишем только лишь положительные  $a_{ij} (i \neq j)$ , а знаки перед ними расставим в соответствии с турниром  $T_m$ .

Например, изучаемому турниру  $T_m$  соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1m-1} & a_{1m} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2m-1} & -a_{2m} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & -a_{3m-1} & -a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \dots & a_{m-1m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, отображение  $V$ , построенное по  $T_m$ , имеет  $m$  неподвижных точек с одной и  $(m - 2)$  неподвижных точек с тремя ненулевыми координатами при любых  $a_{ij}$ . Существование неподвижных точек с 5, 7, 9 и т. д. ненулевыми координатами, принадлежащими  $S^{m-1}$ , зависит от некоторых неравенств от коэффициентов кососимметрической матрицы.

Для выяснения рассмотрим два сильных подтурнира  $T_m$  с тремя вершинами, например,  $\alpha = \{1, 2, m\}$  и  $\beta = \{1, 3, m\}$ . Как отмечено выше, они смежные.

Пусть  $\gamma = \alpha \cup \beta = \{1, 2, 3, m\}$ , тогда сужение  $V_\gamma$  на  $\Gamma_\gamma$  имеет вид

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + a_{1m}x_m), \\ x'_2 = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{2m}x_m), \\ x'_3 = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{3m}x_m), \\ x'_m = x_m(1 - a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + a_{3m}x_3). \end{cases}$$

Тогда на  $\Gamma_\gamma$  имеем две неподвижные точки:

$$x_\alpha = \left( \frac{a_{2m}}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}}, \frac{a_{1m}}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}}, 0, \frac{a_{12}}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}} \right),$$

$$x_\beta = \left( \frac{a_{3m}}{a_{13} + a_{3m} + a_{1m}}, 0, \frac{a_{1m}}{a_{13} + a_{3m} + a_{1m}}, \frac{a_{13}}{a_{13} + a_{3m} + a_{1m}} \right)$$

с носителями  $\alpha$  и  $\beta$ , соответственно.

Для  $A_\gamma x_\alpha$  и  $A_\gamma x_\beta$  имеем

$$A_\gamma x_\alpha = \frac{1}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}} \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & a_{1m} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{2m} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{3m} \\ -a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2m} \\ a_{1m} \\ 0 \\ a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}} (0, 0, a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m}, 0),$$

$$A_\gamma x_\beta = \frac{1}{a_{13} + a_{1m} + a_{3m}} (0, a_{12}a_{3m} - a_{23}a_{1m} - a_{2m}a_{13}, 0, 0).$$

Вычисляя  $|A_\gamma|$ , находим, что

$$|A_\gamma| = (a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m})^2. \quad (7)$$

Поскольку  $A$  — матрица общего положения, то

$$a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m} \neq 0.$$

Таким образом, если  $a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m} > 0$ , тогда  $A_\gamma x_\alpha \geq 0$  и  $A_\gamma x_\beta \leq 0$ . Следовательно,  $x_\alpha$  является  $P$  точкой, а  $x_\beta - Q$  точкой на грани  $\Gamma_\gamma$ .

Если  $a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m} < 0$ , то  $x_\alpha$  и  $x_\beta$  меняются местами. Сформулируем эти рассуждения в виде теоремы.

**Теорема 7.** Любые две циклические тройки в  $T_m$  смежны, причем из определяемых неподвижных точек одна —  $P$  точка, а другая —  $Q$  точка для грани, содержащей их.

**Доказательство.** Теорему можно доказать, основываясь на приведенных выше рассуждениях.  $\square$

На основании теоремы 7 все циклические тройки  $T_m$  представим в виде точек и соединим  $\overline{im}$  с  $\overline{jm}$  стрелкой, идущей из  $P$  точки в  $Q$  точку. Таким образом, получим новый турнир из  $m - 1$  точки, который обозначим через  $G_{m-1}$  и назовем картой неподвижных точек.

Как мы показали выше, карт неподвижных точек всего  $2^3 = 8$  возможных случаев, среди которых мы рассмотрели два неизоморфных [3], причем стрелки расставляются в соответствии с теоремой 7.

**Теорема 8.** Если  $G_{m-1}$  — транзитивный турнир, то отображение  $V$  не имеет в симплексе  $S^{m-1}$  неподвижных точек с пятью и более ненулевыми координатами.

**Доказательство.** Если  $S^{m-1}$  имеет внутреннюю неподвижную точку ( $(m - 1)$  — нечетно) отображения  $V$ , скажем,  $x$ , то непременно  $Ax = 0$ , то есть  $x$  одновременно является и  $P$ , и  $Q$  точкой. Пусть  $x$  — неподвижная точка с пятью ненулевыми координатами и принадлежит грани  $\Gamma_\gamma$ , где  $|\gamma| = 5$ . Ей соответствует сильный подтурнир  $T_\gamma$  (теорема 5). Сильный подтурнир  $T_m$  с пятью вершинами имеет только вершины  $1, i, j, k, m$ , то есть  $\gamma = \{1, i, j, k, m\}$  где  $1 < i, j, k < m$  и  $i, j, k$  — различны.

Следовательно, в нем имеется три подтурнира  $\overline{im}$ ,  $\overline{jm}$  и  $\overline{km}$ . Так как  $G_{m-1}$  транзитивен, то именно один из них является  $P$  точкой для грани  $\Gamma_\gamma$ . Так как для каждой грани  $P$  точка единственна, поскольку  $A$  — матрица общего положения, то последнее противоречит тому, что неподвижная точка с пятью ненулевыми координатами —  $P$  точка для  $\Gamma_\gamma$ .  $\square$

**Теорема 9.** Если в  $G_{m-1}$  существует циклическая тройка, то существует неподвижная точка с пятью ненулевыми координатами.

**Доказательство.** Пусть  $\overline{im}$ ,  $\overline{jm}$  и  $\overline{km}$  образуют циклическую тройку в  $G_{m-1}$  и  $\gamma = \{1, i, j, k, m\}$ . Тогда неподвижные точки, определяемые  $\overline{im}$ ,  $\overline{jm}$  и  $\overline{km}$ , не могут быть  $P$  точками для  $\Gamma_\gamma$ . Следовательно, грань  $\Gamma_\gamma$  обязана иметь внутреннюю неподвижную точку.  $\square$

**Следствие 3.** Число неподвижных точек отображения  $V$  с пятью ненулевыми координатами равно числу циклических троек в карте  $G_{m-1}$ .

## Заключение

Известно, что динамические системы берут свое начало в механике с работ Анри Пуанкаре, в которых утверждается, что некоторые системы после некоторого конечного времени вернуться в состояние, очень близкое к исходному [10]. В 1988 году А. Ляпунов разработал методы, позволяющие определить устойчивость обыкновенных дифференциальных уравнений. Во многих отраслях науки, например естественных и инженерных дисциплинах, правило эволюции динамических систем описывается либо дифференциальным, либо разностным уравнением.

В этих системах, учитывая расположение начальной точки, можно определить состояние в будущем — это и есть совокупность точек, известных как траектория или же орбита, поэтому нас и интересует нахождение равновесных состояний системы.



Квадратичные отображения симплекса можно применить для задач популяционной генетики, эпидемиологии, экологии, экономики. В работе исследовалось асимптотическое поведение траекторий квадратичных отображений Лотки–Вольтерры, действующих в  $(m - 1)$ -мерном симплексе с однородными турнирами. Эти системы с однородными турнирами описывают процесс экологического круговорота, в частности, рассматриваемая модель позволяет более адекватно описать процесс круговорота биогенов [11]. Наряду с дискретными динамическими системами в работе рассматривались элементы теории графов, то есть эти системы связались с такими понятиями, как турниры. Введено понятие карты неподвижных точек. По состоянию характера карт неподвижных точек определены критерии существования таких неподвижных точек, с помощью которых описывается течение траекторий, позволяющих описать эволюцию биосферы [11].

## Список литературы

1. Ганиходжаев Р. Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры // Математический сборник. 1992. Т. 183, № 8. С. 119–140.
2. Шахиди Ф. А. О бистохастических операторах, определенных в конечномерном симплексе // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 463–468.
3. Ганиходжаев Р. Н., Таджиева М. А., Эшмаматова Д. Б. Динамические свойства квадратичных гомеоморфизмов конечномерного симплекса // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2018. Т. 144. С. 104–108.
4. Eshmamatova D., Ganikhodzhaev R. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in a simplex  $S^{m-1}$  // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365, no. 1. P. 060009. DOI: 10.1063/5.0057303.
5. Harary F. Graph Theory. Boston: Addison-Wesley, 1969. 274 p.
6. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. Монография. М.: Мир, 1977. 324 с.
7. Moon J. W. Topics on Tournaments. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968. 112 p.
8. Ганиходжаев Р. Н. Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем // Математические заметки. 1994. Т. 56, № 5. С. 40–49.
9. Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б. Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий // Владикавказский математический журнал. 2006. Т. 8, № 2. С. 12–28.
10. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 745 с.
11. Небел Б. Наука об окружающей среде. Как устроен мир. В 2-х томах. М.: Мир, 1993.

## References

1. Ganikhodzhaev RN. Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions, and tournaments. Sbornik: Mathematics. 1993;76(2):489–506. DOI: 10.1070/SM1993v076n02ABEH003423.
2. Shahidi FA. Doubly stochastic operators on a finite-dimensional simplex. Siberian Mathematical Journal. 2009;50(2):368–372. DOI: 10.1007/s11202-009-0042-3.
3. Ganikhodzhaev RN, Tadzhieva MA, Eshmamatova DB. Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex. Journal of Mathematical Sciences. 2020;245(3):398–402. DOI: 10.1007/s10958-020-04702-7.
4. Eshmamatova D, Ganikhodzhaev R. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in a simplex  $S^{m-1}$ . AIP Conference Proceedings. 2021;2365(1):060009. DOI: 10.1063/5.0057303.
5. Harary F. Graph Theory. Boston: Addison-Wesley; 1969. 274 p.
6. Harary F, Palmer EM. Graphical Enumeration. Amsterdam: Elsevier; 1973. 286 p.
7. Moon JW. Topics on Tournaments. New York: Holt, Rinehart and Winston; 1968. 112 p.

8. Ganikhodzhaev RN. Map of fixed points and Lyapunov functions for one class of discrete dynamical systems. *Mathematical Notes*. 1994;56(5):1125–1131. DOI: 10.1007/BF02274660.
9. Ganikhodzhaev RN, Eshmamatova DB. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories. *Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2006;8(2):12–28 (in Russian).
10. Poincaré H. *New Methods of Celestial Mechanics*. Berlin: Springer; 1993. 1077 p.
11. Nebel BJ. *Environmental Science: The Way the World Works*. Hoboken, New Jersey: Prentice Hall Professional; 1993. 630 p.



*Эшматовна Дилфуза Бахрамовна* — родилась в Самарканде (1974). Окончила с отличием механико-математический факультет Ташкентского государственного университета по направлению «Дифференциальные уравнения» (1996). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Математический анализ». С 2003 по 2020 год работала в Ташкентском институте инженеров железнодорожного транспорта старшим преподавателем, доцентом и заведующей кафедрой «Высшая математика». С 2020 года работает на кафедре «Высшая математика» Ташкентского государственного транспортного университета в должности заведующего. Научные интересы — динамические системы, теория графов, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика, эпидемиология и вопросы, касающиеся экологии. Опубликовала свыше 30 научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100167 Ташкент, Мирабадский район  
Ташкентский государственный транспортный университет  
E-mail: 24dil@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-1096-2751



*Таджиева Мохбону Акром кизи* — родилась в Ташкенте (1990). Окончила с отличием факультет математики Национального университета Узбекистана (НУУз) имени Мирзо Улугбека по направлению «Математический анализ» (2013). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Математический анализ» (2022, НУУз). С 2022 года работает на кафедре «Высшая математика» Ташкентского государственного транспортного университета в должности старшего преподавателя. Научные интересы — динамические системы, теория графов, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика, эпидемиология и вопросы, касающиеся экологии. Опубликовала свыше 10 научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100167 Ташкент, Мирабадский район  
Ташкентский государственный транспортный университет  
E-mail: mohbonut@mail.ru  
ORCID: 0000-0001-9232-3365



*Ганиходжаев Расул Набиевич* — родился в Ташкенте (1945). Окончил факультет математики Ташкентского государственного университета по направлению «Функциональный анализ» (1971). Защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности «Математический анализ» (1997, ТашГУ). Профессор кафедры «Алгебра и функциональный анализ» Национального университета Узбекистана. Научные интересы — динамические системы, теория графов, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика, эпидемиология и вопросы, касающиеся экологии. Опубликовал свыше 50 научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100167 Ташкент, Алмазарский район  
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека  
E-mail: rganikhodzhaev@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-6551-5257



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Научная статья  
УДК 517.9, 621.372

DOI: 10.18500/0869-6632-003014  
EDN: EJVQCA

## Гибридная SIRS-модель распространения инфекций

*А. В. Шабунин*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 29.05.2022, принята к публикации 25.07.2022,  
опубликована онлайн 31.10.2022, опубликована 30.11.2022

**Аннотация.** Цель — построение модели распространения инфекции в виде системы дифференциальных уравнений, учитывающей инерционный характер передачи инфекции между особями. **Методы.** В работе проводится теоретическое и численное исследование устройства фазового пространства системы обыкновенных дифференциальных уравнений модели среднего поля. **Результаты.** Построена модифицированная SIRS-модель распространения эпидемий в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. От стандартных моделей она отличается учетом инерционного характера процесса передачи инфекции между особями популяции, что реализуется посредством введения в модель «агента-переносчика». В модели не учитывается влияние заболевания на численность популяции, при этом плотность населения рассматривается как параметр, влияющий на ход эпидемии. Динамика модели демонстрирует хорошее качественное соответствие с рядом наблюдаемых при развитии заболеваний явлений. **Обсуждение.** Предложенное усложнение стандартной SIRS-модели посредством добавления в него уравнения для динамики возбудителя инфекции предоставляет перспективы для ее уточнения посредством более точной настройки на конкретные заболевания, а также для учета неоднородности в распределении особей и возбудителя в пространстве. Модификация модели может идти по пути усложнения вида функций, регулирующих вероятность заражения, генерации и инактивации возбудителя, влияния климатических факторов и т. п., а также по пути перехода к пространственно распределенным системам, например решеткам вероятностных клеточных автоматов.

**Ключевые слова:** популяционная динамика, SIRS-модель, динамические системы.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта № 20-51-45001.

**Для цитирования:** Шабунин А. В. Гибридная SIRS-модель распространения инфекций // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 717–731. DOI: 10.18500/0869-6632-003014. EDN: EJVQCA

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Hybrid SIRS model of infection spread

*A. V. Shabunin*

Saratov State University, Russia

E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Received 29.05.2022, accepted 25.07.2022,

available online 31.10.2022, published 30.11.2022

**Abstract.** *Purpose* of this work is to build a model of the infection spread in the form of a system of differential equations that takes into account the inertial nature of the transfer of infection between individuals. *Methods.* The paper presents a theoretical and numerical study of the structure of the phase space of the system of ordinary differential equations of the mean field model. *Results.* A modified SIRS model of epidemic spread is constructed in the form of a system of ordinary differential equations of the third order. It differs from standard models by considering the inertial nature of the infection transmission process between individuals of the population, which is realized by introducing a «carrier agent» into the model. The model does not take into account the influence of the disease on the population size, while population density is regarded as a parameter influencing the course of the epidemic. The dynamics of the model shows a good qualitative correspondence with a variety of phenomena observed in the evolution of diseases. *Discussion.* The suggested complication of the standard SIRS model by adding to it an equation for the dynamics of the pathogen of infection presents prospects for its specification via more precise adjustment to specific diseases, as well as taking into account the heterogeneity in the distribution of individuals and the pathogen in space. Further modification of the model can go through complicating the function which defines the probability of infection, generation and inactivation of the pathogen, the influence of climatic factors, as well as by means of transition to spatially distributed systems, for example, networks of probabilistic cellular automata.

**Keywords:** population dynamics, SIRS model, dynamical systems.

**Acknowledgements.** The reported study was funded by RFBR and DFG according to the research project No. 20-51-45001.

**For citation:** Shabunin AV. Hybrid SIRS model of infection spread. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6): 717–731. DOI: 10.18500/0869-6632-003014

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Методы нелинейной динамики позволяют изучать явления природы путем построения и анализа простых (так называемых качественных) математических моделей. Качественные модели, в отличие от имитационных, не претендуют на предсказание детального поведения моделируемой системы в конкретных условиях, однако, позволяют понять характер наблюдаемых явлений, выявлять их закономерности и внутренние механизмы, а также определять, за счет каких параметров или воздействий можно изменять их характеристики. Одной из областей применения качественных моделей является исследование распространения эпидемий инфекционных заболеваний в биологических популяциях [1–4].

Математическое моделирование эпидемий является одним из разделов популяционной динамики [5], используемой как в биологии, так и в других науках, например, социологии. Для предсказания хода эпидемий используются различные математические методы: анализ временных рядов [6], регрессионные [7] и авторегрессионные [8] модели, решетки клеточных автоматов [9–12], искусственные нейронные сети [13–15] и др. Классические модели распространения инфекций представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Наиболее известной из них является модель SIRS, предложенная в 1920-х годах Кермаком и МакКендриком [16]. В SIRS-модели популяцию разбивают на группы здоровых и восприимчивых (S — Susceptible), больных (I — Infectious) и выздоровевших (R — Recovered) особей и строят системы уравнений, определяющие закон изменения относительного числа особей в каждой из

групп, опираясь на предположение о случайном и равномерном распределении особей в популяции. Такую систему называют *моделью среднего поля*. При этом процессы инфицирования особей описывают подобно столкновениям частиц идеального газа в статистической физике. Основой этого подхода является предположение, сделанное В. Хамером [17], о том, что скорость распространения эпидемии зависит от частоты контактов между восприимчивыми и инфицированными особями; частота контактов определяется произведением плотностей населения восприимчивых и инфицированных особей в популяции. Такой подход, несмотря на очевидную простоту и наглядность, не всегда адекватно описывает реальные процессы заражения, которые могут характеризоваться определенной нелокальностью и инерционностью. Инерционность биологических процессов может быть учтена посредством введения в модель времени задержки, то есть путем использования уравнений с отклоняющимся аргументом. Одним из первых такой подход был применен в 1948 г. в работе Хатчирсона [18]. В дальнейшем уравнения с запаздыванием использовались во множестве работ, обзор которых можно найти в [19, 20]. Однако модели с запаздыванием представляют собой системы с бесконечным числом степеней свободы, что затрудняет их анализ. Другой возможный подход — введение дополнительного уравнения (и соответственно дополнительной переменной), описывающего механизм инерционности. Именно такой метод и предлагается в работе.

В данной работе предлагается модификация SIRS-модели, в которой передача инфекции происходит опосредованно, за счет взаимодействия с агентом-переносчиком, в качестве которого могут выступать вирусы, бактерии или паразиты<sup>1</sup>. Такой подход особенно актуален для прогнозирования распространения респираторных вирусных инфекций, при которых агент, вызывающий заражение, является чрезвычайно подвижным и относительно долгоживущим, поэтому акт заражения может происходить в отрыве (во времени и пространстве) от инфицированных особей. Такая модель является моделью взаимодействия двух систем: популяции особей и популяции вирусов, каждая из которых живет по своим законам. В частности, под особями мы будем понимать обособленных индивидуумов, состояние которых меняется дискретным образом, а под вирусами — внешнее поле, воздействующее на особей и приводящее к изменению их состояния, то есть заражению.

### 1. Модифицированная двухкомпонентная SIRS-модель распространения инфекционных заболеваний

Несмотря на различия, обусловленные спецификой того или иного инфекционного заболевания, большинство из них имеют общие черты:

- заболевание распространяется через заражение, источником которого является ранее инфицированная особь ( $I$ ), а реципиентом — восприимчивая особь ( $S$ ). В результате восприимчивая особь заболевает и сама становится источником последующих заражений:  $S \rightarrow I$ ;
- заболевшая особь со временем излечивается, приобретая при этом иммунитет к последующим заражениям ( $R$ ):  $I \rightarrow R$ ;
- наконец, с течением времени приобретенный иммунитет утрачивается, возвращая особь к исходному состоянию:  $R \rightarrow S$ .

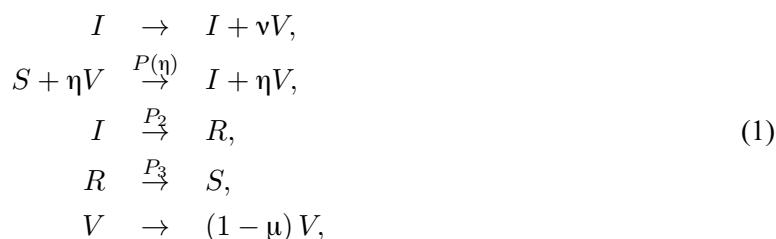
Таким образом, в эволюции каждой особи мы наблюдаем циклическую цепочку превращений между дискретным и конечным набором состояний  $S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$ . Отсюда и название данной модели — SIRS.

В стандартной SIRS-модели акт заражения описывается как результат локального контакта особей  $S$  и  $I$ :  $S + I \rightarrow 2I$ . Однако на практике заражение может происходить и опосредованно,

<sup>1</sup>В дальнейшем всех таких агентов-посредников будем условно называть вирусами.

без непосредственного взаимодействия особей. В настоящей работе предлагается именно такая схема заражения, основанная на «обменном взаимодействии» особей вирусными частицами. В этой схеме зараженная особь ( $I$ ) выступает генератором вирусов ( $V$ ), которые затем вследствие диффузии или перемешивания распространяются по ареалу обитания, заражая восприимчивых особей ( $S$ ):  $S \xrightarrow{V} I$ . Вирусы в данной схеме являются посредниками между больной особью и восприимчивой. Таким образом, вместо стандартной  $SIRS$ -модели нами предлагается двухкомпонентная (особи + вирусы) модель:  $S \xrightarrow{V} I \rightarrow R \rightarrow S$ .

В предлагаемой модели динамика вирусных частиц принципиально отличается от поведения особей популяции. Последние представляют собой объекты с дискретным набором состояний  $\{S, I, R\}$ , переходы между которыми являются случайными событиями и характеризуются своими значениями вероятностей ( $P_k$ ). Кроме того, каждой из особей требуется некоторый ареал обитания, вследствие чего число особей на заданной площади всегда ограничено некоторым максимальным числом  $N$ . В противоположность этому, вирусные частицы способны неограниченно накапливаться в каждой точке пространства, поэтому их количество может принимать произвольные положительные значения. Они также способны перемещаться в процессе диффузии. Таким образом, взаимодействие особей с вирусами является некоторой аналогией взаимодействия частиц с полем. Описанные превращения, произошедшие в каждой элементарной ячейке пространства за время  $\Delta t$ , могут быть представлены в виде следующей схемы (см. рис. 1):



где буквы над стрелками обозначают вероятности соответствующих переходов.

Кратко опишем последовательность операций схемы (1).

1. Зараженная особь ( $I$ ) генерирует  $\nu$  вирусных частиц ( $V$ ).
2. Восприимчивая особь ( $S$ ) заражается при контакте с  $\eta$  вирусами с вероятностью  $P(\eta)$ .
3. Зараженная особь ( $I$ ) выздоравливает с вероятностью  $P_2$  и становится иммунной ( $R$ ).
4. Иммунная особь ( $R$ ) теряет иммунитет с вероятностью  $P_3$  и возвращается к восприимчивому состоянию ( $S$ ).
5. Инактивация  $\mu$  вирусов.

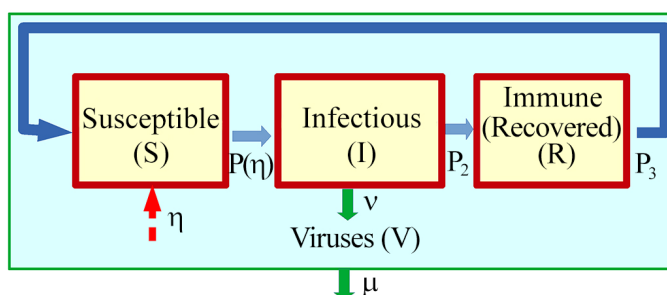


Рис. 1. Схема переходов между состояниями  $SIRS+V$ -модели: сплошные линии показывают направления переходов; штриховая линия указывает на влияние вирусов на переход между состояниями особей

Fig. 1. Diagram of transitions between states of the  $SIRS+V$  model: solid lines indicate the direction of transitions; a dashed line indicates the influence of viruses on the transition between states of individuals

Все трансформации однонаправленны и порядок смены состояний особей жестко детерминирован, в то время как сами превращения, а следовательно, и моменты времени, в которые они происходят, являются случайными. Динамика данной модели определяется как параметрами, так и выбором функции  $P(\eta)$ .

При рассмотрении процессов распространения эпидемии основной интерес представляет не динамика индивидуальных особей, а изменение их количеств  $N_k$  ( $k \in \{S, I, R\}$ ). Как уже говорилось выше, общая численность популяции  $N_S + N_I + N_R$  ограничена по величине некоторым максимально допустимым значением  $N$ , которое назовем максимальной емкостью популяции. Величина  $N$  обусловлена некоторым общим ресурсом (количеством пищи, площадью территории и т. д.), сдерживающим неограниченный рост численности. Отношение полной численности популяции к максимально возможной — есть относительная населенность

$$C = \frac{N_S + N_I + N_R}{N},$$

принимая значение от нуля до единицы. Поскольку полное число частиц в схеме (1) не меняется,  $C$  является параметром. Величина параметра  $C$  — важный фактор, определяющий ход инфекционных процессов в популяции.

## 2. Модель среднего поля

В приближении среднего поля для схемы (1) можно составить систему уравнений, управляющих изменением числа особей в каждом из состояний  $N_k$  ( $k \in \{S, I, R\}$ ) и числа вирусов  $N_V$  за малый интервал  $\Delta t$ . Вводя в качестве переменных относительные плотности населения  $k = N_k/N$  и переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{i} &= P(v)(C - i - r) - P_2 i, \\ \dot{r} &= P_2 i - P_3 r, \\ \dot{v} &= \nu i - \mu v \end{aligned} \quad (2)$$

(здесь учтено, что  $s + i + r = C$ ). Для определения вида функции  $P(v)$  естественно предположить, что она должна монотонно увеличиваться с концентрацией вирусов от  $P(0) = 0$  до  $P(\infty) = 1$ . В качестве такой функции выберем  $P(v) = (1 - (1 - P_1)^v)$ , где  $P_1 \in [0 : 1[$  — вероятность заразиться «единичной» порцией вирусов<sup>2</sup>. Обозначив  $\alpha = -\ln(1 - P_1)$ , можно записать функцию вероятности в более удобной форме:  $P(v) = 1 - \exp(-\alpha v)$ .

В уравнении (2) можно уменьшить число независимых параметров, введя новую переменную:  $z = \alpha v$ , и новый параметр:  $\sigma = \alpha v$ . В итоге получим

$$\begin{aligned} \dot{i} &= (C - i - r)(1 - \exp(-z)) - P_2 i, \\ \dot{r} &= P_2 i - P_3 r, \\ \dot{z} &= \sigma i - \mu z. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение (3) будет являться основой для анализа поведения системы (1). Из условий задачи следует, что все переменные и параметры (3) являются неотрицательными числами; кроме того, переменные  $i$  и  $r$  суммарно ограничены сверху:  $i + r \leq C \leq 1$ .

<sup>2</sup>Выбор данной зависимости определяется тем, что вероятность не заразиться  $v$  порциями вирусов составит  $Q^v$ , где  $Q$  — вероятность остаться здоровым после контакта с одной порцией вирусов.

### 3. Стационарные решения

Проанализируем стационарные решения системы (3) в области допустимых значений параметров и переменных. Предельными траекториями системы (3) являются два состояния равновесия: тривиальное  $E_0 = (0, 0, 0)$  и нетривиальное

$$E_1 = (i_0, Ai_0, Bi_0), \quad (4)$$

где введены обозначения:  $A = P_2/P_3$ ,  $B = \sigma/\mu$ , а значение  $i_0$  определяется как корень трансцендентного уравнения

$$i_0 = \frac{1}{1+A} \left( C - \frac{P_2 i_0}{1 - \exp(-Bi_0)} \right). \quad (5)$$

Точка  $E_0$  соответствует случаю полного выздоровления популяции. Ее устойчивость определяется корнями характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -P_3, \\ \lambda_{2,3} &= \frac{-(P_2 + \mu) \pm \sqrt{(P_2 - \mu)^2 + 4\sigma C}}{2}, \end{aligned}$$

которые в силу неотрицательности всех входящих в формулу величин являются вещественными. В зависимости от соотношения между  $d = BC$  и  $P_2$  она может быть либо устойчивым узлом (при  $P_2/d > 1$ ), либо седлоузлом (при  $P_2/d < 1$ ). Бифуркационное условие для  $E_0$

$$P_2 = d \quad (6)$$

одновременно соответствует прохождению точки  $E_1$  через начало координат, при котором она приобретает устойчивость. Таким образом, при любых значениях параметров в фазовом пространстве (3) существует только одна устойчивая неподвижная точка. При  $P_2 > d$  это точка  $E_0$  и при  $P_2 < d$  — точка  $E_1$ . В первом случае популяция не подвержена заражению и любое случайное проникновение инфекции затухает во времени; во втором случае при наличии первоначального инфицирования возникает эпидемия.

Из выражения (6) видно, что определяющую роль в эпидемических процессах играет отношение  $d/P_2$ , являющееся произведением нескольких параметров:  $\alpha \nu C \tau_v \tau_2$ , где  $\tau_v = \mu^{-1}$  — среднее время жизнеспособности вирусов,  $\tau_2 = P_2^{-1}$  — средняя продолжительность заболевания (так называемый «период инфицирования»). Каков биологический смысл данного фактора? Если учесть, что средняя концентрация вирусов, генерируемых одной инфицированной особью составляет  $\nu \tau_v$ , а доля восприимчивых особей близка к 100%, то величина  $d$  определяет среднюю скорость заражений, производимых одной инфицированной особью на начальном этапе эпидемии. Умножив ее на средний период инфицирования  $\tau_2$ , получим, что  $d/P_2$  представляет собой хорошо известную в моделировании эпидемий характеристику — *базовый индекс репродукции*, обозначаемый обычно как  $R_0$ . Таким образом, условие потери устойчивости состоянием равновесия  $E_0$  в уравнении (3) полностью согласуется с известным в эпидемиологии условием возникновения эпидемии  $R_0 > 1$ .

### 4. Установившийся уровень заболевания в популяции

Далее рассмотрим систему (3) при  $P_2 < d$ , то есть в условиях развития заболевания. В этом случае координаты устойчивой точки  $E_1$  определяют установление динамического равновесия между числом больных и здоровых индивидуумов. Обычно представляет интерес относительное



число больных особей в популяции  $X_0 = i_0/C$ , которое характеризует уровень заболевания. Оно определяется трансцендентным уравнением

$$X_0 = \frac{1}{1+A} \left( 1 - \frac{P_2 X_0}{1 - \exp(-dX_0)} \right). \quad (7)$$

Проведем качественную оценку формулы (7) для типичных значений входящих в нее параметров. Прежде всего, заметим, что величина в скобках меньше единицы, соответственно, уровень заболевания ограничен сверху множителем  $(1+A)^{-1}$ . Для большинства инфекций средняя длительность иммунитета  $\tau_3 = P_3^{-1}$  во много раз превосходит длительность самого заболевания  $\tau_2$  [4]. Поэтому  $A$  — достаточно большое число<sup>3</sup>. Отсюда следует, что: (а) единицей в знаменателе (7) можно пренебречь и (б) величина  $X_0$  не превосходит нескольких процентов. Поэтому при не слишком больших значениях фактора  $d$  экспоненту в знаменателе можно линеаризовать:  $\exp(-dX_0) \simeq 1 - dX_0$ . Тогда формула для  $X_0$  существенно упростится

$$X_0 \simeq \frac{1}{A} \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right). \quad (8)$$

Здесь  $1 - R_0^{-1}$  — это тот установившийся уровень заболевания в популяции, который существовал бы там при отсутствии иммунитета. Как видно из формулы (8), наличие иммунитета снижает средний уровень заболевших в  $A$  раз.

Нужно отметить, что величины  $A$  и  $R_0$  не являются независимыми, поскольку обе содержат параметр  $P_2$ . Для исключения этой неоднозначности формула (8) может быть переписана в виде

$$X_0 \simeq \frac{1}{\tau_3} \left( \tau_2 - \frac{1}{d} \right). \quad (9)$$

В этом случае, как видно из (9), установившийся уровень заболевания в популяции определяется действием двух сомножителей, одним из которых является  $\tau_3^{-1}$ , а вторым — превышение длительности инфекционного периода над его критическим значением  $d^{-1}$ . В целом, наличие длительного иммунитета ( $\tau_3 \gg 1$ ) предохраняет популяцию от высоких уровней заражения. Другими сдерживающими  $X_0$  факторами в равной степени являются уменьшение периода инфекции  $\tau_2$  и увеличение обратного фактора  $d^{-1}$ .

На рис. 2 приведены графики  $X_0(\tau_2)$  при длительных интервалах иммунитета  $\tau_3 \sim 100$ , построенные как по полной формуле (7), так и по ее упрощенной версии (9); последние изображены пунктирными линиями. Мы видим, что даже при больших  $d \simeq 4$ , если средний период инфекции не продолжается слишком долго ( $\tau_2 \leq 10$ ), обе формулы дают близкие величины. Поэтому, для многих заболеваний соотношение (9) может быть хорошим приближением.

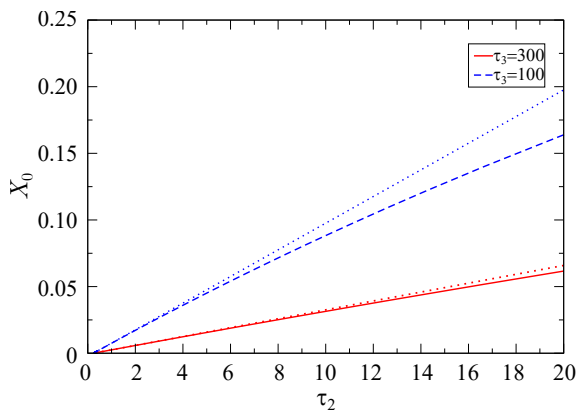


Рис. 2. Зависимость уровня инфицирования популяции от периода инфицирования  $\tau_2$  при длительном иммунитете;  $d = 4.16$

Fig. 2. Dependence of the population infection level on infection period  $\tau_2$  with long-term immunity;  $d = 4.16$

<sup>3</sup>Например, для большинства респираторных вирусных инфекций средний период инфицирования составляет одну-две недели, а иммунитет может сохраняться в течение года и более.

