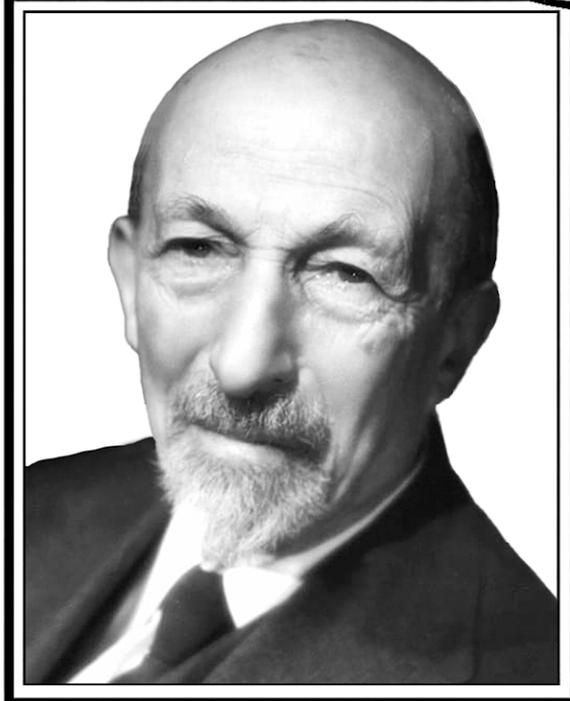


Трикладная Деловая Динамика



*155 лет со дня рождения
Жака Адамара
(1865–1963)*

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Москва

ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., профессор СГУ имени Н. Г. Чернышевского

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н. И. Лобачевского

Н. С. Гинзбург, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН,
Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Москва

С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ имени П. Г. Демидова

П. С. Ланда, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М. В. Ломоносова

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н. И. Лобачевского

В. И. Некоркин, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН,
Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербург

Ю. М. Романовский, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М. В. Ломоносова

В. В. Тучин, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского

А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А., Саратов

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, Воронежский государственный
технический университет

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород

S. Boccaletti, Ph.D. in Physics, Senior Researcher of Institute for Complex
Systems of the National Research Council, Sesto Fiorentino, Italy

A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology,
Sobell Department, London, UK

N. V. Kuznetsov, Professor, Corresponding Member of the RAS, Saint-Petersburg
State University, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland

G. van Luitelaar, Ph.D., Professor emeritus, Donders Centre for Cognition,
Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands

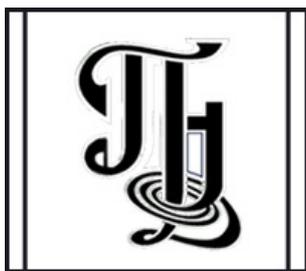
A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I,
Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Germany

A. B. Neiman, Dr. of Science, Physics and Mathematics, Associate professor
of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA

A. S. Pikovskiy, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid, Centre for
Biomedical Technology, Spain

V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics Lead,
ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика.

Подписка осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России» Раздел 30. «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов» (подписной индекс 73498) и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис». Цена свободная.

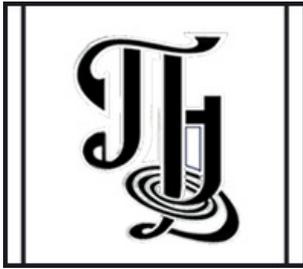
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией М. В. Сысоева
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова
Оформление А. А. Токмачевой
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864, +7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru, сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 18.07.2022
Вышел в свет 1.08.2022
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 15,11 (16,3)
Тираж 100 экз. Заказ № 82-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского университета. Адрес типографии: Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФС77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics.

The journal subscription index is 73498 in the United Catalogue «Pressa Rossii», «The Russian Press», section 30 «Scientific and Technical Journals. Bulletins of the Russian Academy of Sciences. Bulletins of Higher Educational Institutions (Izvestiya VUZ)».

The journal is Open Access

Head of Editorial office M. V. Sysoeva
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova
Design of A. A. Tokmacheva
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 18.07.2022. Published 1.08.2022
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 15,11 (16,3)
Edition of 100 copies. Order No. 82-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОТ РЕДАКТОРА

Трубецков Д. И. Жак Адамар (1865–1963) — легенда математики и рассеянности 387

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Сысоева М. В., Корнилов М. В., Такашвили Л. В., Матросов В. В., Сысоев И. В. Реконструкция интегрированных уравнений системы фазовой автоподстройки частоты под периодическим внешним воздействием по скалярному временному ряду 391

Савчин В. М., Чинь Ф. Т. Вариационный подход к построению дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением 411

Храменков В. А. Об условиях безопасного подключения к хаб-кластерным энергосетям 424

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

Переварюха А. Ю. Модель адаптационного противодействия индуцированной биотической среды в инвазионном процессе 436

Колесников А. В., Малинецкий Г. Г., Подлазов А. В., Сиренко С. Н. Нелинейная модель смены поколений элиты 456

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Антонец В. А. Постулаты когнитивной теории мышления и их следствия 480

Навроцкая Е. В., Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Оценка параметров импульсного воздействия с помощью сети нейроподобных осцилляторов 495

C O N T E N T S

EDITORIAL

Trubetskov D. I. Jacques Hadamard (1865–1963) — is the legend of mathematics and of absent-mindedness 387

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Sysoeva M. V., Kornilov M. V., Takaishvili L. V., Matrosov V.V., Sysoev I. V. Reconstruction of integrated equations of periodically driven phase-locked loop system from scalar time series..... 391

Savchin V.M., Trinh P. T. Variational approach to the construction of discrete mathematical model of the pendulum motion with vibrating suspension with friction 411

Khramenkov V. A. On the conditions for safe connection to hub-cluster power grids 424

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

Perevaryukha A. Yu. Modeling of adaptive counteraction of the induced biotic environment during the invasive process 436

Kolesnikov A. V., Malinetskiy G. G., Podlazov A. V., Sirenko S. N. Nonlinear elite generation change model..... 456

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

Antonets V. A. Postulates of the cognitive theory of thinking and their consequences 480

Navrotskaya E. V., Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Estimation of impulse action parameters using a network of neuronlike oscillators 495



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-387-390
EDN: BPAFWY

Жак Адамар (1865–1963) — легенда математики и рассеянности (к 155-летию со дня рождения)

Д. И. Трубецков

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия
Поступила в редакцию 15.05.2020, опубликована 1.08.2022

Для цитирования: Трубецков Д. И. Жак Адамар (1865–1963) — легенда математики и рассеянности // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 387–390. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-387-390. EDN: BPAFWY

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Блеск великих математических открытий Жака Адамара иногда ослепляет его почитателей и мешает им оценить степень его интеллектуального богатства и его морального величия. Он напоминает один из тех высоких горных пиков, на которые, чтобы хорошо их узнать, нужно взбираться по всем их склонам. Ему доставляло удовольствие то, что Анатоль Франс назвал молчаливыми пирами интеллекта. Он страстно интересовался многими творениями человеческого разума и внес свой вклад в их реализацию.

Поль Монтель. Из речи на торжественной церемонии, посвященной столетию со дня рождения Жака Адамара

Эта редакционная статья основана главным образом на собственных высказываниях Адамара и различных воспоминаниях о нем.

Жак Адамар после смерти Пуанкаре занял его место во французской академии наук. Каким же было вхождение Адамара в математику?

«Однажды, проходя с отцом мимо Эколь Нормаль, малолетний Жак Адамар спросил: “Это здесь изучают математику? Ну тогда я сюда не пойду”. С детства обожавший чтение, увлекавшийся музыкой, языками и ботаникой, будущий математический гений ненавидел арифметические задачи» [1]. В школе арифметика давалась ему с большим трудом, тем не менее его выбор остановился на математике, ставшей его профессией. Когда он стал преподавать, студенты не лучшим образом отзывались о его лекциях, поскольку не понимали их.

В науке он занимался тем, что интересовало его самого, а интересовало его многое (см. [2–5]). Основные исследования были посвящены теории чисел, теории аналитических функций, дифференциальным уравнениям математической физики и механике. Он разрабатывал теорию множеств. Ему принадлежат основополагающие работы в области теории целых аналитических функций. В теории дифференциальных уравнений особенно важны его работы по задаче Коши для гиперболических уравнений. В 1898 году Адамар изучил особую разновидность бильярда, в которой стол имел седловидную поверхность, а траектории шаров были неустойчивыми. Два расположенных рядом шара после удара, приводившего их в движение, удалялись по экспоненциальному закону очень далеко друг от друга. Адамар доказал, что для поведения подобных систем важна чувствительность к начальным условиям [6].

Одно из уникальных поистине явлений, вызванное и созданное интересами Адамара, — легендарный математический семинар в *College de France*. «Благодаря своей эрудиции и способности овладеть любой областью Адамар распространил работу семинара на все части математики...» — писал М. Фреше. Семинар Адамара просуществовал более 20 лет...

«Жак Адамар слушал доклады и в возрасте за 90. И сколь отличным от его должен был ему казаться язык! Трудно понимать уже то, что делает математик моложе лет на пять–десять. Перед Адамаром проходил ряд понятий, не соответствующих понятиям его молодости, благодаря знаниям ему удавалось устанавливать связи и приходило к пониманию существа доказываемых результатов и новых идей, что позволяло ему ставить больше вопросов, и притом весьма существенных, чем любому другому слушателю» [7].

«В молодости Адамар был вовлечен в общественную борьбу вокруг процесса Дрейфуса и на всю жизнь стал активным борцом за права личности. Дрейфусары боролись не просто за оправдание невиновного, но и в более широком смысле — за права человека, против националистических предубеждений. Во время процесса над Эмилем Золя была создана Лига прав человека, в деятельности которой Адамар с самого начала принимал активное участие и на церемонии в честь шестидесятилетия которой, в 1958 году, заявил: “Лига продолжает существовать, потому что она утверждает приоритет нравственных ценностей и даже сейчас всякий раз, когда нарушается закон и торжествует несправедливость и произвол, заявляет: дело Дрейфуса не умерло!” Именно с этого дела, ощутив чудовищность несправедливости, совершенной “во имя государственных интересов” и последствия, к которым может привести антисемитизм даже в демократическом обществе, Адамар оказался вовлеченным в политику. И, как все его увлечения, это стало страстью, неотъемлемой частью его беспокойной жизни. ... “красный математик” никогда не примыкал ни к одной политической партии, и его деятельность носила скорее правозащитный, чем политический характер» [1].

Поражает многогранность его интересов. Всюду, где бы он ни побывал, от Америки до Советского Союза, Индии и Китая, он собирал коллекции папоротников.

Из рассказов Андрея Николаевича Колмогорова об Адамаре: «Адамар был страстным собирателем папоротников. Когда он приехал в Москву, Андрей Николаевич с Павлом Сергеевичем Александровым повезли его кататься на лодке... Вдруг Адамар что-то увидел на берегу и попросил срочно пристать. Он перешёл на нос лодки и, когда она приблизилась к берегу, так волновался, стремясь на берег, что упал в воду. Оказалось, что там рос папоротник необычного вида, который он искал везде уже много лет. Адамар был совершенно счастлив. Но его нужно было срочно везти на приём к президенту (кажется, президентом тогда был Комаров. — В.А.) в президиум АН СССР.

Пришлось переодеть Адамара в костюм Павла Сергеевича. Но это было очень заметно (Адамар был гораздо выше). На приёме все спрашивали Адамара: “Господин профессор, что с Вами случилось? Вы не в своём костюме — уж не упали ли Вы в воду?” На что Адамар гордо отвечал: “Почему Вы думаете, что у профессора математики не может быть никаких других приключений?”» (цит. по [8, с. 675]).

Последний раз Андрей Николаевич навестил Адамара, когда тому было, кажется, лет девяносто. Заговорили среди прочего о школьных олимпиадах — во Франции давно существует

аналогичный олимпиаде *Concours General*, в котором участвуют лучшие (по каждому предмету отдельно) выпускники средних школ всей Франции одновременно... По результатам конкурса определяют первого математика среди выпускников этого года, второго, третьего... тысячного...

Адамар живо помнил *Concours General*, в котором он участвовал. «Я оказался вторым, — сказал он, — а тот первый, он тоже сделался математиком. Но гораздо более слабым — он и всегда был слабее». И было видно, что своё «поражение» на *Concours General* Адамар и сейчас воспринимает болезненно".

Адамара интересовал и процесс рождения математических идей, что нашло отражение в его знаменитой книге [9], выдержавшей множество переизданий.

«В 1924 году он выступил на Международном философском конгрессе в Неаполе с докладом “Как я не открыл теорию относительности”. Он сообщил, что ещё на заре занятий теорией волн пришёл к преобразованиям уравнения светового конуса в себя, но счёл их не имеющими физического смысла (Адамар имел в виду преобразования Лоренца, глубоко исследованные Пуанкаре и сыгравшие решающую роль в построении Эйнштейном специальной теории относительности).

Через 20 лет, в книге о психологии математического творчества, Адамар вновь упомянул об этой и других своих упущенных возможностях. Уникальна сама постановка вопроса: ведь в науке принято оповещать о достижениях автора.

Признания в неудачах чрезвычайно редко можно обнаружить в математической литературе как до, так и после упомянутой книги Адамара» (цит. по [7, с. 37]).

Жак Адамар считал, что для лучшей работы интуиции нужно мыслить не словами, а образами.

«Для математиков, которых я опросил в Америке, явления в большинстве своем аналогичны тем, которые я заметил на собственном опыте. Практически все... избегают не только мысленного употребления слов, но так же, как и я, мысленного употребления точных алгебраических или других знаков, как и я, они используют расплывчатые образы.

Имеется два или три исключения, самым важным из которых является математик Джордж Биркгоф, один из наиболее выдающихся во всём мире, который имеет привычку представлять себе математические знаки и мысленно с ними работать. Норберт Винер отметил, что ему случается думать и со словами, и без слов.

Естественно, я опросил и одного из самых авторитетных учёных нашей эпохи — профессора Эйнштейна. Вот его ответ: “...Слова, написанные или произнесенные, не играют, видимо, ни малейшей роли в механизме моего мышления. Психическими элементами мышления являются некоторые, более или менее ясные, знаки или образы, которые могут быть “по желанию” воспроизведены или скомбинированы”» [9, с. 79–81].

О рассеянности Адамара ходили легенды. Вот несколько замечательных примеров.

«В день помолвки Адамар продемонстрировал один из примеров своей знаменитой рассеянности, забыв вручить невесте оставшееся в кармане кольцо.

Однажды коллега встретил его на бульваре Сен-Мишель. “Я вижу, мадам Адамар уже уехала за город.” — “Но как вы догадались?!” — “У вас галстук под правым ухом...”» [1].

«...Адамар поражал современников невероятным сочетанием энциклопедизма с баснословной рассеянностью... Немецкое наступление на Францию застало Адамаров в Бретани. Возвращение домой, в Париж, было невозможно, и вместе с потоком беженцев семейство на двух автомобилях, накрытых матрасами “против бомбежек”, отправилось на юг, в Тулузу. Стараниями молодого канадского биохимика Луи Рапкина около тридцати французских евреев — деятелей науки — были вызваны в США. Адамар с семьёй оказался в числе спасённых, однако он по рассеянности оставил визы всей семье в Лиссабоне. По прибытии им предстояло дожидаться виз в тюрьме печально известного Эллис-Айленда. После десяти дней тюрьмы все они были вызваны в суд. Жаклин, опасавшаяся нервного срыва отца и сославшись на его глухоту, попросила у судьи разрешения отвечать на вопросы от имени Адамара.

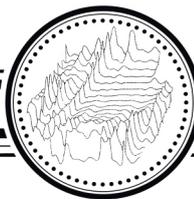
Судья согласился. Он вообще был убежден, что от иммигрантов, кишущих болезнетворными микробами, нужно держаться подальше. Дав показания издаека, она вернулась на свое место, и тут в зале появился Рапкин с телеграммой из Лиссабона, в которой указывались номера виз. Он также пригрозил, что обратится к научной общественности, которая не станет молчать по поводу заключения всемирно известного ученого, бывшего профессора Йельского университета. Узников распорядились немедленно выпустить на свободу, но тут заупрямился Адамар. Он отказывался покинуть тюрьму из-за того, что только что взял в тюремной библиотеке книгу по истории Америки. Потребовалось клятвенное обещание дочери купить ему эту книгу» [1].

Отметим, что Жак Адамар был членом-корреспондентом АН СССР с 1922 года и почетным членом АН СССР с 1929.

Таков портрет гениального математика, обладавшего удивительной рассеянностью, глазами его близких, современников и его самого.

Список литературы

1. *Зингер Н.* Жак Адамар — легенда математики [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://Booknik.ru/today/all/jak-adamar-legenda-matematik> (дата обращения: 9 декабря 2008).
2. *Адамар Ж.* Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций. М.: ГИТТЛ, 1951. 134 с.
3. *Адамар Ж.* Четыре лекции по математике. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 60 с.
4. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия в двух томах. Том I: Планиметрия. Том II: Стереометрия. М.: УЧПЕДГИЗ, 1948–1951.
5. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
6. *Мадрид К.* Бабочка и ураган. Теория хаоса и глобальное потепление. М.: Де Агостини, 2014. 144 с.
7. *Полицук Е. М., Шапошникова Т. О.* Жак Адамар. 1865–1963. Л.: Наука, 1990. С. 32–34.
8. Владимир Игоревич Арнольд. Избранное-60 / под ред. М. Б. Севрюка. М.: Фазис, 1997. 815 с.
9. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Советское радио, 1970. 152 с.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-391-410
EDN: BPJAOD

Реконструкция интегрированных уравнений системы фазовой автоподстройки частоты под периодическим внешним воздействием по скалярному временному ряду

М. В. Сысоева^{1,2}✉, *М. В. Корнилов*^{1,3,4}, *Л. В. Такашвили*³,
*В. В. Матросов*⁴, *И. В. Сысоев*^{1,3,4}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия

³Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

⁴Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: ✉bobrichkek@mail.ru, kornilovmv@gmail.com, nar7187@yandex.ru, matrosov@rf.unn.ru, ivssci@gmail.com

Поступила в редакцию 22.10.2021, принята к публикации 14.12.2021, опубликована 1.08.2022

Аннотация. Цель настоящего исследования — разработка методики реконструкции уравнений системы фазовой автоподстройки частоты, находящейся под периодическим внешним воздействием, по скалярному временному ряду одной переменной. **Методы.** Вместо исходной модели реконструируется модель, интегрированная по времени, что позволяет существенно снизить чувствительность метода к шумам наблюдения, поскольку не требуется оценивать вторую производную наблюдаемой численно. Внешнее периодическое воздействие аппроксимируется тригонометрическим полиномом от времени, интеграл от которого также представляет собою тригонометрический полином. Допущение о непрерывности неизвестной нелинейной функции используется для построения целевой функции и оптимизации. **Результаты.** Показано, что предложенный подход даёт существенное преимущество над ранее разработанным подходом к реконструкции неинтегрированных уравнений, позволяя добиться приемлемых оценок параметров при измерительном шуме порядка 10% от среднеквадратичного отклонения сигнала даже при наличии внешнего воздействия. **Заключение.** Описанный подход существенно расширяет возможности реконструкции систем фазовой автоподстройки частоты, позволяя реконструировать системы под произвольным периодическим воздействием и при этом существенно увеличивая устойчивость к шуму.

Ключевые слова: реконструкция, система фазовой автоподстройки частоты, периодическое внешнее воздействие.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации, грант МД-3006.2021.1.2 и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-02-00071.

Для цитирования: Сысоева М. В., Корнилов М. В., Такашвили Л. В., Матросов В. В., Сысоев И. В. Реконструкция интегрированных уравнений системы фазовой автоподстройки частоты под периодическим внешним воздействием по скалярному временному ряду // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 391–410. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-391-410. EDN: BPJAOD

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Reconstruction of integrated equations of periodically driven phase-locked loop system from scalar time series

M. V. Sysoeva^{1,2}✉, *M. V. Kornilov*^{1,3,4}, *L. V. Takaishvili*³, *V. V. Matrosov*⁴, *I. V. Sysoev*^{1,3,4}

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Russia

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia

³Saratov State University, Russia

⁴Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉bobrichek@mail.ru, kornilovmv@gmail.com, nar7187@yandex.ru,
matrosov@rf.unn.ru, ivssci@gmail.com

Received 22.10.2021, accepted 14.12.2021, published 1.08.2022

Abstract. *Purpose* of this work is to develop a reconstruction technique for the equations of a phase-locked loop system under periodic external driving from a scalar time series of one variable. *Methods.* Instead of the original model, we reconstructed a time-integrated model. So, since it is not necessary to evaluate the second derivative of the observable numerically, the method sensitivity to observation noise has significantly decreased. The external periodic driving is approximated with a trigonometric polynomial of time, the antiderivative of which is also a trigonometric polynomial. The assumption about continuity of an unknown nonlinear function is used to construct the target function for optimization. *Results.* It is shown that the proposed approach gives a significant advantage over the previously developed approach to the reconstruction of non-integrated equations, allowing to achieve acceptable parameter estimates with measurement noise being about 10% of the RMS deviation of the signal even in the presence of external driving. *Conclusion.* The described approach significantly extends the possibilities of reconstruction of phase-locked loop systems, allowing systems to be reconstructed under arbitrary periodic driving and at the same time significantly increasing noise resistance.

Keywords: reconstruction, phase-locked loop system, periodic driving.

Acknowledgements. This study was supported in part by the President of the Russian Federation under Grant MD-3006.2021.1.2, and in part by the Russian Foundation for Basic Research, grant No. 19-02-00071.

For citation: Sysoeva MV, Kornilov MV, Takaishvili LV, Matrosov VV, Sysoev IV. Reconstruction of integrated equations of periodically driven phase-locked loop system from scalar time series. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(4):391–410. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-391-410

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Теоретические возможности методов, основанных на реконструкции уравнений по временным рядам, очень велики [1]: не прямое измерение величин и даже целых функций, которые нельзя измерить напрямую; кластеризация объектов по параметрам модели; верификация различных моделей одного и того же объекта или явления; прогноз будущего поведения во времени или прогноз поведения при небольшом изменении параметров (прогноз бифуркаций). В приложении к биологическим нейронам все эти возможности, несомненно, востребованы, так как прямые измерения большинства модельных параметров невозможны, эксперименты сами по себе носят травмирующий для клетки характер, а вот опознавать клетки и по их сигналам уметь определять, к какому типу принадлежит та или иная клетка, очень важно. Однако прогресс в данной области за последние годы не очень велик, что обусловлено целым рядом факторов, главные из которых несовершенство моделей и шумы и помехи во время измерения. К настоящему времени ни для одной из известных математических моделей нейронов: Ходжкина–Хаксли [2], ФитцХью–Нагумо [3, 4], Хиндмарш–Роуз [5], Моррис–Лекара [6] не удалось реконструировать уравнения по экспериментальным временным рядам клеточной активности реальных нейронов. Одна из главных причин этого — необходимость либо измерять все переменные модели в эксперименте,

что невозможно, поскольку в моделях часть из них носит условный характер. Фактически, единственная измеримая переменная — трансмембранный потенциал. Для получения оставшихся переменных (скрытых) есть несколько подходов. Либо они получаются численным дифференцированием или интегрированием, как предлагалось в [7], либо методом временных задержек, как в [8], либо необходимо задавать стартовые догадки для них и затем подгонять сами ряды вместе с неизвестными параметрами и нелинейными функциями к наблюдаемым (такой подход получил название методов работы со скрытыми переменными [9]).

Метод временных задержек подходит в двух случаях: когда уравнения для объекта совсем неизвестны и годится любой подход к реконструкции вектора состояния, либо при реконструкции систем с запаздыванием в случае, если запаздывающая переменная — единственная (если уравнение второго порядка, приходится прибегать к комбинации задержек и численного дифференцирования [10]). Для реконструкции уравнений нейронов, написанных из биофизических соображений, этот метод не годится, поскольку получить недостающие переменные сдвигом нельзя — они имеют другой смысл и другую размерность. Численное дифференцирование и интегрирование имеют ровно те же проблемы: либо используется, когда об уравнениях для объекта ничего не известно [7], либо в случае, когда нам повезло и уравнения составлены так, что одна из переменных имеет, например, физический смысл координаты, а другая — скорости (заряда — тока и т. п.). Для моделей нейронов [2, 3, 5, 6] это неприменимо в силу их устройства, но некоторые другие модели биологических систем позволяют реконструировать часть переменных по наблюдаемой таким способом, например, модели голосовых связок [11] или нефрона [12]. Наиболее значимые успехи в данной области связаны с использованием статистических оценок [13].

Кроме моделей нейронов, построенных из биофизических соображений, есть ещё модели генераторов, способные демонстрировать широкое множество характерных для активности нейронов режимов поведения. Один из таких генераторов был изначально предложен для целей связи и представляет собою систему фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) с полосовым фильтром [14]. Режимы нейроподобной генерации, включая периодические и хаотические пачки импульсов (бёрсты) были обнаружены в модели в работах [15, 16], а затем продемонстрированы экспериментально [17]. Система ФАПЧ не является моделью нейрона, поэтому верифицировать её по данным активности биологического нейрона или оценить с её помощью физиологически значимые параметры нейрона не получится. Но она может быть полезна для кластеризации нейронов и для детектирования связей между ними, что уже достаточно для того, чтобы решение задачи о реконструкции этой системы по экспериментальным данным было оправдано. Её преимущество состоит в том, что для этой системы одна из двух недостающих переменных может быть получена численным дифференцированием, а вторая — численным интегрированием наблюдаемой.

Ранее на основе подхода, предложенного в [18] для осцилляторов первого порядка с запаздыванием в собственной динамике, в работе [19] была построена методика реконструкции одной автономной системы ФАПЧ с полосовым фильтром, также имеющей запаздывание по переменной y . Далее аналогичный подход был распространён на ансамбль связанных ФАПЧ [20] уже без запаздывания. Однако для практического применения подхода представленных в [19, 20] наработок недостаточно, поскольку они имеют ряд существенных недостатков. Во-первых, предложенная методика довольно чувствительна к шуму: в численном эксперименте удалось реконструировать динамику в ансамбле только при наличии аддитивного шума порядка 1%. В реальном эксперименте, например, при внеклеточных записях нейронов уровень шума гораздо выше [21]. К сожалению, несмотря на применение сглаживающих полиномов для численного дифференцирования необходимость получения второй производной наблюдаемой не даёт возможности добиться работоспособности метода при заметно больших шумах. Во-вторых, предложенная в [19, 20] методика оперирует при оценке нелинейной функции слагаемыми типа v/y или $v/y(t - \tau)$, где v — это некоторое известное выражение, зависящее от наблюдаемой y и её первой и второй

производной, а аргумент $t - \tau$ означает, что в данном случае используется задержанное во времени значение наблюдаемой. Такого рода слагаемые дают сингулярность при $y \rightarrow 0$, а поскольку в эксперименте y измерено с ошибками, вызванными шумом, все результаты для $|y| < \mu$, где величину μ приходится подбирать эмпирически, оказываются ненадёжными. К сожалению, малые значения y характерны для достаточно длительных отрезков времени, особенно в возбуждённом режиме. Как следствие этого, большая часть временного ряда исключается из рассмотрения, а для части режимов нелинейную функцию вовсе удаётся реконструировать только частично. В-третьих, предложенная в [19] методика работает только для уединённой системы, что при реконструкции по биологическим данным почти бессмысленно: отдельные клетки, как правило, молчат и ничего не генерируют, а при реконструкции связанных, используя методику из [20], необходимо иметь ряды всех.

Данная работа имеет целью расширить область применения методики реконструкции ФАПЧ с полосовым фильтром для целей её дальнейшего применения к экспериментальным временным рядам реальных нейронов. Чтобы устранить приведённые выше недостатки, осуществлён переход от исходных уравнений, описанных в работах [15, 16], к уравнениям, интегрированным по времени, а внешнее воздействие будем аппроксимировать тригонометрическим полиномом степени P , как это было предложено для систем другого типа в работе [22].

1. Математическая модель системы ФАПЧ

Динамика рассматриваемого здесь фазоуправляемого генератора при наличии внешнего воздействия $I_{\text{ext}}(t)$ описывается неавтономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, определенной в цилиндрическом фазовом пространстве ($\varphi \bmod 2\pi, y, z$):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= z, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dz}{dt} &= \gamma + I_{\text{ext}}(t) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - (1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y. \end{aligned} \quad (1)$$

В терминах системы фазовой автоподстройки частоты φ — текущая разность фаз подстраиваемого и опорного генератора, γ — начальная частотная расстройка, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — параметры инерционности фильтров. Применительно к динамике нейрона переменную y можно интерпретировать как описывающую изменение мембранного потенциала, параметры ε_1 и ε_2 позволяют задавать необходимый динамический режим, γ — внешний ионный ток в межклеточном веществе постоянный на времени измерения (медленно меняющаяся компонента [2]), I_{ext} — периодическое воздействие другого нейрона или внешняя электрическая стимуляция. Если I_{ext} имеет ненулевую постоянную компоненту (сдвиг), она фактически учитывается как часть параметра γ .

В [23] было показано, что данный генератор способен демонстрировать различные динамические режимы, характерные для нейронов: регулярную импульсную динамику (спайки), пачечные колебания (бёрсты) с различным числом импульсов в пачке. В работе [15] было произведено разбиение плоскости параметров модели на области существования соответствующих динамических режимов: квазирегулярные колебания, колебания с различным количеством импульсов в пачке, хаотические колебания. В работе [24] подробно исследована модель рассматриваемого генератора, находящегося в возбуждённом состоянии, в которой отклики появляются только при подаче внешнего воздействия. Наличие возбуждённого режима в рассматриваемой модели является очень важным, поскольку нейроны мозга большую часть времени находятся именно в возбуждённом состоянии. Показано, что при $\gamma = 0$ и $I_{\text{ext}}(t) = 0$ в системе (1) существует континуум состояний

равновесия $(\varphi^*, 0, 0)$, расположенных на отрезке $\varphi^* \in [-\arccos(1/\varepsilon_1); \arccos(1/\varepsilon_1)]$, в одном из которых в конечном счёте оказывается система (1) при ненулевых начальных значениях y и z . Заставить систему генерировать импульсы при $\gamma = 0$ можно с помощью подачи внешнего импульсного воздействия $I_{\text{ext}}(t)$ — гармоническое воздействие в такой системе при таких параметрах приводит к вынужденным гармоническим колебаниям. В [25] рассмотрено влияние параметров периодической стимуляции на ответ исследуемого генератора. Различные способы оценки откликов генератора на внешнее возбуждение показывали, что отклик существенно зависит от амплитуды стимулирующих импульсов и слабее зависит от периода их следования; это подтверждается результатами действия пуассоновской случайной последовательности.

2. Методика реконструкции интегрированных уравнений системы ФАПЧ

В аппаратной реализации системы ФАПЧ [17] возможно измерение единственной переменной y . Она же соответствует трансмембранному потенциалу, регистрируемому в биологическом эксперименте от отдельных нейронов [26, 27]. Поэтому задача реконструкции уравнений (1) сразу была сформулирована таким образом, что измеряется только переменная y . Следуя работе [19], переменная φ восстанавливалась численным интегрированием методом Симпсона, переменная z — численным дифференцированием с использованием аппроксимирующего по m точкам полинома (фильтр Савицки–Голэя [28]). Для реконструкции по незашумлённым или слабозашумлённым реализациям подойдёт самое малое $m = 3$, при наличии шума m может быть подобрано, в том числе используя в качестве критерия качество реконструкции нелинейной функции, как это было сделано в [19]. Метод, предложенный в [19, 20], требовал также численного получения второй производной наблюдаемой — временного ряда величины dz/dt , что являлось основной причиной низкой его устойчивости к шуму. Алгоритм, предлагаемый далее, не требует численного расчёта второй производной. Переменная φ может быть восстановлена численным интегрированием методом Симпсона. Поскольку метод использует построение парабол на интервалах, равных двум временам выборки, далее всегда будет рассматриваться нечётное количество точек в измеренном ряде (N): при необходимости всегда можно отбросить одно значение без существенной потери информации.

Чтобы повысить общность и применимость метода к экспериментальным данным, нужно сделать реконструируемую модель менее «ломкой», более общей. Для этого последнее уравнение системы (1) перепишем в виде (2), где функция f не обязана соответствовать формуле (3) (в реальной системе она почти наверняка не соответствует), то есть метод реконструкции будем писать сразу для произвольной непрерывной функции f .

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\gamma}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} I_{\text{ext}}(t) - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} z - f(\varphi)y, \quad (2)$$

$$f(\varphi) = \frac{1 + \varepsilon_1 \cos \varphi}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (3)$$

Далее последнее уравнение отдельного осциллятора (2) проинтегрируем по времени и введём дополнительные обозначения α_0 и α_1 аналогично [20]:

$$z = \alpha_0 t + \alpha_1 y - \int f(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} dt + \int I'_{\text{ext}}(t) dt, \quad (4)$$

$$\alpha_0 = \frac{\gamma}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad \alpha_1 = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad I'_{\text{ext}} = \frac{I_{\text{ext}}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad (5)$$

где мы воспользовались тем, что $\int z dt = y$, $\int (dz/dt) = z$. Далее введём в рассмотрение новую

нелинейную функцию $\Phi(\varphi)$, которая, очевидно, будет гладкою, поскольку по определению её первая производная — $f(\varphi)$, для которой мы условились, что она непрерывна.

$$\int f(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} dt = \int f(\varphi) d\varphi = \Phi(\varphi). \quad (6)$$

Также отметим, что константа интегрирования в уравнении (4) может быть без потери общности внесена в $\Phi(\varphi)$.

Следуя идеям работы [18], будем строить целевую функцию для вычисления коэффициентов α_0 и α_1 , исходя из минимизации длины описания нелинейной функции Φ . Это позволит отказаться от явного разложения функции f и её первообразной Φ в ряд и, таким образом, одновременно повысит общность метода (он может использоваться для произвольной f) и уменьшит параметризацию (число подлежащих оценке параметров α). Это в свою очередь улучшит статистические свойства оценок оставшихся в модели коэффициентов: чем меньше параметров, тем лучше их оценки. Внешнее воздействие, следуя [22], представим в виде тригонометрического полинома, где частота $\Omega = 2\pi/T_{\text{ext}}$ известна. Вопрос о том, как её подобрать, разберём далее. Таким образом, базовым для нас становится следующее выражение для нелинейной функции Φ , полученное из уравнения (4):

$$\Phi(\varphi) = \alpha_0 t + \alpha_1 y + \sum_{k=1}^{k=K} (\alpha_{2k} \cos(k\Omega t) + \alpha_{2k+1} \sin(k\Omega t)) - z, \quad (7)$$

где K — степень тригонометрического полинома. Постоянное слагаемое в формуле (7) не нужно: оно, как и константа интегрирования, включено в Φ ; то есть фактически Φ может быть определена с точностью до константы, но это и естественно, поскольку Φ есть первообразная f .

Далее все выкладки будем вести, следуя работе [20], но имея в виду новое выражение для нелинейной функции (7). Введём сортирующее отображение $Q(n)$, где n — номер точки в ряде, ставящее в соответствие n -й точке в исходном ряде её номер $Q(n)$ в отсортированном по возрастанию φ . Рассмотрим также обратное отображение Q^{-1} , вычисляющее по номеру в отсортированном ряде номер в исходном, так что $Q^{-1}(Q(n)) = n$. Рассмотрим точку, находящуюся в отсортированном ряде непосредственно перед $Q(n)$ -й, тогда в исходном ряде она имеет номер $Q^{-1}(Q(n) - 1)$, который обозначим как p_n для краткости. Тогда приращение δ_n функции Φ на отрезке $[\varphi(p_n); \varphi(n)]$ будет выражаться формулой (8):

$$\begin{aligned} \delta_n &= \Phi(\varphi(n)) - \Phi(\varphi(p_n)) = \alpha_0 \Delta t(n) + \alpha_1 \Delta y(n) - \Delta z(n) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{k=K} (\alpha_{2k} \Delta \Theta_k + \alpha_{2k+1} \Delta \Xi_k), \\ \Delta t(n) &= t(n) - t(p_n), \\ \Delta y(n) &= y(n) - y(p_n), \\ \Delta z(n) &= z(n) - z(p_n), \\ \Delta \Theta_k &= \cos(k\Omega t(n)) - \cos(k\Omega t(p_n)), \\ \Delta \Xi_k &= \sin(k\Omega t(n)) - \sin(k\Omega t(p_n)). \end{aligned} \quad (8)$$

При этом значение n такое, что $Q(n) = 0$ (будем здесь и далее считать, что нумерация начинается с нуля, то есть $n = 0, 1, \dots, N - 1$) не позволено, поскольку для него нет соответствующего p_n (нет предыдущей точки в отсортированном ряде — наше значение самое маленькое). Тогда в качестве целевой функции рассмотрим величину L :

$$L(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2K+1}) = \sum_n \delta_n^2. \quad (9)$$

Из (8) очевидно, что L будет зависеть от $\alpha_k|_{k=0,\dots,2K+1}$ квадратично. Значит, формулу (9) можно рассматривать как формулировку задачи на наименьшие квадраты для аппроксимации величин $\Delta z(n)$. Выражения при коэффициентах α_k суть базисные функции (вернее, их значения, доступные в моменты измерений), а δ_n соответствуют невязкам. При верном выборе α_k целевая функция L будет много меньше, чем при неверном, когда коэффициенты α_k определены неверно и функция f имеет разрывы почти в каждой точке.

Поскольку даже при верном выборе α_k в общем случае $L > 0$, то при конечном N полученные таким образом оценки должны быть смещёнными – их математическое ожидание не будет в точности совпадать с истинными значениями. Так как функция Φ не только непрерывна, но и дифференцируема (по определению она является первообразною непрерывной функции f) на полуинтервале $0 \leq \varphi < 2\pi$, то $\delta_n \rightarrow d\Phi(\varphi(p_n))$, то δ_n является аппроксимацией дифференциала функции Φ в точке $\varphi(p_n)$ справа, или в точке $\varphi(n)$ слева, а для дифференцируемой функции в пределе это одно и то же. Тогда должно выполняться следующее соотношение:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} L = \int_0^{2\pi} (d\Phi)^2 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\Phi}{d\varphi} \right)^2 (d\varphi)^2 = \left(\frac{d\Phi}{d\varphi} \right)^2 d\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad (10)$$

Таким образом, оценки предложенным методом являются асимптотически несмещёнными.

Предложенный подход позволяет оценить значения α_0 и α_1 , являющиеся комбинациями исходных параметров γ , ε_1 и ε_2 , но не сами эти параметры. Следует отметить, что если рассмотреть третье уравнение системы (1), то можно видеть, что при замене $1 + \varepsilon_1 \cos \varphi = f(\varphi)$ оценить отдельно γ , ε_1 и ε_2 будет нельзя, потому что все члены уравнения, включая правую часть, стоят с неизвестными коэффициентами (или функциями). Таким образом, система уравнений для определения коэффициентов, которую можно было бы составить, оказалась бы вырождена (нет свободного члена). Это значит, что и никаким другим способом оценить γ , ε_1 и ε_2 отдельно по данным нельзя, то есть данное ограничение является свойством системы, а не недостатком метода.

Изложенный алгоритм предполагает знание периода внешнего воздействия. В действительности, даже небольшая ошибка в его значении сильно повлияет на результаты реконструкции, как это было показано в [29]. Самое простое и эффективное решение данной проблемы при современных вычислительных средствах – перебор значений пробного периода воздействия \hat{T} в некотором, довольно большом диапазоне с шагом h порядка шага выборки, хотя целочисленное соотношение между T и h не обязательно. По минимуму построенной зависимости $L(\hat{T})$ можно достаточно точно оценить истинный период. Полагаясь на результаты [22], можно рассчитывать, что высокая чувствительность целевой функции к периоду воздействия в типичном случае обеспечит верное определение периода даже при невысоких значениях степени тригонометрического полинома P и недостаточном сглаживании m в борьбе с шумами измерений.

Предложенный подход позволяет также реконструировать внешнее воздействие на основе оценок коэффициентов $\alpha_k|_{k=2,\dots,2K+1}$ с точностью до множителя $1/(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$, который в общем случае не может быть определён. Для этого нужно продифференцировать входящий в (7) тригонометрический полином:

$$I'_{\text{ext}}(t) = \sum_{k=1}^{k=K} (-k\Omega\alpha_{2k} \sin(k\Omega t) + k\Omega\alpha_{2k+1} \cos(k\Omega t)). \quad (11)$$

Поскольку значения коэффициентов $\alpha_k|_{k=2,\dots,2K+1}$ и значение частоты Ω известны либо оценены, внешнее воздействие по формуле (11) можно рассчитать для любого момента времени t .

После получения значений α_k можно таблично рассчитать по формуле (7) функцию Φ . Таблично, потому что в формулу (7) входят значения y и z , а эти переменные доступны только

в моменты измерения. Но сама по себе функция Φ , скорее всего, не очень интересна, для реконструкции модели интересна её первообразная $f(\varphi)$. Как аналитически проинтегрировать (7) по φ — не ясно, поэтому проще выразить f из формулы (2), подставив туда выражения для α_0 и α_1 из (4):

$$f(\varphi) = \left(\alpha_0 + \alpha_1 z + I'_{\text{ext}}(t) - \frac{dz}{dt} \right) / y. \quad (12)$$

Помимо того, что расчёт по формуле (12) возможен только для φ , соответствующих наблюдаемым y (иначе не будет значений y , z и dz/dt), имеются два ограничения, которых лишён весь остальной алгоритм. Эти ограничения были присущи исходному методу, предложенному в работе [19]: во-первых, необходимо численно рассчитать вторую производную наблюдаемой, поскольку $dz/dt = d^2y/dt^2$; во-вторых, при $y \approx 0$ рассчитанные значения будут сильно неточными, особенно при наличии шумов. При этом следует отметить, что даже несмотря на эти ограничения, полученные оценки будут заметно точнее, чем при использовании оригинального подхода из [19], поскольку коэффициенты α_k были рассчитаны, не опираясь на оценку dz/dt и без ограничений для $y \approx 0$.

3. Результаты

3.1. Генерация рядов и восстановление вектора состояния. Уравнения (1) решались методом Эйлера. Интервал дискретизации $\Delta t = 1/32$, равный шагу интегрирования, подбирался эмпирически таким образом, чтобы получить устойчивое решение. Подробное исследование этого вопроса было проведено в [30].

Для тестирования метода система ФАПЧ рассматривалась в двух режимах: возбуждённом ($\gamma = 0, \varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 10$) и колебательном ($\gamma = 0.075, \varepsilon_1 = 4.5, \varepsilon_2 = 10$ — спайковый режим согласно классификации, данной в [20]). Подавались три вида воздействия: прямоугольные импульсы, гауссовские импульсы и гармоническое воздействие: импульсное воздействие обоих типов в обоих режимах (см. рис. 1, *c, e*), а гармоническое — только для колебательного режима, см. рис. 1, *a*. Выбор типов воздействия обусловлен тем, что гармоническое воздействие легче всего для описания и на нём проще всего тестировать метод, гауссовские импульсы требуют для описания тригонометрических полиномов высоких порядков, но, будучи гладкими, они всё же могут быть удовлетворительно описаны, а прямоугольные импульсы типичны в радиотехнике и рассматривались для данной системы ФАПЧ в работе [25]. Если система находится в подпороговом режиме, под гармоническим воздействием она демонстрирует вынужденные линейные колебания — режим как бессмысленный с точки зрения нейродинамики, так и неудобный для реконструкции, поскольку содержит слишком мало информации.

В соответствии с [25] введём обозначения: A_{sp} — амплитуда стимулирующего импульса, τ_{sp} — длительность входного импульса, T_{sp} — период стимуляции. Чтобы сохранить одинаковую мощность внешнего воздействия для разных его форм, были использованы следующие параметры:

1. для прямоугольных импульсов $A_{\text{sp}} = 0.26, T_{\text{sp}} = 100, \tau_{\text{sp}} = 10$, скважность $Q_{\text{sp}} = T_{\text{sp}}/\tau_{\text{sp}} = 10$;
2. для гауссовских импульсов $A_{\text{gp}} = A_{\text{sp}} = 0.26, T_{\text{gp}} = T_{\text{sp}} = 100, \tau_{\text{gp}} = \tau_{\text{sp}}/\sqrt{\pi}$;
3. для гармонического воздействия $A_{\text{h}} = A_{\text{sp}}\sqrt{2}/Q_{\text{sp}}, T_{\text{h}} = T_{\text{sp}} = 100$.

Ко всем временным рядам добавлялся измерительный шум со среднеквадратичным отклонением в 10% от среднеквадратичного отклонения сигнала, на рис. 1 временные ряды и фазовые портреты приведены без шума наблюдений. Реконструкция проводилась как по рядам с шумом, так и по рядам без шума, но далее приводятся результаты только по рядам с шумом, если это не оговорено дополнительно, поскольку метод ориентирован на работу с зашумлёнными данными.

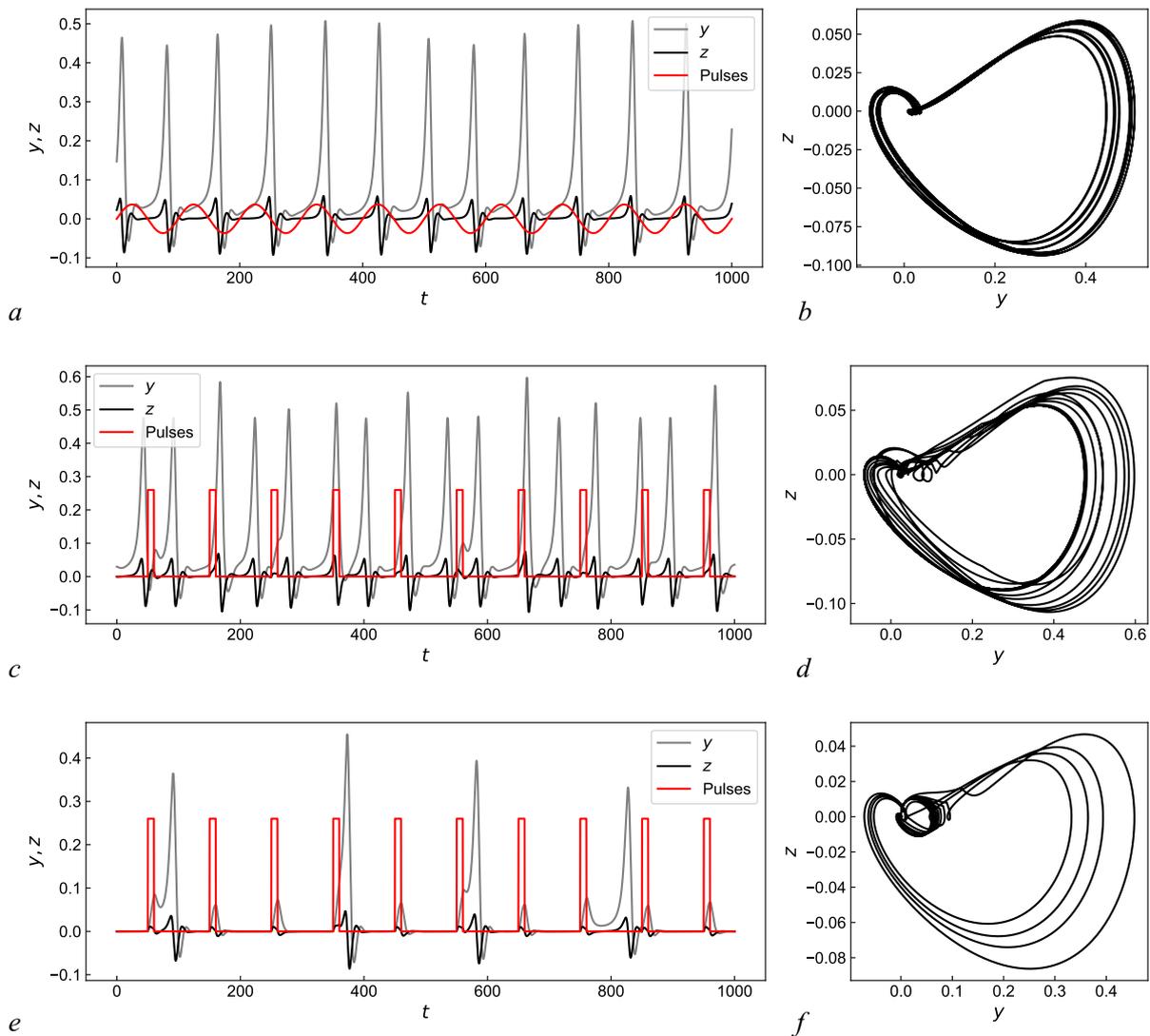


Рис. 1. Временные ряды переменных y (наблюдаемая) и z модели (1) и внешнего воздействия (a, c, e). Фазовые портреты в проекции (y, z) системы (1) (b, d, f). Части a, b соответствуют гармоническому воздействию на систему, находящуюся в колебательном режиме, части c, d — воздействию прямоугольными импульсами на систему в колебательном режиме и части e, f — воздействию прямоугольными импульсами на систему в возбудимом режиме (цвет online)

Fig. 1. Time series of variables y (observable) and z from the model (1) and external driving (a, c, e). Phase portraits in the projection (y, z) of the system (1) (b, d, f). Parts a, b correspond to the system under harmonic driving in the oscillatory regime. Parts c, d correspond to the system under square pulse driving in the oscillatory regime. Parts e, f correspond to the system under square pulse driving in the excitable regime (color online)

3.2. Реконструкция параметров ФАПЧ. Оценить качество реконструкции проще всего, сопоставив восстановленные значения эффективных параметров α_0 и α_1 со значениями, рассчитанными аналитически по формуле (5). Для α_0 при импульсном воздействии введена дополнительная поправка, вызванная ненулевым средним внешнего воздействия, которое компенсируется эффективным изменением параметра γ . Результаты реконструкции для всех пяти режимов представлены на рис. 2. Видно, что в колебательном режиме для всех трёх типов воздействия оценки α_1 оказываются довольно точными: их относительная погрешность не превышает 2%, причём для импульсного воздействия такой точности удаётся добиться уже при $K = 3$ — дальнейшее увеличение числа гармоник не приводит к уточнению оценок. Для возбудимого

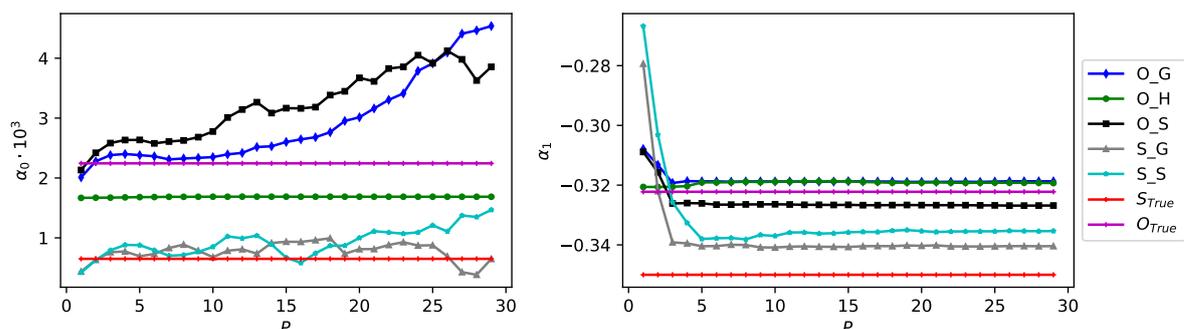


Рис. 2. Зависимости восстановленных значений коэффициентов α_0 и α_1 от степени использованного тригонометрического полинома K . Три кривые, помеченные как O (O_G для гауссовых импульсов, O_H для гармонического воздействия и O_S для прямоугольных импульсов), относятся к колебательному режиму, истинное значение для них обозначено горизонтальной линией O_{True} . Две кривые, помеченные как S (S_G для гауссовых импульсов, S_S для прямоугольных), относятся к возбудимому режиму, для них истинное значение обозначено как S_{True} . Величина α_0 для удобства дана умноженной на 10^3 (цвет online)

Fig. 2. The dependences of the reconstructed values of the coefficients α_0 and α_1 on the order of the used trigonometric polynomial K . The three curves marked as O (O_G for Gauss pulses, O_H for harmonic driving and O_S for square pulses) belong to the oscillatory regime, the true value for them is indicated by the horizontal line O_{True} . Two curves marked as S (S_G for Gauss pulses, S_S for square ones) belong to the excitable regime, for them the true value is denoted as S_{True} . The value of α_0 is given multiplied by 10^3 for the convenience (color online)

режима относительная ошибка оценок α_1 несколько больше и составляет порядка 4%, при этом лучшие результаты достигаются при использовании $K = 5$.

Ошибки оценок α_0 в целом существенно выше, чем α_1 , что может быть вызвано различными причинами. Одна из них заключается в том, что в формуле (7) этот коэффициент стоит при времени, а оно не является ограниченной переменной в отличие от y , z и ϕ . Неограниченный линейный рост t с увеличением длины ряда, вообще говоря, является проблемой при численном счёте, ухудшая статистические характеристики в первую очередь оценки α_0 . В работе [19] основным источником ошибок была производная dz/dt , в модифицированном алгоритме, изложенном в данной работе, нет необходимости расчёта второй производной, но в связи с интегрированием исходного уравнения (1) появился член, содержащий линейную зависимость от времени, так что ошибки определения α_0 в некотором смысле можно считать платою или компенсацией за отсутствие необходимости двойного численного дифференцирования. Ещё одна возможная причина невысокой точности восстановления параметра α_0 — малость величины γ в рассмотренных режимах, что автоматически означает и малость её вклада в общую динамику, и высокие относительные погрешности оценок при малых абсолютных.

3.3. Реконструкция внешнего воздействия. Вторым важным критерием успешности процедуры реконструкции является восстановление внешнего воздействия при использовании тригонометрических полиномов различной степени. Результаты для колебательного режима при некоторых использованных значениях степени тригонометрического полинома K приведены на рис. 3. В численных экспериментах использовались и другие: большие и меньшие значения K , результаты для которых не отображены на рис. 3, чтобы не загромождать его.

Гармоническое воздействие хорошо восстанавливается при любом K , что естественно. Существенное увеличение K относительно оптимального значения $K = 1$ ведёт лишь к небольшим искажениям синусоиды, что хорошо видно на рис. 3, *a*. Для гауссовых импульсов $K = 15$ позволяет добиться приличной аппроксимации — такой, что визуально осцилляции $I'_{ext}(t)$ внутри периода, неизбежно присутствующие при аппроксимации конечным тригонометрическим полиномом (см. рис. 3, *b* — оранжевая кривая, соответствующая $K = 5$), становятся незаметны. Точная аппроксимация прямоугольных импульсов теоретически достижима только в пределе, учитывая,

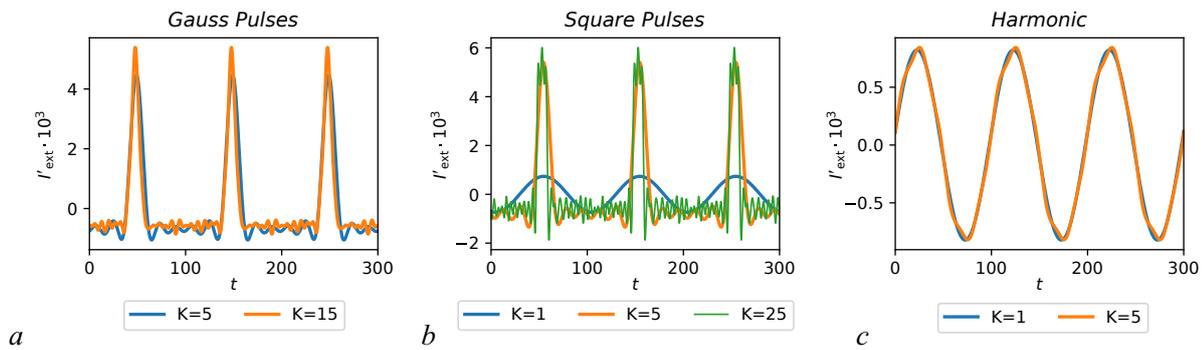


Рис. 3. Реконструированное нормированное внешнее воздействие I'_{ext} для колебательного режима: a – импульсное гауссово, b – импульсное прямоугольное, c – гармоническое. Различные кривые на каждом рисунке соответствуют разным степеням тригонометрического полинома K (цвет online)

Fig. 3. Reconstructed normalized external driving I'_{ext} for the oscillatory regime: a – Gauss pulses, b – square pulses, c – harmonic driving. The different curves in each subplot correspond to different orders of the trigonometric polynomial K (color online)

что они имеют вертикальный фронт, а значит, содержат все частоты, включая бесконечно большие (или по крайней мере столь большие, что они неразрешимы при текущей частоте выборки). Рис. 3, c содержит несколько различных вариантов: вариант при $K = 5$ очень визуально похож на реконструированное при том же $K = 5$ воздействие гауссовыми импульсами. Реконструкция при $K = 15$ имеет больше локальных минимумов на периоде, что логично, а сама амплитуда колебаний меньше; на самом импульсе уже два экстремума, а фронт заметно круче, что отличает его от аппроксимации гауссовых импульсов. Реконструкция при $K = 25$ имеет уже три максимума на самом импульсе и ещё более крутой фронт.