## 5. Первоначальное развитие заболевания

Координаты точки  $E_1$  определяют уровень заражения в популяции на больших временах, то есть при  $t \rightarrow \infty$ . Однако на практике часто бывает важно знать, как будет развиваться заболевание на начальном этапе после первоначального заражения. Поэтому нас также интересует переходный процесс от произвольного начального состояния в окрестности начала координат к устойчивой точке  $E_1$ . Переходный процесс определяется устройством фазового пространства в окрестности  $E_1$ , то есть типом данного состояния равновесия. Его можно определить, исходя из собственных значений  $\lambda_{1-3}$  якобиана системы (3):

$$\begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{\sigma}{\mu}i_0\right) - P_2 - 1 & \exp\left(-\frac{\sigma}{\mu}i_0\right) - 1 & \left(C - \left(1 + \frac{P_2}{P_3}\right)i_0\right) \exp\left(-\frac{\sigma}{\mu}i_0\right) \\ P_2 & -P_3 & 0 \\ \sigma & 0 & -\mu \end{bmatrix}.$$

Аналитический вид собственных значений является достаточно громоздким, поэтому воспользуемся численными расчетами. Выберем значения параметров, которые использовались в предыдущем разделе:  $C = 0.6$ ,  $\sigma = 0.7$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\tau_2 \sim 10$ ,  $\tau_3 \sim 100$  и построим графики зависимости собственных значений от среднего периода инфекции  $\tau_2$  (рис. 3, *a*) и средней длительности иммунитета  $\tau_3$  (рис. 3, *b*). Как видно из графиков, в рассматриваемой области параметров точка  $E_1$  имеет два комплексно-сопряженных собственных значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и одно вещественное  $-\lambda_3$ , причем вещественные части  $\lambda_{1,2}$  очень малы и монотонно уменьшаются с ростом длительности иммунитета. Таким образом,  $E_1$  представляет собой устойчивый фокус, и при подходе к этой точке траектория будет совершать множество витков, демонстрируя вначале значительные осцилляции числа заболевших, постепенно уменьшающиеся по амплитуде. Временная реализация данного переходного процесса определяется начальными условиями. Выберем в качестве таковых точку вблизи начала координат:  $i_0 = 0.001$ ,  $r_0 = 0$  и  $z_0 = 0$ , которая соответствует ситуации проникновения нескольких зараженных особей в изначально здоровую популяцию. Типичный

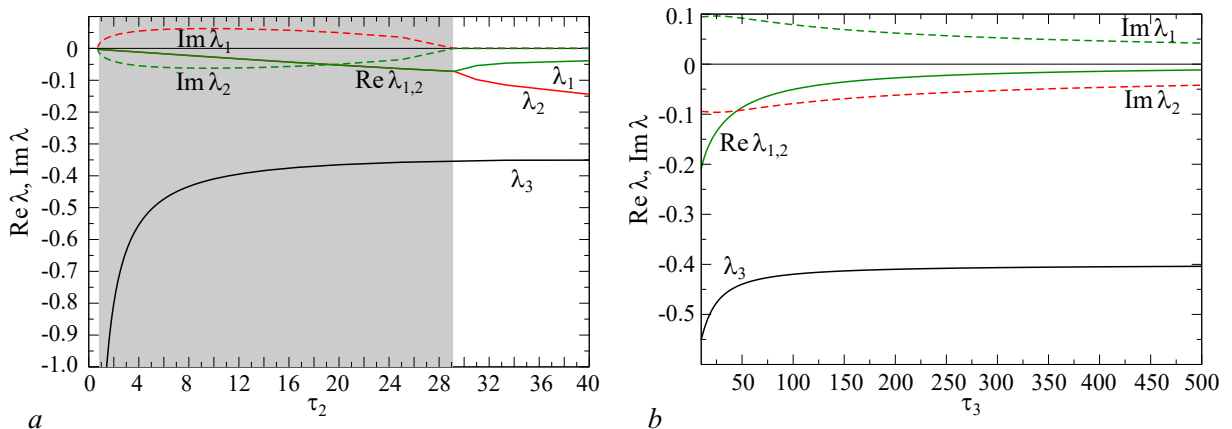


Рис. 3. Зависимость собственных чисел состояния равновесия  $E_1$ : *a* — от  $\tau_2$  при  $\tau_3 = 200$  и *b* — от  $\tau_3$  при  $\tau_2 = 10$ ; оставшиеся параметры зафиксированы:  $\sigma = 0.7$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $C = 0.6$ . Сплошные кривые соответствуют вещественным величинам, штриховые — мнимым; серая область на рис. *a* выделяет зону, где  $E_1$  является фокусом

Fig. 3. Dependence of the eigenvalues of the equilibrium state  $E_1$ : *a* — on  $\tau_2$  at  $\tau_3 = 200$  and *b* — from  $\tau_3$  at  $\tau_2 = 10$ ; the other parameters are fixed:  $\sigma = 0.7$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $C = 0.6$ . The solid curves correspond to real values, dashed lines correspond to imaginary ones; gray region on the fig. *a* marks the zone where  $E_1$  is the focus

вариант реализующегося при этом переходного процесса изображена на рис. 4 (линия, отмеченная кружками). Здесь мы видим чрезвычайно быстрый рост числа заболевших непосредственно после инфицирования, за которым следует такой же быстрый спад почти до нуля. Далее следует второй пик существенно меньшей величины, после чего траектория выходит на уровень, близкий к  $E_1$ . С точки зрения популяционной динамики, данное поведение можно интерпретировать как затухающую последовательность волн заражения, при которой уровень заражения популяции демонстрирует последовательность резких пиков, прежде чем эпидемия достигнет динамического равновесия, характеризуемого малым уровнем заражения. В данном случае, как следует из рисунка, пик заражения в самом начале заболевания затрагивает больше трети численности популяции. Большая величина этого пика определяется тем, что на данном этапе иммунитет в популяции еще не сформирован.

Таким образом, несмотря на сравнительно небольшой устанавливающийся стационарный уровень заражения, число зараженных в отдельные моменты времени может достигать значительных величин. При тяжелом протекании заболевания, сопровождающимся вероятными летальными исходами, наличие высокого пика первой волны заражения может приводить для популяции к серьезным последствиям.

При других начальных условиях динамика заражения может выглядеть иначе. Если на момент первоначального заражения в популяции уже присутствует достаточное число особей, обладающих иммунитетом (например, вследствие предварительной вакцинации), переходный процесс становится более плавным. При этом нарастание числа зараженных происходит медленнее, а максимальный уровень заражения оказывается существенно меньшим. Так, например, при  $r_0 = 0.2$  (что составляет 33% от численности популяции) на пике заражения число инфицированных составляет около 0.2, а при  $r_0 = 0.4$  (67% от численности популяции) — менее 0.075 (см. рис. 4). В целом, зависимость максимального числа инфицированных от уровня иммунных особей, имеющегося в наличии на момент заражения, представлена на рис. 5. Как видно из графика, при уровне иммунных особей от нуля примерно до 60% величина пика заражения снижается с ростом  $r_0$  почти линейно, после чего становится

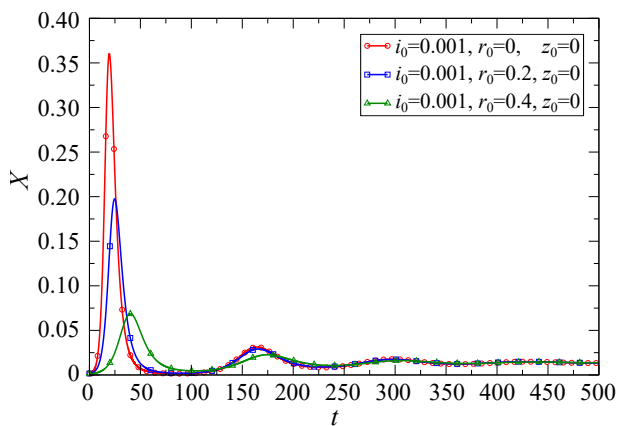


Рис. 4. Уровни заражения в популяции  $X(t)$  на начальном этапе эпидемии при разных начальных условиях; значения параметров:  $\tau_2 = 5$ ,  $\tau_3 = 300$ ,  $\sigma = 0.7$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $C = 0.6$

Fig. 4. Population infection levels  $X(t)$  at initial stage of the epidemic under different initial conditions; the parameter values are:  $\tau_2 = 5$ ,  $\tau_3 = 300$ ,  $\sigma = 0.7$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $C = 0.6$

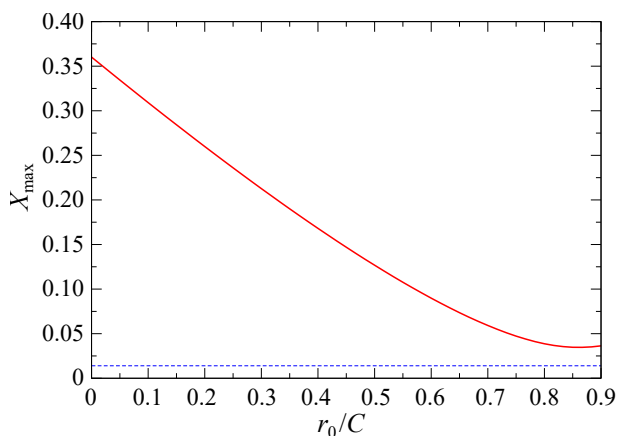


Рис. 5. График зависимости максимального значения относительного числа инфицированных от уровня сформированного иммунитета, имеющегося в популяции на момент заражения. Штриховая линия отмечает уровень заражения, соответствующий установившемуся состоянию ( $X_0$ )

Fig. 5. Dependence of maximum value of infected relative number on the level of formed immunity available in the population at the time of infection. Dashed line marks the infection level corresponding to the steady state ( $X_0$ )

более пологой и, начиная с уровня 80%, происходит стабилизация около величины  $X_{\max} \simeq 0.075$ . При других значениях параметров количественные значения будут другими, но качественный вид данной зависимости сохраняется.

**5.1. Влияние сезонных факторов на ход заболевания.** В предыдущих разделах была рассмотрена автономная модель распространения инфекции, где все параметры — постоянные числа. Однако процессы, связанные с инфицированием, как правило, зависят от условий окружающей среды, которые для большинства климатических зон периодически меняются из-за сезонных факторов. Поэтому автономная модель для них является недостаточной.

Попробуем модифицировать рассматриваемую систему (3), чтобы учесть влияние изменяющихся условий. Смена времен года будет приводить к периодической модуляции параметров уравнений вокруг некоторых средних значений, что может отражаться на сезонных колебаниях числа заболевших. Из всех используемых в (3) параметров наиболее чувствительным к влиянию внешних факторов является скорость инактивации вирусов  $\mu$ , обратная величина к которой ( $\tau_v$ ) определяет время, в течение которого вирусные частицы могут оставаться активными вне организма зараженной особи. Этот интервал существенным образом зависит от температуры и влажности окружающей среды, а также от ряда других факторов, таких как количество солнечной радиации, средняя интенсивность ветра и т. п. Для учета сезонных факторов полагаем, что параметр  $\mu$  в уравнении (3) модулируется гармонической функцией времени вокруг среднего значения  $\mu_0$  по закону:  $\mu(t) = \mu_0 (1 + mF(\cos(2\pi ft)))$ , где  $f$  — частота, а  $m$  — индекс модуляции; функция  $F$  задает влияние внешних факторов на параметр  $\mu$ , она выбирается так, что  $|F(x)| \leq 1$  при  $|x| \leq 1$ .

Рассмотрим сначала случай линейной зависимости:  $F(x) = x$ . Выберем среднее значение параметра  $\mu_0 = 0.3$ , используемое ранее. При наличии модуляции параметра мы наблюдаем периодические колебания уровня заражения  $X(t)$  в виде регулярной последовательности острых пиков заражения, вид которых показан на рис. 6, а. Период колебаний равен периоду функции модуляции  $T = f^{-1}$ . В результате заболевание периодически достигает больших значений уровня заражений на пиках и спадает почти до нуля в интервалах между ними. Амплитуда установившихся колебаний  $A_x$  очевидным образом растет с ростом коэффициента модуляции. Что касается ее зависимости от частоты модуляции  $f$ , то она носит выраженный резонансный характер, что видно по резонансным кривым, построенным на рис. 6, б. При малых индексах модуляции резонансная частота близка к собственной частоте осциллятора, определяемой как

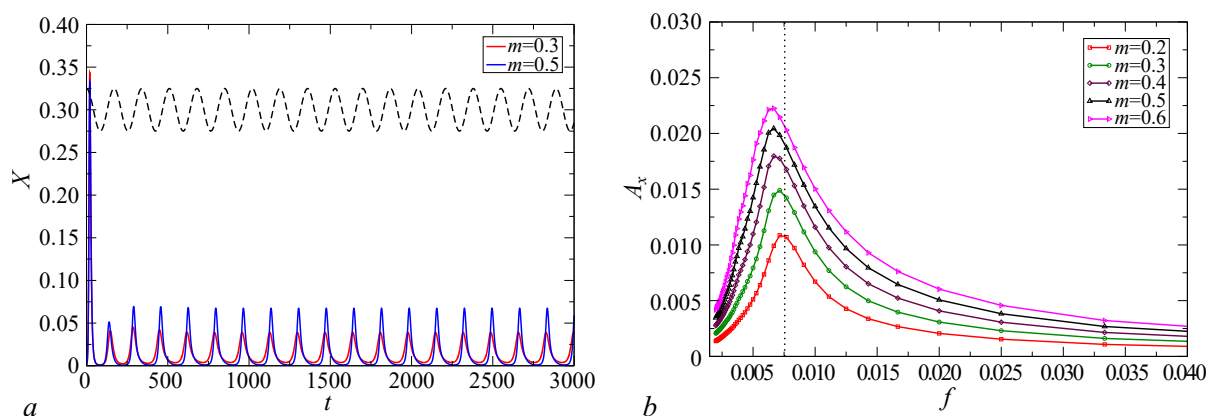


Рис. 6. Параметрические колебания в системе (3) при модуляции параметра  $\mu$ : а — временные реализации при разных индексах модуляции при  $T = 170$  и б — семейство резонансных кривых для разных  $m$ ; штриховая линия на рис. а отображает модуляцию параметра. Значения параметров:  $C = 0.6$ ,  $\mu_0 = 0.3$ ,  $\sigma = 0.7$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Parametric oscillations in the system (3) with modulation of the parameter  $\mu$ : а — time-series at different modulation indices at  $T = 170$  and б — a family of resonance curves for different  $m$ ; dashed line on the fig. а indicates the modulation of the parameter. Parameter values are:  $C = 0.6$ ,  $\mu_0 = 0.3$ ,  $\sigma = 0.7$  (color online)

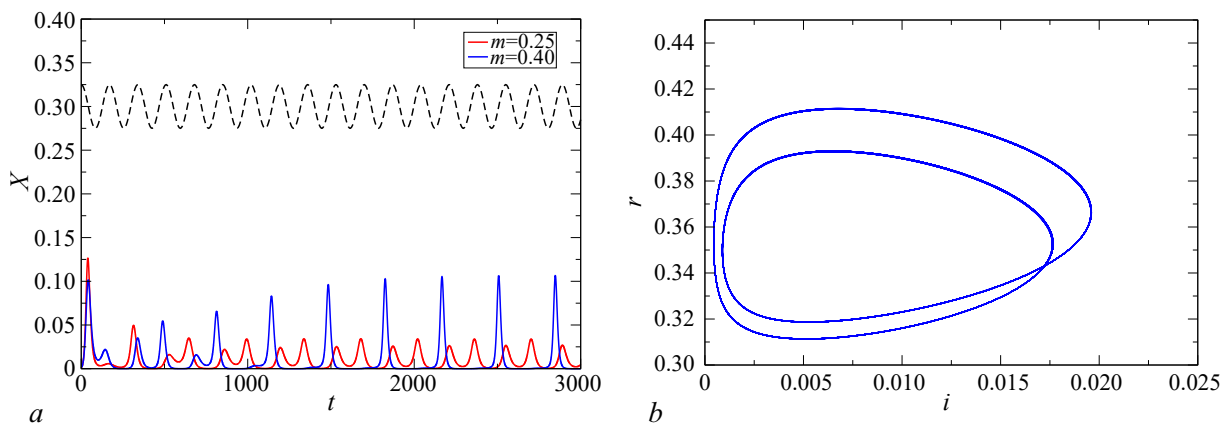


Рис. 7. Удвоение периода колебаний: *a* – временная реализация  $X(t)$  и *b* – фазовый портрет в переменных  $i-r$ ; штриховая линия на рис. *a* отображает модуляцию параметра. Значения параметров:  $C = 0.6$ ,  $\mu_0 = 0.6$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $T = 300$  (цвет онлайн)

Fig. 7. Doubling of the oscillation period: *a* – time-series  $X(t)$  and *b* – the phase portrait in variables  $i-r$ ; the dashed line on the fig. *a* indicates the modulation of the parameter. Parameter values are:  $C = 0.6$ ,  $\mu_0 = 0.6$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $T = 300$  (color online)

$\text{Im}(\lambda_{1,2})/(2\pi)$  (последняя отображена на рисунке пунктирной линией). С увеличением глубины модуляции наблюдается небольшое смещение резонансной частоты в сторону нижних частот.

Помимо колебаний с частотой внешнего параметрического воздействия при некоторых значениях параметров в осцилляторе наблюдается удвоение периода колебаний. В этом случае период колебаний удваивается по сравнению с периодом воздействия (рис. 7, *a*), а фазовый портрет приобретает вид двухоборотного предельного цикла (рис. 7, *b*). Такой тип колебаний означает на практике наличие вспышек заболевания с двухгодичным интервалом. Подобная динамика действительно наблюдается для некоторых заболеваний. Например, она отмечалась для заболевания корью до введения массовой вакцинации [21].

Зависимость скорости инактивации вирусов  $\mu$  от условий внешней среды может выражаться и нелинейной функцией  $F(x)$ . В этом случае в спектре колебаний численности заболевших можно ожидать пики на гармониках, кратных базовой частоте. Например, если мы выберем зависимость в виде квадратичного полинома  $F(x) = ax^2 + bx + c$ , то максимумы заболевания появляются дважды за период. Такой вид колебаний показан на рис. 8. Он соответствует хорошо известному явлению сезонных вспышек заболевания респираторными вирусными инфекциями.

Поскольку неавтономная модель не обладает, как известно, инвариантностью по отношению ко времени, существенное влияние на процессы в ней может оказывать выбор момента начального инфицирования. Очевидно, что развитие эпидемии может происходить

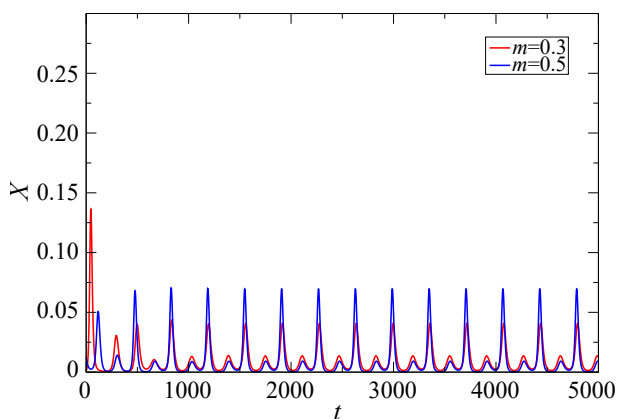


Рис. 8. Временная реализация параметрических колебаний при нелинейной зависимости параметра инактивации:  $F(x) = x^2 + 0.5x - 0.5$ ;  $\sigma = 0.5$ ,  $\mu_0 = 0.6$ ,  $C = 0.6$  (цвет онлайн)

Fig. 8. Time-series of parametric oscillations with nonlinear dependence of the inactivation parameter:  $F(x) = x^2 + 0.5x - 0.5$ ;  $\sigma = 0.5$ ,  $\mu_0 = 0.6$ ,  $C = 0.6$  (color online)

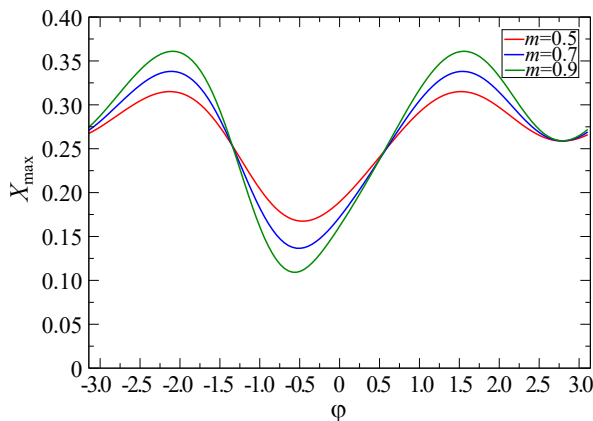


Рис. 9. Зависимость максимального заражения от начальной фазы функции модуляции параметра (цвет онлайн)

Fig. 9. Dependence of maximum infection on initial phase of the parameter modulation function (color online)

по-разному, в зависимости от того, в какое время года произошло первоначальное заражение. Чтобы учесть данный фактор, введем в закон модуляции параметра начальную фазу ( $\varphi$ ):  $\mu(t) = \mu_0 (1 + mF(\cos(2\pi ft + \varphi)))$  и будем измерять уровень заболевания на пике эпидемии  $X_{\max}$  в зависимости от  $\varphi$ . Результаты расчетов подтверждают предположение о важности момента начального заражения на ход эпидемии. Типичный вид зависимости приведен на рис. 9. Как видно из графика, величина пика заражения может меняться в несколько раз в зависимости от того, насколько благоприятным для распространения эпидемии оказался момент первоначального проникновения инфекции в популяцию.

### Заключение

Предложенная модифицированная SIRS-модель демонстрирует динамику, характерную для развития эпидемических процессов, наблюдаемых в природных популяциях. Если не учитывать периодическое изменение условий, вызываемое климатическими факторами, то при наличии первоначального заражения в сообществе возникает последовательность из нескольких затухающих «волн» заражения, сходящаяся к небольшому среднему установившемуся уровню. При этом амплитуда первой волны может достигать очень больших значений, сравнимых с численностью всей популяции. Учет климатических факторов ведет к периодически повторяющимся вспышкам заболевания, которые могут происходить как с удвоенной частотой (сезонные вспышки респираторных инфекций), так и с половинной частотой воздействия (двухгодичные вспышки заболевания некоторых инфекций). Период этих процессов определяется видом функции, описывающей влияние климатических факторов на скорость инактивации вирусов в окружающей среде. Конкретизация вида этой функции возможна за счет учета биологических факторов, характеризующих поведение возбудителя инфекции вне организма зараженной особи.

Рассматривая система описывает многие характерные явления, наблюдаемые при развитии эпидемий. В то же время она является достаточно грубой, поскольку не учитывает конкретные особенности заболеваний, а также возможное перемещение особей и возбудителя в пространстве. Модификация модели может идти по пути уточнения вида функции  $P(v)$ , например с учетом порогового характера заражения, наблюдаемого для некоторых заболеваний; использования более реалистичного (нелинейного) уравнения, описывающего генерацию вирусов заболевшей особью; уточнения вида функции модуляции  $F(x)$  и т. п. Такие уточнения представляют собой подстройку модели под конкретный вид заболевания и учитывают его биологические особенности, то есть соответствуют переходу от качественного моделирования к имитационному. Другим направлением модификации предложенной модели может быть переход от системы ОДУ к решеткам вероятностных клеточных автоматов. Такой подход даст возможность естественным образом учесть стохастический характер эпидемиологических процессов, а также рассмотреть влияние на эти процессы неравномерности в распределении особей и вирусов по ареалу обитания и влияние процессов их перемещения.

## Список литературы

1. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 326 с.
2. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М.: Наука, 1991. 304 с.
3. Hethcote H. W. The mathematics of infectious diseases // SIAM Review. 2000. Vol. 42, no. 4. P. 599–653. DOI: 10.1137/S0036144500371907.
4. Андерсон Р., Мэй Р. Инфекционные болезни человека. Динамика и контроль. М.: Мир, 2004. 784 с.
5. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
6. Serfling R. E. Methods for current statistical analysis of excess pneumonia-influenza deaths // Public Health Reports. 1963. Vol. 78, no. 6. P. 494–506. DOI: 10.2307/4591848.
7. Burkom H. S., Murphy S. P., Shmueli G. Automated time series forecasting for biosurveillance // Statistics in Medicine. 2007. Vol. 26, no. 22. P. 4202–4218. DOI: 10.1002/sim.2835.
8. Pelat C., Boëlle P.-Y., Cowling B. J., Carrat F., Flahault A., Ansart S., Valleron A.-J. Online detection and quantification of epidemics // BMC Medical Informatics and Decision Making. 2007. Vol. 7. P. 29. DOI: 10.1186/1472-6947-7-29.
9. Boccaro N., Cheong K. Automata network SIR models for the spread of infectious diseases in populations of moving individuals // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1992. Vol. 25, no. 9. P. 2447–2461. DOI: 10.1088/0305-4470/25/9/018.
10. Sirakoulis G. C., Karafyllidis I., Thanailakis A. A cellular automaton model for the effects of population movement and vaccination on epidemic propagation // Ecological Modelling. 2000. Vol. 133, no. 3. P. 209–223. DOI: 10.1016/S0304-3800(00)00294-5.
11. Шабунин А. В. SIRS-модель распространения инфекций с динамическим регулированием численности популяции: Исследование методом вероятностных клеточных автоматов // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 2. С. 5–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-5-20.
12. Шабунин А. В. Синхронизация процессов распространения инфекций во взаимодействующих популяциях: Моделирование решетками клеточных автоматов // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 4. С. 383–396. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-383-396.
13. Фирсов О. В. Гибридное прогнозирование заболеваемости раком почки и смертности от него на основе нейросетевых и статистических технологий // Врач-аспирант. 2006. Т. 10, № 1. С. 15–32.
14. Ефимова Н. В., Горнов А. Ю., Зароднюк Т. С. Опыт использования искусственных нейронных сетей при прогнозировании заболеваемости населения (на примере г. Братска) // Экология человека. 2010. № 3. С. 3–7.
15. Белецкая С. Ю., Коровин В. Н., Родионов О. В. Разработка прогностических моделей развития заболеваемости детей в городском административном районе на основе нейросетевых технологий // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6, № 12. С. 201–205.
16. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proc. R. Soc. Lond. A. 1927. Vol. 115, no. 772. P. 700–721. DOI: 10.1098/rspa.1927.0118.
17. Hamer W. H. The Milroy lectures on epidemic disease in England: The evidence of variability and persistence of type // The Lancet. 1906. Vol. 1. P. 733–739.
18. Hutchinson G. E. Circular casual systems in ecology // Annals of the New York Academy of Sciences. 1948. Vol. 50, no. 4. P. 221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
19. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Netherlands: Springer, 1992. 502 p. DOI: 10.1007/978-94-015-7920-9.
20. Переварюха А. Ю. Непрерывная модель трех сценариев инфекционного процесса при

факторах запаздывания иммунного ответа // Биофизика. 2021. Т. 66, № 2. С. 384–407. DOI: 10.31857/S0006302921020204.

21. Anderson R. M., May R. M. Spatial, temporal, and genetic heterogeneity in host populations and the design of immunization programmes // *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*. 1984. Vol. 1, no. 3. P. 233–266. DOI: 10.1093/imammb/1.3.233.

## References

1. Bailey N. *Mathematical Approach to Biology and Medicine*. London: John Wiley and Sons; 1967. 296 p. DOI: 10.2307/2982529.
2. Marchuk GI. *Mathematical Models in the Immunology. Simulation Methods and Experiments*. Moscow: Nauka; 1991. 304 p. (in Russian).
3. Hethcote HW. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*. 2000;42(4):599–653. DOI: 10.1137/S0036144500371907.
4. Anderson RM, May RM. *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*. Oxford: Oxford University Press; 1991. 768 p.
5. Bazykin AD. *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*. Singapore: World Scientific; 1998. 216 p. DOI: 10.1142/2284.
6. Serfling RE. Methods for current statistical analysis of excess pneumonia-influenza deaths. *Public Health Reports*. 1963;78(6):494–506. DOI: 10.2307/4591848.
7. Burkom HS, Murphy SP, Shmueli G. Automated time series forecasting for biosurveillance. *Statistics in Medicine*. 2007;26(22):4202–4218. DOI: 10.1002/sim.2835.
8. Pelat C, Boëlle PY, Cowling BJ, Carrat F, Flahault A, Ansart S, Valleron AJ. Online detection and quantification of epidemics. *BMC Medical Informatics and Decision Making*. 2007;7:29. DOI: 10.1186/1472-6947-7-29.
9. Boccara N, Cheong K. Automata network SIR models for the spread of infectious diseases in populations of moving individuals. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1992;25(9):2447–2461. DOI: 10.1088/0305-4470/25/9/018.
10. Sirakoulis GC, Karafyllidis I, Thanailakis A. A cellular automaton model for the effects of population movement and vaccination on epidemic propagation. *Ecological Modelling*. 2000;133(3):209–223. DOI: 10.1016/S0304-3800(00)00294-5.
11. Shabunin AV. SIRS-model with dynamic regulation of the population: Probabilistic cellular automata approach. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2019;27(2):5–20 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-5-20.
12. Shabunin AV. Synchronization of infections spread processes in populations interacting: Modeling by lattices of cellular automata. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(4):383–396 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-383-396.
13. Firsov OV. Hybrid prediction of kidney cancer incidence and mortality based on neural network and statistical technologies. *Postgraduate Doctor*. 2006;10(1):15–32 (in Russian).
14. Efimova NV, Goryunov AY, Zarodnyuk TS. Experience in using the artificial neural networks in prognosing the population morbidity (on an example of Bratsk). *Human Ecology*. 2010;(3):3–7 (in Russian).
15. Beletzkaya SY, Korovin VN, Rodionov OV. Development of the prognostic models of development diseases of children in city administrative area on the basis of neural network technologies. *Bulletin of the Voronezh State Technical University*. 2010;6(12):201–205 (in Russian).
16. Kermack WO, McKendrick AG. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1927;115(772):700–721. DOI: 10.1098/rspa.1927.0118.
17. Hamer WH. The Milroy lectures on epidemic disease in England: The evidence of variability and persistence of type. *The Lancet*. 1906;1:733–739.



18. Hutchinson GE. Circular casual systems in ecology. *Annals of the New York Academy of Sciences*. 1948;50(4):221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
19. Gopalsamy K. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Netherlands: Springer; 1992. 502 p. DOI: 10.1007/978-94-015-7920-9.
20. Perevaryukha AY. A continuous model of three scenarios of the infection process with delayed immune response factors. *Biophysics*. 2021;66(2):327–348. DOI: 10.1134/S0006350921020160.
21. Anderson RM, May RM. Spatial, temporal, and genetic heterogeneity in host populations and the design of immunization programmes. *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*. 1984;1(3):233–266. DOI: 10.1093/imammb/1.3.233.



*Шабунин Алексей Владимирович* — родился в Саратове (1966). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика и электроника» (1990). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (1998, СГУ) и доктора физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2007, СГУ). С 1990 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета, в настоящее время — в должности профессора. Научные интересы — нелинейная динамика, синхронизация, мультистабильность, клеточные автоматы, искусственные нейронные сети. Опубликовал свыше 80 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru  
ORCID: 0000-0002-3495-9418  
AuthorID (eLibrary.Ru): 34839



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Научная статья  
УДК 537.86; 519.21

DOI: 10.18500/0869-6632-003016  
EDN: FNRSUD

### Синхронизация волн возбуждения в двухслойной сети нейронов ФитцХью–Нагумо при шумовой модуляции параметров межслойной связи

*И. Р. Рамазанов, И. А. Корнеев<sup>✉</sup>, А. В. Слепнев, Т. Е. Вадивасова*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: ibadulla.ramazanov@yandex.ru, ✉ ivankorneew@yandex.ru,  
a.v.slepnev@gmail.com, vadvivasovate@yandex.ru

*Поступила в редакцию 7.07.2022, принята к публикации 20.09.2022,  
опубликована онлайн 11.11.2022, опубликована 30.11.2022*

**Аннотация.** Целью работы является изучение возможности синхронизации волновых процессов в распределенных возбудимых системах посредством шумовой модуляции силы связи между ними. **Методы.** Простая модель сети нейронов, представляющая собой два связанных слоя возбудимых осцилляторов ФитцХью–Нагумо с кольцевой топологией, исследуется методами численного моделирования. Связь между слоями имеет случайную компоненту, задаваемую для каждой пары связанных осцилляторов независимыми источниками цветного гауссова шума. **Результаты.** Показано, что при определенных параметрах шума связи (интенсивности и времени корреляции) возможно получить режим, близкий к полной (синфазной) синхронизации бегущих волн в случае идентичных взаимодействующих слоев и режим синхронизации скоростей распространения волн в случае неидентичных слоев, отличающихся значениями коэффициентов внутрислойной связи. **Заключение.** Эффектами синхронизации фаз и скоростей распространения волн возбуждения в ансамблях нейронов можно управлять с помощью случайных процессов взаимодействия возбудимых осцилляторов, задаваемых статистически независимыми источниками шума. Управляющими параметрами при этом могут служить как интенсивность шума, так и его время корреляции. Полученные на простой модели результаты могут носить достаточно общий характер.

**Ключевые слова:** сети осцилляторов, нелинейные системы, модель ФитцХью–Нагумо, нелинейная связь, цветной шум, модуляция шума, синхронизация.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 20-12-00119.