Результаты реконструкции воздействия для возбудимого режима (рис. 4) качественно отличаются от того, что представлено на рис. 3, b, c для колебательного режима. В целом можно констатировать, что предложенный подход позволяет довольно точно восстановить форму внешнего периодического воздействия, хотя для некоторых типов требует очень высокой степени тригонометрического полинома. Интересно, что точность аппроксимации воздействия слабо влияет на точность реконструкции параметров ФАПЧ α_0 и α_1 . Например, по рядам ФАПЧ под воздействием прямоугольных импульсов при $K = 5$ значения параметров восстанавливаются не хуже, чем при больших значениях, но само воздействие как прямоугольное идентифицировать нельзя.

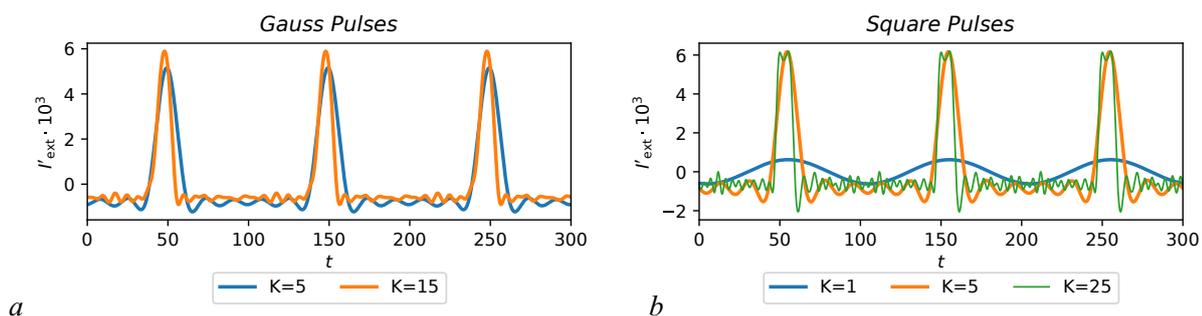


Рис. 4. Реконструированное нормированное внешнее воздействие I'_{ext} для возбудимого режима: a – импульсное гауссово, b – импульсное прямоугольное. Различные кривые на каждом рисунке соответствуют разным степеням тригонометрического полинома K (цвет online)

Fig. 4. Reconstructed normalized external driving I'_{ext} for the excitable regime under different driving types: a – Gauss pulses, b – square pulses. The different curves in each subplot correspond to different orders of the trigonometric polynomial K (color online)

3.4. Реконструкция нелинейной функции. Третий критерий успешности реконструкции — идентификация нелинейной функции $f(\varphi)$, которую по рассчитанным коэффициентам α_k можно рассчитать по формуле (12). При этом надо понимать, что реконструкция нелинейной функции f — относительно слабое место алгоритма, поскольку формула (12) предполагает деление на y , а значения $y \approx 0$ часто встречаются, особенно для возбуждённого режима.

Результаты реконструкции нелинейной функции для колебательного режима представлены на рис. 5, результаты для всех трёх типов воздействия приведены для $K = 15$. Разное число периодов реконструированного синуса объясняется различиями динамических режимов из-за наличия воздействия — фаза успевает вырасти на 2π разное число раз за одно и то же время наблюдения. Вертикальные «шумные» линии из точек соответствуют векторам состояния, когда $y \approx 0$, их достаточно много в ряде из-за особенности динамики системы. Чтобы получить эти результаты, пришлось использовать довольно значительное усреднение: $m = 151$. В целом, можно сказать, что реконструкция нелинейной функции успешна: удаётся восстановить её периодический характер и она похожа на гармоническую.

Результаты реконструкции в возбуждённом режиме показаны на рис. 6 для воздействия гауссовыми импульсами — a и прямоугольными импульсами — b . Вся наблюдаемая динамика

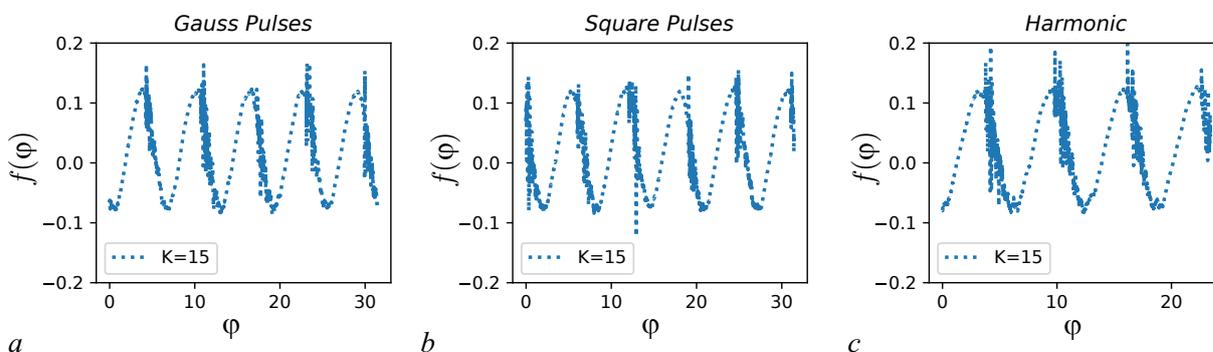


Рис. 5. Реконструированная нелинейная функция $f(\varphi)$ для колебательного режима: a — при импульсном гауссовом воздействии, b — при импульсном прямоугольном, c — при гармоническом. Для общности все результаты приведены при $K = 15$, $m = 151$

Fig. 5. Reconstructed nonlinear function $f(\varphi)$ for the oscillatory regime under different driving types: a — Gauss pulses, b — square pulses, c — harmonic driving. For generality, all results are given for $K = 15$, $m = 151$

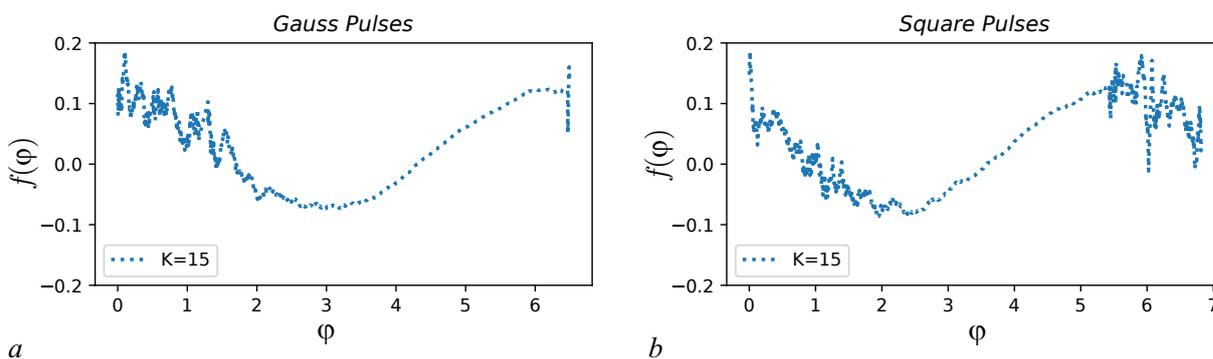


Рис. 6. Реконструированная нелинейная функция $f(\varphi)$ для возбуждённого режима: a — при импульсном гауссовом воздействии, b — при импульсном прямоугольном. Для общности все результаты приведены при $K = 15$, $m = 151$

Fig. 6. Reconstructed nonlinear function $f(\varphi)$ for the excitable regime under different driving types: a — Gauss pulses, b — square pulses. For generality, all results are given for $K = 15$, $m = 151$

была сосредоточена на одном периоде нелинейной функции. При этом наблюдаются существенные искажения и функция в целом довольно сильно зашумлена, что в первую очередь объясняется длинными интервалами $y \approx 0$ в этом режиме. Это значит, что для значительного числа φ во временном ряде нет или очень мало существенно отличных от нуля значений y , что приводит к ошибкам при реконструкции.

3.5. Подбор периода воздействия. До сих пор все результаты были приведены для случая, когда период воздействия T известен. В действительности, конечно, это не так. В лучшем случае, период может быть известен приблизительно. Однако, как показывает опыт реконструкции неавтономных систем [22, 29], даже небольшая ошибка в определении T может быть весьма критична, так как она быстро приводит к накоплению фазового сдвига во времени на основной гармонике, а на высших — кратно быстрее. Самый простой способ решить эту проблему в эксперименте — перебор пробного T (обозначим его как \tilde{T}). Перебор можно осуществлять с любым разумным значением шага $\Delta\tilde{T}$, поскольку никакая перевыборка значений с этим шагом не производится, а значение $\Omega = 2\pi/\tilde{T}$ просто используется как множитель в формуле (7). Тем не менее, для простоты в приведённом ниже примере мы ограничились шагом, равным шагу выборки $\Delta\tilde{T} = \Delta t$. При выборе диапазона перебора можно ориентироваться на расположение локальных экстремумов в сглаженном временном ряде (в зашумлённом ряде они будут стоять почти подряд) — маловероятно, что период воздействия будет много меньше наименьшего из них или много больше наибольшего. В представленном случае перебор производился на отрезке $\tilde{T} \in [2; 320]$.

Для самого сложного в аппроксимации воздействия прямоугольными импульсами результаты подбора — зависимость $L(\tilde{T})$ приведена на рис. 7. Видно, что даже при использовании относительно небольшой степени тригонометрического полинома $K = 5$, не позволяющей, как показано на рис. 3, *b* и рис. 4, *b*, удовлетворительно описать форму импульса, зависимость $L(\tilde{T})$ демонстрирует чёткий минимум на значении $\tilde{T} = T = 100$ (см. Таблицу), соответствующем истинному значению, по крайней мере, с точностью до Δt . Минимум достаточно глубокий, несмотря на наличие шума, — для его визуализации пришлось прибегнуть к логарифмическому масштабу.

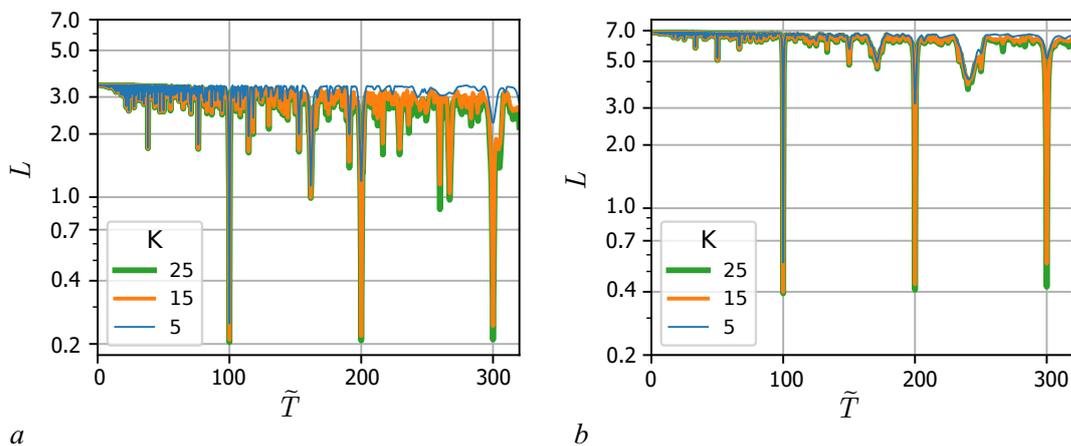


Рис. 7. Зависимость целевой функции (9) от пробного периода воздействия при реконструкции по временным рядам с воздействием прямоугольными импульсами с использованием тригонометрического полинома степени $K = 5$, $K = 15$ и $K = 25$ при сглаживании $m = 151$. Рис. *a* соответствует колебательному режиму, рис. *b* — возбудимому (цвет online)

Fig. 7. The dependence of the target function (9) on the trial driving period at reconstruction from time series generated under square pulses using a trigonometric polynomial with order $K = 5$, $K = 15$ and $K = 25$ with smoothing $m = 151$. Fig. *a* corresponds to the oscillatory regime, fig. *b* corresponds to the excitable regime (color online)

Таблица. Локальные минимумы целевой функции (9)
Table. Local minima of the target function (9)

K	Колебательный режим			Возбуждаемый режим		
	$\tilde{T} = 100$	$\tilde{T} = 200$	$\tilde{T} = 300$	$\tilde{T} = 100$	$\tilde{T} = 200$	$\tilde{T} = 300$
25	0.204	0.208	0.210	0.393	0.409	0.423
15	0.210	0.218	0.243	0.400	0.434	0.545
5	0.251	1.195	2.257	0.552	3.148	5.158

При этом увеличение K приводит к углублению не только и не столько главного минимума, сколько его побочных кратных вариантов — $\tilde{T} = 2T$ и $\tilde{T} = 3T$. Эти побочные глубокие минимумы очевидно проистекают из возможности описать частоту воздействия с помощью второй и третьей гармоник, соответственно (при этом период сокращается как раз в 2 или 3 раза); такая возможность улучшается при увеличении степени полинома. Тем не менее, минимум $\tilde{T} = 100$ всегда является глобальным. Для гауссовых импульсов зависимости оказались очень сходными, только побочные минимумы были более выражены для относительно малых K . Для гармонического воздействия результаты существенно не менялись при изменении $K \geq 3$, при использовании $K = 1$ и $K = 2$ отсутствовали локальные экстремумы на двойном и тройном, или только тройном, значении периода.

Полученные результаты свидетельствуют, что при использовании аппроксимации воздействия тригонометрическим полиномом даже относительно невысокой степени даже для самых сложных импульсов с вертикальными фронтами легко можно детектировать истинное значение периода воздействия по зависимости целевой функции от пробного периода $L(\tilde{T})$ как в колебательном, так и в возбуждаемом режиме. Наличие 10% измерительного шума не может помешать процедуре. Таким образом, незнание периода воздействия никак не ограничивает применимость описанного в работе метода.

Заключение

В работах [19, 20] уже были предложены подходы к реконструкции системы ФАПЧ с полосовым фильтром, предложенной в [14]. Они опирались, как и представленный в данной работе алгоритм, на неявную аппроксимацию одной из нелинейных функций модели; такой подход был предложен изначально для систем с запаздыванием [18], а затем развит и для других типов уравнений, например, для обобщённых осцилляторов ван дер Поля [31]. Основная проблема предложенных в [18, 19, 31] решений заключалась в том, что они требовали численного расчёта второй производной, что сильно ограничивает применимость метода при наличии измерительных шумов: приемлемый уровень шума, как правило, составляет не более 1–2% от среднеквадратичного отклонения сигнала. Как решить эту проблемы в общем случае, пока не ясно, но для ряда систем результат может быть достигнут переходом к интегрированным по времени уравнениям, как это было показано в [32] для осцилляторов ван дер Поля и Рэля. Рассматриваемая в данной работе модель системы фазовой автоподстройки частоты также допускает подобную модификацию, чем мы и воспользовались.

При этом была решена и вторая, специфичная именно для реконструкции рассматриваемой системы ФАПЧ проблема: чувствительность метода к близким к нулю значениям наблюдаемой. В работах [19, 20] векторы состояния, соответствовавшие $y \approx 0$ вовсе исключались из рассмотрения, поскольку в таком случае сама целевая функция оказывалась плохо определена, что приводило к необходимости исключать до половины всего ряда в колебательных режимах,

а в возбужденном режиме при $\gamma = 0$ реконструкция вовсе не проводилась, так как в таком режиме значения $y \approx 0$ соответствуют большей части временного ряда, как это показано в [15, 30]. Представленный здесь алгоритм лишён этого недостатка при реконструкции параметров ФАПЧ и внешнего воздействия. Решение естественным образом следовало из перехода к интегрированной системе — соответствующая наблюдаемая переменная y ушла из знаменателя при определении нелинейной функции интегрированной системы и переопределении целевой функции алгоритма. При этом следует понимать, что такая модификация алгоритма возможна не для всякой системы и её применимость зависит от вида уравнений.

Аппроксимация периодического внешнего воздействия была произведена проверенным ранее для осцилляторов ван дер Поля–Тоуды [22] способом путём разложения в тригонометрический полином. При этом частота воздействия подбиралась просто перебором, а не с помощью алгоритма нелинейной оптимизации, как в [22], где использовался по сути метод Ньютона, поскольку мощности современных компьютеров допускают такой подход, при этом отсутствует вероятность разбегания алгоритма. Такая аппроксимация показала высокую эффективность и устойчивость: с одной стороны, можно описать достаточно сложное воздействие с близкими к вертикальным фронтами коротких импульсов большой скважности, с другой стороны, даже при существенном увеличении числа гармоник сверх необходимого, метод остаётся устойчивым.

Представляется, что предложенный подход может быть непосредственно использован для реконструкции по экспериментальным данным неавтономного генератора, описанного в [17]. При этом для случая нерегулярного импульсного воздействия представленный подход не годится. Можно предположить, что частично проблему может решить использование радиальных базисных функций для аппроксимации импульсов, где каждому импульсу будет сопоставлена отдельная функция.

Список литературы

1. Безручко Б. П., Смирнов Д. А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. 320 с.
2. Hodgkin A. L., Huxley A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. Vol. 117, no. 4. P. 500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
3. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes // Biophysical Journal. 1961. Vol. 1, no. 6. P. 445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
4. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proc. IRE. 1962. Vol. 50, no. 10. P. 2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.
5. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proc. R. Soc. Lond. B. 1984. Vol. 221, no. 1222. P. 87–102. DOI: 10.1098/rspb.1984.0024.
6. Morris C., Lecar H. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber // Biophysical Journal. 1981. Vol. 35, no. 1. P. 193–213. DOI: 10.1016/S0006-3495(81)84782-0.
7. Gouesbet G., Letellier C. Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49, no. 6. P. 4955–4972. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.4955.
8. Packard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D., Shaw R. S. Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, no. 9. P. 712–716. DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.712.
9. Baake E., Baake M., Bock H. G., Briggs K. M. Fitting ordinary differential equations to chaotic data // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45, no. 8. P. 5524–5529. DOI: /10.1103/PhysRevA.45.5524.

10. Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Оценка порядка и реконструкция модельного уравнения системы с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 17. С. 73–80.
11. Ishizaka K., Flanagan J. L. Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords // Bell. Syst. Tech. J. 1972. Vol. 51, no. 6. P. 1233–1268. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1972.tb02651.x.
12. Barfred M., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H. Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation // Chaos. 1996. Vol. 6, no. 3. P. 280–287. DOI: 10.1063/1.166175.
13. Huys Q. J. M., Ahrens M. B., Paninski L. Efficient estimation of detailed single-neuron models // Journal of Neurophysiology. 2006. Vol. 96, no. 2. P. 872–890. DOI: 10.1152/jn.00079.2006.
14. Шалфеев В. Д. Исследование динамики системы фазовой автоподстройки частоты с разделительным конденсатором в цепи управления // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 3. С. 397–406.
15. Мищенко М. А., Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нейроподобная динамика в системе фазовой синхронизации // Известия вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 4. С. 122–130. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-4-122-130.
16. Matrosov V. V., Mishchenko M. A., Shalfeev V. D. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop // The European Physical Journal Special Topics. 2013. Vol. 222, no. 10. P. 2399–2405. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02024-9.
17. Мищенко М. А., Большаков Д. И., Матросов В. В. Аппаратная реализация нейроподобного генератора с импульсной и пачечной динамикой на основе системы фазовой синхронизации // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, № 13. С. 10–18. DOI: 10.21883/PJTF.2017.13.44806.16737.
18. Sysoev I. V., Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Bezruchko B. P. Reconstruction of ensembles of coupled time-delay systems from time series // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89, no. 6. P. 062911. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.062911.
19. Сысоева М. В., Сысоев И. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Реконструкция уравнений нейроподобного осциллятора, моделируемого системой фазовой автоподстройки частоты с запаздыванием, по скалярному временному ряду // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 4. С. 397–413. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-397-413.
20. Sysoeva M. V., Sysoev I. V., Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Bezruchko B. P. Reconstruction of coupling structure in network of neuron-like oscillators based on a phase-locked loop // Chaos, Solitons & Fractals. 2021. Vol. 142. P. 110513. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110513.
21. Lüttjohann A., Pape H.-C. Regional specificity of cortico-thalamic coupling strength and directionality during waxing and waning of spike and wave discharges // Scientific Reports. 2019. Vol. 9, no. 1. P. 2100. DOI: 10.1038/s41598-018-37985-7.
22. Смирнов Д. А., Сысоев И. В., Селезнев Е. П., Безручко Б. П. Реконструкция моделей неавтономных систем с дискретным спектром воздействия // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, № 19. С. 69–76.
23. Мищенко М. А. Нейроподобная модель на основе системы фазовой автоподстройки частоты // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 5, № 3. С. 279–282.
24. Мищенко М. А., Жукова Н. С., Матросов В. В. Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсным воздействием // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 5. С. 6–19. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-5-6-19.
25. Мищенко М. А., Ковалева Н. С., Половинкин А. В., Матросов В. В. Возбуждение фазоуправляемого генератора импульсной последовательностью // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 240–253. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-240-253.
26. Zhang J., Davidson R. M., Wei M., Loew L. M. Membrane electric properties by combined patch clamp and fluorescence ratio imaging in single neurons // Biophysical Journal. 1998. Vol. 74, no. 1. P. 48–53. DOI: 10.1016/S0006-3495(98)77765-3.

27. Jin L., Han Z., Platasa J., Woollorton J. R. A., Cohen L. B., Pieribone V. A. Single action potentials and subthreshold electrical events imaged in neurons with a fluorescent protein voltage probe // *Neuron*. 2012. Vol. 75, no. 5. P. 779–785. DOI: 10.1016/j.neuron.2012.06.040.
28. Savitzky A., Golay M. J. E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures // *Anal. Chem.* 1964. Vol. 36, no. 8. P. 1627–1639. DOI: 10.1021/ac60214a047.
29. Bezruchko B. P., Smirnov D. A. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63, no. 1. P. 016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.016207.
30. Сысоев И. В., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Нейроподобная динамика в системе фазовой автоподстройки частоты с запаздывающей обратной связью // *Письма в ЖТФ*. 2020. Т. 46, № 14. С. 36–38. DOI: 10.21883/PJTF.2020.14.49665.18267.
31. Sysoev I. V. Reconstruction of ensembles of generalized Van der Pol oscillators from vector time series // *Physica D*. 2018. Vol. 384–385. P. 1–11. DOI: 10.1016/j.physd.2018.07.004.
32. Sysoev I. V., Bezruchko B. P. Noise robust approach to reconstruction of van der Pol-like oscillators and its application to Granger causality // *Chaos*. 2021. Vol. 31, no. 8. P. 083118. DOI: 10.1063/5.0056901.

References

1. Bezruchko BP, Smirnov DA. *Extracting Knowledge From Time Series: An Introduction to Nonlinear Empirical Modeling*. Berlin: Springer; 2010. 410 p. DOI: 10.1007/978-3-642-12601-7.
2. Hodgkin AL, Huxley AF. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 1952;117(4):500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
3. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes. *Biophysical Journal*. 1961;1(6):445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
4. Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*. 1962;50(10):2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.
5. Hindmarsh JL, Rose RM. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. Lond. B*. 1984;221(1222):87–102. DOI: 10.1098/rspb.1984.0024.
6. Morris C, Lecar H. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophysical Journal*. 1981;35(1):193–213. DOI: 10.1016/S0006-3495(81)84782-0.
7. Gouesbet G, Letellier C. Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets. *Phys. Rev. E*. 1994;49(6):4955–4972. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.4955.
8. Packard NH, Crutchfield JP, Farmer JD, Shaw RS. Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.* 1980;45(9):712–716. DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.712.
9. Baake E, Baake M, Bock HG, Briggs KM. Fitting ordinary differential equations to chaotic data. *Phys. Rev. A*. 1992;45(8):5524–5529. DOI: /10.1103/PhysRevA.45.5524.
10. Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Evaluating the order and reconstructing the model equations of a time-delay system. *Tech. Phys. Lett.* 2006;32(9):768–771. DOI: 10.1134/S1063785006090100.
11. Ishizaka K, Flanagan JL. Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords. *Bell. Syst. Tech. J.* 1972;51(6):1233–1268. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1972.tb02651.x.
12. Barfred M, Mosekilde E, Holstein-Rathlou NH. Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation. *Chaos*. 1996;6(3):280–287. DOI: 10.1063/1.166175.
13. Huys QJM, Ahrens MB, Paninski L. Efficient estimation of detailed single-neuron models. *Journal of Neurophysiology*. 2006;96(2):872–890. DOI: 10.1152/jn.00079.2006.

14. Shalfeev VD. Investigation of the dynamics of a system of automatic phase control of frequency with a coupling capacitor in the control loop. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1968;11(3): 221–226. DOI: 10.1007/BF01033800.
15. Mishchenko MA, Shalfeev VD, Matrosov VV. Neuron-like dynamics in phase-locked loop. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2012;20(4):122–130 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-4-122-130.
16. Matrosov VV, Mishchenko MA, Shalfeev VD. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop. *The European Physical Journal Special Topics*. 2013;222(10):2399–2405. DOI: 10.1140/epjst/e2013-02024-9.
17. Mishchenko MA, Bolshakov DI, Matrosov VV. Instrumental implementation of a neuronlike generator with spiking and bursting dynamics based on a phase-locked loop. *Tech. Phys. Lett.* 2017;43(7):596–599. DOI: 10.1134/S1063785017070100.
18. Sysoev IV, Prokhorov MD, Ponomarenko VI, Bezruchko BP. Reconstruction of ensembles of coupled time-delay systems from time series. *Phys. Rev. E*. 2014;89(6):062911. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.062911.
19. Sysoeva MV, Sysoev IV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Reconstructing the neuron-like oscillator equations modeled by a phase-locked system with delay from scalar time series. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(4):397–413 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-397-413.
20. Sysoeva MV, Sysoev IV, Prokhorov MD, Ponomarenko VI, Bezruchko BP. Reconstruction of coupling structure in network of neuron-like oscillators based on a phase-locked loop. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021;142:110513. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110513.
21. Lüttjohann A, Pape HC. Regional specificity of cortico-thalamic coupling strength and directionality during waxing and waning of spike and wave discharges. *Scientific Reports*. 2019;9(1):2100. DOI: 10.1038/s41598-018-37985-7.
22. Smirnov DA, Sysoev IV, Seleznev EP, Bezruchko BP. Reconstructing nonautonomous system models with discrete spectrum of external action. *Tech. Phys. Lett.* 2003;29(10):824–827. DOI: 10.1134/1.1623857.
23. Mishchenko MA. Neuron-like model on the basis of the phase-locked loop. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 2011;5(3):279–282 (in Russian).
24. Mishchenko MA, Zhukova NS, Matrosov VV. Excitability of neuron-like generator under pulse stimulation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(5):6–19 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-5-6-19.
25. Mishchenko MA, Kovaleva NS, Polovinkin AV, Matrosov VV. Excitation of phase-controlled oscillator by pulse sequence. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(2):240–253 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-240-253.
26. Zhang J, Davidson RM, Wei M, Loew LM. Membrane electric properties by combined patch clamp and fluorescence ratio imaging in single neurons. *Biophysical Journal*. 1998;74(1):48–53. DOI: 10.1016/S0006-3495(98)77765-3.
27. Jin L, Han Z, Platasa J, Woollorton JRA, Cohen LB, Pieribone VA. Single action potentials and subthreshold electrical events imaged in neurons with a fluorescent protein voltage probe. *Neuron*. 2012;75(5):779–785. DOI: 10.1016/j.neuron.2012.06.040.
28. Savitzky A, Golay MJE. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Anal. Chem.* 1964;36(8):1627–1639. DOI: 10.1021/ac60214a047.
29. Bezruchko BP, Smirnov DA. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series. *Phys. Rev. E*. 2001;63(1):016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.016207.

30. Sysoev IV, Sysoeva MV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Neural-like dynamics in a phase-locked loop system with delayed feedback. *Tech. Phys. Lett.* 2020;46(7):710–712. DOI: 10.1134/S1063785020070287.
31. Sysoev IV. Reconstruction of ensembles of generalized Van der Pol oscillators from vector time series. *Physica D.* 2018;384–385:1–11. DOI: 10.1016/j.physd.2018.07.004.
32. Sysoev IV, Bezruchko BP. Noise robust approach to reconstruction of van der Pol-like oscillators and its application to Granger causality. *Chaos.* 2021;31(8):083118. DOI: 10.1063/5.0056901.

Сысоева Марина Вячеславовна — родилась в Саратове (1987). Окончила с отличием факультет нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета по направлению «Биомедицинская инженерия» (магистр, 2011). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальностям «Биофизика» и «Радиофизика» (2015, СГУ). Доцент кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации» и старший научный сотрудник лаборатории радиотехнических устройств и видеотехники СГТУ имени Гагарина Ю. А., старший научный сотрудник СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, радиотехническое моделирование. Автор 34 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
 им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
 E-mail: bobrichkek@mail.ru
 ORCID: 0000-0003-4228-9124
 AuthorID (eLibrary.Ru): 651344

Корнилов Максим Вячеславович — родился в Саратове (1988). Окончил Лицей математики и информатики (2005), механико-математический факультет (2009, бакалавр математики) и факультет нано- и биомедицинских технологий (2011, магистр техники и технологии) Саратовского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2015, СГУ). Доцент кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ имени Н. Г. Чернышевского, старший научный сотрудник СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — анализ временных рядов, математическое моделирование биологических процессов, автоматическое распознавание изображений, компьютерное зрение. Автор 6 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
 им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный
 университет имени Н. Г. Чернышевского
 Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: kornilovmv@gmail.com
 ORCID: 0000-0003-1634-9007
 AuthorID (eLibrary.Ru): 681980



Такашвили Лев Вячеславович — родился в Саратове (1998). Окончил МОУ СОШ № 77 (2016). С отличием окончил Институт физики Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (магистр, 2022). Научные интересы — радиофизические модели биологических нейронов.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный
 университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: nar7187@yandex.ru



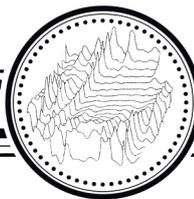
Матросов Валерий Владимирович — родился в 1960 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н. И. Лобачевского по специальности «Прикладная математика» (1982). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования (с 2007), заведующий этой кафедрой (с 2013), декан радиофизического факультета ННГУ им. Н. И. Лобачевского (с 2014). Под его руководством защищено 4 кандидатских диссертации. Член диссертационного совета 24.2.340.03 при ННГУ (радиофак); научно-методического совета исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». Почетный работник сферы образования РФ, награжден знаком НТОРЭС им. А. С. Попова «За заслуги в развитии радиоэлектроники и связи». Автор 52 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: matrosov@rf.unn.ru
ORCID: 0000-0003-3146-111X
AuthorID (eLibrary.Ru): 24397



Сысоев Илья Вячеславович — родился в Саратове (1983). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по специальности «Физика» (СГУ, 2004). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007) и доктора физико-математических наук (2019) по специальности «Радиофизика». Профессор кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ, старший научный сотрудник СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН, ведущий научный сотрудник кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Зам. главного редактора журнала «Известия вузов. ПНД». Научные интересы — исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор 69 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: ivssci@gmail.com
ORCID: 0000-0002-9203-5504
AuthorID (eLibrary.Ru): 128457



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4)

Научная статья
УДК 531.011

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-411-423
EDN: BPZEKD

Вариационный подход к построению дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением

В. М. Савчин[✉], Ф. Т. Чинь

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: ✉savchin-vm@rudn.ru, tr.phuoctoan@gmail.com

Поступила в редакцию 9.01.2022, принята к публикации 3.06.2022,

опубликована 1.08.2022

Аннотация. Основная цель настоящего исследования триединая и состоит, во-первых, в построении косвенного вариационного принципа Гамильтона для задачи о движении маятника с точкой подвеса, совершающей малые колебания вдоль прямой, составляющей малый угол наклона с вертикалью. Во-вторых, в построении на его основе соответствующей разностной схемы. В-третьих, в ее исследовании методами численного анализа. **Методы.** Задача о движении указанного маятника рассматривается как частный случай исходной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Для решения вопроса о ее вариационной формулировке использован критерий потенциальности операторов – симметричность производной Гато нелинейного оператора, определяемого поставленной задачей. Этот же критерий использован для построения вариационного множителя и построения соответствующего косвенного вариационного принципа Гамильтона. На его основе построен и исследован дискретный аналог исходной краевой задачи и задачи о движении маятника. **Результаты.** Доказано, что оператор исходной краевой задачи не является потенциальным относительно классической билинейной формы. Найден соответствующий вариационный множитель и построен косвенный вариационный принцип Гамильтона. На его основе получен дискретный аналог исходной краевой задачи и построено ее решение. Отсюда как частные случаи получаются соответствующие утверждения для указанной задачи о движении маятника. Проведен ряд численных экспериментов, характеризующих зависимость решений задачи о движении маятника от изменения параметров. **Заключение.** Представлен вариационный подход к построению двух различных разностных схем для задачи о движении маятника с точкой подвеса, совершающей малые колебания вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью. Приведены результаты численного моделирования при различных параметрах задачи. Численные решения показывают, что при достаточно малой амплитуде колебаний и достаточно большой частоте колебаний точки подвеса маятник совершает периодическое движение.

Ключевые слова: перевернутый маятник, косвенная вариационная формулировка, уравнения Гамильтона, разностная схема.

Благодарности. Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН – 2030.

Для цитирования: Савчин В. М., Чинь Ф. Т. Вариационный подход к построению дискретной математической модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 411–423. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-411-423. EDN: BPZEKD

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Variational approach to the construction of discrete mathematical model of the pendulum motion with vibrating suspension with friction

V. M. Savchin✉, P. T. Trinh

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

E-mail: ✉savchin-vm@rudn.ru, tr.phuoc@an@gmail.com

Received 9.01.2022, accepted 3.06.2022, published 1.08.2022

Abstract. The main purpose of this work is, first, a construction of the indirect Hamilton's variational principle for the problem of motion of a pendulum with a vibration suspension with friction, oscillating along a straight line making a small angle with the vertical line. Second, the construction on its basis of the difference scheme. Third, to carry out its investigation by methods of numerical analysis. *Methods.* The problem of motion of the indicated pendulum is considering as a particular case of the given boundary problem for a nonlinear second order differential equations. For the solution of problem of its variational formulation there is used the criterion of potentiality of operators — the symmetry of the Gâteaux derivative of nonlinear operator of the given problem. This criterion is also used for the construction of variational multiplier and the corresponding Hamilton's variational principle. On its basis there is constructed and investigated a discrete analog of the given boundary problem and a problem of motion of the pendulum. *Results.* It is proved that the operator of the given boundary problem is not potential with respect to the classical bilinear form. There is found a variational multiplier and constructed the corresponding indirect Hamilton's variational principle. On its basis there is obtained a discrete analog of the given boundary problem and its solution is found. As particular cases one can deduce from that the corresponding results for the problem of motion of the pendulum. There are performed numerical experiments, establishing the dependence of solutions of the problem of motion of the pendulum on the change of parameters. *Conclusion.* There is worked out a variational approach to the construction of two difference schemes for the problem of a pendulum with a suspension with friction, oscillating along a straight line making a small angle with the vertical line. There are presented results of numerical simulation under different parameters of the problem. Numerical results show that under sufficiently small amplitude and sufficiently big frequency of the oscillations of the point of suspension the pendulum realizes a periodical motion.

Keywords: inverted pendulum, indirect variational formulation, Hamilton's equations, difference scheme.

Acknowledgements. This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program — 2030.

For citation: Savchin VM, Trinh PT. Variational approach to the construction of discrete mathematical model of the pendulum motion with vibrating suspension with friction. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(4):411–423. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-411-423

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Настоящая работа восходит к статьям [1–3] и имеет целью построение и исследование дискретной модели движения маятника с вибрационным подвесом с трением на основе косвенного вариационного принципа Гамильтона. Математическая модель с непрерывным временем движения такого маятника после работ П. Л. Капицы, Н. Н. Боголюбова стала базовой в нелинейной механике. Выявлена её взаимосвязь с некоторыми задачами физики (см. обзор литературы в [4, 5]).

При этом исследованы далеко не все свойства базовой нелинейной модели. Дополнительные возможности открываются с применением конечно-разностных методов [6]. При переходе от динамической системы с непрерывным временем к разностной схеме важно, чтобы обе модели сохраняли качественные характеристики одного и того же явления.

Как отмечено в работе [7], для математического описания ряда физических явлений и процессов целесообразно использовать вариационные принципы.

Авторам настоящей статьи не известны работы, в которых бы был развит вариационный подход к построению двух различных разностных схем для задачи о движении маятника с точкой подвеса, совершающей малые колебания вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью.

1. Построение косвенного вариационного принципа для одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$N(u) \equiv \ddot{u} + k(t)\dot{u} + \varphi(t)\sin u + \psi(t)\cos u = 0, \quad t \in (0, l), \quad (1)$$

$$D(N) = \{u \in U = C^2[0, l] : u|_{t=0} = a_0, u|_{t=l} = a_1\}. \quad (2)$$

Здесь $u(t)$ — неизвестная функция; $k \in C^2[0, l]$, $\varphi, \psi \in C[0, l]$ — заданные функции; a_0, a_1 — заданные числа; $\dot{u} = \frac{du(t)}{dt}$, $\ddot{u} = \frac{d^2u(t)}{dt^2}$.

Уравнения, изученные в работах [1–3], являются частными случаями (1).

Обозначим $V = C[0, l]$. Зададим билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times U \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$\langle v, g \rangle = \int_0^l v(t)g(t) dt. \quad (3)$$

Будем говорить, что задача (1), (2) допускает прямую вариационную формулировку относительно (3), если существует дифференцируемый по Гато функционал $F_N : D(N) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что его дифференциал

$$\delta F_N[u, h] = \langle N(u), h \rangle, \quad \forall u \in D(N), \forall h \in D(N'_u).$$

Здесь $D(N'_u)$ — область определения производной Гато N'_u оператора N в точке $u \in D(N)$. При этом говорят также, что оператор N является потенциальным на $D(N)$ относительно билинейной формы (3).

Критерий потенциальности N на выпуклом множестве $D(N)$ — это условие симметричности вида [8, с. 18], [9, с. 23]

$$\langle N'_u h, g \rangle = \langle N'_u g, h \rangle, \quad \forall u \in D(N), \forall h, g \in D(N'_u). \quad (4)$$

При его выполнении искомый функционал F_N — действие по Гамильтону — может быть найден по формуле

$$F_N[u] = \int_0^1 \left\langle N\left(\tilde{u} + \lambda(u - \tilde{u})\right), u - \tilde{u} \right\rangle d\lambda + \text{const}, \quad (5)$$

где \tilde{u} — произвольный фиксированный элемент из $D(N)$.

Теорема 1. При $k(t) \neq 0$ задача (1), (2) не допускает прямой вариационной формулировки относительно билинейной формы (3).

Доказательство. Убедимся, что заданный оператор вида (1) не удовлетворяет условию (4). Имеем

$$\begin{aligned} N'_u h &= \ddot{h} + k(t) \dot{h} + \varphi(t) h \cos u - \psi(t) h \sin u, \\ \langle N'_u h, g \rangle &= \int_0^l [\ddot{h} + k(t) \dot{h} + \varphi(t) h \cos u - \psi(t) h \sin u] g dt, \\ \forall u \in D(N), \forall g, h \in D(N'_u). \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя по частям и учитывая, что

$$h|_{t=0} = g|_{t=0} = h|_{t=l} = g|_{t=l} = 0, \quad \forall h, g \in (N'_u), \quad (7)$$

из (6) получаем

$$\begin{aligned} \langle N'_u h, g \rangle &= \int_0^l [\ddot{g} - k(t) \dot{g} + \varphi(t) g \cos u - \psi(t) g \sin u] h dt \neq \\ &\neq \langle N'_u g, h \rangle = \int_0^l [\ddot{g} + k(t) \dot{g} + \varphi(t) g \cos u - \psi(t) g \sin u] h dt \end{aligned}$$

при $k(t) \neq 0$.

Теорема доказана. \square

Обозначим $\tilde{N}(u) = M(t)N(u)$, $u \in D(N)$, где $M(t) \neq 0$ на $[0, l]$ — искомый вариационный множитель, определяемый из условия, чтобы оператор \tilde{N} был потенциальным на $D(\tilde{N}) = D(N)$ относительно билинейной формы (3).

Теорема 2. Для задачи (1), (2) существует вариационный множитель вида $M(t) = e^{\int k(t) dt}$.

Доказательство. Обозначим

$$Q(u, h, g) = \langle \tilde{N}'_u h, g \rangle - \langle \tilde{N}'_u g, h \rangle, \quad \forall u \in D(N), \forall g, h \in D(N'_u).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{N}'_u h &= M(t) N'_u h, \\ \langle \tilde{N}'_u h, g \rangle &= \int_0^l M(t) N'_u h \cdot g dt = \int_0^l M(t) [\ddot{h}g + k(t) \dot{h}g + \varphi(t) hg \cos u - \psi(t) hg \sin u] dt, \\ \langle \tilde{N}'_u g, h \rangle &= \int_0^l M(t) [\ddot{g}h + k(t) \dot{g}h + \varphi(t) hg \cos u - \psi(t) hg \sin u] dt. \end{aligned}$$

С учётом этого получаем

$$Q(u, h, g) = \int_0^l [M(t) \ddot{h}g + M(t) k(t) \dot{h}g - M(t) \ddot{g}h - M(t) k(t) \dot{g}h] dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая условия (7), отсюда находим

$$\begin{aligned} Q(u, h, g) &= \int_0^l \left\{ 2 \left[\frac{dM}{dt} - Mk \right] \frac{dg}{dt} + \left[\frac{d^2 M}{dt^2} - \frac{d(Mk)}{dt} \right] g \right\} h dt, \\ \forall u \in D(N), \forall h, g \in D(N'_u). \end{aligned} \quad (8)$$

Для выполнения условия

$$Q(u, h, g) = 0, \quad \forall u \in D(N), \forall g, h \in D(N'_u)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{dM}{dt} - Mk = 0, \quad \forall t \in [0, l], \quad (9)$$

$$\frac{d^2M}{dt^2} - \frac{d(Mk)}{dt} = 0, \quad \forall t \in [0, l]. \quad (10)$$

Условие (10) является следствием (9). Таким образом, вариационный множитель $M(t)$ является решением уравнения (9) и имеет вид

$$M(t) = e^{\int k(t)dt}. \quad (11)$$

Теорема доказана. □

Теорема 3. Уравнение

$$\tilde{N}(u) \equiv e^{\int k(t)dt} N(u) = 0, \quad u \in D(N), \quad (12)$$

где N имеет вид (1), представимо в форме уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -e^{-\int k(t)dt} p, \\ \dot{p} &= e^{\int k(t)dt} (\varphi \sin u + \psi \cos u). \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство. Используя формулу (5), находим действие по Гамильтону для (12) в виде

$$F_{\tilde{N}}[u] = \int_0^l M \left(-\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \varphi \cos u + \psi \sin u + \varphi \right) dt. \quad (14)$$

Таким образом, лагранжиан уравнения (12) равен

$$\mathcal{L} = e^{\int k(t)dt} \left(-\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \varphi \cos u + \psi \sin u + \varphi \right). \quad (15)$$

Введя обобщённый импульс

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = -M\dot{u},$$

получаем, что лагранжиану (15) соответствует гамильтониан

$$H(t, p, u) = -\frac{p^2}{2M} + M\varphi \cos u - M\psi \sin u - M\varphi.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= -\frac{p}{M}, \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= -M\varphi \sin u - M\psi \cos u \end{aligned}$$

и, следовательно, получаем уравнения Гамильтона (13).

Теорема доказана. □

Уравнения (13) могут быть получены из вариационного принципа Гамильтона с действием

$$J[p, u] = \int_0^l [p\dot{u} - H(t, p, u)] dt. \quad (16)$$

2. Построение и исследование дискретного аналога задачи (1), (2) на основе функционала (14)

Разобьем отрезок $[0, l]$ на m равных частей узлами $t_i = i\tau$ ($i = \overline{0, m}$), где $\tau = m^{-1}l$. Введем операторы сужения

$$T_r u(t) = \bar{u}_r = (u(t_0), u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_{m-1}), u(t_m))^T$$

(столбец высотой $r = m + 1$). Такие столбцы образуют линейное пространство, которое будем обозначать \bar{U}_r . Для удобства напомним $u_i = u(t_i)$.

Обозначим \bar{N}_F – оператор дискретного аналога задачи (1), (2) на основе функционала (14).

Положим $D(\bar{N}_F) = \{\bar{u}_r \in \bar{U}_r : u_0 = a_0, u_m = a_1\}$ и $D(\bar{N}'_F) = \{\bar{h}_r \in \bar{U}_r : h_0 = h_m = 0\}$.

Запишем (14) в виде

$$F_{\bar{N}}[u] = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} M \left(-\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \varphi \cos u + \psi \sin u + \varphi \right) dt.$$

Далее аппроксимируем интегралы

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} M \left(-\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \varphi \cos u + \psi \sin u + \varphi \right) dt &\approx \\ &\approx \frac{l}{m} M^i \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right)^2 - \varphi^i \cos u_i + \psi^i \sin u_i + \varphi^i \right], \end{aligned}$$

где $M^i = M(t_i)$, $\varphi^i = \varphi(t_i)$ и $\psi^i = \psi(t_i)$.

Функционал (14) заменяем разностным действием по Гамильтону

$$\bar{F}[\bar{u}_r] = \frac{l}{m} \sum_{i=0}^{m-1} M^i \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right)^2 - \varphi^i \cos u_i + \psi^i \sin u_i + \varphi^i \right].$$

Приравнявая нулю частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}[\bar{u}_r]}{\partial u_i} &= \frac{l}{m} \left(M^i \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau^2} - M^{i-1} \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau^2} + M^i \varphi^i \sin u_i + M^i \psi^i \cos u_i \right), \\ & i = \overline{1, m-1}, \end{aligned}$$

получаем систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} \bar{N}_F^i(\bar{u}_r) &\equiv M^i \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau^2} - M^{i-1} \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau^2} + \\ &+ M^i \varphi^i \sin u_i + M^i \psi^i \cos u_i = 0, \quad i = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда находим решение этой системы

$$u_{i+1} = u_i + \frac{M^{i-1}}{M^i} (u_i - u_{i-1}) - \tau^2 \varphi^i \sin u_i - \tau^2 \psi^i \cos u_i, \quad i = \overline{1, m-1},$$

$$u_0 = a_0, \quad u_m = a_1.$$

Перейдем к следующему частному случаю уравнения (1). Рассмотрим уравнение движения маятника, точка подвеса которого осциллирует по синусоидальному закону вдоль прямой, наклоненной к вертикальной оси OY под углом α [10]

$$N_1(u) \equiv \ddot{u} + \sigma \dot{u} + \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d} \sin u - \frac{A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \alpha}{d} \cos u = 0, \quad t \in (0, l), \quad (18)$$

$$u_0 = a_0, \quad u_m = a_1, \quad (19)$$

где u — угол отклонения маятника от нижнего вертикального положения равновесия, σ — коэффициент затухания, d — длина маятника, g — ускорение свободного падения, ω — частота колебаний точки подвеса, A — амплитуда колебаний точки подвеса.

В силу теорем 1, 2 при $\sigma \neq 0$ оператор N_1 (18) является непотенциальным относительно билинейной формы (3) и для задачи (18)–(19) существует вариационный множитель вида $e^{\sigma t}$. Обозначим

$$\tilde{N}_1(u) \equiv e^{\sigma t} N_1(u) = 0. \quad (20)$$

Согласно формуле (14), имеем действие по Гамильтону для (20):

$$F_{\tilde{N}_1}[u] = \int_0^l e^{\sigma t} \left(-\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d} \cos u - \frac{A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \alpha}{d} \sin u + \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d} \right) dt, \quad (21)$$

а соответствующий конечно-разностный функционал имеет вид

$$\bar{F}_{\tilde{N}_1}[\bar{u}_r] = \frac{l}{m} \sum_{i=0}^{m-1} e^{\sigma t_i} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right)^2 - \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_i) \cos \alpha}{d} \cos u_i + \left(-\frac{A\omega^2 \sin(\omega t_i) \sin \alpha}{d} \right) \sin u_i + \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_i) \cos \alpha}{d} \right].$$

С помощью (17) запишем дискретный аналог задачи (18)–(19) на основе функционала (21)

$$\bar{N}_{1,F}^i(\bar{u}_r) \equiv e^{\sigma t_i} \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau^2} - e^{\sigma t_{i-1}} \frac{u_i - u_{i-1}}{\tau^2} + e^{\sigma t_i} \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_i) \cos \alpha}{d} \sin u_i + e^{\sigma t_i} \left(-\frac{A\omega^2 \sin(\omega t_i) \sin \alpha}{d} \right) \cos u_i = 0, \quad i = \overline{1, m-1},$$

$$u(0) = a_0, \quad u(l) = a_1.$$

Решение этой системы находится по формулам

$$u_{i+1} = u_i + e^{-\sigma \tau} (u_i - u_{i-1}) - \tau^2 \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_i) \cos \alpha}{d} \sin u_i + \tau^2 \frac{A\omega^2 \sin(\omega t_i) \sin \alpha}{d} \cos u_i, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (22)$$

$$u_0 = a_0, \quad u_m = a_1.$$

Для проведения численных экспериментов положим:

- коэффициент затухания $\sigma = -0.01 \text{ с}^{-1}$,
- ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$,
- длина $d = 1 \text{ м}$,
- малый параметр γ ($\gamma = 0.3, 0.1$, см. ниже),
- амплитуда колебаний точки подвеса $A = \gamma A_0$, $A_0 = 1 \text{ м}$,
- угол $\alpha = \gamma^2 \alpha_0$, $\alpha_0 = \pi/6$,
- частота колебаний точки подвеса $\omega = \omega_0/\gamma$, $\omega_0 = 5 \text{ Гц}$,
- $l = 5T$, $T = 2\pi/\omega_0$ с количеством узлов $m = 400$, значения функции в конечных точках $u_0 = u_m = 0$.

На рис. 1 изображены решения (22) при различных указанных значениях γ .

Следует отметить, что, поскольку (1), (2) – краевая задача, то для построения приведенных в работе графиков дополнительно использован известный метод стрельбы. Он позволяет учесть

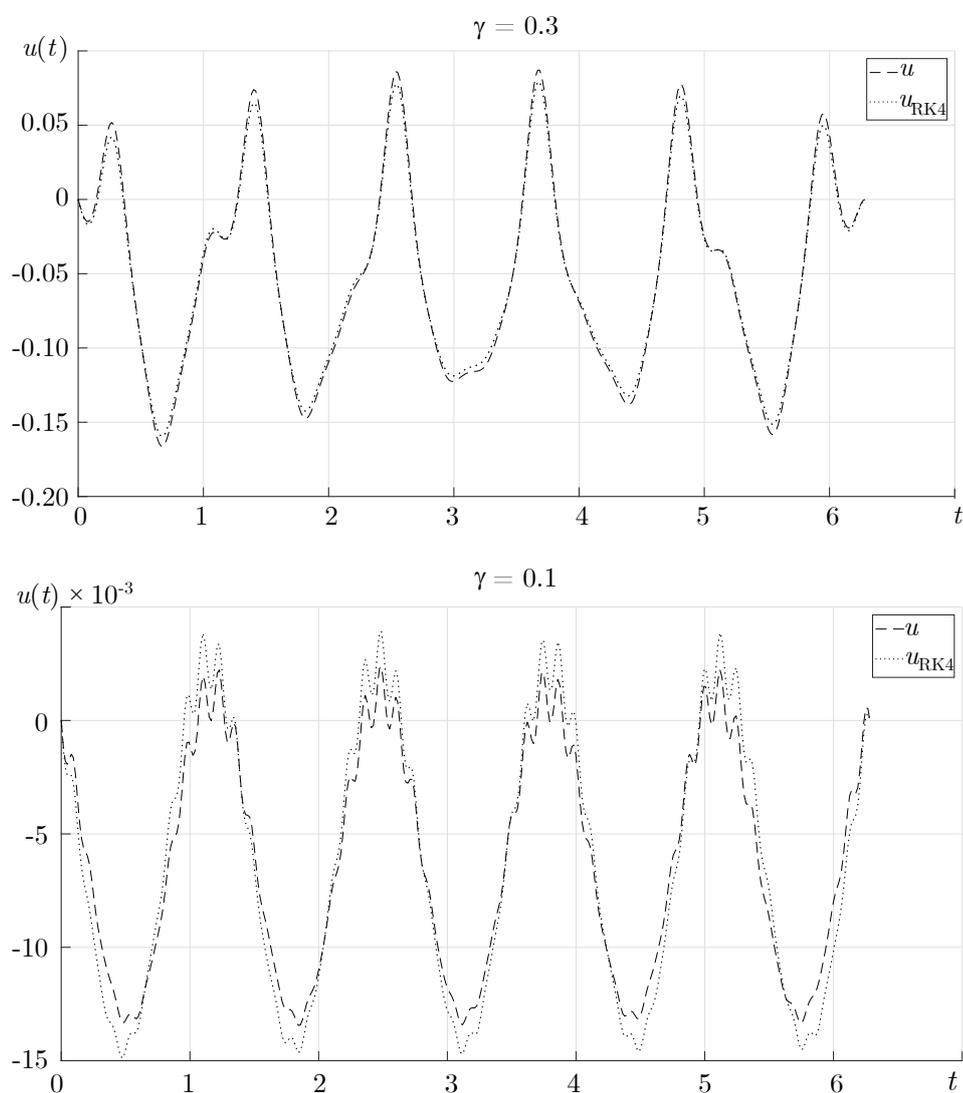


Рис. 1. u – решение (22), u_{RK4} – решение по методу Рунге–Кутты

Fig. 1. u – solution (22), u_{RK4} – solution by the Runge–Kutta method

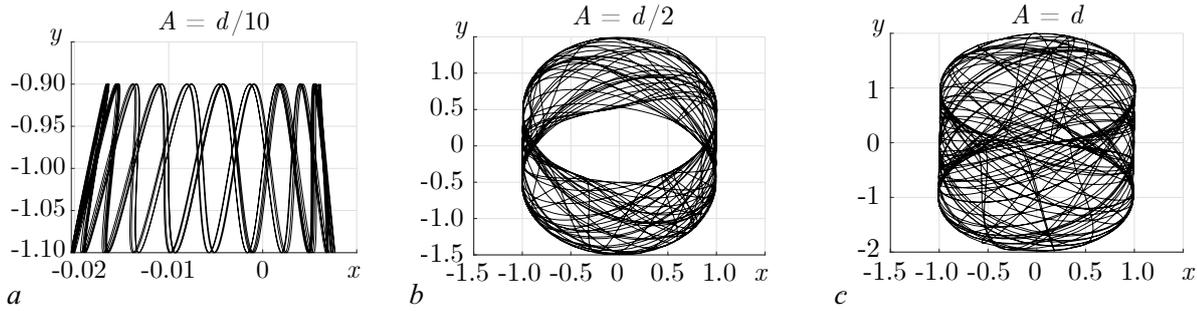


Рис. 2. Портрет системы на плоскости OXY для маятника при большой амплитуде вынуждающих колебаний. Параметры маятника приведены в тексте

Fig. 2. Portrait of the system on the plane OXY for a pendulum with large amplitude of forcing oscillations. The parameters of the pendulum are given in the text

значение решения на правом конце отрезка. В этой связи выбран метод Рунге–Кутты из-за его простоты и эффективности для проверки правильности найденного решения (22).