**Для цитирования:** Рамазанов И. Р., Корнеев И. А., Слепнев А. В., Вадивасова Т. Е. Синхронизация волн возбуждения в двухслойной сети нейронов ФитцХью–Нагумо при шумовой модуляции параметров межслойной связи // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 732–748. DOI: 10.18500/0869-6632-003016. EDN: FNRSUD

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Synchronization of excitation waves in a two-layer network of FitzHugh–Nagumo neurons with noise modulation of interlayer coupling parameters

I. R. Ramazanov, I. A. Korneev✉, A. V. Slepnev, T. E. Vadivasova

Saratov State University, Russia

E-mail: ibadulla.ramazanov@yandex.ru, ✉ivankorneev@yandex.ru,

a.v.slepnev@gmail.com, vadivasovate@yandex.ru

Received 7.07.2022, accepted 20.09.2022, available online 11.11.2022, published 30.11.2022

**Abstract.** The purpose of this work is to study the possibility of synchronization of wave processes in distributed excitable systems by means of noise modulation of the coupling strength between them. *Methods.* A simple model of a neural network, which consists of two coupled layers of excitable FitzHugh–Nagumo oscillators with a ring topology, is studied by numerical simulation methods. The connection between the layers has a random component, which is set for each pair of coupled oscillators by independent sources of colored Gaussian noise. *Results.* The possibility to obtain a regime close to full (in-phase) synchronization of traveling waves in the case of identical interacting layers and a regime of synchronization of wave propagation velocities in the case of non-identical layers differing in the values of the coefficients of intra-layer coupling is shown for certain values of parameters of coupling noise (intensity and correlation time). *Conclusion.* It is shown that the effects of synchronization of phases and propagation velocities of excitation waves in ensembles of neurons can be controlled using random processes of interaction of excitable oscillators set by statistically independent noise sources. In this case, both the noise intensity and its correlation time can serve as control parameters. The results obtained on a simple model can be quite general.

**Keywords:** networks of oscillators, nonlinear systems, FitzHugh–Nagumo model, nonlinear coupling, colored noise, noise modulation, synchronization.

**Acknowledgements.** This work was supported by Russian Science Foundation, grant No. 20-12-00119.

**For citation:** Ramazanov IR, Korneev IA, Slepnev AV, Vadivasova TE. Synchronization of excitation waves in a two-layer network of FitzHugh–Nagumo neurons with noise modulation of interlayer coupling parameters. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(6):732–748. DOI: 10.18500/0869-6632-003016

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Источники внутреннего и внешнего шума оказывают влияние на все объекты и системы живой природы и техники. Они могут существенно изменить поведение системы [1–9], что необходимо учитывать при моделировании и прогнозировании различных возможных эффектов. Влияние шума может быть очень разнообразно в зависимости от характеристик шума и от динамики самой системы. В условиях сильной нелинейности и сложной динамики теоретические методы исследования не всегда могут быть применимы. В этом случае важную роль приобретает численное моделирование.

Далеко не все эффекты, связанные с воздействием шумов на нелинейные системы, в настоящее время в достаточной степени изучены. Особенно это касается многокомпонентных ансамблей и распределенных систем. Исследованию влияния шумов на динамику ансамблей и распределенных систем посвящен ряд работ (например, [10–15]), в которых рассматриваются индуцированные шумом фазовые переходы, а также эффекты стохастического и когерентного резонансов в сложных многокомпонентных системах. Одним из важных вопросов является влияние шума на синхронизацию колебаний, поскольку фундаментальное явление синхронизации играет важнейшую роль в поведении различных нелинейных систем в живой природе и технике и лежит

в основе формирования пространственных структур. Известно, что наличие источников шума в автогенераторе приводит к тому, что фазовый захват не является строгим и наблюдается на конечном времени (так называемая «эффективная синхронизация» [16]). В то же время, воздействие общего шума на невзаимодействующие или слабо взаимодействующие автоколебательные и возбудимые системы приводит к их частотно-фазовой синхронизации [17–22]. Более того, было показано, что стохастические колебания, возникающие в бистабильных и возбудимых осцилляторах под действием шума, также могут быть, в некотором смысле, синхронизованы [23–29]. В ансамблях возбудимых систем синхронизация стохастических колебаний при определенных параметрах шума приводит к возникновению сложных кластерных структур, таких как когерентно-резонансная химера [30]. Недавно было показано, что параметрический шум, модулирующий параметр связи, может вызывать частичную синхронизацию сложной пространственно-временной динамики в связанных слоях хаотических отображений [31, 32] и позволяет управлять поведением ансамбля, демонстрирующего химерные состояния [33].

Шум играет принципиальную роль в моделях нейродинамики, поскольку нейроны, в большинстве случаев, являются возбудимыми осцилляторами и их поведение во многом определяется уровнем и параметрами шума в системе [34–42]. Может также быть поставлен вопрос о возможном влиянии на динамику нейронных ансамблей шума, присутствующего в цепочках связи. В настоящей работе мы рассматриваем простейшую модель нейронной системы, представляющую собой двухслойную сеть возбудимых осцилляторов ФитцХью–Нагумо с кольцевой топологией. В пределах одного слоя (кольца) осцилляторы соединены локальными диссипативными связями и, таким образом, в каждом из слоев может быть реализован режим бегущей волны возбуждения. При этом источники шума внутри слоев не рассматриваются. Связь между слоями также является локальной и диссипативной, однако сила взаимодействия осцилляторов носит случайный характер и определяется независимыми источниками шума. Данная модель, разумеется, не является реалистичной моделью какой-либо нейронной системы, однако она позволяет выявить ряд эффектов, вызванных шумовой модуляцией параметра связи, которые могут носить достаточно общий характер. В работе показано, как параметры случайной компоненты связи между слоями могут влиять на режим синхронизации наблюдающихся в них волн возбуждения.

## 1. Исследуемая модель и методы численного анализа

Как отмечено во введении, в работе исследуется модель возбудимой нейронной системы, представляющая собой ансамбль из двух слоев (колец) осцилляторов ФитцХью–Нагумо (ФХН) [43, 44] с локальным взаимодействием и коэффициентом межслойной связи, имеющим шумовую компоненту. Уравнения системы могут быть записаны в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{j,1} = \frac{1}{\varepsilon} (x_{j,1} - y_{j,1} - \alpha x_{j,1}^3) + \sigma_1 (x_{j-1,1} + x_{j+1,1} - 2x_{j,1}) + (k_0 + kz_j) [x_{j,2} - x_{j,1}], \\ \dot{y}_{j,1} = \gamma x_{j,1} - y_{j,1} + \beta, \\ \dot{x}_{j,2} = \frac{1}{\varepsilon} (x_{j,2} - y_{j,2} - \alpha x_{j,2}^3) + \sigma_2 (x_{j-1,2} + x_{j+1,2} - 2x_{j,2}) + (k_0 + kz_j) [x_{j,1} - x_{j,2}], \\ \dot{y}_{j,2} = \gamma x_{j,2} - y_{j,2} + \beta, \\ \dot{z}_j = -\mu z_j + \sqrt{2\mu} n_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N; \\ \text{граничные условия: } x_{j\pm N,i}(t) = x_{j,i}(t), \quad y_{j\pm N,i}(t) = y_{j,i}(t), \quad i = 1, 2. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь  $j$  — номер элемента в слое,  $i$  — номер слоя. Слои состоят из идентичных осцилляторов ФХН с диссипативной локальной связью внутри колец. Коэффициенты внутренней связи  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  для двух колец могут различаться. Все остальные параметры одинаковы. Осцилляторы

с одинаковыми номерами  $j$ , принадлежащие разным слоям, локально связаны. Сила межслойной связи характеризуется одним и тем же постоянным значением коэффициента связи  $k_0$ , к которому добавляются случайные компоненты  $kz_j(t)$ . В проведенных исследованиях полагается, что  $k_0 = 0$ , то есть постоянная компонента связи отсутствует. Случайные переменные  $z_j(t)$  описываются одномерными процессами Орнштейна–Уленбека с одинаковыми статистическими характеристиками, порождаемыми независимыми источниками гауссова белого шума  $n_j(t)$ . Независимые процессы  $z_j(t)$  имеют гауссово распределение со стационарным средним  $\langle z_j(t) \rangle \equiv 0$ . Таким образом, коэффициент связи, определяемый шумом, со временем меняет знак, становясь то положительным (притягивающая связь), то отрицательным (отталкивающая связь). Дисперсия процессов  $z_j(t)$  в стационарном режиме равна единице:  $D(z_j) \equiv 1$ , а корреляционная функция описывается спадающей экспонентой:

$$\Psi_{z_j}(\tau) = e^{-\mu|\tau|}, \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (2)$$

Соответственно, спектральная плотность мощности этих процессов имеет форму лоренциана

$$W_{z_j}(\omega) = \frac{4\mu}{\mu^2 + \omega^2}, \quad \omega > 0. \quad (3)$$

Время корреляции и ширина спектра на уровне половинной мощности определяются параметром  $\mu$ :  $\tau_{\text{кор}} = \mu^{-1}$ ;  $\Delta\omega_{1/2} = \mu$ . Важно отметить следующую особенность рассматриваемой модели цветного шума. Дисперсия всех нормированных источников равна единице, а с учетом множителя  $k$  она равна  $k^2$ . Так как дисперсия пропорциональна интегралу от спектральной плотности, то фиксированное значение дисперсии означает постоянство интегральной мощности шума вне зависимости от ширины спектра мощности. С ростом ширины спектра (с ростом параметра  $\mu$ ) интегральная мощность источников шума распределяется на все более широкий диапазон частот, и спектральная плотность в точке максимума в нуле и на других частотах уменьшается. При  $\mu \rightarrow \infty$  спектральная плотность стремится к нулю, что не позволяет рассмотреть предельный переход к белому шуму с конечной спектральной плотностью.

При проведении численного моделирования были зафиксированы следующие параметры системы (1):  $N = 100$  (количество элементов в слое ансамбля);  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $\varepsilon = 0.01$  (параметры осцилляторов, соответствующие возбуждому режиму);  $\sigma_1 = 4.5$  (коэффициент связи в первом слое);  $\sigma_2 = 4.5$  или  $\sigma_2 = 5.5$  (коэффициент связи во втором слое);  $k_0 = 0$  (постоянная составляющая коэффициента межслойной связи). Интенсивность шумовой компоненты межслойной связи  $k$  и параметр  $\mu$ , управляющий шириной спектра источников шума, рассматриваются как управляющие и меняются в ходе исследований.

Для установления исходных режимов в двух невзаимодействующих кольцах начальные условия задавались следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{j,1}(0) &= 2 \sin(2\pi j/N), & y_{j,1}(0) &= 2 \cos(2\pi j/N), \\ x_{j,2}(0) &= 2 \sin(2\pi j/N + \varphi), & y_{j,2}(0) &= 2 \cos(2\pi j/N + \varphi), & z_j(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Начальные условия (4) обеспечивают в обоих кольцах режим бегущей волны с длиной волны, равной длине системы (основная волновая мода). Параметр  $\varphi$  определяет фазовый сдвиг двух волн. При получении установившегося режима бегущих волн в двух невзаимодействующих кольцах параметр  $k$  полагается равным нулю. При этом шумовые переменные  $z_j$  не влияют на волновые процессы, однако интегрирование на времени установления волновых режимов обеспечивает также установление статистических характеристик источников шума. Мгновенные состояния осцилляторов и переменных шума в установившемся режиме при отсутствии связи между кольцами запоминались и затем использовались в качестве начальных условий при исследовании взаимодействия колец.

В работе исследуется эффект фазовой синхронизации волн возбуждения в двух идентичных слоях, а также эффективной частотно-фазовой синхронизации при внесении расстройки параметров внутрислойной связи. Для диагностики синхронизации волн в идентичных слоях рассчитывается величина, характеризующая степень идентичности (синфазности) пространственных структур, которую мы будем называть погрешностью синфазной синхронизации. Мгновенное значение погрешности синхронизации определяется, как

$$\delta_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( [x_{j,2}(t) - x_{j,1}(t)]^2 + [y_{j,2}(t) - y_{j,1}(t)]^2 \right). \quad (5)$$

Так как  $\delta_t$  может меняться во времени, рассчитывалось ее среднее значение

$$\delta = \langle \delta_t \rangle, \quad (6)$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по времени.

Для диагностики синхронизации частот колебаний (фазовых скоростей) рассчитываются средние периоды (межспайковые интервалы) колебаний осцилляторов (для всех осцилляторов в одном слое они одинаковы). Мгновенный период  $\tau_n$  есть время между двумя последовательными пересечениями в одном направлении значением переменной  $x$  уровня, принятого за порог зажигания (при расчетах выбиралось значение  $x_{th} = 1.5$ ). Средний период есть

$$T = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \tau_n, \quad (7)$$

где  $M$  — число последовательных пересечений в одном направлении уровня  $x_{th}$  на времени наблюдения. Средняя частота колебаний  $f$  есть величина, обратная среднему периоду. Даже если колебания являются периодическими, значения  $\tau_n$  могут различаться для различных  $n$ , поэтому применяется усреднение. Для диагностики синхронизации средних периодов и частот рассчитывалось отношение

$$\theta = \frac{T_2}{T_1} = \frac{f_1}{f_2}, \quad (8)$$

где индексы указывают номер слоя.

## 2. Синхронизация фаз бегущих волн в двух идентичных слоях

В двух невзаимодействующих слоях ( $k = k_0 = 0$ ) при выбранных значениях параметров и начальных условиях (4) устанавливались режимы бегущих волн. Скорости распространения волн (и, соответственно, частоты колебаний) были строго одинаковыми, но между волнами существовал постоянный сдвиг фаз. Установившиеся состояния двух невзаимодействующих слоев фиксировались и использовались в качестве начальных условий для дальнейших исследований. При исследовании межслойного взаимодействия система уравнений (1) сначала интегрировалась с выбранными начальными условиями (при  $k = k_0 = 0$ ) на времени  $t_0$ . Затем между слоями вводилась связь, которая в проведенных расчетах была полностью случайной (шумовой), то есть полагалось, что  $k_0 = 0$ ,  $k \neq 0$ . Система интегрировалась при наличии связи на времени установления  $t_k$ . Затем, при необходимости, производился расчет среднего значения погрешности синхронизации  $\delta$  на времени  $t_\delta$ . Времена установления  $t_0$  и  $t_k$  составляли, как правило, не менее 5000 единиц безразмерного времени системы (то есть  $5 \cdot 10^6$  шагов интегрирования). Время усреднения выбиралось равным 4000 безразмерных единиц.

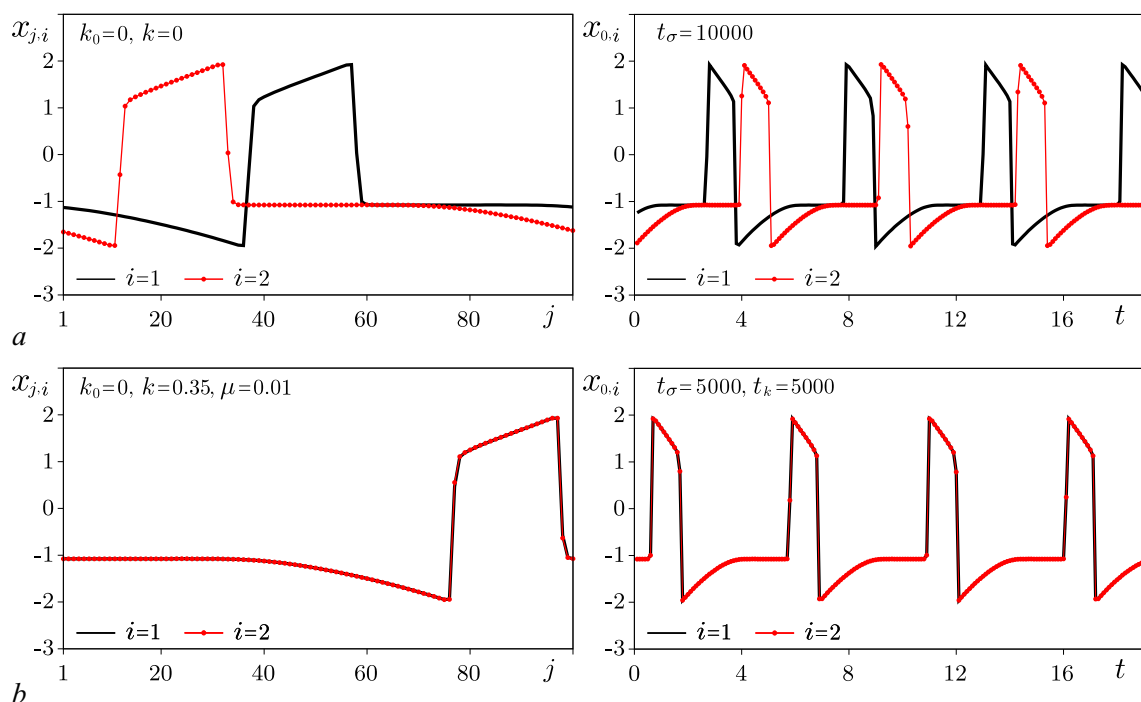


Рис. 1. Мгновенные профили бегущих волн (левый столбец) и колебания осцилляторов  $x_{0,i}$  (правый столбец) в двух идентичных слоях  $\sigma_1 = \sigma_2 = 4.5$ :  $a$  – при отсутствии межслойной связи  $k = 0$ ;  $b$  – при случайной связи  $k = 0.35$ ,  $\mu = 0.01$  (цвет онлайн)

Fig. 1. Snapshots of traveling waves (left column) and oscillations  $x_{0,i}$  (right column) in two identical rings  $\sigma_1 = \sigma_2 = 4.5$ :  $a$  – in the absence of interlayer coupling  $k = 0$ ;  $b$  – in case of random coupling  $k = 0.35$ ,  $\mu = 0.01$  (color online)

Мгновенные профили волн и колебания осцилляторов с одинаковым номером  $j = 0$  в кольцах в установившемся режиме при отсутствии взаимодействия приведены на рис. 1,  $a$ . Хорошо виден фазовый сдвиг колебаний и волновых профилей. При введении межслойной шумовой связи с интенсивностью  $k = 0.35$  и параметром  $\mu = 0.01$  после периода установления  $t_k$  наблюдается синхронизация мгновенных профилей волн и фаз колебаний всех осцилляторов с одинаковыми номерами в двух слоях. Соответствующий режим иллюстрирует рис. 1,  $b$ .

Более детальное исследование поведения двух слоев с шумовой связью показывает, что периодические колебания с постоянным сдвигом фазы между слоями, как правило, не устанавливаются, а наблюдаемый эффект синхронизации сильно зависит от времени наблюдения и реализации случайных процессов, обеспечивающих межслойную связь. Также существенную роль играет значение параметра  $\mu$ , определяющего спектрально-корреляционные свойства источников шума. Эти свойства шумовой синхронизации идентичных слоев проиллюстрированы на рис. 2.

На рис. 2,  $a$ ,  $b$  приведены зависимости мгновенного значения погрешности синхронизации (величина  $\delta_t$ ) от времени, полученные при  $k = 0.35$ ,  $\mu = 0.01$  для двух разных реализаций шума, обозначенных как noise 1 и noise 2. Необходимо пояснить, что при интегрировании стохастических дифференциальных уравнений (1) приращения состояний всех случайных источников шума  $n_j(t)$  на шаге интегрирования задаются с помощью последовательности случайных чисел, генерируемых специальной программой – генератором некоррелированных случайных чисел со стандартным гауссовым распределением. Та или иная реализация шума (точнее, набор реализаций всех источников  $n_j(t)$ ) определяется некоторым входным параметром этой программы (инициализирующей переменной). Источники шума при  $\mu = 0.01$  являются узкополосными низкочастотными и процессы взаимодействия элементов двух слоев будут «медленными». Приведенные графики

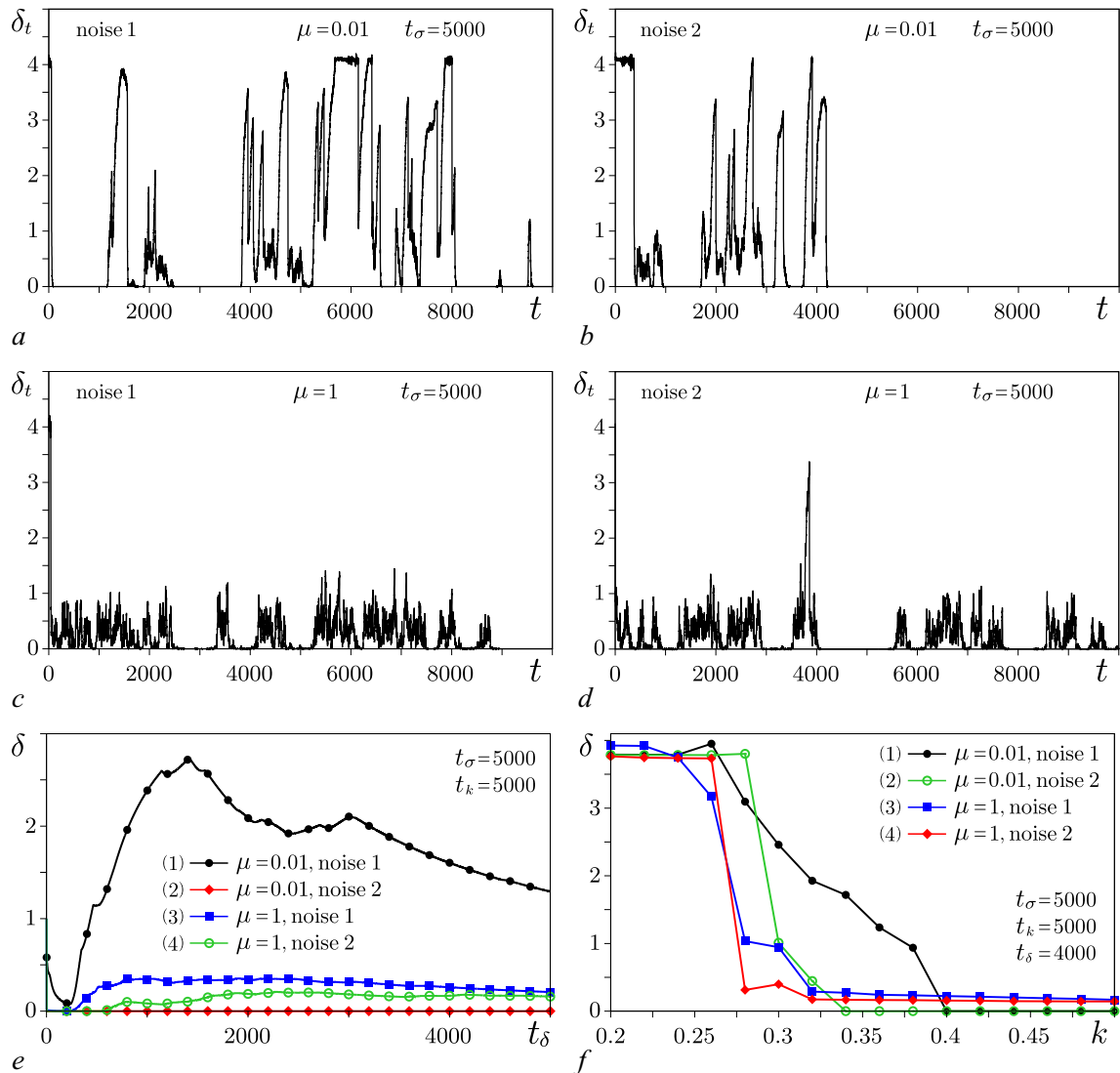


Рис. 2. Поведение погрешности синхронизации при различном выборе реализации шума: *a, b* – зависимости мгновенного значения погрешности синхронизации  $\delta_t$  от времени при  $k = 0.35$ ,  $\mu = 0.01$ ; *c, d* – зависимости  $\delta_t$  от времени при  $k = 0.35$ ,  $\mu = 1.0$ ; *e* – зависимости средней погрешности синхронизации  $\delta$  от времени усреднения при  $\mu = 0.01$ ,  $\mu = 1.0$  и фиксированном значении параметра  $k = 0.35$ ; *f* – зависимости величины  $\delta$  от параметра шумового взаимодействия  $k$ , полученные для двух реализаций шума при  $\mu = 0.01$ ,  $\mu = 1.0$  и фиксированных временах установления и усреднения (указаны на графиках) (цвет онлайн)

Fig. 2. Behavior of the synchronization error with different choice of noise realizations: *a, b* – dependences of the instantaneous value of the synchronization error  $\delta_t$  on time at  $k = 0.35$ ,  $\mu = 0.01$ ; *c, d* – time dependences of  $\delta_t$  at  $k = 0.35$ ,  $\mu = 1.0$ ; *e* – dependences of the average synchronization error  $\delta$  on the averaging time at  $\mu = 0.01$ ,  $\mu = 1.0$  and a fixed coupling parameter  $k = 0.35$ ; *f* – dependences of  $\delta$  on the coupling parameter  $k$  obtained for two noise realizations at  $\mu = 0.01$ ,  $\mu = 1.0$  and fixed settling and averaging times (shown on the graphs) (color online)

свидетельствуют о том, что постоянный сдвиг фаз между волнами в двух слоях на рассматриваемом времени наблюдения не устанавливается. Зависимости  $\delta_t$  от времени имеют вид процесса перемежаемости, что свидетельствует о сложном характере колебаний осцилляторов в двух слоях, вызванном действием шума. При этом могут наблюдаться длительные интервалы полностью синхронного поведения. Они сменяются интервалами, на которых  $\delta_t$  принимает большие значения. Конкретная последовательность состояний зависит от реализации шума. В силу длительности



интервалов с различным поведением, не удастся получить установившееся среднее значение погрешности синхронизации на приемлемых для численного исследования временах. Соответствующие графики зависимости  $\delta$  от времени усреднения приведены на рис. 2, *e* (кривые 1, 2). Время усреднения варьировалось от нуля и до 5000 безразмерных единиц. Для реализации шума noise 2 в любой интервал усреднения в этом диапазоне после времени установления ( $t_k = 5000$ ) не попадают отличные от нуля значения мгновенной погрешности синхронизации (см. рис. 2, *b*) и средняя погрешность строго равна нулю. Однако вывод о полной синхронизации может оказаться преждевременным. Возможно, с увеличением времени интегрирования сбоя синхронизации снова появится. Аналогичные зависимости  $\delta_t$  от времени при том же значении параметра связи  $k = 0.35$ , тех же реализациях шума, но при более широкополосном шуме с параметром  $\mu = 1.0$  приведены на рис. 2, *c, d*. Эти зависимости, так же как в предыдущем случае, показывают отсутствие установившегося режима с постоянным фазовым сдвигом волн. В отличие от узкополосного шума, при  $\mu = 1.0$  не наблюдаются длительные интервалы полной синхронизации слоев, однако сами значения  $\delta_t$  становятся существенно меньше. Усреднение погрешности синхронизации на временах порядка 4000...5000 безразмерных единиц дает практически установившееся и близкое для обеих реализаций шума значение  $\delta$  (кривые 3, 4 на рис. 2, *e*).

На рис. 2, *f* сравниваются зависимости значений средней погрешности  $\delta$  от интенсивности шумового взаимодействия  $k$ , полученные для двух реализаций шума при  $\mu = 0.01$  и  $\mu = 1.0$ . Время усреднения погрешности синхронизации выбрано равным  $t_\delta = 4000$  безразмерных единиц. По графикам можно примерно установить порог синхронизации. Он соответствует значению параметра  $k$ , при котором наблюдается резкое уменьшение величины  $\delta$ . Величина  $\delta$  может принимать нулевые значения (полная синхронизация) или выходить на уровень достаточно малых значений (частичная синхронизация). Для шума с параметром  $\mu = 1.0$  зависимости  $\delta(k)$ , полученные для двух реализаций шума, ведут себя сходным образом и пороговые значения  $k$  примерно совпадают (кривые 3, 4). Для узкополосного низкочастотного шума с  $\mu = 0.01$  зависимости  $\delta(k)$ , полученные для двух реализаций шума, сильно различаются (кривые 1, 2), причем, в случае реализации noise 1, погрешность синхронизации убывает с ростом  $k$  постепенно (кривая 1) и возникает сложность с определением порога синхронизации. Если же рассматривать полную синхронизацию и определять порог условием  $\delta_m = 0$ , то при  $\mu = 1.0$  полная синхронизация не наблюдается, а при  $\mu = 0.01$  порог существенно зависит от реализации шума.

Проблемы в определении порога синхронизации связаны с недостаточно большим временем усреднения  $t_\delta$ , однако медленный характер процессов (особенно при низкочастотном шуме) и большие затраты времени на интегрирование уравнений (1) не позволяют произвести усреднение на времени, достаточном для установления величины  $\delta$ . Тем не менее полученные графики  $\delta(k)$  показывают наличие эффекта синхронизации слоев (хотя бы частичной) и зависимость порога синхронизации от спектрально-корреляционных свойств цветного шума, задающего межслойную связь. На рис. 3, *a* приведены зависимости величины  $\delta$  от интенсивности шумовой модуляции связи  $k$ . При расчетах использовались одни и те же реализации источников шума  $z_j(t)$  (noise 1) и одни и те же времена установления режима и усреднения погрешности синхронизации. Можно заметить, что с ростом ширины спектра шума (параметра  $\mu$ ) сначала наблюдается некоторое уменьшение порога синхронизации, но затем, при очень широком спектре шума, порог растет и при  $\mu = 100$  синхронизация перестает наблюдаться в пределах изменения параметра  $k \leq 1$  (на графиках поведение при  $0.5 \leq k \leq 1$  не отражено). Причина зависимости порога синхронизации от ширины спектра шума поясняется на рис. 3, *b*). На нем приведены графики спектральной плотности источников шума  $z_j(t)$ , рассчитанные по формуле (3), для различных значений параметра  $\mu$ . Вертикальными пунктирными линиями показаны спектральные компоненты в спектре мощности колебаний осцилляторов в слоях без связи. Поскольку эти колебания периодические

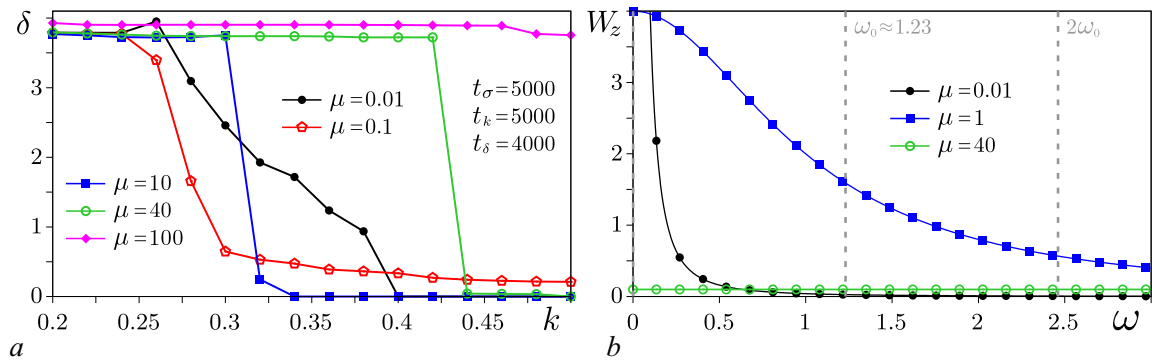


Рис. 3. Эффект синхронизации при различных значениях ширины спектра шума связи: *a* – зависимости погрешности синхронизации  $\delta$  бегущих волн от интенсивности шума связи  $k$  в двух идентичных кольцах  $\sigma_1 = \sigma_2 = 4.5$  при различных значениях параметра шума  $\mu$ ; *b* – графики спектральной плотности шума для различных значений параметра  $\mu$ , рассчитанные по формуле (3). При расчете всех зависимостей  $\delta(k)$  использовалась реализация шума noise 1. Времена установления и усреднения указаны на рисунке. Вертикальные пунктирные линии на панели (*b*) отмечают спектральные линии в спектре колебаний осцилляторов в режиме, проиллюстрированном на рис. 1 при  $k = 0$  (цвет онлайн)

Fig. 3. The effect of synchronization at different values of the spectrum width of the noise coupling: *a* – dependencies of the synchronization error  $\delta$  of travelling waves on the noise coupling intensity  $k$  in two identical rings  $\sigma_1 = \sigma_2 = 4.5$  at different values of noise parameter  $\mu$ ; *b* – graphs of noise spectral density for different values of parameter  $\mu$  calculated by the formula (3). When calculating all dependences  $\delta(k)$ , the noise 1 realization was used. The settling and averaging times are shown in the figure. The vertical dotted lines in panel (*b*) mark the spectral lines in the spectrum of oscillations of oscillators in the regime illustrated in fig. 1 at  $k = 0$  (color online)

(см. рис. 1, *a*), то их спектр является дискретным и спектральная плотность состоит из  $\delta$ -пиков на основной частоте  $\omega_0 = 1.23 \pm 0.001$  и её гармониках, а также на нулевой частоте, поскольку среднее значение колебаний отлично от нуля. При  $\mu = 0.01$  спектр шума сосредоточен на низких частотах, а в области основной частоты колебаний спектральная плотность шума очень мала. С ростом параметра  $\mu$  спектр шума становится более широким и спектральная плотность на частоте  $\omega_0$  несколько возрастает. Это приводит к более эффективному влиянию шумовой связи на поведение слоев. При дальнейшем увеличении параметра  $\mu$  увеличивается спектральная плотность шума на гармониках основной частоты  $\omega_0$ , но уменьшается на основной частоте и на более низких частотах. Это, по-видимому, приводит к росту порога синхронизации, и далее, при больших значениях  $\mu$ , синхронизация не возникает.

### 3. Синхронизация скоростей бегущих волн в двух кольцах с различными значениями коэффициентов связи элементов в кольце

Скорость бегущей волны возбуждения в кольце осцилляторов ФХН существенно зависит от коэффициента связи элементов кольца. Таким образом, задав во втором слое значение  $\sigma_2 \neq \sigma_1$  можно получить в каждом из слоев (при отсутствии взаимодействия между ними) бегущие волны, отличающиеся не только начальными фазами, но и скоростями. Соответственно, осцилляторы в двух слоях будут колебаться с различной частотой. В проведенных исследованиях выбирались значения  $\sigma_1 = 4.5$  или  $\sigma_2 = 5.5$ , что обеспечивало разность скоростей волновых процессов при отсутствии связи между слоями. При введении случайной связи наблюдался захват средних интерспайковых интервалов (и, соответственно, средних частот) колебаний осцилляторов. Было исследовано поведение средних интерспайковых интервалов (средних периодов колебаний) в двух слоях и их отношения  $\theta = T_2/T_1$  и погрешности синхронизации  $\delta_m$ . Как и прежде, связь осуществлялась только через случайные переменные ( $k_0 = 0$ ).

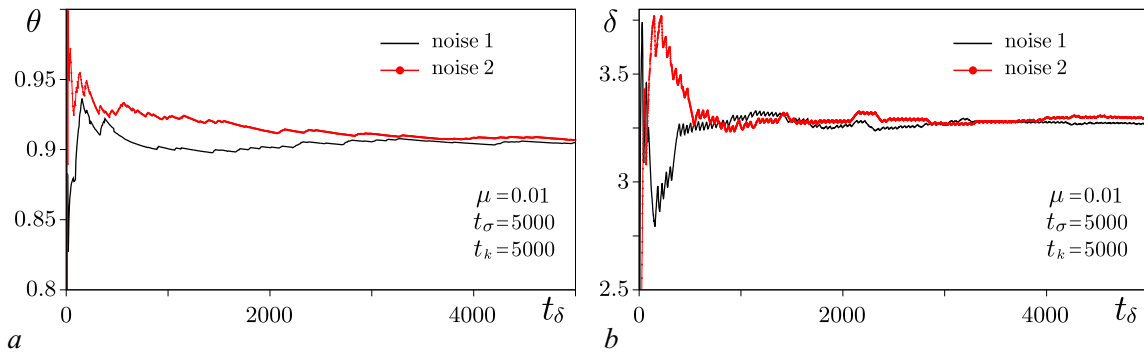


Рис. 4. Процесс установления усредненных характеристик синхронизации в неидентичных слоях с коэффициентами внутрислойной связи  $\sigma_1 = 4.5$ ,  $\sigma_2 = 5.5$  при значении параметров межслойной связи  $k = 0.35$ ,  $\mu = 0.01$  и двух различных реализациях шума:  $a$  – зависимости от времени усреднения  $t_\delta$  отношения средних периодов  $\theta = T_2/T_1$  и  $b$  – средней погрешности синхронизации  $\delta$ . Времена установления указаны на графиках (цвет онлайн)

Fig. 4. The process of establishing the average synchronization characteristics in non-identical layers with intralayer coupling coefficients  $\sigma_1 = 4.5$ ,  $\sigma_2 = 5.5$  for interlayer coupling parameters  $k = 0.35$ ,  $\mu = 0.01$  and two different noise realizations:  $a$  – dependence on averaging time  $t_\delta$  for the ratio of the average periods  $\theta = T_2/T_1$  and  $b$  – the average synchronization error  $\delta$ . Settling times are indicated on the graphs (color online)

На рис. 4 приведены примеры зависимостей отношения средних периодов колебаний  $\theta = T_2/T_1$  и погрешности синхронизации  $\delta$  от времени усреднения  $t_\delta$  для двух реализаций шума при фиксированных параметрах  $k = 0.35$  и  $\mu = 0.01$ . Можно видеть, что в данном случае установление средних значений даже при низкочастотном шуме связи происходит быстрее, чем в идентичных слоях. При  $t_\delta$  усредненные характеристики  $\theta$  и  $\delta$  можно считать практически установившимися, причем их стационарные значения в пределах точности расчетов не зависят от реализации шума.

Зависимости отношения средних периодов колебаний в двух слоях  $\theta = T_2/T_1$  и погрешности синхронизации  $\delta$  от интенсивности шума связи  $k$ , полученные для трех значений параметра  $\mu$ , приведены на рис. 5. Можно видеть, что при определенном (пороговом) значении интенсивности случайной связи  $k$  отношение средних периодов становится близким к единице (рис. 5,  $a$ ).

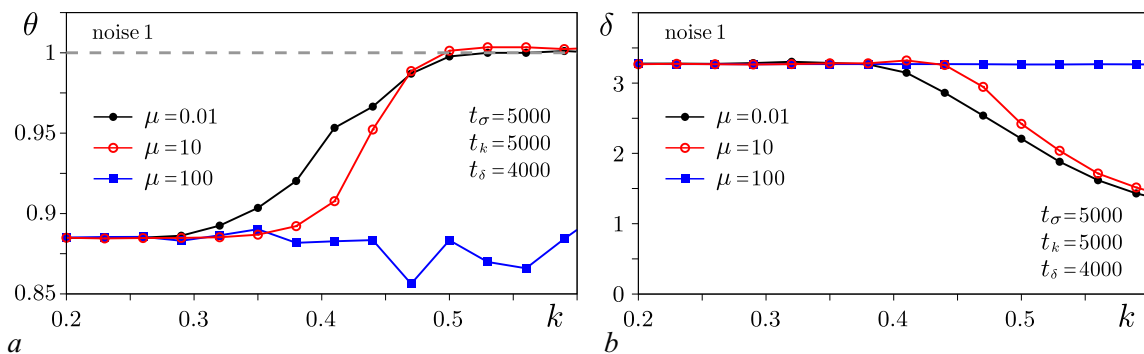


Рис. 5. Характеристики синхронизации в двух неидентичных слоях  $\sigma_1 = 4.5$ ,  $\sigma_2 = 5.5$  при различных значениях параметра шума  $\mu = 0.01, 10, 100$ :  $a$  – зависимости отношения средних периодов колебаний  $\theta = T_2/T_1$  и  $b$  – погрешности синхронизации  $\delta$  от коэффициента межслойной связи  $k$ . При расчетах использовалась одна реализация шума (noise 1). Времена установления и усреднения указаны на рисунке (цвет онлайн)

Fig. 5. Synchronization characteristics in two non-identical rings  $\sigma_1 = 4.5$ ,  $\sigma_2 = 5.5$  at different values of noise parameter  $\mu = 0.01, 10, 100$ :  $a$  – dependencies of the ratio of average oscillation periods  $T_2/T_1$  and  $b$  – synchronization errors  $\delta$  on the interlayer coupling coefficient  $k$ . In the calculations, one realization of noise (noise 1) was used. The settling and averaging times are shown in the figure (color online)

В целом, расчеты показывают, что синхронизация скоростей волн, средних периодов/средних частот колебаний наблюдается в достаточно широком диапазоне значений  $\mu$ . Можно отметить, что пороги синхронизации при  $\mu = 0.01$  и  $\mu = 10$  практически совпадают. Однако, если шум становится очень широкополосным ( $\mu = 100$ ), то синхронизация не наблюдается. Исчезновение эффекта синхронизации частот в случае широкополосного шума (так же как исчезновение синхронизации фаз волн в идентичных слоях) объясняется уменьшением спектральной плотности шума при расширении частотного диапазона и фиксированном значении дисперсии. Зависимости погрешности синхронизации  $\delta$  от интенсивности шума связи  $k$  показывают, что в случае частотной синхронизации величина  $\delta$  заметно уменьшается, но остается далекой от нуля (рис. 5, b). Таким образом, в исследованном диапазоне значений параметра  $k \leq 0.5$  в области синхронизации частот синфазная или близкая к ней синхронизация не наблюдается. Однако, возможно, она имеет место (хотя бы частично) при большей интенсивности случайной связи. На рис. 6, a приведены мгновенные профили волн и колебания осцилляторов с одинаковым номером  $j = 0$  в двух слоях в установившемся режиме при отсутствии взаимодействия. Несинхронность колебаний осцилляторов в двух слоях хорошо заметна на реализациях переменных  $x_{0,1}(t)$  и  $x_{0,2}(t)$  (правый столбец). При введении шумовой связи между слоями наблюдается синхронизация волновых скоростей и частот колебаний (рис. 6, b). При этом следует отметить, что колебания перестают быть строго периодическими и мгновенные интерспайковые интервалы в двух кольцах не вполне совпадают, что можно видеть на реализациях, приведенных справа. Синхронизация волновых скоростей, частот и интерспайковых интервалов колебаний наблюдается только в среднем и не зависит от выбора времени установления источников шума или инициализирующих переменных, задающих реализации шума.

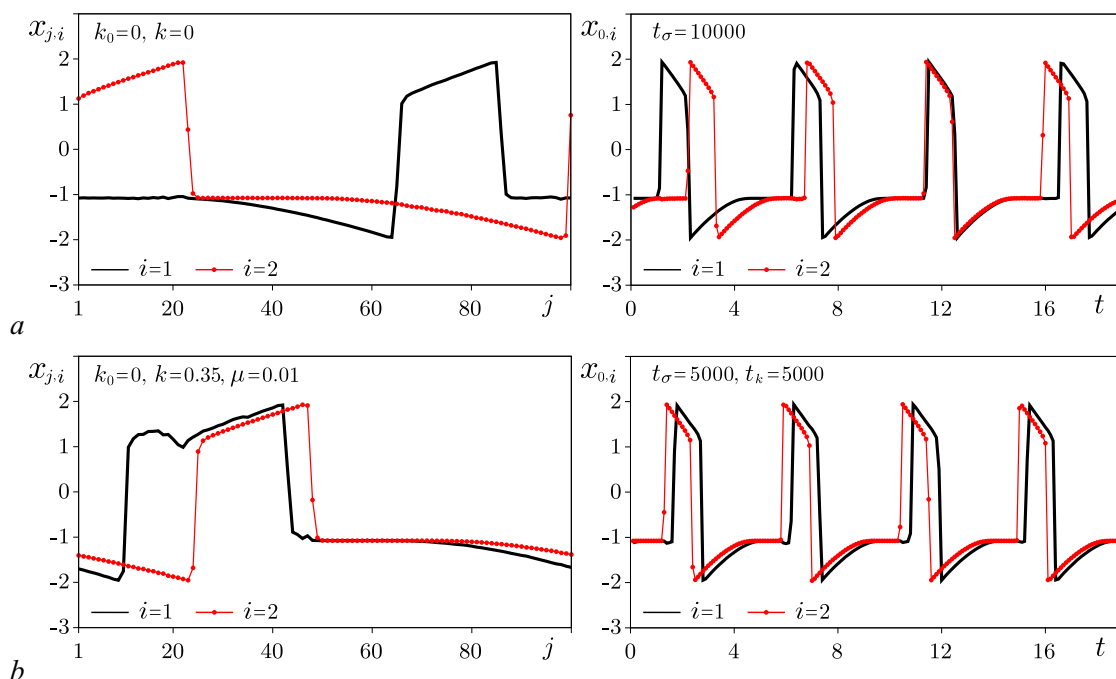


Рис. 6. Мгновенные профили бегущих волн (левый столбец) и колебания осцилляторов  $x_{0,i}$  (правый столбец) в двух неидентичных кольцах  $\sigma_1 = 4.5$ ,  $\sigma_2 = 5.5$ : a — при отсутствии межслойной связи  $k = 0$ ; b — при случайной связи  $k = 0.35$ ,  $\mu = 0.01$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Snapshots of traveling waves (left column) and oscillations  $x_{0,i}$  (right column) in two non-identical rings  $\sigma_1 = 4.5$ ,  $\sigma_2 = 5.5$ : a — in the absence of interlayer coupling  $k = 0$ ; b — in case of noisy coupling  $k = 0.35$ ,  $\mu = 0.01$  (color online)

## Заключение

Проведенные исследования позволяют сделать вывод о наличии эффектов частотной и фазовой (полной и частичной) синхронизации слоев в сети возбудимых осцилляторов ФитцХью–Нагумо в режиме бегущих волн при случайном характере интенсивностей межслойных взаимодействий осцилляторов, задаваемых независимыми источниками цветного гауссова шума. Важно отметить, что среднее значение шума связи для каждой пары взаимодействующих осцилляторов в установившемся режиме было выбрано равным нулю, то есть постоянная компонента связи отсутствовала. Тем не менее эффекты синхронизации слоев наблюдались как в случае идентичных слоев, так и при наличии различия в параметрах слоев. Кроме того, было показано, что при фиксированной интегральной мощности источников шума изменение спектрально-корреляционных свойств шума значительно влияет на эффекты синхронизации, которая перестает наблюдаться с увеличением ширины спектра шума. Такой эффект объясняется уменьшением спектральной плотности шума с расширением спектра. По-видимому, в случае модуляции межслойной связи белым шумом с определенной спектральной плотностью (интенсивностью) синхронизация также будет наблюдаться.

Был исследован процесс установления режима синхронизации в идентичных и неидентичных слоях. Показано, что этот процесс может быть очень длительным и иметь характер случайной перемежаемости, что особенно заметно в случае узкополосного низкочастотного шума связи. Постоянная разность фаз бегущих волн даже в идентичных слоях при этом не устанавливается, а стационарное значение средней ошибки синхронизации не достигается даже при очень больших временах усреднения. Такое поведение системы препятствует определению порога синхронизации, который оказывается зависящим от времен установления и усреднения, а также от выбора реализации шума. Однако эти эффекты уменьшаются с ростом ширины спектра шума и слабо проявляются в случае неидентичности взаимодействующих слоев.

## Список литературы

1. *Horsthemke W., Lefever R.* Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984. 322 p. DOI: 10.1007/3-540-36852-3.
2. *Graham R.* Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // In: Garrido L. (eds) Fluctuations and Stochastic Phenomena in Condensed Matter. Lecture Notes in Physics, vol. 268. Berlin, Heidelberg: Springer, 1987. P. 1–34. DOI: 10.1007/3-540-17206-8\_1.
3. *Schimansky-Geier L., Herzog H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // Journal of Statistical Physics. 1993. Vol. 70, no. 1–2. P. 141–147. DOI: 10.1007/BF01053959.
4. *Arnold L.* Random dynamical systems // In: Johnson R. (eds) Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1609. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995. P. 1–43. DOI: 10.1007/BFb0095238.
5. *Moss F.* Stochastic resonance: From the ice ages to the monkey's ear // In: Weiss G. H. (eds) Contemporary Problems in Statistical Physics. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 1994. P. 205–253. DOI: 10.1137/1.9781611971552.ch5.
6. *Kabashima S., Kawakubo T.* Observation of a noise-induced phase transition in a parametric oscillator // Phys. Lett. A. 1979. Vol. 70, no. 5–6. P. 375–376. DOI: 10.1016/0375-9601(79)90335-9.
7. *Pikovsky A. S., Kurths J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, no. 5. P. 775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775.
8. *Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН. 1999. Т. 169, № 1. С. 7–38. DOI: 10.3367/UFNr.0169.199901c.0007.
9. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. Vol. 39, no. 1. P. 72–82. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.01.128.

10. *García-Ojalvo J., Sancho J. M.* Noise in Spatially Extended Systems. New York: Springer, 1999. 307 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1536-3.
11. *Hou Z., Yang L., Xiaobin Z., Xin H.* Noise induced pattern transition and spatiotemporal stochastic resonance // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, no. 14. P. 2854–2857. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.2854.
12. *Zimmermann M. G., Toral R., Piro O., San Miguel M.* Stochastic spatiotemporal intermittency and noise-induced transition to an absorbing phase // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, no. 17. P. 3612–3615. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3612.
13. *Perc M.* Noise-induced spatial periodicity in excitable chemical media // *Chemical Physics Letters.* 2005. Vol. 410, no. 1–3. P. 49–53. DOI: 10.1016/j.cplett.2005.05.042.
14. *Cao F. J., Wood K., Lindenberg K.* Noise-induced phase transitions in field-dependent relaxational dynamics: The Gaussian ansatz // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76, no. 5. P. 051111. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.051111.
15. *Слепнев А. В., Шепелев И. А., Вадивасова Т. Е.* Эффекты шумового воздействия на активную среду с периодическими граничными условиями // *Письма в ЖТФ.* 2014. Т. 40, № 2. С. 30–36.
16. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961. 560 с.
17. *Neiman A. B., Russell D. F.* Synchronization of noise-induced bursts in noncoupled sensory neurons // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88, no. 13. P. 138103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.138103.
18. *Ritt J.* Evaluation of entrainment of a nonlinear neural oscillator to white noise // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68, no. 4. P. 041915. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.041915.
19. *Goldobin D. S., Pikovsky A.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, no. 4. P. 045201. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.045201.
20. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 354, no. 5–6. P. 423–427. DOI: 10.1016/j.physleta.2006.01.079.
21. *Nagai K. H., Kori H.* Noise-induced synchronization of a large population of globally coupled nonidentical oscillators // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 81, no. 6. P. 065202. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.065202.
22. *Dolmatova A. V., Goldobin D. S., Pikovsky A.* Synchronization of coupled active rotators by common noise // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, no. 6. P. 062204. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062204.
23. *Neiman A.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, no. 4. P. 3484–3487. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.3484.
24. *Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, no. 23. P. 4157–4160. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.4157.
25. *Lindner J. F., Meadows B. K., Ditto W. L., Inghiosa M. E., Bulsara A. R.* Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, no. 1. P. 3–6. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.3.
26. *Anishchenko V. S., Neiman A. B.* Stochastic synchronization // In: Schimansky-Geier L., Pöschel T. (eds) *Stochastic Dynamics. Lecture Notes in Physics*, vol. 484. Berlin, Heidelberg: Springer, 1997. P. 154–166. DOI: 10.1007/BFb0105607.
27. *Han S. K., Yim T. G., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V.* Interacting coherence resonance oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, no. 9. P. 1771–1774. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.1771.
28. *Neiman A., Schimansky-Geier L., Cornell-Bell A., Moss F.* Noise-enhanced phase synchronization in excitable media // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, no. 23. P. 4896–4899. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.4896.
29. *Challenger J. D., McKane A. J.* Synchronization of stochastic oscillators in biochemical systems // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88, no. 1. P. 012107. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.012107.

30. *Semenova N., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E.* Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 117, no. 1. P. 014102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102.
31. *Vadivasova T. E., Slepnev A. V., Zakharova A.* Control of inter-layer synchronization by multiplexing noise // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 2020. Vol. 30, no. 9. P. 091101. DOI: 10.1063/5.0023071.
32. *Rybalova E. V., Vadivasova T. E., Strelkova G. I., Zakharova A.* Multiplexing noise induces synchronization in multilayer networks // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2022. Vol. 163. P. 112521. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112521.
33. *Nikishina N. N., Rybalova E. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E.* Destruction of cluster structures in an ensemble of chaotic maps with noise-modulated nonlocal coupling // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2022. Vol. 27, no. 2. P. 242–251. DOI: 10.1134/S1560354722020083.
34. *Doiron B., Rinzel J., Reyes A.* Stochastic synchronization in finite size spiking networks // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 74, no. 3. P. 030903. DOI: 10.1103/PhysRevE.74.030903.
35. *Patel A., Kosko B.* Stochastic resonance in continuous and spiking neuron models with levy noise // *IEEE Transactions on Neural Networks.* 2008. Vol. 19, no. 12. P. 1993–2008. DOI: 10.1109/TNN.2008.2005610.
36. *Ozer M., Perc M., Uzuntarla M.* Stochastic resonance on Newman–Watts networks of Hodgkin–Huxley neurons with local periodic driving // *Phys. Lett. A.* 2009. Vol. 373, no. 10. P. 964–968. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.01.034.
37. *He Z.-Y., Zhou Y.-R.* Vibrational and stochastic resonance in the FitzHugh–Nagumo neural model with multiplicative and additive noise // *Chinese Physics Letters.* 2011. Vol. 28, no. 11. P. 110505. DOI: 10.1088/0256-307X/28/11/110505.
38. *Bressloff P. C., Lai Y. M.* Stochastic synchronization of neuronal populations with intrinsic and extrinsic noise // *The Journal of Mathematical Neuroscience.* 2011. Vol. 1, no. 1. P. 2. DOI: 10.1186/2190-8567-1-2.
39. *Kilpatrick Z. P.* Stochastic synchronization of neural activity waves // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91, no. 4. P. 040701. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.040701.
40. *Sharma S. K., Malik M. Z., Brojen Singh R. K.* Stochastic synchronization of neurons: the topological impacts // *Bioinformatics.* 2018. Vol. 14, no. 9. P. 504–510. DOI: 10.6026/97320630014504.
41. *Yilmaz E., Ozer M., Baysal V., Perc M.* Autapse-induced multiple coherence resonance in single neurons and neuronal networks // *Scientific Reports.* 2016. Vol. 6, no. 1. P. 30914. DOI: 10.1038/srep30914.
42. *Yamakou M. E., Jost J.* Control of coherence resonance by self-induced stochastic resonance in a multiplex neural network // *Phys. Rev. E.* 2019. Vol. 100, no. 2. P. 022313. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.022313.
43. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical Journal.* 1961. Vol. 1, no. 6. P. 445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
44. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proceedings of the IRE.* 1962. Vol. 50, no. 10. P. 2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.

## References

1. Horsthemke W, Lefever R. *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology.* Berlin, Heidelberg: Springer; 1984. 322 p. DOI: 10.1007/3-540-36852-3.
2. Graham R. *Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems.* In: Garrido L, editor. *Fluctuations and Stochastic Phenomena in Condensed Matter. Lecture Notes in Physics,* vol. 268. Berlin, Heidelberg: Springer; 1987. P. 1–34. DOI: 10.1007/3-540-17206-8\_1.

3. Schimansky-Geier L, Herzel H. Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator. *Journal of Statistical Physics*. 1993;70(1–2):141–147. DOI: 10.1007/BF01053959.
4. Arnold L. Random dynamical systems. In: Johnson R, editor. *Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1609. Berlin, Heidelberg: Springer; 1995. P. 1–43. DOI: 10.1007/BFb0095238.
5. Moss F. Stochastic resonance: From the ice ages to the monkey’s ear. In: Weiss GH, editor. *Contemporary Problems in Statistical Physics*. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM; 1994. P. 205–253. DOI: 10.1137/1.9781611971552.ch5.
6. Kabashima S, Kawakubo T. Observation of a noise-induced phase transition in a parametric oscillator. *Phys. Lett. A*. 1979;70(5–6):375–376. DOI: 10.1016/0375-9601(79)90335-9.
7. Pikovsky AS, Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Phys. Rev. Lett*. 1997;78(5):775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775.
8. Anishchenko VS, Neiman AB, Moss F, Shimansky-Geier L. Stochastic resonance: noise-enhanced order. *Phys. Usp*. 1999;42(1):7–36. DOI: 10.1070/PU1999v042n01ABEH000444.
9. Bashkirtseva I, Ryashko L, Schurz H. Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009;39(1):72–82. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.01.128.
10. García-Ojalvo J, Sancho JM. *Noise in Spatially Extended Systems*. New York: Springer; 1999. 307 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1536-3.
11. Hou Z, Yang L, Xiaobin Z, Xin H. Noise induced pattern transition and spatiotemporal stochastic resonance. *Phys. Rev. Lett*. 1998;81(14):2854–2857. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.2854.
12. Zimmermann MG, Toral R, Piro O, San Miguel M. Stochastic spatiotemporal intermittency and noise-induced transition to an absorbing phase. *Phys. Rev. Lett*. 2000;85(17):3612–3615. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.3612.
13. Perc M. Noise-induced spatial periodicity in excitable chemical media. *Chemical Physics Letters*. 2005;410(1–3):49–53. DOI: 10.1016/j.cplett.2005.05.042.
14. Cao FJ, Wood K, Lindenberg K. Noise-induced phase transitions in field-dependent relaxational dynamics: The Gaussian ansatz. *Phys. Rev. E*. 2007;76(5):051111. DOI: 10.1103/PhysRevE.76.051111.
15. Slepnev AV, Shepelev IA, Vadivasova TE. Noise-induced effects in an active medium with periodic boundary conditions. *Tech. Phys. Lett*. 2014;40(1):62–64. DOI: 10.1134/S1063785014010271.
16. Stratonovich RL. *Selected Questions of the Theory of Fluctuations in Radio Engineering*. Moscow: Sovetskoe Radio; 1961. 560 p. (in Russian).
17. Neiman AB, Russell DF. Synchronization of noise-induced bursts in noncoupled sensory neurons. *Phys. Rev. Lett*. 2002;88(13):138103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.138103.
18. Ritt J. Evaluation of entrainment of a nonlinear neural oscillator to white noise. *Phys. Rev. E*. 2003;68(4):041915. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.041915.
19. Goldobin DS, Pikovsky A. Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise. *Phys. Rev. E*. 2005;71(4):045201. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.045201.
20. Hramov AE, Koronovskii AA, Moskalenko OI. Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? *Phys. Lett. A*. 2006;354(5–6):423–427. DOI: 10.1016/j.physleta.2006.01.079.
21. Nagai KH, Kori H. Noise-induced synchronization of a large population of globally coupled nonidentical oscillators. *Phys. Rev. E*. 2010;81(6):065202. DOI: 10.1103/PhysRevE.81.065202.
22. Dolmatova AV, Goldobin DS, Pikovsky A. Synchronization of coupled active rotators by common noise. *Phys. Rev. E*. 2017;96(6):062204. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062204.
23. Neiman A. Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems. *Phys. Rev. E*. 1994;49(4):3484–3487. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.3484.
24. Shulgin B, Neiman A, Anishchenko V. Mean switching frequency locking in stochastic bistable



- systems driven by a periodic force. *Phys. Rev. Lett.* 1995;75(23):4157–4160. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.4157.
25. Lindner JF, Meadows BK, Ditto WL, Inghiosa ME, Bulsara AR. Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization. *Phys. Rev. Lett.* 1995;75(1):3–6. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.3.
  26. Anishchenko VS, Neiman AB. Stochastic synchronization. In: Schimansky-Geier L, Pöschel T, editors. *Stochastic Dynamics. Lecture Notes in Physics*, vol. 484. Berlin, Heidelberg: Springer; 1997. P. 154–166. DOI: 10.1007/BFb0105607.
  27. Han SK, Yim TG, Postnov DE, Sosnovtseva OV. Interacting coherence resonance oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1999;83(9):1771–1774. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.1771.
  28. Neiman A, Schimansky-Geier L, Cornell-Bell A, Moss F. Noise-enhanced phase synchronization in excitable media. *Phys. Rev. Lett.* 1999;83(23):4896–4899. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.4896.
  29. Challenger JD, McKane AJ. Synchronization of stochastic oscillators in biochemical systems. *Phys. Rev. E.* 2013;88(1):012107. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.012107.
  30. Semenova N, Zakharova A, Anishchenko V, Schöll E. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements. *Phys. Rev. Lett.* 2016;117(1):014102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102.
  31. Vadivasova TE, Slepnev AV, Zakharova A. Control of inter-layer synchronization by multiplexing noise. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 2020;30(9):091101. DOI: 10.1063/5.0023071.
  32. Rybalova EV, Vadivasova TE, Strelkova GI, Zakharova A. Multiplexing noise induces synchronization in multilayer networks. *Chaos, Solitons & Fractals.* 2022;163:112521. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112521.
  33. Nikishina NN, Rybalova EV, Strelkova GI, Vadivasova TE. Destruction of cluster structures in an ensemble of chaotic maps with noise-modulated nonlocal coupling. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2022;27(2):242–251. DOI: 10.1134/S1560354722020083.
  34. Doiron B, Rinzel J, Reyes A. Stochastic synchronization in finite size spiking networks. *Phys. Rev. E.* 2006;74(3):030903. DOI: 10.1103/PhysRevE.74.030903.
  35. Patel A, Kosko B. Stochastic resonance in continuous and spiking neuron models with levy noise. *IEEE Transactions on Neural Networks.* 2008;19(12):1993–2008. DOI: 10.1109/TNN.2008.2005610.
  36. Ozer M, Perc M, Uzuntarla M. Stochastic resonance on Newman–Watts networks of Hodgkin–Huxley neurons with local periodic driving. *Phys. Lett. A.* 2009;373(10):964–968. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.01.034.
  37. He ZY, Zhou YR. Vibrational and stochastic resonance in the FitzHugh–Nagumo neural model with multiplicative and additive noise. *Chinese Physics Letters.* 2011;28(11):110505. DOI: 10.1088/0256-307X/28/11/110505.
  38. Bressloff PC, Lai YM. Stochastic synchronization of neuronal populations with intrinsic and extrinsic noise. *The Journal of Mathematical Neuroscience.* 2011;1(1):2. DOI: 10.1186/2190-8567-1-2.
  39. Kilpatrick ZP. Stochastic synchronization of neural activity waves. *Phys. Rev. E.* 2015;91(4):040701. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.040701.
  40. Sharma SK, Malik MZ, Brojen Singh RK. Stochastic synchronization of neurons: the topological impacts. *Bioinformatics.* 2018;14(9):504–510. DOI: 10.6026/97320630014504.
  41. Yilmaz E, Ozer M, Baysal V, Perc M. Autapse-induced multiple coherence resonance in single neurons and neuronal networks. *Scientific Reports.* 2016;6(1):30914. DOI: 10.1038/srep30914.
  42. Yamakou ME, Jost J. Control of coherence resonance by self-induced stochastic resonance in a multiplex neural network. *Phys. Rev. E.* 2019;100(2):022313. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.022313.
  43. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal.* 1961;1(6):445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
  44. Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE.* 1962;50(10):2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.



*Рамазанов Ибадулла Рамзесович* — родился в 1996 году. Окончил с отличием магистратуру Института физики Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика». Аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики. С 2020 года работает инженером на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета. Научные интересы: ансамбли связанных осцилляторов, параметрические системы, синхронизация, теория устойчивости.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: ibadulla.ramazanov@yandex.ru  
ORCID: 0000-0001-6521-7313  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1143282  
ScopusID: 57783407500



*Корнеев Иван Александрович* — родился в селе Еруслан Саратовской области (1992), окончил Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2017). Имеет диплом бакалавра по направлению «Радиофизика» и диплом магистра по направлению «Радиофизика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2021). Ассистент кафедры радиофизики и нелинейной динамики и заведующий учебной лабораторией радиофизики. Область научных интересов: математическое моделирование, численный и физический эксперимент, синхронизация, мемристивные системы.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: ivankorneew@yandex.ru  
ORCID: 0000-0003-1716-5170  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1131734  
ScopusID: 56736395900



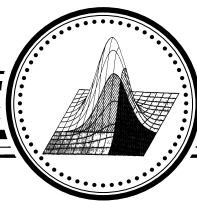
*Слепнев Андрей Вячеславович* — родился в Саратове (1987), окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электротехника» (2009). Получил степень магистра физики по направлению «Физика» (СГУ, 2011). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2014). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики, заместитель руководителя по организационной работе Научного медицинского центра, заведующий научной лабораторией «Умного сна», ответственный за научную работу в Институте физики. Научные интересы: динамика распределенных систем, формирование пространственных структур, влияние регулярного и случайного воздействия на динамику нелинейных систем, нейронные сети.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: a.v.slepnev@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-0273-6479  
AuthorID (eLibrary.Ru): 620884  
ScopusID: 56034673600



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* — родилась в Саратове (1958). Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981). Доктор физико-математических наук. В настоящее время — профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики и статистической радиофизики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических и стохастических осцилляторов, волновые структуры в активных средах, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, влияние шума и стохастические эффекты в нелинейных системах и др. Автор более 130 публикаций в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: vadivasovate@yandex.ru  
ORCID: 0000-0002-8081-2820  
AuthorID (eLibrary.Ru): 34840  
ScopusID: 6701738949



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Научная статья  
УДК 517.957, 537.611, 51-73

DOI: 10.18500/0869-6632-003011  
EDN: NAJQIF

### Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми притягивающими примесями

Е. Г. Екомасов<sup>1</sup>, К. Ю. Самсонов<sup>2</sup>✉, А. М. Гумеров<sup>1</sup>, Р. В. Кудрявцев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

<sup>2</sup>Тюменский государственный университет, Россия

E-mail: ekomasoveg@gmail.com, ✉k.y.samsonov@gmail.com,  
article@solitonlab.com, xc.89@mail.ru

Поступила в редакцию 27.04.2022, принята к публикации 3.07.2022,  
опубликована онлайн 5.10.2022, опубликована 30.11.2022

**Аннотация.** Цель исследования — с помощью аналитических и численных методов рассмотреть задачу о структуре и динамике связанных локализованных нелинейных волн в модели синус-Гордона с «примесями» (или пространственной неоднородностью периодического потенциала). **Методы.** С помощью аналитического метода коллективных переменных для случая произвольного числа одинаковых точечных примесей, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, получена система дифференциальных уравнений для амплитуд локализованных волн как функций от времени, приближенно описывающая поведение рассматриваемой колебательной системы. Для численного решения модифицированного уравнения синус-Гордона применён численный метод конечных разностей с явной схемой интегрирования. Частотный анализ колебаний локализованных волн, рассчитанных численно, выполнялся с помощью дискретного преобразования Фурье. **Результаты.** Для описания связанных колебаний нелинейных волн, локализованных на трёх одинаковых примесях, получена система дифференциальных уравнений для трёх гармонических осцилляторов со связью упругого типа. Решения этой системы уравнений для частот связанных колебаний хорошо аппроксимируют результаты прямого численного моделирования нелинейной системы. **Заключение.** Показано, что связанные колебания нелинейных волн, локализованных на трёх одинаковых примесях, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, представляют собой сумму трёх гармонических колебаний: синфазного, синфазно-антифазного и антифазного типа. Проведён анализ влияния параметров системы и начальных условий на частоту и вид связанных колебаний.

**Ключевые слова:** уравнение синус-Гордона, кинк, солитон, бризер, метод коллективных координат, примесь.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20–31–90048.

**Для цитирования:** Екомасов Е. Г., Самсонов К. Ю., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В. Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми притягивающими примесями // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011. EDN: NAJQIF

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three attracting impurities

E. G. Ekomasov<sup>1</sup>, K. Yu. Samsonov<sup>2</sup>✉, A. M. Gumerov<sup>1</sup>, R. V. Kudryavtsev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bashkir state university, Ufa, Russia

<sup>2</sup>University of Tyumen, Russia

E-mail: ekomasoveg@gmail.com, ✉k.y.samsonov@gmail.com, article@solitonlab.com, xc.89@mail.ru

Received 27.04.2022, accepted 3.07.2022, available online 5.10.2022, published 30.11.2022

**Abstract.** Purpose of this work is to use analytical and numerical methods to consider the problem of the structure and dynamics of coupled localized nonlinear waves in the sine-Gordon model with “impurities” (or spatial inhomogeneity of the periodic potential). *Methods.* Using the analytical method of collective coordinates for the case of the arbitrary number the same point impurities on the same distance each other, differential equation system was got for localized waves amplitudes as the functions on time. We used the finite difference method with explicit scheme for the numerical solution of the modified sine-Gordon equation. We used a discrete Fourier transform to perform a frequency analysis of the oscillations of localized waves calculate numerically. *Results.* We found of the differential equation system for three harmonic oscillators with the elastic connection for describe related oscillations of nonlinear waves localized on the three same impurity. The solutions obtained from this system of equations for the frequencies of related oscillation well approximate the results of direct numerical modeling of a nonlinear system. *Conclusion.* In the article shows that the related oscillation of nonlinear waves localized on three identical impurities located at the same distance from each other represent the sum of three harmonic oscillations: in-phase, in-phase-antiphase and antiphase type. The analysis of the influence of system parameters and initial conditions on the frequency and type of associated oscillations is carried out.