Легко видеть, что когда $A_0\omega_0 > \sqrt{2gd}$ и γ достаточно мало ($\gamma = 0.1$), графики решения (22) имеют T -периодический вид. Это свойство в случае непрерывного времени отмечено в статьях [10, 11].

Если увеличить значение амплитуды колебаний точки подвеса маятника $A = d/2$, то придём к решению, изображенному на рис. 2, *b* (при этом параметры маятника: $\gamma = 0.1$ и $m = 4000$). При дальнейшем увеличении амплитуды $A = d$ траектория движения маятника заполняет все пустое пространство внутри. Это хорошо видно на рис. 2, *c*. При увеличении амплитуды картины не меняются.

3. Построение и исследование разностной схемы уравнений (13) на основе функционала (16)

Аналогично разделу 2, запишем (16) в виде суммы

$$J[p, u] = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [p\dot{u} - H(t, p, u)] dt.$$

Аппроксимируя, получаем

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} [p\dot{u} - H(t, p, u)] dt \approx \frac{l}{m} \left[p_i \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right) - H^i \right],$$

где $p_i = p(t_i)$ и $H^i = H(t_i, p_i, u_i)$.

Таким образом, имеем разностное действие по Гамильтону

$$\bar{J}[\bar{p}_r, \bar{u}_r] = \frac{l}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left[p_i \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right) - H^i \right].$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial \bar{J}[\bar{p}_r, \bar{u}_r]}{\partial p_i} = \frac{l}{m} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - \frac{\partial H^i}{\partial p_i} \right), \quad i = \overline{0, m-1},$$

$$\frac{\partial \bar{J}[\bar{p}_r, \bar{u}_r]}{\partial u_i} = \frac{l}{m} \left(-\frac{p_i - p_{i-1}}{\tau} - \frac{\partial H^i}{\partial u_i} \right), \quad i = \overline{1, m}.$$

Приравнявая их нулю, получаем систему разностных уравнений

$$\begin{aligned}\overline{N}_J^{1,i} &\equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - \frac{\partial H^i}{\partial p_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - \frac{p_i}{M^i} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ \overline{N}_J^{2,i} &\equiv -\frac{p_{i+1} - p_i}{\tau} - \frac{\partial H^{i+1}}{\partial u_{i+1}} = \\ &= -\frac{p_{i+1} - p_i}{\tau} - M^{i+1} \varphi^{i+1} \sin u_{i+1} - M^{i+1} \psi^{i+1} \cos u_{i+1} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}.\end{aligned}$$

Отсюда находим решение этой системы по формулам

$$\begin{aligned}u_{i+1} &= u_i + \tau \frac{p_i}{M^i}, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ p_{i+1} &= p_i - \tau M^{i+1} \varphi^{i+1} \sin u_{i+1} - \tau M^{i+1} \psi^{i+1} \cos u_{i+1}, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ u_0 &= a_0, \quad u_m = a_1.\end{aligned}$$

Перейдём к задаче (18)–(19). В силу теоремы 3 уравнение (20) представимо в форме уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -e^{-\sigma t} p, \\ \dot{p} &= e^{\sigma t} \left(\frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d} \sin u - \frac{A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \alpha}{d} \cos u \right).\end{aligned}$$

Действие по Гамильтону имеет вид

$$J_{\tilde{N}_1} [t, p, u] = \int_0^l [p\dot{u} - H_1(t, p, u)] dt,$$

где

$$\begin{aligned}H_1(t, p, u) &= -\frac{p^2}{2e^{\sigma t}} + e^{\sigma t} \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d} \cos u + e^{\sigma t} \frac{A\omega^2 \sin(\omega t) \sin \alpha}{d} \sin u - \\ &\quad - e^{\sigma t} \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t) \cos \alpha}{d}.\end{aligned}$$

Соответствующий разностный функционал равен

$$\overline{J}_{\tilde{N}_1} [\overline{p}_r, \overline{u}_r] = \frac{l}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left[p_i \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \right) - H_1^i \right],$$

где $H_1^i = H_1(t_i, p_i, u_i)$. На его основе получаем следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned}\overline{N}_{1,J}^{1,i} &\equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - \frac{p_i}{e^{\sigma t_i}} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ \overline{N}_{1,J}^{2,i} &\equiv -\frac{p_{i+1} - p_i}{\tau} - e^{\sigma t_{i+1}} \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \cos \alpha}{d} \sin u_{i+1} + \\ &\quad + e^{\sigma t_{i+1}} \frac{A\omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \sin \alpha}{d} \cos u_{i+1} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}u_{i+1} &= u_i + \tau \frac{p_i}{e^{\sigma t_i}}, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ p_{i+1} &= p_i - \tau e^{\sigma t_{i+1}} \frac{g - A\omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \cos \alpha}{d} \sin u_{i+1} - \\ &\quad - \tau e^{\sigma t_{i+1}} \frac{A\omega^2 \sin(\omega t_{i+1}) \sin \alpha}{d} \cos u_{i+1}, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ u_0 &= a_0, \quad u_m = a_1.\end{aligned} \tag{23}$$

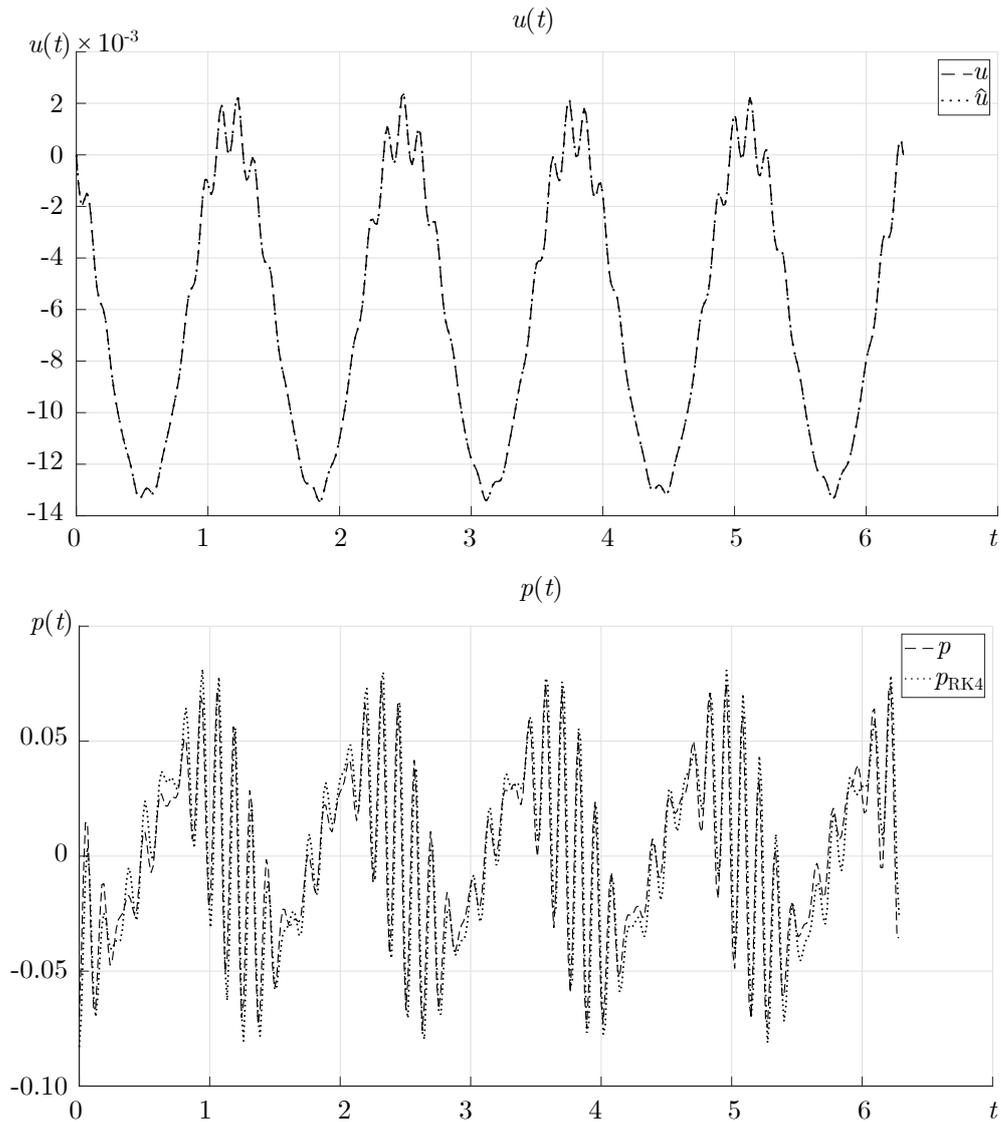


Рис. 3. \hat{u} – решение (22), (u, p) – решение (23), p_{RK4} – решение по методу Рунге–Кутты
 Fig. 3. \hat{u} – solution (22), (u, p) – solution (23), p_{RK4} – solution by the Runge–Kutta method

Для проведения численных экспериментов положим:

- малый параметр $\gamma = 0.1$,
- амплитуда колебаний точки подвеса $A = \gamma A_0$, $A_0 = 1$ м,
- остальные параметры σ , g , d , α_0 , ω_0 , l , T , m , u_0 и u_m не меняются, как в разделе 2.

Заключение

Представлен вариационный подход к построению двух разностных схем для задачи о движении маятника, точка подвеса которого осциллирует вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью. Приведены результаты численного моделирования при различных параметрах задачи. Численные решения показывают, что при достаточно малой амплитуде колебаний и достаточно большой частоте колебаний точки подвеса маятник совершает периодическое движение.

Список литературы

1. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1951. Т. 21, № 5. С. 588–597.
2. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. Т. 44, № 5. С. 7–20. DOI: 10.3367/UFNr.0044.195105b.0007.
3. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сборник трудов Института строительной механики (АН УССР). 1950. Т. 14. С. 9–34.
4. Богатов Е. М., Мухин Р. Р. Метод усреднения, маятник с вибрирующим подвесом: Н. Н. Боголюбов, А. Стефенсон, П. Л. Капица и другие // Известия вузов. ПНД. 2017. Т. 25, № 5. С. 69–87. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87.
5. Butikov E. I. The rigid pendulum — an antique but evergreen physical model // European Journal of Physics. 1999. Vol. 20, no. 6. P. 429–441. DOI: 10.1088/0143-0807/20/6/308.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 656 с.
7. Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П. Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике // Доклады Академии наук СССР. 1977. Т. 235, № 6. С. 1285–1288.
8. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». Т. 40. М.: ВИНТИ, 1992. С. 3–176.
9. Савчин В. М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. М.: Издательство Университета дружбы народов, 1991. 237 с.
10. Демиденко Г. В., Дулепова А. В. Об устойчивости движения перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса // Сибирский журнал индустриальной математики. 2018. Т. 21, № 4. С. 39–50. DOI: 10.17377/sibjim.2018.21.404.
11. Демиденко Г. В., Дулепова А. В. О периодических решениях одного дифференциального уравнения второго порядка // Современная математика. Фундаментальные направления. 2021. Т. 67, № 3. С. 535–548. DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-535-548.

References

1. Kapitsa PL. The dynamic stability of a pendulum for an oscillating point of suspension. Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1951;21(5):588–597 (in Russian).
2. Kapitsa PL. A pendulum with a vibrating suspension. Physics-Uspokhi. 1951;44(5):7–20 (in Russian). DOI: 10.3367/UFNr.0044.195105b.0007.
3. Bogolyubov NN. Perturbation theory in nonlinear mechanics. Proceedings of the Institute of Structural Mechanics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. 1950;14:9–34 (in Russian).
4. Bogatov EM, Mukhin RR. The averaging method, a pendulum with a vibrating suspension: N.N. Bogolyubov, A. Stephenson, P.L. Kapitza and others. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2017;25(5):69–87 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87.
5. Butikov EI. The rigid pendulum — an antique but evergreen physical model. European Journal of Physics. 1999;20(6):429–441. DOI: 10.1088/0143-0807/20/6/308.
6. Samarskii AA. The Theory of Difference Schemes. Boca Raton: CRC Press; 2001. 786 p. DOI: 10.1201/9780203908518.
7. Goloviznin VM, Samarskii AA, Favorskii AP. A variational approach to constructing finite-difference mathematical models in hydrodynamics. Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. 1977;235(6):1285–1288 (in Russian).

8. Filippov VM, Savchin VM, Shorokhov SG. Variational principles for nonpotential operators. *Journal of Mathematical Sciences*. 1994;68(3):275–398. DOI: 10.1007/BF01252319.
9. Savchin VM. *Mathematical Methods of Mechanics of Infinite-Dimensional Non-Potential Systems*. Moscow: Peoples' Friendship University Publishing; 1991. 237 p. (in Russian).
10. Demidenko GV, Dulepova AV. On stability of the inverted pendulum motion with a vibrating suspension point. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2018;12(4):607–618. DOI: 10.1134/S1990478918040026.
11. Demidenko GV, Dulepova AV. On periodic solutions of one second-order differential equation. *Modern Mathematics. Fundamental Directions*. 2021;67(3):535–548 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-535-548.

Савчин Владимир Михайлович — родился в Украине (1953). Окончил с отличием факультет физико-математических и естественных наук Университета дружбы народов (1981). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1984, УДН) и доктора физико-математических наук (1992, МГУ) — обе по специальности «Теоретическая механика». С 1984 г. работает в Университете дружбы народов. В настоящее время — профессор Математического института имени С. М. Никольского. Научные интересы: вариационные принципы и симметрии, бесконечномерные непотенциальные системы, обратные задачи вариационного исчисления. Опубликовал свыше 50 работ по указанным направлениям.

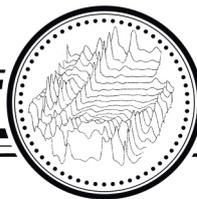


Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
 Российский университет дружбы народов
 E-mail: savchin-vm@rudn.ru
 ORCID: 0000-0003-3850-6747
 AuthorID (eLibrary.Ru): 14052

Чинь Фыок Тоан — родился во Вьетнаме (1993). В 2017 году окончил с отличием математический факультет Воронежского государственного университета с присвоением квалификации бакалавр по направлению математики. В 2019 году окончил с отличием факультет физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов (РУДН) с присвоением квалификации магистр по направлению математики. С 2019 по настоящее время обучается в очной аспирантуре РУДН на факультете физико-математических и естественных наук. Научные интересы: обратные задачи вариационного исчисления, непотенциальные системы, разностные схемы.



Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
 Российский университет дружбы народов
 E-mail: tr.phuocaoan@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-7707-322X



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-424-435
EDN: CGKJXX

Об условиях безопасного подключения к хаб-кластерным энергосетям

В. А. Храменков

Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия
E-mail: hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru

*Поступила в редакцию 12.05.2022, принята к публикации 19.05.2022,
опубликована 1.08.2022*

Аннотация. *Цель.* Исследование динамики модели энергосети, которая образуется в результате расширения сильно централизованной сети, то есть хаб-кластера, за счет присоединения небольшой подсети. Основное внимание уделяется изучению возможных режимов работы такой энергосети и их характеристикам. *Методы.* В работе применяется численное моделирование работы энергосети, динамика которой описывается уравнениями Курамото с инерцией. *Результаты.* Приведены различные режимы работы энергосети и границы их существования в пространстве параметров. Рассмотрены основные характеристики этих режимов, такие как вероятность реализации и значения размаха колебаний режимных переменных. Установлены условия безопасного подключения к хаб-кластерным энергосетям. *Заключение.* Проведено исследование динамики модели энергосети, состоящей из двух подсетей. Обнаружены различные режимы ее работы. На основании характеристик каждого из режимов определена их безопасность для отдельных подсетей. Полученные результаты позволили сформулировать условия безопасного подключения к хаб-кластерным энергосетям.

Ключевые слова: энергосети, синхронные машины, модель Курамото, синхронизация.

Благодарности. Работа поддержана научно-образовательным математическим центром «Математика технологий будущего» (Соглашение № 075-02-2022-883). Автор выражает признательность д.ф.-м.н., профессору Некоркину Владимиру Исааковичу и к.ф.-м.н. Дмитричеву Алексею Сергеевичу за полезные предложения и обсуждения результатов.

Для цитирования: Храменков В. А. Об условиях безопасного подключения к хаб-кластерным энергосетям // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 424–435. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-424-435. EDN: CGKJXX

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

On the conditions for safe connection to hub-cluster power grids

V. A. Khramenkov

Federal Research Center Institute of Applied Physics
of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru
Received 12.05.2022, accepted 19.05.2022, published 1.08.2022

Abstract. Purpose of this work is studying of the dynamics of a power grid model that results from the expansion of a highly centralized grid, i.e. a hub-cluster, by adding a small subgrid. The main attention is paid to the study of possible power grid operation regimes and their characteristics. *Methods.* Numerical simulation of power grid operation, the dynamics of which is described by the Kuramoto equations with inertia, is used. *Results.* Various power grid operation regimes and the boundaries of their existence in the parameter space are given. The main characteristics of these regimes, such as the probability of realization and the magnitude of oscillations of regime variables, are considered. The conditions for safe connection to hub-cluster power grids are obtained. *Conclusion.* The dynamics of power grid consisting of two subgrids and its operation regimes are considered. Based on the characteristics of these regimes, their safety for subgrids is determined. The results obtained made it possible to formulate conditions for a safe connection to hub-cluster power grids.

Keywords: power grids, synchronous machines, Kuramoto model, synchronization.

Acknowledgements. This work was supported by the Scientific and Education Mathematical Center «Mathematics for Future Technologies» (Project No. 075-02-2022-883). The author acknowledges to professor Nekorkin Vladimir Isaakovich and Dmitrichev Aleksey Sergeevich for useful suggestions and discussions of the results.

For citation: Khramenkov VA. On the conditions for safe connection to hub-cluster power grids. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4):424–435. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-424-435

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Основной задачей исследования энергосетей является обеспечение их стабильной и бесперебойной работы [1–3], которой соответствует синхронный режим взаимодействия потребителей и генераторов электроэнергии. Одной из причин нарушения синхронного режима является изменение топологии энергосети, то есть состава ее элементов и линий передачи между ними [4–8]. В настоящее время наблюдается активное расширение действующих энергосетей за счет добавления новых генераторов и потребителей электроэнергии, что приводит к возникновению задачи об их безопасном подключении, при котором, с одной стороны, должен сохраняться синхронный режим работы исходной сети, а с другой — устанавливаться синхронный режим работы во всей расширенной сети.

Наиболее широкое распространение при исследовании устойчивости энергосетей получил динамический подход [4–20]. В рамках этого подхода энергосети рассматриваются как динамические сети. Их активным узлом-элементом является синхронная машина — базовый элемент энергосети [9]. Роль связей, осуществляющих взаимодействие между узлами сети, играют линии передачи. Динамика каждой синхронной машины упрощенно может быть описана уравнением движения ее ротора, которое имеет небольшую математическую размерность, что облегчает исследование моделей реальных энергосетей, состоящих из большого числа элементов. Динамический подход использовался при изучении как достаточно крупных энергосетей [4, 6, 8, 11–15], так и небольших подсетей [5, 10, 16–18], входящих в их состав. Наиболее полный обзор результатов, полученных посредством данного подхода, можно найти в работах [9, 19, 20]. В работах [18, 21–23] рассмотрена динамика энергосетей, состоящих из одного генератора (потребителя) и нескольких

потребителей (генераторов), связанных с ним. Такие сети называются хаб-кластерами. Хаб-кластер является моделью сильно централизованной энергосети, состоящей из мощной электростанции (АЭС, ГЭС), питающей большое число потребителей. Как правило, большие энергосети состоят из нескольких хаб-кластеров. В работе [24] исследовалась динамика небольшой части энергосети, состоящей из двух генераторов и одного потребителя, связанных между собой. Эта подсеть образует так называемый мотив. Он представляет собой типичный вариант расширения действующей энергосети за счет внедрения дополнительных электростанций, которые могут работать, например, за счет альтернативных источников энергии. Предполагалось, что все элементы энергосети находятся в синхронном режиме, кроме элементов мотива, что существенно ограничивает результаты работы.

В данной работе рассматривается сеть, образованная в результате расширения энергосети в виде хаб-кластера за счет подключения к ней мотива. При этом не накладывается никаких ограничений на режим работы хаб-кластера. Устанавливаются основные режимы работы сети, а также находятся условия безопасного подключения мотива к хаб-кластеру. Приводится характеристика каждого режима с точки зрения его безопасности для функционирования энергосети. Определены значения пропускных способностей линий передачи сети, при которых, в зависимости от начальных условий, могут устанавливаться различные режимы ее работы, что позволяет выявить условия безопасного подключения новых элементов к энергосети с хаб-топологией.

1. Модель

Представим энергосеть в форме графа, узлы которого соответствуют синхронным машинам, выполняющим роль потребителей или генераторов электроэнергии, а ребра — линиям передачи, соединяющим эти машины. Считаем, что поведение каждой синхронной машины определяется уравнением движения ее ротора в предположении, что она взаимодействует с другими машинами посредством линий передачи, имеющих чисто индуктивное сопротивление [9, 19, 20]. Тогда состояние i -й синхронной машины определяется фазой ее ротора Θ_i , отсчитываемой в системе координат, вращающейся с опорной частотой сети. Она подчиняется безразмерному уравнению Курамото с инерцией [9, 19, 20]

$$\frac{d^2\Theta_i}{dt^2} = P_i - \alpha \frac{d\Theta_i}{dt} + \sum_{j=1}^N K_{i,j} \sin(\Theta_j - \Theta_i), \quad (1)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, N — количество синхронных машин. Параметр P_i характеризует мощность, подводимую к валу ротора i -й синхронной машины или снимаемую с него. Если механическая мощность подводится, то есть $P_i > 0$, то машина работает как генератор, а если снимается, то есть $P_i < 0$, машина работает как потребитель. Член $\alpha d\Theta_i/dt$ характеризует мощность потерь. Параметр α — это демпферный коэффициент, который обобщенно отражает влияние всех демпфирующих факторов. Член $K_{i,j} \sin(\Theta_j - \Theta_i) = P_{i,j}$ представляет собой мощность, которой обмениваются i -я и j -я синхронные машины, связанные линией передачи с пропускной способностью $K_{i,j}$ ($K_{i,j} = K_{j,i}$), равной максимальной мощности, передаваемой по этой линии. Если машины не связаны линией передачи, то $K_{i,j} = 0$.

Основными режимами работы энергосети являются: синхронный, асинхронный и квазисинхронный. Эти режимы характеризуются различным поведением разностей фаз $\Theta_i - \Theta_j = \Theta_{ij}$ и зависящих от них мощностей $P_{i,j}$.

- Если разность фаз $\Theta_{ij} = \text{const}$, то мощность $P_{i,j} = \text{const}$. В этом случае реализуется синхронный режим взаимодействия i -го и j -го элементов энергосети. Если аналогичные условия выполняются для всех связанных между собой элементов энергосети, то в ней реализуется синхронный режим, который является рабочим.

- Если разность фаз Θ_{ij} убывает или возрастает во времени, то мощность $P_{i,j}$ постоянно меняется. В этом случае реализуется асинхронный режим взаимодействия i -го и j -го элементов энергосети. Этот режим является аварийным.
- Если разность фаз Θ_{ij} колеблется вокруг некоторого среднего значения, так что $|\Theta_{ij}(t)| < \pi$, то мощность $P_{i,j}$ также совершает колебания. В этом случае реализуется квазисинхронный режим взаимодействия i -го и j -го элементов энергосети. При малых амплитудах колебаний мощности $P_{i,j}$ квазисинхронный режим является относительно безопасным.

2. Модель энергосети

Рассмотрим сеть, образованную двумя подсетями: мотивом [24], состоящим из одного потребителя (c_1 , $P_1 < 0$) и двух генераторов ($g_{2,3}$, $P_{2,3} > 0$), и хаб-кластером [18, 22, 23], состоящим из одного генератора (g_4 , $P_4 > 0$) и $N - 4$ потребителей (c_j , $P_j < 0$, $j = 5, 6, \dots, N$) (рис. 1). Рассмотрим уравнения, описывающие динамику сети, и для удобства введем новые переменные и параметры

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \Theta_2 - \Theta_1, & \phi_2 &= \Theta_3 - \Theta_1, & \phi_3 &= \Theta_4 - \Theta_1, & \phi_{j-1} &= \Theta_j - \Theta_4, \\ K_{1,2} &= K_{1,3} = K, & K_{2,3} &= B, & K_{1,4} &= C, & K_{4,j} &= H, \quad j = 5, 6, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом (2) уравнения (1) примут вид

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = y_i, & i = 1, 2, \dots, N, \\ \dot{y}_1 = P_2 - P_1 - \alpha y_1 - 2K \sin(\phi_1) - K \sin(\phi_2) - C \sin(\phi_3) - B \sin(\phi_1 - \phi_2), \\ \dot{y}_2 = P_3 - P_1 - \alpha y_2 - K \sin(\phi_1) - 2K \sin(\phi_2) - C \sin(\phi_3) - B \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \dot{y}_3 = P_4 - P_1 - \alpha y_3 - K \sin(\phi_1) - K \sin(\phi_2) - 2C \sin(\phi_3) + \sum_{k=4}^{N-1} H \sin(\phi_k), \\ \dot{y}_j = P_{j+1} - P_4 - \alpha y_j + C \sin(\phi_3) - H \sin(\phi_j) - \sum_{k=4}^{N-1} H \sin(\phi_k), & j = 4, 5, \dots, N - 1, \end{cases} \quad (3)$$

где точкой обозначена производная по времени t . Система (3) определена в цилиндрическом фазовом пространстве $G = S^{N-1} \times R^{N-1}$. Нетрудно показать, что в нем существует поглощающая область

$$\begin{aligned} G^+ &= \{\phi_i \in S^1, y_i \in [y_i^-, y_i^+], i = 1, 2, \dots, N - 1\}, \\ y_{1,2}^\pm &= (P_{2,3} - P_1 \pm [3K + C + B]), \\ y_3^\pm &= (P_4 - P_1 \pm [2K + 2C + (N - 4)H]), \\ y_j^\pm &= (P_{j+1} - P_4 \pm [C + (N - 3)H]), \quad j = 4, 5, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Переменные $\phi_{1,2}$, $y_{1,2}$ описывают мотив, а переменные ϕ_j , y_j , $j = 4, 5, \dots, N - 1$ — хаб-кластер. Переменные ϕ_3 , y_3 описывают взаимодействие мотива с хаб-кластером. Параметры K, B определяют пропускную способность линий передачи, соединяющих генераторы $g_{2,3}$ с потребителем c_1 и между собой, соответственно, и характеризуют мотив. Параметр H определяет пропускную способность

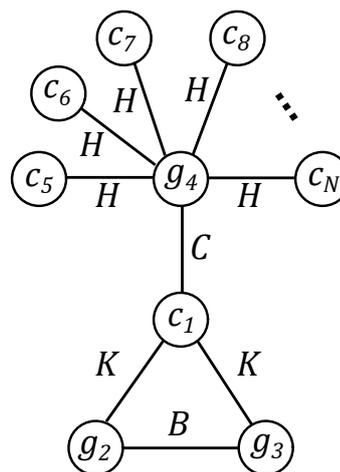


Рис. 1. Схематическое изображение исследуемой энергосети в виде графа

Fig. 1. Schematic representation of the studied power grid in the form of a graph

линий передачи, соединяющих генератор g_4 с потребителями c_j , $j = 5, 6, \dots, N - 1$, и характеризует хаб-кластер. Параметр C — это пропускная способность линии передачи, соединяющей потребитель c_1 с генератором g_1 , то есть мотив с хаб-кластером.

Предполагаем, что условие баланса мощностей, необходимое для существования синхронного режима, выполняется для мотива и хаб-кластера по отдельности и, следовательно, выполняется для всей сети, то есть

$$\sum_{k=1}^3 P_k = 0, \quad \sum_{j=4}^N P_j = 0, \quad \sum_{i=1}^N P_i = 0. \quad (5)$$

Условие (5) допускает существование синхронных режимов в мотиве и хаб-кластере при отсутствии связи между ними ($C = 0$), то есть до подключения одной подсети к другой.

Зададим при $C = 0$ параметры мотива и хаб-кластера, исходя из следующих соображений.

Динамика мотива при $C = 0$ изучена в [24]. В частности, установлено, что в нем существуют асинхронные режимы, которые могут привести к потере синхронного режима в сети, к которой он подключается ($C > 0$). Вероятность реализации асинхронных режимов в мотиве зависит от его параметров. Можно предположить, что при подключении к хаб-кластеру ($C > 0$) мотив может существенно повлиять на его динамику, если в мотиве существует асинхронный режим при $C = 0$ и вероятность его реализации достаточно велика. Поэтому, опираясь на результаты работы [24], зафиксируем параметры $\alpha = 0.8$, $P_1 = -2/3$, $P_2 = P_3 = 1/3$ (удовлетворяют условию (5)). При этих параметрах известно распределение вероятности реализации синхронного режима $P_{\text{sync}} = P_{\text{sync}}(B, K)$ [24]; соответственно вероятность реализации асинхронного режима в мотиве $P_{\text{async}} = 1 - P_{\text{sync}}$. Выберем параметры $B = 0.2$ и $K = 0.4$, при которых $P_{\text{async}} > 0.8$.

Перейдем к параметрам хаб-кластера. Удобно выбрать значение параметра P_4 того же порядка, что и значения $|P_i|$, $i = 1, 2, 3$, чтобы сеть была более однородной, то есть состояла из потребителей и генераторов, незначительно отличающихся друг от друга по потребляемым и генерируемым мощностям, соответственно. Зафиксируем $P_4 = 0.6$ и для того, чтобы выполнить условие (5), положим

$$P_j = P_{\text{con}}(N), \quad P_{\text{con}}(N) = -\frac{P_4}{N - 4}, \quad j = 5, 6, \dots, N. \quad (6)$$

Пропускная способность H , с одной стороны, должна удовлетворять потребностям потребителей, а с другой — не должна быть избыточной, поэтому ограничимся значениями параметра $H \in [H_{\text{start}}, H_{\text{fin}}]$, $H_{\text{start}} = 1.1|P_{\text{con}}|$, $H_{\text{fin}} = 2|P_{\text{con}}|$, обеспечивающими необходимый запас пропускной способности линий передачи хаб-кластера.

Таким образом, рассматриваем динамику сети при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} P_1 = -2/3, \quad P_2 = P_3 = 1/3, \quad P_4 = 0.6, \quad P_j = P_{\text{con}}, \quad j = 5, 6, \dots, N, \\ \alpha = 0.8, \quad B = 0.2, \quad K = 0.4, \quad H \in [H_{\text{start}}, H_{\text{fin}}]. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Режимы работы энергосети и условия безопасного подключения

Было проведено исследование динамики системы (3) и установлено следующее. Поглощающая область G^+ содержит единственное локально устойчивое состояние равновесия

$$\begin{aligned} O(\phi_i = \phi_i^{(0)}, y_i = 0, i = 1, 2, \dots, N - 1), \\ \phi_{1,2}^{(0)} = \arcsin\left(\frac{P_{2,3}}{K}\right), \quad \phi_3^{(0)} = 0, \quad \phi_j^{(0)} = \arcsin\left(\frac{P_{\text{con}}}{H}\right), \quad j = 4, 5, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (8)$$

которое существует при $K > P_{2,3}$ и $H > |P_{\text{con}}|$. Оно соответствует синхронному режиму работы всей сети. Остальные состояния равновесия являются седловыми. Заметим, что при параметрах (7) всегда существует состояние равновесия O .

Наряду с синхронным, в рассматриваемой энергосети возникают режимы, представляющие собой различные комбинации асинхронных и квазисинхронных режимов взаимодействия отдельных элементов сети. Таким режимам соответствуют аттракторы вращательного типа в фазовом пространстве системы (3). Установление того или иного режима зависит от начальных условий и значений параметров системы (3). Поэтому рассмотрим разбиение плоскости параметров H, C на области, отвечающие различным режимам работы сети, состоящей из $N = 10$ элементов (рис. 2, а).

- Если $(H, C) \in a$, то состояние равновесия O глобально асимптотически устойчиво, то есть при любых начальных условиях реализуется синхронный режим взаимодействия между всеми связанными элементами сети. Следовательно, данная область параметров является безопасной.

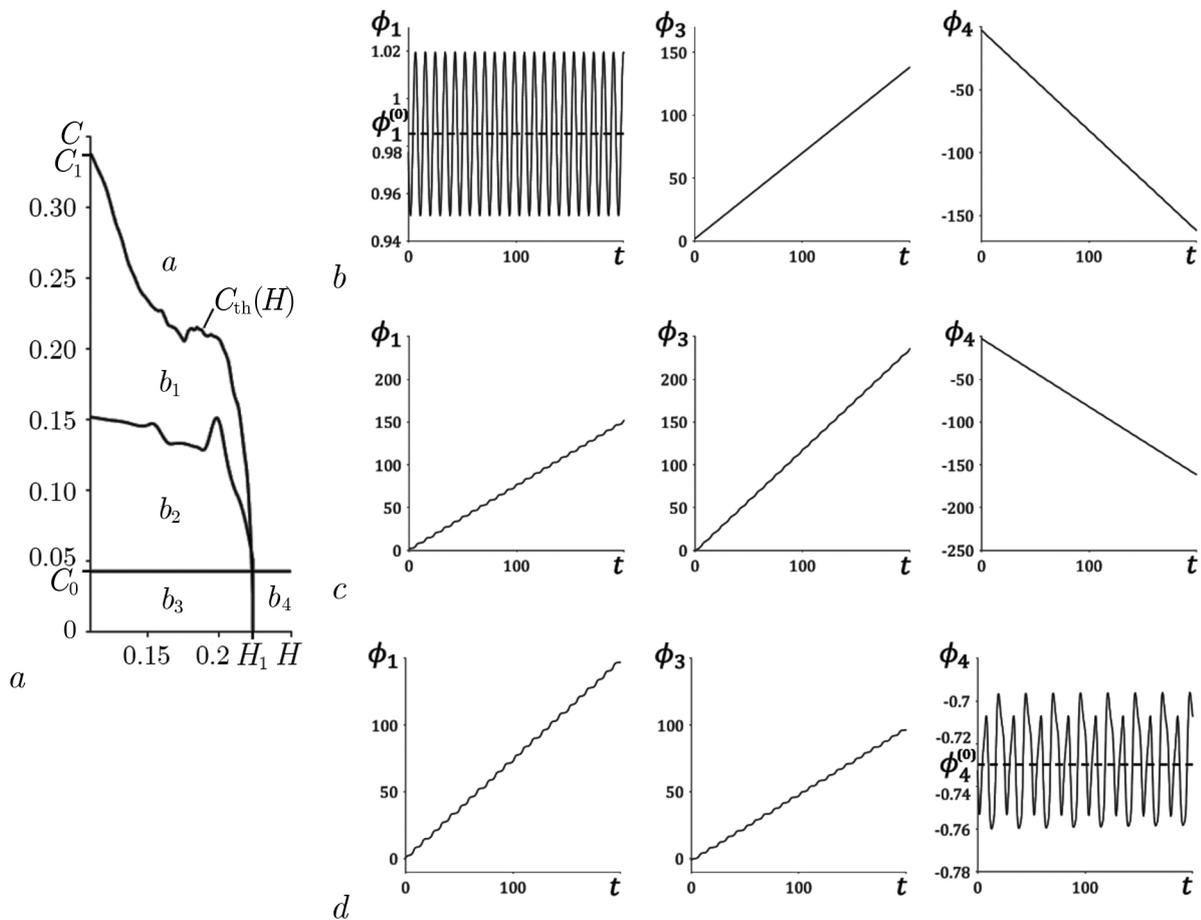


Рис. 2. а – Разбиение плоскости параметров H, C на области с различными режимами работы сети. Характерные осциллограммы переменных $\phi_1(t), \phi_3(t), \phi_4(t)$ в случае установления в сети б – режима 1, с – режима 2, d – режима 3. Осциллограммы режимов построены для параметров $H = 0.15, C = 0.02$. Параметры $C_0 \approx 0.0430, H_1 \approx 0.2234, C_1 \approx 0.3365$

Fig. 2. а – Partition of (H, C) – parameter plane into the regions with different working regimes of the grid. Characteristic oscillograms of variables $\phi_1(t), \phi_3(t), \phi_4(t)$ in case of establishment in the grid б – regime 1, с – regime 2, d – regime 3. The oscillograms of the regimes are given for parameter values $H = 0.15, C = 0.02$. Parameter values $C_0 \approx 0.0430, H_1 \approx 0.2234, C_1 \approx 0.3365$

- Если $(H, C) \in b_1$, то в сети может установиться режим 1, при котором наблюдается асинхронный режим взаимодействия между элементами хаб-кластера: потребителями c_j , $j = 5, \dots, N - 1$ и генератором g_4 , а также квазисинхронный режим взаимодействия между элементами мотива: генераторами $g_{2,3}$ и потребителем c_1 (рис. 2, b). То есть в хаб-кластере устанавливается асинхронный режим, а в мотиве — квазисинхронный.
- Если $(H, C) \in b_2$, то в сети, наряду с режимом 1, может установиться режим 2, при котором наблюдается асинхронный режим взаимодействия как между элементами хаб-кластера, так и между элементами мотива (рис. 2, c). Во всей сети устанавливается асинхронный режим.
- Если $(H, C) \in b_3$, то в сети, наряду с режимами 1 и 2, может установиться режим 3, при котором наблюдается квазисинхронный режим взаимодействия между элементами хаб-кластера, а также асинхронный режим взаимодействия между элементами мотива (рис. 2, d). То есть в хаб-кластере устанавливается квазисинхронный режим, а в мотиве — асинхронный.
- Если $(H, C) \in b_4$, то в сети может установиться режим 3 (см. рис. 2, d).

В каждом из режимов 1, 2, 3 наблюдается асинхронный режим взаимодействия между генератором хаб-кластера g_4 и потребителем мотива c_1 , которые связаны линией передачи с пропускной способностью C (см. рис. 2, b–d).

Существует пороговое значение параметра $C = C_1$, при превышении которого в сети всегда устанавливается синхронный режим, если значение параметра H допускает его существование (см. рис. 2, a).

При значениях параметра $H > H_1$ (см. рис. 2, a), возможно привести параметры сети в область a , гарантировав тем самым установление синхронного режима, путем задания относительно небольшого (по сравнению с K, B и H) значения параметра $C > C_0$.

Таким образом, в энергосети реализуется безопасное подключение мотива к хаб-кластеру, если параметры удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} C > C_{th}(H), & \text{если } H_{start} \leq H < H_1, \\ C > C_0, & \text{если } H_1 \leq H \leq H_{fin}. \end{cases} \quad (9)$$

Отметим, что $C_0 \leq C_{th}(H)$, более того $C_0 \approx 0.0430$ в несколько раз меньше характерного значения $C_1 \approx 0.3365$. Поэтому при достаточном запасе пропускной способности $H \geq H_1$ линий передачи в хаб-кластере, безопасное присоединение мотива требует создания линии передачи с меньшим значением пропускной способности C , чем в случае $H < H_1$.

Однако на практике не всегда удается реализовать необходимый запас пропускной способности линий передачи, что особенно важно при расширении существующих энергосетей. Поэтому, наряду с безопасной областью параметров a , необходимо также учитывать менее безопасные, с точки зрения установления синхронного режима, области параметров b_i , $i = 1, 2, 3, 4$, где могут устанавливаться режимы 1, 2 или 3. Перейдем теперь к их характеристикам.

Очевидно, режим 2 является аварийным для всей сети. Режимы 1 и 3 предусматривают наличие квазисинхронных режимов взаимодействия отдельных элементов сети и могут быть относительно безопасными для одной из подсетей. Удобно характеризовать квазисинхронный режим взаимодействия с помощью размаха колебаний соответствующих переменных $\phi_i(t)$. Обозначим через $A_1 = |\max(\phi_1(t)) - \min(\phi_1(t))|$ — размах колебаний переменной ϕ_1 в случае установления режима 1, а через $A_2 = |\max(\phi_4(t)) - \min(\phi_4(t))|$ — размах колебаний переменной ϕ_4 в случае установления режима 3 (рис. 3). Расчет показывает, что $A_1 < 0.2$, а $A_2 < 1.1$ в рассматриваемой области параметров H, C (см. рис. 3), что значительно меньше значения 2π , являющегося предельным для размаха колебаний при квазисинхронном режиме. Таким образом, режим 1 является относительно безопасным для мотива, а режим 3 — для хаб-кластера. В то же время, режим 1 является аварийным (опасным) для хаб-кластера, а режим 3 — для мотива.

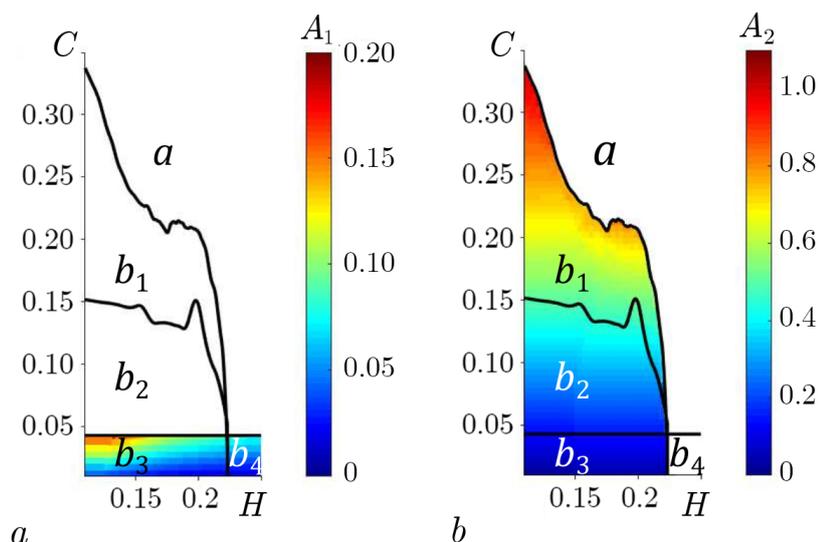


Рис. 3. Величина размаха колебаний $a - A_1$, $b - A_2$ в зависимости от параметров H и C (цвет online)

Fig. 3. The magnitude of oscillations $a - A_1$, $b - A_2$ depending on parameters H and C (color online)

Так как хаб-кластер представляет собой крупную централизованную сеть, а мотив является вариантом ее расширения, то сохранение безопасного режима работы хаб-кластера является более приоритетной задачей, чем сохранение аналогичного режима в мотиве. Поэтому режим 3 предпочтительнее режимов 1 и 2.

Реализация синхронного режима или одного из трех указанных выше режимов зависит от значений параметров H , C и начальных условий. В общем случае начальные условия произвольны. Поэтому удобно определить вероятность реализации каждого обнаруженного режима. Для этого зафиксируем параметры H и C , случайным образом выберем n начальных условий из поглощающей области G^+ и определим количество начальных условий, приводящих к режиму под номером i , обозначим его через n_i , $i = 1, 2, 3$. Тогда вероятность установления режима i будет определяться как $p_i = n_i/n$. На рис. 4 приведены распределения вероятности $p_i(H, C)$ при $n = 1000$. Опираясь на них, разделим области параметров b_i на опасные и относительно безопасные для работы хаб-кластера.

- При параметрах из области b_1 наибольшую вероятность установления имеет режим 1, который является аварийным для хаб-кластера, поэтому эта область параметров — опасная.
- При параметрах из области b_2 наибольшую вероятность установления имеет режим 2, который является аварийным для всей сети, поэтому эта область параметров также является опасной.
- При параметрах из области b_3 наибольшую вероятность установления имеют режимы 2 и 3. С ростом параметра H вероятность p_2 убывает, а p_3 растет. Поэтому область b_3 , при соответствующем подборе параметра H , может быть использована для относительно безопасной работы хаб-кластера.
- При параметрах из области b_4 наибольшую вероятность установления имеет режим 3, который является относительно безопасным для хаб-кластера, как и сама область b_4 .

При расширении действующих энергосетей, за счет объединения нескольких подсетей, есть возможность выбирать параметры линий передачи, которые должны соединить подсети. При этом параметры линий отдельных подсетей, как правило, остаются неизменными. То есть при присоединении мотива к хабу можно варьировать параметр C , например, кратно увеличивая или

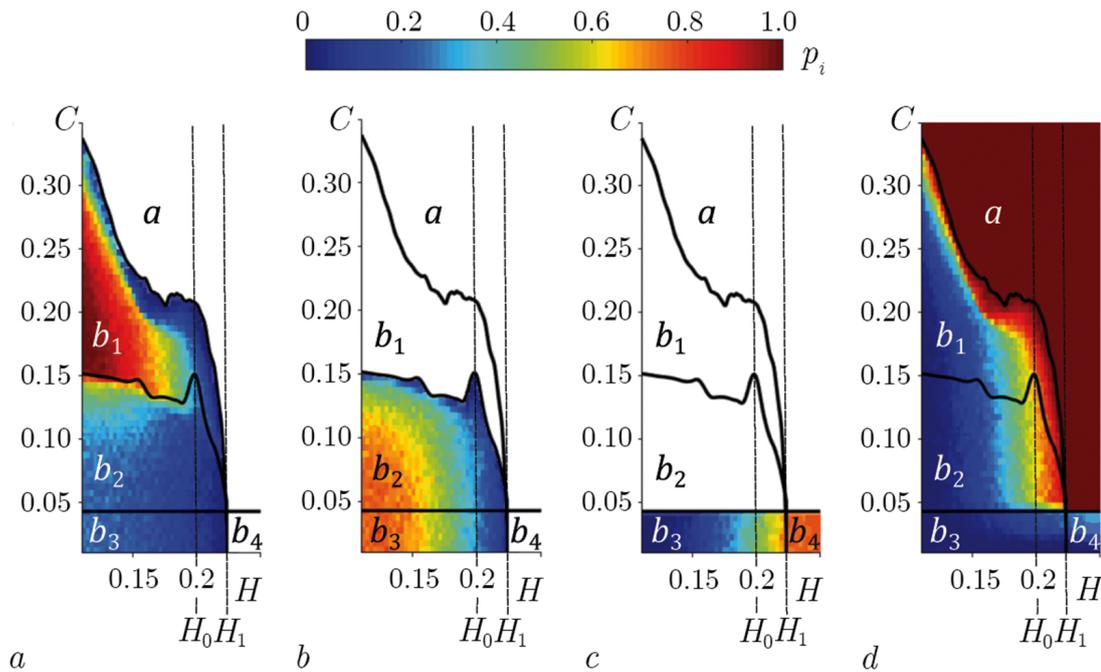


Рис. 4. Вероятность установления a – режима 1, b – режима 2, c – режима 3, d – синхронного режима в зависимости от параметров H и C . Значение $H_0 \approx 0.2$ (цвет online)

Fig. 4. Probability of realization of a – regime 1, b – regime 2, c – regime 3, d – the synchronous regime depending on parameters H and C . Parameter value $H_0 \approx 0.2$ (color online)

уменьшая его за счет изменения количества линий передачи между потребителем c_1 и генератором g_4 , как это описано в работе [23]. Тогда, в зависимости от значения параметра H , можно выделить три основных сценария поведения объединенной сети при изменении параметра C (см. рис. 4).

1. Если $H_{\text{start}} < H < H_0$, то при увеличении параметра C от нуля, точка (H, C) сначала попадает в область b_3 , а именно в ту ее часть, где наиболее вероятно установление опасных для хаб-кластера режимов 1 и 2. Далее точка (H, C) попадает в области b_2 и b_1 , где с наибольшей вероятностью реализуются только опасные для хаб-кластера режимы. Однако при дальнейшем увеличении параметра C точка (H, C) попадает в область a и во всей сети устанавливается синхронный режим.
2. Если $H_0 < H < H_1$, то при увеличении параметра C от нуля, точка (H, C) сначала попадает в область b_3 , а именно в ту ее часть, где наиболее вероятно установление относительно безопасного для хаб-кластера режима 3. Далее точка (H, C) попадает в области b_2 и b_1 , но в отличие от предыдущего случая, при выбранном H в этих областях наиболее вероятным режимом является синхронный. При дальнейшем увеличении параметра C точка (H, C) попадает в безопасную область a .
3. Если $H > H_1$, то при увеличении параметра C от нуля, точка (H, C) сначала попадает в область b_4 , где с наибольшей вероятностью устанавливается относительно безопасный для хаб-кластера режим 3, а затем в безопасную область a .

Данные сценарии показывают, что при различных значениях параметра H присоединение мотива к хаб-кластеру посредством линии передачи с пропускной способностью C может приводить к установлению синхронного режима во всей сети или режимов, которые могут быть относительно безопасными (режим 3) или аварийными (режимы 1, 2) для хаб-кластера и даже для всей сети в целом (режим 2).

Заключение

В работе рассмотрена модель энергосети, образованной в результате присоединения к сети в виде хаб-кластера мотива из двух генераторов и одного потребителя. Такая модель является типичным примером расширения сильно централизованной энергосети за счет внедрения в нее дополнительных источников электроэнергии, например, альтернативных.

Для сети из $N = 10$ элементов построено разбиение пространства параметров на области, отвечающие различным режимам работы сети. В частности, получена область глобальной устойчивости синхронного режима работы сети. Получены условия безопасного подключения мотива к хаб-кластеру. Проведена классификация режимов работы сети, с точки зрения их безопасности для подсетей, то есть хаб-кластера и мотива. Установлены основные характеристики режимов, такие как вероятность их реализации и размах колебаний переменных в квазисинхронном режиме взаимодействия отдельных элементов сети.

Опираясь на полученные результаты, были определены три основных сценария поведения энергосети при изменении пропускной способности линии передачи, соединяющей подсети.

Список литературы

1. *Жданов П. С.* Вопросы устойчивости электрических систем. М.: Энергия, 1979. 456 с.
2. *Хрущев Ю. В., Заподовников К. И., Юшков А. Ю.* Электромеханические переходные процессы в электроэнергетических сетях: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. 160 с.
3. *Sauer P. W., Pai M. A.* Power System Dynamics and Stability. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1998. 361 p.
4. *Witthaut D., Timme M.* Braess's paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage // *New J. Phys.* 2012. Vol. 14, no. 8. P. 083036. DOI: 10.1088/1367-2630/14/8/083036.
5. *Manik D., Timme M., Witthaut D.* Cycle flows and multistability in oscillatory networks // *Chaos.* 2017. Vol. 27, no. 8. P. 083123. DOI: 10.1063/1.4994177.
6. *Coletta T., Jacquod P.* Linear stability and the Braess paradox in coupled-oscillator networks and electric power grids // *Phys. Rev. E.* 2016. Vol. 93, no. 3. P. 032222. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.032222.
7. *Tchuisseu E. B. T., Gomila D., Colet P., Witthaut D., Timme M., Schäfer B.* Curing Braess' paradox by secondary control in power grids // *New J. Phys.* 2018. Vol. 20, no. 8. P. 083005. DOI: 10.1088/1367-2630/aad490.
8. *Witthaut D., Timme M.* Nonlocal failures in complex supply networks by single link additions // *Eur. Phys. J. B.* 2013. Vol. 86, no. 9. P. 377. DOI: 10.1140/epjb/e2013-40469-4.
9. *Grzybowski J. M. V., Macau E. E. N., Yoneyama T.* Power-grids as complex networks: Emerging investigations into robustness and stability // In: Edelman M., Macau E., Sanjuan M. (eds) *Chaotic, Fractional, and Complex Dynamics: New Insights and Perspectives. Understanding Complex Systems.* Cham: Springer, 2018. P. 287–315. DOI: 10.1007/978-3-319-68109-2_14.
10. *Filatrella G., Nielsen A. H., Pedersen N. F.* Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model // *Eur. Phys. J. B.* 2008. Vol. 61, no. 4. P. 485–491. DOI: 10.1140/epjb/e2008-00098-8.
11. *Rohden M., Sorge A., Timme M., Witthaut D.* Self-organized synchronization in decentralized power grids // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 109, no. 6. P. 064101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.064101.
12. *Motter A. E., Myers S. A., Anghel M., Nishikawa T.* Spontaneous synchrony in power-grid networks // *Nat. Phys.* 2013. Vol. 9. P. 191–197. DOI: 10.1038/nphys2535.
13. *Fortuna L., Frasca M., Fiore A. S.* Analysis of the Italian power grid based on Kuramoto-like model // In: 5th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2011). León, Spain, 5–8 September 2011. Singapore: World Scientific, 2012. P. 1–5.

14. *Menck P.J., Heitzig J., Kurths J., Schellnhuber H.J.* How dead ends undermine power grid stability // *Nat. Commun.* 2014. Vol. 5, no. 1. P. 3969. DOI: 10.1038/ncomms4969.
15. *Lozano S., Buzna L., Díaz-Guilera A.* Role of network topology in the synchronization of power systems // *Eur. Phys. J. B.* 2012. Vol. 85, no. 7. P. 231. DOI: 10.1140/epjb/e2012-30209-9.
16. *Nishikawa T., Motter A.E.* Comparative analysis of existing models for power-grid synchronization // *New J. Phys.* 2015. Vol. 17, no. 1. P. 015012. DOI: 10.1088/1367-2630/17/1/015012.
17. *Schmietendorf K., Peinke J., Friedrich R., Kamps O.* Self-organized synchronization and voltage stability in networks of synchronous machines // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2014. Vol. 223, no. 12. P. 2577–2592. DOI: 10.1140/epjst/e2014-02209-8.
18. *Дмитричев А. С., Захаров Д. Г., Некоркин В. И.* О глобальной устойчивости синхронного режима в хаб-кластерах энергосетей // *Известия вузов. Радиофизика.* 2017. Т. 60, № 6. С. 564–571.
19. *Anvari M., Hellmann F., Zhang X.* Introduction to Focus Issue: Dynamics of modern power grids // *Chaos.* 2020. Vol. 30, no. 6. P. 063140. DOI: 10.1063/5.0016372.
20. *Gajduk A., Todorovski M., Kocarev L.* Stability of power grids: An overview // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2014. Vol. 223, no. 12. P. 2387–2409. DOI: 10.1140/epjst/e2014-02212-1.
21. *Khramenkov V.A., Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I.* Dynamics and stability of two power grids with hub cluster topologies // *Cybernetics and Physics.* 2019. Vol. 8, no. 1. P. 29–33. DOI: 10.35470/2226-4116-2019-8-1-29-33.
22. *Храменков В. А., Дмитричев А. С., Некоркин В. И.* Пороговая устойчивость синхронного режима энергосети с топологией хаб-кластера // *Известия вузов. ПНД.* 2020. Т. 28, № 2. С. 120–139. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-2-120-139.
23. *Khramenkov V., Dmitrichev A., Nekorkin V.* Partial stability criterion for a heterogeneous power grid with hub structures // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2021. Vol. 152. P. 111373. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111373.
24. *Khramenkov V.A., Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I.* New scenario of Braess’s paradox in power grids // *Chaos.* 2022 (submitted).