**Keywords:** sine-Gordon equation, kink, soliton, breather, the method of collective coordinates, impurity.

**Acknowledgements.** This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 20-31-90048.

**For citation:** Ekomasov EG, Samsonov KYu, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three attracting impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(6):749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Исследование нелинейных волновых процессов позволило сделать ряд фундаментальных открытий [1–3]. Были найдены решения нелинейных дифференциальных уравнений, которые описывают уединённые волны, сохраняющие свою форму и скорость во времени, в том числе при взаимодействии друг с другом — солитоны. Одним из интенсивно изучаемых нелинейных дифференциальных уравнений является уравнение синус-Гордона (УСГ) [2–5]. Данное уравнение описывает волновые процессы в самых разнообразных областях естествознания: геологии, молекулярной биологии, физике, космологии. Например, в физике конденсированного состояния оно применимо при описании динамики волн намагниченности в ферромагнитных кристаллах, движения дислокаций в кристаллах, процессов в джозефсоновских сверхпроводящих контактах, распространения волн зарядовой плотности в одномерных органических проводниках, распространения электромагнитных волн в сверхрешетке на основе графена, динамики ансамбля взаимодействующих дислокаций в линейном дефекте электроконвективной структуры жидкого кристалла [4–8]. Будучи нелинейным уравнением в частных производных, УСГ является полностью интегрируемым.

Найдены различные точные решения УСГ типа кинка, солитона, бризера и некоторые другие решения более сложного мультисолитонного типа [2–4, 9, 10]. Нахождение новых решений УСГ и исследование их свойств и взаимодействий является актуальной задачей теории нелинейных волн. Обычно для использования в реальных физических моделях требуется модификация УСГ, например, путем добавления дополнительных слагаемых. Эти слагаемые могут описывать

внешнюю силу, диссипацию, неоднородность параметров среды и др. Хотя получаемое в результате модифицированное уравнение синус-Гордона (МУСГ) уже не имеет точных аналитических решений, разработан и широко применяется ряд аналитических методов (например, теория возмущений для солитонов или метод коллективных координат [2, 5, 11]). С помощью данных методов исследован широкий спектр различных задач. Например, исследована задача динамики кинков, солитонов и бризеров под действием внешней силы различного вида (зависящей от времени и пространственных переменных) [12, 13].

Много работ посвящено изучению влияния пространственной модуляции периодического потенциала (или примеси) на динамику солитонов УСГ [5, 14–30]. Модель синус-Гордона с примесями применима для описания, например, случая многослойного ферромагнетика [31–34]. Пространственная модуляция периодического потенциала часто моделируется в виде дельта функции или в других специальных видах. Возбуждение локализованной на примеси волны (примесной моды) в результате рассеяния кинка приводит к значительному изменению его динамики [5, 19, 20, 24–28]. Структура и свойства локализованных нелинейных волн, возбужденных на одной и двух примесях, были проанализированы в работах [19, 21, 25, 28, 29]. Было показано, что притягивающая примесь может быть использована для возбуждения мультисолитонов УСГ. В случае, когда на двух примесях возбуждаются локализованные примесные волны (четырёхкинковые мультисолитоны), аналитически показано, что их колебания можно описать системой двух гармонических осцилляторов со связью упругого типа. Данная модель качественно описывает результаты численного моделирования (как для точечных, так и для протяженных примесей). Случай двух примесей дает большое разнообразие новых мультисолитонных решений и динамических эффектов по сравнению со случаем одной примеси. Можно ожидать еще большего разнообразия решений и эффектов при наличии трёх и более примесей в системе. В данной работе исследуется связанная динамика нелинейных локализованных волн на трёх одинаковых точечных примесях.

## 1. Основные уравнения и результаты аналитических расчетов

Рассмотрим безразмерное УСГ в модели с  $N$  одинаковыми точечными примесями, находящимися на расстоянии  $d$  друг от друга, следующего вида:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u - \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \delta(x - x_k) \sin u = 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_k = \varepsilon$ ,  $x_k = kd$  для всех  $k = 1..N$ . В уравнении (1)  $u = u(x, t)$ , пространственная модуляция периодического потенциала УСГ учитывается добавлением точечных примесей вида  $\varepsilon \delta(x)$ , где  $\varepsilon$  — константа,  $\delta(x)$  — дельта функция Дирака. Это уравнение, например, может описывать динамику волн намагниченности в мультислойном одноосном ферромагнетике [5, 32, 33, 35] с неоднородной по координате константой магнитной анизотропии. Тогда функция  $u = u(x, t)$  определяет двойной угол между вектором намагниченности в данной точке в данный момент времени и направлением вектора намагниченности в домене, координата  $x$  будет нормирована на  $\delta_0$ , где  $\delta_0$  — ширина статической блоховской доменной границы, а время  $t$  нормировано на  $\delta_0/c$ , где  $c$  — предельная уокеровская скорость стационарного движения [33, 35]. Наличие таких неоднородностей магнитной анизотропии оказывает существенное влияние на динамику доменных границ и может приводить к образованию различного рода локализованных магнитных неоднородностей [31–35].

Функция Лагранжа, соответствующая уравнению (1), имеет вид

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 + \cos u - 1 + \sum_{k=1}^N \delta(x - x_k) (\varepsilon_k - \varepsilon_k \cos u) \right] dx. \quad (2)$$

Вначале рассмотрим аналитическое решение уравнения (1), описывающее колебания амплитуды локализованных на примесях волн, используя метод коллективных переменных [2, 5]. Метод является вариационным, основан на выделении коллективных координат и построении усредненного лагранжиана [2, 5]. При использовании этого метода осуществляется переход от непрерывного поля  $u = u(x, t)$  к конечному набору функций  $f(t)$ , зависящих только от времени. При этом  $u$  аппроксимируется анзацем — суммой решений из локализованных волн, содержащих характеризующие состояние волн функции от времени, называемые коллективными переменными. Анзац будем брать в виде суммы  $N$  примесных мод:

$$u_a = \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N a_n(t) e^{\frac{-\varepsilon n |x-x_n|}{2}}, \quad (3)$$

где  $a_n(t)$  — амплитуды примесных мод в момент времени  $t$  на  $n$ -й примеси. В рамках рассматриваемого приближения амплитуды примесных мод и параметр  $\varepsilon$  будем считать достаточно малыми, так что  $u_a \ll 1$ . Анзац (3) далее подставляется в лагранжиан (2). В рамках нашего приближения нелинейный член лагранжиана (2) в виде  $\cos u$  можно разложить в ряд Тейлора до членов второго порядка. После взятия интегралов, аналогично исследованным ранее случаям с  $N = 1$  и  $N = 2$  [2, 5, 28, 34], получаем новую эффективную функцию Лагранжа, являющуюся функцией от коллективных переменных  $a_n(t)$ . Подстановкой эффективной функции Лагранжа в уравнения Лагранжа–Эйлера, после взятия производных, можно получить  $N$  дифференциальных уравнений для  $N$  коллективных переменных  $a_n(t)$  следующего вида:

$$\sum_{n=1}^N \left\{ [\ddot{a}_n + a_n] E_{ln+} + a_n \frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{\varepsilon}{2} E_{ln-} - \sum_{k=1}^N e_{nk} e_{lk} \right] \right\} = 0, \quad (4)$$

где

$$e_{nl} = e^{\frac{-\varepsilon |l-n|d}{2}} = e_d^{|l-n|}, \quad E_{ln\pm} = E_{nl\pm} = \left( \frac{1}{\varepsilon} \pm \frac{|l-n|d}{2} \right) e_d^{|l-n|} = E_{|l-n|\pm}, \quad l = 1..N. \quad (5)$$

Далее рассмотрим возможные решения уравнения (4) для случая  $N = 3$ . Из уравнения (4), взяв  $l = 1$ ,  $l = 2$  и  $l = 3$ , можно получить три дифференциальных уравнения для трёх коллективных переменных  $a_{1,2,3}(t)$  следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\ddot{a}_1 + a_1)}{\varepsilon} + (\ddot{a}_2 + a_2)E_{1+} + (\ddot{a}_3 + a_3)E_{2+} + \varepsilon/2[-a_1(1/2 + e_d^2 + e_d^4) + \\ \quad + a_2(\varepsilon E_{1-}/2 - 2e_d - e_d^3) + a_3(\varepsilon E_{2-}/2 - 3e_d^2)] = 0, \\ (\ddot{a}_1 + a_1)E_{1+} + (\ddot{a}_2 + a_2)/\varepsilon + (\ddot{a}_3 + a_3)E_{1+} + \varepsilon/2[a_1(\varepsilon E_{1-}/2 - 2e_d - e_d^3) - \\ \quad - a_2(1/2 + 2e_d^2) + a_3(\varepsilon E_{1-}/2 - e_d^3 - 2e_d)] = 0, \\ (\ddot{a}_1 + a_1)E_{2+} + (\ddot{a}_2 + a_2)E_{1+} + (\ddot{a}_3 + a_3)/\varepsilon + \varepsilon/2[a_1(\varepsilon E_{2-}/2 - 3e_d^2) + \\ \quad + a_2(\varepsilon E_{1-}/2 - e_d^3 - 2e_d) - a_3(1/2 + e_d^4 + e_d^2)] = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

где

$$e_d = e^{\frac{-\varepsilon d}{2}}, \quad E_{k\pm} = (1/\varepsilon \pm kd/2)e_d^k. \quad (7)$$

Приведём их к более удобному для решения виду, оставив в каждом из уравнений только одно ускорение  $\ddot{a}(t)$ . Для этого вычтем из умноженного на  $[1 - \varepsilon^2 E_{1+}^2]$  первого уравнения (6) умноженное на  $\varepsilon E_{1+}[1 - \varepsilon E_{2+}]$  второе уравнение (6). Затем в полученном уравнении вынесем и вставим выражение  $[\ddot{a}_3 + a_3]$ , полученное из третьего уравнения (6). Далее вынесем и избавимся

от выражения  $[\ddot{a}_2 + a_2]$ , а также перегруппируем слагаемые. Повторив аналогичные алгебраические преобразования для двух других уравнений (6), получим:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + a_1\omega_1^2 + a_2k_{12} + a_3k_{13} = 0, \\ \ddot{a}_2 + a_2\omega_2^2 + (a_1 + a_3)k_{21} = 0, \\ \ddot{a}_3 + a_3\omega_1^2 + a_1k_{13} + a_2k_{12} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3 d e_d^2 / 4}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2} \left[ 1 + e_d^2 + \frac{\varepsilon d (e_d^2 - 1) e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d) e_d^2} \right], \\ \omega_2^2 &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3 d (1 - e_d^2) e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2}, \\ k_{12} &= \frac{\varepsilon^2 [(1 + \varepsilon d) e_d^2 - 1] e_d / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2}, \\ k_{13} &= \frac{\varepsilon^2 e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2} \left[ \varepsilon d (1 + e_d^2) / 2 + e_d^2 - 1 + \frac{\varepsilon^2 d^2 (1 - e_d^2) e_d^2 / 4}{1 - (1 + \varepsilon d) e_d^2} \right], \\ k_{21} &= \frac{\varepsilon^2 (\varepsilon d e_d^2 / 2 - 1) (1 - e_d^2) e_d / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2}, \\ e_d &= e^{-\frac{\varepsilon d}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Случай не взаимодействующих примесных мод, соответствующий уже изученному ранее случаю одной примеси [5], получим, найдя пределы выражений (9) при  $d \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{d \rightarrow \infty} e_d = 0, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \omega_1^2 = \lim_{d \rightarrow \infty} \omega_2^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} k_{12} = \lim_{d \rightarrow \infty} k_{13} = \lim_{d \rightarrow \infty} k_{21} = 0. \quad (10)$$

Отметим, что в исследованном ранее случае двух примесей [21, 28] удалось получить приближённые линейные динамические уравнения для амплитуд примесных мод, которые являются уравнениями колебательной системы с двумя степенями свободы (двух связанных осцилляторов). Можно ожидать, что подобные линейные динамические уравнения можно получить и для случая произвольного числа примесей. Приближённые линейные динамические уравнения для амплитуд примесных мод в нашем случае являются уравнениями колебательной системы с тремя степенями свободы (или трёх связанных осцилляторов). Их решение представляет собой сумму трёх гармонических колебаний вида [36]:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\ a_2(t) &= \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\ a_3(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $a_{01}$ ,  $a_{02}$ ,  $a_{03}$  — константы, определяемые из начальных условий, а

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2}^2 &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + k_{13} \mp \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2}, \\ \eta_{21} &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - k_{13} - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2k_{12}}, \\ \eta_{12} &= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13} + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{4k_{12}}, \\ \Omega_3^2 &= \omega_1^2 - k_{13}. \end{aligned} \quad (12)$$

При  $d \rightarrow \infty$ , используя (9), имеем:

$$\Omega_{1,2,3}^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \eta_{21} = \sqrt{2}, \quad \eta_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (13)$$

Заметим, что первая из формул (13) описывает частоту примесной моды для одиночной примеси [5]. В рассматриваемом случае введением замены  $y_1 = a_1 + a_3$ ,  $y_2 = a_1 - a_3$  уравнения (8) приводятся к системе двух связанных осцилляторов относительно  $a_2$  и  $y_1$  (рассмотренного ранее [28, 34]) и несвязанного с ними осциллятора, описываемого функцией  $y_2$ . Поэтому решения полученной системы являются, в каком-то смысле, комбинацией рассмотренных ранее решений уравнений для системы с одиночной локальной неоднородностью и системы с двумя локальными неоднородностями. Так же можно перейти к нормальным или главным координатам [1, 36], каждая из которых колеблется с одной частотой:

$$\begin{cases} \frac{a_3(t) + a_1(t) - 2a_2(t)\eta_{12}}{2(1 - \eta_{12}\eta_{21})} = a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) = \phi_1, \\ \frac{2a_2(t) - (a_3(t) + a_1(t))\eta_{21}}{2(1 - \eta_{12}\eta_{21})} = a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) = \phi_2, \\ \frac{a_3(t) - a_1(t)}{2} = a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) = \phi_3. \end{cases} \quad (14)$$

На рис. 1 представлены зависимости  $\Omega_{1,2,3}$  от  $d$ , построенные по формулам (12) при значениях  $\varepsilon$ , равных 0.5 и 0.3333. При больших расстояниях между примесями все частоты стремятся к предельному значению (13). При уменьшении расстояния между примесями величина  $\Omega_1$  уменьшается. Причём, чем больше  $\varepsilon$ , тем быстрее это происходит и тем меньше становится  $\Omega_1$ . Частоты  $\Omega_{2,3}$  при уменьшении  $d$  увеличиваются, стремясь к бесконечности, причём  $\Omega_2$  увеличивается быстрее, и разница в её поведении при различных  $\varepsilon$  не очень заметна.  $\Omega_3$  увеличивается медленнее и её график находится между графиками  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , а зависимость от  $\varepsilon$  выражена сильнее, чем у  $\Omega_2$ .

Начальные фазы колебаний далее для простоты будем считать нулевыми  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ . Путем задания разных соотношений начальных амплитуд локализованных волн можно при данном наборе параметров  $\varepsilon$  и  $d$  получить разные типы колебаний. Рассмотрим для примера случай  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ . Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  от времени при возбуждении только одного гармонического колебания представлены на рис. 2. В этом случае все примесные моды

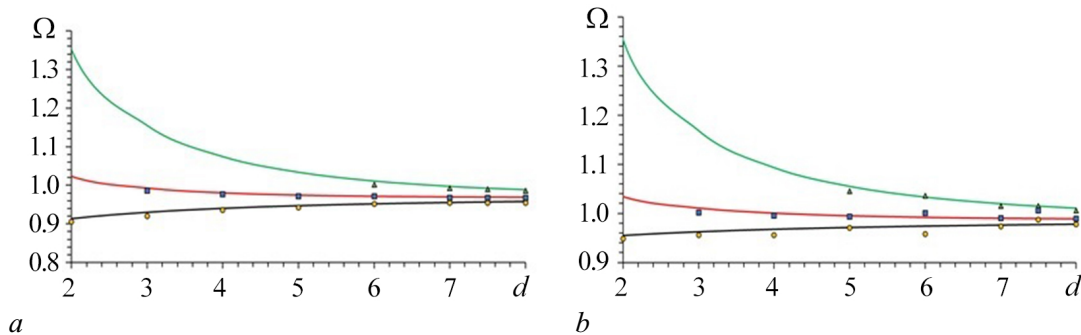


Рис. 1. Зависимости частот  $\Omega_{1,2,3}$  от  $d$  (нижняя, верхняя, средняя линии). Аналитическое решение (12) — сплошные линии, численное решение (1) — точки.  $\varepsilon = 0.5$  (a);  $\varepsilon = 0.3333$  (b)

Fig. 1. Dependences of the  $\Omega_{1,2,3}$  frequency on the  $d$  value (lower, upper, middle lines). The analytical solution (12) — solid lines, the numerical solution (1) — points.  $\varepsilon = 0.5$  (a);  $\varepsilon = 0.3333$  (b)



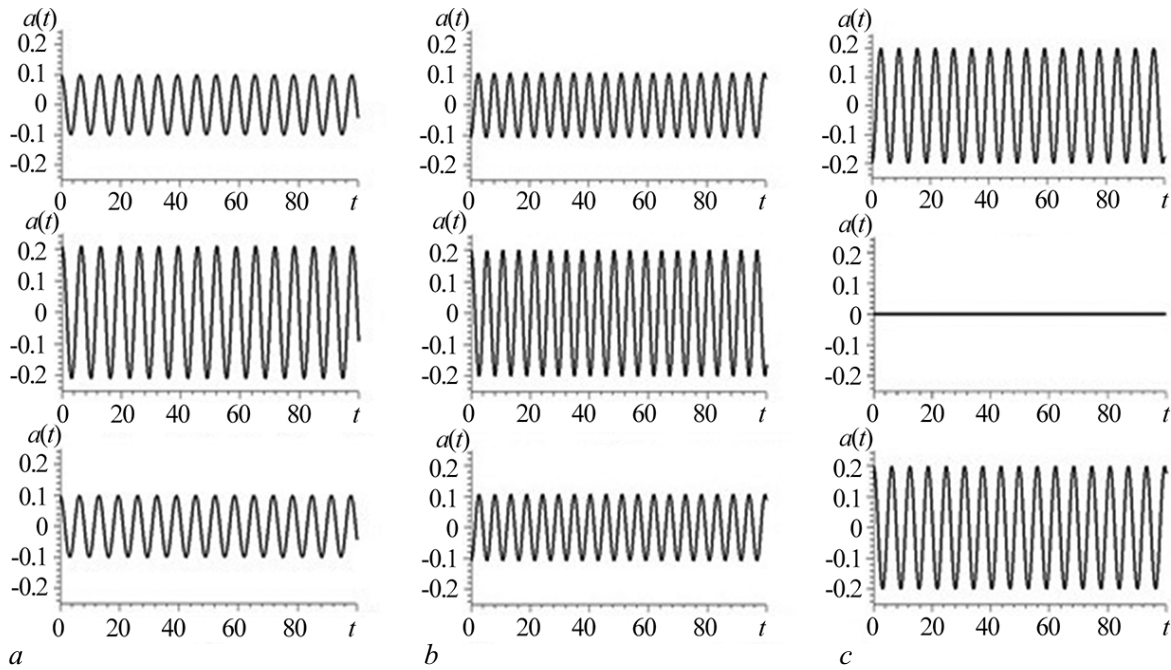


Рис. 2. Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  (верхний, средний, нижний графики) от времени при  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ .  $a_1(0) = 0.1$ ,  $a_2(0) = 0.2098$ ,  $a_3(0) = 0.1$  (a);  $a_1(0) = -0.1075$ ,  $a_2(0) = 0.2$ ,  $a_3(0) = -0.1075$  (b);  $a_1(0) = -0.2$ ,  $a_2(0) = 0$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (c)

Fig. 2. Dependences of the  $a_{1,2,3}$  amplitudes (upper, middle, lower figures) on time at  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ .  $a_1(0) = 0.1$ ,  $a_2(0) = 0.2098$ ,  $a_3(0) = 0.1$  (a);  $a_1(0) = -0.1075$ ,  $a_2(0) = 0.2$ ,  $a_3(0) = -0.1075$  (b);  $a_1(0) = -0.2$ ,  $a_2(0) = 0$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (c)

колеблются с одинаковой частотой. Первый тип колебаний является синфазным — все примесные моды колеблются в одинаковой фазе (рис. 2, a). Характерно, что частота  $\Omega_1$  этого типа колебаний при уменьшении параметра  $d$  уменьшается (см. рис. 1). Второй тип колебаний — синфазно-антифазный — первая и третья примесные моды колеблются в одинаковой фазе, а вторая между ними — в противоположной им (рис. 2, b). Его частота  $\Omega_2$  при уменьшении расстояния  $d$  увеличивается. Третий тип колебаний антифазный — первая и третья примесные моды колеблются в противоположных фазах, а вторая между ними не возбуждается (рис. 2, c). Его частота  $\Omega_3$  при уменьшении  $d$  увеличивается не так быстро, как  $\Omega_2$ . При этом амплитуды колебаний первой и третьей примесных мод во всех случаях одинаковы.

Далее, варьируя начальные условия, рассмотрим возможные более сложные случаи связанных колебаний примесных мод. Если  $a_{02} = 0$ , то выражения (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 a_1(t) &= 2a_{01} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_3)t + \theta_1 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_3)t + \theta_1 - \theta_3}{2}\right) - (a_{03} + a_{01}) \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\
 a_2(t) &= \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1), \\
 a_3(t) &= 2a_{01} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_3)t + \theta_1 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_3)t + \theta_1 - \theta_3}{2}\right) + (a_{03} - a_{01}) \cos(\Omega_3 t + \theta_3),
 \end{aligned} \tag{15}$$

то есть колебания на первой и третьей примесях имеют вид биений с частотой биений, равной  $|\Omega_1 - \Omega_3|$ , и амплитудами, меняющимися от  $|a_{01} - a_{03}|$  до  $|a_{01} + a_{03}|$ , на второй примеси колебания гармонические. Считая начальные фазы по-прежнему нулевыми  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ , возьмём начальные условия, при которых амплитуда при биениях уменьшается до нуля. Например, при

$a_{02} = 0$  возьмём  $a_{03} = a_{01}$ , тогда начальные условия будут  $a_1(0) = a_{01} - a_{03} = 0$ ,  $a_2(0) = \eta_{21}a_{01} \approx 2.098a_{01}$ ,  $a_3(0) = a_{01} + a_{03} = 2a_{01}$ . Амплитуды будут меняться от  $|a_{01} - a_{03}| = 0$  до  $|a_{01} + a_{03}| = 2|a_{01}|$  на первой и третьей примесях, и  $|\eta_{21}a_{01}| \approx 2.098|a_{01}|$  на второй примеси (рис. 3, а).

Если  $a_{03} = 0$ , то выражения (11) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 a_1(t) = a_3(t) &= 2a_{01} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)t + \theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)t + \theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \\
 &\quad + (\eta_{12}a_{02} - a_{01}) \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\
 a_2(t) &= 2a_{02} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)t + \theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)t + \theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \\
 &\quad + (\eta_{21}a_{01} - a_{02}) \cos(\Omega_1 t + \theta_1),
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

то есть колебания имеют вид биений с частотой биений, равной  $|\Omega_1 - \Omega_2|$ , и амплитудами, меняющимися от  $|a_{01} - \eta_{12}a_{02}|$  до  $|a_{01} + \eta_{12}a_{02}|$  на первой и третьей примесях и от  $|a_{02} - \eta_{21}a_{01}|$  до  $|a_{02} + \eta_{21}a_{01}|$  на второй примеси. Например, при  $a_{03} = 0$  возьмём  $a_{01} = \eta_{12}a_{02}$ , тогда начальные условия будут  $a_1(0) = a_3(0) = a_{01} + \eta_{12}a_{02} = 2\eta_{12}a_{02} \approx -1.075a_{02}$ ,  $a_2(0) = a_{02} + \eta_{21}a_{01} = (1 + \eta_{21}\eta_{12})a_{02} \approx -0.1277a_{02}$ . Амплитуды будут меняться от  $|a_{01} - \eta_{12}a_{02}| = 0$  до  $|a_{01} + \eta_{12}a_{02}| = 2|\eta_{12}a_{02}| \approx 1.075|a_{02}|$  на первой и третьей примесях и от  $|a_{02} - \eta_{21}a_{01}| = |(1 - \eta_{21}\eta_{12})a_{02}| \approx 2.128|a_{02}|$  до  $|a_{02} + \eta_{21}a_{01}| = |(1 + \eta_{21}\eta_{12})a_{02}| \approx 0.1277|a_{02}|$  на второй примеси (рис. 3, б).

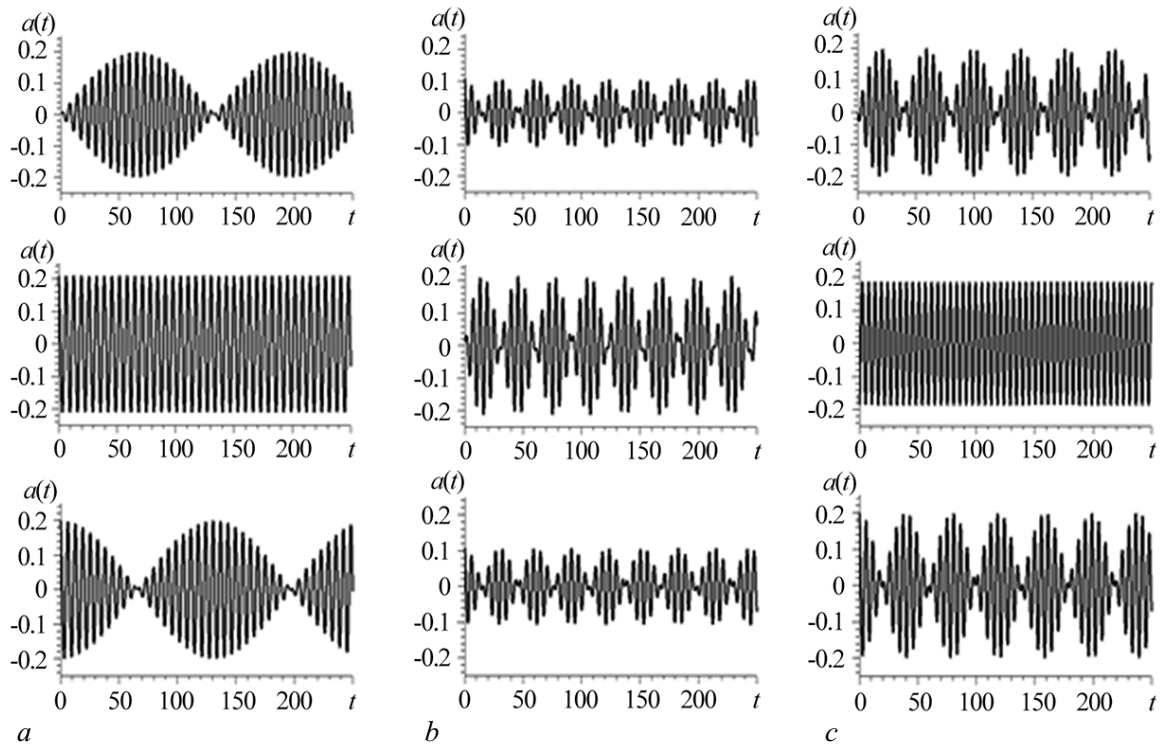


Рис. 3. Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  (верхний, средний, нижний графики) от времени при  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ . Значения амплитуд при  $t = 0$ :  $a_1(0) = 0$ ,  $a_2(0) = 0.2098$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (а);  $a_1(0) = 0.1075$ ,  $a_2(0) = 0.01277$ ,  $a_3(0) = 0.1075$  (б);  $a_1(0) = 0$ ,  $a_2(0) = -0.186$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (с)

Fig. 3. Dependences of the  $a_{1,2,3}$  amplitudes (upper, middle, lower figures) on time at  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ . Amplitude values at  $t = 0$ :  $a_1(0) = 0$ ,  $a_2(0) = 0.2098$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (a);  $a_1(0) = 0.1075$ ,  $a_2(0) = 0.01277$ ,  $a_3(0) = 0.1075$  (b);  $a_1(0) = 0$ ,  $a_2(0) = -0.186$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (c)

Если  $a_{01} = 0$ , то выражение (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 a_1(t) &= (a_{03} + \eta_{12}a_{02}) \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - \\
 &\quad - 2a_{03} \cos\left(\frac{(\Omega_2 + \Omega_3)t + \theta_2 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_2 - \Omega_3)t + \theta_2 - \theta_3}{2}\right), \\
 a_2(t) &= a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\
 a_3(t) &= (\eta_{12}a_{02} - a_{03}) \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + \\
 &\quad + 2a_{03} \cos\left(\frac{(\Omega_2 + \Omega_3)t + \theta_2 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_2 - \Omega_3)t + \theta_2 - \theta_3}{2}\right),
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

то есть колебания на первой и третьей примесях имеют вид биений с частотой  $|\Omega_3 - \Omega_2|$  и амплитудами, меняющимися от  $|a_{03} - \eta_{12}a_{02}|$  до  $|a_{03} + \eta_{12}a_{02}|$ , на второй примеси колебания гармонические. Например, при  $a_{01} = 0$  возьмём  $a_{02} = a_{03}/\eta_{12}$ , тогда начальные условия будут  $a_1(0) = \eta_{12}a_{02} - a_{03} = 0$ ,  $a_2(0) = a_{02} = a_{03}/\eta_{12} \approx -1.860a_{03}$ ,  $a_3(0) = \eta_{12}a_{02} + a_{03} = 2a_{03}$ . Амплитуды будут меняться от  $|a_{03} - \eta_{12}a_{02}| = 0$  до  $|a_{03} + \eta_{12}a_{02}| = 2|a_{03}|$  на первой и третьей примесях, и  $|a_{02}| = |a_{03}/\eta_{12}| \approx 1.860|a_{03}|$  на второй примеси (рис. 3, с). Колебания в этих случаях аналогичны колебаниям на двух одинаковых примесях, рассмотренных ранее [28].

Рассмотрим далее случай связанных колебаний примесных мод при наличии всех трёх гармоник (рис. 4). Колебания второй примесной моды для рассмотренного случая  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$  сохраняют свой характер как на рис. 3, b, так как в них участвуют только две гармоники. Форма колебаний первой и третьей примесных мод из-за добавления третьей гармоники усложняется.

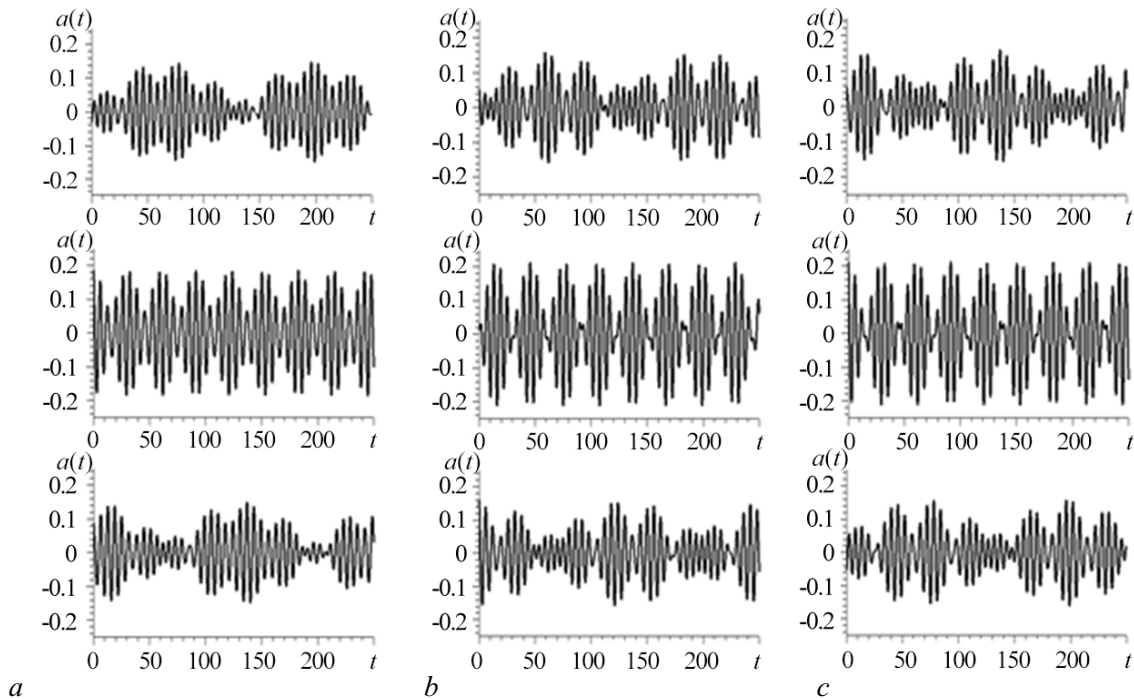


Рис. 4. Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  (верхний, средний, нижний графики) от времени при  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$  и значениях амплитуд при  $t = 0$ :  $a_1(0) = -0.03225$ ,  $a_2(0) = 0.18588$ ,  $a_3(0) = 0.08775$  (a);  $a_1(0) = 0.05375$ ,  $a_2(0) = 0.01277$ ,  $a_3(0) = 0.16125$  (b);  $a_1(0) = 0.05375$ ,  $a_2(0) = 0.21277$ ,  $a_3(0) = -0.05375$  (c)

Fig. 4. Dependences of the  $a_{1,2,3}$  amplitudes (upper, middle, lower figures) on time at  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ . Amplitude values at  $t = 0$ :  $a_1(0) = -0.03225$ ,  $a_2(0) = 0.18588$ ,  $a_3(0) = 0.08775$  (a);  $a_1(0) = 0.05375$ ,  $a_2(0) = 0.01277$ ,  $a_3(0) = 0.16125$  (b);  $a_1(0) = 0.05375$ ,  $a_2(0) = 0.21277$ ,  $a_3(0) = -0.05375$  (c)

## 2. Результаты численных расчетов

Для того чтобы проанализировать, в каких пределах аналитическое решение, полученное с помощью теории возмущений, применимо для описания решений нелинейного дифференциального уравнения (1), необходимо его решить с помощью численных методов. На сегодняшний день разработано достаточно большое количество методов численного решения подобных уравнений [3, 4, 11, 25, 27]. Воспользуемся методом конечных разностей. Выберем трёхслойную явную схему решения, с аппроксимацией производных на пятиточечном шаблоне типа «крест», который применялся ранее для более простых модификаций УСГ (см., например, [19, 21]). Данная численная схема второго порядка аппроксимации по  $\Delta x$  и  $\tau$ , где  $\Delta x$  — шаг по координате,  $\tau$  — шаг по времени. Она обладает условной устойчивостью  $(\tau/\Delta x) \leq 1$ . В нашем случае схема является «одношаговой» [21, 27, 37], использует сравнительно небольшое количество обращений к памяти и обладает потенциалом для оптимизации вычислительного алгоритма.

Частотный анализ колебаний локализованных волн, которые рассчитываются численно, выполняется с помощью дискретного преобразования Фурье. Для его расчёта используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). Этот алгоритм обладает хорошей производительностью,

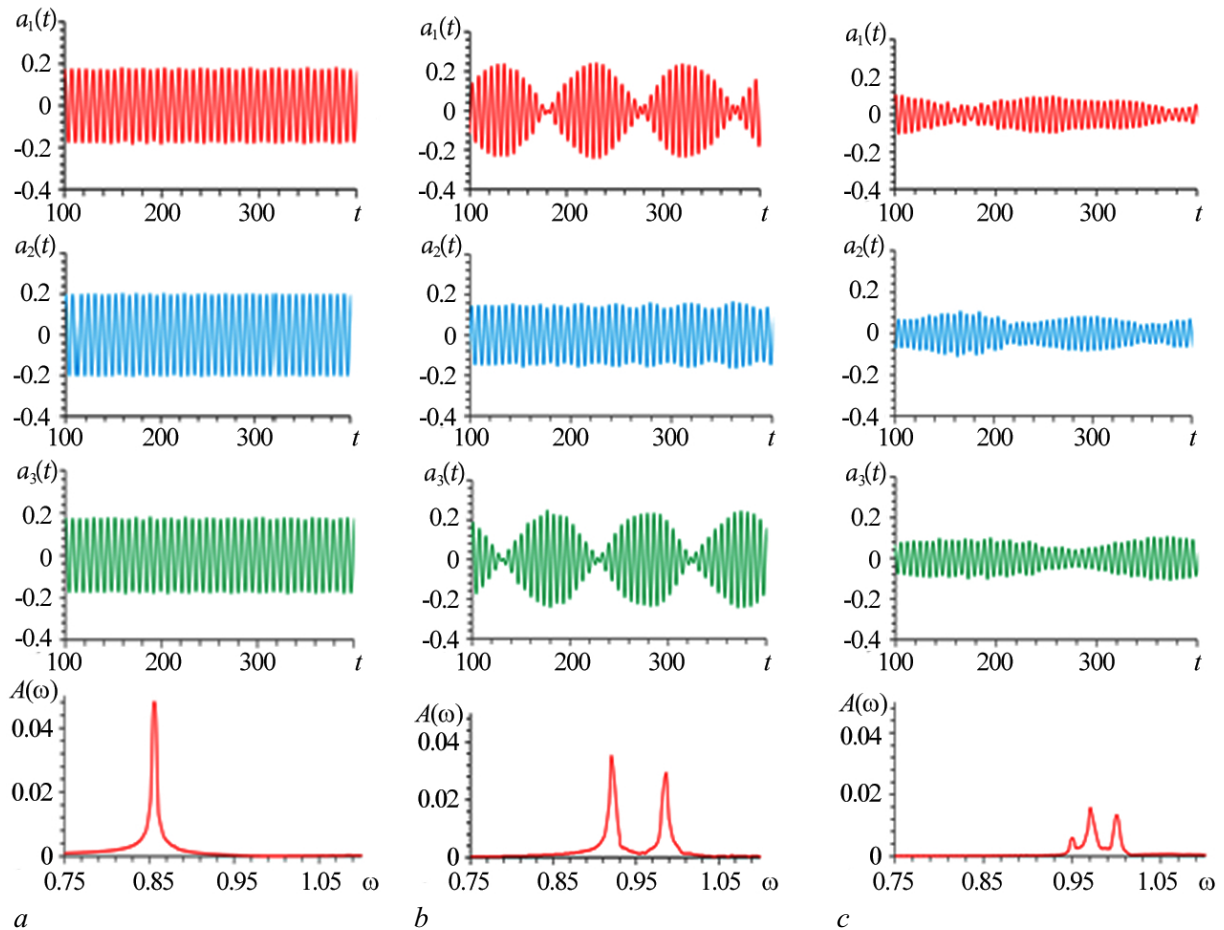


Рис. 5. Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  от времени для  $\varepsilon = 0.5$  при различных значениях параметра  $d$ , рассчитанные численно из уравнения (1), и соответствующие дискретные фурье-разложения  $A(\omega)$ .  $d = 1$  (a);  $d = 3$  (b);  $d = 6$  (c)

Fig. 5. Dependences of the  $a_{1,2,3}$  amplitudes on time for  $\varepsilon = 0.5$  at different the  $d$  values calculated numerically from the equation (1) and corresponding discrete Fourier expansion  $A(\omega)$ .  $d = 1$  (a);  $d = 3$  (b);  $d = 6$  (c)

однако наиболее оптимизированные реализации БПФ накладывают определенные ограничения на исходный ряд. Для подготовки данных исходная дискретная зависимость интерполируется кубическим сплайном с естественными граничными условиями, из которого строится новая дискретная зависимость на равномерной сетке с увеличенным количеством точек аппроксимации. Из новой дискретной зависимости рассчитывается частотный спектр с помощью БПФ. Для повышения точности определения частоты точки максимумов частотного спектра уточняются с помощью интерполяции сплайном Акимы.

Численный эксперимент выполняется следующим образом. В начальный момент времени на некотором расстоянии от примесей имеется кинк, движущийся с постоянной скоростью. При прохождении кинка через область точечных примесей на них возбуждаются локализованные волны бризерного типа. Амплитуда и вид локализованных волн зависят от начальной скорости кинка, параметров  $\varepsilon$  и  $d$ . Поскольку локализованные примесные волны возбуждаются в результате прохождения кинка, то его начальная скорость определяет их начальную разность фаз, как для случая аналитического решения. Вследствие этого не удастся возбудить весь спектр возможных связанных колебаний локализованных волн.

На рис. 5 и рис. 6 приведены зависимости амплитуды локализованных волн от времени в точке расположения примесей при  $\varepsilon = 0.3333$  и  $\varepsilon = 0.5$  для трёх различных случаев, соответствующих различным значениям параметра  $d$ , которые по характеру частотных спектров  $A(\omega)$  можно отнести к различным режимам колебаний. Из рисунков видно, что при малых

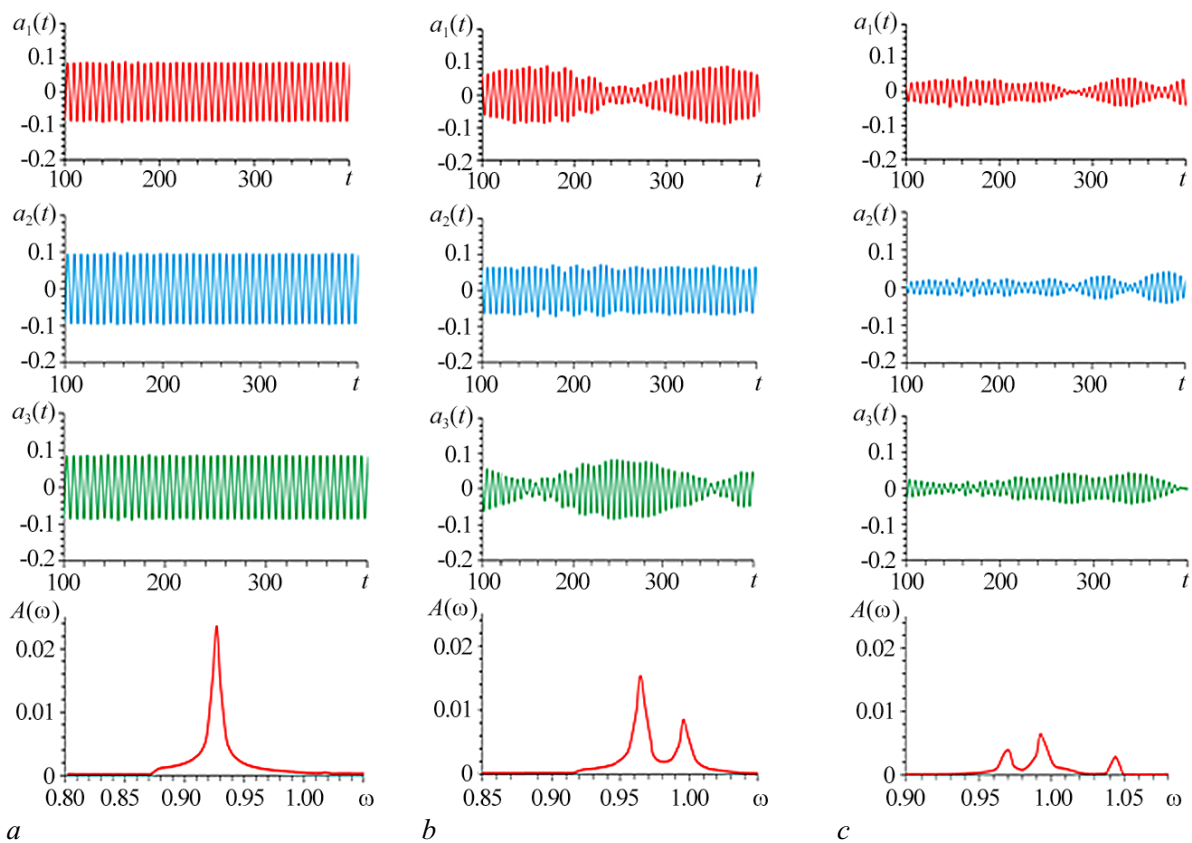


Рис. 6. Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  от времени для  $\varepsilon = 0.3333$  при различных значениях параметра  $d$ , рассчитанные численно из уравнения (1), и соответствующие дискретные фурье-разложения  $A(\omega)$ .  $d = 1$  (a);  $d = 3$  (b);  $d = 6$  (c)

Fig. 6. Dependences of the  $a_{1,2,3}$  amplitudes on time for  $\varepsilon = 0.3333$  at different the  $d$  values calculated numerically from the equation (1) and corresponding discrete Fourier expansion  $A(\omega)$ .  $d = 1$  (a);  $d = 3$  (b);  $d = 6$  (c)

расстояниях между примесями связь между волнами очень сильная и при любых начальных условиях они через некоторый промежуток времени начинают колебаться синфазно на единой частоте. Отметим, что подобное поведение характерно и для случая двух точечных примесей [28]. Из рис. 5 и рис. 6 для случая небольшого и большого расстояния между примесями видно, что существуют связанные колебания локализованных волн бризерного типа с характерными сильными биениями. Проведем сравнение полученных с помощью фурье-разложения гармоник с полученными ранее аналитически частотами  $\Omega_{1,2,3}$ . На рис. 1 сплошными линиями отложены аналитически рассчитанные частоты  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , а точками — полученные численно частоты. Из рис. 1 видно, что наблюдается хорошее совпадение численных и аналитических результатов. Полученные численно значения гармоник для рассмотренных случаев с точностью до 1–2% совпадают с соответствующими значениями  $\Omega_{1,2,3}$ . Например, для  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  при  $\varepsilon = 0.3333$  и  $d = 4$  значения, полученные аналитически, равны 0.968 и 1.000, а полученные численно равны 0.956 и 0.996, соответственно. Значение  $\Omega_2$  при  $\varepsilon = 0.3333$  и  $d = 6$  для аналитического решения равно 1.034, для численного — 1.036. Из сравнения численных и аналитических результатов следует, что аналитические результаты, полученные с помощью уравнений для коллективных координат, остаются относительно достоверными и близки к результатам прямого численного расчета при  $d$  больше или равном единице,  $\varepsilon$  меньше единицы, и амплитудах примесных мод порядка 0.3 и меньше. Локализованные волны, содержащие частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$ , возбуждаются численно начиная с малых расстояний между примесями. Локализованные волны, содержащие частоту  $\Omega_2$ , возбуждаются численно только для больших расстояний между примесями (в данном случае начиная с  $d = 6$ ), когда сильно уменьшается «сила связи» между ними. Причем для случая локализованных волн с одной частотой возбуждается  $\Omega_1$ , для случая колебаний с двумя частотами —  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$ .

### Заключение

В статье для модели синус-Гордона с произвольным числом одинаковых точечных примесей, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, с помощью метода коллективных переменных получена система уравнений, описывающих колебания локализованных на примесях волн. Полученные дифференциальные уравнения для случая трёх примесей являются уравнениями колебательной системы с тремя степенями свободы или трёх связанных гармонических осцилляторов. Колебания системы представляют собой сумму трёх типов гармонических колебаний: синфазного, синфазно-антифазного и антифазного. Получены приближенные аналитические решения для частот, хорошо аппроксимирующие результаты прямого численного моделирования нелинейной системы. Показано, что при уменьшении расстояния между примесями частота синфазных колебаний уменьшается, частота синфазно-антифазных колебаний увеличивается, частота антифазных колебаний увеличивается не так быстро как синфазно-антифазных. При возбуждении двух частот возникают биения, колебания похожи на колебания в случае двух одинаковых примесей. При возбуждении трёх частот форма колебаний усложняется.

### Список литературы

1. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, Физматлит, 2000. 272 с.
2. Daixois T., Peyrard M. Physics of Solitons. New York: Cambridge University Press, 2010. 436 p.
3. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
4. Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P. G., Williams F. The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer, 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.

5. Браун О. М., Кившарь Ю. С. Модель Френкеля–Конторовой: Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008. 536 с.
6. Kryuchkov S. V., Kukhar E. I. Nonlinear electromagnetic waves in semi-Dirac nanostructures with superlattice // *Eur. Phys. J. B*. 2020. Vol. 93, no. 4. P. 62. DOI: 10.1140/epjb/e2020-100575-4.
7. Kiselev V. V., Raskovalov A. A., Batalov S. V. Nonlinear interaction of domain walls and breathers with a spin-wave field // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2019. Vol. 127. P. 217–225. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.06.013.
8. Делев В. А., Назаров В. Н., Скалдин О. А., Батыришин Э. С., Екомасов Е. Г. Сложная динамика каскада кинк-антикинкковых взаимодействий в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика // *Письма в ЖЭТФ*. 2019. Т. 110, № 9. С. 607–613. DOI: 10.1134/S0370274X19210070.
9. Kälbermann G. The sine-Gordon wobble // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2004. Vol. 37, no. 48. P. 11603–11612. DOI: 10.1088/0305-4470/37/48/006.
10. Ferreira L. A., Piette B., Zakrzewski W. J. Wobbles and other kink-breather solutions of the sine-Gordon model // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 77, no. 3. P. 036616. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.036613.
11. Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G. Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 90, no. 5. P. 052902. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.052902.
12. Kivshar Y. S., Pelinovsky D. E., Cretegnny T., Peyrard M. Internal modes of solitary waves // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80, no. 23. P. 5032–5035. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.5032.
13. Jagtap A. D., Vasudeva Murthy A. S. Higher order scheme for two-dimensional inhomogeneous sine-Gordon equation with impulsive forcing // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2018. Vol. 64. P. 178–197. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.04.012.
14. Gomide O. M. L., Guardia M., Seara T. M. Critical velocity in kink-defect interaction models: Rigorous results // *Journal of Differential Equations*. 2020. Vol. 269, no. 4. P. 3282–3346. DOI: 10.1016/j.jde.2020.02.030.
15. Javidan K. Analytical formulation for soliton-potential dynamics // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 78, no. 4. P. 046607. DOI: 10.1103/PhysRevE.78.046607.
16. Piette B., Zakrzewski W. J. Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2007. Vol. 40, no. 22. P. 5995–6010. DOI: 10.1088/1751-8113/40/22/016.
17. Al-Alawi J. H., Zakrzewski W. J. Scattering of topological solitons on barriers and holes of deformed Sine–Gordon models // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2008. Vol. 41, no. 31. P. 315206. DOI: 10.1088/1751-8113/41/31/315206.
18. Baron H. E., Zakrzewski W. J. Collective coordinate approximation to the scattering of solitons in modified NLS and sine-Gordon models // *Journal of High Energy Physics*. 2016. Vol. 2016, no. 6. P. 185. DOI: 10.1007/JHEP06(2016)185.
19. Гумеров А. М., Екомасов Е. Г., Муртазин Р. Р., Назаров В. Н. Трансформация солитонов уравнения синус-Гордона в моделях с переменными коэффициентами и затуханием // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2015. Т. 55, № 4. С. 631–640. DOI: 10.7868/S0044466915040031.
20. Goodman R. H., Haberman R. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: the two-bounce resonance // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 195, no. 3–4. P. 303–323. DOI: 10.1016/j.physd.2004.04.002.
21. Гумеров А. М., Екомасов Е. Г., Закирьянов Ф. К., Кудрявцев Р. В. Структура и свойства четырехкинкковых мультисолитонов уравнения синус-Гордона // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014. Т. 54, № 3. С. 481–495. DOI: 10.7868/S0044466914030077.

22. *González J. A., Bellorín A., Guerrero L. E.* Internal modes of sine-Gordon solitons in the presence of spatiotemporal perturbations // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65, no. 6. P. 065601. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.065601.
23. *González J. A., Bellorín A., García-Ñustes M. A., Guerrero L. E., Jiménez S., Vázquez L.* Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations // *Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 381, no. 24. P. 1995–1998. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.042.
24. *Белова Т. И., Кудрявцев А. Е.* Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // *УФН.* 1997. Т. 167, № 4. С. 377–406. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199704b.0377.
25. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Murtazin R. R.* Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities // *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2016. Vol. 40, no. 17. P. 6178–6186. DOI: 10.1002/mma.3908.
26. *Екомасов Е. Г., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В.* О возможности наблюдения резонансного взаимодействия кинков уравнения синус-Гордона с локализованными волнами в реальных физических системах // *Письма в ЖЭТФ.* 2015. Т. 101, № 12. С. 935–939. DOI: 10.7868/S0370274X15120127.
27. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V.* Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping // *J. Comput. Appl. Math.* 2017. Vol. 312. P. 198–208. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.013.
28. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N.* Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // *Braz. J. Phys.* 2018. Vol. 48, no. 6. P. 576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
29. *Gumerov A. M., Ekomasov E. G., Kudryavtsev R. V., Fakhretdinov M. I.* Excitation of large-amplitude localized nonlinear waves by the interaction of kinks of the sine-Gordon equation with attracting impurity // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2019. Vol. 15, no. 1. P. 21–34. DOI: 10.20537/nd190103.
30. *Geng X., Shen J., Xue B.* A new nonlinear wave equation: Darboux transformation and soliton solutions // *Wave Motion.* 2018. Vol. 79. P. 44–56. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2018.02.009.
31. *Ekomasov E. G., Murtazin R. R., Bogomazova O. B., Gumerov A. M.* One-dimensional dynamics of domain walls in two-layer ferromagnet structure with different parameters of magnetic anisotropy and exchange // *J. Magn. Magn. Mater.* 2013. Vol. 339. P. 133–137. DOI: 10.1016/j.jmmm.2013.02.042.
32. *Екомасов Е. Г., Азаматов Ш. А., Муртазин Р. Р.* Изучение зарождения и эволюции магнитных неоднородностей типа солитонов и бризеров в магнетиках с локальными неоднородностями анизотропии // *Физика металлов и металловедение.* 2008. Т. 105, № 4. С. 341–349.
33. *Ekomasov E. G., Murtazin R. R., Nazarov V. N.* Excitation of magnetic inhomogeneities in three-layer ferromagnetic structure with different parameters of the magnetic anisotropy and exchange // *J. Magn. Magn. Mater.* 2015. Vol. 385. P. 217–221. DOI: 10.1016/j.jmmm.2015.03.019.
34. *Gumerov A. M., Ekomasov E. G., Kudryavtsev R. V.* One-dimensional dynamics of magnetic inhomogeneities in a three- and five-layer ferromagnetic structure with different values of the magnetic parameters // *Journal of Physics: Conference Series.* 2019. Vol. 1389. P. 012004. DOI: 10.1088/1742-6596/1389/1/012004.
35. *Шамсутдинов М. А., Назаров В. Н., Ломакина И. Ю., Харисов А. Т., Шамсутдинов Д. М.* Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. М.: Наука, 2009. 456 с.
36. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.
37. *Фалейчик Б. В.* Одношаговые методы численного решения задачи Коши. Минск: БГУ, 2010. 42 с.



## References

1. Ryskin NM, Trubetskov DI. Nonlinear Waves. Moscow: Nauka, Fizmatlit; 2000. 272 p. (in Russian).
2. Dauxois T, Peyrard M. Physics of Solitons. New York: Cambridge University Press; 2010. 436 p.
3. Dodd RK, Eilbeck JC, Gibbon JD, Morris HC. Solitons and Nonlinear Wave Equations. London: Academic Press; 1982. 630 p.
4. Cuevas-Maraver J, Kevrekidis PG, Williams F. The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer; 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
5. Braun OM, Kivshar YS. The Frenkel–Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications. Berlin: Springer; 2004. 472 p. DOI: 10.1007/978-3-662-10331-9.
6. Kryuchkov SV, Kukhar EI. Nonlinear electromagnetic waves in semi-Dirac nanostructures with superlattice. Eur. Phys. J. B. 2020;93(4):62. DOI: 10.1140/epjb/e2020-100575-4.
7. Kiselev VV, Raskovalov AA, Batalov SV. Nonlinear interaction of domain walls and breathers with a spin-wave field. Chaos, Solitons and Fractals. 2019;127:217–225. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.06.013.
8. Delev VA, Nazarov VN, Scaldin OA, Batyrshin ES, Ekomasov EG. Complex dynamics of the cascade of kink–antikink interactions in a linear defect of the electroconvective structure of a nematic liquid crystal. JETP Lett. 2019;110(9):607–612. DOI: 10.1134/S0021364019210069.
9. Kälbermann G. The sine-Gordon wobble. Journal of Physics A: Mathematical and General. 2004;37(48):11603–11612. DOI: 10.1088/0305-4470/37/48/006.
10. Ferreira LA, Piette B, Zakrzewski WJ. Wobbles and other kink-breather solutions of the sine-Gordon model. Phys. Rev. E. 2008;77(3):036616. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.036613.
11. Saadatmand D, Dmitriev SV, Borisov DI, Kevrekidis PG. Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect. Phys. Rev. E. 2014;90(5):052902. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.052902.
12. Kivshar YS, Pelinovsky DE, Cretegnny T, Peyrard M. Internal modes of solitary waves. Phys. Rev. Lett. 1998;80(23):5032–5035. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.5032.
13. Jagtap AD, Vasudeva Murthy AS. Higher order scheme for two-dimensional inhomogeneous sine-Gordon equation with impulsive forcing. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018;64:178–197. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.04.012.
14. Gomide OML, Guardia M, Seara TM. Critical velocity in kink-defect interaction models: Rigorous results. Journal of Differential Equations. 2020;269(4):3282–3346. DOI: 10.1016/j.jde.2020.02.030.
15. Javidan K. Analytical formulation for soliton-potential dynamics. Phys. Rev. E. 2008;78(4):046607. DOI: 10.1103/PhysRevE.78.046607.
16. Piette B, Zakrzewski WJ. Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2007;40(22):5995–6010. DOI: 10.1088/1751-8113/40/22/016.
17. Al-Alawi JH, Zakrzewski WJ. Scattering of topological solitons on barriers and holes of deformed Sine–Gordon models. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2008;41(31):315206. DOI: 10.1088/1751-8113/41/31/315206.
18. Baron HE, Zakrzewski WJ. Collective coordinate approximation to the scattering of solitons in modified NLS and sine-Gordon models. Journal of High Energy Physics. 2016;2016(6):185. DOI: 10.1007/JHEP06(2016)185.
19. Gumerov AM, Ekomasov EG, Murtazin RR, Nazarov VN. Transformation of sine-Gordon solitons in models with variable coefficients and damping. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015;55(4):628–637. DOI: 10.1134/S096554251504003X.
20. Goodman RH, Haberman R. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: the two-bounce

- resonance. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004;195(3–4):303–323. DOI: 10.1016/j.physd.2004.04.002.
21. Gumerov AM, Ekomasov EG, Zakir'yanov FK, Kudryavtsev RV. Structure and properties of four-kink multisolitons of the sine-Gordon equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2014;54(3):491–504. DOI: 10.1134/S0965542514030075.
  22. González JA, Bellorín A, Guerrero LE. Internal modes of sine-Gordon solitons in the presence of spatiotemporal perturbations. *Phys. Rev. E*. 2002;65(6):065601. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.065601.
  23. González JA, Bellorín A, García-Ñustes MA, Guerrero LE, Jiménez S, Vázquez L. Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations. *Phys. Lett. A*. 2017;381(24):1995–1998. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.042.
  24. Belova TI, Kudryavtsev AE. Solitons and their interactions in classical field theory. *Phys. Usp.* 1997;40(4):359–386. DOI: 10.1070/PU1997v040n04ABEH000227.
  25. Ekomasov EG, Gumerov AM, Murtazin RR. Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2016;40(17):6178–6186. DOI: 10.1002/mma.3908.
  26. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. On the possibility of the observation of the resonance interaction between kinks of the sine-Gordon equation and localized waves in real physical systems. *JETP Lett.* 2015;101(12):835–839. DOI: 10.1134/S0021364015120061.
  27. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping. *J. Comput. Appl. Math.* 2017;312:198–208. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.013.
  28. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV, Dmitriev SV, Nazarov VN. Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities. *Braz. J. Phys.* 2018;48(6):576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
  29. Gumerov AM, Ekomasov EG, Kudryavtsev RV, Fakhretdinov MI. Excitation of large-amplitude localized nonlinear waves by the interaction of kinks of the sine-Gordon equation with attracting impurity. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2019;15(1):21–34. DOI: 10.20537/nd190103.
  30. Geng X, Shen J, Xue B. A new nonlinear wave equation: Darboux transformation and soliton solutions. *Wave Motion*. 2018;79:44–56. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2018.02.009.
  31. Ekomasov EG, Murtazin RR, Bogomazova OB, Gumerov AM. One-dimensional dynamics of domain walls in two-layer ferromagnet structure with different parameters of magnetic anisotropy and exchange. *J. Magn. Magn. Mater.* 2013;339:133–137. DOI: 10.1016/j.jmmm.2013.02.042.
  32. Ekomasov EG, Azamatov SA, Murtazin RR. Studying the nucleation and evolution of magnetic inhomogeneities of the soliton and breather type in magnetic materials with local inhomogeneities of anisotropy. *Phys. Metals Metallogr.* 2008;105(4):313–321. DOI: 10.1134/S0031918X08040017.
  33. Ekomasov EG, Murtazin RR, Nazarov VN. Excitation of magnetic inhomogeneities in three-layer ferromagnetic structure with different parameters of the magnetic anisotropy and exchange. *J. Magn. Magn. Mater.* 2015;385:217–221. DOI: 10.1016/j.jmmm.2015.03.019.
  34. Gumerov AM, Ekomasov EG, Kudryavtsev RV. One-dimensional dynamics of magnetic inhomogeneities in a three- and five-layer ferromagnetic structure with different values of the magnetic parameters. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1389:012004. DOI: 10.1088/1742-6596/1389/1/012004.
  35. Shamsutdinov MA, Nazarov VN, Lomakina IY, Kharisov AT, Shamsutdinov DM. *Ferro- and Antiferromagnetodynamics. Nonlinear Oscillations, Waves and Solitons*. Moscow: Nauka; 2009. 456 p. (in Russian).
  36. Magnus K. *Schwingungen: Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. Stuttgart: Teubner; 1961. 298 s. (in German).
  37. Faleychik BV. *One-Step Methods for the Numerical Solution of the Cauchy Problem*. Minsk: Belarusian State University Publishing; 2010. 42 p. (in Russian).

*Екомасов Евгений Григорьевич* — родился в с. Анучино Приморского края (1958). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (1980). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Физика магнитных явлений» (1991, МГУ) и доктора физико-математических наук специальности «Физика конденсированного состояния» (2005, ЧелГУ). Профессор кафедры теоретической физики Башкирского государственного университета. Награжден Нагрудным знаком «Почетный работник высшего образования РФ» (2011) и Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ (2008). Область исследовательских интересов — теоретическая и математическая физика, физика конденсированного состояния, спинтроника, вычислительная физика. Опубликовал более 200 научных и методических работ.



450076, Республика Башкортостан, Уфа, ул. Заки Валиди, 32  
Башкирский государственный университет  
E-mail: ekomasoveg@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-6194-3358  
AuthorID (eLibrary.Ru): 29060

*Самсонов Кирилл Юрьевич* — родился в Тюмени (1994). Окончил физический факультет Тюменского государственного университета (2018, магистратура). В настоящее время аспирант Тюменского государственного университета. Область научных интересов: фильтрационно-емкостные свойства пласта, задача о двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей с учётом коагуляционных и суффозионных процессов, нелинейная динамика волн (солитонов) в магнитных средах и изучение их поведения при взаимодействии с «примесями».



Россия, 625003 Тюмень, ул. Володарского, 6  
Тюменский государственный университет  
E-mail: k.y.samsonov@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-3170-7872  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1137615

*Гумеров Азамат Маратович* — окончил физический факультет Башкирского государственного университета (2010, магистратура). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2014). Работает в БашГУ в должности инженера. Научные интересы — исследование динамики намагничённости в ферро- и антиферромагнетиках и свойствами нелинейных волн (солитонов) в магнитных средах; разработка эффективного программного обеспечения для моделирования, обработки и анализа результатов.



450076, Республика Башкортостан, Уфа, ул. Заки Валиди, 32  
Башкирский государственный университет  
E-mail: article@solitonlab.com  
ORCID: 0000-0002-5048-9356  
AuthorID (eLibrary.Ru): 678768

*Кудрявцев Роман Владимирович* — родился в Уфе (1989). Окончил магистратуру Физико-технического института Башкирского государственного университета (2014). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Теоретическая физика» (2018). Научная работа связана с исследованием динамики солитонов уравнения синус-Гордона. Имеет дипломы и грамоты за доклады на молодёжных конференциях. Был награжден стипендией Главы Республики Башкортостан (2015/2016, 2016/2017, 2017/2018).



450076, Республика Башкортостан, Уфа, ул. Заки Валиди, 32  
Башкирский государственный университет  
E-mail: xc.89@mail.ru



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Обзорная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003017  
EDN: CBUHEP

## К 70-летию кафедры электроники, колебаний и волн

*С. В. Гришин, И. С. Ремпен, М. И. Перченко*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: ✉ sergrsh@yandex.ru, rempenis@gmail.com, perchenkomi@sgu.ru  
*Поступила в редакцию 31.10.2022, принята к публикации 31.10.2022,  
опубликована онлайн 22.11.2022, опубликована 30.11.2022*

**Аннотация.** 1 июня 2022 года кафедре электроники, колебаний и волн СГУ исполнилось 70 лет. За эти годы кафедра прошла блистательный путь, ее руководителями в разное время были три ректора Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского, а выпускники и сотрудники кафедры известны в научном мире не только в нашей стране, но и далеко за ее пределами. Мы отдаем дань уважения кафедре электроники и вспоминаем события, а также всех тех людей, с которыми мы так или иначе были связаны, работая в ее стенах, и память о которых надолго останется в наших сердцах.

**Ключевые слова:** образование и наука, кафедра электроники, синергетика, нелинейная динамика, вакуумная СВЧ-электроника.

**Для цитирования:** *Гришин С. В., Ремпен И. С., Перченко М. И.* К 70-летию кафедры электроники, колебаний и волн // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 766–784. DOI: 10.18500/0869-6632-003017. EDN: CBUHEP

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## To the 70th anniversary of the Department of Electronics, Oscillations and Waves

*S. V. Grishin, I. S. Rempen, M. I. Perchenko*

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉sergrsh@yandex.ru, rempenis@gmail.com, perchenkomi@sgu.ru

Received 31.10.2022, accepted 31.10.2022, available online 22.11.2022,

published 30.11.2022

**Abstract.** On June 1, 2022, the Department of Electronics, Oscillations and Waves of SSU turned 70 years old. Over the years, the Department has passed a brilliant way. Three of its leaders at different times were rectors of Saratov State University. Graduates and staff of the department are known in the scientific world not only in our country, but also far beyond its borders. We pay tribute to the Department of Electronics and remember the events, as well as all those people with whom we were somehow connected within its walls, and whose memory will remain in our hearts for a long time.

**Keywords:** education and science, Department of Electronics, synergetics, nonlinear dynamics, vacuum microelectronics.

**For citation:** Grishin SV, Rempen IS, Perchenko MI. To the 70th anniversary of the Department of Electronics, Oscillations and Waves. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(6):766–784. DOI: 10.18500/0869-6632-003017

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Поздравление с Юбилеем коллектива кафедры электроники, колебаний и волн

*Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн  
к.ф.-м.н., доцент Гришин Сергей Валерьевич*

В этом году исполняется 70 лет со дня основания в Саратовском государственном университете (СГУ) имени Н. Г. Чернышевского кафедры электроники. По прошествии многих лет кафедра видоизменила свое первоначальное название, и теперь она известна как кафедра электроники, колебаний и волн.