References

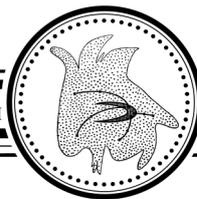
1. Zhdanov PS. *Stability Issues for Electrical Systems.* Moscow: Energiya; 1979. 456 p. (in Russian).
2. Hrushev YV, Zapodovnikov KI, Yushkov AY. *Electromechanical Transients in Electric Networks: Training Manual.* Tomsk: Tomsk Polytechnic University Publishing; 2012. 160 p. (in Russian).
3. Sauer PW, Pai MA. *Power System Dynamics and Stability.* Englewood Cliffs: Prentice-Hall; 1998. 361 p.
4. Witthaut D, Timme M. Braess’s paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage. *New J. Phys.* 2012;14(8):083036. DOI: 10.1088/1367-2630/14/8/083036.
5. Manik D, Timme M, Witthaut D. Cycle flows and multistability in oscillatory networks. *Chaos.* 2017;27(8):083123. DOI: 10.1063/1.4994177.
6. Coletta T, Jacquod P. Linear stability and the Braess paradox in coupled-oscillator networks and electric power grids. *Phys. Rev. E.* 2016;93(3):032222. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.032222.
7. Tchuisseu EBT, Gomila D, Colet P, Witthaut D, Timme M, Schäfer B. Curing Braess’ paradox by secondary control in power grids. *New J. Phys.* 2018;20(8):083005. DOI: 10.1088/1367-2630/aad490.
8. Witthaut D, Timme M. Nonlocal failures in complex supply networks by single link additions. *Eur. Phys. J. B.* 2013;86(9):377. DOI: 10.1140/epjb/e2013-40469-4.
9. Grzybowski JMV, Macau EEN, Yoneyama T. Power-grids as complex networks: Emerging investigations into robustness and stability. In: Edelman M, Macau E, Sanjuan M, editors. *Chaotic, Fractional, and Complex Dynamics: New Insights and Perspectives. Understanding Complex Systems.* Cham: Springer; 2018. P. 287–315. DOI: 10.1007/978-3-319-68109-2_14.

10. Filatrella G, Nielsen AH, Pedersen NF. Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model. *Eur. Phys. J. B.* 2008;61(4):485–491. DOI: 10.1140/epjb/e2008-00098-8.
11. Rohden M, Sorge A, Timme M, Witthaut D. Self-organized synchronization in decentralized power grids. *Phys. Rev. Lett.* 2012;109(6):064101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.064101.
12. Motter AE, Myers SA, Anghel M, Nishikawa T. Spontaneous synchrony in power-grid networks. *Nat. Phys.* 2013;9:191–197. DOI: 10.1038/nphys2535.
13. Fortuna L, Frasca M, Fiore AS. Analysis of the Italian power grid based on Kuramoto-like model. In: 5th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2011). León, Spain, 5-8 September 2011. Singapore: World Scientific; 2012. P. 1–5.
14. Menck PJ, Heitzig J, Kurths J, Schellnhuber HJ. How dead ends undermine power grid stability. *Nat. Commun.* 2014;5(1):3969. DOI: 10.1038/ncomms4969.
15. Lozano S, Buzna L, Díaz-Guilera A. Role of network topology in the synchronization of power systems. *Eur. Phys. J. B.* 2012;85(7):231. DOI: 10.1140/epjb/e2012-30209-9.
16. Nishikawa T, Motter AE. Comparative analysis of existing models for power-grid synchronization. *New J. Phys.* 2015;17(1):015012. DOI: 10.1088/1367-2630/17/1/015012.
17. Schmietendorf K, Peinke J, Friedrich R, Kamps O. Self-organized synchronization and voltage stability in networks of synchronous machines. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2014;223(12):2577–2592. DOI: 10.1140/epjst/e2014-02209-8.
18. Dmitrichev AS, Zakharov DG, Nekorkin VI. Global stability of a synchronous regime in hub clusters of the power networks. *Radiophys. Quantum Electron.* 2017;60(6):506–512. DOI: 10.1007/s11141-017-9820-0.
19. Anvari M, Hellmann F, Zhang X. Introduction to Focus Issue: Dynamics of modern power grids. *Chaos.* 2020;30(6):063140. DOI: 10.1063/5.0016372.
20. Gajduk A, Todorovski M, Kocarev L. Stability of power grids: An overview. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2014;223(12):2387–2409. DOI: 10.1140/epjst/e2014-02212-1.
21. Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Dynamics and stability of two power grids with hub cluster topologies. *Cybernetics and Physics.* 2019;8(1):29–33. DOI: 10.35470/2226-4116-2019-8-1-29-33.
22. Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Threshold stability of the synchronous mode in a power grid with hub cluster topology. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2020;28(2):120–139 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-2-120-139.
23. Khramenkov V, Dmitrichev A, Nekorkin V. Partial stability criterion for a heterogeneous power grid with hub structures. *Chaos, Solitons & Fractals.* 2021;152:111373. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111373.
24. Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. New scenario of Braess’s paradox in power grids. *Chaos.* 2022 (submitted).



Храменков Владислав Анатольевич — родился в городе Муроме Владимирской области (1994). Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2018). Имеет диплом бакалавра по направлению «Радиофизика» и диплом магистра по направлению «Радиофизика». Аспирант Института прикладной физики РАН. Область научных интересов — теория колебаний, синхронные машины, энергосети.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
 Институт прикладной физики РАН
 E-mail: hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru
 ORCID: 0000-0001-7165-830X
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1150615



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4)

Научная статья

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-436-455

УДК 530.182, 004.942, 303.732.4, 577.35

EDN: CRMSGN

Модель адаптационного противодействия индуцированной биотической среды в инвазионном процессе

А. Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН, Россия

E-mail: temp_elf@mail.ru

Поступила в редакцию 15.12.2021, принята к публикации 27.04.2022,
опубликована 1.08.2022

Аннотация. Цель — разработать математическую модель для анализа варианта развития популяционного процесса с нетривиально регулируемым противоборством вселившегося вида с биотическим окружением. **Актуальность.** Исследуемая ситуация возникает в инвазионных процессах, но представляет собой ранее не исследованный особый вариант их развития. Задача моделирования — описание перехода к глубокому кризису v-образной формы после интенсивного роста. Модель основывается на примерах адаптивной динамики колонии бактерий и подавлении популяций моллюсков — переносчиков опасных паразитарных заболеваний после целенаправленной антиэпидемической интродукции их антагонистов. **Методы.** В работе исследуются уравнения с запаздывающим аргументом в области значений параметров, которые имеют биологическую интерпретацию. В модели использована логарифмическая форма регуляции вида с учетом теоретически допустимой емкости среды. В уравнение включена функция внешнего воздействия с гибкой пороговой регуляцией относительно текущей и предшествующей численности популяции. **Результаты.** Показано, что предложенная форма регуляции воздействия ведет к формированию после кризиса устойчивой адаптированной популяции, которая не оказывает разрушающего воздействия на среду обитания. При увеличении репродуктивного потенциала инвазивного вида глубокий кризис становится критически опасным. Форма прохождения кризиса зависит от репродуктивного потенциала, от величины начальной группы особей и от времени активации адаптирующего противодействия со стороны среды. Установлено, что при достаточном уровне сопротивления устанавливается неразрушающее среду равновесие. **Заключение.** Исследован актуальный сценарий внезапной депрессии активно распространяющейся популяции при большом репродуктивном r -параметре, который вызван отложенной активностью ее естественных антагонистов. Пороговая форма биотической регуляции характерна для насекомых, численность которых регулируют конкурирующие между собой виды паразитических перепончатокрылых. Рассмотренный в модели вариант быстрой смены фаз актуален как одна из форм проявления иммунного ответа организма на развитие острой инфекции при существенном запаздывании. Если иммунный ответ преждевременно ингибируется самим организмом, то хронический очаг сохраняется. Приведены примеры динамики двух реальных биологических процессов в экспериментах с методами биологического подавления, которые соответствуют полученному в новой модели сценарию инвазии.

Ключевые слова: модели инвазионных процессов, нелинейность регуляции, пороговое сопротивление биотической среды, циклы эпидемии COVID, антиэпидемические мероприятия, CRISPR – CAS9.

Для цитирования: Переварюха А. Ю. Модель адаптационного противодействия индуцированной биотической среды в инвазионном процессе // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 436–455. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-436-455. EDN: CRMSGN

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Modeling of adaptive counteraction of the induced biotic environment during the invasive process

A. Yu. Perevaryukha

St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Russia

E-mail: temp_elf@mail.ru

Received 15.12.2021, accepted 27.04.2022, published 1.08.2022

Abstract. *Purpose* is to develop a mathematical model for the analysis of a variant in the development of a population process with a non-trivially regulated confrontation between an invading species and a biotic environment. *Relevance.* The situation we are studying arises in invasive processes, but is a previously unexplored special variant of their development. The task of modeling is to describe the transition to a deep v-shaped crisis after intensive growth. The model is based on examples of the adaptive dynamics of a bacterial colony and the suppression of mollusk populations, carriers of dangerous parasitic diseases, after targeted anti-epidemic introduction of their antagonists. *Methods.* In our work equations with a retarded argument in the range of parameter values that have a biological interpretation were studied. The model uses a logarithmic form of species regulation, taking into account the theoretically permissible capacity of the medium. In the equation we included the function of external influence with flexible threshold regulation relative to the current and previous population size. *Results.* It is shown that the proposed form of impact regulation leads to the formation of a stable adapted population after the crisis, which does not have a destructive impact on the habitat. With an increase in the reproductive potential of an invasive species, a deep crisis becomes critically dangerous. The form of the crisis passage depends on the reproductive potential, on the size of the initial group of individuals, and also on the time of activation of the adaptive counteraction from the environment. It is established that at a sufficient level of resistance, a non-destructive equilibrium is established. *Conclusion.* The actual scenario of sudden depression of an actively spreading population with a large reproductive r -parameter, which is caused by the delayed activity of its natural antagonists, has been studied. The threshold form of biotic regulation is characteristic of insects, the abundance of which is regulated by competing species of parasitic hymenoptera. The variant of rapid phase change considered by us in the model is relevant as a description of one of the forms of developing the body's immune response to the development of an acute infection with a significant delay. If the immune response is prematurely inhibited by the body itself, then the chronic focus of the disease persists. Examples of the dynamics of two real biological processes in experiments with biological suppression methods are given, which correspond to the invasion scenario obtained in the new model.

Keywords: models of invasion processes, nonlinearity of regulation, threshold resistance of the biotic environment, cycles of COVID epidemic, anti-epidemic activities, CRISPR – CAS9.

For citation: Perevaryukha AYu. Modeling of adaptive counteraction of the induced biotic environment during the invasive process. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(4):436–455. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-436-455

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В статье, продолжающей серию работ по моделированию биосистемных изменений, автором исследуются нелинейные явления экодинамики, вызванные вселением агрессивных видов. Подобные инвазионные процессы развиваются при активном, но не постоянном противодействии со стороны биотического окружения. Как мы показали в предыдущих работах, ряд пороговых эффектов приводит к неравновесным и экстремальным ситуациям в развитии популяционных процессов. Регуляция и запуск экстремальной инвазии и выработки ответа от среды включает действие предшествующих состояний, что показано исследованиями популяционных биологов [1]. Однако не выработан единый ответ на вопрос, какие характеристики самих видов или подвергающихся воздействию сообществ способствуют успеху вселения и объясняют динамику распространения вселенцев [2]. Динамика инвазий очень вариативна. Далекое не все вселения видов (даже целенаправленные акклиматизации и выпуск особей) заканчиваются успешным занятием ареала.

Общей чертой инвазий является временной фактор задержки, которая наблюдается между первоначальной колонизацией, началом быстрого роста локальной популяции и расширением ареала. Временные факторы включают процесс адаптации к новой среде обитания, эволюцию характеристик жизненного цикла, устранение генетических проблем из-за малого биоразнообразия исходной группы (фактор инбредной депрессии). Эти факторы, вызывающие эффекты запаздывания, исследовались многими авторами [3], но встречающая адаптация автохтонного биотического окружения и результирующая реакция противодействия — менее изученный вопрос.

Цель работы — анализ сценария инвазионного процесса при создаваемых специально индуцированной биотической средой факторах противодействия для оценки длительности прохождения возникшего кризиса. Автором разрабатывается феноменологический метод использования функций с пороговым воздействием в популяционных уравнениях с запаздыванием, где режим устойчивых колебаний не является актуальным решением. Путем последовательного усовершенствования достигается адекватное включение фактора запаздывания в функциональные составляющие модели. Новизна продемонстрированного нами вычислительного сценария глубокого кризиса в том, что моделируемое воздействие не остается линейно зависимым от состояния инвазивной популяции. Актуальность проведенного моделирования гибкого и порогового противодействия обоснована методами биологической борьбы с чужеродными видами. Против нежелательного вида проводится целенаправленная интродукция антагонистов. Создается конкурентная система противоборства, которая, в отличие от многих вариаций системы «хищник–жертва», имеет адаптационные механизмы [4] — численность регулирующих антагонистов зависит от предшествующих ситуаций, а эффективность атак — от текущей плотности жертв. Зависимость регуляции от прошлых состояний под термином «эредитарности систем» обсуждалась в биологическом контексте еще в работах В. Вольтерры [5]. Актуальный пример — время отставания при запуске цепочки реакций ответа в первой фазе инфекции — важный для иммунной системы фактор, определяющий далее течение заболевания. В Заключении приведены примеры описываемых моделью сценариев из разных областей — микробиологии и зоогеографии.

1. Запаздывающая регуляция — метод описания биологической нелинейности

Для математического описания циклических изменений, которые не следуют из взаимодействий (прямого трофического взаимодействия «хищник–жертва» или адаптивного «паразит–хозяин»), в популяционной биологии Г. Хатчинсоном [6] предложено рассмотреть влияние запаздывания — некоторого предшествующего состояния биосистемы $N(t - \psi(t))$ — на скорость современного воспроизводства. Колебания можно наблюдать при постоянных условиях у изолированных популяций [7]. Модели и уравнения в теоретическом обзоре по экологии циклических биосистем [6] не представлены.

Непосредственно модель в форме уравнения предложена сначала У. Райтом [8] в таком виде (сохраняем обозначения):

$$y'(t) = -\alpha y(t - 1)[1 + y(t)]. \quad (1)$$

В (1) α эквивалентно репродуктивному параметру r , а обозначение $y(t)$ соответствует $N(t)$ в (2). Позже «уравнение Хатчинсона» выписано Р. Мэем [9] в современном привычном экологам виде:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right), \quad (2)$$

где r — традиционно репродуктивный потенциал популяции. Изначально r — разность между естественной смертностью и рождаемостью в единицу времени. Параметр K заимствован из модели ограниченного роста $N(t) \rightarrow K$ Ферхюльста–Пирла [10], где отражает уровень насыщения экологической ниши [11]. Фактически (2) это модификация $\dot{N} = rf(N(t - \tau))$ с запаздыванием τ для уравнения

$$\frac{dN}{dt} = rf(N(t)) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right). \quad (3)$$

Заимствованный потом в другие модели хрестоматийный параметр K в (3) устанавливал доступный уровень неразрушающего заполнения среды: при $0 < N(0) < K$ выполняется $\max N(t) = K$, и этот уровень K считается стабильной емкостью экологической ниши для вида при $t \rightarrow \infty$.

В разных работах по моделированию K на самом деле следует трактовать с различными аспектами для разных сценариев в зависимости от ситуации и свойств выбранной $f(N)$. За разными трактовками K стоит теория экологической регуляции [12]. Емкость среды может действовать опосредованно на смертность, например, через скорость роста личинок. В экологии различают фундаментальную и реализованную экологические ниши [13]. Интерпретация K в моделях для анализа разных переходных процессов будет неоднозначна. При развитии экстремальных процессов в биосистемах численность агрессивного вселенца значимое время превышает гипотетическую балансовую емкость для биосистемы. Для летального патогена балансовой емкости в нашем организме не существует¹. Для многих явлений экодинамики использование при их моделировании K как оптимальной емкости ниши или уровня-ограничителя — только инструментальное средство.

Модель (2) предназначалась для наглядного описания колебаний $\forall N(0) > 0$, так как при $r\tau = \pi/2$ наблюдается бифуркация рождения цикла [14], циклическую траекторию обозначим $N_*(t)$. Емкость насыщения экологической ниши K при $r\tau > \pi/2$ становится точкой центра для возникшего цикла $N_*(t; r\tau)$ со свойством $\forall N(0)$, где емкость ниши K выступает усредненным значением $|\max N_*(t) - \min N_*(t)| \approx K$. Уравнение (2) исследовано многими авторами [15] и часто в однопараметрической форме $\dot{x} = \lambda x(t)(1 - x(t - \tau))$ без интерпретации [16].

Исследования (2) не закрыли многие проблемы в адекватном описании разнообразных популяционных колебаний. Развитие и усложнение (2) привело к появлению направления в моделировании — разработке уравнений с отклоняющимся аргументом в задачах моделирования биологических процессов [17]. Уравнения с $N(t - \tau)$ стали актуальны не только для динамики популяций [18]. Применяются они и в изучении скорости транскрипции ДНК→РНК для синтеза белков. Развитие направления связано с проблемами, которые не особо интересны с точки зрения теоретической математики, но значимы для вычислительного моделирования в биологической области.

М. Смит предложил [19] альтернативную для (2) модель флуктуаций насекомых в лабораторных опытах, но этот вариант уравнения не получил развития. Запаздывание τ_2 в репродуктивном сомножителе $rN(t - \tau_2)$ — это экологически избыточное включение

$$\frac{dN}{dt} = rN(t - \tau_2) \left(1 - \frac{N(t - \tau_1)}{K}\right) - \delta N(t), \quad (4)$$

где δ — коэффициент независимой от конкуренции смертности от внешних факторов биотической агрессии.

¹Даже в случае длительного бессимптомного носительства ВИЧ и гепатита С.

Направление моделирования лимитированного ресурсами среды (но не активностью антагонистов) роста продолжает развиваться в современных модификациях и с необычными коэффициентами, например

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{(1 - N(t))/(K + \theta N)}{(1 - N(t))/K(1 - \gamma)}. \quad (5)$$

Решения подобных (5) моделей описывают уравнивающиеся процессы $\forall N(0) > 0$. Не все такие уравнения имеет смысл дополнять включением $t - \tau$. Важное для практики отличие у решений различных предложенных моделей ограниченного роста численности популяций заключается в положении точки перегиба $N_p \neq 0$ на графике решения $N(t)$. Для модели (3) ордината точки перегиба $N_p = K/2$, абсцисса $t_p = r^{-1} \ln(K - N(0))/N(0)$. Положение ординаты точки перегиба N_p важно установить для задачи оптимальной эксплуатации и анализа сценариев с изъятием $\dot{N} = rf(N(t)) - Q$. Прирост численности в точке N_p максимизируется. Тогда популяция демонстрирует лучшую продуктивность, а весь излишек прироста можно изымать [20]. Концепция чрезвычайно опасна для промысла популяций с критическими пороговыми состояниями.

Для «модели Хатчинсона» известно несколько модификаций и вариантов обобщений уравнения (2). Например, модификация в [21] подходит для случая разного времени взросления у самцов и у самок, у которых разные параметры конкуренции c_1, c_2 :

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{c_1 N(t - \tau) + c_2 N(t - \tau_1)}{K} \right). \quad (6)$$

Модификация [22], где регуляция на основе K включена с относительной величиной насыщения:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(\frac{K - N(t - \tau)}{K + cN(t - \tau)} \right). \quad (7)$$

Модель $\dot{N} = rf(N(t - \tau)) - F(N)$ с запаздывающей регуляцией, но без параметра ниши K с $f(x) = rxe^{-bx}$ предложена на основе изучения экспериментов энтомолога А. Николсона:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t - \tau) \exp(-bN(t - \tau)) - \delta N(t). \quad (8)$$

А. Николсон создал конкуренцию за ресурсы между тремя стадиями развития насекомых и этим фактором вызвал колебания численности особей с большой амплитудой. Смертность δ добавлена в (8) произвольно, хищников/паразитов в опыте не использовали. При увеличении $r\tau$ решение (8) демонстрирует релаксационные колебания [23], но с очень малыми минимальными значениями.

Важна сущностная трактовка возникновения τ запаздывания $t - \tau$ или обобщенно $t - \psi(t)$. Величина времени τ изначально относилась к регуляции эффективности воспроизводства через задержку онтогенетического развития. Изменение запаздывания по некоторому закону $\tau = \psi(t)$ может возникать при существовании смежных поколений с разной длительностью онтогенеза, когда одно из поколений проходит зимовку, что является специфическим случаем. Длина жизненного цикла вида и интервалы между пиками численности у его популяций не всегда сопоставимые величины на шкале времени. Мы предлагаем разделять запаздывание при интерпретации моделей на три типа. Выделим репродуктивное «онтогенетическое» запаздывание, регуляционное запаздывание из-за исчерпания ресурсов или поиска новых источников питания. Отдельно рассмотрим третий тип — адаптивное запаздывание, как время нужное системе для выработки ответной реакции.

1.1. Проблемный аспект — приближение к нулю минимумов цикла. У метода получения осциллирующих решений в моделях с $t - \tau$ есть проблема с точки зрения экологической обоснованности поведения решений. Если увеличивать $r\tau > \pi/2$ в (1), то цикл $N_*(t; r\tau)$ быстро приобретет форму негармонических колебаний [24]. Релаксационный цикл с увеличивающейся амплитудой по мере возрастания $r\tau$ получит форму все дальше отстающих друг от друга во времени Λ -образных пиков $\max N_*(t) \gg K$. Тогда траектория в минимумах цикла начинает сколь угодно близко приближаться к значениям в окрестности нуля. Известно, что для модели в однопараметрической форме $\dot{N} = \lambda N(t)(1 - N(t - \tau))$ выполняется

$$\min N_*(t, \lambda) = \exp \left(-e^\lambda + 2\lambda + \frac{1 + (1 + \lambda) \ln \lambda}{\lambda} + O \left[\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^2} \right] - 1 \right).$$

Окрестности минимумов $N(t_{\min}) \approx \min N_*(t; \lambda\tau)$ колебаний, где траектория долго пробегает околонулевые значения $\min N_*(t; \lambda\tau) \rightarrow 0 + \varepsilon$, становятся чрезвычайно длинными — для популяционной интерпретации решение нереалистично.

Следующий вариант модификации (1) анализировался в [25]:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) f(N(t - 1)), \quad (9)$$

где предполагается $\lambda \gg 1$, а $f(x)$ — дифференцируемая функция, разложимая в асимптотический ряд, для которой выполняются условия

$$f(0) = 1, \quad f(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}, \quad x \rightarrow \infty, \quad a_0 > 0. \quad (10)$$

Условиям (10) соответствует в [25] интерпретируемая биологически функция при относительной регуляции воспроизводства

$$f(x) = \frac{(1 - x)}{(1 + \zeta x)}. \quad (11)$$

Коэффициент ζ в (11) дополняет число параметров, определяющих характеристики релаксационного цикла $N_*(t)$. При преобразованиях от исходного уравнения (9) к сингулярно возмущенному $\dot{x} = F(x(t - 1), \varepsilon)$ и к предельному релейному уравнению $\dot{x} = R(x(t - 1))$ для (9) с (10) в [25] подтверждено существование единственного и орбитально устойчивого цикла $N_*(t; \lambda\tau\zeta)$. Соответствие свойств цикла $N_*(t)$ известному популяционному процессу в (9) с (11) из вводимых там ограничений (10) трудно обосновать, так как из утверждения о характеристиках колебаний в [25] установили:

$$\min N_*(t, \lambda) \sim C_1 \exp(-\lambda a_0), \quad C_1, a_0 = \text{const} > 0.$$

Параметр λ был указан в [25] изначально большим. Проблема популяционной интерпретируемости циклического режима сохраняется в других модификациях моделей с $N(t - \tau)$. Серийные вспышки численности у насекомых-вредителей нельзя описать при свойстве минимумов: $\min_{0 < t < T_*} N_*(t, r) \rightarrow \varepsilon$, и $\varepsilon \ll 1$. Особенно это проявляется для активных вселенцев при больших значениях r . Цикл $N_*(t, r)$ достигает слишком малых величин для быстрого повторного достижения высоких значений численности. Включение в модель более чем двух переменных с большим запаздыванием биологически не убедительно. Сценарий образования вида-реликта происходит с постепенным убыванием доминировавшего ранее вида до равновесия, которое оказывается стабильно отделенным от нуля.

Известны экстремальные популяционные колебания у арктических грызунов с большой амплитудой и малыми минимумами [26], но это *неустойчивые* режимы и 4-годовые периоды регулярно нарушаются с возможностью гибели локальных групп [27]. Такие колебания вида в среде эндогенные [28], они не являются следствием взаимодействия «хищник–жертва», поэтому «вольтерровскими» системами уравнений не описываются.

2. Специфические новые модели образования и разрушения флуктуаций

Интерпретация параметра K как уравнивающего предела и объема ниши в наших модификациях меняется. Мы ранее предложили [29] уравнение для особой пульсирующей вспышки численности — явления пилообразных колебаний опасного вредителя *Choristoneura fumiferana* в лесах Канады:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(\frac{K - N^k(t - \tau)}{K + cN^m(t - \tau)} \right), \quad m = k + 1. \quad (12)$$

В модификации (12) в ходе пульсирующей вспышки между краткими пиками колебаний численность удерживается на значительном уровне. В вычислительном сценарии с $k = 2$ устранен эффект быстрого снижения минимумов $\min_{0 < t < T_*} N_*(t, r) \rightarrow \epsilon, \epsilon \ll 1$.

Другая предложенная автором в [30] модификация основана на идее, что для механизмов контроля имеет значение переход $N(t - \gamma)$ через предкритический порог численности H . Модель предназначена для случаев, когда амплитуда цикла опасного вселенца не может становиться выше некоторого допустимого для среды значения. В сценарии на динамику инвазионного процесса оказывает влияние отклонение $[H - N(t - \gamma)]$, и величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. В предложенной нами в [30] модификации получен вариант разрушения неустойчивых колебаний при увеличенном r , $H = 1/3K$, $\gamma = 2/3\tau$, $r\tau > \pi$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) (H - N(t - \gamma)), \quad \gamma < \tau. \quad (13)$$

Величина H в (13) трактуется как пороговое состояние «преднасыщения» среды, когда при $N(t) \rightarrow H + \epsilon$ популяция вселенца уже начинает разрушительно воздействовать на среду. В иммунологической трактовке при такой вирусной нагрузке организм через небольшой интервал задержки сталкивается с опасными симптомами, которые способны стать летальными. После образования колебаний при превышении значения максимумом цикла предельного для экосистемы уровня траектория $N(t)$ стремится к бесконечности с остановкой расчетов. Сценарий разрушения цикла с (13) не требовал увеличения r непосредственно в ходе вычислительного эксперимента. Модель (13) описала вычислительный сценарий с «выбросом» траектории из цикла, что по нашей исходной гипотезе соответствует демографической катастрофе переполнения из-за разрушения среды. Однако динамика разрушения цикла, как оказалось, более соответствует развитию эпидемии изменчивого вируса.

Ранее у автора не было графика с данными для подтверждения реальности модельного сценария (13). В обоснование сценария мы привели только гипотетическое рассуждение о варианте катастрофы человеческой популяции на острове Пасхи. Во время продолжающейся пандемии COVID-19 эпидемиологи наблюдали несколько примеров перехода от регулярных колебаний заболеваемости к стремительной Λ -образной вспышке числа заражений. Сценарий с разрушением режима образовавшихся в первой фазе процесса колебаний заболеваемости COVID-19 отмечен

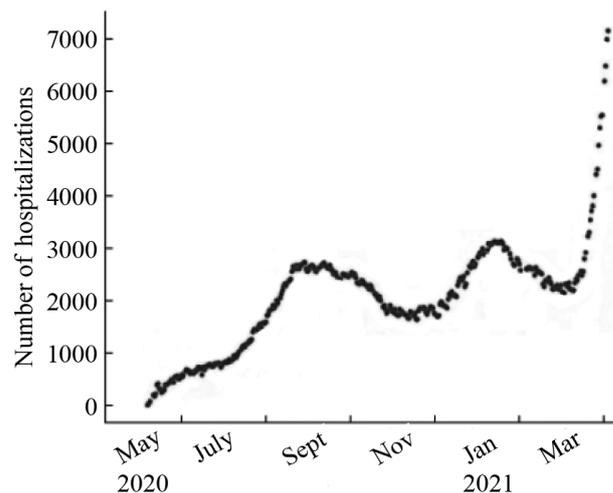


Рис. 1. Катастрофическое нарушение циклической динамики в ходе локальной эпидемии COVID-19 на Юге Бразилии по данным о госпитализации за день

Fig. 1. Catastrophic violation of the cyclical dynamics of the COVID epidemic in the South of Brazil according to hospitalization data per day

весной 2021 г. в динамике эпидемии в Бразилии. На рис. 1 приведены данные о госпитализации больных с диагнозом COVID-19 в 2020–2021 гг. в южном штате Бразилии Rio Grande do Sul, откуда эпидемия коронавируса распространилась на остальную территорию страны. Очевидно, что установившийся циклический режим сменился стремительным ростом числа больных в конце февраля 2021 г. (до появления штаммов Delta и Omicron). В эпидемиологической трактовке r — базовое репродуктивное число распространения вируса.

3. Модели с активным противодействием и минимальным порогом

Для модели экстремальных популяционных процессов актуальна минимальная численность той группы, которая теоретически необходима для выживания локальной популяции. В работе [31] А. Базыкин предложил уравнение с квадратичным фактором внешнего сопротивления $-\delta N^2$ для описания сценария исчезновения популяции при пороговом эффекте:

$$\frac{dN}{dt} = r \frac{\gamma N^2}{\gamma + \sigma N} - \zeta N - \delta N^2. \quad (14)$$

Экологический принцип «агрегированной группы» [32] говорит о том, что для популяции есть оптимальный для воспроизводства диапазон численности сообщества $\bar{\Delta}N$. Этот термин применим к общественным животным. Критический минимальный L -порог $L < \inf \bar{\Delta}N$ из этого эффекта напрямую не следует, более того, строгий L -порог плохо совместим с жесткой функцией регуляции $rf(N^k)$, $k \geq 2$ в моделях.

Из гипотезы об ослаблении конкуренции при $N \approx L$ мы предлагаем использовать сомножитель $\sqrt[k]{(N-L)}$ с $rf(N^\Theta)$, $1 < \Theta < 2$, $k \in 2^i - 1$ в такой модификации:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)^\Theta \times \sqrt[k]{(N(t) - L)}. \quad (15)$$

В нашей новой модели (15) (вариант без запаздывания) диапазон воздействия негативного эффекта агрегированной группы (сильный эффект Олли) начинается непосредственно у L -порога.

4. Модель перехода инвазионной вспышки в депрессию

Обоснуем новую модель $\dot{N} = rf(N(t - \tau)) - F(N(t - \tau_1))$ для важной ситуации, которая не связана с возникновением устойчивого режима осцилляций. Представим сценарий, где при большом значении r не исчерпан потенциал увеличения численности образующейся инвазивной популяции с $N(t) \rightarrow K$, но происходит активация адаптирующегося все это время t_τ биотического сопротивления.

Включим отложенный фактор внешней убыли с запаздыванием $\delta N(t - \tau)$ и используем в уравнении логарифмическую функцию для саморегуляции темпов роста численности:

$$\frac{dN}{dt} = N(t)r \ln \left(\frac{u}{N(t - \tau)} \right) - \delta N(t - \tau_1). \quad (16)$$

Для $\dot{N} = rN \ln(K/N)$ ордината точки перегиба $N_p = K/e$ на кривой решения лежит ниже, чем $K/2$ у решения модели Ферхюльста–Пирла, значит такую регуляцию лучше использовать для агрессивных видов. Параметр ограниченной среды в данной модели не тождественен роли устойчивого равновесия в (3). В данной новой модификации $\dot{N} = rf(N; \tau u) - F(N; \tau_1)$ мы используем в обозначениях u , так как достижение уровня $N(t) = u$ возможно, но при больших $r\tau$ только кратковременно. В вычислительном сценарии с (16) наблюдается гибель популяции агрессивного вселенца после двух максимумов осцилляций², как это было в опытах Георга Гаузе с интродукцией хищника в колонию жертвы [33]. Цель у работ Гаузе была экспериментально проверить с использованием инфузорий полученные в популяционных моделях «хищник–жертва» решения. Длительных колебаний в серии его опытов не было получено. Через два периода опыт заканчивался $N_1(t_1) = 0$, $N(t_2) = 0$, $t_2 > t_1$. Если активность вселенного хищника не сдерживается, то трофическая система из двух видов в реальности неустойчива. В (16) мы пожертвовали свойством $\forall t, N(0) \geq 0, N(t) \geq 0$, но это устраняется предикатами останова в настройках численного алгоритма. При уменьшении r -параметра траектория (16) демонстрирует обычные гармонические колебания $N_*(t; \tau r)$, как и (2).

Таким образом, сокращение избыточной репродуктивной активности способствует эффективному освоению видом нового ареала.

5. Моделирование сценария глубокого кризиса

Для реальных процессов необходима более сложная форма противодействия, чем в (16). Непосредственно многовидовую регуляцию в естественной среде мы описать не сможем, так как у паразитов есть и свои естественные враги и факторы-регуляторы — в реальности в борьбе участвуют десятки видов. Высокий уровень биоразнообразия стабилизирует экосистемы. В результате добиться полного уничтожения популяции, как получилось в лаборатории у Гаузе, в реальных адаптивных системах сложно [35]. Все современные биосистемы — результат длительной эволюции в конкурентной среде. Включение нелинейности давления в форме $F(N) = -\delta N^k(t - \tau_1)$, $k > 1$, $\tau \geq \tau_1$ обосновано тем, что текущее воздействие паразитов будет определяться предшествующим поколением популяции хозяина, но и современное воздействие в свою очередь связано с концентрацией доступных им для заражения жертв [36]. Поколения насекомых сменяются дискретно с фиксированным шагом по времени.

Многие популяции вселенцев преодолевают сопротивление в ситуации быстрого кризиса [37]. Рассмотрим ситуацию активного противодействия, которое формируется спустя определенное время против агрессивно размножающейся популяции. Опишем противоборство в форме

²Используем известный алгоритм Owren–Zennaro [34], модификацию метода Runge–Kutta 5 для систем с запаздыванием.

уравнения $\dot{N} = rN(t)f(N(t - \tau)) - F(N^k(t - \tau_1); J)$ для случая регулируемого размножения вселенца, который способен воздействовать на свою среду, но вызывать ответную реакцию с некоторым собственным запаздыванием $\tau_1 \leq \tau$.

Представим, что ситуация внезапного обострения конкурентного противоборства развивается для популяции уже при приближении к некоторому порогу численности J . Данный порог ощутимого воздействия на среду J значительно меньше теоретически допустимого предельного уровня \mathfrak{K} . Отразим в новой модели два явления: пороговый эффект и адаптивность противодействия активному росту численности вселенца с коэффициентом δ в уравнении при логарифмической саморегуляции, где q – параметр абиотической убыли (например из-за антропогенного воздействия):

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left(\frac{u}{N(t - \tau)} \right) - \delta \frac{N^m(t - \tau_1)}{(J - N(t))^2} - qN(t), \quad \delta > q, \quad m \geq 2, \quad N(0) < J < u. \quad (17)$$

При приближении к порогу конкуренция при внешнем воздействии обостряется, однако уровень давления зависит от состояния популяции нелинейно и с возникновением глубокого кризиса давление антагонистов ослабляется, но не уменьшается до нуля. Таким образом, J в модели (17) характеризует порог толерантности биотического окружения инвазионного вида.

В вычислительном сценарии для (17) на первом этапе происходит «логистическое» увеличение численности небольшой группы $N(0) < J$, но рост останавливается после $N(t) > N_p$. В \ln_K -регуляции ордината точки перегиба ниже, чем для квадратичной. Вместо обычной стабилизации после краткого превышения равновесия далее начинается стадия резкой убыли численности с возрастанием $F(N^2; J^{-1})$ при $N \rightarrow J$. Кризис наступает до момента, когда потенциал роста будет исчерпан внутривидовой \ln_K -регуляцией из-за исчерпания ресурсов среды. Воздействие специфических биотических внешних, но зависимых от численности $N(t - \tau_1)$ факторов создает порог для начала депрессии. При приближении к пороговому уровню численности популяция вселенца переходит в демографический кризис. Вариант развития исследуемой ситуации особой формы противоборства показан в вычислительном сценарии на рис. 2. Использовалась вычислительная среда Rand Model Designer с библиотекой численных алгоритмов.

Популяция проходит этап депрессии численности, так как реакция ее противников при кризисе непостоянна и в это время ослабляется. В результате популяционный кризис после переходных колебаний стабилизируется на уровне $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = P < J$ при малых $q < \delta$. Параметр u в (17) – теоретическая предельная емкость истощаемых ресурсов среды, которая

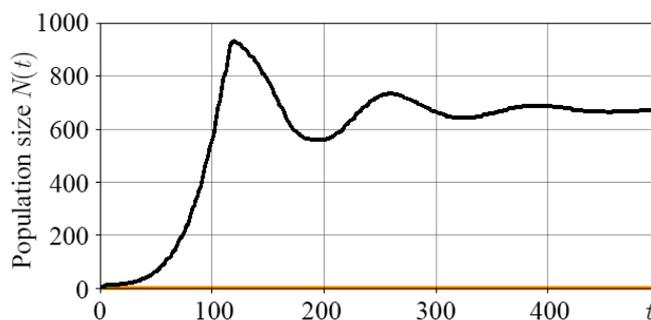


Рис. 2. Сценарий индуцированного средой краткого кризиса в пороговой модели (17) при $m = 2$, $r = 7.17 \cdot 10^{-3}$, $J = 10^3$, $u = 15 \cdot 10^3$, $\tau = \tau_1 = 48$, $\delta = 10$, $q = 4.2 \cdot 10^{-3}$, $N(0) = 10$

Fig. 2. Scenario of an induced brief crisis in the new model with the values of the parameters $m = 2$, $r = 7.17 \cdot 10^{-3}$, $J = 10^3$, $u = 15 \cdot 10^3$, $\tau = \tau_1 = 48$, $\delta = 10$, $q = 4.2 \cdot 10^{-3}$, $N(0) = 10$

изначально малой локальной группой не достигается. В иммунологической интерпретации только очень высокая доза заражения $N(0) > J$ способна стать летальной. Для патогенного вируса априори не существует равновесной емкости ниши, так как вирус разрушает организм — свою среду. Дополнительное внешнее воздействие q в модели (17) интерпретируется как влияние терапии или искусственных антропогенных мер воздействия.

Вычислительная модель (17) экологически применима для исходно малой группы $N(0) < J/4$. При $N(0) = 2/3J$, $m > 2$ развитие покажет резкий эффект глубокого, но преодолимого кризиса $N(t_m) \approx 0 + \varepsilon$, $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = P$. Если уменьшать коэффициент воздействия окружения δ , от которого зависит амплитуда сокращения численности при кризисе, то циклический режим сохраняется (вокруг уровня P). В модели имеется вариант циклического решения без затухания после кризиса, который в данном случае не является для нас актуальным. Мы рассматриваем сценарии без бифуркаций и параметрических изменений. В биосистемах параметры видов меняются медленно. При увеличении параметров δ, τ в (17) будем наблюдать длительную деградацию — эффект «бутылочного горлышка», уменьшение r тогда ведет к гибели. Рассмотренный сценарий отличается от ситуации прохождения вновь образующейся популяцией стадии длительного минимума при стабильной малочисленной группе особей с малым r . В нашем случае репродуктивный потенциал изначально высок $r > 1$. Длительное состояние минимальной реликтовой группы принципиально отлично по эволюционным аспектам от перехода к резкому кризису с восстановлением. Увеличение численности $N(t) \rightarrow K$ в сценариях с длительным минимумом $N(t) \approx L$ связано с нарастанием репродуктивного потенциала, где $r \neq \text{const}$. Восстановление происходит чаще не за счет увеличения индивидуальной плодовитости, но из-за возрастания выживаемости в ювенальном онтогенезе при появлении способов ухода от обнаружения врагами.

Предложенную функцию воздействия $F(N^m(t - \nu); J)$ можно включать в модель пилообразных колебаний всплесков вредителей для описания их демпфирования в случае существования ограниченного лесного ресурса и противодействия естественных врагов-паразитов:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left(\frac{K - N^2(t - \tau)}{K + cN^3(t - \tau_1)} \right) - \delta \frac{N^m(t - \nu)}{(J - N(t))^2} - qN(t), \quad \delta > q, \quad m \geq 2, \quad N(0) < J < K. \quad (18)$$

Уравнение (18) можно использовать в составе «вольтерровских» систем для описания трофического взаимодействия с пороговыми эффектами. В (18) феноменологически описано сложнорегулируемое противодействие при влиянии относительной емкости среды.

Модель с регуляцией $f(x) = rxe^{-bx}$ не подходит для нашей задачи:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t - \tau) \exp(-bN(t - \tau)) - \delta F(N(t - \nu); J). \quad (19)$$

6. Биологическое обоснование для полученного модельного сценария

Новой модели и вычислительному сценарию необходимо дать обоснование в реальных примерах. Существуют примеры, когда биологические инвазии создаются искусственно и при этом проводятся наблюдения по учету численности видов. Большинство искусственных инвазий (интродукций) проводилось с целью повышения коммерческой биопродуктивности экосистем, как было в Каспийском море. Существуют более интересные для нас примеры, когда интродукция вида в конкурентную среду проводилась для создания биологической борьбы — целенаправленная инвазия против конкретного вредоносного вида.

6.1. Индуцирование противоборства видов для борьбы с локальными эпидемиями. Интересные антиэпидемические исследования проводятся в Африке. В двух реках Кении была

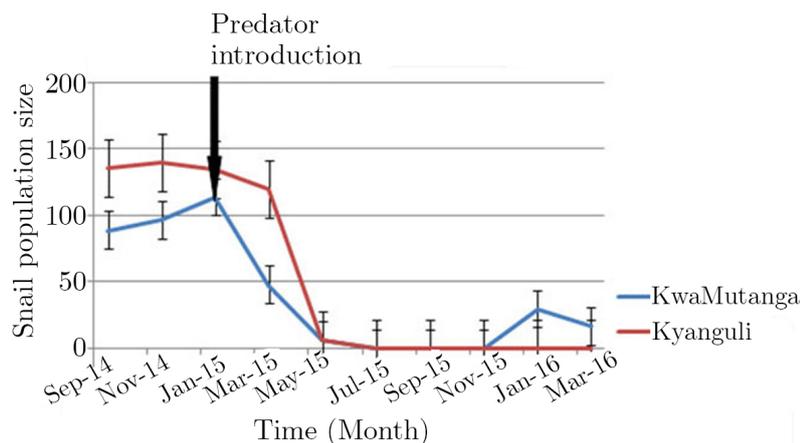


Рис. 3. Динамика популяции моллюсков рода *Biomphalaria* после выпуска эффективного хищника в двух реках Кении
 Fig. 3. Dynamics of the population of mollusks of the genus *Biomphalaria* after the release of an effective predator in two rivers of Kenya

проведена интродукция американского рака *Procambarus clarkia*, как естественного врага нескольких видов моллюсков рода *Biomphalaria*, переносчиков паразитических червей шистосом. Таким способом специалисты пытались остановить распространение в Африке опасного паразитарного заболевания шистосомоза. После интродукции рак подавлял моллюсков, однако, после длительной депрессии популяция моллюсков в одной из рек восстановились до устойчивого малочисленного состояния (рис. 3), в другой реке некоторые популяции были полностью уничтожены [38].

6.2. Адаптационная динамика противодействия видов с участием CRISPR–CAS9.

Известно из многих опытов еще с 1930-х гг., что вирусы-бактериофаги не могут полностью подавить колонию бактерий, вызывая только временный кризис. В эксперименте с вселением бактериофага в колонию бактерий возникший эффект депрессии успешно преодолевался бактериями

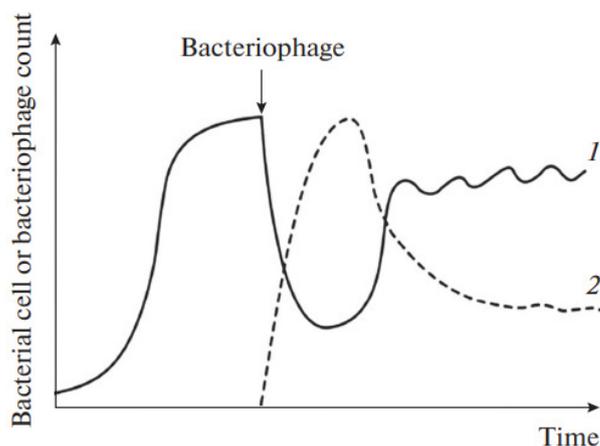


Рис. 4. Сценарий с коадаптацией: восстановление колонии бактерий после вселения бактериофага [39]: 1 — динамика бактерий; 2 — динамика вирионов

Fig. 4. Scenario with coadaptation: restoration of a bacterial colony after the invasion of bacteriophage [39]: 1 — dynamics of bacteria; 2 — dynamics of virions

при адаптации их антивирусного механизма эндонуклеазы CRISPR – Cas9, динамика эксперимента показана на рис. 4. Сейчас CRISPR – CAS9 это перспективный метод геномного редактирования и способ целенаправленного получения мутаций, но исходно это система адаптивного иммунитета прямого действия у одноклеточных. Специальный белок в клетке бактерии находил и разрезал молекулярными ножницами ДНК вируса, которую он опознавал по специальному короткому фрагменту. На выделение подходящего образца чужеродной ДНК необходимо время. В результате методы терапии бактериальных инфекций с вирусами бактериофагами быстро теряли эффективность и не оправдали ожиданий [39], хотя полного восстановления колонии бактерий не наблюдалось. Сейчас этот механизм адаптивной защиты активно используется учеными для целевого геномного модифицирования организмов, в том числе по получению мутации, которая обеспечивает невосприимчивость клеток к заражению ВИЧ.

Известны еще несколько примеров в экодинамике, где совсем нет хищника или паразита, но возникает кризис — коллизия «вид–среда» с переходом в состояние бутылочного горлышка. Полученный в (17) сценарий описывает динамику локальных популяций оленей, интродуцированных на островах в Арктической Канаде [40]. Популяция при отсутствии хищников размножается, но олени при большой скученности уничтожают растительность и разрушают свою среду. Питание становится недостаточным, возникают эпизоотии и смертность молодых особей увеличивается. Популяция входит в депрессию. Восстановление после кризиса зависит от способности к регенерации их пищевых ресурсов, что происходит с запаздыванием. На острове Врангеля популяция оленей погибла полностью. Полной регенерации не происходит и так создается порог, который значительно меньше *изначальной* допустимой емкости экологической ниши. В системе присутствуют и конкурируют два запаздывания: репродуктивный цикл оленей и темпы восстановления среды. Это создает колебания со снижением среднего значения. Северная растительность (многовидовое сообщество) восстанавливается медленно. Интересно, что при искусственном изъятии популяция оленей стабилизируется, но без изъятия флуктуации продолжают, что и подтверждает разработанная нами модель. Структурирование популяции — это другой механизм адаптации, что было показано в работе [41] на примере модели воспроизводства частично изолированных субпопуляций осетровых рыб Каспийского моря.

Практика показывает, что асимптотические осцилляционные режимы менее актуальны для активных инвазий или острых инфекций. Существуют альтернативные сценарии завершения борьбы среды с вселенцем при пороговых эффектах. Например, при ВИЧ-инфекции первоначальная острая фаза подавляется иммунным ответом до уровня длительного балансового равновесия, как в модельном сценарии. В итоге при снижении эффективности иммунитета возникает не циклический режим после бифуркации, но стремительная терминальная фаза роста вирусной нагрузки.

Существуют интересные примеры кризисной динамики и вне области популяционных наблюдений. Так в онкологии известно, что оставшиеся после подавления иммунотерапией опухолевые клетки, могут вдруг снова переходить к стремительному делению [42], но эти сценарии тема отдельного исследования.

Заключение

Разработаны три модели специфических популяционных процессов на основе уравнений с запаздыванием для ситуаций активного сопротивления, которое оказывает биотическое окружение (возможно искусственно индуцированное) инвазионному виду с высоким репродуктивным потенциалом. Специфическая модель (17) для сценария прохождения кризиса инвазивной популяцией разработана на основе двух явлений запаздывания: в регуляции из-за восстановления

необходимых ресурсов и порогового запаздывающего противодействия. Моделируемый кризис резко начинается в фазе быстрого роста при активном сопротивлении биотического окружения при приближении к пороговой численности. Увеличение τ_1 сделает кризис более выраженным. Явления резкой смены быстрого роста глубокой депрессией наблюдались в экодинамике разных чужеродных популяций [43].

Рассмотренная модель (17) может получить дальнейшее развитие в контексте запаздывающей выработки иммунного ответа от Т-лимфоцитов CD8 на острую вирусную инфекцию. Полученный сценарий согласуется с вариантом хронизации очага инфекции [44]. Механизм иммунной активации включает группу процессов многоступенчатых [45] и с событийной компонентой взаимодействия многих типов клеток с антигеном [46]. В первичном иммунном ответе выделяют три фазы (афферентная, центральная, эффекторная), смену которых трудно рассмотреть в полностью непрерывной вычислительной структуре.

Модель (18), где включены три фактора запаздывания, подходит для ситуации взаимодействия мутирующего вируса с иммунитетом организма, реагирующего на неактуальные уже антигены. Для случая вируса реакция иммунной системы часто зависит от начальной дозы заражения $Z(0)$ нелинейно. При большей дозе эффекторная фаза может начинаться быстрее. Модели могут применяться для прямого описания противодействия в системах уравнений, где в функции $F(N(t), Z(t - \xi))$ указывается непосредственно численность вида-антагониста $Z(t - \xi)$. Уравнение $\dot{Z} = r_z \psi(Z(t - \gamma))$ должно использовать иную функциональную регуляцию воспроизводства с последствием ψ . Перспективным методом описания не полностью predetermined ситуаций при активации иммунного ответа является возмущение случайной величиной γ значения запаздывания $F(N(t - \gamma\tau_1))$.

В особых случаях (в начале эпидемии) имеет значение пространственное распределение начальной группы. В таких ситуациях можно вместо уравнений использовать клеточные автоматы [47], как для модели динамики эпидемии [49] А. В. Шабунина, или в модели А. В. Никитиной [48], в том числе с запаздыванием в алгоритме смены состояния клеток [50].

Список литературы

1. *Kowarik I.* Time lags in biological invasions with regard to the success and failure of alien species // In: Pyšek P., Prach K., Rejmanek M., Wade M. (eds) *Plant Invasions – General Aspects and Special Problems*. Amsterdam: SPB Academic Publishing, 1995. P. 15–38.
2. *Arim M., Abades R. S., Neill P. E., Marquet P. A.* Spread dynamics of invasive species // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2006. Vol. 103, no. 2. P. 374–378. DOI: 10.1073/pnas.0504272102.
3. *Sakai A. K., Allendorf F. W., Holt J. S., Lodge D. M., Molofsky J., With K. A., Baughman S., Cabin R. J., Cohen J. E., Ellstrand N. C., McCauley D. E., O’Neil P., Parker I. M., Thompson J. N., Weller S. G.* The population biology of invasive species // *Annu. Rev. Ecol. Syst.* 2001. Vol. 32. P. 305–332. DOI: 10.1146/annurev.ecolsys.32.081501.114037.
4. *Bonser S. P.* High reproductive efficiency as an adaptive strategy in competitive environments // *Functional Ecology*. 2013. Vol. 27, no. 4. P. 876–885. DOI: 10.1111/1365-2435.12064.
5. *Gushing J. M.* Volterra integrodifferential equations in population dynamics // In: Iannelli M. (ed) *Mathematics of Biology*. Vol. 80 of C.I.M.E. Summer Schools. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. P. 81–148. DOI: 10.1007/978-3-642-11069-6_2.
6. *Hutchinson G. E.* Circular causal systems in ecology // *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 1948. Vol. 50, no. 4. P. 221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
7. *Utida S.* Population fluctuation, an experimental and theoretical approach // *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*. 1957. Vol. 22. P. 139–151. DOI: 10.1101/SQB.1957.022.01.016.

8. *Wright E. M.* A non-linear difference-differential equation // *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1955. Vol. 1955, no. 194. P. 66–87. DOI: 10.1515/crll.1955.194.66.
9. *May R. M., Conway G. R., Hassell M. P., Southwood T. R. E.* Time delays, density-dependence and single-species oscillations // *J. Anim. Ecol.* 1974. Vol. 43, no. 3. P. 747–770. DOI: 10.2307/3535.
10. *Verhulst P.-F.* Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population // *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* 1847. Vol. 20. P. 1–32.
11. *Peleg M., Corradini M. G., Normand M. D.* The logistic (Verhulst) model for sigmoid microbial growth curves revisited // *Food Research International.* 2007. Vol. 40, no. 7. P. 808–818. DOI: 10.1016/j.foodres.2007.01.012.
12. *Sales L. P., Hayward M. W., Loyola R.* What do you mean by “niche”? Modern ecological theories are not coherent on rhetoric about the niche concept // *Acta Oecologica.* 2021. Vol. 110. P. 103701. DOI: 10.1016/j.actao.2020.103701.
13. *Северцов А. С.* Соотношение фундаментальной и реализованной экологических ниш // *Журнал общей биологии.* 2012. Т. 73, № 5. С. 323–333.
14. *Глызин Д. С., Кащенко С. А., Полстянов А. С.* Пространственно-неоднородные периодические решения уравнения Хатчинсона с распределенным насыщением // *Моделирование и анализ информационных систем.* 2011. Т. 18, № 1. С. 37–45.
15. *Юмагулов М. Г., Якишбаева Д. А.* Операторный метод исследования малых автоколебаний в системах с последствием // *Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия.* 2013. № 9/2(110). С. 37–42.
16. *Колесов А. Ю., Колесов Ю. С.* Релаксационные колебания в математических моделях экологии // *Тр. МИАН.* 1993. Т. 199. С. 3–124.
17. *Перцев Н. В., Логинов К. К., Топчий В. А.* Анализ математической модели эпидемии, построенной на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием // *Сибирский журнал индустриальной математики.* 2020. Т. 23, № 2. С. 119–132. DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.209.
18. *Данеев А. В., Лакеев А. В., Русанов В. А., Плеснёв П. А.* О дифференциально-неавтономном представлении интегративной активности нейрорпопуляции билинейной моделью второго порядка с запаздыванием // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук.* 2021. Т. 23, № 2. С. 115–126. DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-2-115-126.
19. *Smith J. M.* *Mathematical Ideas in Biology.* Cambridge: Cambridge University Press, 1968. 168 p. DOI: 10.1017/CBO9780511565144.
20. *Finley C., Oreskes N.* Maximum sustained yield: a policy disguised as science // *ICES Journal of Marine Science.* 2013. Vol. 70, no. 2. P. 245–250. DOI: 10.1093/icesjms/fss192.
21. *Кащенко И. С., Кащенко С. А.* Динамика уравнения с двумя запаздываниями, моделирующего численность популяции // *Известия вузов. ПНД.* 2019. Т. 27, № 2. С. 21–38. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-21-38.
22. *Gopalsamy K., Liu P.* Persistence and global stability in a population model // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 1998. Vol. 224, no. 1. P. 59–80. DOI: 10.1006/jmaa.1998.5984.
23. *Liu Y., Wei J.* Bifurcation analysis in delayed Nicholson blowflies equation with delayed harvest // *Nonlinear Dynamics.* 2021. Vol. 105, no. 2. P. 1805–1819. DOI: 10.1007/s11071-021-06651-5.
24. *Hale J. K., Waltman P.* Persistence in infinite-dimensional systems // *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* 1989. Vol. 20, no. 2. P. 388–395. DOI: 10.1137/0520025.
25. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Об одной модификации уравнения Хатчинсона // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2010. Т. 50, № 12. С. 2099–2112.

26. *Ердаков Л. Н., Савичев В. В., Чернышова О. Н.* Количественная оценка популяционной цикличности у животных // Журнал общей биологии. 1990. Т. 51, № 5. С. 661–668.
27. *Ердаков Л. Н., Моролдоев И. В.* Изменчивость многолетней цикличности в динамике численности красной полевки (*Myodes Rutilus* (Pallas, 1779)) // Принципы экологии. 2017. № 4. С. 26–36. DOI: 10.15393/j1.art.2017.7342.
28. *Whitfield J.* Why cycling lemmings crash // Nature. 2000. DOI: 10.1038/news000601-10.
29. *Переварюха А. Ю.* Сценарии прохождения состояния «бутылочного горлышка» инвазионным видом в новой модели динамики численности популяции // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 5. С. 63–80. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-5-63-80.
30. *Переварюха А. Ю.* Переход от релаксационных колебаний к псевдопериодической траектории в новой модели динамики численности популяции // Известия вузов. ПНД. 2017. Т. 25, № 2. С. 51–62. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-51-62.
31. *Базыкин А. Д., Анопина Е. А.* Модель экосистемы трех трофических уровней с учетом существования нижней критической плотности популяции продуцента // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. 1981. Т. 4. С. 186–203.
32. *Розенберг Г. С.* Уорд Клайд Олли и принцип агрегации особей // Самарская Лука: проблемы региональной и глобальной экологии. 2020. Т. 29, № 3. С. 77–88. DOI: 10.24411/2073-1035-2020-10335.
33. *Gause G. F.* The Struggle for Existence. Baltimore: Williams and Wilkins, 1934. 163 p.
34. *Owren B., Zennaro M.* Order barriers for continuous explicit Runge-Kutta methods // Mathematics of Computation. 1991. Vol. 56, no. 194. P. 645–661. DOI: 10.2307/2008399.
35. *Розенберг Г. С.* К истории модели логистического роста // Бюллетень Самарская Лука. 2006. № 18. С. 188–193.
36. *Buck J. C., Hechinger R. F., Wood A. C., Stewart T. E., Kuris A. M., Lafferty K. D.* Host density increases parasite recruitment but decreases host risk in a snail–trematode system // Ecology. 2017. Vol. 98, no. 8. P. 2029–2038. DOI: 10.1002/ecy.1905.
37. *Colledge S., Conolly J., Crema E., Shennan S.* Neolithic population crash in northwest Europe associated with agricultural crisis // Quaternary Research. 2019. Vol. 92, no. 3. P. 686–707. DOI: 10.1017/qua.2019.42.
38. *Maina G. M., Kinuthia J. M., Mutuku M. W., Mwangi I. N., Agola E. L., Kutima H. L., Mkoji G. M.* Regulatory influence of *Procambarus clarkii*, Girard (Decapoda: Cambaridae) on schistosom-transmitting snails in lotic habitats within the River Athi Basin, Kenya // International Journal of Marine Biology and Research. 2017. Vol. 2, no. 1. P. 1–7. DOI: 10.15226/24754706/2/1/00113.
39. *Lenski R. E.* Dynamics of interactions between bacteria and virulent bacteriophage // In: Marshall K. C. (ed) Advances in Microbial Ecology. Vol. 10 of Advances in Microbial Ecology. Boston, MA: Springer, 1988. P. 1–44. DOI: 10.1007/978-1-4684-5409-3_1.
40. Deer Habitat Carrying Capacity [Internet] // Forest and Wildlife Research Center Report. Mississippi State, MS: Mississippi State University, 2013. Available from: <https://www.msdeer.msstate.edu/deer-habitat-carrying-capacity.php>.
41. *Дубровская В. А., Переварюха А. Ю., Трофимова И. В.* Модель динамики структурированных субпопуляций осетровых рыб Каспия с учетом отклонений в темпах развития молоди // Журнал Белорусского государственного университета. Биология. 2017. № 3. С. 76–86.
42. *Kuznetsov V. A., Knott G. D.* Modeling tumor regrowth and immunotherapy // Mathematical and Computer Modelling. 2001. Vol. 33, no. 12–13. P. 1275–1287. DOI: 10.1016/S0895-7177(00)00314-9.
43. *Mikhailov V. V., Perevaryukha A. Y., Reshetnikov Y. S.* Model of fish population dynamics with calculation of individual growth rate and hydrological situation scenarios // Information and Control Systems. 2018. No. 4. P. 31–38. DOI: 10.31799/1684-8853-2018-4-31-38.

44. *Graham A. L., Tate A. T.* Host Defense: Are we immune by chance? // *eLife*. 2017. Vol. 6. P. e32783. DOI: 10.7554/eLife.32783.
45. *Perevaryukha A. Y.* A continuous model of three scenarios of the infection process with delayed immune response factors // *Biophysics*. 2021. Vol. 66, no. 2. P. 327–348. DOI: 10.1134/S0006350921020160.
46. *Найхин А. Н., Лосев И. В.* Роль консервативных и гипервариабельных иммунодоминантных эпитопов внутренних белков вирусов гриппа а в формировании цитотоксического Т-клеточного иммунного ответа // *Вопросы вирусологии*. 2015. Т. 60, № 1. С. 11–16.
47. *Переварюха А. Ю.* Запаздывание в регуляции популяционной динамики - модель клеточного автомата // *Динамические системы*. 2017. Т. 7, № 2. С. 157–165.
48. *Никитина А. В., Леонтьев А. Л.* Гидрофизическое моделирование Каспийского моря на основе модели переменной плотности // *Вестник компьютерных и информационных технологий*. 2018. № 6(168). С. 12–19. DOI: 10.14489/vkit.2018.06.pp.012-019.
49. *Шабунин А. В.* SIRS-модель распространения инфекций с динамическим регулированием численности популяции: Исследование методом вероятностных клеточных автоматов // *Известия вузов. ПНД*. 2019. Т. 27, № 2. С. 5–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-5-20.
50. *Переварюха А. Ю.* Моделирование осциллирующей популяционной динамики гидробионтов в системе «ресурс–потребитель» с помощью клеточных автоматов // *Известия вузов. ПНД*. 2020. Т. 28, № 1. С. 62–76. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-62-76.

References

1. Kowarik I. Time lags in biological invasions with regard to the success and failure of alien species. In: Pyšek P, Prach K, Rejmanek M, Wade M, editors. *Plant Invasions - General Aspects and Special Problems*. Amsterdam: SPB Academic Publishing; 1995. P. 15–38.
2. Arim M, Abades RS, Neill PE, Marquet PA. Spread dynamics of invasive species. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2006;103(2):374–378. DOI: 10.1073/pnas.0504272102.
3. Sakai AK, Allendorf FW, Holt JS, Lodge DM, Molofsky J, With KA, Baughman S, Cabin RJ, Cohen JE, Ellstrand NC, McCauley DE, O’Neil P, Parker IM, Thompson JN, Weller SG. The population biology of invasive species. *Annu. Rev. Ecol. Syst.* 2001;32:305–332. DOI: 10.1146/annurev.ecolsys.32.081501.114037.
4. Bonser SP. High reproductive efficiency as an adaptive strategy in competitive environments. *Functional Ecology*. 2013;27(4):876–885. DOI: 10.1111/1365-2435.12064.
5. Gushing JM. Volterra integrodifferential equations in population dynamics. In: Iannelli M, editor. *Mathematics of Biology*. Vol. 80 of C.I.M.E. Summer Schools. Berlin, Heidelberg: Springer; 2010. P. 81–148. DOI: 10.1007/978-3-642-11069-6_2.
6. Hutchinson GE. Circular causal systems in ecology. *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 1948;50(4):221–246. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
7. Utida S. Population fluctuation, an experimental and theoretical approach. *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*. 1957;22:139–151. DOI: 10.1101/SQB.1957.022.01.016.
8. Wright EM. A non-linear difference-differential equation. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1955;1955(194):66–87. DOI: 10.1515/crll.1955.194.66.
9. May RM, Conway GR, Hassell MP, Southwood TRE. Time delays, density-dependence and single-species oscillations. *J. Anim. Ecol.* 1974;43(3):747–770. DOI: 10.2307/3535.
10. Verhulst PF. Deuxième mémoire sur la loi d’accroissement de la population. *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*. 1847;20:1–32 (in French).
11. Peleg M, Corradini MG, Normand MD. The logistic (Verhulst) model for sigmoid microbial growth curves revisited. *Food Research International*. 2007;40(7):808–818. DOI: 10.1016/j.foodres.2007.01.012.

12. Sales LP, Hayward MW, Loyola R. What do you mean by “niche”? Modern ecological theories are not coherent on rhetoric about the niche concept. *Acta Oecologica*. 2021;110:103701. DOI: 10.1016/j.actao.2020.103701.
13. Severtsov AS. Relationship between fundamental and realized ecological niches. *Biology Bulletin Reviews*. 2013;3(3):187–195. DOI: 10.1134/S2079086413030080.
14. Glyzin DS, Kaschenko SA, Polstyanov AS. Spatially inhomogeneous periodic solutions in the Hutchinson equation with distributed saturation. *Modeling and Analysis of Information Systems*. 2011;18(1):37–45 (in Russian).
15. Yumagulov MG, Yakshibaeva DA. Operator method for studying small self-oscillations in systems with aftereffect. *Bulletin of Samara State University. Natural Science Series*. 2013;(9/2(110)):37–42 (in Russian).
16. Kolesov AY, Kolesov YS. Relaxation oscillations in mathematical models of ecology. *Proc. Steklov Inst. Math*. 1995;199:1–126.
17. Pertsev NV, Loginov KK, Topchii VA. Analysis of an epidemic mathematical model based on delay differential equations. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2020;14(2):396–406. DOI: 10.1134/S1990478920020167.
18. Daneev AV, Lakeev AV, Rusanov VA, Plesnev PA. On differential-non-autonomous representation integrative activity of neuropopulation bilinear second-order model with a delay. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 2021;23(2):115–126 (in Russian). DOI: 10.37313/1990-5378-2021-23-2-115-126.
19. Smith JM. *Mathematical Ideas in Biology*. Cambridge: Cambridge University Press; 1968. 168 p. DOI: 10.1017/CBO9780511565144.
20. Finley C, Oreskes N. Maximum sustained yield: a policy disguised as science. *ICES Journal of Marine Science*. 2013;70(2):245–250. DOI: 10.1093/icesjms/fss192.
21. Kashchenko IS, Kashchenko SA. Dynamics of equation with two delays modelling the number of population. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2019;27(2):21–38 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-21-38.
22. Gopalsamy K, Liu P. Persistence and global stability in a population model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1998;224(1):59–80. DOI: 10.1006/jmaa.1998.5984.
23. Liu Y, Wei J. Bifurcation analysis in delayed Nicholson blowflies equation with delayed harvest. *Nonlinear Dynamics*. 2021;105(2):1805–1819. DOI: 10.1007/s11071-021-06651-5.
24. Hale JK, Waltman P. Persistence in infinite-dimensional systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1989;20(2):388–395. DOI: 10.1137/0520025.
25. Kolesov AY, Mishchenko EF, Rozov NK. A modification of Hutchinson’s equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2010;50(12):1990–2002. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
26. Erdakov LN, Savichev VV, Chernyshova ON. Quantitative assessment of population cyclicity in animals. *Biology Bulletin Reviews*. 1990;51(5):661–668 (in Russian).
27. Erdakov LN, Moroldoev IV. Variability of long-term cyclicity in the population dynamics of the northern red-backed vole (*Myodes Rutilus* (Pallas, 1779)). *Principles of the Ecology*. 2017;(4): 26–36 (in Russian). DOI: 10.15393/j1.art.2017.7342.
28. Whitfield J. Why cycling lemmings crash. *Nature*. 2000. DOI: 10.1038/news000601-10.
29. Perevaryukha AY. Scenarios of the passage of the «population bottleneck» by an invasive species in the new model of population dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(5):63–80 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-5-63-80.
30. Perevaryukha AY. Transition from relaxation oscillations to pseudoperiodic trajectory in the new model of population dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017;25(2):51–62 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-51-62.

31. Bazykin AD, Aponina EA. Model of an ecosystem of three trophic levels taking into account the existence of a lower critical density of the producer population. *Problems of Ecological Monitoring and Modeling of Ecosystems*. 1981;4:186–203 (in Russian).
32. Rozenberg GS. Warder Clyde Allee and the principle of special aggregation. *Samarskaya Luka: Problems of Regional and Global Ecology*. 2020;29(3):77–88 (in Russian). DOI: 10.24411/2073-1035-2020-10335.
33. Gause GF. *The Struggle for Existence*. Baltimore: Williams and Wilkins; 1934. 163 p.
34. *Owren B, Zennaro M*. Order barriers for continuous explicit Runge-Kutta methods. *Mathematics of Computation*. 1991;56(194):645–661. DOI: 10.2307/2008399.
35. Rosenberg GS. On the history of the model of logistic growth. *Bulletin Samarskaya Luka*. 2006;(18):188–193 (in Russian).
36. Buck JC, Hechinger RF, Wood AC, Stewart TE, Kuris AM, Lafferty KD. Host density increases parasite recruitment but decreases host risk in a snail–trematode system. *Ecology*. 2017;98(8):2029–2038. DOI: 10.1002/ecy.1905.
37. Colledge S, Conolly J, Crema E, Shennan S. Neolithic population crash in northwest Europe associated with agricultural crisis. *Quaternary Research*. 2019;92(3):686–707. DOI: 10.1017/qua.2019.42.
38. Maina GM, Kinuthia JM, Mutuku MW, Mwangi IN, Agola EL, Kutima HL, Mkoji GM. Regulatory influence of *Procambarus clarkii*, Girad (Decapoda: Cambaridae) on schistosome-transmitting snails in lotic habitats within the River Athi Basin, Kenya. *International Journal of Marine Biology and Research*. 2017;2(1):1–7. DOI: 10.15226/24754706/2/1/00113.
39. Lenski RE. Dynamics of interactions between bacteria and virulent bacteriophage. In: Marshall KC, editor. *Advances in Microbial Ecology*. Vol. 10 of *Advances in Microbial Ecology*. Boston, MA: Springer; 1988. P. 1–44. DOI: 10.1007/978-1-4684-5409-3_1.
40. Deer Habitat Carrying Capacity [Internet]. Forest and Wildlife Research Center Report. Mississippi State, MS: Mississippi State University; 2013. Available from: <https://www.msudeer.msstate.edu/deer-habitat-carrying-capacity.php>.
41. Dubrovskaya VA, Perevaryukha AY, Trofimova IV. Model of dynamics of structured subpopulations of sturgeon fish in the Caspian Sea takes into account deviations in the rate of development of immature fish. *Journal of the Belarusian State University. Biology*. 2017;(3):76–86 (in Russian).
42. Kuznetsov VA, Knott GD. Modeling tumor regrowth and immunotherapy. *Mathematical and Computer Modelling*. 2001;33(12–13):1275–1287. DOI: 10.1016/S0895-7177(00)00314-9.
43. Mikhailov VV, Perevaryukha AY, Reshetnikov YS. Model of fish population dynamics with calculation of individual growth rate and hydrological situation scenarios. *Information and Control Systems*. 2018;(4):31–38. DOI: 10.31799/1684-8853-2018-4-31-38.
44. Graham AL, Tate AT. Host Defense: Are we immune by chance? *eLife*. 2017;6:e32783. DOI: 10.7554/eLife.32783.
45. Perevaryukha AY. A continuous model of three scenarios of the infection process with delayed immune response factors. *Biophysics*. 2021;66(2):327–348. DOI: 10.1134/S0006350921020160.
46. Naikhin AN, Losev IV. The impact of conservative and hypervariable immunodominant epitopes in internal proteins of the influenza A virus on cytotoxic T-cell immune responses. *Problems of Virology*. 2015;60(1):11–16 (in Russian).
47. Perevaryukha AY. Delay in the regulation of population dynamics — cellular automaton model. *Dynamical Systems*. 2017;7(2):157–165 (in Russian).
48. Nikitina AV, Leontyev AL. Hydrophysical modeling of the caspian sea based on the model

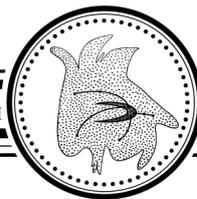
of variable density. Herald Of Computer And Information Technologies. 2018;(6(168)):12–19 (in Russian). DOI: 10.14489/vkit.2018.06.pp.012-019.

49. Shabunin AV. SIRS-model with dynamic regulation of the population: Probabilistic cellular automata approach. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2019;27(2):5–20 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-5-20.
50. Perevaryukha AY. Modeling of oscillating population dynamics of aquatic organisms in the «resource–consumer» system using cellular automata. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2020;28(1):62–76 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-62-76.

Переварюха Андрей Юрьевич — родился в Астрахани (1980). Окончил Астраханский государственный технический университет (2004) по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления» с дипломным проектом «Справочно-информационная система анализа данных экологического мониторинга состояния Каспийского бассейна», выполненном в Каспийском НИИ Рыбного хозяйства. Защитил диссертацию по специальности «Системный анализ» на тему «Анализ динамики возобновляемых биоресурсов с использованием комплекса гибридных моделей» (2010, СПИИРАН) по материалам динамики коллапса осетровых рыб Каспийского моря. Кандидат технических наук. Старший научный сотрудник лаборатории прикладной информатики Санкт-Петербургского Федерального исследовательского центра РАН. Научные интересы — моделирование нелинейных явлений в биологических процессах: коллапс запасов промысловых рыб, анализ всплеск численности и депрессии численности насекомых-вредителей, изменение темпов роста организмов, экстремальные инвазионные процессы. Опубликовал свыше 40 научных статей по указанным направлениям.



Россия, 199178 Санкт-Петербург, 14-Линия Васильевского острова, 39
Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН
E-mail: temp_elf@mail.ru
ORCID: 0000-0002-1049-0096
AuthorID (eLibrary.Ru): 498537



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4)

Научная статья
УДК 519.6

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-456-479
EDN: CUJNTJ

Нелинейная модель смены поколений элиты

А. В. Колесников¹, Г. Г. Малинецкий², А. В. Подлазов², С. Н. Сиренко³✉

¹Институт философии НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

²Институт прикладной математики РАН им. М. В. Келдыша, Москва, Россия

³Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск, Республика Беларусь

E-mail: kollesnikov@philosophy.by, gmalin@keldysh.ru, tiger@keldysh.ru, ✉sirenka@bspu.by

Поступила в редакцию 27.12.2021, принята к публикации 13.05.2022,

опубликована 1.08.2022

Аннотация. Целью представленной работы являлось построение лаконичной математической модели конкурентной динамики альтернативных типов социальной активности. Модель была разработана в форме дискретного двумерного нелинейного отображения. Предложенное отображение является новым и ранее не исследовалось ни в области математической социальной динамики (социофизики), ни в разделе дискретных моделей нелинейной динамики. **Методы.** Используемый нами подход корреспондируется с представлениями теории о социальном времени, выдвинутой Ф. Броделем. Нелинейное двумерное отображение парадоксальным образом, учитывая общие социально-экономические представления о связи между поколениями, как оказалось, имеет гамильтонову структуру. Анализ показал, что и формально, и по качественному поведению оно близко к стандартной модели, описывающей ротатор под действием ударов. Установлено, что в зависимости не только от параметров задачи, но и от начальных условий в данном случае одновременно возможны и периодическая, и квазипериодическая, и хаотическая динамика. В рамках модели это означает большое разнообразие в отношениях между поколениями. Таким образом данные в системе не будут подвержены «забыванию». Продемонстрировано влияние на динамику модели «диссипативных добавок», описывающих деградацию элиты, стремление общества к «устранению лучших». Динамика системы и её зависимость от параметров становятся гораздо проще, тем не менее, цикличность и мультистабильность в ней не исчезают. В этом приближении история оказывается «локальной» — детали и особенность поведения общества будут «забыты» через несколько поколений. Исследование построенной модели открывает большие перспективы для анализа различных типов циклических процессов в математической истории и социальной динамике.

Ключевые слова: моделирование социальных процессов, математическая история, социальная динамика, двумерные отображения, гамильтонова динамика, конфликт поколений, динамический хаос, космический человек, чувствительность по отношению к параметрам и начальным данным, историческое время.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-511-00003), ГПНИ «Общество и гуманитарная безопасность белорусского государства», подпрограмма «Образование», тема НИР «Разработать стратегические направления и механизмы модернизации педагогического образования в целях устойчивого развития» (2021–2025 гг.), номер ГР 20211397.

Для цитирования: Колесников А. В., Малинецкий Г. Г., Подлазов А. В., Сиренко С. Н. Нелинейная модель смены поколений элиты // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 456–479. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-456-479. EDN: CUJNTJ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Nonlinear elite generation change model

*A. V. Kolesnikov*¹, *G. G. Malinetskiy*², *A. V. Podlazov*², *S. N. Sirenko*³✉

¹Institute of Philosophy of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

²Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

³Maksim Tank Belarusian State Pedagogical University, Minsk, Republic of Belarus

E-mail: kolesnikov@philosophy.by, gmalin@keldysh.ru, tiger@keldysh.ru, ✉sirenka@bspu.by

Received 27.12.2021, accepted 13.05.2022, published 1.08.2022

Abstract. The *purpose* of the presented article was to build a concise conceptual mathematical model of the competitive dynamics of alternative types of social activity. The model was developed in the form of a discrete two-dimensional non-linear mapping. The proposed mapping is new and has not been previously studied either in the field of mathematical social dynamics (sociophysics), or in the section of discrete models of nonlinear dynamics. The approach we used corresponds to the ideas of the theory of social time put forward by F. Braudel. Nonlinear two-dimensional mapping, in a paradoxical way, given the general socio-economic ideas about the relationship between generations, as it turned out, has a Hamiltonian structure. The analysis showed that both formally and in terms of qualitative behavior it is close to the standard model describing a rotator under the action of impacts. It was found that, depending not only on the parameters of the problem, but also on the initial conditions, in this case, periodic, quasiperiodic, and chaotic dynamics are simultaneously possible. Within the framework of the model, this means a great variety of intergenerational relationships. Thus, the data in the system will not be “forgotten”. The influence on the dynamics of the model of “dissipative additions” describing the degradation of the elite, the desire of society to “eliminate the best” is demonstrated. The dynamics of the system and its dependence on parameters become much simpler; nevertheless, cyclicity and multistability do not disappear in it. In this approximation, history turns out to be “local” — the details and peculiarities of society’s behavior will be “forgotten” after several generations. The study of the constructed model opens up great prospects for the analysis of various types of cyclical processes in mathematical history.

Keywords: modeling of social processes, mathematical social dynamics, two-dimensional maps, Hamiltonian dynamics, generational conflict, dynamic chaos, space man, sensitivity to parameters and initial data, historical time.

Acknowledgements. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 20-511-00003), the State Scientific Research Program “Society and the Humanitarian security of the Belarusian state”, subprogram “Education”, research topic “Develop strategic directions and mechanisms for the modernization of teacher education for sustainable development” (2021–2025), No. SR 20211397.

For citation: Kolesnikov AV, Malinetskiy GG, Podlazov AV, Sirenko SN. Nonlinear elite generation change model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(4):456–479. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-456-479

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Трудные времена создают сильных людей.
Сильные люди создают хорошие времена.
Хорошие времена создают слабых людей.
И слабые люди создают трудные времена.

Г. М. Хонер. «Те, кто остаются»

Динамическое поведение социальных систем формируется под влиянием конкурентных взаимодействий носителей различных собственных целей и ценностных ориентиров. При этом цели социальных групп могут быть противоположны, но межгрупповые отношения взаимозависимы. Возникает ситуация, когда реализация интересов одной группы социальных агентов создаёт условия для активизации их контрагентов, а те, в свою очередь, по мере реализации собственных целей вновь начинают нуждаться в активности агентов первого типа. Это приводит к возникновению циклов и более сложным типам динамического поведения. Цель настоящей работы состоит в построении по возможности максимально простой и лаконичной математической модели такого типа конкурентных взаимоотношений и последующего исследования её динамического поведения.

В своё время представитель школы «Анналов» Фернан Бродель выдвинул идею количественного описания исторических процессов. Он показал, что есть «медленные переменные», мало меняющиеся от эпохи к эпохе. Кроме того, он выделил три масштаба времени в истории.

Первый уровень — это географическое время, «долгое время», связанное с изменениями, тенденциями, повторениями и циклами в окружающей среде.

Второй уровень — долгосрочная социальная, культурная и экономическая история.

Третий уровень — это уровень событий, связанный с политикой, реформами, быстрыми изменениями. Именно на него люди обычно и обращают внимание [1].

Развитие нелинейной динамики и широкое использование компьютеров позволило сделать следующий шаг, связанный с математическим моделированием исторических событий. В 1990-х гг. была выдвинута исследовательская программа, связанная с построением *математической истории* [2]. В рамках этой программы предполагалось математическое описание разновременной социальной динамики исторических процессов на основе идей теории самоорганизации и выделения параметров порядка, отражающих наиболее важные причинно-следственные связи [2]. Реализация этой программы привела к построению математических моделей, многие из которых описывают колебательные, циклические процессы [3, 4].

В целом использование математических и компьютерных моделей как инструмента исследования и познания механизмов, формирующих динамику социума, представляется перспективным средством понимания философии социальных процессов, прогнозирования их течения и, самое главное, проектирования будущего прогрессивного общественного развития. Несмотря на определённое продвижение в сфере моделирования социальных процессов и динамики развития общества, происходящие в социальных системах внезапные кризисы и циклы, содержащие внутри себя периоды подъёма и спада, бурного развития и регресса трудно поддаются математическому описанию и тем более прогнозированию. Разработанная нами и представленная в статье модель социальной динамики является достаточно лаконичной, но при этом может быть использована для понимания и в некотором смысле объяснения происходящих в прошлом и настоящем событий социогенеза.

По-видимому, стремление выделить периодически повторяющиеся состояния исследуемых систем характерно для многих развивающихся дисциплин. Например, в рамках исследований рыночной экономики выделяют циклы Китчина (3–4 года), Жюгляра (7–11 лет), Кондратьева (40–50 лет). Наличие циклической повторяемости позволяет делать прогнозы. Войны, революции, кризисы в соответствии с представлениями ряда исследователей определяются кондратьевскими циклами. Например, прогноз о мировом экономическом кризисе 2008–2009 гг. был представлен за пять лет до его наступления [5].

Другой пример ритмов и циклов даёт анализ активности Солнца, в котором выделяют цикл Швабе (11 лет), цикл Хейла (22 года), цикл Гляйсберга (70–100 лет). Первоначально идея влияния циклов солнечной активности на исторические события высказывалась А. Л. Чижевским. Тем не менее циклическое поведение во многих случаях является только удачным приближением. Более подробный анализ позволяет выделить гораздо более сложную хаотическую динамику [6].

Возникновение колебательных процессов в сложных системах является одной из важных форм самоорганизации. В таких системах могут сформироваться параметры порядка, определяющие их поведение, и объекты, динамика которых может определяться достаточно простыми дифференциальными уравнениями.

Предлагаемая нами модель допускает широкую интерпретацию в рамках рассмотрения конкурентных взаимодействий альтернатив в социальной динамике. В данной статье мы будем рассматривать социально-культурную и технологическую активность разных поколений. В настоящее время в социологии популярна теория, разработанная У. Штраусом и Н. Хоувом, описывающая повторяющиеся в ряду поколений модели поведения. Эта теория, ставшая известной после 1991 г., рассматривает поколения в англо-американской истории с 1433 г. по настоящее время [7, 8].

Ее авторы определяют поколение как совокупность всех людей, рожденных в промежуток времени, составляющий примерно 20 лет, что соответствует одной фазе жизни — детство, молодость, средний возраст, старость. Именно личности одного типа наиболее популярны в разные эпохи (поколенческие архетипы). Это Пророк, Странник, Герой, Художник.

Конструктивность этого подхода проявляется в том, что он стал популярен не только среди историков и социологов, но и среди маркетологов, специалистов по рекламе, кадровиков, «хедхантеров». Обычно они рассматривают поколения нашей страны, выделяя величайшее поколение (1903–1923), молчаливое поколение (1924–1943), беби-бумеры (1944–1963), поколение X (1964–1984), поколение Y (1985–2003), поколение Z (2004–2024).

Обратим внимание и на простую социологическую закономерность — если хочешь знать настроение и перспективы общества, загляни на 20 лет назад и увидишь примерно то же. Народная мудрость говорит, что внуки гораздо лучше понимают и больше берут от бабушек и дедушек, чем от родителей.

Упомянутые теории поколений и слишком сложны, и слишком просты. Сложны, потому что приходится учитывать богатый, противоречивый исторический контекст, во многом зависящий от взглядов исследователя. Кроме того, сущностям, рассматриваемым в теории, трудно сопоставить количественные характеристики. При этом достаточно очевидно, что динамика общества очень существенно зависит от начальных данных — от состояния и ресурсов, которыми оно располагает.

Некоторые фундаментальные основания механизма эволюции этносов раскрывает теория этногенеза Л. Н. Гумилева [9]. В рамках этой теории принципиальную роль играет доля пассионариев в обществе. Таким термином он называет активных, энергичных людей, которые готовы многое отдать вплоть до своей жизни за воплощение своих смыслов, ценностей, идеалов, проектов. Наряду с ними в обществе есть субпассионарии, для которых личное гораздо важнее общественного и которые с удовольствием ведут паразитический образ жизни, если для этого есть возможность. Среднюю позицию занимают люди, гармонично сочетающие личные и общественные интересы (гармоники).

Многочисленные исторические траектории этносов показывают традиционную судьбу этих социальных структур, которые развиваются в течение 1000–1200 лет. Пассионарии, считающие, что мир плох и его следует изменить, дают начало новому этносу. Доля этих людей растет, их императивы определяют состояние общества. На этом этапе открываются неожиданные горизонты, создаются и активно используются новые технологии. Чтобы удержать завоеванное и эффективно управлять им, становятся нужны гармонично развитые люди. После надлома бал начинают править субпассионарии, этнос идет к закату [9]. Можно сказать, что описанная Л. Н. Гумилевым динамика этногенеза имеет дело с одной ведущей, медленной переменной, которую он назвал пассионарным напряжением общества. Примерно такую же картину дает теория цивилизаций Арнольда Тойнби.

Однако естественно предположить, что на быстрых временах 20–100 лет мы тоже будем видеть колебания доли пассионариев в обществе. Наличие этих быстрых колебаний согласуется с теорией Н. Д. Кондратьева. На разных фазах экономической волны, занимающей 40–50 лет, востребованы оказываются люди с разными социально-психологическими характеристиками. Это подтверждают и наблюдения классика экономической мысли Й. Шумпетера, видевшего в инновациях важнейший фактор производства [10]. Он выяснил, что в развитии, в продвижении новых технологий, в смене существующей системы заинтересованы не более 10% предпринимателей. Именно их стратегия близка к пассионарному образу действий. В то же время 90% готовы вкладывать усилия в обеспечение стабильности, сохранившихся взаимосвязей, отказываясь от нового. Их образ действий естественно сопоставить с тем, который характерен для гармоников и субпассионариев. И эти доли существенно меняются в зависимости от фазы развития экономики.

Следует обратить внимание на принципиальное отличие рассматриваемого подхода от моделей социальной динамики и математической истории, описанных ранее [3, 4]. В этих моделях

важнейшими параметрами являются экономические и демографические, а также объем ресурса, потребляемого правящим слоем. В ряде случаев этим модели позволяют описать неустойчивости, имевшие место в исторической динамике. Как правило они относятся к «медленным переменным». В нашем случае речь идет, скорее, о «быстрых переменных» и о различии вклада в общественное развитие различных поколений, по существу о социальной философии.

1. Построение модели

Понять — значит упростить.

Стругацкие, «Волны гасят ветер» (1984)

Следуя работам [11–13], а также следуя духу философии русского космизма упростим ситуацию. Пассионариев, создающих новые возможности, открывающих и осваивающих новое, предлагающих оригинальные жизнеспасающие технологии, назовем *космическими людьми*. Именно благодаря их деятельности человечество расширяло свой ареал обитания и стало технологической цивилизацией, что принципиально выделило наш вид в ходе эволюции. Ему можно противопоставить *молекулярного человека*, стремящегося использовать уже имеющиеся возможности и не желающего выходить за их рамки. По сути, мы упрощаем гумилевскую схему, не рассматривая «гармоников» и выделяя только два типа людей в обществе.

Введем понятие совокупного ресурса, включающего материальные и нематериальные ресурсы, произведенные социальной системой, R_n , который отражает изменение того, что производит и потребляет социальная система за время смены поколений (примерно 20 лет) в момент времени n . Под n будем понимать «номер» поколения. При этом речь идет не только об экономике и материальных ресурсах, но также о промышленных и гуманитарных технологиях.

Этот момент очень важен. Мы будем иметь дело не с непрерывным временем $0 \leq t < \infty$ и дифференциальными уравнениями, а с дискретным временем $n = 1, 2, 3, \dots$ и моделями вида

$$\vec{z}_{n+1} = \vec{G}(\vec{z}_n, \vec{\lambda}).$$

Будем считать, что функция \vec{G} непрерывна и однозначна. Это позволяет говорить о непрерывной зависимости от начальных данных, существовании и единственности, характерных для дифференциальных уравнений. У перехода от непрерывного к дискретному времени есть две причины. Нас будут интересовать качественные особенности исторической динамики, а не детальное описание того или иного поколения. Кроме того, дискретное отображение можно рассматривать как систему, описывающую динамику на сечении Пуанкаре. Это позволяет избавиться от ошибок, вносимых при численном интегрировании дифференциальных уравнений, которые могли бы описывать ту же самую ситуацию. С другой стороны, это упрощает картину — предельному циклу дифференциального уравнения соответствует несколько точек в отображении, квазипериодическому движению (инвариантному тору) — линия и т. д.

Заметим, что величины такого сорта традиционно вводятся в исторической и мировой динамике [14]. В самом деле, в модели Форрестера рассматриваются такие величины как мировые ресурсы, глобальный продукт, уровень загрязнения, качество жизни. В исторической динамике во многих моделях фигурирует доля продукта, присваиваемого элитой, и такие величины как пассионарность или асабия.

Пусть доля пассионарного («космического») населения в популяции в момент времени n составляет q_n . Это позволяет выписать простое рекуррентное соотношение

$$R_{n+1} = k_l q_n R_n + k_{ml} (1 - q_n) R_n, \quad R_0 = 1, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad (1)$$

где $k_l > 1$, $k_{ml} < 1$ — коэффициенты воспроизводства совокупного ресурса представителями разных частей общества. Совокупный ресурс в момент времени $n + 1$ (или в следующем цикле воспроизводства) складывается из ресурса, воспроизведённого пассионариями и молекулярными потребителями. Мы рассматриваем простейшее линейное соотношение между частями ресурса, производимыми различными частями общества. По своей природе пассионарный социотип ориентирован на приращение совокупного ресурса системы. Поэтому коэффициент воспроизводства k_l больше единицы. Если $k_l = k_{ml}$, то мы имеем сходящуюся геометрическую прогрессию со знаменателем k_{ml} , так что $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Общество погибает.

Пассионарии, как показывают историки, составляют большую нагрузку для социума, — они не дают обществу жить спокойно, предлагая большие проекты, завоевания или масштабные реформы. Крестовые походы, освоение Америки дают наглядные примеры «отправки» большого количества пассионариев на дальние рубежи.

При падении обеспеченности общества потребность в пассионариях растёт, в «сытые» периоды она падает. Это позволяет дополнить уравнение (1) соотношением для динамики доли пассионариев и получить систему (2)

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= k_l q_n R_n + k_{ml} (1 - q_n) R_n, \quad R_0 = 1, \quad 0 \leq q \leq 1, \\ q_{n+1} &= q_n^{R_{n+1}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Свойства степенной кривой на участке $[0; 1]$ (а именно на этом участке имеет смысл доля q) таковы, что при высоких значениях показателя степени R значения q будут приближаться к нулю. При низких значениях R , значения q будут близки к единице. Это вполне согласуется с высказыванием шейха Рашида ибн Саид Аль Мактума: «Мой дед ездил на верблюде, мой отец ездил на верблюде, я на Мерседесе, сын на Ленд Ровере и мой внук водит Ленд Ровер, но правнук будет ездить на верблюде», который метафорично описывает циклические процессы в обществе.

Принципиальным является то, что в уравнении $q_{n+1} = q_n^{R_{n+1}}$ системы (2) есть опережение. В качестве показателя степени используется R_{n+1} , а не R_n . Это отражает тот факт, что «социальный заказ» на долю пассионариев формируется в конце текущего цикла воспроизводства, исходя из того объема ресурса, который был произведен, когда доля пассионариев составляла q_n . Похожая логика применяется при моделировании инновационного развития экономики. Оказывается, что ключевые инновации данного технологического цикла были разработаны в ходе развития предыдущего, однако в нем еще не были востребованы. Иными словами, исследователи и инженеры предыдущего цикла опередили свое время, что будет использоваться лишь через десятилетия.

Кроме того, если во втором уравнении системы (2) исключить опережение, модель демонстрирует тривиальную динамику с $q_n, R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Разработанная нами математическая модель социальной конкуренции представляет собой двумерное дискретное отображение, содержащее нелинейность. Отображение (2) не рассматривалось ранее в разделе нелинейной динамики, изучающем дискретные модели. Оно исследуется впервые.

Мы не рассматриваем управления в нашей модели. Тем не менее, вывод из соотношения (2) достаточно очевиден. Для общества очень существенно планирование и прогноз на время цикла поколения (20 лет). Важно представлять, сколько «пассионариев» понадобится для предстоящих перемен [13]. Исходя из этого, принципиальное значение имеет опережающее образование — постановка перед школьниками и студентами задач не сегодняшнего, а завтрашнего дня [15]. Очень полезно рассказывать им о том, что им предстоит освоить в будущем, и формулировать проблемы, которые сегодня решает страна или человечество. Исследования психологов показывают, что очень полезно задавать вопросы тем, кто учится, даже если мы не даем на них ответов.

2. Исследование модели

Мой дед ездил на верблюде, мой отец ездил на верблюде, я на Мерседесе, сын на Ленд Ровере, и мой внук водит Ленд Ровер, но правнук будет ездить на верблюде.

Рашид ибн Саид Аль Мактуси

Перепишем отображение (2) в виде

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n(aq_n + b), \\ q_{n+1} &= q_n^{R_{n+1}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $a = k_l - k_{ml} > 0$ и $b = k_{ml}$.

Введем новые переменные

$$x_n = \ln R_n, \quad y_n = \ln(-\ln q_n). \quad (4)$$

В этих переменных отображение запишется следующим образом

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + f(y_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} + y_n, \end{aligned} \quad (5)$$

где $f(y) = \ln(ae^{-e^y} + b)$. Вид функции f для нескольких значений параметров представлен на рис. 1. Видно, что эти графики функций соединяют два участка, близкие к постоянным $f(y) \rightarrow \ln b$ при $y \rightarrow \infty$ и $f(y) \rightarrow \ln(a+b)$ при $y \rightarrow -\infty$.

Обратим внимание на частный случай при $y \rightarrow \infty$, $f(y) \rightarrow \text{const}$. Видим, что если $f(y) = c$, то $\{x_n\}$ образуют арифметическую прогрессию $x_n = x_0 + cn$, а $y_n = y_0 + nx_0 + cn(n+1)/2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

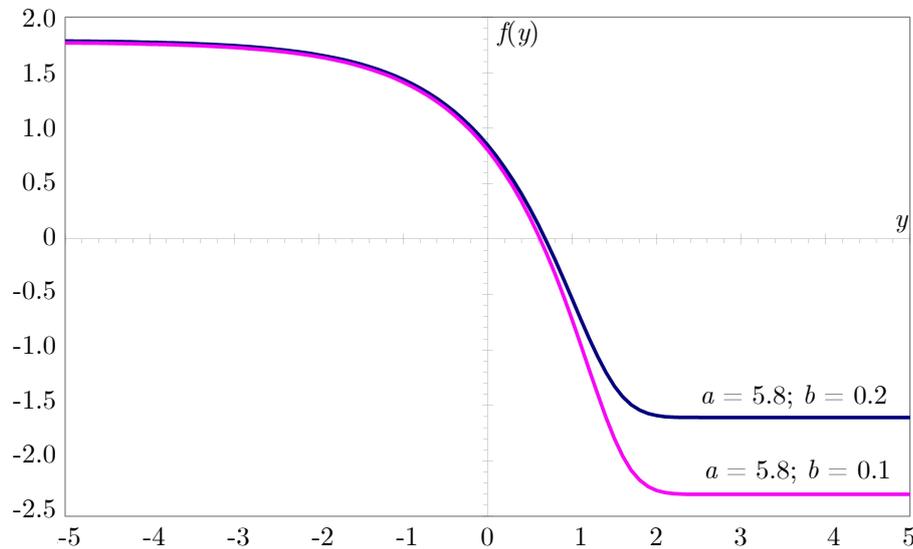


Рис. 1. Вид функции отображения. Функция $f(y)$ является монотонно убывающей между двумя асимптотическими пределами

Fig. 1. View of the mapping function. The function $f(y)$ is monotonically decreasing between two asymptotic limits

Из второго равенства в (5) следует

$$y_n = y_0 + S_n, \quad \text{где } S_n = \sum_{k=1}^n x_k. \quad (6)$$

Следовательно

$$x_{n+1} = x_n + f(y_0 + S_n). \quad (7)$$

Это равенство очень интересно — оно показывает, что логарифм ресурса в данный момент определяется функцией от суммы логарифмов ресурса взятых с одинаковым весом. Оказывается, что всё существенно, что система ничего не «забывает».

Заметим, что если всё общество пассионарно ($q_n = 1$), то последовательность $\{R_n\}$ определяет геометрическую прогрессию со знаменателем $a + b$. Ресурс, получаемый обществом, со временем неограниченно нарастает.

Очень интересным является то, что отображение (7) очень близко к тому, которое является классическим в нелинейной динамике. В этой области рассматривают стандартные отображения, описывающие ротатор под действием периодических ударов, с гамильтонианом в переменных действие – угол

$$H = \frac{1}{2}I^2 - K \cos \Theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T - n).$$

Эта модель приводит к отображению

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K \sin x_n \pmod{2\pi}, \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1} \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Его также называют стандартным отображением или отображением Чирикова–Тейлора. Это отображение возникает в теории плазмы. Оно широко используется при анализе хаоса в гамильтоновых системах. В нем есть траектории, описывающие хаотическую динамику, принадлежащую так называемому *стохастическому морю*. Они соседствуют с квазипериодическими траекториями на так называемых *островках* [16].

В классе периодических с периодом 2π функций мы имеем отображение

$$p_{n+1} = p_n + K \sin \left(x_0 + \sum_{k=1}^n p_k \right). \quad (8)$$

Как видим, мы имеем одинаковую функциональную зависимость уравнений (7) и (8). Более того, если мы рассмотрим уравнение для нелинейного осциллятора, решаемое по полунеевной схеме Эйлера, то мы получим аналог соотношения (7).

Несмотря на сложную динамику гамильтоновы системы с возмущением детально рассматривались. В самом деле, движение планет Солнечной системы можно рассматривать как квазипериодическое по $2p$ -мерному тору в пространстве $(\Theta_1, \dot{\Theta}_1, \dots, \Theta_p, \dot{\Theta}_p)$, где Θ_i характеризует угловую координату i -й планеты, p — число планет. Возникает вопрос, волновавший ещё Ньютона, — насколько устойчива Солнечная система, сохранится ли квазипериодическое решение данной гамильтоновой системы при малых возмущениях. После трех веков усилий выдающихся математиков в теории Колмогорова–Арнольда–Мозера было установлено, что при достаточно малых возмущениях в окрестности данного инвариантного (относительно рассматриваемой динамической системы) тора (квазипериодического движения) существует близкий к нему инвариантный тор [19]. Следует отметить, что при отсутствии возмущения в классической задаче есть интегрируемый предел. В нашей задаче его нет. Тем не менее аналогия представляется достаточно

очевидной — мы так же имеем набор стохастических слоев и упорядоченных островков в фазовом пространстве.

Эти результаты получены с помощью теории возмущений, однако возможности этого подхода достаточно ограничены — во многих интересных случаях возмущения не являются малыми: «Такую сложность, равно как разнообразие видов траекторий, нельзя получить любым известным методом теории возмущений. Узкие зоны с хаотическими траекториями называются стохастическими слоями. Внутри этих стохастических слоев есть островки с вложенными кривыми, субостровки и ещё меньшие стохастические слои» [18, с. 28]. Поэтому основным инструментом анализа таких систем остается компьютерный эксперимент.

В силу сходства отображений (7) и (8) и для изучаемой модели, и для рассматриваемой системы можно ожидать наличие достаточно сложной динамики. Поэтому стоит сформулировать рассматриваемые вопросы.

Описывает ли модель (3) смену поколений и циклы воспроизводства совокупного ресурса? Действительно ли мы имеем простейшую циклическую динамику с небольшой периодичностью? Всегда ли мы имеем дело с периодическим процессом либо возможна хаотическая динамика? Всегда ли модель описывает ограниченные траектории? Как ведут себя данные процессы при наличии диссипативных эффектов?

3. Диссипативная версия модели

Отсутствие лучших (по крайней мере их дефицит) имело глубокое отрицательное влияние на отечественную историю, окончательно воспрепятствовав нашему превращению в более или менее нормальную страну.

Х. Ортего-и-Гассет

В основе теории самоорганизации лежит анализ диссипативных процессов, которые позволяют рассматривать асимптотику и набор аттракторов. Детали начальных данных при этом «забываются». С этой точки зрения, учет диссипативных процессов не усложняет, а упрощает изучаемое явление. Рассмотрим, что в нашем случае дал бы учет процессов диссипации, учитывающих, что зачастую общество стремится уменьшить число пассионарных «космических людей». Это согласуется с описанием ряда эпох историками. Учет этого дает вместо (3) двумерное отображение

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n(aq_n + b), \\ q_{n+1} &= q_n^{R_{n+1}}(1 - \alpha). \end{aligned} \tag{9}$$

Величина $\alpha \ll 1$ характеризует долю «космических людей», которую общество «отсеивает» в следующем поколении. Характерный вид фазовой плоскости представлен на рис. 2. Видно, что здесь имеют место циклы с различными периодами.

Мы видим две принципиальные черты.

Первая — *мультистабильность*. В зависимости от начальных данных (x_0, y_0) установившиеся при $n \rightarrow \infty$ режимы принципиально меняются.

В данной области параметров есть большая область, в которой $R_n \rightarrow R^*$, $q_n \rightarrow q^*$ при $n \rightarrow \infty$. Другими словами, возникает стационарное состояние, в котором не меняется ни количество создаваемого продукта, ни доля пассионариев в обществе. Это схоже с представлением о стабильном «внутреннем государстве», выдвигаемом рядом социологов и политологов. По их представлениям именно это государство и определяет ключевые решения, принимаемые в обществе.

Однако вдали от этого состояния мы наблюдали циклы длиной l : $(R_{n+l}, q_{n+l}) \rightarrow (R_l^*, q_l^*)$. Другими словами, система возвращается в исходное состояние через l поколений. При этом само значение l при разных значениях a и b может быть различным. Это циклическая динамика — именно та закономерность, для объяснения которой и предлагалась модель.

На рис. 2 элементы каждого цикла соединены прямыми, чтобы их можно было отличить друг от друга. Видно, что здесь есть и неподвижная точка, и цикл-5, и цикл-8, и цикл-11. Это показывает, что в одном и том же обществе могут существовать «поколенческие циклы» разной длины. Появляются возможности изменить ритм воспроизводства элиты, а с ним и состояние общества на «средних» (в терминологии Броделя) временах. Значительный кризис, связанный с отстранением или репрессиями в отношении части элиты, или существенное ухудшение материального положения могут изменить историческую траекторию («...пришли не те люди»).

Кроме того, следует отметить, что наивный подход к исторической динамике (например, «омолодить элиту»), стремление сделать «как лучше» без понимания областей притяжения разных аттракторов может не улучшить, а ухудшить положение дел. Дело в том, что области притяжения различных циклов оказываются сложным образом переплетены, поскольку мы имеем дело не с дифференциальными уравнениями, а с отображением, способным совершать «прыжки» по фазовой плоскости.

Поясним сказанное. В силу непрерывности отображения отрезок переходит в отрезок. Однако множество точек, сходящихся к данному аттрактору, может иметь сложную структуру. Классический пример — отображение $x_{n+1} = 1 - 2|x_n|$, в котором каждое рациональное x_0 приводит к циклу, каждое иррациональное — к хаотической траектории. А в отображении $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ около каждого «хаоса» есть устойчивый цикл. В данном случае мы обнаружили чувствительность по отношению к параметрам — малые изменения начальных данных приводили к выходу на циклы разных периодов. К сожалению, просто отобразить эту удивительную динамику в черно-белом варианте не представляется возможным. Поэтому исследование вопроса о детальном устройстве областей притяжения циклов в данной работе не проводится.

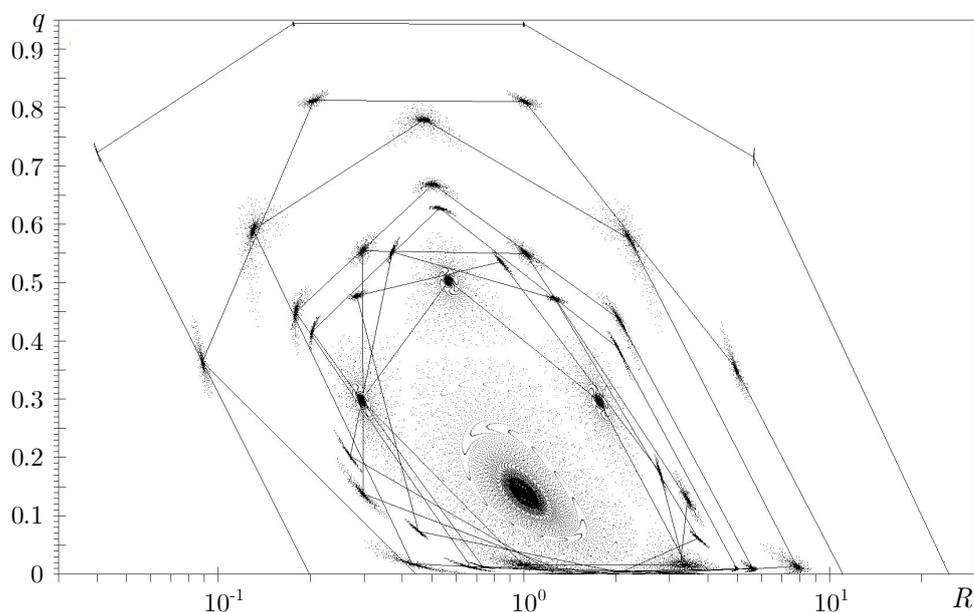


Рис. 2. Циклы диссипативной системы (9) в координатах (R, q) при $a = 5.8$, $b = 0.2$ и $\alpha = 10^{-3}$. Некоторое количество точек, попадающих в область притяжения каждого цикла, показано вблизи каждой его точки. При различных начальных данных происходит переход на разные циклы, что позволяет говорить о мультистабильности в системе

Fig. 2. Cycles of a dissipative system and their mapping areas

4. Детальное исследование модели

Общество не консервативно, когда оно не видит, что сохранять. Дайте ему что-то положительное и увидите, что оно будет консервативно.

Ф. М. Достоевский

Исследуемая динамика оказывается достаточно сложной, поэтому естественно обратиться к простейшим математическим моделям, демонстрирующим схожую динамику. По сути, это является главным способом понять исследуемое поведение.

Результаты расчетов дают сложную картину, повторяющую себя на все меньших масштабах. Поэтому стоит обратить внимание на две простые модели, дающие понимание и логику изучения построенной модели. Сложная динамика обеспечивается взаимодействием двух достаточно простых эффектов.

Первый связан с пересечением сепаратрис и стохастическим слоем. Рассмотрим простейший физический маятник с малым периодическим по времени возмущением. Его фазовое пространство $(\varphi, \dot{\varphi})$. Особые точки $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(0,-\pi)$. Если отождествить точки φ и $\varphi + 2\pi$, то фазовое пространство будет цилиндром $(-\pi \leq \varphi \leq \pi, -\infty \leq \dot{\varphi} \leq \infty)$. Когда энергия $E = (1/2)\dot{\varphi}^2 - \omega_0^2 \cos \varphi$ мала, то система совершает малые колебания. Когда она очень велика, то маятник «прокручивается», вращаясь в одну или другую сторону в зависимости от направления начальной скорости. Вблизи начала координат угол φ возвращается за период в исходную точку. Когда энергия велика, то φ за период увеличивается (или уменьшается) на 2π . Непрерывным переход от первого типа поведения ко второму быть не может. Переход этот связан с сепаратрисой, ведущей при некотором значении энергии E_{crit} от одного седла $(-\pi, 0)$ к другому $(\pi, 0)$. Движение по этой траектории (сепаратрисе) занимает бесконечно долгое время. Как бы ни были малы возмущения за это время, они могут очень существенно воздействовать на систему. Роль этих возмущений состоит в том, чтобы часть «колебательных» траекторий (в которых φ за период не меняется) сделать «пролетными» (в которых φ за период меняется на 2π или на -2π). И, напротив, небольшая часть «пролетных» траекторий может стать «колебательными». Чем меньше величина возмущения ε , тем уже слой в фазовом пространстве, в котором это происходит.

Например, такая динамика наблюдается в системе с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega_0^2 \cos \varphi + \varepsilon \omega_0^2 (\omega t).$$

Сечение Пуанкаре можно брать, рассматривая траекторию за период $= 2\pi/\nu$. Это возбуждение, зависящее и от времени, и от угла φ и создает неопределенность. Известный физик Д. С. Чернавский сравнивал такие системы с «китайским бильярдом», в котором, как при игре в рулетку, малые изменения начальной скорости шарика могут изменить лунку, в которую он попадет [20].

Второй эффект связан с огромным множеством «островков» и сложной зависимостью от параметров задачи, при которой малое изменение параметров может качественно изменить наблюдаемую картину. Вместе с тем, в основе этого лежит реализация множества резонансов и хорошо известное в теории колебаний явление — захват частоты. Это явление возникает при автоколебательной системе с периодическим внешним сигналом с заданными частотой и амплитудой. Простейшей системой, иллюстрирующей происходящее, является отображение окружности

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \alpha + \varepsilon \sin(2\pi\varphi_n).$$

При $\varepsilon = 0$ это отображение является поворотом угла α . Для этого отображения можно рассматривать число вращения $\rho(\alpha, \varepsilon)$, показывающее, на какую величину в среднем за итерацию

меняется угол φ . Множество точек, в которых эта функция принимает рациональные значения $\rho(\alpha, \varepsilon) = p/q$, называют языками Арнольда.

При $\varepsilon = 0$ мы имеем периодические орбиты, начинающиеся в рациональных точках $\varphi_0 = p/q$ и множество квазипериодических орбит, начинающихся при других начальных данных.

При $\varepsilon > 0$ около каждого значения p/q начинает расти «язык», который тем шире, чем больше ε . При этом внутри языка мы имеем вращение не с частотами α (которое было при $\varepsilon = 0$), а с частотой p/q , которая «захватывает» частоты в своей скорости.

При этом структура пространства параметров оказывается очень сложной.

Если α — «хорошее» иррациональное число

$$\left| \alpha - \frac{m}{s} \right| > \frac{k(t)}{s^{2.5}}, \quad k(t) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

то инвариантный тор устойчив при достаточно малом ε .

Иначе частота оказывается «захвачена». Интервал вблизи α , где это происходит, оценивают в $k(\varepsilon)/s^{2.5}$. Общая длина этих интервалов

$$L < \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k(\varepsilon)}{s^{2.5}} = k(\varepsilon) \sum_{s=1}^{\infty} s^{-1.5}.$$

При этом число вращения как функция параметра α является своеобразной канторовой лестницей. В отличие от обычной лестницы Кантора каждая «ступенька» соответствует своему p/q (где и захватывается частота), но между ними есть интервал, соответствующий иррациональным p/q и инвариантным торами. При этом мера Лебега и тех, и других положительна. Другими словами, «бросив наугад» начальные данные φ_0 мы с ненулевой вероятностью попадем в цикл и с ненулевой — в хаос [21, 22].

Линеаризуем отображение (5) вблизи произвольной точки (x, y)

$$\begin{aligned} \Delta x_{n+1} &= \Delta x_n + p \Delta y_n, \\ \Delta y_{n+1} &= \Delta x_n + (1 + p) \Delta y_n, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$p = f'(y) = -\frac{e^y}{1 + \frac{b}{a} e^{e^y}} < 0. \tag{11}$$

Собственные числа матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & 1 + p \end{vmatrix} \tag{12}$$

находятся как корни квадратного уравнения $\lambda^2 - (p+2)\lambda + 1 = 0$. Его дискриминант $D = p^2 + 4p < 0$ при $-4 < p < 0$. При этом корни λ_1 и λ_2 получаются комплексно-сопряженными, а поскольку по теореме Виета их произведение $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, то $|\lambda_{1,2}| = 1$, то есть отображение лишь вращает точки вокруг произвольно выбранной точки разложения, не приближая их к ней и не удаляя от нее. Иначе говоря, система является консервативной. Ни действительная $p/2 + 1$, ни мнимая $\pm \sqrt{-(p/2)^2 - p}$ части корней по модулю не превосходят 1, то есть они равны косинусу и синусу угла поворота. Случай $D > 0$ для рассматриваемой функции f не представляет интереса, поскольку можно показать, что необходимые значения $p < -4$ достижимы только при фантастических соотношениях параметров $a/b > 4e^5 \approx 594$.

Определитель матрицы (12) всегда равен 1. Это означает, что система является консервативной, площадь фазового пространства сохраняется, детали начальных данных не забываются. Мы имеем свойство, часто называемое в синергетике *чувствительностью по отношению к параметрам* [17].

В силу сложности моделей вида (6) и (7), естественно начать с анализа их простейшего, линейного варианта. Пользуясь линейностью, будем искать решение в комплексном виде

$$x_n = e^{i(n\omega + \varphi)}, \quad (13)$$

чтобы в конце учесть лишь действительную часть этой записи $x_n = \cos(n\omega + \varphi)$. Для значений (13) легко вычисляется как приращение

$$x_n - x_{n-1} = e^{i(n\omega + \varphi)} (1 - e^{-i\omega}),$$

так и сумма

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k = e^{i\varphi} \frac{e^{in\omega} - 1}{e^{i\omega} - 1}.$$

Эти два выражения, очевидно, связаны линейным соотношением

$$x_n = x_{n-1} + AS_{n-1} + B, \quad (14)$$

в котором свободный член B тоже является комплексным, то есть и от него тоже надо будет сохранить лишь действительную часть. Подставим приращение и сумму в это соотношение

$$e^{i(n\omega + \varphi)} (1 - e^{-i\omega}) = Ae^{i\varphi} \frac{e^{in\omega} - 1}{e^{i\omega} - 1} + B$$

и, соответственно приравняв коэффициенты при членах, зависящих и не зависящих от n , находим параметры

$$A = (1 - e^{-i\omega}) (e^{i\omega} - 1) = 2(\cos \omega - 1) \leq 0,$$

$$B = \frac{Ae^{i\varphi}}{e^{i\omega} - 1} = e^{i\varphi} (1 - e^{-i\omega}) \Big|_{Re} = \cos \varphi - \cos(\varphi - \omega).$$

Таким образом, при конкретных значениях A и B мы имеем отображение вида (14). Для него множество образов любой точки образует эллипс в координатах (x, y) при иррациональном отношении ω/π .

Обратимся теперь к фазовым портретам (рис. 3 для отображения (3) и рис. 4–7 для отображения (5)). В них видна большая структура, в которой траектории точек близки к эллиптическим.

Если бы мы имели динамическую систему, для которой изучаемое отображение было бы сечением Пуанкаре, то этот тип упорядоченности внутри регулярных островов соответствовал бы инвариантным торам. В приложении к смене элит это означает, что смена типа элиты «отличающейся и по числу пассионариев, и по объему производимого продукта», о которой говорит теория элит, не происходит.

Однако при других начальных данных (R, q) ситуация оказывается принципиально иной, именно той, о которой говорит теория элит. В этом случае около « l -циклов» в диссипативной системе возникают « l -торы». Каждый из этих l -островков может быть сопоставлен своему типу элиты. В следующем поколении происходит переход к другому типу. При соответствующих значениях параметров модель описывает именно эту картину, для описания которой она и создавалась. Следует отметить, что, меняя параметры, мы можем изменить число «островков», определяющих динамику элиты. Кроме того, мы не рассматриваем задачи управления. Однако результаты расчета показывают, что, сократив число «пассионариев» или продукт общества (а в некоторых случаях и увеличив его), можно изменить временную динамику эволюции элит, имея в виду либо стабильность, либо разнообразие, позволяющее более эффективно учитывать происходящие перемены.

Однако консервативная модель существенно богаче диссипативной. В ней есть ещё две важные особенности. Первая связана с тем, что в ней существуют непериодические, хаотические траектории, тогда как в диссипативной модели хаоса авторам обнаружить не удалось. Пример показан на рис. 3 для $a = 5.8$, $b = 0.2$.

Следует отметить, что в рассматриваемой модели смены элит есть несколько непересекающихся «областей хаоса», расположенных в разных частях фазового пространства, которые могут существенно отличаться своими характеристиками.

Замечательной чертой наблюдаемого стохастического моря является его фрактальный характер. На рис. 3 видно, что оно оказывается пронизано островками упорядоченности все меньшего размера и большого периода. В рамках модели это означает, что в зависимости от начальных данных есть более и менее вероятные варианты квазипериодической элитной динамики.

Динамика и представление об островах становятся гораздо яснее в координатах (x, y) (рис. 4). Здесь видно наличие системы островов, характеризующих разные циклы смены элит. Очень важным параметром является величина a , характеризующая активность пассионарного класса.

Фазовые траектории для разных значений a представлены на рис. 4–7. Чем выше эта активность, тем больше область простейшего (близкого к тому, которое есть в линейной системе) режима смены элит. Чем меньше a , тем сложнее и длиннее циклы смены элит.

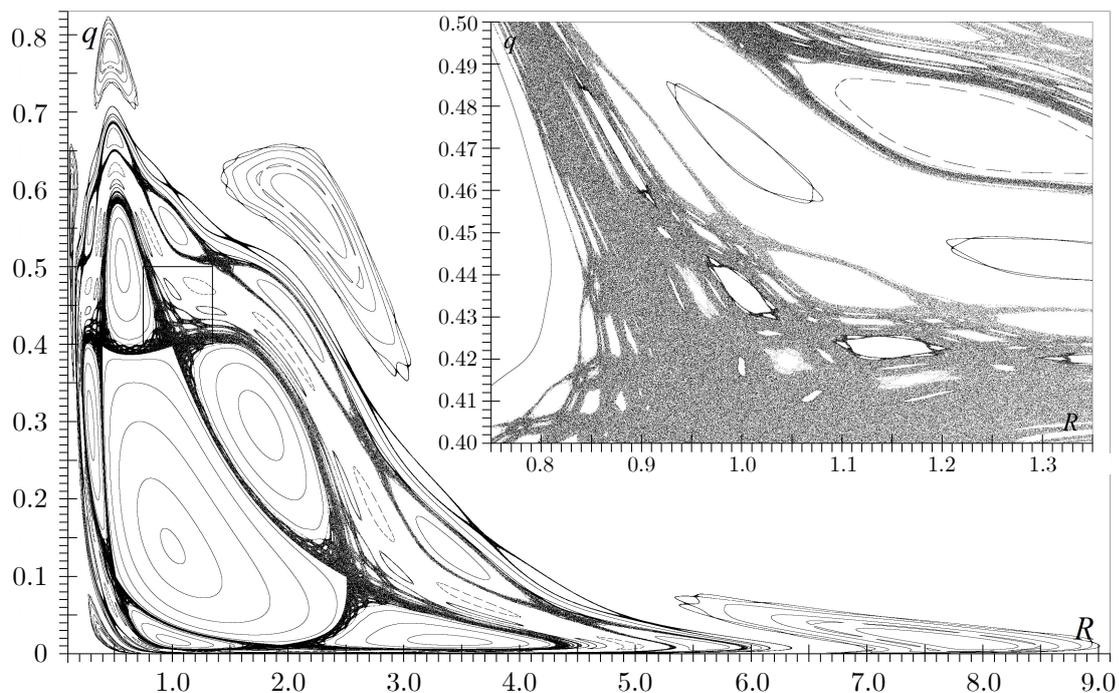


Рис. 3. Траектории различных начальных точек отображения (3) при $a = 5.8$, $b = 0.2$ в координатах (R, q) . Одни начальные данные рождают квазипериодическое движение вокруг неподвижных точек (ему соответствуют замкнутые линии), другие — квазипериодическое движение вокруг циклов (ему соответствуют наборы замкнутых линий), а третьи — хаотическое движение (ему соответствуют шлейфы точек). На врезке увеличен выделенный фрагмент хаотической области (при этом число итераций увеличено с 500 тыс. до 5 млн). Обратим внимание, что находящиеся рядом с ним траектории оказались при увеличении не замкнутыми линиями, а тоже хаотическими областями, что следует из самопересечения

Fig. 3. Trajectories of different initial points of mapping (3) for $a = 5.8$, $b = 0.2$ in coordinates (R, q) . sets of closed lines), and the third — chaotic movement (it corresponds to trails of points). The inset shows a zoomed-in fragment of a chaotic region. Note that the trajectories next to it turned out to be not closed lines when magnified, but also chaotic regions, which follows from self-intersection

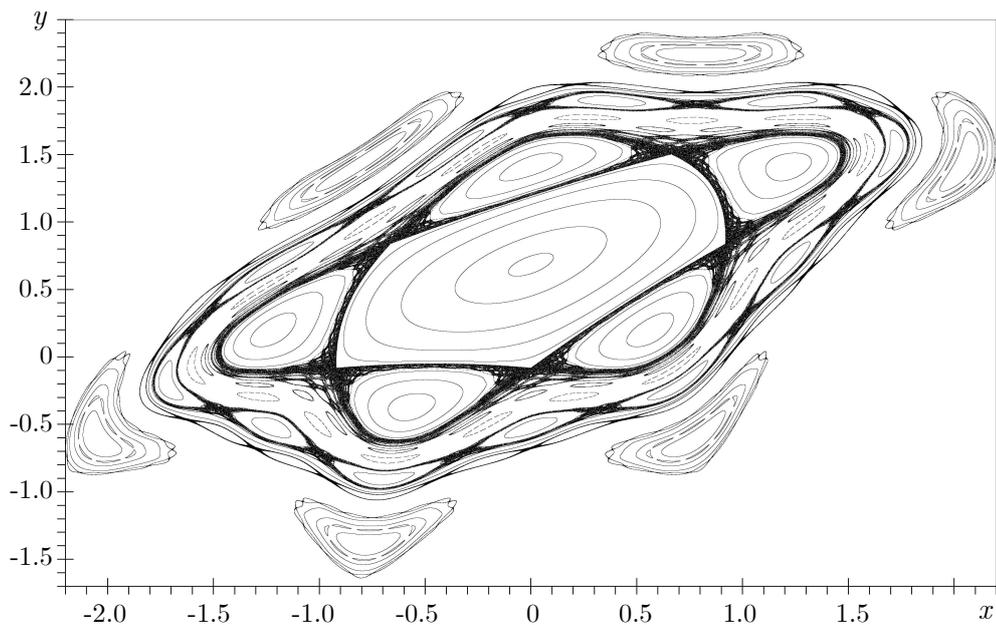


Рис. 4. Траектории с рис. 3 в координатах (x, y) . Обратим внимание на наличие основной большой области, где не происходит эволюции поколений, на большой цикл порядка 5, где такие перемены происходят, а также на многообразие малых циклов самых разных порядков

Fig. 4. Trajectories from fig. 3 in coordinates (x, y) . Let us pay attention to the presence of the main large area where there is no evolution of generations, to the large cycle of order 5, where such changes occur, as well as to the variety of small cycles of various orders

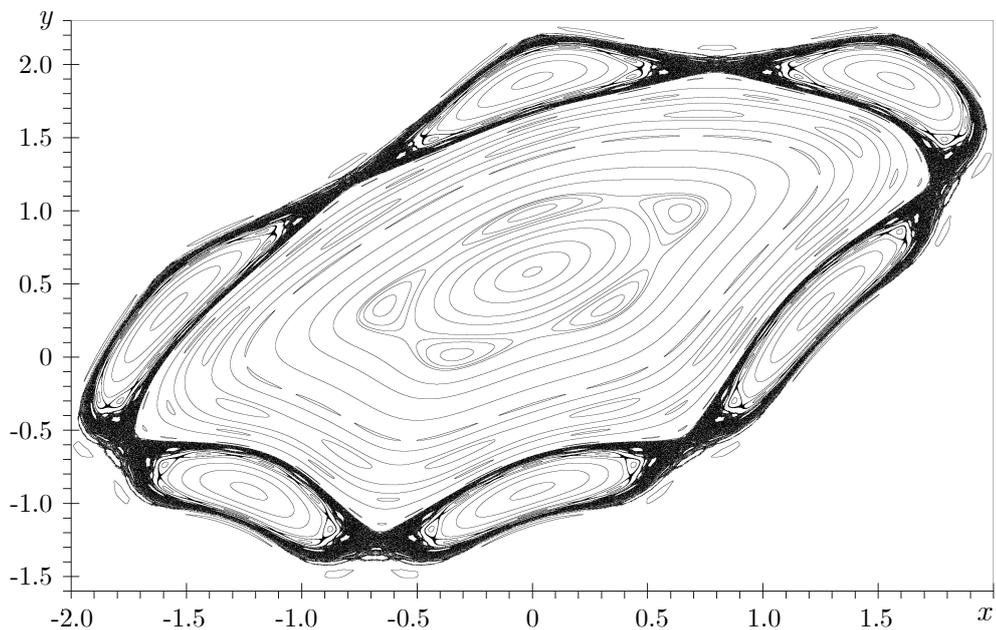


Рис. 5. Траектории различных начальных точек отображения (3) в координатах (x, y) для $a = 4.8$, $b = 0.2$. Этот случай отображает ситуацию, в которой активность пассионарного слоя снижена. Размер областей циклов изменился, но в целом структура осталась той же

Fig. 5. Trajectories of different starting points of the mapping (3), for $a = 4.8$, $b = 0.2$. This case reflects a situation in which the activity of the passional layer is reduced. The size of the loop areas has changed, but the overall structure remains the same

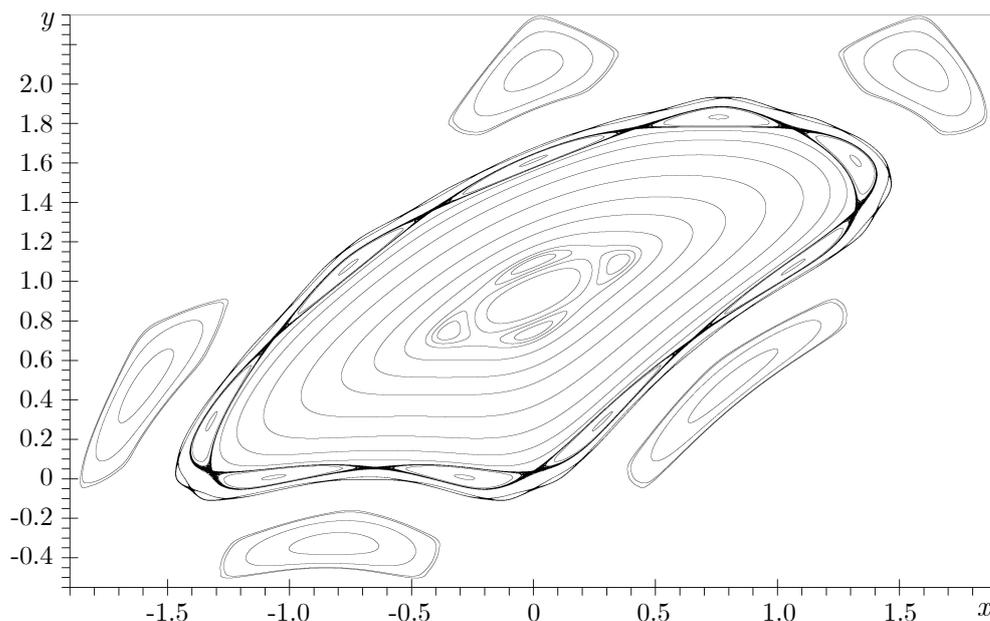


Рис. 6. Траектории различных начальных точек отображения (3) в координатах (x, y) для $a = 10, b = 0.2$, что соответствует высокой активности пассионарного класса. Области, в которых возможны квазипериодические циклы смены элит или квазипериодический режим, занимают много меньше места в фазовом пространстве

Fig. 6. Trajectories of different starting points of the mapping (3), for $a = 10, b = 0.2$, which corresponds to the high activity of the passionate class. Areas in which quasi-periodic cycles of elite change or a quasi-periodic regime are possible occupy much less space in the phase space

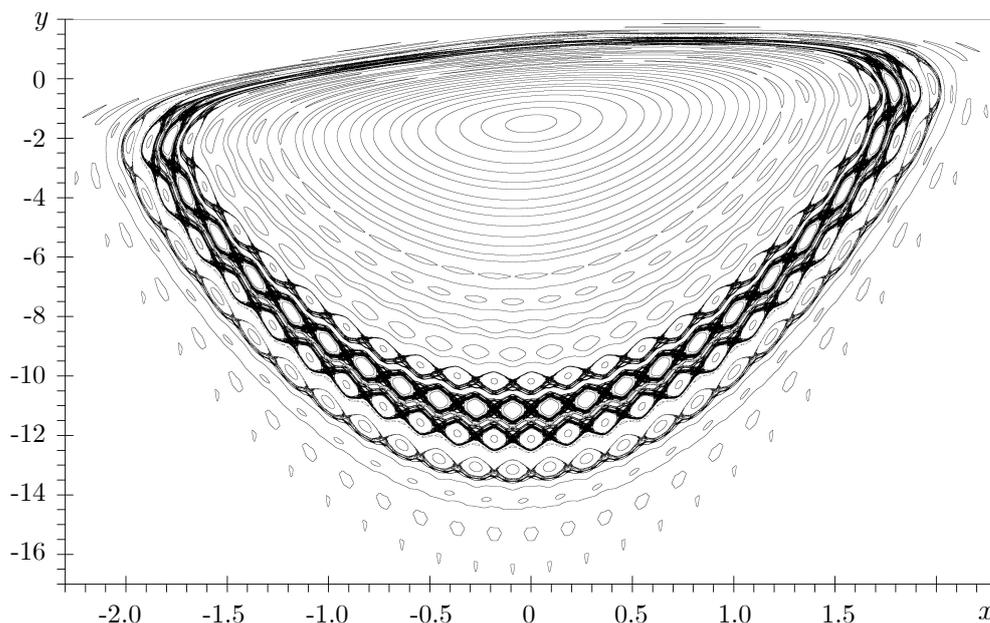


Рис. 7. Траектории различных начальных точек отображения (3) в координатах (x, y) для $a = 1, b = 0.2$, что соответствует низкой активности креативного класса. Виден качественный эффект — наличие большого количества траекторий, соответствующих большим циклам, а также — изменение величины q практически от 0 до 1

Fig. 7. Trajectories of different starting points of the mapping (3), for $a = 1, b = 0.2$, which corresponds to a low activity of the creative class. A qualitative effect is seen — the presence of a large number of trajectories corresponding to large cycles, as well as — a change in the value of q practically from 0 to 1

Вторая интересная особенность связана с наличием у модели области, где ее поведение неустойчиво (рис. 8).

Пусть, например, $R \gg 1$ и $q \ll 1$, то есть $x > 0$ и $y > 0$. При этом x убывает, пока выполнено $f(y) < 0$, а y возрастает. На каком-то шаге x становится отрицательным и y тоже начинает убывать. Это приводит к тому, что становится $f(y) > 0$, что приводит к дальнейшему возрастанию x , после перехода которого через 0 начинает возрастать и y . И всё повторяется. Важно, что приращения, которые получают эти переменные, — большие числа, из-за чего x за небольшое число шагов (чаще всего за 1) проскакивает мимо 0, что ведет к переключению между случаями $q \ll 1$ и $1 - q \gg 1$ (см. рис. 7). Аналогичным образом, y быстро проскакивает через точку смены знака $f(y)$, чем переключаются случаи $R \gg 1$ и $R \ll 1$. Другими словами, величина R в этой модели может неограниченно возрастать.

Такая динамика имеет свою интерпретацию в рамках теории элит. Она описывает революционную ситуацию, которую отражает пословица: «Не было ни гроша, да вдруг алтын». При низком уровне общественного продукта и почти полном отсутствии элиты значительные успехи приводят к тому, что «пассионариями становятся почти все». Очевидно, здесь следует учитывать ограничивающие факторы, — пределы использования применяемых технологий (1) или появление большого количества «гармоников» в терминах Л. Н. Гумилёва, стремящихся сочетать личные и общественные интересы. Рассматриваемая модель их не описывает.

Таким образом, исследование консервативной модели показывает, что она обладает мультистабильностью, — в зависимости от начальных данных (R_0, q_0) она может описывать и стабильные (без качественных изменений), и квазипериодические, и хаотические режимы смены элит рассматриваемого общества.

Модель обладает чувствительностью по отношению к параметрам. Наличие островов упорядоченности в хаотическом море означает возможность перехода от хаотических к квазипе-

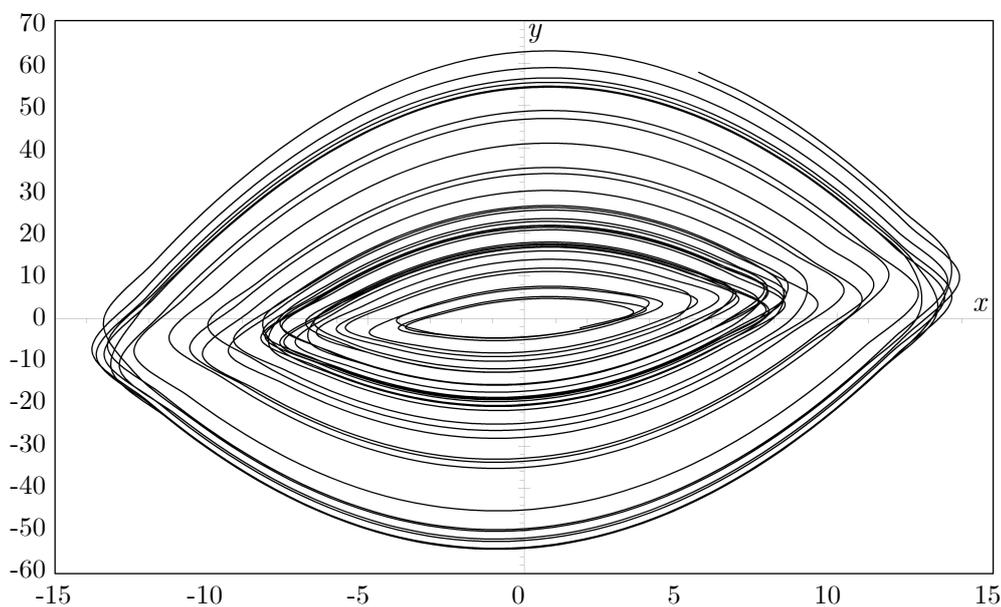


Рис. 8. Динамика траектории, уходящей на бесконечность. Здесь $a = 5.8$, $b = 0.2$, $R_0 = 6$, $q_0 = 0.9$. Такая циклическая динамика соответствует очень быстрым переходам q между значениями очень близкими то к 0, то к 1, а R — между очень большими и малыми значениями. Движение происходит в положительном направлении (против часовой стрелки)

Fig. 8. Dynamics of a trajectory going to infinity. Here $a = 5.8$, $b = 0.2$, $R_0 = 6$, $q_0 = 0.9$. Such cyclic dynamics corresponds to fluctuations q between values very close to 0, then to 1, and R — between very large and small values. The movement is in the positive direction (counterclockwise)

риодическим режимам смены элиты при сколь угодно малом изменении параметров. Последнее может рассматриваться как один из недостатков исследованной модели.

Вместе с тем, такая динамика прекрасно соответствует представлениям многих исследователей и философов об уникальности, неповторимости многих исторических траекторий и происходящих событий.

5. Система с шумом

Принципиальной с точки зрения моделирования является наблюдаемость предсказанных эффектов. Негрубые системы, обладающие чувствительной зависимостью от входящих параметров, как правило, этим свойством не обладают. Малые изменения параметров могут приводить к качественному изменению траектории. Тем не менее у теории поколений есть ряд серьезных подтверждений. С чем же они связаны?

Для социальных систем характерно наличие многих случайных факторов при переходе к третьему «повседневному» масштабу времени, введенному Ф. Броделем [1]. Их естественно учесть, введя малый случайный шум в уравнение, описывающее общественный продукт

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n(aq_n + b) + \varepsilon_n, \\ q_{n+1} &= q_n^{R_{n+1}}. \end{aligned}$$

В качестве параметра для простоты можно выбирать ε_n равномерно распределенной на интервале $[-\varepsilon, +\varepsilon]$. Пример поведения системы с шумом показан на рис. 9.

Однако здесь наблюдается другой качественный эффект. Существенными являются не только начальные данные и уровень шума, но и N — длина выборки, на которой мы анализируем модель, и конкретная последовательность псевдослучайных чисел, определяющих ε_n . На рис. 9 видно, что в течение длительного времени последовательность (x_n, y_n) может быть близка к циклической.

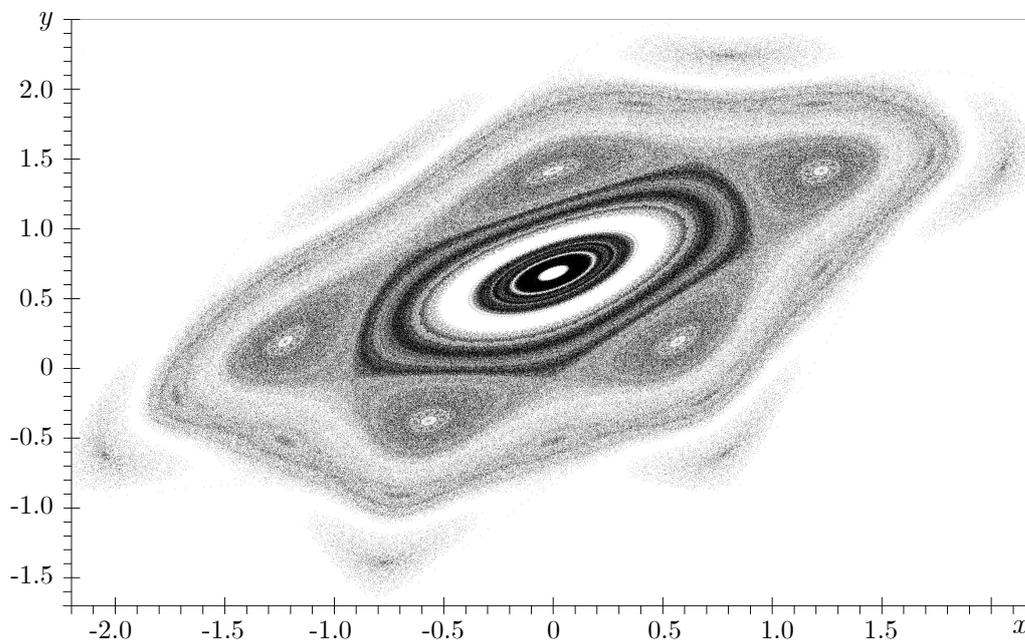


Рис. 9. Картина в координатах (x, y) для системы с шумом. Здесь $a = 5.8$, $b = 0.2$, $N = 10^5$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Fig. 9. Picture in coordinates (x, y) for a system with noise. Here $a = 5.8$, $b = 0.2$, $N = 10^5$, $\varepsilon = 10^{-3}$

На больших характерных временах она может оказаться близка к хаотической траектории. На еще больших — могут возникнуть неограниченные решения. Как правило, чем больше уровень шума, тем из большей области начальных данных траектория уходит на бесконечность. Другими словами, в этой модели есть своеобразный горизонт прогноза — на небольших временах смену элит можно предсказать, несмотря на шум. На больших — решающей становится последовательность случайностей, с которой сталкивается общество.

6. Обсуждение и связь с концепциями истории и социальной динамики

Революции готовят гении, делают романтики, а её плодами пользуются проходимцы.

О. Бисмарк

История и социальная динамика складывается в результате взаимодействия множества акторов, участников локальных взаимодействий, наделённых психикой, сознанием, имеющих собственные локальные цели и интересы. Из этих многочисленных контактов состоит эволюционный событийный исторический поток социума в целом, и каждой его социальной подсистемы в отдельности. Общество самоорганизуется. В нём постоянно возникают и разрушаются различные институциональные и идеологические структуры. Эти макросоциальные явления О. Г. Бахтияров обозначил термином Большие Процессы [24]. Он привёл аналогию с метаморфозом гусеницы, когда выполнившая свои функции гусеница окукливается и вновь превращается в аморфную клеточную массу, из которой дифференцируется новое существо. При этом отдельные клетки перестраиваются под действием локальных причин и не осознают свою вовлеченность в большой процесс в целом. Элементы социальных систем — люди, хоть и наделены психикой, разумом и сознанием, но также вовлечены в локальные взаимодействия и в большинстве своём не осознают, что являются клетками, формирующими большой исторический процесс в момент его свершения. Некоторая минимально целостная аналитика, как правило, появляется позже отдельной произошедшей фазы большого процесса. Тем не менее научными средствами можно попытаться осуществить некоторый прорыв к сути происходящих макросоциальных всплесков и циклов. Одной из таких попыток является представленная работа. Использование математического аппарата в данном случае не может быть направлено на прогнозирование течения большого процесса по той простой причине, что он, будучи темпоральным кооперативным самоорганизационным явлением, свершается, а его конкретный сценарий предельно чувствителен к начальным и текущим значениям переменных и параметров. Его конкретный ход не предопределён и, таким образом, в отношении этих процессов теряет смысл само понятие количественного прогноза. Гораздо более важным назначением математического моделирования в данном случае выступает понимание механизма происходящего явления и определения точек воздействия на большой процесс.

Диссипативная и консервативная модели, по сути, отражают два принципиально разных взгляда на описание исторического процесса. В физике в течение многих лет боролись концепции близкодействия и дальнодействия. Этот процесс сейчас происходит и в математической истории и социодинамике.

Диссипативная модель исходит из того, что детали начальных данных будут забыты. В теории элит также стремятся мыслить в рамках трех поколений. Внуки могут исправить ошибки, которые сделали деды. Этой точки зрения придерживаются многие историки, а также исследователи, стремящиеся использовать идеи близкодействия в этой области [1–4]. С их точки зрения, бесполезно и не нужно сетовать на реформы Петра или выбор религии Владимиром, рассматривая сегодняшние геополитические и геоэкономические проблемы. Эти события следует трактовать как начальные данные для системы, описывающей историческую траекторию.

Действия нынешнего и нескольких следующих поколений могут изменить положение дел. Трудности можно рассматривать и как непреодолимый барьер, и как возможность для желаемых перемен.

«Дальнодействие» в истории связано с рядом религиозных культов, с астрологией, с теориями ряда историков, например, выделяющих 100-летние, 400-летние и ещё более длинные циклы исторического развития. Обзор таких взглядов дан в книге [17]. Этот подход повторяет во многом взгляд современной теоретической физики, в основе которой лежат представления о симметрии, а значит, о законах сохранения. В этом контексте игнорировать деятельность Петра и Владимира, объясняя сегодняшние события, нельзя. Действия этих людей определили нынешние реалии. Из этого во многом исходит альтернативная история.

Проблема при таком подходе возникает в том, что, в отличие от физики, симметрии и законы сохранения для такого описания истории не предъявлены.

Исследование диссипативной системы с «отсеиванием части элиты» с шумом, исходящей из представлений Ф. Броделя об иерархии исторических времен, показывает, что суждение о соперничестве «молекулярного» и «космического» человека в развитии общества, представления о цикличности смены элит, рассматриваемые социологическими теориями, а также возможность «исторического хаоса» хорошо описываются исследованной моделью. Замечательной особенностью рассмотренной модели является то, что эффект «смены элит» на определенных начальных данных описывается и в диссипативном, и в гамильтоновом варианте.

Важным и интересным отличием от большинства исследованных гамильтоновых систем является наличие неограниченных колебательных решений. В теории режимов с обострением показывается, что такие траектории могут быть отражением, промежуточной асимптотикой многих процессов в системах с сильной положительной обратной связью [25]. Здесь, вероятно, на части траектории описывается социально-экономическая неустойчивость, известная как «сингапурское чудо» [26]. Жесткий отбор и назначение на ключевые должности лучших, оценка не процесса, а результата работы привели в этой стране к большому экономическому эффекту. На части траектории в данной модели наблюдается схожая динамика, однако затем возникает кризис.

Другими словами, исследование модели показало, что она существенно сложнее и богаче, чем предполагалось в ряде гуманитарных теорий, описывающих динамику больших процессов, включающих смены элит.

Список литературы

1. *Бродель Ф.* Материальная цивилизация, экономика и капитализм XV–XVIII вв. Т. 1. Структуры повседневности: возможное и невозможное. М.: Издательство «Весь мир», 2006. 592 с.
2. *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего. М: Наука, 1997. 285 с.
3. *Бадалян Л. Г., Криворотов В. Ф.* История. Кризисы. Перспективы: Новый взгляд на прошлое и будущее. М.: URSS, 2019. 288 с.
4. *Турчин П. В.* Историческая динамика: Как возникают и рушатся государства. На пути к теоретической истории. Изд. 3-е. М.: URSS, 2022. 366 с.
5. *Кондратьев Н. Д.* Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. Избранные труды. М.: Экономика, 2002. 767 с.
6. *Попова Е. П., Сагдеев Р. З.* Нелинейные модели динамо и изменения в характере солнечной цикличности // Материалы XIV ежегодной конференции «Физика плазмы в солнечной системе». 11–15 февраля 2019 г., Москва, Россия. М.: ИКИ РАН, 2019. С. 5.

7. *Ожиганова Е. М.* Теория поколений Н. Хоува и В. Штрауса. Возможности практического применения // Бизнес и образование в экономике знаний. 2015. № 1. С. 94–97.
8. *Strauss B., Strauss W., Howe N.* The History of America's Future, 1584 to 2069. New York: Morrow, 1991. 538 p.
9. *Гумилев Л. Н.* Этногенез и биосфера Земли. М.: АСТ: Астрель, 2006. 510 с.
10. *Шумпетер Й.* Капитализм, социализм и демократия. М.: Экономика, 1995. 540 с.
11. *Колесников А. В.* Инжиниринг сложных социальных систем в цифровом мире // Труды 1-й Международной конференции «Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности». 8–9 февраля 2018 г., Москва, Россия. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018. С. 81–87. DOI: 10.20948/future-2018-12.
12. *Колесников А. В.* Социодинамика цивилизационного кластера Союзного государства России и Беларуси: опыт применения метода цифровых протоконов на основе темпорального исчисления // Труды 3-й Международной конференции «Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности». 6–7 февраля 2020 г., Москва, Россия. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2020. С. 191–198. DOI: 10.20948/future-2020-16.
13. *Колесников А. В.* Нелинейная социодинамика конкурентных социотипов молекулярного и космического человека // Труды 4-й Международной конференции «Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности». 4–5 февраля 2021 г., Москва, Россия. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2021. С. 209–219. DOI: 10.20948/future-2021-19.
14. *Форрестер Д.* Мировая динамика. М.: ООО «Издательство АСТ»; СПб: Terra Fantastica, 2003. 379 с.
15. *Сиренко С. Н.* Опережающее педагогическое образование как инструмент управления будущим // Труды 4-й Международной конференции «Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности». 4–5 февраля 2021 г., Москва, Россия. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2021. С. 260–269. DOI: 10.20948/future-2021-22.
16. *Заславский Г. М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 296 с.
17. *Буданов В. Г.* Методология синергетики в постнеклассической науке и в образовании. Изд. 4. М.: URSS, 2017. 272 с.
18. *Тойнби А.* Постигание истории. М.: Айрис-Пресс, 2002. 640 с.
19. *Думас Х. С.* Теория КАМ: как это было. Краткое знакомство с содержанием, историей и значением классической теории Колмогорова–Арнольда–Мозера. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 440 с.
20. *Чернавский Д. С.* Синергетика и информация: Динамическая теория информации. М.: URSS, 2021. 304 с.
21. *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
22. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
23. *Meiss J. D.* Symplectic maps, variational principles, and transport // Rev. Mod. Phys. 1992. Vol. 64, no. 3. P. 796–848. DOI: 10.1103/RevModPhys.64.795.
24. *Бахтияров О. Г.* Большие Процессы и Аналитика [Электронный ресурс] // Аврора. 19.07.2021. Режим доступа: <https://aurora.network/articles/165-interv-ju/93038-bol-shie-protsessy-i-analitika> (дата обращения: 02.03.2022).
25. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. 544 с.
26. *Ли К. Ю.* Сингапурская история: 1965–2000 гг. Из третьего мира — в первый. М.: МГИМО-Университет, 2010. 656 с.

References

1. Braudel F. Civilization and Capitalism, 15th-18th Century. Vol. I. The Structure of Everyday Life. New York: Harper and Row; 1992. 624 p.
2. Kapitsa SP, Kurdyumov SP, Malinetskii GG. Synergetics and Future Forecasts. Moscow: Nauka; 1997. 285 p. (in Russian).
3. Badalyan LG, Krivorotov VF. History. Crises. Perspectives: A New Look at the Past and the Future. Moscow: URSS; 2019. 288 p. (in Russian).
4. Turchin P. Historical Dynamics: Why States Rise and Fall. Princeton: Princeton University Press; 2018. 264 p.
5. Kondratyev ND. Large Conjoint Cycles and Foresight Theory. Selected Works. Moscow: Ekonomika; 2002. 767 p. (in Russian).
6. Popova EP, Sagdeev RZ. Nonlinear dynamo models and changes in the nature of solar cyclicity. In: Proceedings of the XIV Annual Conference «Plasma Physics in the Solar System». 11–15 February 2019, Moscow, Russia. Moscow: Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences; 2019. P. 5 (in Russian).
7. Ozhiganova EM. The theory of generations by N. Hove and W. Strauss. Possibilities of practical application. Business and Education in the Knowledge Economy. 2015;(1):94–97 (in Russian).
8. Strauss B, Strauss W, Howe N. The History of America's Future, 1584 to 2069. New York: Morrow; 1991. 538 p.
9. Gumilev LN. Ethnogenesis and the Biosphere of Earth. Moscow: AST: Astrel; 2006. 510 p. (in Russian).
10. Schumpeter J. Capitalism, Socialism and Democracy. New York: Harper & Brothers; 1942. 431 p.
11. Kolesnikov AV. Engineering of complex social systems in the digital world. In: Proceedings of the 1st International Conference «Futurity Designing. Digital Reality Problems». 8–9 February 2018, Moscow, Russia. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics; 2018. P. 81–87 (in Russian). DOI: 10.20948/future-2018-12.
12. Kolesnikov AV. Sociodynamics of a civilizational cluster of the Union State of Russia and Belarus: The experience of applying the method of digital protoconstructs based on temporal calculus. In: Proceedings of the 3rd International Conference «Futurity Designing. Digital Reality Problems». 6–7 February 2020, Moscow, Russia. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics; 2020. P. 191–198 (in Russian). DOI: 10.20948/future-2020-16.
13. Kolesnikov AV. Nonlinear sociodynamics of competitive sociotypes of molecular and cosmic human. In: Proceedings 4th International Conference «Futurity Designing. Digital Reality Problems». 4–5 February 2021, Moscow, Russia. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics; 2021. P. 209–219 (in Russian). DOI: 10.20948/future-2021-19.
14. Forrester JW. World Dynamics. Cambridge: Wright-Allen Press; 1973. 144 p.
15. Sirenko SN. Forward thinking pedagogical education as a tool for managing the future. In: Proceedings of the 4th International Conference «Futurity Designing. Digital Reality Problems». 4–5 February 2021, Moscow, Russia. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics; 2021. P. 260–269 (in Russian). DOI: 10.20948/future-2021-22.
16. Zaslavsky GM. The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems. 2nd Edition. Singapore: World Scientific; 2007. 328 p. DOI: 10.1142/p507.
17. Budanov VG. Methodology of Synergetics in Post-Non-Classical Science and in Education. 4th Edition. Moscow: URSS; 2017. 272 p. (in Russian).
18. Toynbee AJ. A Study of History. Vol. 1: Abridgement of Volumes I–VI. Oxford: Oxford University Press; 1988. 630 p.

19. Dumas HS. The KAM Story: A Friendly Introduction to the Content, History, and Significance of Classical Kolmogorov–Arnold–Moser Theory. Singapore: World Scientific; 2014. 380 p. DOI: 10.1142/8955.
20. Chernavskii DS. Synergetics and Information: Dynamic Information Theory. Moscow: URSS; 2021. 304 p. (in Russian).
21. Katok AB, Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press; 1995. 824 p. DOI: 10.1017/CBO9780511809187.
22. Schuster HG, Just W. Deterministic Chaos: An Introduction. 4th, Revised and Enlarged Edition. New Jersey: Wiley; 2006. 312 p.
23. Meiss JD. Symplectic maps, variational principles, and transport. Rev. Mod. Phys. 1992;64(3): 796–848. DOI: 10.1103/RevModPhys.64.795.
24. Bakhtiyarov OG. Big Processes and Analytics [Electronic resource]. Aurora. 19.07.2021 (in Russian). Available from: <https://aurora.network/articles/165-interv-ju/93038-bol-shie-protsessy-i-analitika> (cited 2022 Feb 3).
25. Akhromeeva TS, Kurdyumov SP, Malinetskii GG, Samarskii AA. Nonstationary Structures and Diffusion Chaos. Moscow: Nauka; 1992. 544 p. (in Russian).
26. Lee KY. The Singapore Story: Memoirs of Lee Kuan Yew. 1st Edition. New Jersey: Prentice Hall; 1998. 680 p.

Колесников Андрей Витальевич — родился в Риге (1961), окончил Белорусский технологический институт (1984). После окончания вуза работал в лаборатории теоретической генетики Института генетики и цитологии АН БССР. Занимался проблемами эволюции. На основе исследований самоорганизации и хаоса в эволюционных процессах подготовил и защитил кандидатскую диссертацию (1998) по философским наукам (философские вопросы естествознания). В настоящее время работает в Институте философии НАН Беларуси, заведующий отделом философии информационных и когнитивных процессов. Автор и соавтор ряда монографий. Философ и междисциплинарный исследователь. Разрабатывает и широко использует модели в форме игр континуальных клеточных автоматов с нелинейными правилами перехода. Развивает идеи философского космизма во взаимосвязи с современной синергетикой, нелинейной динамикой и теорией хаоса.



220072, Республика Беларусь, Минск, улица Сурганова, д. 1, корп. 2
 Институт философии НАН Беларуси
 E-mail: kolesnikov@philosophy.by
 ORCID: 0000-0002-7620-0864
 AuthorID (eLibrary.Ru): 493074

Малинецкий Георгий Геннадьевич — родился в Уфе (1956). Окончил с отличием физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (1979). Доктор физико-математических наук (1990), профессор, заведующий отделом математического моделирования нелинейных процессов Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Один из ведущих специалистов в области нелинейной динамики, автор более 700 научных трудов, около 100 научно-популярных статей и книг, изданных в России и США. Создатель и руководитель специализации «Нелинейные процессы» в Московском физико-техническом институте, профессор Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана и Российского университета дружбы народов. Является вице-президентом Нанотехнологического общества России, действительным членом Академии военных наук РФ, членом Изборского клуба. Лауреат премии Правительства РФ в области образования (2002). В последние годы занимается мягким моделированием, системным анализом, прогнозом бедствий, катастроф и кризисных явлений на основе методов нелинейной динамики, а также теорией русел и джокеров, проблемами проектирования будущего.



Россия, 125047 Москва, Миусская площадь, д. 4
 Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
 E-mail: gmalin@spp.keldysh.ru
 AuthorID (eLibrary.Ru): 100438

Подлазов Андрей Викторович — родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). После окончания МФТИ работает в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (2001) в области теории самоорганизованной критичности и теории масштабно-инвариантных процессов. Автор монографий «Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика» [М.: Наука, 2000. 432 с.] (в соавторстве с В. А. Владимировым, Ю. Л. Воробьевым, Г. Г. Малинецким и др.) и «Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды» [Изд.3/ Синергетика: от прошлого к будущему. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 280 с.] (в соавторстве с Г. Г. Малинецким и А. Б. Потаповым). Опубликовал 60 научных статей по направлениям, указанным выше, а также по демографии, математической истории и вопросам развития системы образования.



Россия, 125047 Москва, Миусская площадь, д. 4
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: tiger@keldysh.ru
ORCID: 0000-0002-0328-3814
AuthorID (eLibrary.Ru): 9492

Сиренко Светлана Николаевна — окончила механико-математический факультет Белорусского государственного университета, специальность «Математика» (1998). Кандидат педагогических наук (2003), доцент (2007). Основные направления научных исследований: теория и практика междисциплинарной интеграции в высшем образовании; опережающая педагогическая подготовка студентов; развитие функциональной грамотности школьников; проблемы повышения качества педагогической подготовки в классическом и педагогическом университете; проблемы преподавания математики и информатики в высшей школе; информационные технологии в образовании; компьютерное моделирование поведения сложных человекомерных систем. Автор более 150 научных и научно-методических работ, из них — 7 пособий, в том числе электронный учебник, коллективная монография.



Республика Беларусь, 220030 Минск, ул. Советская, 18
Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка
E-mail: sirenka@bvspu.by
ORCID: 0000-0003-4089-1488
AuthorID (eLibrary.Ru): 663187



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4)

Научная статья
УДК 159.955.2:001.891.572

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-480-494
EDN: DIVYVT

Постулаты когнитивной теории мышления и их следствия

В. А. Антонец

Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского, Россия
Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия
E-mail: antonetsva@gmail.com

Поступила в редакцию 9.12.2021, принята к публикации 22.01.2022,
опубликована 1.08.2022

Аннотация. Цель работы — создание теоретической модели процесса мышления, рассматриваемого как совокупность операций по формированию когнитивных обобщений уровня категорий (концептов, понятий). Метод создания теоретической модели основан на подходе, используемом в естественных науках. Он предполагает выбор небольшого числа достоверных фактов, которые принимаются за истинные на основании их очевидности. На основе этих фактов, установленных в различных по содержанию научных дисциплинах, формулируются аксиомы предлагаемой теории. Далее из принятых аксиом логическим путем выводятся в виде следствий: а) уже известные результаты, которые могли быть получены в различных областях науки, в том числе и отличающихся по содержанию исследований, и в силу этого воспринимавшиеся ранее как не связанные между собой; б) предсказания новых связей и закономерностей в исследуемой области. Результаты работы состоят в том, что удалось предложить вариант постулативной динамической теории мышления, в которой основными переменными являются количества формируемых, утрачиваемых, осознанных и неосознанных субъектом концептов. Введенные постулаты и переменные позволили на настоящий момент рассмотреть два вида моделей. Балансные интегродифференциальные модели, описывающие накопление объема осознанных и неосознанных концептов, а также комбинаторные модели, описывающие взаимодействия концептов. **Заключение.** Предложенный вариант динамической модели мышления позволил построить разумные теоретические описания процесса спонтанного освоения языка детьми-билингвами в двуязычной среде и способности человека сравнивать между собой семантически разнородные объекты. Логическая схема подхода и используемые в нем представления позволили связать некоторые известные в психологии факты и явным образом компактно сформулировать различие структуры научных и художественных обобщений картины мира.

Ключевые слова: теория мышления, категории, множественность сознаний.

Благодарности. Работа профинансирована Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № 0030-2021-0014.

Для цитирования: Антонец В. А. Постулаты когнитивной теории мышления и их следствия // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 480–494. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-480-494. EDN: DIVYVT

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Postulates of the cognitive theory of thinking and their consequences

V. A. Antonets

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
Federal Research Center Institute of Applied Physics,
Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: antonetsva@gmail.com

Received 9.12.2021, accepted 22.01.2022, published 1.08.2022

Abstract. Purpose of the work is to create a theoretical model of the thinking process, considered as a set of operations for the formation of cognitive generalizations of the level of categories (concepts). Method for creating a theoretical model is based on the approach used in natural sciences. It involves the selection of a small number of reliable facts, which are accepted as true on the basis of their evidence. On the basis of these facts, established in various scientific disciplines, the axioms of the proposed theory are formulated. Further, from the accepted axioms, they are logically deduced in the form of consequences: a) already known results that could be obtained in various fields of science, including those differing in the content of research, and therefore previously perceived as not related to each other; b) predictions of new connections and patterns in the study area. Results of the work are that it was possible to propose a version of the postulate dynamic theory of thinking, in which the main variables are the number of concepts formed, lost, realized and unconscious by the subject. The introduced postulates and variables made it possible to consider two types of models at the moment. Balanced integrodifferential models that describe the accumulation of the volume of conscious and unconscious concepts, as well as combinatorial models that describe the interactions of concepts. Conclusion. The proposed version of the dynamic thinking model made it possible to construct reasonable theoretical descriptions of the process of spontaneous language acquisition by bilingual children in a bilingual environment and a person's ability to compare semantically heterogeneous objects with each other. The logical scheme of the approach and the concepts used in it made it possible to connect some facts known in psychology and in an explicitly compact formulation of the difference in the structure of scientific and artistic generalizations of the picture of the world.

Keywords: theory of thought, categories, plurality of consciousnesses.

Acknowledgements. This work was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment of the IAP RAS, project No. 0030-2021-0014.

For citation: Antonets VA. Postulates of the cognitive theory of thinking and their consequences. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4):480–494. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-480-494.

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение и постановка проблемы

Цель работы заключалась в том, чтобы по аналогии с тем, как это делается в естественных науках, предложить теоретическую модель мышления, основанную на логическом анализе небольшого количества избранных достоверных фактов из разных областей науки. На основе этих фактов формулируются утверждения, использованные в теории как аксиомы. Такая теория должна обладать двумя свойствами, которыми обычно обладают теории в естественных науках.

Во-первых, ее логическим следствием должно быть объяснение связи между известными фактами, которые ранее казались независимыми. То есть с точки зрения этой теории некоторое множества разрозненных фактов оказывается лишь проявлением или реализацией фундаментальных законов в конкретных условиях.

Скажем, теория тяготения объясняет и орбиты планет, и падение предметов на Землю, и не падение на нее Луны и искусственных спутников, и приливы океанов и морей, и неоднородное распределение вещества в видимой части Вселенной.

Следовательно, из введенных постулатов логическим путем, который и есть теория, должны быть получены объяснения некоторых уже известных свойства мышления.

Во-вторых, логическим следствием теории должны быть предсказания свойств и связей между изучаемыми объектами и процессами и даже предсказание существования еще не идентифицированных объектов и их свойств. Такое предсказание позволяет планировать новые исследования, результаты которых могут оказаться как согласующимися с моделью, так и ограничивающими область ее применения или вообще опровергающими ее.

Предлагаемая автором формальная модель мышления затрагивает исключительно когнитивные процессы. Она не включает в себя ни описания его нейронных механизмов, ни описания обеспечивающих его психофизиологических процессов, ни эволюционных механизмов его формирования. Она не рассматривает также никаких содержательных сторон когнитивной деятельности.

Модель рассматривает когнитивные процессы исключительно как совокупность операций, сознательно или бессознательно осуществляемых субъектом как акцептором, носителем, пользователем и создателем над осознанными или неосознанными знаниями. При этом знания понимаются как совокупность концептов, сформировавшихся при накоплении жизненного опыта и обучении. Так как когнитивные различия между человеком и, по крайней мере, высшими приматами не носят качественного характера [1], автор осознанно до тех пор, пока это возможно, использует термин «субъект», а не «человек».

Модель предполагает, что в каждый момент времени осознанные и неосознанные знания субъекта включают в себя:

- конечное число образов конкретных объектов, которые могут быть представлены, вообще говоря, модальностями, которых может и не быть у человека (см., например, [2]);
- конечное число обобщенных категорий или концептов, к которым субъект относит эти конкретные объекты;
- конечное число символических отображений концептов в коммуникационной системе.

Символические отображения концептов (язык) могут быть звуковыми (акустическая коммуникация и членораздельная устная речь), зрительными (жесты, картинки, знаки, буквы, слова), тактильными (азбука Брайля и т. п.).

Постулаты теории должны быть сформулированы так, чтобы обеспечить введение формальных переменных (величин) и определить математические операции над ними, которые позволили бы хотя бы частично описывать некоторые процессы когнитивной деятельности и логическим путем выводить следствия.

Каждой из введенных формальных переменных необходимо имя. Очевидно, для этого придется выбрать известные слова языка, которые в историческом процессе формирования и использования этого языка уже нагружены некоторыми смыслами. Поэтому могут возникнуть обычные для многих областей науки споры терминологического характера, а не по существу.

Пока же в неустоявшейся ситуации термины *обобщение*, *понятие*, *категория* и *концепт* автор будет считать тождественными. По смыслу они не обязательно должны совпадать с иными научными сущностями, исторически ранее обозначенными этими же словами.

1. Методологические замечания

1.1. Изменение принятой методологии исследования мышления. Традиционно исследованием мышления занимаются философы и психологи. Философами сформулированы различные современные постановки задач [3–5].

Психологами добыта и введена в научный оборот подавляющая часть эмпирических данных в области исследований мышления. Ими весьма тщательно проработаны вопросы постановки психологического эксперимента, включая этические аспекты [6]. Им принадлежит и основная часть определений и развитых понятий, вполне успешно используемых в разных видах практики.

Ими даже разработаны методы психологической манипуляции (управления) [7], создающие впечатление владения методами предсказаний.

Представителю других наук трудно достаточно полно освоить этот объемный научный задел психологической науки и включиться в решение проблемы мышления, которая в психологии обозначена как самая сложная проблема современной науки вообще. Однако есть и три обнадеживающих соображения.

Во-первых, не весь этот задел может потребоваться, так как в составе его заведомо содержатся тождественные с точки зрения будущей теории факты и связи.

Во-вторых, некоторые определения и понятия психологической науки о мышлении, введенные психологами за полтора–два века их профессиональной научной деятельности после обозначения границы с философией, могут оказаться симптоматическими, то есть не общими, не существенными для теории. Некоторые же могут оказаться и вовсе ошибочными. Поэтому, возможно, следует при построении теории не придерживаться непременно этих определений и понятий, а модифицировать их, наполнять иным содержанием или даже отвергнуть. По крайней мере, таков методологический опыт физики в отношении таких фундаментальных понятий, как теплород, эфир и др.

В-третьих, для решения проблемы в этом арсенале может не хватать знаний из других наук. То есть в рамках канонической психологии, слабо владеющей формализованными методами обобщения знаний, проблема может оказаться неразрешимой. Поэтому многие специалисты признают необходимость междисциплинарного подхода в таких делах [8].

1.2. О терминологии и интерпретации. Термин «мышление» автор употребляет условно лишь для обозначения области моделирования. Уточнение содержания термина, возможно, произойдет по мере развития и приложения подхода к конкретным задачам. Такая ситуация известна, например, в физике. При создании квантовой механики потребовалось более 25 лет, чтобы разработать вероятностное представление о волновой функции, уравнения для которой уже были сформулированы [9–12].

То же можно отнести и к использованию термина «сознание». Тем не менее, благодаря сформулированному подходу [13] и использованию явно выделенной наблюдаемой — «количество категорий», используемых субъектом в процессе мышления, — удастся ввести количественные переменные, характеризующие мышление как некоторую совокупность операций на множестве категорий (концептов).

1.3. Методология карикатур. Первый шаг, который придется сделать — это попытаться модифицировать методологический подход так, чтобы он вмещал в себя основанные на фактах постулаты, логические следствия принятых постулатов, а также гипотезы, допускающие экспериментальную проверку.

При этом автор будет придерживаться рекомендации [14] и рассматривать не слишком сложные модели. Они, подобно карикатурам, не дадут деталей, но дадут видение. Известному физика Я. И. Френкелю, автору теории расширяющейся Вселенной, принадлежат слова: «Физик-теоретик ... подобен художнику-карикуристу, который должен воспроизвести оригинал не во всех деталях, подобно фотографическому аппарату, но упростить и схематизировать его...» (цит. по [15]).

Поэтому мы займем такую генеральную позицию: машина мышления не слишком сложна, но ее трудно разглядеть из-за множества режимов и разнообразия содержания ее работы, которые, собственно, и есть проявления психики.

Например, трудно представить человека, который не понимает, как устроен автомобиль. Минимально — это повозка с колесами, мотор, рулевое управление и тормоз. Дальше идут тысячи необходимых и не очень необходимых деталей, которые обеспечивают работу всего этого

хозяйства и приспособливают к определенным условиям и нуждам. Но если Вы начнете все их рассматривать, то тогда уж точно не будете знать, как устроен автомобиль!

Кроме этого, в нашей методологии мы не будем противопоставлять естественный и искусственный интеллект, а наоборот, ориентироваться на наличие общих черт.

2. Основные постулаты, мотивы их выбора и прямые следствия

Центральными постулатами предлагаемой когнитивной модели мышления являются четыре утверждения, сформулированные автором ранее [13].

2.1. Постулат № 1 о спонтанном формировании обобщений. *Формирование основных обобщений в форме категорий (концептов), которыми субъект оперирует в своей когнитивной деятельности, может происходить спонтанно без прямого участия сознания и без мотивации в процессе накопления жизненного опыта и восприятия объектов окружающего мира.*

Доказательство такой возможности было продемонстрировано в работе [16]. В эксперименте сеть из 16 000 компьютерных процессоров, подключенная к сети Интернет, обработала около 10 миллионов цифровых изображений, взятых на сервисе YouTube, и самостоятельно обучила себя распознавать изображения кошек. Она без учителя и поощрений смоделировала обобщенное изображение кошки. Руководитель эксперимента Джефф Дин отметил: «Мы никогда не говорили сети в процессе тренировок: “Это кошка”. Таким образом, машина фактически сама изобрела для себя обобщенную концепцию (концепт, категорию, — В. А.) кошки» [17].

Из этого результата следуют три вывода.

Во-первых, какое бы определение мы ни давали способности «думать», сеть компьютеров [16] заведомо ею не обладает. Из этого действительно следует, что формирование обобщения «категория» может происходить спонтанно без участия сознания и явной мотивации. Из сказанного не следует, однако, что в формировании обобщений не может участвовать учитель.

Во-вторых, этот эксперимент доказывает, что для реализации хотя бы некоторых элементов когнитивной деятельности, в частности, обобщения, не требуется биологический нейронный субстрат.

В-третьих, в процессе эксперимента обучающаяся сеть имела дело не непосредственно с изображениями, а с их цифровыми кодами. Следовательно, ее способность спонтанно и без мотивации формировать концепты может распространяться не только на изображения, но и на иные модальности фиксации жизненного опыта — звуки, запахи, тактильные ощущения и др.

2.2. Постулат № 2 о номинировании категорий. *Понятие (категория, концепт), отражаемое лингвистически, возникает путем осознания (consciousness) и присвоения в той или иной символической системе имени уже готовому концепту (обобщению) и только после номинирования концепт поступает в оборот сознательной деятельности.*

Иначе говоря, словари любого из языков могут содержать лишь осознанные и номинированные категории объектов, действий и признаков. В противном случае словари просто не могли бы быть составлены.

В [13] этот постулат был включен автором в Постулат № 1. Однако показанная в [18–20] связь развития системы устной речи у детей с развитием у них систем концептуализации заставила выделить это утверждение как отдельное.

2.3. Промежуточные следствия и выводы из постулатов № 1 и № 2.

2.3.1. Из Постулатов № 1 и № 2 следует, что когнитивные процессы обобщения информации, получаемой при накоплении субъектом жизненного опыта, и осознания и присвоения имени концепту являются относительно независимыми. При этом, вопреки распространенным представлениям, первичным является обобщение.

Интересно, что более 100 лет назад В. М. Бехтерев фактически уже сформулировал постулаты № 1 и № 2 в работе «Что такое внушение?» [21]. В частности, он писал: «...кроме активного восприятия, многое из окружающего мы воспринимаем пассивно, без всякого участия нашего «я», когда внимание наше чем-либо занято, например при сосредоточении на какой-либо мысли, или когда внимание наше вследствие тех или других причин ослаблено, как это наблюдается, например, в состоянии рассеянности.

И в том, и в другом случае предмет восприятия не входит в сферу личного сознания, а проникает в другие области нашей психической сферы, которые мы можем назвать общим сознанием.

Это последнее является достаточно независимым от личного сознания, благодаря чему все, что входит в сферу общего сознания, не может быть нами по произволу введено в сферу личного сознания».

К обобщению типа «категория» способны не только люди, но и животные [1]. В частности, известно, что голуби способны сортировать изображения на содержащие и не содержащие в своем составе деревья любого вида. И если не признавать за животными способности к логическому мышлению, то приходится признавать, что происходящее спонтанно обобщение их жизненной практики и есть механизм формирования категорий. И нет оснований иначе думать о человеке, шимпанзе, бонобо и гориллах. Однако в отношении этих видов доказана их способность не только обобщать, но и номинировать обобщения.

Сказанное позволяет перейти к такому приближению, что субъекты когнитивной деятельности для ее реализации в разных пропорциях используют как осознанные номинированные концепты, так и неосознанные. При этом самой высокой способностью к осознанию и номинированию обладает вид *Homo sapiens*. Более низкой обладают высшие обезьяны. Еще меньше она у эволюционно более низких видов. Разумеется, и внутри популяции *Homo sapiens* способность к осознанию и номинированию имеет разный уровень [18] со всеми вытекающими отсюда следствиями. Автор надеется, что это высказывание не сочтут расистским.

2.3.2. В [13] совокупность областей *функционального* пространства когнитивной деятельности мозга, где формируются и хранятся обобщения (концепты), была определена автором как *cognitive loft* или когнитивный чердак, склад. Из постулатов № 1 и № 2 следует, что на когнитивном чердаке субъекта может храниться некоторое количество неосознанных обобщений, которые, однако, могут использоваться субъектом в ходе активных действий и при принятии решений.

Этот запас смотрится как неосознанный жизненный опыт. Если уж такой запас способна создавать сеть компьютеров, то очевидно, он есть не только у человека, но и у животных. Про человека мы знаем, что он может осознавать хотя бы часть своего жизненного опыта. Про животных мы этого твердо не знаем. Этот запас является хорошим кандидатом на то, чтобы быть «рабочим телом» *Системы 1* Д. Канемана, обеспечивающей быстрое принятие (интуитивных) решений [22].

2.3.3. Вне зависимости от способа попадания неосознанного обобщения на когнитивный чердак субъекта — путем ли накопления своего жизненного опыта, путем ли инъекции от собеседника — при осознании эти обобщения обладают для субъекта когнитивной деятельности эквивалентной новизной, и он воспринимает их как сделанные им самим. В. М. Бехтерев понимал и это: «...продукты общего сознания могут при известных условиях входить и в сферу личного сознания, причем источник их первоначального возникновения не всегда даже и распознается личным сознанием» [21].

В обыденной бытовой и профессиональной, в особенности, научной жизни это часто проявляется как споры о приоритете.

2.3.4. В процессе словесной коммуникации образы конкретных объектов могут отображаться/передаваться только в виде логического пересечения номинированных обобщенных категорий.

Вследствие этого речь обладает ограниченной точностью описания образов конкретных объектов. Даже технические термины, употребление которых основано на соглашении (конвенции) между профессионалами, хотя и сужают класс обозначаемых объектов, никогда не обозначают уникальный объект.

2.3.5. Когнитивные чердаки людей с разным социокультурным и историческим опытом могут иметь как сходные, так и различающиеся типы обобщений. Малый объем сходных концептов и большой объем различающихся концептов могут быть причинами появления коммуникативных барьеров между представителями различных страт общества, стран и культур.

В качестве примера приведем цитату из [23]: «...наш визуальный опыт не возникает из непосредственного контакта с реальностью, а формируется системой не прямых умозаключений. ...человек, живущий в “мире плотника”, то есть в такой культуре, где вещи по большей части создаются при помощи пилы и топора, привыкает трактовать острые и тупые углы, воспринимаемые нашей сетчаткой, как производные от прямоугольных объектов (на этом среди прочего основана условность изобразительной перспективы). Человек, выросший в культуре, где ...прямоугольных объектов гораздо меньше, воспринимает мир иначе и, в частности, не понимает условностей изобразительной перспективы...».

Указанное свойство обобщений является причиной возникновения трансляционных коммуникативных барьеров, проявляющихся в самых разных видах социальной деятельности от взаимодействия представителей различных страт общества до межкультурного взаимодействия стран и цивилизаций. На взгляд автора, предложенный контекст позволяет яснее увидеть тяжесть проблемы коммуникаций, и указывает на то, что ее решение в каждом конкретном случае должно начинаться с обмена ценностными представлениями [24].

2.4. Постулат № 3 об итерационном механизме формирования категорий. *На когнитивном чердаке возможны дальнейшие итерации обобщений из уже сформированных обобщений (концептов) и потока новой информации. В повторном обобщении могут участвовать как осознанные, так и неосознанные обобщения.*

Этот постулат означает, что обобщаемый до уровня концептов поток складывается из информации, поступающей не только из внешнего мира, но и из пула концептов, хранящихся на когнитивном чердаке. Возможно, при создании абстрактных теорий, представляющих высокий уровень обобщения, этот пул наиболее важен.

Напомню, упомянутая в [16] система занималась не обобщением изображений, как это делает человек, по его мнению, а обобщением кодов. Значит, обобщение типа «категория» тоже код.

У человека и животных уже на первом шаге внешние и внутренние рецепторы преобразуют физико-химические воздействия в потоки электрических и химических сигналов, которые далее проходят несколько итераций обработки.

Так как обобщение «категория» представляет собой код, и в этом смысле результат обобщения не отличается от результатов первичной обработки внешнего сенсорного потока, то, значит, повторные итерации обобщения возможны, хотя бы в принципе, и для обобщений.

Поэтому далее автор использует представление о том, что обобщения возникают двумя путями. Во-первых, за счет обобщения осознаваемой или не осознаваемой информации, получаемой индивидуумом извне в ходе накопления жизненного опыта и/или обучения. Во-вторых, за счет дальнейших итерационных операций над сформированными первичными обобщениями, что порождает новые концепты более высокого уровня.

В широком смысле слова можно считать жизненный опыт совокупностью спонтанно полученных обобщений (жизненный опыт в узком смысле слова) и результатов обучения. Одно из принципиальных различий накопления жизненного опыта и обучения в том, что для обучения необходима сильная мотивация.

2.5. Промежуточные следствия и выводы из постулатов № 1, № 2 и № 3.

2.5.1. По-видимому, работа по повторному обобщению хранящихся на когнитивном чердаке концептов так же, как и в случае первичного обобщения, может происходить спонтанно. Однако сознание каким-то образом стимулирует итерации обобщения, возможно имитируя напряжение, идущее от реального внешнего мира. Также оно производит отбор «удачных и неудачных» результатов итерационных обобщений. Это будем считать безусловным признаком «умения думать».

2.5.2. Повторные итерации естественных обобщений из разных сфер деятельности могут привести к возникновению виртуальных правдоподобных обобщений (химер), то есть к проявлению воображения, обеспечивающего творческий процесс развития техногенного, социального и художественного миров.

Первые археологически зарегистрированные художественные химеры имеют возраст около 40 тысяч лет, когда, по-видимому, мозг *Homo sapiens* и стал способен к «повторным итерациям» и воображению [25].

Вот как описывался механизм возникновения химер в курсе психологии Воронежской православной духовной семинарии (!) в середине 19-го века (!). «...Хотя творчество фантазии, как свободное преобразование представлений, не стесняется необходимостью строго следовать закону истины, однако ж, показываясь представлениями, взятыми из действительности, оно примыкает уже к миру действительному. Оно только расширяет действительность до правдоподобия и возможности... Фантазия может создать крылатую лошадь, но только тогда, когда мы уже имеем представление о лошади и крыльях...» [26]. В частности, в виртуальном мире может существовать полная свобода воли. В [27–29] приводится нейронная модель объединения двух концептов в единый.

2.5.3. Творческий акт совершается в виртуальном мире и лишь затем осознается и отделяется от автора как текст, изображение и др.

2.5.4. Связей между нейронами так много, что виртуальный мир воображения может оказаться больше, чем отраженная субъектом часть реального природного, социального и техногенного мира.

2.5.5. На когнитивном чердаке может происходить обобщение потоков информации от внутренних сенсоров, то есть формирование проприоцептивных (моторных) и вегетативных обобщений, обладающих всеми свойствами обобщений внешнего потока. В частности, пригодностью для участия во вторичных итерационных обобщениях, связывающих физическое и ментальное состояния индивидуума.

Если признавать, что проприоцептивные образы существуют, то спорт — это одна из форм умения думать, хотя тренировки позволяют сформировать стандартные движения в различных индивидуальных видах спорта и стандартные комбинации в индивидуальных и коллективных противоборствах.

2.6. Постулат № 4 о множественности систем сознания. *Человек обладает, как минимум, двумя относительно независимыми системами сознания.*

Аргументы и мотивы в пользу этого постулата состоят в следующем.

Мы не только осознаем окружающий мир и себя, но и осознаем, что умеем делать это. Это больше, чем пройти «зеркальный тест» Гэллапа на самоопознавание [30], используемый для оценки самосознания животных.

Как бы мы ни определяли сознание, его механизм основан на том же субстрате, что и механизм формирования обобщений типа «категория» — на использовании нейронной сети. Поэтому механизм сознания сам является кодом и работает с кодами. Только таким образом одно сознание и способно осознать наличие другого.

Так как нейронная сеть необыкновенно велика, то наличие в ней объема для размещения дополнительного механизма сознания не должно представляться невозможным.

2.7. Следствия постулатов № 1, № 2, № 3 и № 4.

2.7.1. Если есть осознание существования сознания, значит имеется структура, отражающая сознание. Так как сознание и отражающая его структура могут быть реализованы только на основе одинакового субстрата и сходной его организации, то они должны быть приблизительно равноправны. Значит мы имеем дело не с ситуацией «сознание — отражающая структура», а с ситуацией «сознание — сознание», то есть существованием как минимум двух примерно равноправных сознаний.

2.7.2. Вообще говоря, сознаний может быть и больше двух. По-видимому, существует динамический процесс взаимодействия сознаний, в разных ситуациях ведущий к преобладанию одного или другого.

2.7.3. Вообще говоря, каждое из сознаний может предпочитать разные выборки обобщений, хранящиеся и формирующиеся на когнитивном чердаке. Это может приводить к смене поведения человека при смене превалирующего сознания. Прайминг поведенческого порядка может быть связан с воздействием на конкурентную динамику сознаний.

2.7.4. Динамическое состояние, характеризующееся отсутствием превалирования одного из сознаний над другим, ведет к патологическому раздвоению.

2.7.5. Ситуация «сознание — сознание» делает возможным внутренний диалог, подобный диалогу между двумя людьми, когда «душа говорит с душой, а не с ушами» [31].

3. Введение формальных переменных

Опираясь на сказанное выше, мы можем выделить в каждый момент времени для каждого субъекта когнитивной деятельности три числовых характеристики.

Первая — число концептов C^M , сформированных при накоплении жизненного опыта и обучении. Та часть C^M , что относится к жизненному опыту, сформирована без мотивации. Обучение, разумеется, требует значительной мотивации, которой многим субъектам может и не хватать.

Вторая — число содержащихся в памяти актуальных (actual) концептов (обобщений), C^A , сформировавшихся вследствие жизненного опыта. Оно является разностью между числом сформированных (made) C^M и забытых (потерянных, lost) концептов C^L , которые являются подмножествами C^M , в силу их происхождения

$$C^A = C^M - C^L.$$

Отметим: часть концептов из C^A , вообще говоря, может быть осознанной (C^{A+}), часть — нет (C^{A-}).

Множество C^A содержит все концепты, которыми в каждый момент времени осознанно и/или неосознанно оперирует субъект при восприятии им окружающего и внутреннего миров, а также при принятии решений о персональных действиях и межсубъектных транзакциях.

Третья — число различающихся символических (symbols) отображений концептов C^S , которые, как упоминалось выше, могут быть звуковыми (акустическая коммуникация и членораздельная устная речь), зрительными (жесты, картинки, знаки, буквы, слова), тактильными (азбука Брайля и т. п.) и, вообще говоря, представлены иными модальностями, которых может и не быть у человека.

Далее будем считать, что Homo sapiens чемпион по величине C^S , у эволюционно низких животных C^S исчезающе мало, а у высших обезьян — в промежутке между человеком и ними.

Остановимся детальнее на человеке. В словаре любого назначения можно увидеть, что приведенные в нем слова обычно обозначают не конкретный объект из потока внешней информации, а служат для обозначения(номинирования) нескольких категорий объектов из C^M и, соответственно C^A и C^L . Поэтому справедливо неравенство:

$$C^S < C^A.$$

Каждому слову из C^S из словаря соответствует подмножество номинированных концептов из C^A . Каждое же содержательное высказывание представляет собой логически и грамматически упорядоченное подмножество из C^A , которому соответствует комбинация пересечений и объединений подмножеств из C^S . Так как $C^S < C^A$, то их отображение друг на друга не является взаимно однозначным. Это приводит к семантической неоднозначности и, как следствие, к взаимонепониманию субъектов. В устной речи за счет нескольких итераций общения эта неоднозначность иногда может быть преодолена. Результат прочтения письменной речи всегда является интерпретацией читающего. Составить однозначно понимаемый текст весьма трудно.

В согласии с [13] местом размещения множеств C^A и C^S является cognitive loft — когнитивный чердак.

4. Примеры применения предложенного подхода

4.1. Модель освоения речи в двуязычной среде. В соответствии с [18–20] предполагается, что освоение языка представляет собой связанные процессы освоения ребенком понятий об окружающем мире (концептов) и их номинирования (называния) в освоенных концептах. Этот процесс идет в конкурентной двуязычной среде, где наиболее важными параметрами являются мотивация и время пребывания в той или иной среде [32, 33].

$$\begin{aligned} \tau_{1S_1} \frac{dS_1}{dt} &= -\frac{\tau_{1S_1}}{\tau_{2S_1}} S_1 + F_0 [-T_1 + \gamma_{11} S_1 - \gamma_{12} S_2], \\ \tau_{2S_2} \frac{dS_2}{dt} &= -\frac{\tau_{1S_2}}{\tau_{2S_2}} S_2 + F_0 [-T_2 + \gamma_{21} S_1 - \gamma_{22} S_2]. \end{aligned}$$

Здесь τ_{1S_1} и τ_{1S_2} — характерные времена спонтанного обучения новым элементам первого (S_1) и второго (S_2) языков (обычно — дни, недели), а τ_{2S_1} и τ_{2S_2} — характерные времена разрушения доли элементов языков S_1 и S_2 или перевод их из активной рабочей памяти в пассивное «хранилище» (обычно — месяцы, годы); F_0 — нелинейные функции, носят ступенчатый характер с пороговыми значениями T_1 и T_2 для языков S_1 и S_2 , соответственно; γ_{ij} — коэффициенты влияния языка S_j на активацию освоения языка S_i . Анализ уравнений позволил найти условия и режимы доминирования одного из языков и установления истинного билингвизма [32, 33].

4.2. Модель сопоставления семантически разнородных объектов в транзакциях обмена. В работах [24, 34] предполагается, что концепт любого объекта представляет собой логическое пересечение (произведение) концептов, которые являются для него значимыми, возможно, не всегда осознаваемыми свойствами объекта. Также модель предполагает, что объект не может иметь некой абсолютной абстрактной ценности, а может иметь лишь ценность по отношению к другому объекту. То есть речь идет либо о транзакции обмена, либо о возможности утраты объекта, порождающей тот или иной ущерб. Будем считать, что при оценке субъект сознательно или бессознательно принимает во внимание лишь конечное количество характеристик объекта.

Известно [35], что человек обладает способностью количественной оценки субъективной значимости любого из признаков конкретного объекта. Тогда каждый из i сравниваемых объектов S_i может быть описан вектором значимости его свойств (признаков) $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im})$. Вектор может быть нормирован так, что $\|\mathbf{w}_i\| = 1$.

Затем, в соответствии с мнением субъекта, которое может быть как интуитивным, так и основанным на измерении или рассуждении, для каждого i -го объекта формируется вектор выраженности значимых для него свойств объекта $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{im})$. Он не может быть нормирован, так как субъективно оцениваемая выраженность характеристик объекта может быть выше или ниже требований или ожиданий. В результате может быть сформирована интегральная оценка q_i субъективной ценности рассматриваемого i -го объекта, выражаемая скалярным произведением: $q_i = (\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i)$.

Так возникает возможность сравнения между собой разнородных семантических объектов, например товаров в магазине. Так как q_i не зависит от номинаций значимых характеристик сравниваемых объектов, то обмену могут подлежать не только материальные, но и нематериальные объекты. Например, это может быть возмездная передача прав, компенсация материального и морального ущерба, взятка и пр.

С учетом того, что оценка q_i является субъективной, обоюдодыгодная сделка между субъектами А и В возможна только при условии одновременного соблюдения двух неравенств: $q_{AA} < q_{AB}$ и $q_{BB} < q_{BA}$. Здесь q_{AA} и q_{BB} — субъективные интегральные оценки участниками сделки «своих» объектов, а q_{AB} и q_{BA} — «чужих». В [24, 34] рассмотрена задача о транзакциях обмена корзинами, каждая из которых содержит множество объектов.

Заключение

1. Введение наблюдаемой — «количество категорий (концептов)», используемых субъектом в процессе мышления, позволяет описывать мышление как совокупность операций на множестве категорий. Это означает, что, в соответствии с канонами экспериментальной психологии [6], неэмпирическому вопросу о работе мышления сопоставлен эмпирический вопрос о динамике обобщений на уровне «категория (концепт)».
2. Это позволило получить не только очевидные, но и достаточно неожиданные выводы, которые помогут сформулировать новые задачи и новые интерпретации известных фактов. В частности, логическая схема подхода и используемая в нем идея наблюдаемой «категория (концепт)» позволили явным образом компактно сформулировать:
 - идею об осознанных и неосознанных «категориях (концептах)»;
 - различие структуры научных и художественных обобщений картины мира;
 - гипотезу о множественности сознаний.
3. Предложенный подход позволил в количественных переменных описать:
 - процесс спонтанного освоения языка билингвами в двуязычной среде как динамику множества «категорий»;
 - механизм сопоставления семантически разнородных объектов.

Список литературы

1. Зорина З. А., Смирнова А. А. О чем рассказали «говорящие» обезьяны: Способны ли высшие животные оперировать символами? М.: Языки Славянской Культуры (Studia naturalia), 2006. 424 с.
2. Nagel T. What is it like to be a bat? // The Philosophical Review. 1974. Vol. 83, no. 4. P. 435–450. DOI: 10.2307/2183914.
3. Гуссерль Э. Картезианские размышления. СПб.: Наука, 2001. 320 с.

4. *Chalmers D. J.* The Conscious Mind: In Search of a Fundamental Theory. Oxford: Oxford University Press, 1996. 432 p.
5. *Chalmers D. J.* Facing up to the problem of consciousness // *Journal of Consciousness Studies*. 1995. Vol. 2, no. 3. P. 200–219.
6. *Goodwin K. A., Goodwin C. J.* Research in Psychology: Methods and Design. 8th Edition. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons Inc., 2016. 480 p.
7. *Thaler R. H., Sunstein C. R.* Nudge: Improving Decisions about Health, Wealth, and Happiness. New Haven, Connecticut: Yale University Press, 2008. 312 p.
8. *Тагард П.* Междисциплинарность: торговые зоны в когнитивной науке // *Философско-литературный журнал «Логос»*. 2014. № 1(97). С. 35–60.
9. *Born M.* Statistical interpretation of quantum mechanics // *Science*. 1955. Vol. 122, no. 3172. P. 675–679.
10. *Heisenberg W.* Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen // *Zeitschrift für Physik*. 1925. Bd. 33, Nr. 1. S. 879–893. DOI: 10.1007/BF01328377.
11. *Schrödinger E.* Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung) // *Annalen der Physik*. 1926. Bd. 384, Nr. 4. S. 361–376. DOI: 10.1002/andp.19263840404.
12. *Born M.* Quantenmechanik der Stoßvorgänge // *Zeitschrift für Physik*. 1926. Bd. 38, Nr. 11–12. S. 803–827. DOI: 10.1007/BF01397184.
13. *Антонец В. А.* Постулаты теории мышления и их следствия. Часть 1 // В сб.: Труды VI Всероссийской конференции «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях — 2019». Нижний Новгород, 23–27 сентября 2019 года. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 2019. С. 34–37.
14. *Неймарк Ю. И.* Математическое моделирование как наука и искусство. 2-е изд., испр. и доп. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2010. 420 с.
15. *Филитов А. Т.* Многоликий солитон. Сер. Библиотечка «Квант». Вып. 48. М.: Наука, 1986. 222 с.
16. *Le Q. V., Ranzato M. A., Monga R., Devin M., Chen K., Corrado G. S., Dean J., Ng A. Y.* Building high-level features using large scale unsupervised learning // In: Proceedings of the 29th International Conference on Machine Learning. 26 June–1 July 2012, Edinburgh, Scotland, UK. Madison, WI, United States: Omnipress, 2012. P. 507–514.
17. *Markoff J.* How many computers to identify a cat? 16,000 [Electronic resource] // *The New York Times*. June 25, 2012. Available from: <https://www.nytimes.com/2012/06/26/technology/in-a-big-network-of-computers-evidence-of-machine-learning.html>.
18. *Вулф М.* Пруст и кальмар: Нейробиология чтения. М.: КоЛибри, 2020. 384 с.
19. *Ostler N.* Empires of the Word: A Language History of the World. New York: Harper Collins, 2005. 640 p.
20. *Pease D. M., Gleason J. B., Pan B. A.* Learning the meaning of words: Semantic development and beyond // In: Gleason J. B. (ed.) *The Development of Language*. 3rd ed. New York: Macmillan, 1993. P. 115–149.
21. *Бехтерев В. М.* Что такое внушение? // *Вестник психологии, криминальной антропологии и гипнотизма*. № 1. СПб., 1904. 144 с.
22. *Канеман Д.* Модели ограниченной рациональности: вклад психологии в поведенческую экономику // В сб.: *Компьютеры, мозг, познание: успехи когнитивных наук* / ред. Б. М. Величковский, В. Д. Соловьев. М.: Наука, 2008. С. 42–90.
23. *Herskovits M. J.* Man and his Works: The Science of Cultural Anthropology. New York: Alfred A. Knopf Inc., 1948. 678 p.
24. *Антонец В. А., Левчук И. В.* Субъективная оценка семантически разнородных объектов при транзакциях обмена // *Известия вузов. ПНД*. 2011. Т. 19, № 6. С. 75–82. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-75-82.
25. *Харари Ю. Н.* Sapiens. Краткая история человечества. М.: Синдбад, 2019. 520 с.

26. *Никитин И. С.* Дневник семинариста. М.: Советская Россия, 1976. 160 с.
27. *Цукерман В. Д., Харьбина З. С., Кулаков С. В.* Математическая модель пространственного кодирования в гиппокампальной формации. II. Нейродинамические корреляты ментальных траекторий и проблема принятия решений // Математическая биология и биоинформатика. 2014. Т. 9, № 1. С. 216–256. DOI: 10.17537/2014.9.216.
28. *Tsukerman V.D., Kulakov S.V.* A temporal ratio model of the episodic memory organization in the ECI-networks // Contemporary Engineering Sciences. 2015. Vol. 8, no. 19. P. 865–876. DOI: 10.12988/ces.2015.57215.
29. *Цукерман В. Д.* Что скрывает нейродинамика мозга? (Современные данные и модель) // В сб.: Труды VI Всероссийской конференции «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях – 2019». Нижний Новгород, 23–27 сентября 2019 года. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 2019. С. 222–225.
30. *Gallup Jr. G. G.* Chimpanzees: Self-Recognition // Science. 1970. Vol. 167, no. 3914. P. 86–87. DOI: 10.1126/science.167.3914.86.
31. *Casanova G.* Mémoires de J. Casanova de Seingalt, écrits par lui-même. Tome Premier. Garnier Frères, 1880. 532 p.
32. *Александрова Н. Ш., Антонец В. А., Нуйдель И. В., Шемагина О. В., Яхно В. Г.* Моделирование режимов спонтанного освоения нескольких языков как инструментов общения // В сб.: Труды VI Всероссийской конференции «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях – 2019». Нижний Новгород, 23–27 сентября 2019 года. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 2019. С. 27–30.
33. *Alexandrova N.S., Antonets V.A., Kuzenkov O.A., Nuidel I.V., Shemagina O.V., Yakhno V.G.* Bilingualism as an unstable state // In: Velichkovsky B. M., Balaban P. M., Ushakov V. L. (eds) Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics. Intercognsci 2020. Vol. 1358 of Advances in Intelligent Systems and Computing. Cham: Springer, 2021. P. 359–367. DOI: 10.1007/978-3-030-71637-0_41.
34. *Antonets V.A.* Simulation of intuitive evaluation of unlike semantic objects // В сб.: XXI Международная научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2019»: Часть 1. Москва, 07–11 октября 2019 года. М.: МФТИ, 2019. С. 141–149.
35. *Osgood C. E., Suci G. J., Tannenbaum P. H.* The Measurement of Meaning. Urbana: University of Illinois Press, 1957. 342 p.

References

1. Zorina ZA, Smirnova AA. What the «Talking» Monkeys Told About: Are Higher Animals Capable of Operating With Symbols? Moscow: Yazyki Slavyanskoy Kul'tury (Studia naturalia); 2006. 424 p. (in Russian).
2. Nagel T. What is it like to be a bat? The Philosophical Review. 1974;83(4):435–450. DOI: 10.2307/2183914.
3. Husserl E. Méditations Cartésiennes. Introduction à la phénoménologie. Paris: Armand Collin; 1931. 136 p. (in French).
4. Chalmers DJ. The Conscious Mind: In Search of a Fundamental Theory. Oxford: Oxford University Press; 1996. 432 p.
5. Chalmers DJ. Facing up to the problem of consciousness. Journal of Consciousness Studies. 1995;2(3):200–219.
6. Goodwin KA, Goodwin CJ. Research in Psychology: Methods and Design. 8th Edition. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons Inc.; 2016. 480 p.
7. Thaler RH, Sunstein CR. Nudge: Improving Decisions about Health, Wealth, and Happiness. New Haven, Connecticut: Yale University Press; 2008. 312 p.
8. Thagard P. Being interdisciplinary: Trading zones in cognitive science. In: Derry SJ, Schunn CD, Gernsbacher MA, editors. Interdisciplinary Collaboration: An Emerging Cognitive Science. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2005. P. 317–339.

9. Born M. Statistical interpretation of quantum mechanics. *Science*. 1955;122(3172):675–679.
10. Heisenberg W. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*. 1925;33(1):879–893 (in German). DOI: 10.1007/BF01328377.
11. Schrödinger E. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung). *Annalen der Physik*. 1926;384(4):361–376 (in German). DOI: 10.1002/andp.19263840404.
12. Born M. Quantenmechanik der Stoßvorgänge. *Zeitschrift für Physik*. 1926;38(11–12):803–827 (in German). DOI: 10.1007/BF01397184.
13. Antonets VA. The postulates of the theory of thinking and their consequences. Part 1. In: Proceedings of the VI All-Russian Conference «Nonlinear Dynamics in Cognitive Research — 2019». Nizhny Novgorod, 23–27 September 2019. Nizhny Novgorod: Institute of Applied Physics RAS; 2019. P. 34–37 (in Russian).
14. Neimark YI. *Mathematical Modeling as Science and Art*. 2nd edition. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Publishing; 2010. 420 p. (in Russian).
15. Filippov AT. Many-Sided Soliton. Ser. Library «Quantum». Vol. 48. Moscow: Nauka; 1986. 222 p. (in Russian).
16. Le QV, Ranzato MA, Monga R, Devin M, Chen K, Corrado GS, Dean J, Ng AY. Building high-level features using large scale unsupervised learning. In: Proceedings of the 29th International Conference on Machine Learning. 26 June–1 July 2012, Edinburgh, Scotland, UK. Madison, WI, United States: Omnipress; 2012. P. 507–514.
17. Markoff J. How many computers to identify a cat? 16,000 [Electronic resource]. *The New York Times*. June 25, 2012. Available from: <https://www.nytimes.com/2012/06/26/technology/in-a-big-network-of-computers-evidence-of-machine-learning.html>.
18. Wolf M. *Proust and the Squid: The Story and Science of the Reading Brain*. New York: Harper Perennial; 2008. 336 p.
19. Ostler N. *Empires of the Word: A Language History of the World*. New York: Harper Collins; 2005. 640 p.
20. Pease DM, Gleason JB, Pan BA. Learning the meaning of words: Semantic development and beyond. In: Gleason JB, editor. *The Development of Language*. 3rd ed. New York: Macmillan; 1993. P. 115–149.
21. Bekhterev VM. What is suggestion? In: *Bulletin of Psychology, Criminal Anthropology and Hypnotism*. No. 1. Saint Petersburg; 1904. 144 p. (in Russian).
22. Kahneman D. Maps of bounded rationality: Psychology for behavioral economics. *The American Economic Review*. 2003;93(5):1449–1475.
23. Herskovits MJ. *Man and his Works: The Science of Cultural Anthropology*. New York: Alfred A. Knopf Inc.; 1948. 678 p.
24. Antonets VA, Levchuk IV. Subjective evaluation of semantically unlike objects during exchange transactions. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2011;19(6):75–82 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-75-82.
25. Harari YN. *Sapiens. A Brief History of Humankind*. London: Harvill Secker; 2015. 443 p.
26. Nikitin IS. *Seminarist Diary*. Moscow: Sovetskaya Rossiya; 1976. 160 p. (in Russian).
27. Tsukerman VD, Kharybina ZS, Kulakov SV. A mathematical model of hippocampal spatial encoding. II. Neurodynamic correlates of mental trajectories and decision-making problem. *Mathematical Biology and Bioinformatics*. 2014;9(1):216–256 (in Russian). DOI: 10.17537/2014.9.216.
28. Tsukerman VD, Kulakov SV. A temporal ratio model of the episodic memory organization in the ECI-networks. *Contemporary Engineering Sciences*. 2015;8(19):865–876. DOI: 10.12988/ces.2015.57215.
29. Tsukerman VD. What does the neurodynamics of the brain hide? (Modern data and model). In: Proceedings of the VI All-Russian Conference «Nonlinear Dynamics in Cognitive Research —

- 2019». Nizhny Novgorod, 23–27 September 2019. Nizhny Novgorod: Institute of Applied Physics RAS; 2019. P. 222–225 (in Russian).
30. Gallup Jr GG. Chimpanzees: Self-Recognition. *Science*. 1970;167(3914):86–87. DOI: 10.1126/science.167.3914.86.
 31. Casanova G. Mémoires de J. Casanova de Seingalt, écrits par lui-même. Tome Premier. Garnier Frères; 1880. 532 p. (in French).
 32. Alexandrova NS, Antonets VA, Nuidel IV, Shemagina OV, Yakhno VG. Modeling the modes of spontaneous learning of several languages of communication. In: Proceedings of the VI All-Russian Conference «Nonlinear Dynamics in Cognitive Research – 2019». Nizhny Novgorod, 23–27 September 2019. Nizhny Novgorod: Institute of Applied Physics RAS; 2019. P. 27–30 (in Russian).
 33. Alexandrova NS, Antonets VA, Kuzenkov OA, Nuidel IV, Shemagina OV, Yakhno VG. Bilingualism as an unstable state. In: Velichkovsky BM, Balaban PM, Ushakov VL, editors. *Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics. Intercognsci 2020*. Vol. 1358 of *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Cham: Springer; 2021. P. 359–367. DOI: 10.1007/978-3-030-71637-0_41.
 34. Antonets VA. Simulation of intuitive evaluation of unlike semantic objects. In: XXI International Scientific and Technical Conference «Neuroinformatics-2019»: Part 1. Moscow, 07–11 October 2019. Moscow: Moscow Institute of Physics and Technology Publishing; 2019. P. 141–149 (in Russian).
 35. Osgood CE, Suci GJ, Tannenbaum PH. *The Measurement of Meaning*. Urbana: University of Illinois Press; 1957. 342 p.

Антонец Владимир Александрович — родился в 1949 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н. И. Лобачевского (ННГУ) по специальности «Радиофизика» (1971). Кандидат биологических наук (авиационная и космическая медицина, 1979). Доктор физико-математических наук (техника физического эксперимента, биофизика, 1993). Ведущий научный сотрудник Института прикладной физики РАН (с 2002). Профессор кафедры экологии (2000). Профессор кафедр психофизиологии (ННГУ, с 2014) и технологического предпринимательства (МФТИ, с 2012). Основатель первого в России регионального технологического инкубатора (1994). Профессор РАНХиГС (1999–2010). Автор более 150 научных публикаций в области физических измерений, биофизики, психофизики и коммерциализации технологий, трех учебников и более 10 бумажных и онлайн пособий по управлению НИОКР, коммерциализации их результатов и технологическому аудиту. Автор научно-популярного бестселлера «Простые вопросы» (М.: Манн, Иванов и Фербер, 2016. 304 с.). Область научных интересов: измерения в когнитивных исследованиях, биомеханике и биофизике; управление исследованиями, разработками и технологическим развитием; коммерциализация результатов исследований и разработок; популяризация научных знаний.



Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 Россия, 603155, Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46
 Институт прикладной физики РАН
 E-mail: antonetsva@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-8225-8018
 AuthorID (eLibrary.Ru): 9024



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4)

Научная статья
УДК 537.86

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512
EDN: DOBQUT

Оценка параметров импульсного воздействия с помощью сети нейроподобных осцилляторов

Е. В. Навроцкая^{1,2}, Д. Д. Кульминский^{1,3}, В. И. Пономаренко^{1,2}, М. Д. Прохоров¹ ✉

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

³Научно-технологический университет «Сириус», Сочи, Россия

E-mail: sidakev@gmail.com, kulminskydd@gmail.com, ponomarenkovi@gmail.com, ✉mdprokhorov@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.05.2022, принята к публикации 26.05.2022, опубликована 1.08.2022

Аннотация. Цель исследования — разработка метода оценки параметров внешнего периодического импульсного воздействия с помощью спайковой сети нейроподобных осцилляторов. **Методы.** Исследовалась спайковая активность сети, состоящей из связанных между собой неидентичных нейроподобных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, в зависимости от параметров периодического импульсного воздействия. Для оценки амплитуды внешнего импульсного сигнала мы расстраивали осцилляторы ФитцХью–Нагумо, находящиеся в устойчивом состоянии равновесия в отсутствие внешнего воздействия, по пороговому параметру, отвечающему за возбуждение осциллятора. Для оценки частоты возбуждающих импульсов мы расстраивали осцилляторы ФитцХью–Нагумо по параметру соотношения временных масштабов, от величины которого зависит собственная частота колебаний осциллятора. Также мы меняли длительность внешних импульсов. **Результаты.** Показано, что количество спайков, генерируемых сетью неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, имеет монотонную зависимость от амплитуды внешнего импульсного сигнала и немонотонную зависимость от частоты импульсного сигнала. Количество спайков, генерируемых сетью, остается постоянным в широком диапазоне значений длительности внешних импульсов. Предложен метод оценки амплитуды и частоты импульсного воздействия. Работоспособность метода продемонстрирована при численном моделировании и в радиофизическом эксперименте. **Заключение.** Предложенный метод позволяет оценить амплитуду внешнего импульсного сигнала, зная его частоту, и оценить частоту этого сигнала, зная его амплитуду. Метод может быть востребован в робототехнике при решении задач обработки информации, связанных с управлением движением мобильных роботов.

Ключевые слова: нейроподобные осцилляторы, модель ФитцХью–Нагумо, спайковая нейронная сеть, периодическое импульсное воздействие, радиофизический эксперимент.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-22-00150, <https://rscf.ru/project/22-22-00150/>.

Для цитирования: Навроцкая Е. В., Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Оценка параметров импульсного воздействия с помощью сети нейроподобных осцилляторов // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 495–512. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512. EDN: DOBQUT

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Estimation of impulse action parameters using a network of neuronlike oscillators

E. V. Navrotskaya^{1,2}, D. D. Kulminskiy^{1,3}, V. I. Ponomarenko^{1,2}, M. D. Prokhorov¹ ✉

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of RadioEngineering and Electronics of RAS, Russia

²Saratov State University, Russia

³Sirius University of Science and Technology, Bolshoy Sochi, Russia

E-mail: sidakev@gmail.com, kulminskydd@gmail.com, ponomarenkovi@gmail.com, ✉mdprokhorov@yandex.ru

Received 12.05.2022, accepted 26.05.2022, published 1.08.2022

Abstract. Aim of the study is to develop a method for estimating the parameters of an external periodic impulse action using a spiking network of neuronlike oscillators. **Methods.** The spiking activity of a network consisting of coupled nonidentical neuronlike FitzHugh–Nagumo oscillators was studied, depending on the parameters of the periodic impulse action. To estimate the amplitude of the external impulse signal, we detuned the FitzHugh–Nagumo oscillators, which were in a stable state of equilibrium in the absence of an external action, by the threshold parameter responsible for the excitation of the oscillator. To estimate the frequency of excitatory pulses, we detuned the FitzHugh–Nagumo oscillators by the parameter characterizing the ratio of time scales, the value of which determines the natural frequency of oscillators. We also changed the duration of external pulses. **Results.** It is shown that the number of spikes generated by a network of nonidentical FitzHugh–Nagumo oscillators has a monotonic dependence on the amplitude of the external pulse signal and a nonmonotonic dependence on the frequency of the pulse signal. The number of spikes generated by the network remains constant over a wide range of external pulse durations. A method for estimating the amplitude and frequency of impulse action is proposed. The method efficiency is demonstrated in numerical simulations and in a radio physical experiment. **Conclusion.** The proposed method allows one to estimate the amplitude of an external pulse signal, knowing its frequency, and estimate the frequency of this signal, knowing its amplitude. The method can be used in robotics when solving the problems of information processing related to the motion control of mobile robots.

Keywords: neuronlike oscillators, FitzHugh–Nagumo model, spiking neural network, periodic impulse action, radio physical experiment.

Acknowledgements. This study was supported by the Russian Science Foundation, Grant No. 22-22-00150, <https://rscf.ru/project/22-22-00150/>.

For citation: Navrotskaya EV, Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Estimation of impulse action parameters using a network of neuronlike oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(4):495–512. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Искусственные нейронные сети, построенные по принципу организации и функционирования сетей нейронов головного мозга, но состоящие из взаимодействующих между собой искусственных нейронов, широко используются в самых разных научных дисциплинах для решения задач идентификации, классификации, прогнозирования и адаптивного управления. Первоначально, в качестве узловых элементов искусственных нейронных сетей использовались формальные нейроны [1–6], представляющие собой пороговые элементы, осуществляющие преобразование вход–выход [7]. Однако такие формальные нейроны слишком просты и не имеют собственной динамики, а состоящие из них сети очень далеки от нейронных сетей мозга.

Для моделирования процессов активности мозга требуются более адекватные модели нейронов в виде нелинейных динамических систем [8]. Наиболее известными динамическими моделями нейронной активности, подробно рассмотренными в обзоре [9], являются модели Ходжкина–Хаксли, Моррис–Лекара, Хиндмарша–Роуза и ФитцХью–Нагумо, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, и модели Ижикевича, Рулькова и Курбажа–Некоркина, описываемые точечными отображениями. Параметры таких модельных нейронов имеют физиологический смысл, а сами эти нейроны способны демонстрировать присущую реальным нейронам

сложную динамику, в том числе спайки (импульсы), которые возникают, когда мембранный потенциал нейрона превышает некоторый пороговый уровень.

Построенные из таких нейроподобных осцилляторов нейронные сети, называемые спайковыми или импульсными нейронными сетями, позволяют эффективно моделировать процессы обработки и запоминания информации головным мозгом [10]. Спайковые нейронные сети успешно применяются на практике для автоматического распознавания звуковой и зрительной информации [11, 12], классификации характерных паттернов в биомедицинских сигналах [13–16] и для решения задач обработки информации, связанных с управлением движением роботов [17–20]. По сравнению с остальными искусственными нейронными сетями, спайковые нейронные сети обычно требуют меньшего числа нейронов для решения поставленных задач.

Внешняя стимуляция нейронов может приводить к изменению амплитуды и частоты генерируемых ими спайков [21, 22]. Поскольку спайки играют важную роль в передаче информации между нейронами, подаваемое на нейронную сеть внешнее воздействие способно повлиять на процесс обработки информации в сети [23–25]. Таким образом, задача оценки параметров внешнего воздействия представляет большой интерес, например, в робототехнике и нейрофизиологии. Отметим, что спайковые нейронные сети применялись ранее для пороговой классификации внешнего воздействия, подаваемого на нейроны сети [26], и для оценки амплитуды внешнего гармонического сигнала [27]. Известны также методы восстановления параметров внешнего воздействия, основанные на реконструкции модельных уравнений осцилляторов [28–31].

В данной работе мы впервые рассматриваем задачу оценки амплитуды и частоты импульсного воздействия, подаваемого на спайковую нейронную сеть, как в численном, так и в радиофизическом эксперименте, а также исследуем влияние формы и длительности импульсов на генерацию спайковой активности.

1. Динамика нейроподобного осциллятора ФитцХью–Нагумо под внешним периодическим импульсным воздействием

В качестве узлового элемента спайковой нейронной сети выберем нейроподобный осциллятор, описываемый упрощенными дифференциальными уравнениями ФитцХью–Нагумо [32, 33], динамика которого под внешним импульсным воздействием описывается следующими модельными уравнениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u}(t) &= u(t) - \frac{u^3(t)}{3} - v(t) + y(t), \\ \dot{v}(t) &= u(t) + a,\end{aligned}\tag{1}$$

где $u(t)$ описывает динамику мембранного потенциала нейрона; $v(t)$ отвечает за восстановление потенциала покоя мембраны; ε — параметр соотношения временных масштабов, который обычно является малой величиной; a — пороговый параметр; $y(t)$ — внешнее воздействие, представляющее собой прямоугольные импульсы. Уравнения ФитцХью–Нагумо являются эталонной моделью возбудимой динамики нейронов. В отличие от записи уравнений ФитцХью–Нагумо, приведенной в обзоре [9], во втором уравнении в (1) отсутствует член $-bv$, что существенно упрощает анализ системы [34] и ее реализацию в радиофизическом эксперименте.

В отсутствие внешнего воздействия осциллятор (1) при $a > 1$ находится в устойчивом состоянии равновесия. При этом действие внешнего сигнала может вызывать генерацию системой спайков (импульсов возбуждения), поэтому такое состояние называют возбудимым. При $a < 1$ и $y(t) = 0$ осциллятор (1) демонстрирует периодические автоколебания, которые возникают в результате бифуркации Андронова–Хопфа при $a = 1$ [32]. Мы будем рассматривать только случаи $a > 1$, соответствующие возбудимому состоянию осциллятора ФитцХью–Нагумо, при котором генерация спайков отсутствует без внешнего воздействия.

Динамика осциллятора ФитцХью–Нагумо под внешним гармоническим воздействием исследовалась, в том числе экспериментально, в работах [22, 27]. В настоящей работе мы подробно рассмотрим случай внешнего периодического импульсного воздействия. Такое воздействие применяется, например, при электрической стимуляции отделов головного мозга для управления уровнем синхронизации нейронов при лечении некоторых патологий мозга [35, 36].

Вид периодического импульсного сигнала $y(t)$, подаваемого на осцилляторы ФитцХью–Нагумо, показан на рис. 1. Сигнал $y(t)$ представляет собой прямоугольные импульсы с амплитудой B , периодом T и длительностью M . Для удобства мы используем в статье для описания импульсов их частоту $f = 1/T$ и относительную длительность $D = M/T$. Преимущественно рассматривается случай, когда амплитуда импульсов меняется от 0 до 1. Такое однополярное воздействие моделирует ситуацию, при которой после прохождения импульса длительностью M нейроосциллятор находится в автономном режиме в течение времени $T - M$ (рис. 1, а). Однако такой вид внешнего воздействия на реальные нейроны не всегда оказывается возможным. Например, при лечении пациентов с болезнью Паркинсона с помощью импульсной стимуляции отделов головного мозга используют преимущественно двухполярные электрические стимулы [36], состоящие из двух прямоугольных импульсов, имеющих разную полярность (рис. 1, б). Это позволяет избежать накопления заряда в живых тканях мозга за счет равенства нулю общего тока внешних стимулов. Оптимальный вид внешних импульсов для десинхронизации осцилляторов сети исследован в [37].

На рис. 2, а разными цветами показано, какое количество спайков N за время $t = 100$ демонстрирует нейроподобный осциллятор ФитцХью–Нагумо (1) в зависимости от амплитуды и частоты подаваемого на него внешнего импульсного воздействия $y(t)$. Рисунок построен при изменении частоты f и амплитуды B импульсного сигнала от 0 до 1 с шагом 0.01 для случая $D = 0.5$ и параметров осциллятора: $a = 1.1$ и $\varepsilon = 0.1$. Начальные условия одинаковы для каждой точки на плоскости параметров (f, B) .

Как видно из рис. 2, а, при малых значениях B осциллятор (1) не генерирует спайки и, соответственно, число спайков $N = 0$. То есть при малых B внешний стимул слишком слаб для возбуждения нейроподобного осциллятора. При амплитуде B , превышающей некоторое пороговое значение B_p , которое зависит от частоты f воздействия, осциллятор ФитцХью–Нагумо начинает генерировать спайки. Количество спайков растет с увеличением B и при фиксированном t достигает максимального значения N_{\max} , которое тоже зависит от величины f . Например, при частоте импульсов $f = 0.24$, близкой к собственной частоте f_s периодических автоколебаний, демонстрируемых осциллятором (1) при $\varepsilon = 0.1$, $a < 1$ и $y(t) = 0$, величина $N_{\max} = 24$ при $t = 100$. Это означает, что каждый импульс воздействия вызывает генерацию спайка. Временная

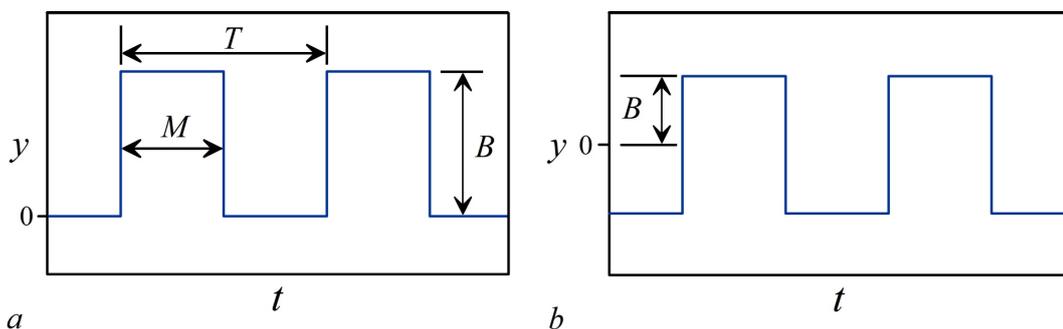


Рис. 1. Вид импульсного воздействия $y(t)$ при $M = T/2$ ($D = 0.5$). а — Однополярный импульсный сигнал. б — Двухполярный импульсный сигнал

Fig. 1. Shape of impulse action $y(t)$ at $M = T/2$ ($D = 0.5$). а — Unipolar pulse signal. б — Bipolar pulse signal

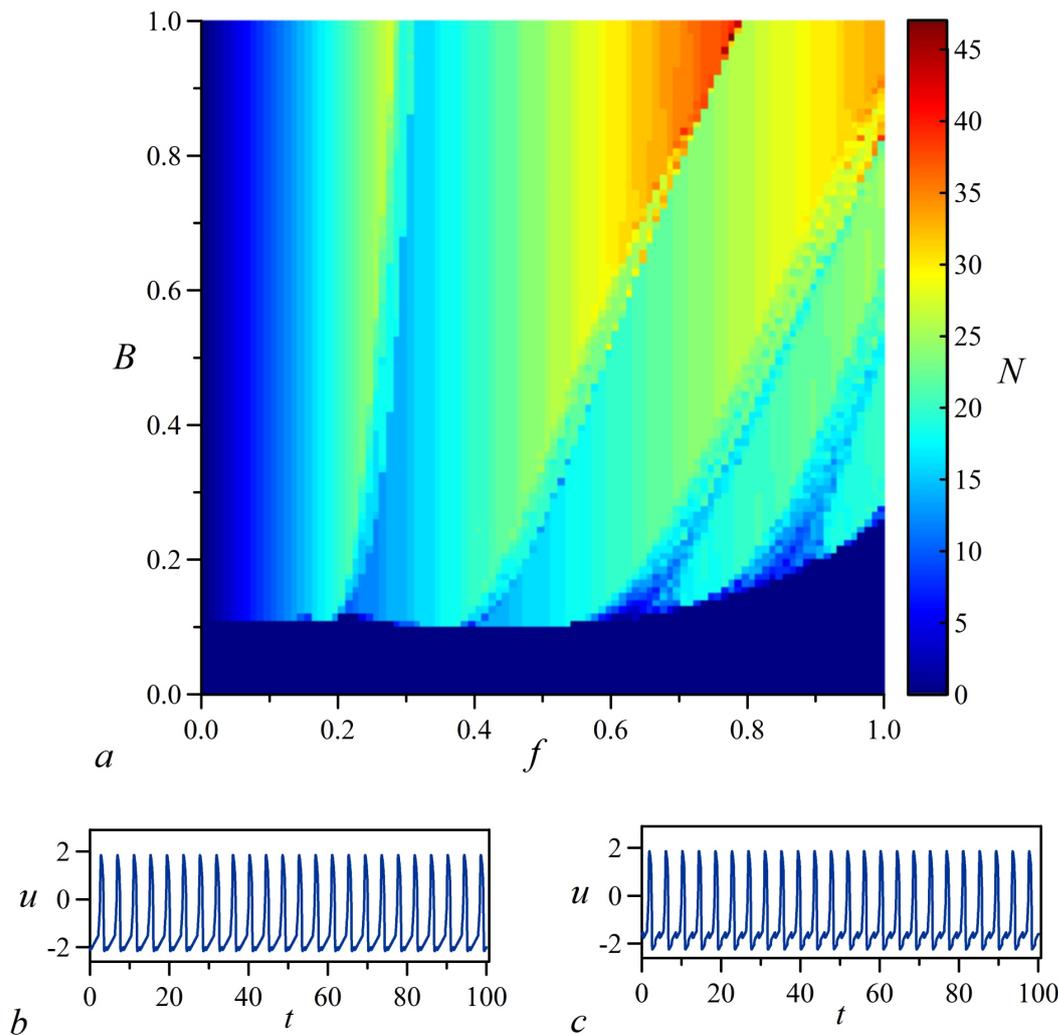


Рис. 2. *a* – Количество спайков N , генерируемое осциллятором (1) за время $t = 100$ при $a = 1.1$ и $\varepsilon = 0.1$, в зависимости от частоты f и амплитуды B внешнего импульсного воздействия $y(t)$ при $D = 0.5$ (цвет online). *b* – Временная реализация $u(t)$ при $B = 0.5$ и $f = 0.24$. *c* – Временная реализация $u(t)$ при $B = 0.5$ и $f = 0.48$

Fig. 2. *a* – The number of spikes N generated by the oscillator (1) over time $t = 100$ at $a = 1.1$ and $\varepsilon = 0.1$, depending on the frequency f and amplitude B of external impulse action $y(t)$ at $D = 0.5$ (color online). *b* – Time series of $u(t)$ at $B = 0.5$ and $f = 0.24$. *c* – Time series of $u(t)$ at $B = 0.5$ and $f = 0.48$

реализация динамической переменной $u(t)$ при $B = 0.5$ и $f = 0.24$ приведена на рис. 2, *b*. На этом рисунке частота следования спайков совпадает с частотой внешнего импульсного сигнала, и $N = 24$.

При $B > B_p$ и небольших значениях f каждый импульс, действующий на осциллятор, вызывает генерацию спайка. Например, при $f = 0.01$ за время наблюдения $t = 100$ на осциллятор приходит один импульс и вызывает один спайк, при $f = 0.02$ за время $t = 100$ на осциллятор действуют два импульса, вызывающие два спайка, и так далее. В результате N линейно зависит от f в области $f \leq f_s$.

Реальные нейроны, а также их модели в виде нелинейных динамических систем, обладают свойством рефрактерности, которое состоит в том, что после генерации спайка мембранный потенциал нейрона некоторое время остается малой величиной, и в течение этого периода рефрактерности нейрон не реагирует на внешние воздействия [9]. Когда частота внешнего воздействия

становится достаточно большой, некоторые импульсы воздействуют на нейроподобный осциллятор в тот момент, когда он является невозбудимым из-за рефрактерности, и поэтому не вызывают генерацию спайка. По этой причине при $f > f_s$ зависимость $N(f)$ перестает быть монотонной. Например, на рис. 2, *c* приведена временная реализация динамической переменной $u(t)$ при $B = 0.5$ и $f = 0.48$. На этом рисунке частота следования спайков в два раза меньше частоты внешнего импульсного сигнала и $N = 24$, как на рис. 2, *b*. При достаточно больших f частота следования спайков может быть в три и более раз меньше частоты внешнего импульсного сигнала.

Таким образом, спайковая активность нейроподобного осциллятора ФитцХью–Нагумо зависит как от параметров самого осциллятора, так и от параметров внешнего импульсного воздействия. В следующих разделах мы рассмотрим сети, состоящие из связанных между собой неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо (1), и покажем возможность их использования для оценки параметров внешнего периодического импульсного воздействия.

2. Использование сети осцилляторов ФитцХью–Нагумо для оценки параметров импульсного воздействия при численном моделировании

Рассмотрим спайковую нейронную сеть, состоящую из связанных между собой нейроподобных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, динамика которых описывается модельными уравнениями следующего вида:

$$\varepsilon_i \dot{u}_i(t) = u_i(t) - \frac{u_i^3(t)}{3} - v_i(t) + \sum_{j=1(j \neq i)}^L k_{i,j}(u_j(t) - u_i(t)) + y(t), \quad (2)$$

$$\dot{v}_i(t) = u_i(t) + a_i,$$

где $i = 1, \dots, L$ – номер осциллятора; L – количество осцилляторов; $k_{i,j}$ – коэффициент связи, действующей со стороны j -го элемента на i -й. В общем случае все осцилляторы сети являются неидентичными, но находятся под действием одинакового внешнего импульсного воздействия $y(t)$.

При численном моделировании мы исследуем сеть, состоящую из $L = 50$ осцилляторов (2). Архитектуру связей выбираем таким образом, чтобы на каждый из осцилляторов действовало по десять других осцилляторов, номера которых выбраны случайно. Это означает, что в уравнении (2) из 49 коэффициентов связи $k_{i,j}$ для каждого осциллятора 39 коэффициентов равны нулю. Значения всех ненулевых коэффициентов связей в сети выбраны одинаковыми: $k_{i,j} = 0.01$. При таких малых значениях $k_{i,j}$ спайки в осцилляторах сети не возникают без внешнего воздействия. Для всех рассмотренных в этом разделе примеров архитектура связей в сети и сила связей одинакова.

Спайковая активность исследуемой нейронной сети сложным образом зависит от параметров внешнего периодического импульсного воздействия. Такая сеть может генерировать одинаковое количество спайков при отличающихся параметрах импульсного сигнала. Поэтому одновременная оценка всех параметров внешнего стимула $y(t)$ по отклику нейронной сети в общем случае оказывается невозможной. Мы рассмотрим более простую ситуацию, при которой требуется оценить амплитуду импульсного сигнала $y(t)$, зная его частоту, и ситуацию, когда требуется оценить частоту сигнала $y(t)$, зная его амплитуду. Отдельно рассмотрим влияние длительности импульсов на генерацию спайковой активности.

2.1. Оценка амплитуды импульсного воздействия. Как показано выше, в разделе 1, даже по отклику на внешнее воздействие одного нейроподобного осциллятора, находящегося в возбужденном состоянии, можно очень грубо оценить амплитуду стимула. Повысить точность оценки амплитуды внешнего периодического импульсного воздействия позволяет использование спайковой сети неидентичных осцилляторов, причем, чем больше число L осцилляторов в

сети, тем точнее оценка B . Для оценки величины B осцилляторы сети следует расстроить по параметру a_i , от величины которого зависит пороговое значение B_p , а также количество спайков, генерируемое каждым i -м осциллятором.

В исследуемой сети все осцилляторы ФитцХью–Нагумо были неидентичными и отличались величиной параметра a_i , который принимал значения от $a_1 = 1.1$ до $a_{50} = 1.2715$ с шагом 0.0035. При таких значениях нет генерации спайков в отсутствие внешнего воздействия. Мы меняли амплитуду B импульсного сигнала от 0 до 1 с шагом 0.01 и для каждого значения B подсчитывали общее количество спайков, генерируемых всеми 50 осцилляторами за время $t = 100$. На рис. 3 построены зависимости для трех разных значений f при $D = 0.5$ и $\varepsilon_i = \varepsilon = 0.1$. Такие графики позволяют оценить неизвестную амплитуду B внешнего импульсного воздействия при известной частоте воздействия f .

Подсчитав количество спайков N , наблюдаемых в сети за выбранное время, можно определить B . Например, если $N = 800$ при $f = 0.24$, то $B = 0.42$. Чем более плавно растет N , тем точнее оценка B . Из трех кривых, представленных на рис. 3, наиболее медленный рост демонстрирует зависимость $N(B)$ при частоте импульсов $f = 0.24$. Эта кривая выходит на плато лишь при больших B , причем число спайков на этом плато является максимально возможным ($N = 1200$) для сети из 50 осцилляторов при $f = 0.24$. Как отмечалось в разделе 1, частота f_s собственных автоколебаний осцилляторов (1) при $\varepsilon = 0.1$ и $a < 1$ примерно равна 0.24. Таким образом, если имеется возможность выбирать частоту воздействия на спайковую сеть, то для более точной оценки B следует использовать $f \approx f_s$. Если частота сигнала $y(t)$ не может быть изменена, но заранее известна, то для более точной оценки B надо таким образом подобрать параметры осцилляторов, чтобы их собственные частоты также были близкими к частоте воздействия $f_s \approx f$.

Мы исследовали эффективность метода при различной архитектуре связей в спайковой нейронной сети и при различном количестве связей между осцилляторами. Установлено, что эти характеристики слабо влияют на точность оценки амплитуды внешнего импульсного воздействия. Более существенное влияние на точность метода оказывают значения коэффициентов связи $k_{i,j}$ между осцилляторами. При больших $k_{i,j}$ точность метода снижается, так как зависимость $N(B)$ становится более крутой, быстро переходя от минимального до максимального значения N .

Мы сравнили спайковую активность сети из нейроподобных осцилляторов (2) для случаев изменения амплитуды импульсов от 0 до 1 и от -1 до 1.

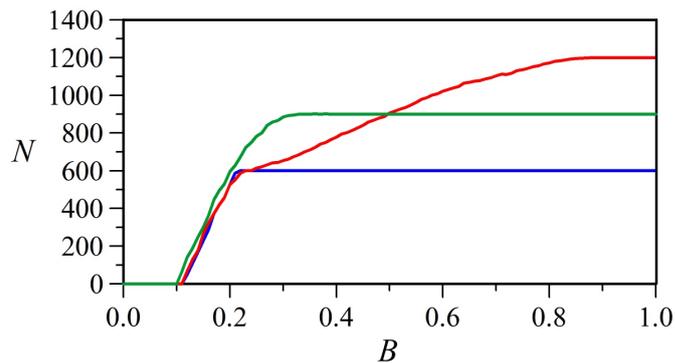


Рис. 3. Зависимости количества спайков N , генерируемых сетью (2) за время $t = 100$, от амплитуды B внешнего импульсного воздействия $y(t)$ при $D = 0.5$, $L = 50$, $\varepsilon_i = \varepsilon = 0.1$, $a_i \in [1.1; 1.2715]$ для $f = 0.12$ (синяя кривая), $f = 0.24$ (красная кривая) и $f = 0.36$ (зеленая кривая) (цвет online)

Fig. 3. Dependences of the number of spikes N generated by the network (2) over time $t = 100$ on the amplitude B of external impulse action $y(t)$ at $D = 0.5$, $L = 50$, $\varepsilon_i = \varepsilon = 0.1$, and $a_i \in [1.1; 1.2715]$ for $f = 0.12$ (blue line), $f = 0.24$ (red line), and $f = 0.36$ (green line) (color online)

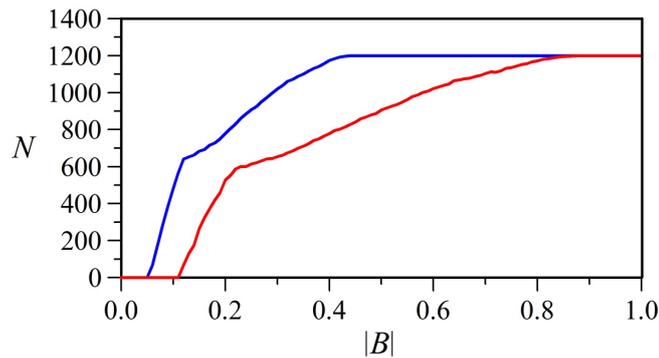


Рис. 4. Зависимости количества спайков N , генерируемых сетью (2) за время $t = 100$, от $|B|$ для случаев однополярного (красная кривая) и двухполярного (синяя кривая) импульсного воздействия с частотой $f = 0.24$. Параметры сети такие же, как для рис. 3 (цвет online)

Fig. 4. Dependences of the number of spikes N generated by the network (2) over time $t = 100$ on $|B|$ for the cases of unipolar (red line) and bipolar (blue line) impulse action with the frequency $f = 0.24$. The network parameters are the same as for Fig. 3 (color online)

Полученные результаты иллюстрирует рис. 4, на котором по оси абсцисс отложен $|B|$. Как и следовало ожидать, импульсное воздействие с амплитудой B , изменяющейся от -1 до 1 , оказывает более заметное влияние на спайковую активность сети. При таком двухполярном импульсном воздействии пороговое значение B_p , при котором сеть начинает генерировать спайки, оказывается меньше, чем при однополярном импульсном воздействии. Кроме того, при двухполярных импульсах количество спайков достигает максимального значения при меньших значениях $|B|$, чем при однополярных импульсах.

2.2. Оценка частоты импульсного воздействия. Рассмотрим теперь задачу оценки частоты f внешнего импульсного сигнала $y(t)$ в предположении, что нам известна амплитуда этого сигнала. Для решения этой задачи настроим осцилляторы сети (2) не по параметру a_i , как в разделе 2.1, а по параметру ε_i , величина которого определяет частоту f_s периодических автоколебаний осцилляторов ФитцХью–Нагумо (1) при $a < 1$ в отсутствие внешнего воздействия.

Все осцилляторы ФитцХью–Нагумо в исследуемой сети из 50 элементов были неидентичными и отличались величиной параметра ε_i , который принимал значения от $\varepsilon_1 = 0.02$ до $\varepsilon_{50} = 0.51$ с шагом 0.01 . На рис. 5, а построены зависимости $N(f)$ для двух разных значений B при $D = 0.5$ и $a_i = a = 1.1$.

В отличие от зависимостей $N(B)$, представленных на рис. 3, зависимости $N(f)$ не являются монотонными. При различных значениях f сеть может генерировать одинаковое количество спайков N . Аналогичную картину мы наблюдали для одиночного осциллятора ФитцХью–Нагумо (см. рис. 2). Следовательно, для оценки f может быть недостаточным просто подсчитать количество спайков в сети. Например, при $B = 0.4$ число спайков $N = 635$ может наблюдаться как при $f = 0.13$, так и при $f = 0.44$ (см. рис. 5, а). Для того чтобы определить частоту импульсного воздействия в этом случае необходим дополнительный анализ.

Нами установлено, что на участках роста зависимости $N(f)$ все или почти все осцилляторы сети (за исключением осцилляторов с наименьшими или наибольшими значениями ε_i) генерируют одинаковое количество спайков при фиксированном значении f . На участках, где зависимость $N(f)$ уменьшается, осцилляторы, имеющие большую расстройку относительно друг друга по параметру ε_i , демонстрируют разное количество спайков при фиксированном значении f . Значит, для оценки величины f по числу спайков N в случае неоднозначности зависимости $N(f)$ нужно дополнительно сравнить количество спайков N_i , генерируемое двумя осцилляторами, у которых параметры ε_i существенно отличаются. При выбранном диапазоне изменения параметра ε_i можно

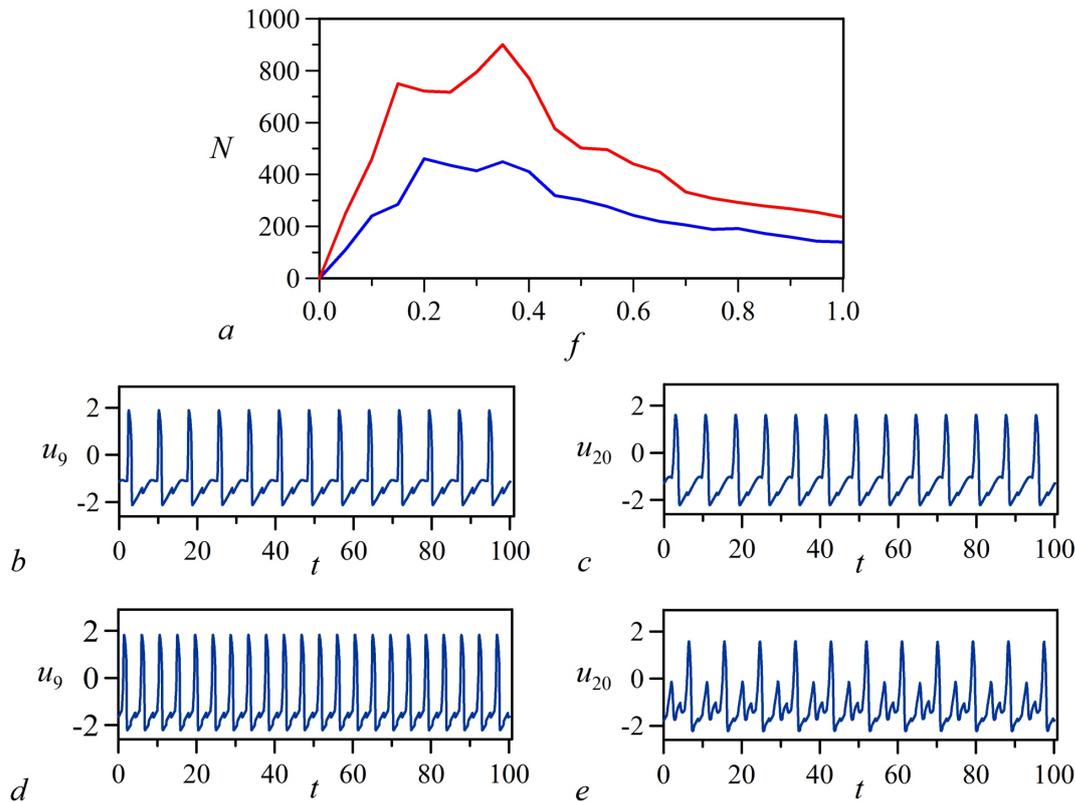


Рис. 5. *a* – Зависимости количества спайков N , генерируемых сетью (2) за время $t = 100$, от частоты f внешнего импульсного воздействия $y(t)$ при $D = 0.5$, $L = 50$, $a_i = a = 1.1$, $\varepsilon_i \in [0.02; 0.51]$ для $B = 0.2$ (синяя кривая) и $B = 0.4$ (красная кривая) (цвет online). *b* – Временная реализация $u_9(t)$ при $\varepsilon_9 = 0.1$, $B = 0.4$, $f = 0.13$. *c* – Временная реализация $u_{20}(t)$ при $\varepsilon_{20} = 0.21$, $B = 0.4$, $f = 0.13$. *d* – Временная реализация $u_9(t)$ при $\varepsilon_9 = 0.1$, $B = 0.4$, $f = 0.44$. *e* – Временная реализация $u_{20}(t)$ при $\varepsilon_{20} = 0.21$, $B = 0.4$, $f = 0.44$

Fig. 5. *a* – Dependences of the number of spikes N , generated by the network (2) over time $t = 100$, on the frequency f of external impulse action $y(t)$ at $D = 0.5$, $L = 50$, $a_i = a = 1.1$, and $\varepsilon_i \in [0.02; 0.51]$ for $B = 0.2$ (blue line) and $B = 0.4$ (red line) (color online). *b* – Time series of $u_9(t)$ at $\varepsilon_9 = 0.1$, $B = 0.4$, and $f = 0.13$. *c* – Time series of $u_{20}(t)$ at $\varepsilon_{20} = 0.21$, $B = 0.4$, and $f = 0.13$. *d* – Time series of $u_9(t)$ at $\varepsilon_9 = 0.1$, $B = 0.4$, and $f = 0.44$. *e* – Time series of $u_{20}(t)$ at $\varepsilon_{20} = 0.21$, $B = 0.4$, and $f = 0.44$

сравнивать N_i , например, для осцилляторов с $\varepsilon_9 = 0.1$ и $\varepsilon_{20} = 0.21$. Если при $N = 635$ имеем $N_9 = N_{20}$, то $f = 0.13$, а если $N_9 \neq N_{20}$, то $f = 0.44$.

На рис. 5, *b*, *c* приведены временные реализации переменных $u_9(t)$ и $u_{20}(t)$, соответственно, при $B = 0.4$ и $f = 0.13$. На обоих графиках количество спайков совпадает: $N_9 = N_{20} = 13$. В этом случае частота f сигнала $y(t)$ соответствует восходящей ветви зависимости $N(f)$ при $N = 635$. На рис. 5, *d*, *e* приведены временные реализации переменных $u_9(t)$ и $u_{20}(t)$, соответственно, при $B = 0.4$ и $f = 0.44$. Количество спайков на рис. 5, *d* и рис. 5, *e* отличается: $N_9 = 22$ и $N_{20} = 11$. В этом случае частота f сигнала $y(t)$ соответствует нисходящей ветви зависимости $N(f)$ при $N = 635$.

2.3. Влияние длительности импульсов на генерацию спайковой активности. Спайковая активность сети нейроподобных осцилляторов ФитцХью–Нагумо (2) зависит не только от амплитуды и частоты внешнего импульсного сигнала $y(t)$, но и от длительности импульсов. Мы исследовали влияние относительной длительности D импульсов на количество генерируемых спайков. Осцилляторы ФитцХью–Нагумо, как и в разделе 2.1, были расстроены по параметру a_i , который принимал значения от $a_1 = 1.1$ до $a_{50} = 1.2715$ с шагом 0.0035. Мы меняли длительность

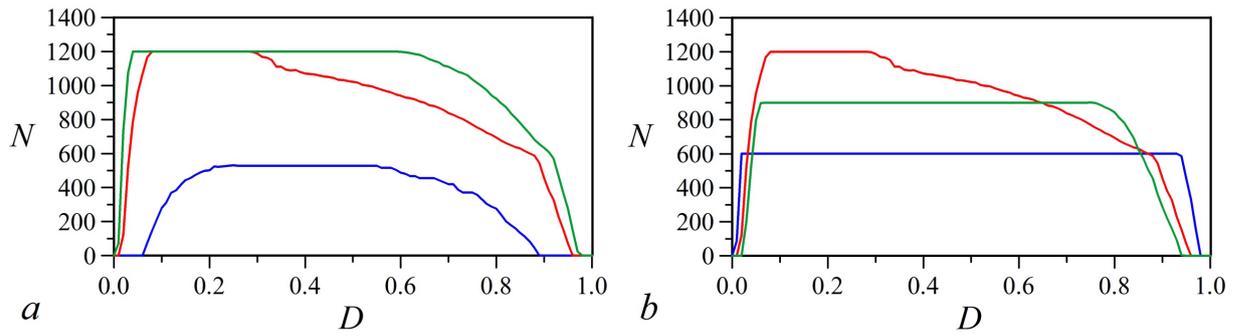


Рис. 6. Зависимости количества спайков N , генерируемых сетью (2) за время $t = 100$, от относительной длительности D импульса сигнала $y(t)$ при $L = 50$, $\varepsilon_i = \varepsilon = 0.1$, $a_i \in [1.1; 1.2715]$. $a - f = 0.24$, $B = 0.2$ (синяя кривая), $B = 0.6$ (красная кривая), $B = 1$ (зеленая кривая). $b - B = 0.6$, $f = 0.12$ (синяя кривая), $f = 0.24$ (красная кривая), $f = 0.36$ (зеленая кривая) (цвет online)

Fig. 6. Dependences of the number of spikes N generated by the network (2) over time $t = 100$ on the relative duration D of impulse signal $y(t)$ at $L = 50$, $\varepsilon_i = \varepsilon = 0.1$, and $a_i \in [1.1; 1.2715]$. $a - f = 0.24$ and $B = 0.2$ (blue line), $B = 0.6$ (red line), and $B = 1$ (green line). $b - B = 0.6$ and $f = 0.12$ (blue line), $f = 0.24$ (red line), and $f = 0.36$ (green line) (color online)

D импульсов от 0 до 1 с шагом 0.01 и для каждого D подсчитывали общее количество спайков, генерируемых всеми 50 осцилляторами за время $t = 100$. На рис. 6, a построены зависимости $N(D)$ для трех разных значений B при $f = 0.24$ и $\varepsilon_i = \varepsilon = 0.1$.

Под действием очень коротких импульсов осцилляторы из-за своей инерционности не успевают сгенерировать спайки, поэтому $N = 0$ при малых значениях D . С увеличением D наблюдается быстрый рост N , и зависимости $N(D)$ выходят на плато, значение N на котором зависит от амплитуды импульсов. В достаточно широком диапазоне значений D величина N остается максимальной, а затем уменьшается с ростом D . Случай $D = 1$ соответствует постоянной внешней силе, действующей на осцилляторы. При таком воздействии спайковая активность отсутствует.

На рис. 6, b построены зависимости $N(D)$ для трех разных значений f при $B = 0.6$. Вид этих зависимостей качественно совпадает с графиками $N(D)$ на рис. 6, a . Графики $N(D)$ на рис. 6, b хорошо согласуются с зависимостями $N(B)$ на рис. 3. Из рис. 6 следует, что в общем случае оценить длительность периодического импульсного воздействия по отклику сети не представляется возможным. Вместе с тем, количество спайков, генерируемых сетью, остается постоянным в широком диапазоне значений D .

3. Оценка параметров внешнего импульсного воздействия с помощью малой сети осцилляторов ФитцХью–Нагумо в радиофизическом эксперименте

Для экспериментального исследования спайковой активности в сети, состоящей из связанных неидентичных нейроподобных осцилляторов, описываемых уравнениями ФитцХью–Нагумо (2), нами была построена радиотехническая установка. Принципиальная схема реализованных нами радиотехнических генераторов ФитцХью–Нагумо подробно описана в работе [38]. В отличие от описанных выше численных исследований, в радиофизическом эксперименте исследовалась малая сеть, состоящая из 10 связанных генераторов. Для реализации связей между генераторами был использован предложенный нами подход, в основе которого лежит программный способ формирования сигналов, отвечающих за связь между генераторами [39]. Суть такого подхода состоит в том, что сигналы напряжения с выхода каждого генератора подаются на аналоговые входы многоканального аналого-цифрового преобразователя и оцифровываются для дальнейшей обработки. Затем, с помощью программы на LabView проводится преобразование этих сигналов, и формируются сигналы, отвечающие за связь генераторов. К каждому из сигналов связи

в соответствии с уравнением (2) добавляется оцифрованный сигнал импульсного воздействия. Сформированные таким образом сигналы преобразовываются в аналоговый вид с помощью многоканального цифро-аналогового преобразователя и подаются на вход каждого генератора.

Такой подход позволяет задать произвольную архитектуру и вид связей между генераторами. Архитектура связей была выбрана таким образом, чтобы на каждый из генераторов действовало по два других генератора, номера которых были выбраны случайно. В соответствии с модельным уравнением (2) в установке реализована простая линейная связь между генераторами, моделирующая электрическую синаптическую связь между нейронами. При аналоговом моделировании такая связь соответствует связи двух генераторов через резистор [40, 41].

Сначала мы расстроили генераторы ФитцХью–Нагумо по параметру a_i , который принимал значения от $a_1 = 1.1$ В до $a_{10} = 1.28$ В с шагом 0.02 В. Мы меняли амплитуду B импульсного сигнала от 0 до 1 В с шагом 0.02 В и подсчитывали общее количество спайков, генерируемых всеми десятью генераторами за 100 мс при фиксированном значении B . На рис. 7 построена зависимость $N(B)$ при $f = 240$ Гц, $D = 0.5$, $\varepsilon_i = \varepsilon = 0.1$ мс. Значения всех ненулевых коэффициентов связи в сети были выбраны одинаковыми: $k_{i,j} = 0.01$. Построенный график позволяет оценить неизвестную амплитуду B внешнего импульсного воздействия, подсчитав количество спайков N , генерируемых в сети. Например, если $N = 156$, то $B = 0.16$ В. Результаты, полученные в радиофизическом эксперименте, хорошо согласуются с приведенными выше результатами численных исследований сети нейроподобных осцилляторов (2).

Затем мы расстроили генераторы ФитцХью–Нагумо по параметру ε_i , который принимал значения от $\varepsilon_1 = 0.05$ мс до $\varepsilon_{10} = 0.56$ мс. Шаг изменения ε_i был неравномерным и определялся емкостью имеющихся в наличии конденсаторов. Мы меняли в эксперименте частоту f импульсного сигнала от 20 Гц до 1000 Гц с шагом 20 Гц и для каждого значения f подсчитывали общее количество спайков, генерируемых всеми десятью генераторами за 100 мс. На рис. 8, а построена зависимость $N(f)$ при $B = 0.6$ В, $D = 0.5$, $a_i = a = 1.1$.

Так же, как и в численном эксперименте, зависимость $N(f)$ является немонотонной, и при различных значениях f сеть может генерировать одинаковое количество спайков. Например, число спайков $N = 94$ может наблюдаться в сети при $f = 120$ Гц и при $f = 660$ Гц. Для оценки величины f нужно сначала подсчитать общее количество спайков N в сети, а затем сравнить количество спайков N_i , генерируемое двумя генераторами, имеющими отличающиеся значения ε_i . Мы сравнивали 4-й и 5-й генераторы, для которых $\varepsilon_4 = 0.18$ мс и $\varepsilon_5 = 0.25$ мс, соответственно.

На рис. 8, b, c приведены временные реализации переменных $u_4(t)$ и $u_5(t)$, соответственно, при $f = 120$ Гц. На обоих графиках количество спайков совпадает: $N_4 = N_5 = 12$. В этом случае

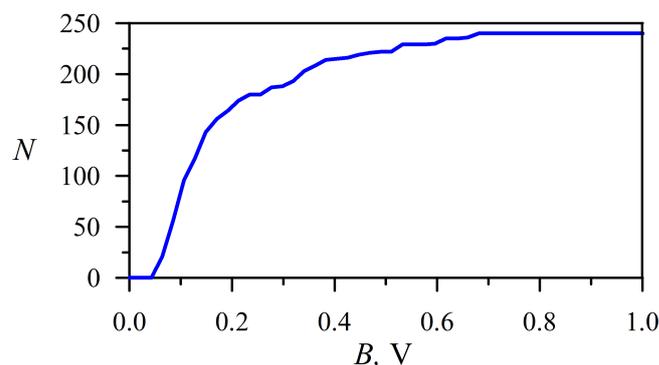


Рис. 7. Зависимость количества спайков N , генерируемых сетью из 10 радиотехнических генераторов за время $t=100$ мс, от амплитуды B внешнего импульсного воздействия при $f=240$ Гц, $D=0.5$, $\varepsilon_i=\varepsilon=0.1$ мс, $a_i \in [1.1; 1.28]$

Fig. 7. Dependence of the number of spikes N generated by a network of 10 radio technical generators over time $t = 100$ ms on the amplitude B of external impulse action at $f = 240$ Hz, $D = 0.5$, $\varepsilon_i = \varepsilon = 0.1$ ms, and $a_i \in [1.1; 1.28]$

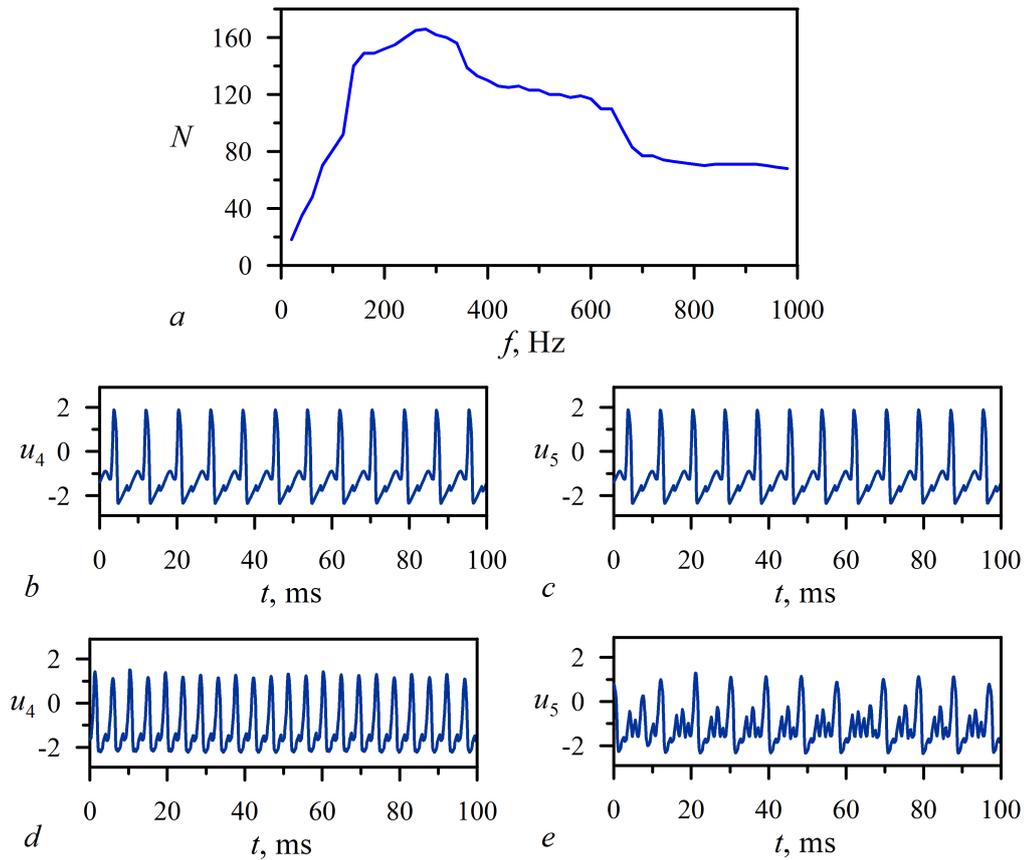


Рис. 8. *a* – Зависимость количества спайков N , генерируемых сетью из 10 радиотехнических генераторов за время $t = 100$ мс, от частоты f внешнего импульсного воздействия при $B = 0.6$ В, $D = 0.5$, $a_i = a = 1.1$, $\varepsilon_i \in [0.05; 0.56]$. *b* – Временная реализация $u_4(t)$ при $\varepsilon_4 = 0.18$ мс, $f = 120$ Гц. *c* – Временная реализация $u_5(t)$ при $\varepsilon_5 = 0.25$ мс, $f = 120$ Гц. *d* – Временная реализация $u_4(t)$ при $\varepsilon_4 = 0.18$ мс, $f = 660$ Гц. *e* – Временная реализация $u_5(t)$ при $\varepsilon_5 = 0.25$ мс, $f = 660$ Гц

Fig. 8. *a* – Dependence of the number of spikes N generated by a network of 10 radio technical generators over time $t = 100$ ms on the frequency f of external impulse action at $B = 0.6$ V, $D = 0.5$, $a_i = a = 1.1$, and $\varepsilon_i \in [0.05; 0.56]$. *b* – Time series of $u_4(t)$ at $\varepsilon_4 = 0.18$ ms and $f = 120$ Hz. *c* – Time series of $u_5(t)$ at $\varepsilon_5 = 0.25$ ms and $f = 120$ Hz. *d* – Time series of $u_4(t)$ at $\varepsilon_4 = 0.18$ ms and $f = 660$ Hz. *e* – Time series of $u_5(t)$ at $\varepsilon_5 = 0.25$ ms and $f = 660$ Hz

частота f импульсного сигнала соответствует восходящей ветви зависимости $N(f)$ при $N = 94$. На рис. 8, *d*, *e* приведены временные реализации переменных $u_4(t)$ и $u_5(t)$, соответственно, при $f = 660$ Гц. Количество спайков на рис. 8, *d* и рис. 8, *e* различно: $N_4 = 22$ и $N_5 = 11$. В этом случае частота f импульсного сигнала соответствует нисходящей ветви зависимости $N(f)$ при $N = 94$.

Заключение

Нами предложен метод оценки амплитуды и частоты импульсного воздействия, подаваемого на спайковую нейронную сеть. В качестве элементов сети использованы неидентичные нейроподобные осцилляторы ФитцХью–Нагумо. Показано, что спайковая активность исследуемой нейронной сети сложным образом зависит от параметров внешнего периодического импульсного воздействия. Поскольку такая сеть может генерировать одинаковое количество спайков при отличающихся параметрах импульсного сигнала, одновременная оценка всех параметров внешнего стимула по отклику нейронной сети в общем случае оказывается невозможной. Поэтому мы решали задачи оценки амплитуды и частоты импульсного воздействия по отдельности.

Для оценки амплитуды внешнего импульсного воздействия мы расстраивали осцилляторы сети по параметру a , отвечающему за возбуждение осциллятора, а для оценки частоты возбуждающих импульсов расстраивали осцилляторы по параметру ε , от величины которого зависит собственная частота колебаний осциллятора. Предложенный метод реализован как в численном, так и в радиофизическом эксперименте, показав хорошую согласованность полученных результатов. Также исследовано влияние формы и длительности внешних импульсов на генерацию спайковой активности в сети.

Полученные результаты могут быть востребованы в робототехнике при решении задач обработки информации, связанных с управлением движением роботов [19, 42]. Например, спайковые нейронные сети можно использовать для оценки характеристик внешних сигналов, регистрируемых сенсорами мобильного робота. Затем, на основании полученных значений с помощью других систем управления можно изменить при необходимости режим движения робота.

Список литературы

1. *Haykin S.* Neural Networks and Learning Machines. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2009. 906 p.
2. *Ripley B. D.* Pattern Recognition and Neural Networks. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. 403 p. DOI: 10.1017/CBO9780511812651.
3. *Egmont-Petersen M., de Ridder D., Handels H.* Image processing with neural networks — a review // *Pattern Recognition*. 2002. Vol. 35, no. 10. P. 2279–2301. DOI: 10.1016/S0031-3203(01)00178-9.
4. *Dwarakish G. S., Rakshith S., Natesan U.* Review on applications of neural network in coastal engineering // *Artificial Intelligent Systems and Machine Learning*. 2013. Vol. 5, no. 7. P. 324–331.
5. *Frolov N., Maksimenko V., Lüttjohann A., Koronovskii A., Hramov A.* Feed-forward artificial neural network provides data-driven inference of functional connectivity // *Chaos*. 2019. Vol. 29, no. 9. P. 091101. DOI: 10.1063/1.5117263.
6. *Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N.* Physical principles of brain–computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states // *Phys. Rep.* 2021. Vol. 918. P. 1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
7. *McCulloch W. S., Pitts W.* A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // *Bulletin of Mathematical Biophysics*. 1943. Vol. 5, no. 4. P. 115–133. DOI: 10.1007/BF02478259.
8. *Rabinovich M. I., Varona P., Selverston A. I., Abarbanel H. D. I.* Dynamical principles in neuroscience // *Rev. Mod. Phys.* 2006. Vol. 78, no. 4. P. 1213–1265. DOI: 10.1103/RevModPhys.78.1213.
9. *Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щапин Д. С., Некоркин В. И.* Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор // *Известия вузов. ПНД*. 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
10. *Quiroga R. Q., Panzeri S.* Principles of Neural Coding. Boca Raton: CRC Press, 2013. 663 p. DOI: 10.1201/b14756.
11. *Yu D., Deng L.* Automatic Speech Recognition: A Deep Learning Approach. London: Springer, 2015. 321 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5779-3.
12. *Hossain M. S., Muhammad G.* Emotion recognition using deep learning approach from audio-visual emotionalbig data // *Information Fusion*. 2019. Vol. 49. P. 69–78. DOI: 10.1016/j.inffus.2018.09.008.
13. *Kasabov N. K.* Evolving Connectionist Systems: The Knowledge Engineering Approach. London: Springer, 2007. 451 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-347-5.
14. *Lobov S., Mironov V., Kastalskiy I., Kazantsev V.* A spiking neural network in sEMG feature extraction // *Sensors*. 2015. Vol. 15, no. 11. P. 27894–27904. DOI: 10.3390/s151127894.
15. *Virgilio C. D., Sossa J. H., Antelis J. M., Falcón L. E.* Spiking Neural Networks applied to the classification of motor tasks in EEG signals // *Neural Netw.* 2020. Vol. 122. P. 130–143. DOI: 10.1016/j.neunet.2019.09.037.
16. *Lobov S. A., Chernyshov A. V., Krilova N. P., Shamshin M. O., Kazantsev V. B.* Competitive learning

- in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier // *Sensors*. 2020. Vol. 20, no. 2. P. 500. DOI: 10.3390/s20020500.
17. Wang X., Hou Z.-G., Lv F., Tan M., Wang Y. Mobile robots' modular navigation controller using spiking neural networks // *Neurocomputing*. 2014. Vol. 134. P. 230–238. 10.1016/j.neucom.2013.07.055.
 18. Chou T.-S., Bucci L. D., Krichmar J. L. Learning touch preferences with a tactile robot using dopamine modulated STDP in a model of insular cortex // *Front. Neurobot.* 2015. Vol. 9. P. 6. DOI: 10.3389/fnbot.2015.00006.
 19. Bing Z., Meschede C., Röhrbein F., Huang K., Knoll A. C. A survey of robotics control based on learning-inspired spiking neural networks // *Front. Neurobot.* 2018. Vol. 12. P. 35. DOI: 10.3389/fnbot.2018.00035.
 20. Lobov S. A., Mikhaylov A. N., Shamshin M., Makarov V. A., Kazantsev V. B. Spatial properties of STDP in a self-learning spiking neural network enable controlling a mobile robot // *Front. Neurosci.* 2020. Vol. 14. P. 88. DOI: 10.3389/fnins.2020.00088.
 21. Croisier H., Dauby P. C. Continuation and bifurcation analysis of a periodically forced excitable system // *J. Theor. Biol.* 2007. Vol. 246, no. 3. P. 430–448. DOI: 10.1016/j.jtbi.2007.01.017.
 22. Феоктистов А. В., Анищенко В. С. Динамика системы ФитцХью–Нагумо под внешним периодическим воздействием // *Известия вузов. ПНД*. 2011. Т. 19, № 5. С. 35–44. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-5-35-44.
 23. Novikov N., Gutkin B. Role of synaptic nonlinearity in persistent firing rate shifts caused by external periodic forcing // *Phys. Rev. E*. 2020. Vol. 101, no. 5. P. 052408. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.052408.
 24. Eidum D. M., Henriquez C. S. Modeling the effects of sinusoidal stimulation and synaptic plasticity on linked neural oscillators // *Chaos*. 2020. Vol. 30, no. 3. P. 033105. DOI: 10.1063/1.5126104.
 25. Рой М., Новиков Н. А., Захаров Д. Г., Гуткин Б. С. Взаимодействие между ультрамедленными флуктуациями нейронных сетей префронтальной коры и колебаниями мозга // *Известия вузов. ПНД*. 2020. Т. 28, № 1. С. 90–97. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-90-97.
 26. Andreev A. V., Ivanchenko M. V., Pisarchik A. N., Hramov A. E. Stimulus classification using chimera-like states in a spiking neural network // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. Vol. 139. P. 110061. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110061.
 27. Пономаренко В. И., Кульминский Д. Д., Андреев А. В., Прохоров М. Д. Оценка амплитуды внешнего периодического воздействия при помощи малой спайковой нейронной сети в радиофизическом эксперименте // *Письма в ЖТФ*. 2021. Т. 47, № 4. С. 7–10. DOI: 10.21883/PJTF.2021.04.50636.18529.
 28. Bezruchko B. P., Smirnov D. A. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63, no. 1. P. 016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.016207.
 29. Смирнов Д. А., Сысоев И. В., Селезнев Е. П., Безручко Б. П. Реконструкция моделей неавтономных систем с дискретным спектром воздействия // *Письма в ЖТФ*. 2003. Т. 29, № 19. С. 69–76.
 30. Яхно Ю. В., Мольков Я. И., Мухин Д. Н., Лоскутов Е. М., Фейгин А. М. Реконструкция оператора эволюции как способ анализа электрической активности мозга при эпилепсии // *Известия вузов. ПНД*. 2011. Т. 19, № 6. С. 156–172. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-156-172.
 31. Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Сысоев И. В. Реконструкция систем с запаздыванием под внешним периодическим воздействием // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 4. С. 613–625. DOI: 10.20537/nd1304001.
 32. Dahlem M. A., Hiller G., Panchuk A., Schöll E. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2009. Vol. 19, no. 2. P. 745–753. DOI: 10.1142/S0218127409023111.
 33. Plotnikov S. A., Lehnert J., Fradkov A. L., Schöll E. Adaptive control of synchronization in delay-coupled heterogeneous networks of FitzHugh–Nagumo nodes // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2016. Vol. 26, no. 4. P. 1650058. DOI: 10.1142/S0218127416500589.

34. *Lindner B., García-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems // *Phys. Rep.* 2004. Vol. 392, no. 6. P. 321–424. DOI: 10.1016/j.physrep.2003.10.015.
35. *Tass P.A.* Phase Resetting in Medicine and Biology: Stochastic Modelling and Data Analysis. Berlin: Springer, 1999. 329 p. DOI: 10.1007/978-3-540-38161-7.
36. *Holt A.B., Kormann E., Gulberti A., Pötter-Nerger M., McNamara C.G., Cagnan H., Baaske M.K., Little S., Köppen J.A., Buhmann C., Westphal M., Gerloff C., Engel A.K., Brown P., Hamel W., Moll C.K.E., Sharott A.* Phase-dependent suppression of beta oscillations in Parkinson's disease patients // *J. Neurosci.* 2019. Vol. 39, no. 6. P. 1119–1134. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1913-18.2018.
37. *Mau E.T.K., Rosenblum M.* Optimizing charge-balanced pulse stimulation for desynchronization // *Chaos.* 2022. Vol. 32, no. 1. P. 013103. DOI: 10.1063/5.0070036.
38. *Kulminskiy D.D., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Hramov A.E.* Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators // *Nonlinear Dyn.* 2019. Vol. 98, no. 1. P. 735–748. DOI: 10.1007/s11071-019-05224-x.
39. *Кульминский Д.Д., Пономаренко В.И., Сысоев И.В., Прохоров М.Д.* Новый подход к экспериментальному исследованию больших ансамблей радиотехнических генераторов со сложными связями // *Письма в ЖТФ.* 2020. Т. 46, № 4. С. 26–29. DOI: 10.21883/PJTF.2020.04.49046.18018.
40. *Щапин Д.С.* Динамика двух нейроноподобных элементов с подавляющей обратной связью // *Радиотехника и электроника.* 2009. Т. 54, № 2. С. 185–195.
41. *Sysoev I.V., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Bezruchko B.P.* Reconstruction of ensembles of coupled time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 89, no. 6. P. 062911. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.062911.
42. *Kurkin S.A., Kulminskiy D.D., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Astakhov S.V., Hramov A.E.* Central pattern generator based on self-sustained oscillator coupled to a chain of oscillatory circuits // *Chaos.* 2022. Vol. 32, no. 3. P. 033117. DOI: 10.1063/5.0077789.

References

1. Haykin S. *Neural Networks and Learning Machines.* Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall; 2009. 906 p.
2. Ripley BD. *Pattern Recognition and Neural Networks.* Cambridge: Cambridge University Press; 1996. 403 p. DOI: 10.1017/CBO9780511812651.
3. Egmont-Petersen M, de Ridder D, Handels H. Image processing with neural networks — a review. *Pattern Recognition.* 2002;35(10):2279–2301. DOI: 10.1016/S0031-3203(01)00178-9.
4. Dwarakish GS, Rakshith S, Natesan U. Review on applications of neural network in coastal engineering. *Artificial Intelligent Systems and Machine Learning.* 2013;5(7):324–331.
5. Frolov N, Maksimenko V, Lüttjohann A, Koronovskii A, Hramov A. Feed-forward artificial neural network provides data-driven inference of functional connectivity. *Chaos.* 2019;29(9):091101. DOI: 10.1063/1.5117263.
6. Hramov AE, Maksimenko VA, Pisarchik AN. Physical principles of brain–computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states. *Phys. Rep.* 2021;918:1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
7. McCulloch WS, Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics.* 1943;5(4):115–133. DOI: 10.1007/BF02478259.
8. Rabinovich MI, Varona P, Selverston AI, Abarbanel HDI. Dynamical principles in neuroscience. *Rev. Mod. Phys.* 2006;78(4):1213–1265. DOI: 10.1103/RevModPhys.78.1213.
9. Dmitrichev AS, Kasatkin DV, Klinshov VV, Kirillov SY, Maslennikov OV, Shchapin DS, Nekorkin VI. Nonlinear dynamical models of neurons: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2018;26(4):5–58 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
10. Quiroga RQ, Panzeri S. *Principles of Neural Coding.* Boca Raton: CRC Press; 2013. 663 p. DOI: 10.1201/b14756.

11. Yu D, Deng L. Automatic Speech Recognition: A Deep Learning Approach. London: Springer; 2015. 321 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5779-3.
12. Hossain MS, Muhammad G. Emotion recognition using deep learning approach from audio-visual emotional big data. Information Fusion. 2019;49:69–78. DOI: 10.1016/j.inffus.2018.09.008.
13. Kasabov NK. Evolving Connectionist Systems: The Knowledge Engineering Approach. London: Springer; 2007. 451 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-347-5.
14. Lobov S, Mironov V, Kastalskiy I, Kazantsev V. A spiking neural network in sEMG feature extraction. Sensors. 2015;15(11):27894–27904. DOI: 10.3390/s151127894.
15. Virgilio CD, Sossa JH, Antelis JM, Falcón LE. Spiking Neural Networks applied to the classification of motor tasks in EEG signals. Neural Netw. 2020;122:130–143. DOI: 10.1016/j.neunet.2019.09.037.
16. Lobov SA, Chernyshov AV, Krilova NP, Shamshin MO, Kazantsev VB. Competitive learning in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier. Sensors. 2020;20(2):500. DOI: 10.3390/s20020500.
17. Wang X, Hou ZG, Lv F, Tan M, Wang Y. Mobile robots' modular navigation controller using spiking neural networks. Neurocomputing. 2014;134:230–238. DOI: 10.1016/j.neucom.2013.07.055.
18. Chou TS, Bucci LD, Krichmar JL. Learning touch preferences with a tactile robot using dopamine modulated STDP in a model of insular cortex. Front. Neurobot. 2015;9:6. DOI: 10.3389/fnbot.2015.00006.
19. Bing Z, Meschede C, Röhrbein F, Huang K, Knoll AC. A survey of robotics control based on learning-inspired spiking neural networks. Front. Neurobot. 2018;12:35. DOI: 10.3389/fnbot.2018.00035.
20. Lobov SA, Mikhaylov AN, Shamshin M, Makarov VA, Kazantsev VB. Spatial properties of STDP in a self-learning spiking neural network enable controlling a mobile robot. Front. Neurosci. 2020;14:88. DOI: 10.3389/fnins.2020.00088.
21. Croisier H, Dauby PC. Continuation and bifurcation analysis of a periodically forced excitable system. J. Theor. Biol. 2007;246(3):430–448. DOI: 10.1016/j.jtbi.2007.01.017.
22. Feoktistov AV, Anishchenko VS. Dynamics of the FitzHugh–Nagumo system under external periodic force. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2011;19(5):35–44 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-5-35-44.
23. Novikov N, Gutkin B. Role of synaptic nonlinearity in persistent firing rate shifts caused by external periodic forcing. Phys. Rev. E. 2020;101(5):052408. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.052408.
24. Eidum DM, Henriquez CS. Modeling the effects of sinusoidal stimulation and synaptic plasticity on linked neural oscillators. Chaos. 2020;30(3):033105. DOI: 10.1063/1.5126104.
25. Rooy M, Novikov NA, Zakharov DG, Gutkin BS. Interaction between PFC neural networks ultraslow fluctuations and brain oscillations. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2020;28(1):90–97. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-90-97.
26. Andreev AV, Ivanchenko MV, Pisarchik AN, Hramov AE. Stimulus classification using chimera-like states in a spiking neural network. Chaos, Solitons & Fractals. 2020;139:110061. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110061.
27. Ponomarenko VI, Kulminskiy DD, Andreev AV, Prokhorov MD. Assessment of an external periodic force amplitude using a small spike neuron network in a radiophysical experiment. Tech. Phys. Lett. 2021;47(2):162–165. DOI: 10.1134/S1063785021020255.
28. Bezruchko BP, Smirnov DA. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series. Phys. Rev. E. 2001;63(1):016207. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.016207.
29. Smirnov DA, Sysoev IV, Seleznev EP, Bezruchko BP. Reconstructing nonautonomous system models with discrete spectrum of external action. Tech. Phys. Lett. 2003;29(10):824–827. DOI: 10.1134/1.1623857.
30. Yakhno YV, Molkov JI, Mukhin DN, Loskutov EM, Feigin AM. Reconstruction of an evolution operator as a technique of analysis of epileptiform electric brain activity. Izvestiya VUZ. Applied

- Nonlinear Dynamics. 2011;19(6):156–172 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-6-156-172.
31. Sysoeva MV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Sysoev IV. Reconstruction of time-delay systems under external periodic driving. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2013;9(4):613–625 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1304001.
 32. Dahlem MA, Hiller G, Panchuk A, Schöll E. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems. Int. J. Bifurc. Chaos. 2009;19(2):745–753. DOI: 10.1142/S0218127409023111.
 33. Plotnikov SA, Lehnert J, Fradkov AL, Schöll E. Adaptive control of synchronization in delay-coupled heterogeneous networks of FitzHugh–Nagumo nodes. Int. J. Bifurc. Chaos. 2016;26(4):1650058. DOI: 10.1142/S0218127416500589.
 34. Lindner B, García-Ojalvo J, Neiman A, Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems. Phys. Rep. 2004;392(6):321–424. DOI: 10.1016/j.physrep.2003.10.015.
 35. Tass PA. Phase Resetting in Medicine and Biology: Stochastic Modelling and Data Analysis. Berlin: Springer; 1999. 329 p. DOI: 10.1007/978-3-540-38161-7.
 36. Holt AB, Kormann E, Gulberti A, Pötter-Nerger M, McNamara CG, Cagnan H, Baaske MK, Little S, Köppen JA, Buhmann C, Westphal M, Gerloff C, Engel AK, Brown P, Hamel W, Moll CKE, Sharott A. Phase-dependent suppression of beta oscillations in Parkinson’s disease patients. J. Neurosci. 2019;39(6):1119–1134. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1913-18.2018.
 37. Mau ETK, Rosenblum M. Optimizing charge-balanced pulse stimulation for desynchronization. Chaos. 2022;32(1):013103. DOI: 10.1063/5.0070036.
 38. Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Hramov AE. Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators. Nonlinear Dyn. 2019;98(1):735–748. DOI: 10.1007/s11071-019-05224-x.
 39. Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Sysoev IV, Prokhorov MD. A new approach to the experimental study of large ensembles of radioengineering oscillators with complex couplings. Tech. Phys. Lett. 2020;46(2):175–178. DOI: 10.1134/S1063785020020236.
 40. Shchapin DS. Dynamics of two neuronlike elements with inhibitory feedback. J. Commun. Technol. Electron. 2009;54(2):175–184. DOI: 10.1134/S1064226909020089.
 41. Sysoev IV, Prokhorov MD, Ponomarenko VI, Bezruchko BP. Reconstruction of ensembles of coupled time-delay systems from time series. Phys. Rev. E. 2014;89(6):062911. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.062911.
 42. Kurkin SA, Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Astakhov SV, Hramov AE. Central pattern generator based on self-sustained oscillator coupled to a chain of oscillatory circuits. Chaos. 2022;32(3):033117. DOI: 10.1063/5.0077789.



Навроçкая Елена Владимировна — родилась в Алма-Ате (1987), республика Казахстан. Окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2011) по направлению «Биомедицинская инженерия». Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2016, СГУ). Работает в Саратовском университете с 2008 года, в настоящее время — в должности доцента кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Автор более 15 статей в рецензируемых журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
 E-mail: sidakev@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-1649-440X
 AuthorID (eLibrary.Ru): 542544



Кульминский Данил Дмитриевич — родился в Саратове (1991). Окончил Саратовский государственный университет (2014). После окончания СГУ работал научным сотрудником в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН и доцентом кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. В настоящее время работает в Научно-технологическом университете «Сириус» (Сочи). Область научных интересов: теория динамических систем, анализ временных рядов, математическое моделирование. Автор 20 научных статей в отечественных и зарубежных журналах. Стипендиат фонда «Династия».

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
Россия, Краснодарский край, 354340 Сочи, Олимпийский пр., 1
Научно-технологический университет «Сириус»
E-mail: kulminskydd@gmail.com
ORCID: 0000-0002-3936-2813
AuthorID (eLibrary.Ru): 721334



Пonomаренко Владимир Иванович — родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (СГУ, 1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов — статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1579-6465
AuthorID (eLibrary.Ru): 39986



Прохоров Михаил Дмитриевич — родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-4069-9410
AuthorID (eLibrary.Ru): 39985

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Ph.D., Professor, Member of the RAS,
Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Moscow

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
A. N. Chumachenko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov
S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny
Novgorod, Nizhny Novgorod
N. S. Ginzburg, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the RAS, Institute of Applied
Physics of the RAS, Nizhny Novgorod
A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Institute of Radioengineering and Electronics
of the RAS, Moscow
S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl
P. S. Landa, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow
G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Institute of Applied Mathematics of the RAS, Moscow
V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny
Novgorod, Nizhny Novgorod
V. I. Nekorkin, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the RAS,
Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod
A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute for Problems in Mechanical Engineering
of the RAS, St. Petersburg
Yu. M. Romanovsky, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow
V. V. Tuchin, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the RAS,
Saratov State University, Saratov
A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod
V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov
M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh
V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod
S. Boccaletti, Ph.D., Senior Researcher of Institute for Complex Systems
of the National Research Council (CNR), Sesto Fiorentino, Italy
A. V. Kraskov, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology,
Sobell Department, London, UK
N. V. Kuznetsov, Professor, Corresponding Member of the RAS, Saint-Petersburg State
University, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland
G. van Luijckelaar, Professor, Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands
A. K. Lüttjohann, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische
Wilhelms-Universität, Münster, Germany
A. B. Neiman, Dr. of Sciences, Physics and Mathematics, Associate professor
of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA
A. S. Pikovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany
A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid,
Centre for Biomedical Technology, Spain
V. A. Vakorin, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics
Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada

“

Почему, кто хочет обнаружить скрытое, важно не замыкаться в одной области науки, а сохранять связь с другими её областями.

”

Жак Адамар



ISSN 0869-6632