Кафедру в разное время возглавляли три ректора Саратовского университета:

1952–1953 — *Петр Васильевич Голубков* — основоположник кафедры электроники, заслуженный деятель науки РСФСР, заведующий кафедрой общей физики, директор Научно-Исследовательского Института Механики и Физики (НИИМФ) СГУ, доктор физико-математических наук (д.ф.-м.н.), профессор;

1958–1980 — *Владимир Николаевич Шевчик* — ученик П. В. Голубкова, д.ф.-м.н., профессор, директор и научный руководитель НИИМФа СГУ;

1981–2020 — *Дмитрий Иванович Трубецков* — ученик и преемник В. Н. Шевчика, заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., профессор.

Основным предназначением кафедры была и остается подготовка специалистов в области вакуумной СВЧ-электроники, в которых в послевоенные годы очень нуждался только что созданный на Саратовской земле и быстро развивавшийся «электронный куст», куда входили предприятия оборонного комплекса.

Однако кафедра готовила не только специалистов для электронной промышленности, но и вела большую научную и просветительскую деятельность. Сотрудники кафедры участвовали в выполнении НИР оборонного заказа, организовывали школы для специалистов радиоэлектронной промышленности, а начиная с конца 90-х годов прошлого века и по настоящее время принимают активное участие в фундаментальных исследованиях, поддерживаемых ведущими российскими научными фондами.

В декабре 1991 года при непосредственном участии Дмитрия Ивановича Трубецкого был организован Государственный учебно-научный центр «Колледж» (ГосУНЦ «Колледж»), директором которого был назначен Юрий Иванович Лёвин — выпускник кафедры электроники, к.ф.-м.н., профессор и сподвижник Д. И. Трубецкого. В ГосУНЦ «Колледж» осуществлялась учебная, научная и редакционно-издательская деятельность. Учебный процесс подразумевал наличие двух ступеней образования. Для реализации первой ступени (среднее образование) в 1992 году было подписано постановление о создании Колледжа прикладных наук (КПН) на базе средней школы № 20, а в 1994 году на базе Саратовского госуниверситета был открыт Высший колледж прикладных наук (ВКПН), являющийся второй ступенью (высшее образование).

В 1996 году был учрежден Лицей колледжа прикладных наук (ЛКПН). Позднее, на базе ВКПН Дмитрием Ивановичем был организован факультет нелинейных процессов (ФНП), деканом которого стал Ю. И. Лёвин, а ЛКПН был переименован в Лицей прикладных наук (ЛПН). С декабря 2020 года ЛПН носит имя Д. И. Трубецкого. Школьники, прошедшие физико-математическую подготовку в ЛПН, могли переходить на вторую ступень образования в ФНП, где они углубляли свои знания в области динамического хаоса, теории нелинейных колебаний и волн и самоорганизации. Фактически они представляли собой специалистов, имеющих «нелинейный» взгляд на окружающий мир, способных правильно анализировать происходящие в природе и обществе процессы и принимать единственно верные решения. При этом не разрывались связи с промышленными предприятиями и научными институтами, ведущие специалисты которых читали студентам лекции и вели практические занятия. Это давало возможность создать систему «школа – ВУЗ – предприятие» для подготовки и закрепления кадров в промышленной и научной сферах. Такая система подготовки специалистов по направлению «Радиофизика» (профиль «Физика микроволн») до сих пор осуществляется на кафедре электроники, колебаний и волн благодаря усилиям и инновационным идеям предшествующих поколений.

Я от всей души поздравляю сотрудников кафедры электроники, колебаний и волн: к.ф.-м.н., доцентов Евгения Николаевича Егорова, Дмитрия Николаевича Золотых, Ирину Сергеевну Ремпен, Алексея Владимировича Титова, Владимира Николаевича Титова, доцента Михаила Ивановича Перченко, заведующего учебной лабораторией Валентина Николаевича Скороходова, ассистентов Марию Денисовну Амельченко, Анастасию Сергеевну Бир и Александра Андреевича Фунтова, а также всех тех людей, которые в свое время оканчивали эту кафедру или работали на ней, с 70-летним Юбилеем кафедры!

Сотрудникам кафедры электроники, колебаний и волн хочется пожелать сохранить тот учебный и научный потенциал, которым обладала кафедра в предшествующие годы, и достойно преодолевать все трудности в это непростое для страны и кафедры время.

### **Воспоминания к Юбилею. О кафедре и ее сотрудниках. Нерушимость традиций и преемственность поколений**

*С. В. Гришин*

Я родился, учился в школе и поступил в Саратовский государственный университет (СГУ) имени Н. Г. Чернышевского еще при существовании Советского Союза, когда образование, наука и культура для многих были не пустыми словами. По окончании в 1991 году средней школы № 46 я не имел четкого представления о своей будущей профессии, но в душе мечтал о поступлении в университет. Выбор физического направления был предопределен во многом благодаря моим родителям, которые имели физическое образование и советовали мне непременно поступать на физический факультет. В то время одной из наиболее сильных кафедр на физическом факультете СГУ была кафедра электроники, которая готовила специалистов-электронщиков для предприятий военно-промышленного комплекса города Саратова. Мои родители были связаны с кафедрой электроники в разные годы жизни и говорили о ней только хорошие слова. Однако мой выбор

пал на кафедру общей физики, возглавляемую Заслуженным деятелем науки РСФСР, д.ф.-м.н., профессором Всеволодом Семеновичем Стальмаховым, который был учеником П. В. Голубкова. Меня прельстило новое направление, связанное с видео-электроникой, которое тогда развивалось на кафедре в сотрудничестве с предприятием «Тантал».

В дальнейшем жизнь сложилась так, что спустя 8 лет после окончания университета, в 2005 году, я был принят на кафедру электроники, колебаний и волн на должность старшего преподавателя, в 2006 году защитил кандидатскую диссертацию под руководством д.ф.-м.н., профессора Шараевского Юрия Павловича (он оканчивал кафедру электроники вместе с Ю. И. Лёвиным и был аспирантом В. Н. Шевчика) и через несколько лет стал доцентом кафедры. В те годы заведующим кафедрой был Дмитрий Иванович Трубецков, а из «старейшин» на кафедре работали Михаил Алексеевич Григорьев, Юрий Дмитриевич Жарков, Юрий Александрович Калинин, Юрий Григорьевич Гамаюнов, Михаил Иванович Перченко.

М. А. Григорьев возглавлял на кафедре электроники научное направление «Акустоэлектроника и акустооптика», начало которому было положено в 1967 году, когда по предложению В. Н. Шевчика в НИИМФе СГУ были начаты исследования возбуждения и распространения гиперзвуковых волн в кристаллах в диапазоне частот 10 ГГц. Первыми сотрудниками, работавшими по этой тематике, были доценты М. А. Григорьев и Ю. А. Зюрюкин, аспиранты В. И. Наянов и В. А. Полотнягин, технолог Г. И. Пылаева и другие. В 1969 г. на основе проведенных исследований впервые в СССР были созданы акустические линии задержки радиосигнала 3-сантиметрового диапазона, работавшие при комнатной температуре. В период 1972–1974 гг. образовались четыре научные группы, руководимые М. А. Григорьевым, Ю. А. Зюрюкиным, В. И. Наяновым, Н. И. Синицыным, вошедшие в лабораторию акустоэлектроники НИИМФа СГУ. На основе проведенных исследований в лаборатории был разработан ряд приборов, использующих акустические волны: акустические линии задержки радиосигналов различных диапазонов, акустооптическая линия переменной задержки и на ее основе имитатор радиолокационного сигнала, отраженного от подвижного объекта, приемно-передающие датчики для акустических микроскопов, а также акустооптические приборы управления лазерным излучением: модуляторы, дефлекторы, фильтры. Большинство из них внедрено на предприятиях радиоэлектронного профиля.



Профессора кафедры, доктора физико-математических наук Ю. Д. Жарков, М. А. Григорьев, В. С. Андрушкевич  
Professors Yu. D. Zharkov, M. A. Grigoryev, V. S. Andrushkevich



Профессор кафедры электроники, колебаний и волн Ю. Г. Гамаюнов

Professor of the Department of Electronics, Oscillations and Waves Yu. G. Gamayunov

медляющих систем и объёмных резонаторов СВЧ, изучать линейные и нелинейные волновые процессы в протяжённых электронных потоках, моделировать мощные приборы СВЧ, включая релятивистские, и сильноточные протонные ускорители. Для этих целей был разработан и создан уникальный комплекс средств измерений в виде оригинальных электронных зондов различного типа.

Научное направление «Миллиметровые волны» ведет свою историю с середины 1950-х годов, когда в СГУ были начаты исследования (которыми в различное время руководили П. В. Голубков, Ш. Е. Цимринг, В. С. Андрушкевич) по разработке генераторов и усилителей типа О миллиметрового диапазона длин волн и изучению процессов взаимодействия в них интенсивных электронных пучков с ВЧ-полями электродинамических структур. В 2000-е годы аналогичные исследования продолжали Ю. Г. Гамаюнов, являвшийся руководителем этого научного направления, А. И. Тореев, Е. В. Патрушева, а консультантом был профессор В. С. Андрушкевич. На основе проведенных исследований были разработаны электронно-оптические системы, пакетированные с компактными постоянными магнитами, а также распределенно-резонансные системы с распределенным отбором энергии. Созданы в средневолновой части КВЧ-диапазона пакетированные четырехрезонаторные импульсные клистроны с распределенным взаимодействием, обеспечивающие импульсную выходную мощность более 3 кВт, к.п.д. до 30% и усиление более 30 дБ, а также пятирезонаторные клистроны с усилением до 50 дБ и полосой усиления 0.35% при ускоряющих напряжениях 18 кВ и токе пучка 0.5 А.

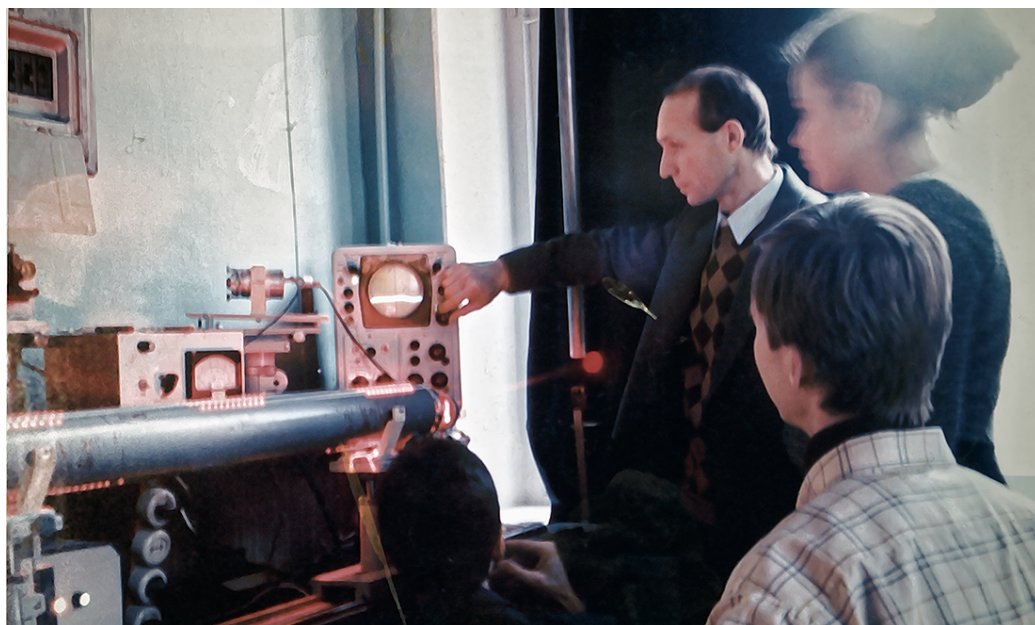
Мощное развитие лазерной физики в начале 1960-х годов не обошло стороной молодых сотрудников кафедры электроники Д. И. Трубецкого, Б. Г. Цикина и Л. И. Каца (стал позднее сотрудником кафедры), которые совместно с В. А. Седельниковым создали научную студенческую лабораторию СГУ по квантовой электронике. Для Б. Г. Цикина (к.ф.-м. н., доцент кафедры до 2002 г.) это определило в дальнейшем одно из направлений научных теоретических исследований его и возглавляемой им группы сотрудников НИИМФа — В. А. Дубровского, Н. Б. Лернер, А. П. Соловьева, А. А. Колотырина. Это направление — лазеры на свободных электронах (ЛСЭ), основным достоинством которых являлась возможность генерации высокочастотного излучения в очень

Ю. Д. Жарков возглавлял на кафедре научное направление «Физический эксперимент в микроволновой электронике», которое было организовано в 1956 г. для создания генераторов обратной волны без магнитной фокусировки. Под руководством доцентов Б. М. Заморозкова и Л. Э. Бахраха группой сотрудников (Ю. Д. Жарков, М. А. Харит, Л. Я. Майофис, Б. С. Дмитриев) был разработан и создан ряд ламп обратной волны с ионной фокусировкой электронного пучка в дециметровом, сантиметровом и миллиметровом диапазонах длин волн. Начиная с 1964 г., группой сотрудников (Б. С. Дмитриев, В. А. Рачков, Э. А. Умеров, А. Е. Васильев, М. А. Дмитриева, В. В. Боголюбов, В. В. Жигулин, В. Н. Шлёпкин и др., руководитель — Ю. Д. Жарков) был теоретически обоснован и разработан метод оперативного физического моделирования процессов взаимодействия потоков заряженных частиц с СВЧ-полями. Метод давал возможность проводить «горячие» измерения основных параметров за-



широком диапазоне длин волн — от микроволнового до рентгеновского. В 1970-х годах в рамках нескольких обзоров в журнале «Успехи физических наук» обсуждались и результаты работы группы Б. Г. Цикина. Предложенный в работах научной группы один из двух методов увеличения коэффициента усиления был тщательно проанализирован в работах трех сотрудников Физического института имени П. Н. Лебедева и Института общей физики на предмет оптимальных условий генерации ЛСЭ, которые, как оказалось, достигаются в релятивистских электронных пучках. Эти работы московских физиков отнесены в книге «Российская физика Нобелевского уровня» 2006 г. (авторы книги — К. Н. Мухин, А. Ф. Сустанов, В. Н. Тихонов) к значимым достижениям российских исследований в области теории ЛСЭ. Должное тому, что исследования мирового уровня московских ученых были предвараемы работами группы сотрудников Б. Г. Цикина, отдается ссылкой на работу группы в обзоре, одним из авторов которого был А. Ярив — признанный авторитет в области квантовой электроники. В Германии (Гамбург) 1 сентября 2017 г. запущен самый крупный в мире Европейский рентгеновский лазер на свободных электронах ЕРЛСЭ (вклад Германии 58%, России — 27%). Российским ученым предоставлены приоритетные возможности работы с ЕРЛСЭ.

Помимо исследований по ЛСЭ членами научной группы Б. Г. Цикина (А. П. Соловьев, А. А. Князев, О. В. Зюрюкина, К. И. Свинолулов, Д. Е. Долотов) разработаны и исследованы оригинальные экспериментальные методы лазерной диагностики электронных пучков и плазмы с высокой чувствительностью. В теоретических работах Б. Г. Цикина и С. С. Аркадакского (сотрудник научной группы Б. Г. Цикина) получены фундаментальные результаты по теории возбуждения волноводов вблизи границы полосы пропускания замедляющих систем. Доцентом Б. Г. Цикиным был разработан и преподавался студентам-радиофизикам до 2002 года курс «Квантовая электроника», который после некоторых изменений и дополнений продолжил читать старший преподаватель М. И. Перченко (с 2005 г. — доцент кафедры). Под руководством Б. Г. Цикина и при непосредственном участии М. И. Перченко в 1974–1978 годах был создан и начал функционировать новый практикум по квантовой электронике. Сегодня лаборатория по квантовой электронике поддерживается М. И. Перченко, который сохранил ее в виде уникального практикума по квантовой радиофизике для студентов кафедры электроники, колебаний и волн. Бакалавры последнего



Доцент кафедры электроники, колебаний и волн М. И. Перченко в практикуме «Квантовая радиофизика»  
Associate professor of the Department of Electronics, Oscillations and Waves M. I. Perchenko in the laboratory «Quantum Electronics»

курса выполняют здесь такие работы, как «Электронный парамагнитный резонанс», «Рубиновый оптический квантовый генератор с модулированной добротностью», «Твердотельный оптический квантовый генератор», «Дифракция света на упругих волнах в кристалле», «Открытый резонатор» и «Гелий-неоновый лазер» (запасная работа – «Полупроводниковый лазер»).

С первых дней работы на кафедре мне было поручено читать курс лекций по синергетике студентам геологического и биологического факультетов. Одновременно с этим я вел волновой практикум, практические занятия по физической электронике, электронным и ионным приборам, а также по схемотехнике. Юрий Григорьевич Гамаюнов, с которым мы вместе вели практические занятия по физической электронике, поражался такому разнообразию дисциплин, которые на меня «свалились». Но мне, на тот момент начинающему сотруднику кафедры, все это было очень интересно, и я изо всех сил старался не подвести кафедру и вести занятия, что называется, на совесть. Я был дружен с Александром Евгеньевичем Храмовым, который способствовал моему появлению на кафедре. В 2005 году он защитил докторскую диссертацию по хаотической динамике виркатора и возглавил вместе с Ю. А. Калининым научное направление на кафедре, связанное с источниками широкополосного хаотического сигнала микроволнового диапазона. В дальнейшем наши пути с Александром Евгеньевичем разошлись. Он ушел в нейронауку, а я так и остался верен электронной тематике.

Занимаясь экспериментальными исследованиями нелинейных эффектов в пассивных устройствах магнитоэлектроники на магнитоэлектронных спиновых волнах (МСВ) (ограничители мощности и шумоподавители на МСВ) в научной группе, возглавляемой профессором Ю. П. Шараевским, я был далек от динамического хаоса. Но именно в эти годы под влиянием «хаотического» направления кафедры электроники я стал искать возможность для создания источников динамического хаоса на МСВ. Такое мое увлечение было продиктовано еще и тем, что мой отец, Валерий Сергеевич Гришин, в свое время тоже занимался разработкой широкополосных источников шумоподобного сигнала в НИИ «Волна», где он возглавлял лабораторию, работающую в этом направлении. У папы были тесные научные связи с университетом.

В лаборатории В. С. Гришина в начале 80-х годов прошлого века независимо от ИРЭ АН СССР были завершены ОКР по созданию источников шумоподобного СВЧ-сигнала на биполярных транзисторах для систем радиопротиводействия в метровом, дециметровом и сантиметровом диапазонах длин волн. Но разразившийся в нашей стране политический кризис поставил на этих разработках «крест». Мне хотелось «подхватить выпавшее из рук знамя» и попытаться создать похожие источники, работающие на других физических принципах. Оказалось, что в научной группе д.ф.-м. н. Бориса Антоновича Калиникова, профессора Ленинградского Электротехнического Института (ЛЭТИ), в конце 1990-х годов теоретически и экспериментально была показана возможность получения хаотического сигнала в кольцевом автогенераторе, в цепи обратной связи которого использовалась нелинейная линия задержки на МСВ, поддерживающая трехволновый параметрический распад длинноволновой МСВ на более коротковолновые спиновые волны. Собрав аналогичную генераторную схему, мы увидели, что данный источник является сравнительно широкополосным (с полосой частот 1 ГГц) и, что самое главное, он обладает достаточно высоким КПД (15–20%) в отличие от всех других известных конструкций генераторов шумоподобного сигнала. В такой генераторной схеме усилитель на мощных полевых транзисторах работал в режиме линейного усиления вблизи точки с максимально возможным КПД, а хаотическая динамика определялась только нелинейностью спин-волновой линии. Эти результаты были сразу доложены на научном семинаре кафедры и вызвали интерес не только у молодых специалистов кафедры, но и у «сторожилков» генераторного направления, к числу которых относились профессора Ю. А. Калинин и Ю. Д. Жарков.

Юрий Дмитриевич Жарков совместно с Борисом Савельевичем Дмитриевым (проработавшим долгое время на кафедре общей физики) занимались экспериментальными исследованиями хаотической динамики кольцевого генератора, собранного на основе многорезонаторного

пролетного клистрона. Об этом генераторе Дмитрий Иванович говорил как еще об одной «100-долларовой идее», которая дала пролетному клистрону вторую жизнь. Однако далеко не все были так благосклонны к исследованиям, проводимым в научной группе Жаркова–Дмитриева. Вспоминается наше поездка в Крым в начале 2000-х годов на конференцию КрыМиКо, где у Бориса Савельевича, как он выразился позже, появился «поклонник» в лице Евгения Анатольевича Мясина. Евгений Анатольевич дал понять, что все то, что рассказывает Борис Савельевич, уже давно известно и аналогичный принцип получения хаотического сигнала был разработан в 1960-е годы в ИРЭ РАН и лег в основу создания «шумотрона» — микроволнового генератора, выполненного на лампах бегущей волны. Борис Савельевич всячески успокаивал Евгения Анатольевича и говорил, что он ни в коем случае не претендует на пальму первенства в этом направлении, а старается показать, что тот метод, который использовался в схеме «шумотрона» на ЛБВ, может быть применен и для получения хаотического сигнала в автогенераторе на пролетном клистроне. После этого все недоразумения были сняты. Позднее Дмитрий Иванович попросил прочитать Е. А. Мясина лекцию по «шумотрону» («Исследование генерации СВЧ-шума в ИРЭ АН СССР 1962–1967 годов — начало нового научного направления») на X Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», которая проводилась в Саратове в пансионате «Волжские Дали» в октябре 2013 года.

Юрий Дмитриевич и Борис Савельевич много времени посвящали физическому эксперименту, который порой проводился в очень непростых бытовых условиях. Их лаборатория физического эксперимента в микроволновой электронике находилась на 1-м этаже 8-го корпуса СГУ, на бывших площадях НИИМФа, в комнате № 42 (сейчас, после объединения трех физических факультетов в Институт физики — это комната № 115), которая в начале 2000-х годов очень плохо отапливалась зимой, как и большинство лабораторий бывшего НИИМФа. В зимнее время температура в помещении не поднималась выше  $+15\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Я помню, как Юрий Дмитриевич с Борисом Савельевичем и Валентином Николаевичем Скороходовым (зав. учебной лабораторией кафедры электроники, колебаний и волн) в зимней одежде, шапках и перчатках сидели за установкой и, подшучивая друг над другом, проводили эксперимент. Порой мне казалось, что они даже не замечают, в каких условиях работают, так увлеченно они обсуждали постановку эксперимента, а затем полученные результаты. Они так «заражали» своим энтузиазмом окружающих их людей, что одна из студенток 5-го курса (тогда еще специалитета) факультета нелинейных процессов (ФНП) попросила Бориса Савельевича дать ей дипломную работу, которая непременно должна была быть посвящена радиофизическому эксперименту. Этой студенткой была Ольга Хилюшкина, блестяще защитившая свою дипломную работу и ставшая, наверное, первой студенткой ФНП, отказавшейся от набившего уже оскомину численного моделирования и взявшей за проведение радиофизического эксперимента с клистронным автогенератором. Результаты экспериментальных исследований с клистронными генераторами хаоса, полученные в группе Жаркова–Дмитриева, легли в основу двух докторских диссертаций (Н. М. Рыскина и Б. С. Дмитриева).

К клистронной тематике я присоединился лишь в 2009 году, когда совместно с научной группой Жаркова–Дмитриева был поставлен эксперимент по автономной генерации хаотических радиоимпульсов при одновременном использовании в кольце как пролетного клистрона, так и спин-волновой линии задержки. Я был очень рад такому сотрудничеству, так как это давало возможность перейти к изучению нелинейных эффектов в гибридных генераторных схемах, содержащих вакуумные и твердотельные элементы. Дальнейшее развитие это направление получило спустя 8 лет, когда в 2017 году Дмитрий Иванович предложил Валентину Николаевичу Скороходову и мне использовать ЛБВ, работающую в режиме срыва Компфнера, в качестве насыщающегося поглотителя для генерации последовательностей ультракоротких импульсов (УКИ) огибающей. К этому времени уже ушли из жизни М. А. Григорьев и Ю. Д. Жарков. Однако Борис Савельевич всячески поддерживал наши начинания и постоянно интересовался полученными

результатами, даже несмотря на возникшие у него к тому времени проблемы со здоровьем. Ведь кандидатская диссертация Б. С. Дмитриева, которую он защитил в 1966 году под руководством Ю. Д. Жаркова, была посвящена, в том числе, и исследованию срыва Компфнера. На кольцевой генераторной схеме с двумя ЛБВ (усилителем и подавителем) и полосовым фильтром нам не удалось получить режим пассивной синхронизации мод, но когда мы добавили в схему с нелинейным ЛБВ-подавителем нелинейную спин-волновую линию задержки, а в качестве усилителей установили пролетные клистроны на входе каждого нелинейного элемента, мы получили генерацию УКИ. Однако в этом случае генерировались уже более сложные импульсные структуры, возникающие за счет модуляции добротности кольцевого резонатора как спиновыми волнами, так и насыщающимся поглотителем. Это привело к хаотической модуляции периодической последовательности УКИ спиновыми волнами, в результате которой формировались хаотические последовательности спин-волновых импульсов большой длительности, в которые были «вложены» периодические последовательности УКИ огибающей. Все это было очень интересно, к тому же этот интерес «подогревался» теоретическими работами профессора Наума Самуиловича Гинзбурга из Института прикладной физики РАН (Нижний Новгород). Дмитрий Иванович был очень рад нашему успеху, ведь срыв Компфнера находится на эмблеме кафедры и является, своего рода, ее символом.

Кафедра электроники оказала существенное влияние не только на мою судьбу, но и на судьбу моих родителей. В середине 1960-х годов моя мама была студенткой кафедры, где читал лекции к.ф.-м.н., доцент Юрий Дмитриевич Жарков, а практические занятия вел молодой аспирант кафедры Николай Иванович Синицын (аспирант В. Н. Шевчика, друг со школьной скамьи Д. И. Трубецкова, д.ф.-м.н., профессор, Заслуженный деятель науки РФ и Лауреат Государственной премии РФ). Мой папа в 1973 году представлял свою диссертационную работу на знаменитом научном семинаре кафедры, возглавляемой В. Н. Шевчиком. Его научным руководителем был Альберт Маркович Кац (тоже выпускник кафедры электроники), который в то время руководил теоретическим отделом НИИ «Волна», а одним из официальных оппонентов диссертационной работы — Д. И. Трубецков. Наконец, моя супруга окончила кафедру электроники, колебаний и волн и в настоящее время работает на этой кафедре. Фактически, кафедра электроники стала для нашей семьи вторым домом, наполнив нашу жизнь смыслом и гармонией.

За последние 10 лет коллектив кафедры электроники, колебаний и волн существенно обновился. Ушли из жизни Д. И. Трубецков, М. А. Григорьев, Ю. Д. Жарков, Ю. А. Калинин и А. П. Соловьев. По разным причинам оставили кафедру д.ф.-м.н., профессор А. Е. Храмов, д.ф.-м.н. профессор А. А. Короновский, к.ф.-м.н., профессор Ю. Г. Гамаюнов и к.ф.-м.н., доцент Г. М. Вдовина. Однако появились и новые молодые сотрудники: к.ф.-м.н., доцент А. В. Титов, ассистенты А. А. Фунтов, М. Д. Амельченко и А. С. Бир. Сегодня на кафедре существуют два научных направления. Одно из них является традиционным для кафедры — это направление «Вакуумная СВЧ-электроника», которое поддерживается учениками и последователями Д. И. Трубецкова (к.ф.-м.н., доцентами кафедры А. В. Титовым, В. Н. Титовым, И. С. Ремпен, Е. Н. Егоровым, зав. учебной лабораторией В. Н. Скороходовым, ассистентом А. А. Фунтовым), а другое является относительно новым — это направление «Спин-волновая электроника и магнитные метаматериалы», которое поддерживается к.ф.-м.н., доцентом С. В. Гришиным, ассистентами и аспирантами кафедры М. Д. Амельченко, А. С. Бир и А. В. Богомоловой. Талантливая молодежь, пришедшая работать на кафедру, активно участвует в выполнении грантов РФФИ и РНФ, а успехи некоторых из них (Бир А. С.) в учебной и научной жизни кафедры получили признание в виде индивидуальной стипендии Правительства РФ.

Время не стоит на месте. Хочется верить, что по прошествии следующих 10 лет кафедра отметит свое 80-летие, а нынешняя молодежь, пришедшая работать на кафедру, будет достойно продолжать и поддерживать ее традиции.

## Воспоминания о хорошем человеке

*М. И. Перченко*

Традиционно, записывая воспоминания о кафедре, мы в первую очередь вспоминаем о преподавателях, и зачастую забываем людей, без которых на самом деле работа кафедры была бы невозможна — о тех, кто в отделе кадров значится под сухими словами «технический персонал». Об одном таком человеке, который был частью кафедры электроники с самого момента ее появления, мне и хотелось бы рассказать. Это Павел Васильевич Можаяев, занимавший в то время, когда я начал работать на кафедре, должность старшего лаборанта — высокий, худощавый человек, фронтовик, кавалер ордена Славы III степени. Все 13 работ в практикуме «Электронные и ионные приборы», который до сих пор функционирует на кафедре, именно он воплотил «в железе» в прекрасном схемном и дизайнерском исполнении и с высокой степенью надежности. Это был, что называется, мастер на все руки: и электротехник, и радиотехник, и художник-дизайнер, и слесарь, и плотник, и токарь и т. д. При этом почти все свои изделия и поделки он изготавливал из деталей, корпусов и «внутренностей» отслуживших свой срок приборов, устройств, оборудования, в общем, всего того, что он сам называл «подножный корм». Это он изготовил на пластиковом щите эмблему кафедры, с которой сотрудники выходили на ноябрьские и майские демонстрации во времена СССР, делал всевозможные значки, нашивки, брелоки к праздникам, юбилеям и ко всевозможным мероприятиям.

В личном плане это был исключительно скромный и немногословный человек. Например, о своем боевом ранении он рассказал так: «Да, осколок пролетел, задел челюсть; так сказать, подправил немного» (произнёс это с легкой усмешкой и провёл тыльной стороной ладони вдоль деформированной челюсти). О его награждении на сайте «Память народа» я прочитал: «в боях в селе Вассерборн, с немецкими захватчиками, на западном берегу реки Одер с 27 по 31.1.45 года — где батальоном был захвачен плацдарм — тов. Можаяев в составе расчета отразил 2 яростных контратаки врага. 29.1.45 года — немцы особенно жестоко лезли в контратаку, кончились мины — тов. Можаяев вместе с расчетом, с винтовками в руках, решительно отражают и эту контратаку, уничтожив при этом 20 гитлеровцев. В этом бою тов. Можаяев был ранен, но после перевязки вернулся в строй и продолжал отражать атаки врага».

П. В. Можаяев начал работать в СГУ с июня 1947 года, сперва в должности лаборанта, затем старшего лаборанта, впоследствии заведующего лабораторией. В 1970-х годах на кафедре стал формироваться новый практикум, по квантовой электронике. Павел Васильевич неоднократно консультировал меня при постановке лабораторных работ в этом практикуме, при этом демонстрируя свою высочайшую квалификацию и мастерство.

Так и хочется сказать — на таких людях держится наша земля.

## Колебания, волны, электроны

*И. С. Ремпен*

Моя жизнь связана с кафедрой электроники с 1991 года, когда по совету Дмитрия Ивановича Трубецкого, хорошо знавшего мою маму, я поступила на физический факультет Саратовского университета. Определенную роль в моем решении сыграло и то, что моим одноклассником был сын одного из «электронщиков», старых выпускников кафедры, Владимира Алексеевича Исаева, бывшего, кстати, в числе организаторов самых первых Школ-семинаров по электронике СВЧ в Саратове. В. А. Исаев тогда произвел на нас, школьников, большое впечатление своими рассказами о физике и о жизни.

Прием на физический факультет тогда был очень большой, более 300 человек, делившихся на два потока — физика и радиофизика. На кафедре электроники и волновых процессов (так она в то время называлась) и кафедре радиофизики набирали по 30 с лишним человек, которых разбивали на три группы. До сих пор я хорошо помню номера: группы 121, 122 относились к кафедре радиофизики, 123 и 124 — к кафедре электроники. Я попала в смешанную группу 122/123, в которой вплоть до 5 курса вместе обучались студенты обеих кафедр. В группе из двадцати студентов было всего три девочки, а после первой же сессии осталась лишь одна я.

Учебный процесс начинался тогда не с 1 сентября, а с 1 октября, а в сентябре студенты ездили в колхоз на уборку урожая. 1991 год оказался последним, когда студентов Саратовского университета отправляли в колхоз. Во мне и моих однокурсниках эта поездка оставила исключительно приятные воспоминания. Спартанские условия жизни и необходимость выезжать в поле и по несколько часов в день убирать капусту несколько нас не смущали в 17–18 лет. А остальное время было заполнено общением, песнями под гитару. Этот месяц дал нам возможность познакомиться и подружиться с новыми товарищами.

Университетская учеба была поначалу во многом непривычна. Два больших корпуса, связанных переходом, в которых сначала можно было заблудиться. Конспекты лекций, которые нужно было непрерывно писать, пока не уставала рука. Высшая математика, физические дисциплины, которые были намного сложнее школьного уровня для всех, кроме выпускников математической спецшколы № 13 (будущего ФТЛ).

Помню, с каким интересом мы читали вывешенный на кафедре список курсовых работ для 1 курса. Там было столько незнакомых для нас загадочных слов, например, «фазовый портрет». Я записалась на курсовую к Д. И. Трубецкову, которая носила не менее интригующее для первокурсника название «Скоростная модуляция и группировка электронного потока» и была посвящена ознакомлению с работой пролетного клистрона.

На кафедре электроники в то время подобрался очень сильный коллектив. Кроме заведующего, члена-корреспондента РАН Д. И. Трубецкова, на кафедре работали профессор Дмитрий Юрьевич Жарков, Михаил Алексеевич Григорьев, Владимир Степанович Андрушкевич, а также доценты Юрий Григорьевич Гамаюнов, Борис Геннадьевич Цикин — все старые «электронщики». Студенты кафедры получали очень сильные знания по СВЧ-электронике, включая такие специализированные курсы, как «Электронные и ионные пучки» (Ю. Д. Жарков), «Твердотельная СВЧ электроника» (М. А. Григорьев), «Автоматизированное проектирование радиоэлектронных устройств» (Ю. А. Калинин). На 5 курсе был также введен спецкурс «Современные проблемы радиофизики и науки о колебаниях и волнах», в котором молодые специалисты кафедры по очереди читали нам небольшие курсы по научным проблемам, которыми они сами занимались. Самым молодым из таких специалистов стал А. А. Короновский, которому сразу же по окончании университета и поступлении в аспирантуру был поручен небольшой курс, связанный с нелинейными моделями динамических систем различной природы.

1990-е годы были очень сложным, переломным временем. Если в предыдущие десятилетия для выпускников вузов существовало распределение по рабочим местам, и они четко понимали свои возможности по трудоустройству, то с распадом Советского Союза эта система была разрушена. Выпускники вынуждены были сами устраиваться на работу, и большинство — отнюдь не по специальности. Для многих моих однокурсников это стало психологической травмой — в 1991 году еще оканчивать школу и поступать в университет с мыслью «я буду физиком», а уже на старших курсах искать себе место работы где-нибудь в торговых фирмах или экстренно заканчивать курсы бухгалтеров. Да что там студенты, очень многие сложившиеся специалисты вынуждены были оставлять свою профессию для того чтобы заработать на жизнь, и во второй половине 1990-х — начале 2000-х годов с физического факультета ушло много молодых сотрудников.

В это нелегкое время для меня была крайне важна верность выбранной профессии, университету. Я поступила в аспирантуру к Д. И. Трубецкову и занялась численным моделированием распределенных волновых систем. Но жизнь вновь внесла свои коррективы, и на втором году аспирантуры я ушла в декретный отпуск. В то же время Дмитрий Иванович занимал должность ректора Саратовского университета, его загруженность была огромной, что вынуждало аспирантов полагаться по большей части только на самих себя. Но в 2001 году произошло событие, ставшее решающим в моей жизни. Как я уже упоминала, из-за тяжелого экономического кризиса 1990-х годов многие сотрудники ушли с кафедры, в том числе молодые доценты Василий Геннадьевич Анфиногентов и Алексей Александрович Кипчатов. И Александр Евгеньевич Храмов, исполнявший в то время обязанности заместителя заведующего кафедрой, предложил мне вернуться на кафедру в качестве ассистента, а также заняться под его руководством научной работой, связанной с численным моделированием некоторых систем СВЧ-электроники. Я согласилась. Хотя традиционно молодые сотрудники, начинающие работать на кафедре, вели лишь семинары и лабораторные занятия, но я сразу получила лекционный курс «Электронные и ионные приборы», а также сложную и ответственную кафедральную обязанность по расчету учебной нагрузки, чем впоследствии занималась много лет. Это были непростые, но очень интересные годы на новом молодом факультете (я уходила в декрет с физического факультета, а вернулась уже на факультет нелинейных процессов), прошедшие в прекрасном и дружном научном коллективе под руководством Алексея Александровича Короновского и Александра Евгеньевича Храмова. Вскоре к коллективу присоединились талантливые молодые сотрудники Евгений Николаевич Егоров, Анастасия Евгеньевна Храмова, Ольга Игоревна Москаленко, Геннадий Борисович Астафьев, Семен Андреевич Куркин, Алексей Александрович Овчинников и другие.



Научный семинар кафедры электроники, колебаний и волн, 2014. Слева направо: А. Г. Рожнев, Е. Н. Егоров (ведущий семинара), Д. И. Трубецков, Ю. А. Калинин, О. И. Москаленко, С. В. Гришин, А. А. Короновский

Research seminar of the Department of Electronics, 2014. From left to right: A. G. Rozhnev, E. N. Egorov, D. I. Trubetskov, Yu. A. Kalinin, O. I. Moskalenko, S. V. Grishin, A. A. Koronovskii

В 2007 году я защитила кандидатскую диссертацию по тематике, связанной с нелинейными колебаниями в электронных потоках и управления ими с помощью внешних сигналов и различных типов обратной связи. Часть материала диссертации, полученного под руководством Александра Евгеньевича Храмова, к тому времени уже доктора физ.-мат. наук, вошла в монографию Д. И. Трубецкого, А. Е. Храмова «Лекции по СВЧ электронике для физиков», по которой уже почти двадцать лет занимаются студенты кафедры электроники. Для работы также были очень полезны ценные обсуждения решаемых задач с профессором кафедры Юрием Александровичем Калининским. В его научной группе были получены экспериментальные результаты по динамике электронных потоков, продемонстрировавшие интересное совпадение с численными результатами моей работы. Поскольку в диссертации использовались традиционные методы радиофизики и нелинейной динамики, а также рассматривались физические процессы, протекающие в электронных потоках, было решено представить диссертацию по двум специальностям — «Радиофизика» и «Физическая электроника». Такое решение подсказывал и труд научных руководителей работы — Дмитрия Ивановича Трубецкого и Александра Евгеньевича Храмова. Оппонентами диссертации стали доктор физико-математических наук В. Б. Казанцев (Нижний Новгород) и Б. Е. Железковский (Саратов). Осень 2007 года для кафедры была сложной, но плодотворной — в это время диссертацию на соискание степени кандидата физ.-мат. наук защищал также ассистент кафедры Евгений Николаевич Егоров.

*Нелинейная динамика и синергетика как научное направление кафедры.* Нужно отметить, что основное научное направление кафедры — электроника сверхвысоких частот — с самого начала своего появления было тесно связано с такими фундаментальными областями, как теория колебаний и волн, теория нелинейных процессов. Начиная с 1960-х годов теоретическое и экспериментальное исследование колебательных и волновых процессов получило значительное развитие на кафедре, что нашло отражение и в изменении ее названия в 1986 году на «кафедра электроники и волновых процессов». В 1984 году в издательстве «Наука» вышла монография М. И. Рабиновича, Д. И. Трубецкого «Введение в теорию колебаний и волн», которая носила фундаментальный характер, была вскоре переведена на английский язык, впоследствии выдержала еще несколько переизданий и до сих пор не утратила своей значимости. Можно сказать, что электроника одной из первых стала «нелинейной» наукой, применяя для своих задач различные методы нелинейной динамики. Одно из проявлений тесной связи электроники и современной нелинейной науки в том, что ни та, ни другая невозможны без численного эксперимента, который и оказал большое влияние на развитие этого направления на кафедре электроники и в НИИМФе СГУ [1]. Успехи нелинейной науки привели к тому, что специалисты в области СВЧ-электроники стали уделять большое внимание изучению типично нелинейных явлений в электронных потоках, взаимодействующих с электрическими и магнитными полями: режимы возникновения динамического хаоса, солитоны, фрактальные объекты, образование структур. Это отразилось и на учебном процессе: были расширены учебные курсы, связанные с линейными и нелинейными колебаниями и волнами, появились новые дисциплины, такие как «Динамические системы и бифуркации», «Динамический хаос», «Теория катастроф», которые разработали и проводили на факультете профессор Борис Петрович Безручко, Сергей Петрович Кузнецов, Александр Петрович Кузнецов, Александр Петрович Четвериков, молодые сотрудники кафедры электроники Леонид Валерьевич Красичков и Елена Сумбатовна Мчедлова. В конце 1990-х годов на кафедре был организован новый лабораторный практикум «Волны, структуры, самоорганизация», через который проходило в год более 200 студентов-физиков. Заведующим практикумом стал профессор кафедры электроники Борис Петрович Безручко, и его ценный вклад в работу данной лаборатории трудно переоценить. Наглядные и зрелищные работы «Конвективные структуры (ячейки Бенара)», «Рябь Фарадея», «Электромагнитные солитоны», «Автоволны и структуры в химических системах (“йодные часы”))», «Автомодуляционные явления и хаос в лампе обратной волны» стали для кафедры новым значительным шагом в преподавании «нелинейной науки».





Встреча преподавателей кафедры электроники, колебаний и волн с первокурсниками. Слева направо: В. Н. Скороходов, Е. Н. Егоров, А. Е. Храмов, Д. И. Трубецков, А. В. Титов, Г. М. Вдовина, М. И. Перченко, А. П. Соловьев  
Meeting of teachers of the Department of Electronics with first-year students. From left to right: V. N. Skorokhodov, E. N. Egorov, A. E. Hramov, D. I. Trubetskov, A. V. Titov, G. M. Vdovina, M. I. Perchenko, A. P. Soloviev

В 2001 году на кафедре появился новый практикум «Прикладная нелинейная динамика в электронике», позволяющий студентам приобретать ценные практические навыки работы с электронными схемами, а также изучать различные колебательные и волновые явления в маломощных радиотехнических цепях. Ответственным за практикум был назначен занимавший тогда должность инженера кафедры аспирант Евгений Николаевич Егоров. За прошедшие годы в практикуме было поставлено восемь работ, сотрудниками кафедры написаны и изданы методические пособия к ним, и на этом возможности практикума далеко не исчерпываются.

Надо сказать, что Дмитрий Иванович Трубецков всегда был в тренде самых новых, передовых идей науки, причем не только в узкоспециализированном, но и в самом широком смысле. После выхода в 1977 году книги Г. Хакена «Синергетика» многие ученые заинтересовались новыми подходами, которые представляла эта отрасль нелинейной динамики — наука об образовании структур в сложных системах. На передний план выступала не природа той или иной системы, а принципы ее функционирования. К 1990-м годам благодаря работам И. С. Пригожина, Н. Н. Моисеева, В. И. Арнольда, Ю. А. Данилова идеи междисциплинарности, возможности применения общего математического аппарата и методик для описания систем самой различной природы получили широкое распространение. В деятельности кафедры электроники и волновых процессов это отразилось путем создания уникального междисциплинарного курса «Синергетика», который читался сотрудниками кафедры для студентов философского, экономического, геологического, социально-гуманитарного факультетов, факультета компьютерных наук и информационных технологий [1]. Под руководством А. Е. Храмова и А. А. Короновского был также создан компьютерный практикум, в который входила демонстрация и изучение экспериментов по образованию структур в открытых системах физической и химической природы. Я оказалась одной из первых студентов, активно вовлеченных в новое направление. По инициативе Дмитрия Ивановича на 5-м курсе я занималась моделированием систем различной природы, и моя дипломная работа была посвящена разработке математических моделей для динамики некоторых биологических, экологических и экономических систем. Впоследствии, как и все молодые сотрудники кафедры, я вела часть обширной учебной нагрузки, связанной с курсом «Синергетика». Совместно с другими подразделениями СГУ кафедра электроники проводила также междисциплинарные научные конференции, затрагивавшие не только естественные, но и гуманитарные науки. Итогом этой деятельности

стало присуждение Д. И. Трубецкову премии Президента в области образования за создание системы преподавания естественных наук гуманитариям и создание под его руководством научной школы по нелинейной динамике [3]. Также по инициативе Д. И. Трубецкого, заведующего кафедрой электроники, в 1993 году в СГУ был создан уникальный единственный в России журнал с «нелинейно-динамической» тематикой — «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

*Школы и конференции.* Помимо научной и преподавательской деятельности, сотрудники кафедры электроники всегда уделяли много сил организации научных мероприятий, участниками которых были как маститые лекторы с известными в науке именами, так и молодые ученые. В первую очередь из таких мероприятий нужно назвать зимние Школы-семинары по электронике сверхвысоких частот для инженеров и научных работников. Первая такая школа состоялась в 1970 году, и с тех пор они проводились регулярно каждые 2–3 года. Популярность этих школ стала стремительно расти, география участников расширялась с каждым разом. За прошедшие годы в них принимали участие такие крупные ученые как Л. А. Вайнштейн, лауреат Ленинской премии Д. М. Петров, В. Т. Овчаров, Р. А. Силин, М. И. Рабинович, а также, разумеется, заведующий кафедрой электроники В. Н. Шевчик и практически все физики-«электронщики» из Саратовского университета и других саратовских вузов и НИИ [2]. Почти все лекции носили оригинальный характер, в них излагались задачи и результаты, которые еще не были в большинстве своем опубликованы. Программа школ была такой насыщенной, что занятия продолжались с утра до позднего вечера. Впоследствии, помимо лекционной части, школа-семинар стала включать небольшие секционные заседания с научными докладами, а также стендовые секции с сообщениями молодых ученых. С тех пор, как Дмитрий Иванович стал заведующим кафедрой электроники, он всегда активно занимался популяризацией науки, привлекая к этому и других своих коллег. Так, в 1988 году появилась идея проведения уникальных мероприятий — выездных научных школ для школьников, на которых талантливые старшеклассники, интересующиеся наукой, могли бы «из первых рук» познакомиться с современными научными направлениями и достижениями, а возможно, увидеть свой будущий путь в науку. Первые школы, носившие название «Колебания, волны, электроны», стали проводиться раз в два года во время осенних каникул в саратовском пансионате «Волжские дали». К участию в них привлекались ученики как из школ Саратова и Энгельса, так и из районных центров и сел. Стать участником школы мог любой ученик, подавший заявку и приславший решение заранее распространяемых конкурсных заданий. Участие в мероприятии для школьников было бесплатным.

Участники школ слушали лекции известных ученых-физиков, где в интересной доступной форме излагались новые и необычные физические задачи, любопытные факты из истории физики. Помимо преподавателей СГУ организаторы привлекали к работе школ интересных людей из других городов. Частыми гостями на школах были выдающийся историк и популяризатор науки, профессор МГУ Юлий Александрович Данилов, профессор Гематологического научного центра РАМН Георгий Теодорович Гурия, профессор Института общей физики РАН Наталья Александровна Ирисова.

Помимо лекций, школьников ждали также семинары, посвященные решению задач, небольшой компьютерный класс, специально оборудуемый на время проведения школы (что в 1980–1990-е годы было необычным для многих, особенно сельских школьников), интеллектуальные игры (традиционно проводилась игра «Что? Где? Когда?»), академбои, круглые столы, дискуссии, а также большое количество неформального общения в непринужденной обстановке. Это общение происходило во время прогулок по парку пансионата в прекрасную осеннюю погоду, в перерывах между лекциями или же во время «научных чаепитий», проводившихся в свободное вечернее время в неофициальной обстановке где-нибудь в холле или номере пансионата. Школьники, разбивавшиеся для удобства работы с ними на небольшие «отряды» человек по 10–12, по очереди приглашали к себе двоих или троих лекторов, и в такой непринужденной атмосфере допоздна

велись беседы на самые разные научные и околонаучные темы. Дмитрий Иванович Трубецков и Юлий Александрович Данилов были самыми любимыми гостями таких чаепитий, участники школ вели между собой шуточные бои за право пригласить их к себе.

Для работы на школах традиционно привлекались также студенты кафедры электроники. Во время учебы в университете я побывала на двух таких школах — в 1993 и 1995 годах. К каждому «отряду» школьников приставлялся студент в качестве «вожатого». Мы помогали организовывать день участников школ, их распорядок, вместе с ними решали задачи, с большим интересом посещали лекции и «научные чаепития», занимались подготовкой и проведением интеллектуальных игр, а также ежедневно собирали материал, сочиняли заметки и выпускали стенгазету школы. Если в более поздние годы развитие цифровой техники дало возможность снабжать стенгазету свежими репортажными фотографиями, то в 1990-е годы мы для ее иллюстрации использовали скетчи и шаржи. «Художником» стенгазеты школы в те годы был студент кафедры электроники Антон Попов. В 1995 году среди «вожатых» на школе побывал также будущий сотрудник кафедры, а в то время студент 4 курса Владимир Титов.

Помимо Саратова и Саратовской области на «Нелинейные дни» также регулярно приезжали делегации школьников из Ижевска, Нижнего Новгорода, Москвы, в 1993 году на школе присутствовали школьники из Германии, которых мне, тогда студентке 3-го курса, довелось опекать как «вожатой». Возраст немецких школьников совпадал с возрастом наших студентов младших курсов. Общение с ними не представляло труда, так как некоторые из них изучали в школе русский язык, а остальные — английский, которым я после английской спецшколы вполне свободно



Лекторы и «вожатые» школы «Колебания. Волны. Электроны» для одаренных школьников. Пансионат «Волжские дали», 1995. Слева направо: Юлий Александрович Данилов, Дмитрий Иванович Трубецков, Денис Захаров, Ирина Ремпен, Елена Коробова (Трубецкова), Екатерина Мельникова, Наталия Михайловна Астафьева, Дмитрий Громов, Владимир Титов, Вероника Иосифовна Лабунская, Антон Попов, Евгений Смирнов

Lecturers and counselors on the School "Oscillations. Waves. Electrons", 1995. From left to right: Yu. A. Danilov, D. I. Trubetskov, D. Zakharov, I. Rempen, E. Korobova, E. Melnikova, N.M. Astafyeva, D. Gromov, V. Titov, V. I. Labunskaya, A. Popov, E. Smirnov

владела на разговорном уровне. Нам даже удалось вовлечь команду немецких школьников в игру «Что? Где? Когда?», подготовив специально для них вопросы на немецком и английском языках. Впоследствии интеллектуальная игра «Что? Где? Когда?» (хотя по форме это был скорее «Брейн-ринг») стала гвоздем программы «детских» школ, участники всегда ждали ее с нетерпением.

После небольшого перерыва в 1990-е годы «детская» школа, любимое детище кафедры электроники, возобновилась под новым названием — «Нелинейные дни в Саратове для молодых», связанным с новым научным направлением кафедры и факультета. Целью новых школ стало привлечение талантливой молодежи к нелинейной динамике. Изменился состав участников школы. Если на первых школах слушателями были исключительно учащиеся старших классов, то теперь участниками стали также студенты и аспиранты как факультета нелинейных процессов, так и других факультетов СГУ и других вузов Саратова. В программе школы появилась «конференционная» часть, на которой аспиранты и студенты, а иногда и школьники, выступали с научными докладами, как устными, так и стендовыми. По итогам школ в издательстве «ГосУНЦ «Колледж», а затем в РИО журнала «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика» выходили сборники научных трудов докладчиков школы.

Я неоднократно входила в оргкомитет школ «Нелинейные дни», уже будучи преподавателем кафедры. Очень теплые воспоминания остались от этих лет, от совместной деятельности вместе с А. А. Короновским, А. Е. Храмовым, которые не только читали лекции для участников школы, но успевали также выполнять большую работу по организации и информационному обеспечению школ. Поскольку число участников школ значительно увеличилось, возможность организовать проживание их всех в пансионате была не всегда. В этих случаях организовывался специальный автобус, который утром и вечером доставлял участников от 8 корпуса СГУ к месту проведения школы. Неоднократно приходилось нам в течение дня ездить за организационными материалами в Саратов, затем возвращаться, вечером проводить какое-нибудь запланированное мероприятие со школьниками, а затем до середины ночи готовить и распечатывать задачи к семинару или наградные грамоты для участников школы.

Огромная заслуга школ в том, что они создавали прекрасные условия для неформального общения разных поколений людей науки, давали толчок в науку молодежи. Многие из школьников и студентов — участников первых школ — успели не только закончить вузы, но также защитить кандидатские и даже докторские диссертации. Но воспоминания о «детских», «электронных» и «нелинейных» школах они сохранили на всю жизнь, как и теплое отношение к нелинейной науке и к организаторам этих школ — сотрудникам факультета нелинейных процессов и кафедры электроники, колебаний и волн.

Несмотря на все сложности нового времени, включая пандемию Covid-19 2020–2022 годов, традиция «Нелинейных школ для молодежи», организуемых учеными-физиками, продолжается. Последняя из таких школ была проведена в 2021 году [4]. На школе прочитали свои лекции 12 ведущих учёных из Саратова, Нижнего Новгорода, Москвы и других городов, объединённые общим делом изучения колебаний и волн, а также представили свои доклады почти пятьдесят молодых участников, которые по итогам школы получили возможность опубликовать статьи по материалам своих докладов в журнале «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

В последние годы кафедра электроники, колебаний и волн, вместе с СВЧ-электроникой и «нелинейной наукой» вновь переживает непростые времена. Но учебная и научная работа продолжается. Активные молодые сотрудники — доцент Алексей Владимирович Титов, ассистенты Александр Андреевич Фунтов, Мария Денисовна Амельченко, Анастасия Сергеевна Бир — ученики Дмитрия Ивановича Трубецкого и Сергея Валерьевича Гришина — вносили и вносят свой вклад в развитие кафедры, поднимают новые научные проблемы, решают новые задачи и, поддерживая славные традиции кафедры, вкладывают свои силы в подготовку новых молодых кадров — физиков и «электронщиков».



Коллектив кафедры электроники, колебаний и волн, 2022. Слева направо: М. И. Перченко, В. Н. Титов, И. С. Ремпен, Е. Н. Егоров, С. В. Гришин, А. С. Бир, В. Н. Скороходов, А. А. Фунтов, М. А. Амельченко, А. В. Титов,

The staff of the Department of Electronics, Oscillations and Waves, 2022. From left to right: M. I. Perchenko, V. N. Titov, I. S. Rempen, E. N. Egorov, S. V. Grishin, A. S. Bir, A. A. Funtov, M. A. Amelchenko, A. V. Titov

Заведующий кафедрой электроники на протяжении почти 40 лет, Д. И. Трубецков, наш Дмитрий Иванович, был прекрасным лектором и оратором, очень любил стихи, знал много их на память и сочинял сам, и практически ни одна его торжественная речь не обходилась без процитированных к месту стихотворных строк. Мне хочется поддержать эту традицию и завершить свой рассказ близкими мне строками А. Дольского.

Чтобы судьбу, как задачу, решить,  
 Мало постигнуть азы мироздания,  
 Есть еще образование души —  
 Самое высшее образование.

### Список литературы

1. Кафедра электроники, колебаний и волн. Прошлое, настоящее, будущее. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. 162 с.
2. Арансон И. С., Пиковский А. С., Цимринг Л. Ш. К 80-летию Михаила Израилевича Рабиновича // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 217–219. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-217-219.
3. Шараевский Ю. П., Гришин С. В., Вдовина Г. М. Школа Д. И. Трубецкова // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 676–698. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-676-698.
4. Сысоев И. В. Нелинейные дни в Саратове для молодых // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 6. С. 833–834. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-833-834.

### References

1. Department of Electronics, Oscillations and Waves. Past, Present, Future. Saratov: «College»; 2002. 162 p. (in Russian).

2. Aranson IS, Pikovsky AS, Cimring LS. On the 80th anniversary of Mikhail I. Rabinovich. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(2):217–219 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-217-219.
3. Sharaevsky YP, Grishin SV, Vdovina GM. Trubetskov Scientific School. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(4):676–698 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-676-698.
4. Sysoev IV. Nonlinear days in Saratov for young scientists. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(6):833–834 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-833-834.



*Гришин Сергей Валерьевич* — родился в 1974 году. Окончил физический факультет СГУ имени Н. Г. Чернышевского (1997). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2007). Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн Института физики СГУ и старший научный сотрудник лаборатории «Метаматериалы» НИИМФа СГУ. Область научных интересов — нелинейные явления в вакуумной и магнитоэлектронике, генераторы ультракоротких импульсов, метаматериалы на основе гиротропных сред. Автор более 50 научных статей, опубликованных в отечественных и зарубежных журналах, четырех патентов на изобретение и двух патентов на полезную модель. Один из авторов коллективной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот».

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: sergrsh@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0002-3654-3299  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 42293



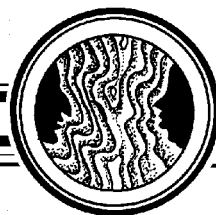
*Ремпен Ирина Сергеевна* — родилась в Саратове (1974). Окончила физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника» (1996). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальностям «Физическая электроника» и «Радиофизика» (2007, СГУ). С 2001 года работает на кафедре электроники, колебаний и волн Саратовского государственного университета, в настоящее время — в должности доцента. Научные интересы — нелинейная динамика, управление хаосом, образование структур, математическое моделирование, СВЧ-электроника, электронно-плазменные системы. Опубликовала свыше 30 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: rempenis@gmail.com  
 ORCID: 0000-0001-8126-235X  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 112570



*Перченко Михаил Иванович* — родился в Саратове (1951). Окончил физический факультет СГУ по специальности «Радиофизика и электроника» (1974). С 1974 года работает на кафедре электроники СГУ. В настоящее время — доцент кафедры электроники, колебаний и волн Института физики СГУ. Автор (соавтор) более 10 учебно-методических пособий и учебных программ. Занимается научной работой в области акустооптической томографии в составе научной группы в лаборатории оптики и спектроскопии НИИМФа. Принимал участие в выполнении НИР, поддержанных грантами Министерства высшего образования, грантами «Университеты России» и др. Более 20 лет входил в состав жюри по проведению городских и областных олимпиад по физике.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: PerchenkoMI@sgu.ru  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 172727



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Персоналии

DOI: 10.18500/0869-6632-003018  
EDN: IAJHYP

### Памяти Полины Соломоновны Ланда

15 февраля 1931 — 21 сентября 2022

*М. Г. Розенблюм*

Потсдамский университет, ФРГ

E-mail: mros@uni-potsdam.de

*Поступила в редакцию 25.10.2022,*

*опубликована онлайн 11.11.2022, опубликована 30.11.2022*

*Для цитирования: Розенблюм М. Г. Памяти Полины Соломоновны Ланда // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 785–787. DOI: 10.18500/0869-6632-003018. EDN: IAJHYP*

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

21 сентября 2022 года ушла из жизни Полина Соломоновна Ланда, доктор физико-математических наук, профессор, член Российского Национального Комитета по теоретической и прикладной механике, бывший член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», признанный авторитет в теории нелинейных колебаний и волн.

Полина Соломоновна родилась 15 февраля 1931 года в Киеве. С началом войны семья эвакуировалась на Урал, в село Быньги Невьяновского района Свердловской области, затем в сам Свердловск. Вскоре после окончания войны семья переехала в Москву, где в 1948 году Полина Соломоновна окончила с золотой медалью среднюю школу и поступила без экзаменов на физический факультет МГУ. В 1953 году она получила диплом с отличием и была распределена на работу в закрытое предприятие («почтовый ящик»). В 1956 году Полина Соломоновна



вернулась на свой родной факультет на кафедру общей физики для мехмата и проработала на физфаке МГУ практически всю жизнь, до 2020 года.

В 1960 году Полина Соломоновна защитила кандидатскую диссертацию, озаглавленную «Об устойчивости автоколебательных систем и систем автоматического управления при наличии случайных воздействий». Ее научным руководителем был профессор Сергей Павлович Стрелков — ученик и сотрудник основателей советской школы теории колебаний академиком Л. И. Мандельштама и А. А. Андронов. Всю свою дальнейшую научную жизнь Полина Соломоновна продолжала и развивала идеи этой научной школы.

После защиты П. С. Ланда продолжила работу по теме диссертации, исследуя флаттер крыла самолёта и влияние шумов на автогенераторы, и одновременно занялась новыми задачами. Основным направлением ее работы в те годы стало исследование естественных флуктуаций, автоколебательных режимов и синхронизации мод в лазерах; по результатам этих работ в 1972 году Полина Соломоновна защитила докторскую диссертацию на тему «Исследование динамических и статистических характеристик оптических квантовых генераторов и усилителей». Кроме многочисленных статей по этой тематике ею с соавторами были опубликованы монография [1] и обзор в УФН [2].

Другой областью интересов Полины Соломоновны стало исследование ионизационных волн (страт) в плазме. Эти работы начались с решения прикладных задач. В плазме гелий-неоновых лазеров, работающих на постоянном токе, возникала стратификация разряда. Это нежелательное явление делало невозможным работу гелий-неоновых лазерных гироскопов. Полина Соломоновна рассмотрела условия самовозбуждения страт в низкотемпературной плазме и способы их асинхронного подавления. В дополнение к большой серии статей по этой тематике был опубликован обзор в УФН [3].

В фокусе научных интересов Полины Соломоновны всегда были общие вопросы теории колебаний. В начале восьмидесятых годов вышли две ее основополагающие книги по автоколебаниям [4, 5]. В это же время она активно занялась исследованиями в бурно развивающейся области — хаотической динамике. Её интересовали проблемы перемежаемости, взаимодействия хаотических и периодических систем, механизмы возникновения иррегулярной динамики в автоколебательных системах с инерционным самовозбуждением и в системах с запаздыванием, переходы «хаос – порядок», анализ хаотических систем по экспериментальным данным, и многие другие. Одним из итогов работы этого периода стала вышедшая в 1987 году монография [6], написанная Полиной Соломоновной совместно с Ю. И. Неймарком; через 5 лет вышло английское издание этой книги.

В конце восьмидесятых годов Полина Соломоновна решила ряд задач акустики. Ее интересовали такие проблемы, как роль автоколебаний в механизмах генерации звука в потоках жидкостей и газов, генерация звуковых волн за счет их взаимодействия с источниками тепла, возбуждение гидродинамических и акустических волн в дозвуковых струйных и отрывных течениях.

Как и большинство советских учёных, Полина Соломоновна до перестройки не имела возможности участвовать в международной научной жизни. В девяностые годы, когда такая возможность появилась, Полина Соломоновна выступала с докладами и работала в качестве приглашённого профессора в университетах Германии, Италии, США и Великобритании. Она была членом редакционной коллегии журнала «Chaos, Solitons and Fractals». Для неё это был плодотворный период. В эти годы Полина Соломоновна написала и издала на английском языке монографии [7, 8], а также многочисленные статьи по самой разной тематике. Её основные работы этих лет посвящены индуцированным шумом переходам и транспорту, эффектам стохастического и вибрационного резонанса, акустическому воздействию на турбулентные струи, вибрациям голозовых связок при генерации звуков. Кроме традиционных для физиков объектов исследования, она анализировала такие разные процессы как экономическое развитие общества, измерение



кровенного давления и особенности работы памяти при выполнении арифметических действий. Обсуждая эти и другие приложения, Полина Соломоновна любила подчеркнуть, что «теория колебаний — универсальная наука».

Полина Соломоновна вкладывала много сил в преподавание. Она разработала и читала старшекурсникам и аспирантам такие специальные курсы, как «Автоколебания в распределенных системах», «Лазерные гироскопы», «Нелинейные колебания и волны», «Источники звука», «Нелинейная динамика». Под ее руководством было подготовлено 12 кандидатов физико-математических наук. Она уделяла много времени своим аспирантам, стараясь передать им не только научное знание, но и свое честное и бескомпромиссное отношение к научной деятельности. Всячески помогая своим ученикам, Полина Соломоновна поощряла их самостоятельность и часто настаивала на публикациях без ее соавторства. Осознавая себя продолжателем традиций отечественной школы теории колебаний, Полина Соломоновна считала важным рассказывать своим ученикам временами непростую историю развития советской науки. Многие помнят эти разговоры на ее кухне, за чашкой чая с вареньем её собственного изготовления. Не лишним будет добавить, что она говорила с учениками не только о науке; Полина Соломоновна видела свою задачу педагога в том, чтобы молодые люди не только стали квалифицированными научными сотрудниками, но и умели мыслить свободно и, по ее собственным словам, «понимали, в какой стране они живут».

Те, кому довелось работать с Полиной Соломоновной, учиться у нее или общаться с ней на семинарах и конференциях, никогда ее не забудут.

### Список литературы

1. Зейгер С. Г., Климонтович Ю. Л., Ланда П. С., Ларионцев Е. Г., Фрадкин Э. Е. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах. М.: Наука, 1974. 416 с.
2. Климонтович Ю. Л., Ковалев А. С., Ланда П. С. Естественные флуктуации в лазерах // УФН. 1972. Т. 106, № 2. С. 279–313. DOI: 10.3367/UFNr.0106.197202c.0279.
3. Ланда П. С., Мискинова Н. А., Пономарев Ю. В. Ионизационные волны в низкотемпературной плазме // УФН. 1980. Т. 132, № 4. С. 601–637. DOI: 10.3367/UFNr.0132.198012a.0601.
4. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
5. Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983. 320 с.
6. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.; Neimark Y. I., Landa P. S. Stochastic and Chaotic Oscillations. Dordrecht: Springer, 1992. 500 p. DOI: 10.1007/978-94-011-2596-3.
7. Landa P. S. Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems. Dordrecht: Springer, 1996. 544 p. DOI: 10.1007/978-94-015-8763-1.
8. Landa P. S. Regular and Chaotic Oscillations. Berlin, Heidelberg: Springer, 2001. 397 p. DOI: 10.1007/978-3-540-45252-2.



### **Подписка на печатную версию**

Подписной индекс издания 73498

Оформить подписку на печатную версию можно  
в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» ([ural-press.ru](http://ural-press.ru))

Журнал выходит 6 раз в год

Цена свободная

Электронная версия журнала находится  
в открытом доступе ([andjournal.sgu.ru](http://andjournal.sgu.ru))

Все статьи журнала публикуются на условиях лицензии  
CC-BY 4.0 (Creative Commons Attribution 4.0 International  
License)

### **Адрес редакции (редакционно-издательский отдел):**

410012 Саратов, ул. Большая Казачья, 112А, ауд. 301

**Тел.:** +7 (909) 3367208 (зав. редакцией)

**E-mail:** [andjournal@sgu.ru](mailto:andjournal@sgu.ru)

**Website:** [andjournal.sgu.ru](http://andjournal.sgu.ru)

## EDITOR-IN-CHIEF

*Yu. V. Gulyaev*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

## DEPUTY EDITORS

*I. V. Sysoev*, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. N. Chumachenko*, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

## EDITORIAL BOARD

*V. M. Anikin*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*B. P. Bezruchko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*S. Boccaletti*, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

*A. M. Bykov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

*V. A. Vakorin*, Ph.D., Simon Fraser University (Vancouver, Canada)

*S. V. Gonchenko*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*N. S. Ginzburg*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. S. Dmitriev*, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*S. A. Kashchenko*, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

*A. V. Kraskov*, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

*N. V. Kuznetsov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

*P. S. Landa*, Ph.D., Professor, Moscow State University (Moscow, Russia)

*G. van Luijelaar*, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

*A. Lüttjohann*, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

*G. G. Malinetskii*, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

*V. V. Matrosov*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*I. I. Mokhov*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

*A. B. Neiman*, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

*V. I. Nekorkin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. S. Pikovskiy*, Dr. rer. Nat. habil., Professor, University of Potsdam (Potsdam, Germany)

*A. N. Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

*A. V. Porubov*, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

*Yu. M. Romanovsky*, Ph.D., Professor, Moscow State University (Moscow, Russia)

*V. V. Tuchin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. M. Feigin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*V. A. Tsarev*, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

*V. A. Cherepenin*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*M. V. Shitikova*, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

*V. G. Yakhno*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

# 70 лет



Кафедра электроники,  
колебаний и волн

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >