

Прикладная нелинейная динамика

Кафедра нелинейной физики СГУ

1998

25

2023



Кафедра динамических систем СГУ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
(Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского
(Саратов, Россия)

С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном
исследовательском совете (Флоренция, Италия)

А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН
(Санкт-Петербург, Россия)

В. А. Вакорин, Ph.D., Университет Саймона Фрейзера (Ванкувер, Канада)

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского
(Нижний Новгород, Россия)

Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН
(Нижний Новгород, Россия)

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
(Москва, Россия)

С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова
(Ярославль, Россия)

А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени
святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

А. Люттйоханн, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета
имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
(Москва, Россия)

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского
(Нижний Новгород, Россия)

И. И. Мохов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы
им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН
(Нижний Новгород, Россия)

А. С. Пиковский, доктор наук, Потсдамский университет (Потсдам, Германия)

А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского
(Саратов, Россия)

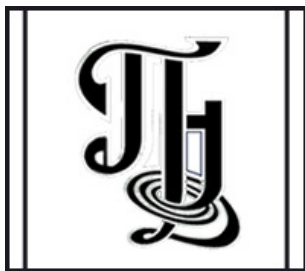
А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А (Саратов, Россия)

В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова
РАН (Москва, Россия)

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (uralpress.ru). Цена свободная

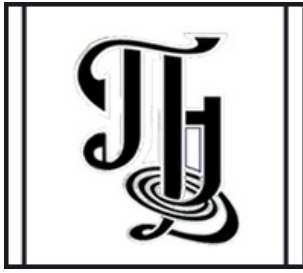
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией М. В. Сысоева
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 12.01.2024
Вышел в свет 31.01.2024
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 16,28 (17,5)
Тираж 100 экз. Заказ № 7-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФС77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru)

The journal is Open Access

Head of Editorial office M. V. Sysoeva
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 12.01.2024. Published 31.01.2024
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 16,28 (17,5)
Edition of 100 copies. Order No. 7-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОТ РЕДАКТОРА

<i>Бегинин Е. Н., Морозова М. А., Савин А. В.</i> К юбилею кафедры нелинейной физики СГУ	5
<i>Кузнецов А. П., Рыскин Н. М.</i> Кафедре динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН — 25 лет	8

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС

<i>Тюрюкина Л. В.</i> Параметрическое взаимодействие колебательных мод в присутствии квадратичной или кубической нелинейности	11
---	----

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

<i>Исаева О. Б., Любченко Д. О.</i> Сравнительный анализ схем скрытой коммуникации, основанных на генераторах со странным аттрактором гиперболического типа и со странным нехаотическим аттрактором	31
<i>Адилова А. Б., Рыскин Н. М.</i> Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Часть 1. Фазовое приближение	42
<i>Хутиева А. Б., Грачев А. А., Бегинин Е. Н., Садовников А. В.</i> Распространение спиновых волн в решетке латерально и вертикально связанных ЖИГ-микроволноводов при изменении угла намагничивания в линейном и нелинейном режимах	57

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

<i>Купцов П. В., Станкевич Н. В.</i> Моделирование динамики нейронных осцилляторов типа Ходжкина–Хаксли при помощи нейронной сети	72
<i>Навроцкая Е. В., Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.</i> Синхронизация ансамбля мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо	96

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

<i>Лобанов Н. Д., Матвеев О. В., Морозова М. А.</i> Влияние нелинейности на брегговские резонансы в связанных магнонных кристаллах	111
<i>Рябченко А. Д., Рыбалова Е. В., Стрелкова Г. И.</i> Воздействие аддитивного шума на химерные и уединенные состояния в нейронных ансамблях	121

C O N T E N T S

EDITORIAL

<i>Beginin E. N., Morozova M. A., Savin A. V.</i> To the anniversary of the Department of Nonlinear Physics of Saratov State University	5
<i>Kuznetsov A. P., Ryskin N. M.</i> Department of Dynamic Systems of Saratov State University on the basis of the SB IRE RAS – 25 years	8

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.
QUANTUM CHAOS

<i>Turukina L. V.</i> Parametric interaction of modes in the presence of quadratic or cubic nonlinearity	11
--	----

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Isaeva O. B., Lubchenko D. O.</i> Comparative analysis of the secure communication schemes based on the generators of hyperbolic strange attractor and strange nonchaotic attractor	31
<i>Adilova A. B., Ryskin N. M.</i> Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay. Part 1. Phase approximation	42
<i>Khutieva A. B., Grachev A. A., Beginin E. N., Sadovnikov A. V.</i> Propagation of spin waves in a lattice of laterally and vertically coupled YIG microwaveguides by changing the magnetization angle in linear and nonlinear modes	57

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

<i>Kuptsov P. V., Stankevich N. V.</i> Modeling of the Hodgkin–Huxley neural oscillators dynamics using an artificial neural network	72
<i>Navrotskaya E. V., Kurbako A. V., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.</i> Synchronisation of the ensemble of nonidentical FitzHugh–Nagumo oscillators with memristive couplings	96

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

<i>Lobanov N. D., Matveev O. V., Morozova M. A.</i> Influence of nonlinearity on the Bragg resonances in coupled magnon crystals	111
<i>Ryabchenko A. D., Rybalova E. V., Strelkova G. I.</i> Influence of additive noise on chimera and solitary states in neural networks	121



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Редакторская заметка
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003086
EDN: UFJAAI

К юбилею кафедры нелинейной физики СГУ

Е. Н. Бегинин✉, *М. А. Морозова*, *А. В. Савин*

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉egbegin@gmail.com, mamorozovama@yandex.ru, avsavin@rambler.ru

Поступила в редакцию 19.06.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. В 2023 году исполнилось 25 лет с момента образования кафедры нелинейной физики Саратовского государственного университета. Кафедрой разработаны и реализуются учебные программы по общему курсу физики, физики нелинейных процессов, физики волновых процессов в магнитных средах и структурах.

Ключевые слова: нелинейная физика, волновые процессы, магнитные среды.

Для цитирования: Бегинин Е. Н., Морозова М. А., Савин А. В. К юбилею кафедры нелинейной физики СГУ // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 5–7. DOI: 10.18500/0869-6632-003086. EDN: UFJAAI

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Кафедра нелинейной физики СГУ была основана в ноябре 1998 года по инициативе ректора СГУ члена-корреспондента РАН, профессора Д. И. Трубецкова, который был ее первым заведующим. Первоначально она называлась кафедрой нелинейных процессов, а с 28 февраля 2000 года обрела свое нынешнее название — кафедра нелинейной физики. С 2000 по 2014 год кафедрой заведовал доктор физико-математических наук, профессор Ю. П. Шараевский, с 2014 по 2018 — доктор физико-математических наук, профессор Н. М. Рыскин. С 2018 года кафедрой заведует кандидат физико-математических наук, доцент Е. Н. Бегинин. Среди первых сотрудников кафедры — профессор Ю. И. Лёвин (декан факультета нелинейных процессов, в состав которого изначально входила кафедра), профессор Б. С. Дмитриев, доценты Е. Н. Бегинин, А. А. Князев, Н. Б. Ковылов, М. А. Морозова, А. Г. Рожнёв, Н. М. Рыскин, Е. П. Селезнев, Л. В. Красичков, Е. С. Мчедлова. В эти годы сформировалась учебная и научная тематика кафедры, был создан физический практикум с лабораториями «Физические основы механики. Колебания и волны», «Молекулярные явления и термодинамические процессы», «Электромагнитные явления», а также другие учебно-научные лаборатории. Первоначально кафедра выпускала студентов по специальности «Физика», а с 2004 года началась подготовка студентов по уникальной специальности

«Физика открытых нелинейных систем» (выпуски 2009–2012). Подготовка по этой специальности осуществлялась только на факультете нелинейных процессов СГУ. В связи с переходом к двухуровневой образовательной системе (бакалавриат/магистратура), с 2009 г. кафедра начала осуществлять подготовку студентов по направлению «Прикладные математика и физика» (ПМФ). Первый выпуск бакалавров состоялся в 2013 г., причем из 13 выпускников 10 получили дипломы с отличием. В 2016 году состоялся первый выпуск магистров. С 8.02.2021 кафедра нелинейной физики входит в структуру Института физики СГУ.

Для бакалавров по направлению ПМФ сотрудники кафедры обеспечивают преподавание базового курса общей физики, а также ряда ключевых дисциплин: теория колебаний, теория динамических систем, теория поля, теоретическая механика, применение программных пакетов в научных исследованиях и др. Для студентов магистратуры разработаны оригинальные учебные курсы: «Основы микромагнитного моделирования», «Методы экспериментального исследования нелинейных процессов», «Микроволновая электродинамика», «Компьютерное моделирование электромагнитных полей в приборах и устройствах СВЧ вакуумной электроники и микроэлектроники», «Математические методы нелинейной физики».

Сотрудниками кафедры также были разработаны и внедрены учебные курсы по базовым разделам общей физики, в том числе и для учащихся других направлений бакалавриата («Радиофизика», «Физика»): «Механика», «Молекулярная физика», «Электричество и магнетизм». В течение ряда лет кафедра обеспечивала преподавание курса физики для студентов факультета компьютерных наук; в настоящее время для студентов этого факультета читаются курсы «Электротехника, электроника и схемотехника ЭВМ», «Электроника и схемотехника».

Сотрудники кафедры являются соавторами ряда методических пособий и задачников по преподаваемым дисциплинам [1–15]. В частности, сотрудники кафедры активно участвовали в написании серии учебных пособий «Современная теория колебаний и волн», которая была издана в начале 2000-х годов в издательстве «Физматлит» по инициативе Д. И. Трубецкого [1–7]. Книги из этой серии рекомендованы Министерством образования РФ для студентов вузов, обучающихся по физическим специальностям. Также сотрудники кафедры ведут активную работу со школьниками: участвовали в организации традиционной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», на протяжении многих лет являются членами жюри олимпиад школьников по физике, авторами ряда оригинальных задач [9, 14].

Исторически сложившаяся тематика научных исследований кафедры включает два направления: «Нелинейные процессы в микроволновых системах» и «Физика волновых процессов в магнитных средах и структурах». В рамках первого направления кафедра тесно взаимодействует с базовой кафедрой динамических систем на базе СФ ИРЭ РАН. В рамках второго — с лабораторией «Магнитные метаматериалы» СГУ. Сотрудники кафедры являются руководителями и исполнителями грантов РНФ и РФФИ, ими опубликовано более 500 статей в ведущих российских и зарубежных научных журналах. Сотрудники, аспиранты и студенты кафедры принимают активное участие в работе научных конференций различного уровня, в сборниках трудов конференций опубликовано более 400 тезисов докладов. За годы существования кафедры ее сотрудниками были защищены 4 докторские диссертации (Рыскин Н. М., Селезнев Е. П., Дмитриев Б. С., Морозова М. А). Более 20 аспирантов кафедры защитили кандидатские диссертации. Кафедра имеет тесные научные связи с научными коллективами Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН и его саратовского филиала, ГО «НПЦ НАН Беларуси по материаловедению» (Белоруссия), Института прикладной физики (Германия), Университета г. Эксетер (Англия) и др.

*Поздравляем всех сотрудников, студентов направления ПМФ, аспирантов
и всех выпускников кафедры с ее двадцатипятилетием!*

*Бегинин Е. Н., Морозова М. А., Савин А. В.
Известия вузов. ПНД, 2024, т. 32, № 1*

Список литературы

1. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: Физматлит, 2000. 272 с.; 2-е изд. М.: URSS, 2017. 312 с.
2. Рожнев А. Г., Трубецков Д. И. Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
3. Кузнецов А. П., Рожнев А. Г., Трубецков Д. И. Линейные колебания и волны. Сборник задач. М.: Физматлит, 2001. 128 с.; 2-е изд. М.: Физматлит, 2008. 128 с.
4. Трубецков Д. И., Мчедлова Е. С., Красичков Л. В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: Физматлит, 2002. 200 с.; 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 212 с.
5. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Савин А. В., Станкевич Н. В. Физика: от оценок к исследованию. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009. 176 с.
6. Кузнецов А. П., Савин А. В., Тюрюкина Л. В. Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Научная книга, 2010. 134 с.
7. Кузнецов А. П., Савин А. В., Седова Ю. В., Тюрюкина Л. В. Бифуркации отображений. Саратов: Издательский центр «Наука», 2012. 196 с.
8. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Мельников Л. А., Савин А. В., Шевцов В. Н. Задачи физических олимпиад. 2-е изд. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. 168 с.
9. Савин А. В., Савин Д. В. Физический практикум. Механика: Учебно-методическое пособие. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2020. 40 с.
10. Дмитриев Б. С., Морозова М. А., Шараевский Ю. П., Лёвин Ю. И. Исследование теплопроводности и диффузии газов (комплекс ЛКТ-6М): Учебно-методическое пособие. Саратов: Рата, 2008. 36 с.
11. Морозова М. А., Бегинин Е. Н., Гришин С. В., Шараевский Ю. П. Функциональная электроника. Слоистые и периодические структуры в магнитоэлектронике: учебное пособие. Саратов: Издательский центр «Наука», 2010. 42 с.
12. Морозова М. А., Шараевский Ю. П. Определение молекулярной массы и плотности газа методом откачки (Комплекс ФПТ1-12): Учебно-методическое пособие. Саратов: Научная книга, 2015. 8 с.
13. Гришин С. В., Бегинин Е. Н., Морозова М. А., Шараевский Ю. П. Функциональная электроника. Устройства магнитоэлектроники: учебное пособие. Саратов: Научная книга, 2009. 28 с.
14. Дмитриев Б. С., Морозова М. А., Бегинин Е. Н., Шараевский Ю. П. Специальная теория относительности. Основы, лекционные демонстрации, примеры и задачи: учебное пособие. Саратов: Рата, 2009. 64 с.
15. Бегинин Е. Н., Морозова М. А., Шараевский Ю. П. Движение механических систем: учебное пособие. Саратов: Научная книга, 2009. 44 с.



Кафедре динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН — 25 лет

А. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: ✉ apkuz@rambler.ru, RyskinNM@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 19.06.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. В 2023 г. кафедре динамических систем Саратовского государственного университета на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН исполнилось 25 лет. За это время на кафедре подготовлены учебные курсы «Нелинейные колебания», «Теория катастроф», «Динамические системы и бифуркации», «Динамический хаос», «Математические методы нелинейной физики» и другие. Выпущена серия учебников и задачников по соответствующим направлениям.

Ключевые слова: динамические системы, бифуркации, хаос, нелинейные колебания.

Для цитирования: Кузнецов А. П., Рыскин Н. М. Кафедре динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН — 25 лет // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 8–10. DOI: 10.18500/0869-6632-003087. EDN: WHWCPP

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Базовая кафедра динамических систем была создана в соответствии с приказом ректора СГУ № 570 к от 10 ноября 1998 г. в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН на основе Лаборатории теоретической нелинейной динамики. Она является одной из старейших базовых кафедр СГУ. С 1998 по 2018 год кафедрой заведовал профессор А. П. Кузнецов. 1 сентября 2018 года кафедру возглавил профессор Н. М. Рыскин. С этого времени базой кафедры стала также Лаборатория вакуумной микро- и наноэлектроники СФ ИРЭ РАН. В разные годы на кафедре работали профессор С. П. Кузнецов, доценты А. В. Савин, Л. В. Тюрюкина и О. Б. Исаева.

Сотрудники кафедры участвовали в создании факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета, в состав которого кафедра входила до 2021 г. Ими была разработана система взаимосвязанных учебных курсов «Нелинейные колебания», «Нелинейные волны», «Теория катастроф», «Динамические системы и бифуркации», «Приложения теории катастроф и бифуркаций», «Динамический хаос», «От порядка к хаосу», «Современные проблемы нелинейной динамики», «Колебания и волны в нелинейных активных средах», «Математические методы нелинейной физики». Была разработана и внедрена система семинарских занятий

по решению задач (большинство оригинальных) и система компьютерных практикумов по этим курсам. Были подготовлены учебники и задачки по этим направлениям [1–11]. В частности, в начале 2000-х годов в издательстве «Физматлит» сотрудниками ФНП СГУ под руководством члена-корреспондента РАН, профессора Д. И. Трубецкова была опубликована серия учебных пособий «Современная теория колебаний и волн», рекомендованная Министерством образования РФ для студентов вузов, обучающихся по физическим специальностям. Из шести учебных пособий четыре написаны при участии сотрудников кафедры [1–4]. Они выдержали несколько изданий, завоевали широкую известность и используются в учебном процессе во многих вузах России и за рубежом, включая МГУ, МФТИ, РУДН, НИУ ВШЭ, Университет ИТМО, ДВФУ, Казанский, Новосибирский, Нижегородский, Башкирский университеты, университет Потсдама (Германия) и другие. Некоторые пособия изданы как приложения к журналу «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» [7, 9].

Отличительная черта учебного процесса на кафедре с момента ее создания — работа с молодежью в рамках живой, развивающейся академической науки. Тематика научных исследований кафедры определяется научными направлениями СФ ИРЭ РАН. В настоящее время они включают различные аспекты физики нелинейных динамических систем, теорию синхронизации, микроволновую электронику. Отметим, что в работе со студентами и аспирантами кроме преподавателей кафедры участвовали сотрудники СФ ИРЭ РАН к.ф.-м.н., с.н.с. И. Р. Сатаев, Ю. В. Седова, В. П. Круглов.

Кафедра активно сотрудничала и сотрудничает со многими ведущими мировыми центрами нелинейной динамики и микроволновой электроники, среди которых университет Потсдама (Германия), университет шт. Калифорния в Беркли (США), Датский технический университет, университет Портсмута (Англия), университет Ольденбург (Германия), университет Фукуи (Япония), Экс-Марсельский университет (Франция) и др.

Всего на кафедре подготовлено более 20 кандидатов наук. Среди аспирантов и студентов кафедры лауреаты грантов Президента РФ для молодых ученых, стипендий Президента РФ для студентов и аспирантов, обладатели медалей Российской академии наук, фонда «Династия» и Фонда содействия отечественной науке, Соросовские студенты и аспиранты.

Сотрудники кафедры по приглашению Д. И. Трубецкова участвовали в создании Лицея прикладных наук. Профессора А. П. Кузнецов и С. П. Кузнецов разработали и прочитали специальные курсы для Лицея: «Как работают и думают физики» [12] и «Избранные вопросы физики и математики». Отметим, что многие выпускники Лицея прикладных наук стали студентами и аспирантами кафедры и успешно защитили кандидатские диссертации, среди них Ю. В. Седова, А. С. Иванова, С. В. Милованов, В. И. Паксютов, Н. В. Станкевич, Ю. П. Емельянова.

Преподаватели кафедры, аспиранты и студенты в течение многих лет активно участвуют в проведении школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», а также олимпиад школьников по физике [13, 14]. Многие учащиеся школ, лицеев и гимназий Саратова занимались на кафедре исследовательской работой по физике, компьютерному моделированию и нелинейной динамике. Проводилась заочная Научная олимпиада для учащихся Саратова и области.

Поздравляем всех сотрудников и выпускников кафедры с ее юбилеем!

Список литературы

1. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.; 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 292 с.; 3-е изд. М.: URSS, 2020. 352 с.
2. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.; 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 356 с.

3. Кузнецов А. П., Рожнев А. Г., Трубецков Д. И. Линейные колебания и волны. Сборник задач. М.: Физматлит, 2001. 128 с.; 2-е изд. М.: Физматлит, 2008. 128 с.
4. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: Физматлит, 2000. 272 с.; 2-е изд. М.: URSS, 2017. 312 с.
5. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М., Исаева О. Б. Нелинейность: От колебаний к хаосу. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006. 184 с.
6. Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 488 с.
7. Кузнецов А. П. Динамические системы и бифуркации. Саратов: Издательский центр «Наука», 2015. 168 с.
8. Кузнецов А. П., Савин А. В., Седова Ю. В., Тюрюкина Л. В. Бифуркации отображений. Саратов: Издательский центр «Наука», 2012. 196 с.
9. Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Станкевич Н. В., Тюрюкина Л. В. Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр «Наука», 2013. 252 с.
10. Кузнецов А. П., Емельянова Ю. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация в задачах. Саратов: Издательский центр «Наука», 2010. 256 с.
11. Рыскин Н. М. Колебания и волны в нелинейных активных средах. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2017. 104 с.; 2-е изд. М.: URSS, 2023. 198 с.
12. Кузнецов А. П. Как работают и думают физики. 2-е изд. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006. 172 с.
13. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Мельников Л. А., Савин А. В., Шевцов В. Н. Задачи физических олимпиад. 2-е изд. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. 168 с.
14. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Савин А. В., Станкевич Н. В. Физика: от оценок к исследованию. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009. 176 с.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Научная статья
УДК 517.9:621.373.7

DOI: 10.18500/0869-6632-003082
EDN: YLPOLW

Параметрическое взаимодействие колебательных мод в присутствии квадратичной или кубической нелинейности

Л. В. Тюрюкина^{1,2}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ✉turukinalv@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.04.2023, принята к публикации 17.10.2023,
опубликована онлайн 9.12.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. Цель работы — исследование динамики систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, сконструированных с использованием механического формализма Лагранжа и описывающих параметрическое взаимодействие осцилляторов (колебательных мод) в присутствии квадратичной или кубической нелинейности общего вида, и ее сопоставление с динамикой моделей Вышкинд–Рабиновича и Рабиновича–Фабриканта с целью определения их возможностей и ограничений при моделировании связанных осцилляторов указанного выше типа. **Методы.** Исследование основано на численном решении методами теории динамического хаоса полученных аналитически дифференциальных уравнений. **Результаты.** Для обеих систем дифференциальных уравнений второго порядка были построены карты показателей Ляпунова на плоскости выбранных параметров; зависимости спектра показателей Ляпунова от параметра, задающего диссипацию осцилляторов; временные реализации обобщенных координат осцилляторов и их амплитуд; проекции аттракторов на фазовые плоскости осцилляторов. Было проведено сопоставление результатов, полученных для исследуемых систем, с известными результатами для моделей Вышкинд–Рабиновича и Рабиновича–Фабриканта, которые представляют собой полученные методом медленно меняющихся амплитуд трехмерные действительные аппроксимации указанных выше систем. **Заключение.** Исследование сконструированных систем показало, что в пространстве параметров наблюдаются области, отвечающие как различным регулярным режимам, таким как положение равновесия, предельный цикл, двухчастотные торы, так и хаотическим режимам. Для обеих систем было показано, что переход к хаосу осуществляется в результате последовательности бифуркаций удвоения периода торов. Кроме того, сопоставление динамики исследуемых систем с динамикой моделей Вышкинд–Рабиновича и Рабиновича–Фабриканта позволяет утверждать, что если модель Вышкинд–Рабиновича достаточно хорошо предсказывает динамику соответствующей исходной системы дифференциальных уравнений второго порядка, то модель Рабиновича–Фабриканта таким свойством не обладает.

Ключевые слова: параметрическое взаимодействие осцилляторов, хаотические аттракторы, формализм Лагранжа, показатели Ляпунова.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-12-00121, <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>.

Для цитирования: Тюрюкина Л. В. Параметрическое взаимодействие колебательных мод в присутствии квадратичной или кубической нелинейности // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 11–30. DOI: 10.18500/0869-6632-003082. EDN: YLPOLW

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Parametric interaction of modes in the presence of quadratic or cubic nonlinearity

L. V. Turukina^{1,2}

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

²Saratov State University, Russia

E-mail: ✉turukinalv@yandex.ru

Received 28.04.2023, accepted 17.10.2023, available online 9.12.2023,

published 31.01.2024

Abstract. The purpose of this work is a study of the dynamics of the systems of ordinary differential equations of the second order, which is obtained using the Lagrange formalism. These systems describe the parametric interaction of oscillators (modes) in the presence of a general quadratic or cubic nonlinearity. Also, we compare the dynamics of the systems of ordinary differential equations of the second order and dynamics of the Vyshkind–Rabinovich and Rabinovich–Fabrikant models in order to determine the possibilities of the latter models when modeling coupled oscillators of the above type. **Methods.** The study is based on the numerical solution using the methods of the theory of the obtained analytically differential equations. **Results.** For both systems of second-order differential equations, is was presented a chart of in the parameter plane, a graphs of Lyapunov exponents at the value of the parameter that specifies the dissipation of oscillators, a time dependences of the generalized coordinates of oscillators and its amplitudes, portraits of attractors, a projection of the attractors on a phase planes of oscillators. A comparison with the dynamics of the Vyshkind–Rabinovich and Rabinovich–Fabrikant models is carried out. These models are three-dimensional real approximations of the above systems obtained by the method of slowly varying amplitudes. **Conclusion.** The study of the constructed systems showed that in the parameter space there are regions corresponding to both various regular regimes, such as the equilibrium position, limit cycle, two-frequency tori, and chaotic regimes. For both systems, it was shown that the transition to chaos occurs as a result of a sequence of period doubling bifurcations of the tori. In addition, a comparison of the dynamics of the constructed systems with the dynamics of the Vyshkind–Rabinovich and Rabinovich–Fabrikant models allows us to assert that if the Vyshkind–Rabinovich model predicts the dynamics of the corresponding initial system well enough, then the Rabinovich–Fabrikant model does not have such a property.

Keywords: parametric interaction of the oscillators, chaotic attractors, Lagrange formalism, Lyapunov exponents.

Acknowledgements. Research was carried out under support of the Russian Science Foundation (project no. 21-12-00121), <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>.

For citation: Turukina LV. Parametric interaction of modes in the presence of quadratic or cubic nonlinearity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(1):11–30. DOI: 10.18500/0869-6632-003082

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Параметрическое взаимодействие волновых или колебательных мод в нелинейных системах встречается в различных областях естествознания [1–9]. Общей моделью, описывающей такое взаимодействие, служит система, которую называют резонансным триплетом, предполагая, что в нелинейной системе имеет место слабое взаимодействие трех колебательных мод (основной моды и двух ее сателлитов), частоты которых удовлетворяют условию параметрического резонанса. Простейший случай относится к вырожденному параметрическому резонансу, когда частоты сателлитов одинаковы и задача сводится к рассмотрению взаимодействия двух колебательных мод. Такое предположение облегчает рассмотрение и делает анализ более обозримым, поскольку динамика зависит от меньшего числа параметров.

Одним из примеров таких систем служат предложенные в 70-х годах прошлого века модели Вышкинд–Рабиновича [8] и Рабиновича–Фабриканта [9]. В работе [8] авторы рассматривали задачу о слабом взаимодействии на квадратичной нелинейности трех колебательных мод, частоты

которых подчинены условию параметрического резонанса $\omega_2 = \omega_1 + \omega_0$. Причем если в такой системе имеет место возбуждение высокочастотной моды вследствие линейной неустойчивости, а низкочастотные моды характеризуются затуханием, то будет наблюдаться насыщение колебаний, определяемое параметрическим распадом. Для случая вырожденного резонанса авторы работы [8] получили модель в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z + \delta y - 2y^2 + \gamma x, \\ \dot{y} &= -\delta x + 2xy + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(x + 1).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, y, z — динамические переменные, а γ и δ — параметры. В работах [8, 10] показано, что динамика такой системы может становиться хаотической, а переход к хаосу происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода предельного цикла (рис. 1, а).

Вторая модель была получена в работе [9]. В ней авторы рассматривали задачу о модуляционной неустойчивости и возникновении хаоса при параметрическом взаимодействии трех мод в неравновесной диссипативной среде с кубической нелинейностью со спектрально узким усилением. Как и для предыдущей модели, в случае вырожденного резонанса, задача сводится при ряде упрощающих предположений к конечномерной системе дифференциальных уравнений относительно трех действительных переменных

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(z - 1 + x^2) + \gamma x, \\ \dot{y} &= x(3z + 1 - x^2) + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(v + xy),\end{aligned}\tag{2}$$

где x, y, z — динамические переменные, а γ и v — параметры. Исследования последних лет показали, что система (2) демонстрирует достаточно богатую динамику: регулярные и хаотические

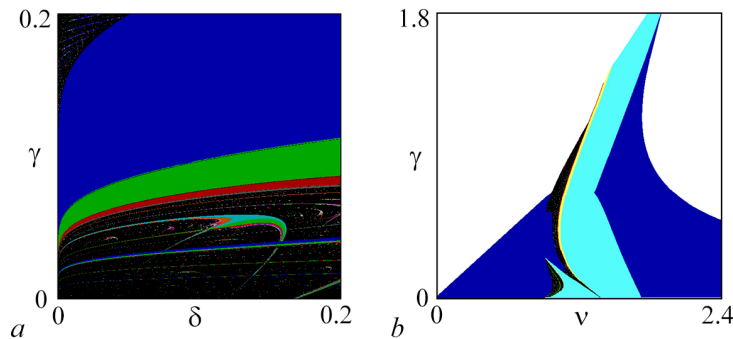


Рис. 1. а — Карта динамических режимов модели Вышкинд–Рабиновича (1), построенная на плоскости параметров (δ, γ) . Карта взята из работы [10]. На карте синий цвет отвечает предельному циклу периода 1, зеленый — предельному циклу периода 2, красный — предельному циклу периода 4, и т. д., черный — хаотическому аттрактору. б — Карта динамических режимов модели Рабиновича–Фабриканта (2), построенная на плоскости параметров (v, γ) . Карта взята из работы [18]. На карте синий цвет отвечает положению равновесия, голубой — предельному циклу периода 1, желтый — предельному циклу периода 2, красный — предельному циклу периода 4, и т. д., черный — хаотическому аттрактору, а белый — убеганию траектории на бесконечность (цвет онлайн)

Fig. 1. а — Chart of dynamical regimes of the Vyshkind–Rabinovich model (1) at (δ, γ) parameter plane. The chart taken from the work [10]. Blue color corresponds to the period one limit cycle, the green color correspond to the period two limit cycle, the red color correspond to the period four limit cycle, etc., the black color correspond to the chaos. б — Chart of dynamical regimes of the Rabinovich–Fabrikant model (2) at parameter plane (v, γ) . The chart taken from a work [18]. At the chart the blue color correspond to the equilibrium point, the light blue color correspond to the period one limit cycle, the yellow color correspond to the period two limit cycle, the red color correspond to the period four limit cycle, etc., the black color correspond to the chaos, the white color correspond to the regime when the trajectory go to infinity (color online)

аттракторы разной топологии, мультистабильность, и т. д. а переход к хаосу, как и для предыдущей модели, происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода предельного цикла (рис. 1, b) [11–20].

Заметим, что модели Вышкинд–Рабиновича (1) и Рабиновича–Фабриканта (2) носят универсальный характер, так как описывают системы различной физической природы, многие из которых имеют прикладное значение [1, 2, 6, 11, 21, 22].

Отметим, однако, что обе модели были получены при ряде упрощающих предположений для частных случаев нелинейных уравнений относительно комплексных амплитуд, представляющих собой обобщения известной модели Ландау, и определенным образом подобранных квадратичной и кубической нелинейности. В то же время, в работе [19] авторы предложили методологию, основанную на механическом формализме Лагранжа, позволяющую описать параметрическое взаимодействие осцилляторов (колебательных мод) в системах с нелинейностью общего вида при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений (осцилляторного типа) второго порядка относительно действительных переменных. Идея предложенного в работе [19] метода состоит в следующем. Пусть имеется система осцилляторов, описываемая уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Здесь

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (m_n \dot{x}_n^2 - k_n x_n^2) - U(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (4)$$

функция Лагранжа, а

$$R(x_1, x_1, \dots, x_N) = \sum_{n=1}^N p_n \bar{\gamma}_n \dot{x}_n^2 \quad (5)$$

функция Рэлея, определяющая диссипацию входящую в систему. Потенциал взаимодействия $U(x_1, x_2, \dots, x_N)$ задан полиномом, степень которого зависит от того какую нелинейность необходимо получить и который полностью симметричен относительно перестановки осцилляторов. Тогда уравнения Лагранжа можно записать следующим образом

$$\ddot{x}_j + 2p_j \frac{\bar{\gamma}_j}{m_j} \dot{x}_j + \omega_j^2 x_j + \frac{1}{m_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Здесь x_j — обобщенные координаты осцилляторов, $\bar{\gamma}_j$ — коэффициенты диссипации осцилляторов, $\omega_j = \sqrt{k_j/m_j}$ — собственные частоты осцилляторов, m_j — массы осцилляторов. Отметим, что величина p_n будет принимать следующие значения: $p_n = -1$, если коэффициент диссипации отрицательный, и $p_n = 1$, если — положительный. Очевидно, что конкретный вид системы (6) будет зависеть от числа осцилляторов, вида потенциала взаимодействия, резонансного условия, наложенного на собственные частоты осцилляторов.

В настоящей работе проводится исследование наиболее простого случая — параметрического взаимодействия двух осцилляторов (колебательных мод). Рассмотрены две системы. Первая представляет собой систему двух (основная мода и ее сателлит) параметрически взаимодействующих осцилляторов в присутствии квадратичной нелинейности общего вида, а вторая — в присутствии кубической нелинейности общего вида. Для обеих систем коэффициенты диссипации выберем положительным для сателлита и отрицательным для основной моды. А резонансные условия соответственно такими же, как для моделей Вышкинд–Рабиновича (случай квадратичной нелинейности) и Рабиновича–Фабриканта (случай кубической нелинейности). Динамика обеих систем исследована численно: в пространстве выбранных параметров найдены области

регулярной и хаотической динамики и исследована их трансформация при изменении остальных параметров, входящих в уравнения; описан переход от регулярной динамики к хаотической. Проведено сопоставление полученных результатов с результатами, известными для моделей Вышкинд–Рабиновича и Рабиновича–Фабриканта, с целью определения их возможностей и ограничений при моделировании связанных осцилляторов указанного выше типа.

1. Параметрическое взаимодействие двух осцилляторов в случае квадратичной нелинейности общего вида

Сначала рассмотрим задачу о параметрическом взаимодействии двух осцилляторов (колебательных мод) в присутствии квадратичной нелинейности общего вида. В этом случае потенциал взаимодействия $U(x_1, x_2, \dots, x_N)$ запишем в следующем виде:

$$U(x_1, x_2) = -\frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3) - \mu(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1), \quad (7)$$

где μ — параметр, характеризующий нелинейное взаимодействие (параметр нелинейности), а функция Рэля будет записана как

$$R(x_1, x_2) = -\bar{\gamma}_1 \dot{x}_1^2 + \bar{\gamma}_2 \dot{x}_2^2. \quad (8)$$

Тогда уравнения Лагранжа (6) в явном виде можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\frac{\bar{\gamma}_1}{m_1}\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \frac{1}{m_1}(x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_2^2) &= 0, \\ \ddot{x}_2 - 2\frac{\bar{\gamma}_2}{m_2}\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \frac{1}{m_2}(x_2^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_1^2) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, для удобства исследования, введем новые параметры. А именно $\gamma_j = \bar{\gamma}_j/m_j$ — параметр диссипации и $\alpha_j = 1/m_j$ — параметр нелинейного взаимодействия. Тогда система (9) примет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \alpha_1(x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_2^2) &= 0, \\ \ddot{x}_2 - 2\gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \alpha_2(x_2^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_1^2) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь основной моде отвечает осциллятор с индексом 2, а сателлиту — с индексом 1. Отметим, что в дальнейшем будет исследоваться система (10), которую будем называть исходной системой.

Пусть резонансное условие имеет вид $\omega_2 \approx 2\omega_1$. Тогда, предположив, что нелинейность и диссипация малы, то есть амплитуды осцилляторов за характерный интервал времени меняются незначительно, применим к системе (10) метод медленных амплитуд. Для этого представим обобщенные координаты осцилляторов в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_1^* e^{-i\omega_1 t}, \\ x_2 &= A_2 e^{i\omega t} + A_2^* e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (11)$$

и наложим дополнительное условие

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 e^{i\omega_1 t} - \dot{A}_1^* e^{-i\omega_1 t} &= 0, \\ \dot{A}_2 e^{i\omega t} - \dot{A}_2^* e^{-i\omega t} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где A_j — комплексные амплитуды осцилляторов, а $\omega = 2\omega_1$.

После подстановки выражений (11), (12) в уравнения (10), усреднения по времени и приведения подобных слагаемых для новых комплексных амплитуд a_j , где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mu\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{2\omega_1} A_1, \\ a_2 &= \frac{\mu\alpha_1}{\omega_1} A_2, \end{aligned} \quad (13)$$

получим следующие амплитудные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + 2\gamma_1 a_1 &= -ia_1^* a_2, \\ \dot{a}_2 - 2\gamma_2 a_2 - i\delta a_2 &= -ia_1^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\delta = \omega_1 - \omega = \omega_2 - 2\omega_1$ – отстройка частоты от резонанса. Отметим, что система (14) совпадает с аналогичной системой, полученной в работах [8, 10], которая при переходе к действительным амплитудам и фазам сводится к модели Вышкинд–Рабиновича (1), если положить $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma$, $\delta = -\delta$. Очевидно, что для системы (14), действуя аналогично работам [8, 10], можно получить модификацию модели Вышкинд–Рабиновича (1), в которой будет присутствовать параметр γ_1 . Однако, как будет показано далее, влияние параметра диссипации γ_1 на динамику системы (10) состоит лишь в перемасштабировании плоскости параметров. Поэтому в настоящей работе ограничимся лишь исследованием динамики системы (10).

Теперь исследуем динамику системы (10). Для начала построим для нее карты показателей Ляпунова на плоскости параметров (δ, γ_2) (рис. 2). Они строились следующим образом. В каждой

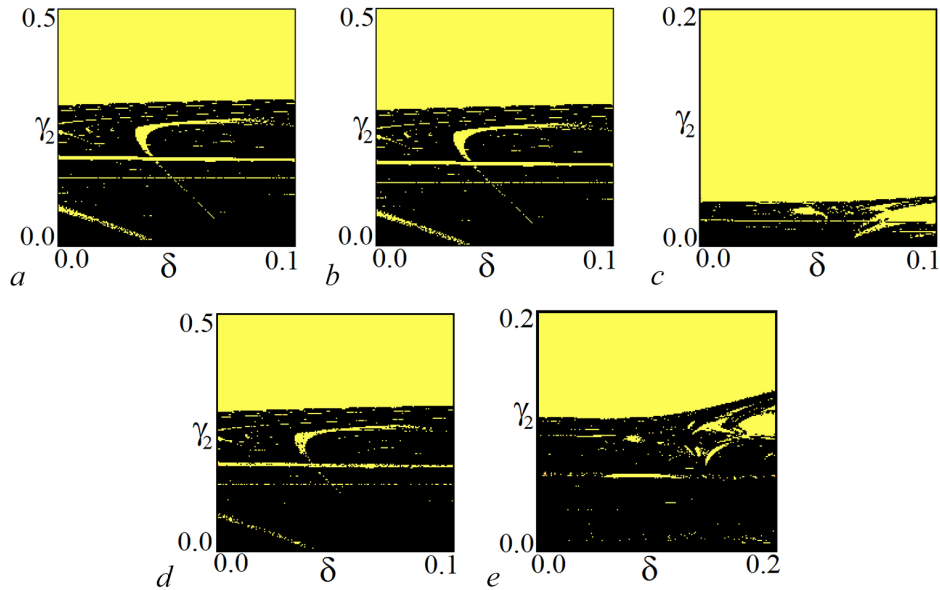


Рис. 2. Карты показателей Ляпунова системы (10), построенные на плоскости параметров (δ, γ_2) . a – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; b – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 0.25$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; c – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0.25$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; d – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.5$; e – $\omega_1 = 60\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Charts of Lyapunov exponents of the system (10) and its enlarged fragment at (δ, γ_2) parameter plane. a – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; b – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 0.25$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; c – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 0.25$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$; d – $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.5$; e – $\omega_1 = 60\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ (color online)

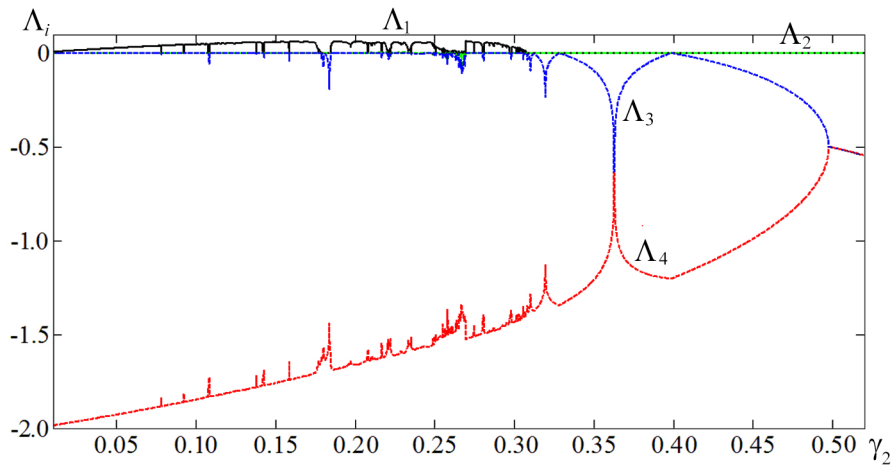


Рис. 3. График зависимости показателей Ляпунова системы (10) от параметра γ_2 . $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\delta = 0.08$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Graphs of Lyapunov exponents of the system (10) at the value of the parameter γ_2 . $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\delta = 0.08$ (color online)

точке плоскости численно вычислялись четыре (полный спектр) показателя Ляпунова¹, как это сделано, например, в работах [23–25]. После чего точка окрашивалась в определенный цвет в зависимости от сигнатуры показателей. На картах, представленных на рис. 2, используется следующая цветовая палитра: желтый цвет отвечает двухчастотному тору, когда первый и второй показатели нулевые, а третий и четвертый отрицательные; черный цвет отвечает хаотическому режиму — старший показатель положительный, второй и третий нулевые, а четвертый отрицательный.

На рис. 2, а представлена карта показателей Ляпунова системы (10), построенная для следующих значений параметров $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, то есть для случая, когда система (14) полностью совпадает с аналогичной системой, полученной в работах [8, 10]. Другими словами, это случай, когда модель Вышкинд–Рабиновича (1) можно рассматривать как трехмерную действительную аппроксимацию исходной системы (10). Соответственно можно сопоставить их динамику. Из сопоставления рис. 2, а и рис. 1, а видно, что, с точностью до масштабного преобразования по осям, между ними наблюдается очень хорошее соответствие. А именно, в верхней части обеих карт наблюдаются области регулярной динамики. В случае модели Вышкинд–Рабиновича (1) это предельные циклы различных периодов, а в случае системы (10) — двухчастотные торы. В нижней части обеих карт наблюдаются области хаотической динамики, внутри которых присутствуют области регулярной динамики. Легко показать, что при уменьшении параметра γ_2 в системе (10), аналогично модели Вышкинд–Рабиновича (1), будет наблюдаться переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, только удваиваться теперь будут не предельные циклы, а торы. Чтобы это показать, для системы (10) построим зависимость показателей Ляпунова от параметра γ_2 при фиксированном значении параметра $\delta = 0.08$. Соответствующий график представлен на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что при значениях параметра $\gamma_2 > 0.31$ первый и второй показатели нулевые, а третий и четвертый отрицательные, что отвечает динамическому режиму в виде двухчастотного тора. При этом изменение величины третьего показателя при уменьшении параметра γ_2 типично для систем, в которых имеет место переход к хаосу через последовательность

¹Равенство нулю показателей Ляпунова проверялось с точностью до допуска, величина которого составляла 10^{-4} , точность вычисления самих показателей составляла порядка 10^{-5} . Время вычисления показателей составляло 10^7 . Следует отметить при этом, что вид карт на плоскости параметров существенно не меняется при увеличении длительности и точности расчетов.

бифуркаций удвоения периода [26]. А именно, его величина сначала уменьшается по модулю, пока не коснется оси $\Lambda_j = 0$, потом увеличивается и т. д. На рис. 4, *a, b* представлены временные зависимости обобщенных координат осцилляторов x_1 и x_2 (левая колонка), а также величин $|a_1|$ и $|a_2|$ (средняя колонка) для тора периода один (рис. 4, *a*) и тора периода два (рис. 4, *b*). Показатели Ляпунова равны соответственно $\Lambda_1 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.11171 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -0.98831 \pm 0.00001$ и $\Lambda_1 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.09324 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -1.20678 \pm 0.00001$.

При дальнейшем уменьшении параметра γ_2 старший показатель Ляпунова становится положительным и в системе (10) наблюдается хаотический режим. Соответствующие временные зависимости обобщенных координат осцилляторов x_1 и x_2 (левая колонка) и величин $|a_1|$ и $|a_2|$ (средняя колонка) представлены на рис. 4, *c*, а показатели Ляпунова имеют значения $\Lambda_1 = 0.06233 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -1.66311 \pm 0.00001$. Отметим, что все временные реализации на рис. 4 демонстрируют типичное для представленных режимов поведение.

В правой колонке рис. 4 представлены проекции соответствующих аттракторов системы (10) на плоскости обобщенных координат первого и второго осцилляторов. Так, на рис. 4, *a* представлен аттрактор в виде тора периода один, на рис. 4, *b* — аттрактор в виде тора периода два, а на рис. 4, *c* — хаотический аттрактор. Отметим, что диапазоны изменения обобщенных скоростей осцилляторов y_1, y_2 и обобщенных координат осцилляторов x_1, x_2 отличаются на порядок. Также у проекций аттракторов, отвечающих торам, независимо от их периода, наблюдается четко выраженная внутренняя структура, а вот у хаотического аттрактора такой структуры нет.

Отметим, что система (10) содержит достаточно большое число параметров, поэтому следующим шагом в исследовании, очевидно, является анализ того, как изменение этих параметров влияет на ее динамику. Сначала изменим параметр диссипации γ_1 . Соответствующая карта показателей Ляпунова системы (10) представлена на рис. 2, *b*. Из сопоставления этого рисунка с рис. 2, *a* видно, что параметр диссипации γ_1 , играет роль масштабного фактора. Его уменьшение приводит к сжатию карты по обеим осям. Как результат — переход от регулярных режимов к хаотическим происходит при существенно меньших значениях параметра γ_2 , а в области хаоса справа появляются новые структуры, отвечающие регулярным режимам (сравним рис. 2, *a* и 2, *c*).

Теперь рассмотрим, как на динамику системы (10) влияют параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие. А именно, параметры μ и $\alpha_{1,2}$. На рис. 2, *c* представлена карта показателей Ляпунова системы (10), построенная для $\mu = 0.25$. Из сопоставления рис. 2, *a* и 2, *c* видно, что карты, построенные для $\mu = 1$ и $\mu = 0.25$ выглядят практически идентичными, демонстрируя лишь незначительный сдвиг вниз границы перехода от регулярных режимов к хаотическим. Отметим, однако, что при $\mu = 0$ система (10) превращается в систему двух не связанных осцилляторов. При этом у первого осциллятора диссипация положительная, а у второго — отрицательная, то есть колебания первого осциллятора будут затухать, а второго — неограниченно нарастать (убегать на бесконечность). В случае $\mu \neq 0$, даже если μ очень мало, в системе (10) будет иметь место параметрическое взаимодействие между осцилляторами. Это приведет к обмену энергией между осцилляторами и при превышении параметром μ некоторого порогового значения в системе будет наблюдаться насыщение колебаний. На рис. 5 представлены графики зависимости функций $U_1 = x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_2^2$ и $U_2 = x_2^2 + 2\mu x_1 x_2 + \mu x_1^2$ от параметра μ , иллюстрирующие данный процесс. Графики построены для следующих значений параметров: $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\delta = 0.08$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.45$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Из рисунка видно, что при $\mu = 0$, $U_1 = 0$, а $U_2 \rightarrow \infty$. С ростом μ U_1 растет, а U_2 уменьшается, и при $\mu \approx 0.16$ их значения становятся одинаковыми. Если и далее увеличивать параметр μ , то значения U_1 и U_2 , хоть и меняются незначительно, но будут оставаться близкими. Таким образом, параметр μ ответственен за установление в системе (10)

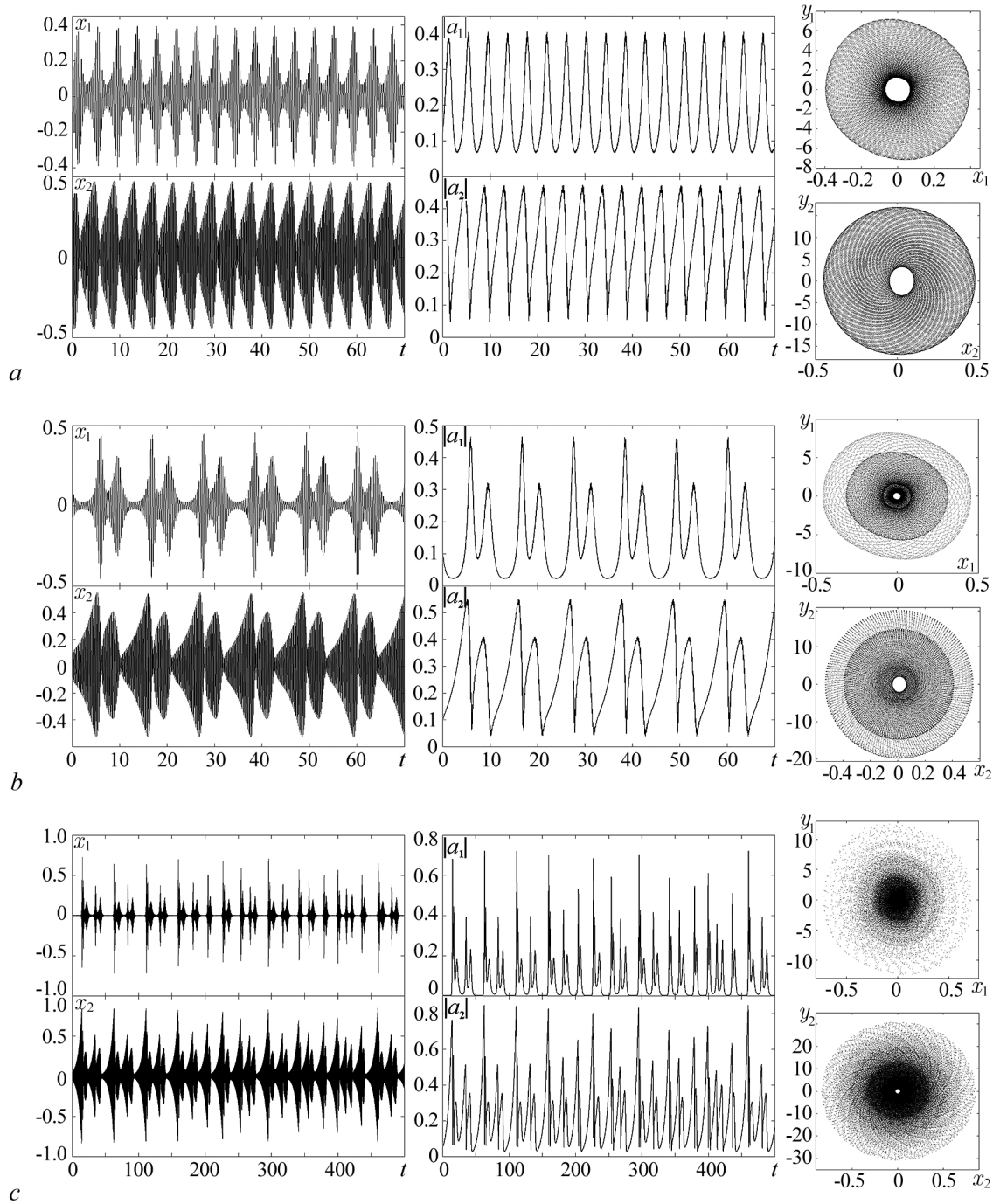


Рис. 4. Временные зависимости обобщенных координат осцилляторов x_1 , x_2 (левая колонка) и величин $|a_1|$, $|a_2|$ (средняя колонка) и проекции аттракторов на плоскости первого и второго осцилляторов (правая колонка) системы (10): a – тор периода один $\gamma_2 = 0.45$; b – тор периода два $\gamma_2 = 0.35$; c – хаотический режим $\gamma_2 = 0.2$. Остальные параметры: $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\delta = 0.08$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$

Fig. 4. At the left column present the time dependencies of the generalized coordinates of oscillators x_1 , x_2 of the system (10). At the middle column present the time dependencies of the $|a_1|$, $|a_2|$ of the system (10). At the right column present the projection of the attractors on a (x_1, y_1) and (x_2, y_2) plane of the system (10). a – The two-frequency period one torus, $\gamma_2 = 0.45$; b – the two-frequency period two torus, $\gamma_2 = 0.35$; c – the chaos, $\gamma_2 = 0.2$. Other parameters are $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\delta = 0.08$, $\gamma_1 = 1$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$

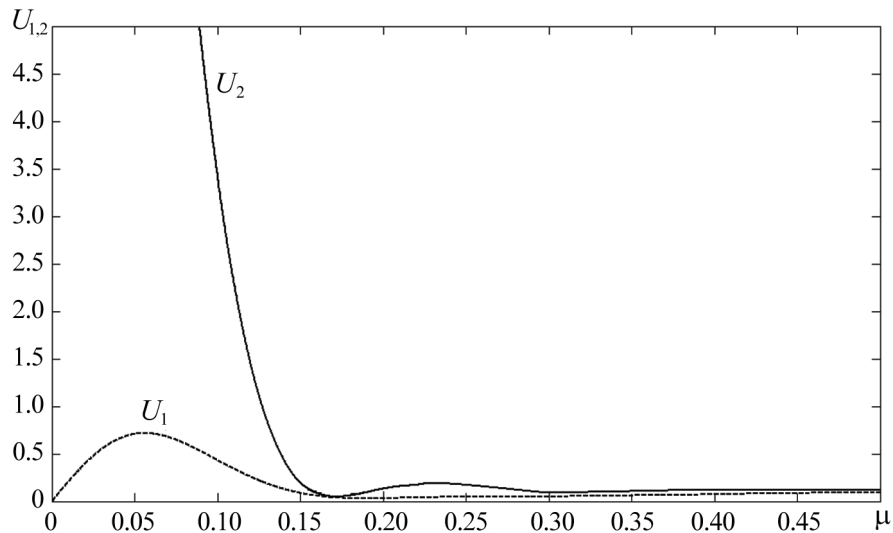


Рис. 5. График зависимости функций $U_{1,2}$ от параметра μ . $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\delta = 0.08$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.45$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$

Fig. 5. Graphs of the functions $U_{1,2}$ at the value of the parameter μ . $\omega_1 = 6\pi$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta$, $\delta = 0.08$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.45$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$

насыщения колебаний. Как только это произойдет ($\mu > 0.16$), параметр μ слабо, особенно по сравнению, например, с параметром диссипации, влияет на динамику рассматриваемой системы. Поэтому все исследования системы (10) проводились в той области пространства параметров, где насыщение колебаний установилось.

И, наконец, изменим частоту первого осциллятора ω_1 , увеличив ее в десять раз. Соответствующая карта показателей Ляпунова системы (10) представлена на рис. 2, e. Из сопоставления рисунков (см. рис. 2, a и рис. 2, e) видно, что увеличение частот первого осциллятора, так же, как и изменение параметра диссипации, приводит к масштабному преобразованию карты: наблюдаемая картина областей регулярных и хаотических режимов сжимается по осям. Как следствие, переход от регулярных режимов к хаосу происходит при меньших значениях параметра γ_2 .

В заключение данной части отметим, что не все слагаемые, входящие в потенциал взаимодействия $U(x_1, x_2)$, являются резонансными и дают вклад в амплитудные уравнения (14). Однако, если в уравнениях системы (10) оставить только резонансные слагаемые, а именно $2\mu x_1 x_2$ в первом уравнении и μx_1^2 во втором, то динамика системы (10) практически не изменится: опять будет иметь место лишь масштабное преобразование пространства параметров. Поэтому можно утверждать, что нерезонансные слагаемые, входящие в потенциал взаимодействия $U(x_1, x_2)$, слабо влияют на динамику системы (10).

2. Параметрическое взаимодействие двух осцилляторов в случае кубической нелинейности общего вида

Теперь рассмотрим задачу о параметрическом взаимодействии двух осцилляторов (колебательных мод) в присутствии кубической нелинейности общего вида. В этом случае потенциал взаимодействия $U(x_0, x_1)$ примет следующий вид:

$$U(x_0, x_1) = \frac{1}{4} (x_0^4 + x_1^4) + \beta (x_0^3 x_1 + x_1^3 x_0) + \frac{3}{2} \mu x_1^2 x_0^2. \quad (15)$$

Здесь μ, β — параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие (параметры нелинейности). В свою очередь функцию Рэля запишем в виде:

$$R(x_0, x_1) = \frac{1}{2} (\bar{\gamma}_0 \dot{x}_0^2 - \bar{\gamma}_1 \dot{x}_1^2). \quad (16)$$

Тогда уравнения Лагранжа (6) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 - \gamma_0 \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \alpha_0 (x_0^3 + \beta(3x_0^2 x_1 + x_1^3) + 3\mu x_0 x_1^2) &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha_1 (x_1^3 + \beta(3x_1^2 x_0 + x_0^3) + 3\mu x_1 x_0^2) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь так же, как и в предыдущем разделе, введены новые параметры: $\gamma_j = \bar{\gamma}_j/m_j$ — параметр диссипации и $\alpha_j = 1/m_j$ — параметр нелинейного взаимодействия. В данном случае основной моде отвечает осциллятор с индексом 0, а спутнику — с индексом 1. Отметим, что в дальнейшем систему (17) будем называть исходной системой.

Пусть резонансное условие имеет вид $\omega_0 \approx \omega_1$. Тогда аналогично предыдущему разделу в предположении малой нелинейности и диссипации, применим к системе (17) метод медленных амплитуд, представив обобщенные координаты осцилляторов в виде

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 e^{i\omega_0 t} + a_0^* e^{-i\omega_0 t}, \\ x_1 &= a_1 e^{i\omega_1 t} + a_1^* e^{-i\omega_1 t}, \end{aligned} \quad (18)$$

и наложив дополнительное условие

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 e^{i\omega_0 t} - \dot{a}_0^* e^{-i\omega_0 t}, \\ \dot{a}_1 e^{i\omega_1 t} - \dot{a}_1^* e^{-i\omega_1 t}, \end{aligned} \quad (19)$$

где a_j — комплексные амплитуды осцилляторов.

Подставим выражения (18), (19) в уравнения (17). Действуя аналогично работам [9, 19], после усреднения по времени и приведения подобных слагаемых, с учетом возможного отклонения по частоте от резонанса $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1 \neq 0$ в показателе экспоненты, получим следующие уравнения для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= \frac{1}{2} \gamma_0 a_0 + i \frac{3}{2\omega_0 m_0} [\mu a_0^* a_1^2 e^{-2i\Delta\omega t} + (|a_0|^2 + 2\mu |a_1|^2) a_0], \\ \dot{a}_1 &= -\frac{1}{2} \gamma_1 a_1 + i \frac{3}{2\omega_1 m_1} [\mu a_1^* a_0^2 e^{i\Delta\omega t} + (|a_1|^2 + 2\mu |a_0|^2) a_1]. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что система (20), с точностью до замены коэффициентов перед слагаемыми, аналогична системе, полученной в работе [19]², которая при переходе к действительным амплитудам и фазам сводится к модели Рабиновича–Фабриканта (2) при условии $\mu = 1$. Динамика последней была подробно изучена в работах [18–20].

Как и в предыдущем разделе, исследование динамики системы (17) начнем с построения карт показателей Ляпунова. Соответствующие карты и их увеличенные фрагменты, построенные на плоскости (γ_0, γ_1) , представлены на рис. 6. На этих картах используется следующая цветовая

²Отметим, что в работе [19] рассматривалась система из трех связанных осцилляторов — основная мода и два ее спутника. Соответственно потенциал взаимодействия содержал большее число слагаемых и параметров. В результате для комплексных амплитуд также получалась трехмерная система, содержащая большее число слагаемых и параметров. В результате для вывода модели Рабиновича–Фабриканта делался переход к двумерному случаю в предположении, что амплитуды и параметры, такие как диссипация и частота, спутников совпадают. Поэтому, строго говоря, система (20) и система амплитудных уравнений, полученная в работе [19], это несколько разные модели, которые совпадают при замене параметров и приведении подобных слагаемых.

палитра: синий цвет отвечает положению равновесия — все показатели отрицательные; голубой цвет отвечает периодическому режиму (предельный цикл) — один нулевой показатель; желтый цвет отвечает квазипериодическому режиму (двухчастотный тор) — два нулевых показателя; черный цвет отвечает хаотическому режиму — хотя бы один положительный показатель, а белый цвет отвечает убеганию траектории на бесконечность.

На рис. 6, *a* представлена карта и ее увеличенные фрагменты, построенные для следующих значений параметров: $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$. Из рисунка видно,

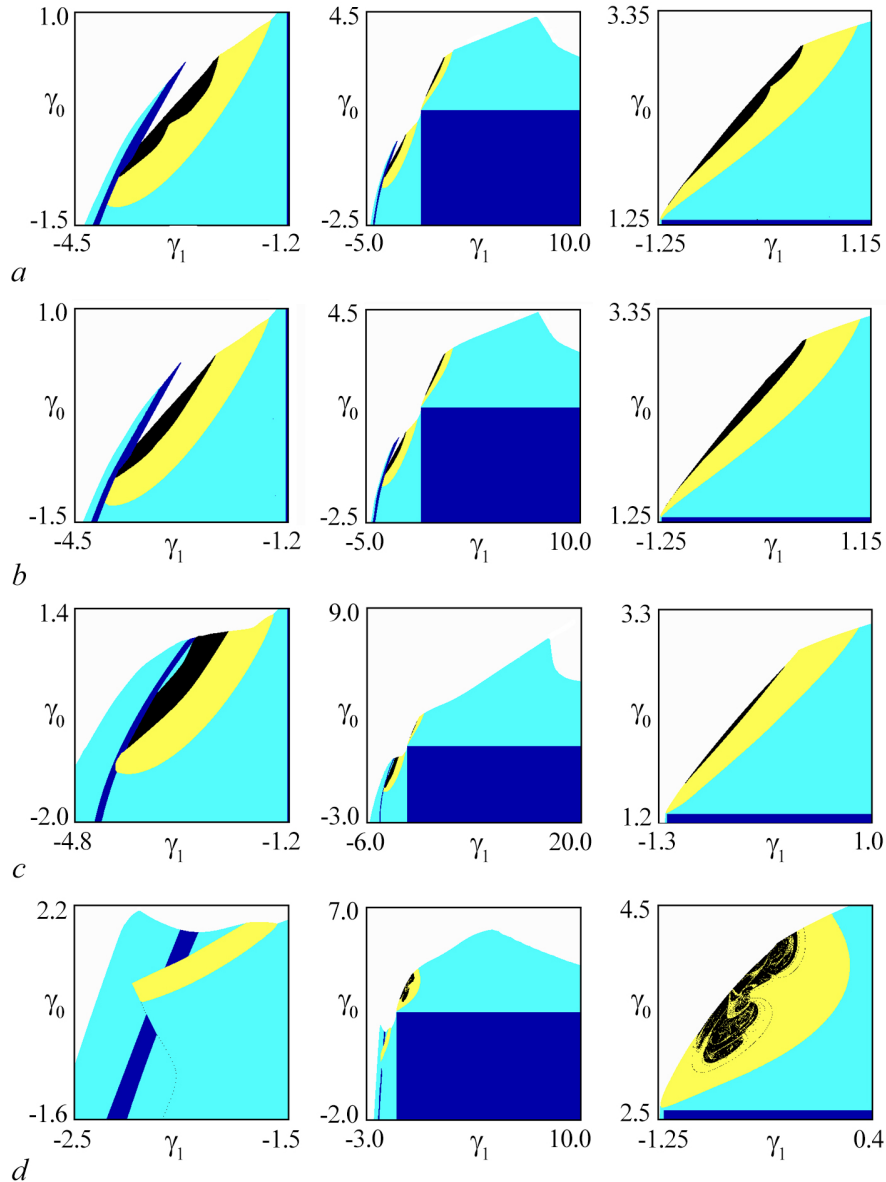


Рис. 6. Карты показателей Ляпунова системы (17) и их увеличенные фрагменты на плоскости (γ_0, γ_1) . *a* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$; $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *b* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 1.8$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *c* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 16$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *d* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 0.5$, $\alpha_1 = 1$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Charts of Lyapunov exponents of the system (17) and its magnified fragments at (γ_0, γ_1) parameter plane. *a* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *b* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 1.8$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *c* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 16$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *d* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 0.5$, $\alpha_1 = 1$ (color online)

что в нижней правой части карты (область $\gamma_0 < 1.29$ и $\gamma_1 > -1.22$, синяя область) в системе наблюдается режим в виде тривиального положения равновесия. Что подтверждается графиками зависимости показателя Ляпунова системы (17) от параметров γ_0 и γ_1 , представленными на рис. 7. Из них видно, что в этой области все четыре показателя Ляпунова отрицательные.

При выходе из области существования тривиального положения равновесия через верхнюю (увеличиваем параметр γ_0) или левую (уменьшаем параметр γ_1) границы, положение равновесия становится неустойчивым и в системе рождается предельный цикл. На графиках зависимости показателей Ляпунова от параметров γ_0 и γ_1 (рис. 7) это отвечает тому, что старший показатель Ляпунова становится равным нулю, в то время как все остальные показатели продолжают оставаться отрицательными. Соответствующие проекции аттрактора на фазовые плоскости осцилляторов представлены на рис. 8, а и представляют собой сильно вытянутые эллипсы, так как диапазоны изменения обобщенных скоростей осцилляторов y_0, y_1 и обобщенных координат осцилляторов x_0, x_1 отличаются на порядок. Показатели Ляпунова для данного режима: $\Lambda_1 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = -0.10586 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.10588 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -0.74386 \pm 0.00001$.

Если и дальше увеличивать параметр γ_0 или уменьшать параметр γ_1 , то предельный цикл исчезает, а вместо него рождается двухчастотный тор. При этом на графиках зависимости показателей Ляпунова равными нулю становятся уже два показателя, первый и второй, а третий

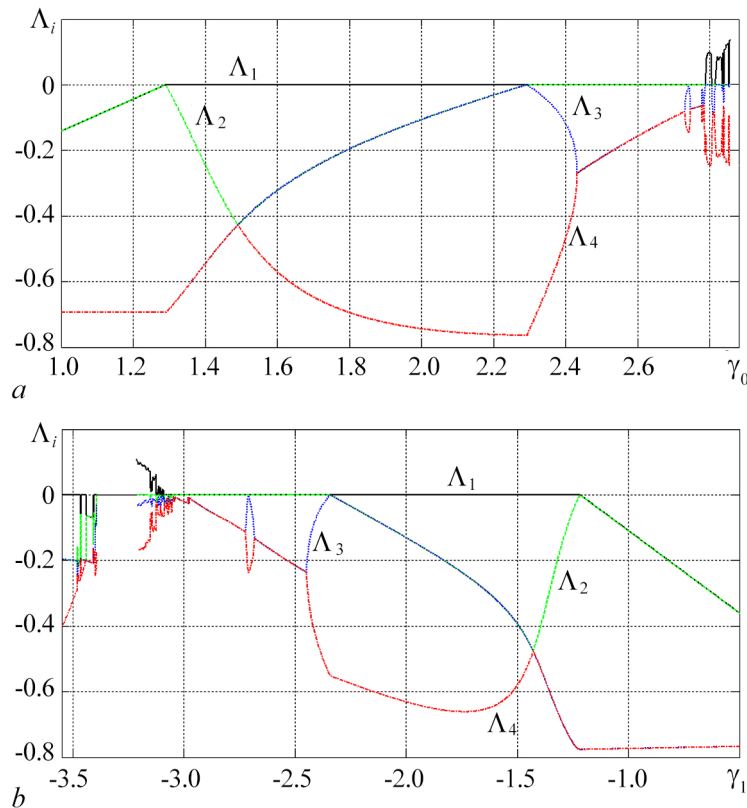


Рис. 7. Графики зависимости показателей Ляпунова системы (17): а – от параметра γ_0 для $\gamma_1 = 0.2$, б – от параметра γ_1 для $\gamma_0 = -0.3$. Остальные параметры: $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$. Разрыв на графиках отвечает области, где наблюдается убегание траектории на бесконечность (цвет онлайн)

Fig. 7. а – Graphs of Lyapunov exponents of the system (17) at the value of the parameter γ_0 , $\gamma_1 = 0.2$. б – Graphs of Lyapunov exponents of the system (17) at the value of the parameter γ_1 , $\gamma_0 = -0.3$. Other parameters are $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$. The gap in the graphs corresponds to the area where the trajectory go to infinity (color online)

и четвертый остаются отрицательными (см. рис. 7). Кроме того, из рисунка видно, что в области существования тора график третьего показателя Ляпунова имеет вид, типичный для систем с удвоениями периода. Таким образом, можно утверждать, что в рассматриваемой системе имеет место последовательность бифуркаций удвоения тора, которая и приводит к возникновению хаотического режима. В этом случае старший показатель Ляпунова становится положительным (см. рис. 7). Соответствующие проекции аттрактора на фазовые плоскости осцилляторов представлены на рис. 8, *b–d*. На рис. 8, *b* показаны проекции тора периода один, а на рис. 8, *c* — тора периода два. Показатели Ляпунова для данных режимов равны, соответственно, $\Lambda_1 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = -0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.15592 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -0.15593 \pm 0.00001$ и $\Lambda_1 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = -0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.06971 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -0.06973 \pm 0.00001$. А на рис. 8, *d* показаны проекции хаотического аттрактора, показатели Ляпунова которого имеют значения $\Lambda_1 = 0.09681 \pm 0.00001$, $\Lambda_2 = -0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_3 = -0.00000 \pm 0.00001$, $\Lambda_4 = -0.24215 \pm 0.00001$.

Теперь так же, как и предыдущем разделе, исследуем влияние параметров, входящих в уравнения системы (17), на ее динамику. Сначала будем менять параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие между осцилляторами. Исследование показало, что изменение (как увеличение, так и уменьшение) параметра β не влияет на динамику системы (17). Соответствующая карта показателей Ляпунова, построенная для $\beta = 1.8$ (остальные параметры остались без изменения), представлена на рис. 6, *b*. Из ее сопоставления с картой, представленной на рис. 6, *a*, видно, что они практически идентичны. Изменение же параметра μ приводит к тому, что области существования предельного цикла, тора и хаоса, расположенные слева от области тривиального положения равновесия, увеличиваются в размерах, если параметр μ увеличивается. В то время как области этих же режимов, расположенные сверху от области тривиального положения равновесия, не меняются. Это хорошо видно на карте показателей Ляпунова системы (17), построенной для

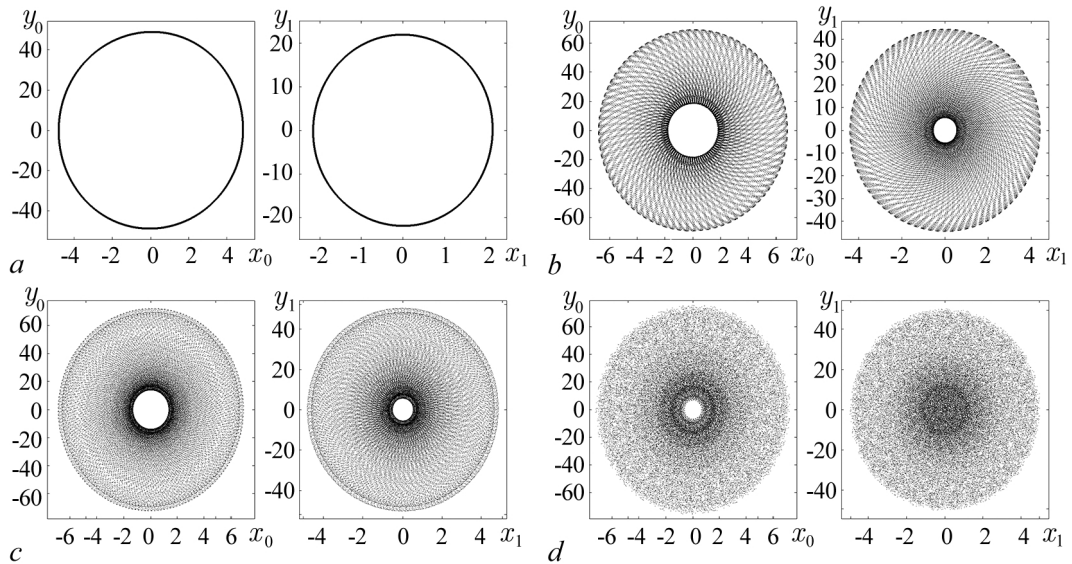


Рис. 8. Проекция аттракторов на фазовые плоскости осцилляторов системы (17): *a* — предельный цикл $\gamma_0 = 2.0$; *b* — двухчастотный тор периода один $\gamma_0 = 2.6$; *c* — двухчастотный тор периода два $\gamma_0 = 2.76$; *d* — хаотический режим $\gamma_0 = 2.8$. Остальные параметры равны $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$

Fig. 8. Projections of the attractors on the plane (x_0, y_0) and (x_1, y_1) of the system (17). *a* — The limit cycle, $\gamma_0 = 2.0$; *b* — the two-frequency period one torus, $\gamma_0 = 2.6$; *c* — the two-frequency period two torus, $\gamma_0 = 2.76$; *d* — the chaos, $\gamma_0 = 2.8$. Other parameters are $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$

$\mu = 16$ и представленной на рис. 6, *c*. Если же параметр μ будет уменьшаться, то все области существования предельного цикла, тора и хаоса, независимо от своего расположения, также будут уменьшаться в размерах, пока полностью не исчезнут.

Теперь рассмотрим случай $\alpha_1 > \alpha_0$. Соответствующая карта показателей Ляпунова системы (17), построенная для значений $\alpha_0 = 0.5$, $\alpha_1 = 1$, представлена на рис. 6, *d*. В этом случае области существования всех наблюдаемых в системе режимов значительно увеличиваются в размерах, а граница области существования тривиального положения равновесия сдвигается вверх и влево. Конфигурация области существования тора, расположенная сверху от области тривиального положения равновесия, напоминает структуру «crossroad area», а внутри области, отвечающей хаотическому режиму, появились области, отвечающие двухчастотным торам. При противоположном соотношении параметров $\alpha_{1,2}$ области существования всех режимов, кроме области тривиального положения равновесия, соответственно будут уменьшаться в размерах, а граница области существования тривиального положения равновесия сдвигается вниз и вправо.

И, наконец, рассмотрим, к чему приведет изменение частоты ω_0 (частота основной моды) и отклонения частоты от резонанса $\Delta\omega$. Уменьшение отстройки от резонанса $\Delta\omega$ при сохранении значения частоты ω_0 , то есть резонансное условие выполняется более строго, приводит к исчезновению областей существования двухчастотных торов и хаоса, в то время как области существования предельного цикла и тривиального положения равновесия не меняются (рис. 9, *a*). Увеличение же $\Delta\omega$ приводит к исчезновению областей существования хаоса и двухчастотного тора слева от области тривиального положения равновесия и области хаотического режима сверху от области тривиального положения равновесия. Область же тора, расположенная сверху от области существования тривиального положения равновесия, сохраняется, но меняет свою форму. Теперь она по форме похожа на «язык Арнольда», основание которого находится в точке пересечения

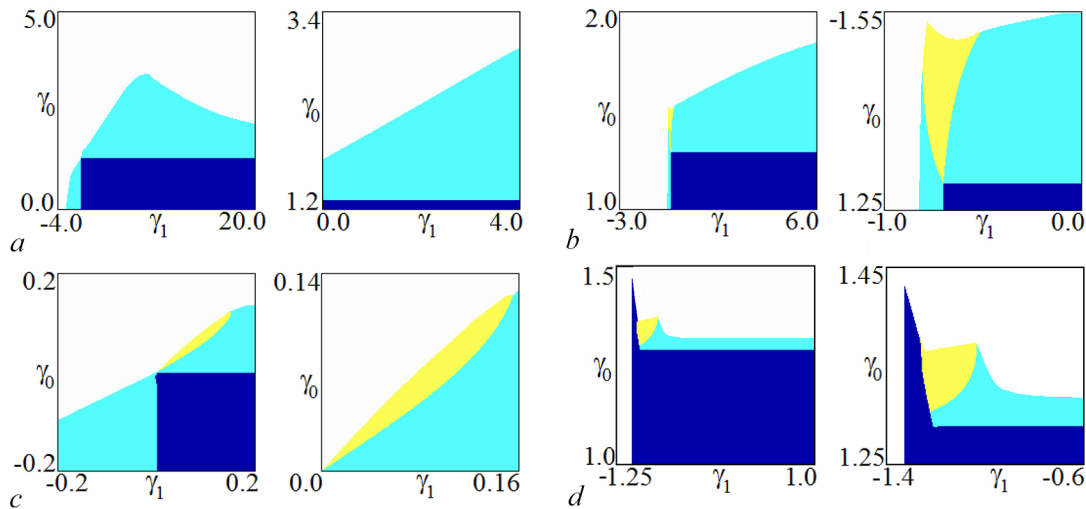


Рис. 9. *a-c* — Карты показателей Ляпунова системы (17) и их увеличенные фрагменты на плоскости (γ_0, γ_1) . *a* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 0.1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *b* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 10$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *c* — $\omega_0 = 2\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 0.06$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$. *d* — Карта показателей Ляпунова системы (17) и ее увеличенный фрагмент на плоскости (γ_0, γ_1) построенная для случая, когда потенциал взаимодействия содержит только резонансные слагаемые. $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$ (цвет онлайн)

Fig. 9. *a-c* — Charts of Lyapunov exponents of the system (17) and its magnified fragments at (γ_0, γ_1) parameter plane. *a* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 0.1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *b* — $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 10$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$; *c* — $\omega_0 = 2\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 0.06$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$. *d* — Chart of Lyapunov exponents of the system (17) and its magnified fragment at (γ_0, γ_1) parameter plane. The chart plotted for the case when the interaction potential contains only resonant terms. $\omega_0 = 32\pi$, $\omega_1 = \omega_0 - 1$, $\mu = 8$, $\beta = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$ (color online)

верхней и левой границ области существования тривиального положения равновесия (рис. 9, *b*). Уменьшение же частоты ω_0 (при этом отклонение частоты от резонанса $\Delta\omega$ также уменьшается пропорционально уменьшению ω_0) приводит к полному исчезновению области существования хаотического режима и существенному уменьшению областей существования всех остальных режимов, за исключением области тривиального положения равновесия (рис. 9, *c*).

Наконец, если в уравнениях системы (17) в выражении для потенциала взаимодействия оставить только резонансные слагаемые, это слагаемые вида x_0^3 и $3\mu x_0 x_1^2$ в первом уравнении и x_1^3 и $3\mu x_1 x_0^2$ во втором, то изменение карты показателей Ляпунова будет таким же, как при изменении ω_0 и $\Delta\omega$ (рис. 9, *d*). А именно, все области регулярных и хаотических режимов, расположенные слева от области тривиального положения равновесия, полностью исчезают. Сверху же от указанной области можно наблюдать лишь области предельного цикла и хаотического режима, которые существенно уменьшились в размере.

В заключение этого раздела отметим, что сопоставление карты динамических режимов модели Рабиновича–Фабриканта (2) (см. рис. 1, *b*) и карт показателей Ляпунова системы (17), в первую очередь представленной на рис. 6, *a*, показывает, что они значительно отличаются друг от друга. А значит, в отличие от модели Вышкинд–Рабиновича, модель Рабиновича–Фабриканта не может быть использована как трехмерная действительная аппроксимация исходной системы уравнений (17). При этом вопрос о том, на каком этапе вывода обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта произошла потеря точности, требует дополнительного исследования.

Заключение

В работе численно исследованы сконструированные в рамках механического формализма Лагранжа системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно действительных переменных, позволяющие описать параметрическое взаимодействие двух осцилляторов (колебательных мод) в диссипативных средах с квадратичной и кубической нелинейностями общего вида. Аналитически было показано, что в случае квадратичной нелинейности исходная система дифференциальных уравнений второго порядка может быть сведена к трехмерной действительной модели Вышкинд–Рабиновича, а в случае кубической нелинейности — к модели Рабиновича–Фабриканта. Для обеих исследуемых систем были построены карты показателей Ляпунова на плоскости отстройка частоты от резонанса — параметр диссипации второго осциллятора (основной моды) для случая квадратичной нелинейности и на плоскости параметров диссипации обоих осцилляторов для случая кубической нелинейности; зависимости спектра показателей Ляпунова от параметра, задающего диссипацию осцилляторов; временные реализации обобщенных координат осцилляторов и их амплитуд; проекции аттракторов на фазовые плоскости осцилляторов. Было исследовано изменение карт показателей Ляпунова при вариации остальных параметров, таких как параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие осцилляторов, частоты осцилляторов, отстройка частоты от резонанса. Также было проведено сопоставление результатов, полученных для исследуемых систем, с известными результатами для моделей Вышкинд–Рабиновича и Рабиновича–Фабриканта.

Исследование первой модели (раздел 1), полученной для случая квадратичной нелинейности, показало, что, во-первых, в системе наблюдаются лишь два типа режимов. А именно, регулярные режимы в виде двухчастотных торов различных периодов и хаотические режимы. Причем переход к хаосу осуществляется через последовательность бифуркаций удвоения периода торов. Во-вторых, при малых значениях параметра нелинейности в рассматриваемой системе наблюдается убегание на бесконечность для основной моды и затухание колебаний для сателлита. При превышении этим параметром порогового значения в системе имеет место насыщение коле-

баний. После чего изменение параметров, характеризующих нелинейное взаимодействие между осцилляторами, слабо, по сравнению с остальными параметрами, влияет на динамику исходной системы. А вот изменение частоты первого осциллятора или параметра, характеризующего его диссипацию, приводит к перемасштабированию карт показателей Ляпунова. При этом граница перехода от регулярных режимов к хаосу сдвигается вверх или вниз в зависимости от того, какой параметр и как меняется. Например, она будет сдвигаться вниз, если параметр диссипации первого осциллятора уменьшается или если частота первого осциллятора увеличивается. Сопоставление карт показателей Ляпунова исходной системы дифференциальных уравнений с картой динамических режимов модели Вышкинд–Рабиновича показало полную идентичность их динамики и позволяет сделать вывод о том, что последняя является адекватной трехмерной аппроксимацией указанной выше системы.

Исследование второй модели (раздел 2), полученной для случая кубической нелинейности, показало, что, в отличие от первой она демонстрирует большее количество динамических режимов. А именно, положение равновесия, предельный цикл, двухчастотные торы различных периодов, хаос. При этом такие режимы как торы и хаос, наблюдаются лишь в случае достаточно больших значений частот осцилляторов (порядка 100 нормированных единиц) и не очень больших значениях отстройки частоты от резонанса. Увеличение или уменьшение отстройки частоты от резонанса приводит к их исчезновению, а в системе наблюдаются лишь тривиальное положение равновесия и предельный цикл периода один. Изменение параметров, характеризующих нелинейное взаимодействие между осцилляторами, приводит, в свою очередь, к увеличению или уменьшению областей торов и хаоса, в зависимости от того, какой параметр и как меняется. Сопоставление же карт показателей Ляпунова, построенных для исходной системы дифференциальных уравнений, с картой динамических режимов модели Рабиновича–Фабриканта, показало их полное различие. А значит, модель Рабиновича–Фабриканта не может быть использована в качестве трехмерной аппроксимации указанной выше системы. Более того, учет в уравнениях исходной системы только резонансных слагаемых не улучшает соответствие между исходной системой и моделью Рабиновича–Фабриканта, а лишь приводит к полному исчезновению хаотических режимов и существенному уменьшению областей существования двухчастотных торов и предельного цикла. При этом вопрос о том, на каком этапе вывода модели Рабиновича–Фабриканта произошла потеря точности, требует дополнительного исследования.

Список литературы

1. Демидов В. Е., Ковшиков Н. Г. Механизм возникновения и стохастизации автомодуляции интенсивных спиновых волн // Журнал технической физики. 1999. Т. 69, № 8. С. 100–103.
2. Романенко Д. В. Генерация хаотической последовательности СВЧ-импульсов в автоколебательной системе с ферромагнитной плёнкой // Известия вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 1. С. 67–74. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-1-67-74.
3. Wersinger J.-M., Finn J. M., Ott E. Bifurcation and "strange" behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling // The Physics of Fluids. 1980. Vol. 23, no. 6. P. 1142–1154. DOI: 10.1063/1.863116.
4. Savage C. M., Walls D. F. Optical chaos in second-harmonic generation // Optica Acta: International Journal of Optics. 1983. Vol. 30, no. 5. P. 557–561. DOI: 10.1080/713821254.
5. Lythe G. D., Proctor M. R. E. Noise and slow-fast dynamics in a three-wave resonance problem // Physical Review E. 1993. Vol. 47, no. 5. P. 3122–3127. DOI: 10.1103/PhysRevE.47.3122.
6. Кузнецов С. П. Параметрический генератор хаоса на варакторном диоде с распадным механизмом ограничения неустойчивости // Журнал технической физики. 2016. Т. 86, № 3. С. 118–127.
7. Пиковский А. С., Рабинович М. И., Трахтенгерц В. Ю. Возникновение стохастичности при

- распадном ограничении параметрической неустойчивости // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1978. Т. 74, № 4. С. 1366–1374.
8. *Вышкинд С. Я., Рабинович М. И.* Механизм стохастизации фаз и структура волновой турбулентности в диссипативных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1976. Т. 71, № 2. С. 557–571.
 9. *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.* Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1979. Т. 77, № 2. С. 617–629.
 10. *Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В.* Сложная динамика и хаос в электронном автогенераторе с насыщением, обеспечиваемым параметрическим распадом // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 1. С. 33–47. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47.
 11. *Danca M.-F., Chen G.* Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, no. 10. P. 3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
 12. *Danca M.-F., Feckan M., Kuznetsov N., Chen G.* Looking more closely at the Rabinovich–Fabrikant system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, no. 2. P. 1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
 13. *Liu Y., Yang Q., Pang G.* A hyperchaotic system from the Rabinovich system // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 234, no. 1. P. 101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
 14. *Agrawal S. K., Srivastava M., Das S.* Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems // Nonlinear Dynamics. 2012. Vol. 69, no. 4. P. 2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
 15. *Srivastava M., Agrawal S. K., Vishal K., Das S.* Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system // Applied Mathematical Modelling. 2014. Vol. 38, no. 13. P. 3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
 16. *Danca M.-F.* Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 86, no. 2. P. 1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.
 17. *Danca M.-F., Kuznetsov N., Chen G.* Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 88, no. 1. P. 791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
 18. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В.* Сложная динамика и хаос в модельной системе Рабиновича–Фабриканта // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2019. Т. 19, № 1. С. 4–18. DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
 19. *Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В.* Обобщенная система Рабиновича–Фабриканта: уравнения и динамика // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 7–29. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29.
 20. *Тюрюкина Л. В.* Динамика системы Рабиновича–Фабриканта и ее обобщенной модели в случае отрицательных значений параметров, имеющих смысл коэффициентов диссипации // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 685–701. DOI: 10.18500/0869-6632-003015.
 21. *Hocking L. M., Stewartson K.* On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance // Proc. R. Soc. Lond. A. 1972. Vol. 326, no. 1566. P. 289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
 22. *Kuramoto Y., Yamada T.* Turbulent state in chemical reactions // Progress of Theoretical Physics. 1976. Vol. 56, no. 2. P. 679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.
 23. *Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В.* Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 10. С. 73–80.
 24. *Pazó D., Sánchez E., Matías M. A.* Transition to high-dimensional chaos through quasiperiodic

motion // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2001. Vol. 11, no. 10. P. 2683–2688. DOI: 10.1142/S0218127401003747.

25. Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V. Regional structure of two- and three-frequency regimes in a model of four phase oscillators // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022. Vol. 32, no. 3. P. 2230008. DOI: 10.1142/S0218127422300087.
26. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.

References

1. Demidov VE, Kovschikov NG. Mechanism of occurrence and stochastization of self-modulation of intense spin waves. Technical Physics. 1999;69(8):100–103 (in Russian).
2. Romanenko DV. Chaotic microwave pulse train generation in self-oscillatory system based on a ferromagnetic film. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2012;20(1):67–74 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-1-67-74.
3. Wersinger J-M, Finn JM, Ott E. Bifurcation and “strange” behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling. The Physics of Fluids. 1980;23(6):1142–1154. DOI: 10.1063/1.863116.
4. Savage CM, Walls DF. Optical chaos in second-harmonic generation. Optica Acta: International Journal of Optics. 1983;30(5):557–561. DOI: 10.1080/713821254.
5. Lythe GD, Proctor MRE. Noise and slow-fast dynamics in a three-wave resonance problem. Physical Review E. 1993;47(5):3122–3127. DOI: 10.1103/PhysRevE.47.3122.
6. Kuznetsov SP. Parametric chaos generator operating on a varactor diode with the instability limitation decay mechanism. Technical Physics. 2016;61(3):436–445. DOI: 10.1134/S1063784216030129.
7. Pikovski AS, Rabinovich MI, Trakhtengerts VY. Appearance of chaos at decay saturation of parametric instability. Sov. Phys. JETP. 1978;47:715–719.
8. Vyshkind SY, Rabinovich MI. The phase stochastization mechanism and the structure of wave turbulence in dissipative media. Sov. Phys. JETP. 1976;44(2):292–299.
9. Rabinovich MI, Fabrikant AL. Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media. Sov. Phys. JETP. 1979;50(2):311–317.
10. Kuznetsov SP, Turukina LV. Complex dynamics and chaos in electronic self-oscillator with saturation mechanism provided by parametric decay. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2018;26(1):33–47. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47.
11. Danca M-F, Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004;14(10):3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
12. Danca M-F, Feckan M, Kuznetsov N, Chen G. Looking more closely at the Rabinovich–Fabrikant system. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016;26(2):1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
13. Liu Y, Yang Q, Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010;234(1):101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
14. Agrawal SK, Srivastava M, Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems. Nonlinear Dynamics. 2012;69(4):2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
15. Srivastava M, Agrawal SK, Vishal K, Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system. Applied Mathematical Modelling. 2014;38(13):3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
16. Danca M-F. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system. Nonlinear Dynamics. 2016;86(2):1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.

17. Danca M-F, Kuznetsov N, Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system. *Nonlinear Dynamics*. 2017;88(1):791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
18. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Turukina LV. Complex dynamics and chaos in the Rabinovich–Fabrikant model. *Izvestiya of Saratov University. Physics*. 2019;19(1):4–18 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
19. Kuznetsov SP, Turukina LV. Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(1):7–29. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29.
20. Turukina LV. Dynamics of the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model in the case of negative values of parameters that have the meaning of dissipation coefficients. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(6):685–701. DOI: 10.18500/0869-6632-003015.
21. Hocking LM, Stewartson K. On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1972;326(1566):289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
22. Kuramoto Y, Yamada T. Turbulent state in chemical reactions. *Progress of Theoretical Physics*. 1976;56(2):679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.
23. Kuznetsov AP, Sataev IR, Tyuryukina LV. Synchronization of quasi-periodic oscillations in coupled phase oscillators. *Technical Physics Letters*. 2010;36(5):478–481. DOI: 10.1134/S1063785010050263.
24. Pazó D, Sánchez E, Matías MA. Transition to high-dimensional chaos through quasiperiodic motion. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2001;11(10):2683–2688. DOI: 10.1142/S0218127401003747.
25. Kuznetsov AP, Sataev IR, Turukina LV. Regional structure of two- and three-frequency regimes in a model of four phase oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2022;32(3):2230008. DOI: 10.1142/S0218127422300087.
26. Kuznetsov SP. *Dynamical Chaos*. Moscow: Fizmatlit; 2006. 356 p. (in Russian).



Тюрюкина Людмила Владимировна — родилась в Саратове (1977). Окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2000). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2003), имеет звание доцента по специальности «Радиофизика» (2009). В настоящее время работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН и доцентом на кафедре динамических систем Института физики СГУ на базе СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Имеет более 50 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: turukinalv@yandex.ru
 ORCID: 0000-0002-4221-8900
 AuthorID (eLibrary.Ru): 39405



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Научная статья
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003078
EDN: VEFEDZ

Сравнительный анализ схем скрытой коммуникации, основанных на генераторах со странным аттрактором гиперболического типа и со странным нехаотическим аттрактором

О. Б. Исаева^{1,2}✉, Д. О. Любченко^{1,3}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

³Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Москва, Россия

E-mail: ✉ isaevao@rambler.ru, dima4398lub@mail.ru

Поступила в редакцию 4.05.2023, принята к публикации 15.07.2023,

опубликована онлайн 29.11.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. Цель работы состоит в анализе качественных особенностей процесса передачи информации посредством нескольких коммуникационных схем, основывающихся на синхронизации передатчика и приемника — двух генераторов сложного сигнала. В качестве таковых использованы генераторы гиперболического хаоса и генераторы со странным нехаотическим аттрактором. Проведены оценка и сравнение преимуществ и недостатков этих схем между собой и для ситуации коммуникации, использующей хаос негиперболического типа. **Методы.** Для подтверждения сложности динамики используемых для коммуникации генераторов, проверки широкополосности, грубости и стохастического характера генерируемого сигнала анализировались спектры мощности и распределения локального старшего показателя Ляпунова. Для обеспечения конфиденциальности передачи информации использован метод нелинейного подмешивания сигнала к динамике генератора-передатчика. Поскольку выбранные для исследования модельные генераторы демонстрируют нетривиальную динамику для угловой переменной — сдвига фазы колебаний, — применено специальное фазовое подмешивание. В качестве передаваемой информации выбрано цифровое изображение. Визуальный контроль, производимый в процессе передачи, позволил осуществить качественный анализ успешности кодирования сигнала и его детектирования приемником. **Результаты.** Проиллюстрированы успешные передача и декодирование информации для всех рассматриваемых схем коммуникации в случае идентичных приемника и передатчика. При расстройке параметров этих генераторов из-за потери полной синхронизации отделение информационного сигнала от хаотической/сложной несущей становится затруднительным. Причем в случае хаоса негиперболического типа расстройка параметра, отвечающего за амплитуду генерации, приводит к не очень удовлетворительному детектированию, расстройка же частоты генерации приводит к абсолютной невозможности детектирования. Схемы с гиперболическим хаосом и странной нехаотической динамикой дают гораздо лучшие результаты. Значительно улучшить выделение информации в этих двух случаях помогает учет грубости обобщенной синхронизации. **Заключение.** Грубые хаотические и сложные нехаотические генераторы имеют значительные преимущества для систем связи по сравнению с хаотическими генераторами негиперболического типа.

Ключевые слова: хаотическая коммуникация, гиперболический хаос, странный нехаотический аттрактор.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 21-12-00121. Авторы благодарят к.ф.-м.н. Д. В. Савина за плодотворное обсуждение.

Для цитирования: Исаева О. Б., Любченко Д. О. Сравнительный анализ схем скрытой коммуникации, основанных на генераторах со странным аттрактором гиперболического типа и со странным нехаотическим аттрактором // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 31–41. DOI: 10.18500/0869-6632-003078. EDN: VEFEDZ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Comparative analysis of the secure communication schemes based on the generators of hyperbolic strange attractor and strange nonchaotic attractor

O. B. Isaeva^{1,2}✉, D. O. Lubchenko^{1,3}

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

²Saratov State University, Russia

³Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ✉ isaevao@rambler.ru, dima4398lub@mail.ru

Received 4.05.2023, accepted 15.07.2023, available online 29.11.2023, published 31.01.2024

Abstract. The *purpose* of this work is to analyse qualitative features of the information transmission process via several communication schemes based on the synchronization of transmitter and receiver, both being complex signal generators. For this purpose generators of the hyperbolic chaos and generators with the strange nonchaotic attractor are employed. Evaluation of advantages and disadvantages of such schemes is made comparing themselves with each other as well as with schemes based on the nonhyperbolic chaotic generators. *Methods.* The power spectra and the distributions of the largest finite-time Lyapunov exponent are used to confirm the complexity of the dynamics of the generators in use and to verify the wide-bandness, robustness and stochasticity of their signals. Confidentiality of the informational signal transmission is achieved using its nonlinear mixing to the dynamics of the transmitter. The special phase mixing is used since the model generators employed for the research demonstrate nontrivial dynamics for the angular variable — oscillations phase shift. The digital image is used as an information for transmission. Visual control during the transmission process allows to carry out the qualitative analysis of the success of the signal coding and its detecting by the receiver. *Results.* Successful transmission and decoding of information for all schemes under investigation are demonstrated for the case of identical transmitter and receiver. Parameter detuning of these generators leads to difficulties in separation of the informational signal from the chaotic/complex carrier due to loss of the full synchronization. For the nonhyperbolic chaos detuning of the parameter responsible for the amplitude of the signal leads to the bad quality of the detection while frequency detuning makes detection absolutely impossible. Schemes with the hyperbolic chaos and strange nonchaotic dynamics appear to demonstrate much better results. The information detection is much better in this case because of the robustness of the generalized synchronization. *Conclusion.* Robust chaotic and complex nonchaotic generators appear to have significant advantages for communication systems comparing to the chaotic generators of nonhyperbolic type.

Keywords: chaotic communication, hyperbolic chaos, strange nonchaotic attractor.

Acknowledgements. Supported by Russian Science Foundation, Grant No. 21-12-00121. We acknowledge PhD D. V. Savin for usefull discussion.

For citation: Isaeva OB, Lubchenko DO. Comparative analysis of the secure communication schemes based on the generators of hyperbolic strange attractor and strange nonchaotic attractor. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(1): 31–41. DOI: 10.18500/0869-6632-003078

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Актуальная некоторое время назад проблема хаотической коммуникации довольно быстро потеряла популярность в связи с присущими ей трудноустраняемыми недостатками [1, 2]. Одним из таковых является неустойчивость коммуникационных схем, основанных на синхронизации приемника с передатчиком, необходимой для извлечения информации из передаваемого по каналу связи сигнала. Для достижения полной синхронизации требуется полная идентичность приемника и передатчика. В определенном смысле это требование может рассматриваться с точки зрения конфиденциальности передачи: не только конкретный вид генератора-передатчика, но и точные значения параметров являются ключом для декодирования передаваемой информации. С другой стороны, в отличие от математической модели, добиться абсолютной идентичности

генератора-передатчика и генератора-приемника даже при создании лабораторного радиотехнического макета довольно трудно. Влияние же на сигнал в канале связи искажений и помех может сделать полную синхронизацию недостижимой. В случае умеренной неидентичности, однако, возможно наступление обобщенной синхронизации [3], когда динамические реализации двух связанных генераторов не совпадают, но коррелируют между собой. Созданию системы связи, достаточным условием функциональной состоятельности которой была бы обобщенная синхронизация, посвящена настоящая работа. (Проблема обозначена ранее в работах [2, 4]).

Предложенный в 2005 году С. П. Кузнецовым метод манипулирования фазами автоколебательных систем позволил получить динамику искусственной математической модели, существовавшей ранее лишь в виде отображения, в реалистичной физической системе [5]. Речь идет об отображении, аттрактором которого является соленоид Смейла–Вильямса. В последующих работах метод был развит и позволил реализовать ряд других математических артефактов, к примеру отображение Ханта–Отта [6]. Указанные отображения ассоциируются с хаотической динамикой гиперболического типа и странным нехаотическим аттрактором, соответственно. Первый тип поведения обладает свойством грубости — нечувствительности к возмущениям [7], демонстрирует грубые режимы синхронизации [8, 9] и поэтому кажется перспективным для основанных на синхронизации схем коммуникации [10]. Второй тип динамики нехаотический. Достигнутый режим синхронизации связанных генераторов с таким поведением должен быть грубым, по крайней мере, при отсутствии возмущений, выводящих систему из класса квазипериодически возбуждаемых. Вместе с тем, сложная фрактальная структура аттрактора [11] должна обеспечить некоторую конфиденциальность [12–14]. В настоящей работе анализируются схемы коммуникации с генераторами с гиперболической [5] и странной нехаотической [6] динамикой в случае неидентичных приемника и передатчика и показываются их преимущества по сравнению с обычной хаотической коммуникацией.

1. Коммуникационные схемы

Будем рассматривать две следующие математические модели коммуникационных схем. Первая модель:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - (A_1 \cos(\omega_1 t/N) - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \varepsilon y_1 \sin(\omega_1 t + \rho(t)), \\ \ddot{y}_1 - (-A_1 \cos(\omega_1 t/N) - y_1^2)\dot{y}_1 + (2\omega_1)^2 y_1 = \varepsilon x_1^2, \end{cases} \quad (1)$$

$$s(t) = y_1 \sin(\omega_1 t + \rho(t)), \quad (2)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 - (A_2 \cos(\omega_2 t/N) - x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \varepsilon s(t), \\ \ddot{y}_2 - (-A_2 \cos(\omega_2 t/N) - y_2^2)\dot{y}_2 + (2\omega_2)^2 y_2 = \varepsilon x_2^2. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь (1) — передатчик, (2) — сигнал в канале связи, (3) — приемник. Вторая модель:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - (A_1 \cos(\omega_1 t/N) - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \varepsilon y_1 \sin(\omega_1 t + \xi\omega_1 t/N + \rho(t)), \\ \ddot{y}_1 - (-A_1 \cos(\omega_1 t/N) - y_1^2)\dot{y}_1 + (2\omega_1)^2 y_1 = \varepsilon x_1 \sin \omega_1 t, \end{cases} \quad (4)$$

$$s(t) = y_1 \sin(\omega_1 t + \xi\omega_1 t/N + \rho(t)), \quad (5)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 - (A_2 \cos(\omega_2 t/N) - x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \varepsilon s(t), \\ \ddot{y}_2 - (-A_2 \cos(\omega_2 t/N) - y_2^2)\dot{y}_2 + (2\omega_2)^2 y_2 = \varepsilon x_2 \sin \omega_1 t, \end{cases} \quad (6)$$

Аналогично, уравнения (4), (5) и (6) — передатчик, сигнал в канале связи и приемник, соответственно. В обеих схемах передатчик и приемник представляют собой одинаковые генераторы, связанные друг с другом через функцию $s(t)$ — сигнал в канале. Передаваемый информационный сигнал $\rho(t)$, как видно, нелинейным образом подмешивается к динамике передатчика. Такое подмешивание имеет преимущества с точки зрения повышения конфиденциальности по сравнению с обычным аддитивным [15–17]. Информация подмешивается к фазе колебаний генерируемого передатчиком сигнала. Поясним, как это происходит.

В отсутствие подмешивания $\rho = 0$ передатчики (1) и (4) представляют собой генератор гиперболического хаоса [5] и генератор со странным нехаотическим аттрактором [6]. В настоящем исследовании использованы одинаковые для обоих генераторов, но отличные от указанных в оригинальных работах значения параметров

$$A_1 = 8.0, \quad \omega_1 = 2\pi, \quad N = 6, \quad \varepsilon = 0.5. \quad (7)$$

Это сделано для максимального сходства между ними. Оба генератора функционируют по принципу манипулирования фазами. Они состоят из двух осцилляторов ван дер Поля, поочередно и в противофазе медленно возбуждаемых. Собственные частоты осцилляторов отличаются в два раза. Специально подобранные функции связи в правых частях уравнений осцилляторов резонансным образом осуществляют передачу преобразованной фазы колебаний между осцилляторами. В генераторе гиперболического хаоса (1) в стробоскопическом сечении с периодом $T = \omega_1/N$ с фазой $\varphi_n = \varphi(nT)$ происходит преобразование $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n$, что отвечает отображению Бернулли. Для генератора (4) в таком же стробоскопическом сечении фаза претерпевает преобразование $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta_n + F(\varphi_n, \theta_n)$, где $\theta_{n+1} = \theta_n + \xi\omega/N$ — квазипериодическое (при иррациональном $\xi = (\sqrt{5} - 1)/2$) воздействие, а F — некоторая функция нелинейности. Это преобразование отвечает отображению Ханта–Отта. Выбранный способ введения информационного сигнала позволяет смещать его непосредственно с нетривиально ведущей себя фазой колебаний, производимой генераторами сигнала.

Заметим, что при альтернативном наборе параметров

$$A_1 = 3.79981, \quad \omega_1 = 2\pi, \quad N = 6, \quad \varepsilon = 0.5 \quad (8)$$

генератор (1) может производить хаотическую динамику негиперболического типа. Это видно из рис. 1. На фрагменте *a* представлен гиперболический аттрактор, топологически эквивалентный соленоиду Смейла–Вильямса, а на фрагменте *b* аттрактор достаточно сложен, но характерной структурой соленоида не обладает. Фрагмент *c* демонстрирует странный нехаотический аттрактор. Ниже представлены диаграммы для угловых переменных. Рис. 1, *d* и *e* — итерационные диаграммы, эквивалентная динамике отображения Бернулли и разрушенная. Фрагмент *f* — зависимость фазы колебаний генератора (4) от переменной квазипериодического воздействия, которая имеет явно фрактальный характер, как и должно быть для странного нехаотического аттрактора.

Удобной демонстрацией и подтверждением специфических свойств используемых нами динамических режимов могут служить спектр мощности и распределение величин локального старшего ляпуновского показателя. (Под распределением мы подразумеваем плотность вероятности — функцию, характеризующую сравнительную вероятность реализации тех или иных значений локального показателя Ляпунова.) На рис. 2 видно, что спектры всех трех выбранных динамических режимов визуально сопоставимы с шумоподобными. Для гиперболического хаоса спектр наиболее близок к спектру белого шума, для негиперболического — хоть и выглядит достаточно сплошным, но спадает, для нехаотического режима спектр вполне может быть сингулярно непрерывным (для подтверждения этого факта необходим расширенный статистический спектральный анализ). Все три спектра выглядят достаточно широкополосными, что, очевидно, является полезным свойством для системы связи. Распределение величин локального показателя

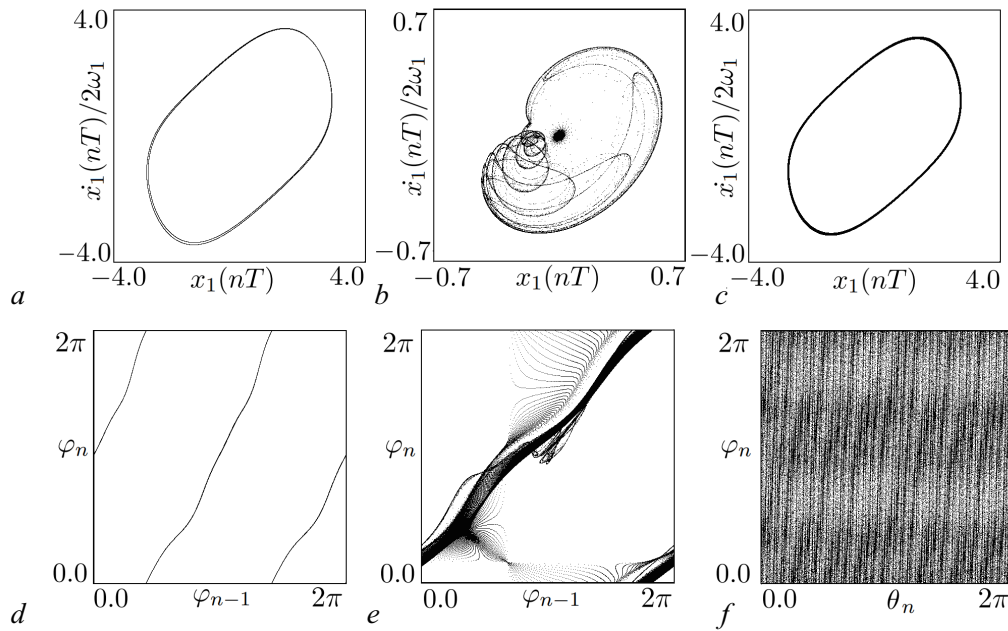


Рис. 1. Фазовые портреты стробоскопического отображения с периодом $T = 2\pi N/\omega_1$: для генератора (1) при значениях параметров (7), находящегося в режиме гиперболического хаоса (a); для того же генератора, находящегося при значениях параметров (8) в режиме негиперболического хаоса (b); для генератора со странным нехаотическим аттрактором (4) при значениях параметров (7) (c). Итерационные диаграммы для угловой переменной $\varphi_n = \text{Arg}(x_1(nT) + ix_1(nT)/\omega_1)$ для гиперболического (d) и негиперболического (e) аттрактора. Зависимость φ_n от переменной внешнего квазипериодического воздействия $\theta_n = n\omega(\sqrt{5} - 1)/2$ для странного нехаотического аттрактора (f). Рисунки построены при отсутствии информационного сигнала $\rho(t) = 0$

Fig. 1. Phase portraits of the stroboscopic map with the period $T = 2\pi N/\omega_1$: for the generator (1) at the parameter values (7) in the hyperbolic chaos regime (a); for the same generator at the parameter values (8) in the nonhyperbolic chaos regime (b); for the generator with the strange nonchaotic attractor (4) at the parameter values (7) (c). Iteration diagrams for the angular variable $\varphi_n = \text{Arg}(x_1(nT) + ix_1(nT)/\omega_1)$ for hyperbolic (d) and nonhyperbolic (e) attractor. Diagram of angular variable φ_n versus the variable of quasi-periodic forcing $\theta_n = n\omega(\sqrt{5} - 1)/2$ for the strange nonchaotic attractor (f). Figures are obtained in the absence of the informational signal $\rho(t) = 0$

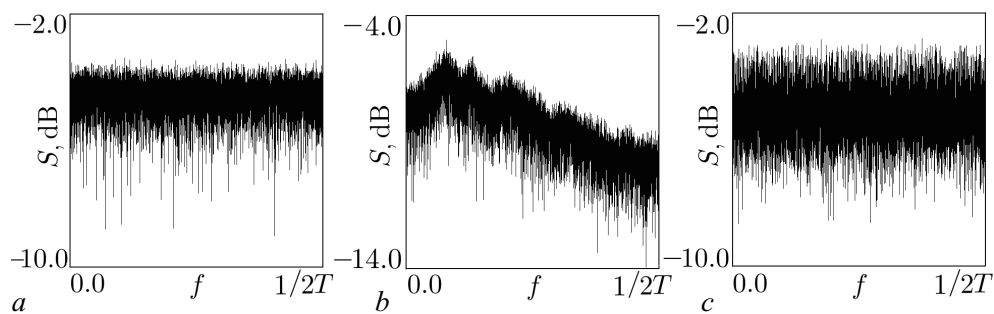


Рис. 2. Спектр мощности для стробоскопического отображения генерации, ассоциирующей с гиперболическим хаотическим аттрактором (a), негиперболическим аттрактором (b) и странным нехаотическим аттрактором (c)

Fig. 2. Power spectrum of the stroboscopic map for generation associating with the hyperbolic chaotic attractor (a), nonhyperbolic chaotic attractor (b) and strange nonchaotic attractor (c)

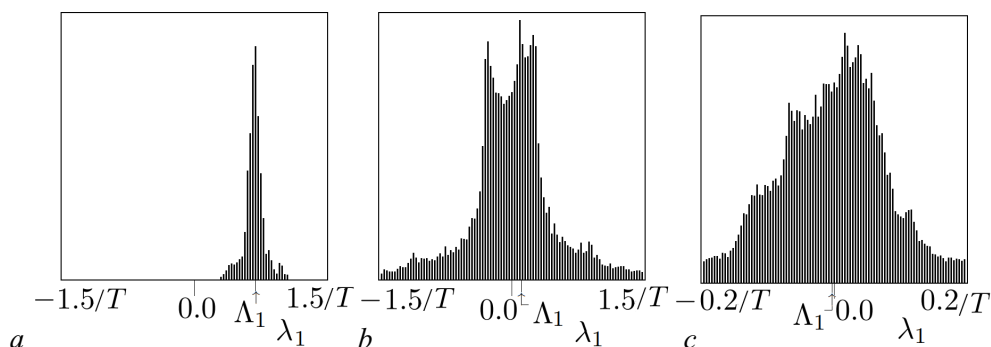


Рис. 3. Функция распределения по величине локального старшего показателя Ляпунова, оцененного за период $\tau = 5T$ для стробоскопического отображения генерации, ассоциирующей с гиперболическим хаотическим аттрактором (а), негиперболическим аттрактором (б) и странным нехаотическим аттрактором (с)

Fig. 3. Distribution of the values of the largest finite-time Lyapunov exponent estimated on the period $\tau = 5T$ of the stroboscopic map for the generation associating with the hyperbolic chaotic attractor (a), nonhyperbolic chaotic attractor (b) and strange nonchaotic attractor (c)

Ляпунова λ_1 для рассматриваемых генераций также отвечают известным закономерностям (рис. 3). Для гиперболического хаоса локальные показатели хорошо сгруппированы и находятся в положительной области. Для негиперболического хаоса распределение имеет два четко выраженных максимума — в положительной и отрицательной области. Полный показатель Ляпунова Λ_1 , однако, положителен. Третье распределение при малом по абсолютной величине, но отрицательном полном показателе захватывает и отрицательную, и положительную области. Это отвечает наличию неоднородной локальной неустойчивости на аттракторе, приводящей к его фрактализации.

2. Демонстрация функционирования коммуникационных схем

Далее приведем демонстрацию численного моделирования рассматриваемых схем. В качестве передаваемого информационного сообщения было выбрано графическое изображение (рис. 4, а). Информационный сигнал представлял собой ступенчатую функцию времени. Каждая

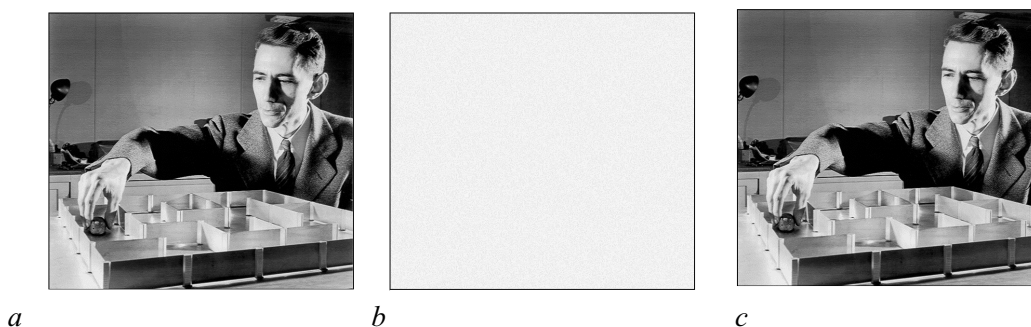


Рис. 4. Передаваемый информационный сигнал — фотография Клода Шеннона с разрешением 571×630 пикселей и кодировкой «256 оттенков серого цвета» (а), пропущенный через низкочастотный фильтр сигнал в канале связи (б) и декодированный сигнал (с). Применена коммуникационная схема (1–3) при значениях параметров (7). Передатчик и приемник идентичны $A_1 = A_2$, $\omega_1 = \omega_2$

Fig. 4. The transmitted informational signal — Claude Shannon photograph with resolution 571×630 pixels and «256 gray color tones» coding (a), the signal in the communication channel after low-frequency filtration (b) and the decoded signal (c). The communication scheme (1–3) is used at the parameter values (7). The transmitter and the receiver are identical $A_1 = A_2$, $\omega_1 = \omega_2$

ступенька имела длину τ и высоту, поставленную в соответствие одной из 256 градаций серого цвета отдельного пикселя изображения. Размах этой ступенчатой функции составлял от 0 до $\pi/2$.

На рис. 4, *b, c* показана демонстрация коммуникации посредством схемы (1–3) при значениях параметров (7) и $A_2 = A_1$, $\omega_2 = \omega_1$. Результаты действия схем связи с негиперболической хаотической и странной нехаотической несущей визуально не отличаются и потому не приведены. На фрагменте *b* можно видеть сигнал, поступающий в канал связи, на фрагменте *c* — идеально детектированную информацию. Детектирование произведено по следующей методике:

$$\sin \rho' = \langle 2s(t) \cos(\omega_2 t) / y_2(t) \rangle_\tau, \quad (9)$$

где угловые скобки означают усреднение за период τ . Этот период должен составлять как минимум несколько периодов медленной модуляции несущего сигнала. Для представленных в работе результатов $\tau = 5T$. Такое усреднение удаляет высокочастотные компоненты из результата умножения на косинус отношения соответствующих друг другу переменных приемника и передатчика $(y_1/y_2) \sin(\omega_1 t + \rho(t)) \cos(\omega_2 t)$ для сигнала $s(t)$ вида (2). Эти переменные в случае полной синхронизации совпадают. При совпадающих же частотах $\omega_1 = \omega_2$, в соответствии с правилом, произведение тригонометрических функций распадается на сумму высокочастотной компоненты и медленно меняющегося $\sin \rho$: $\sin(\omega_1 t + \rho(t)) \cos(\omega_1 t) = (1/2)(\sin \rho + \sin(2\omega_1 t + \rho))$. Таким образом, для идентичных приемника и передатчика очевиден результат $\sin \rho' = \sin \rho$. Сходные рассуждения могут быть проделаны и для случая сигнала в канале связи (5).

Следует отметить, что полная синхронизация при одинаковых значениях параметров в коммуникационных схемах (1–3) и (4–6) достигается благодаря достаточно сильной односторонней связи через сигнал $s(t)$. При расстройке же параметров полная синхронизация нарушается. Как видно (рис. 5), это сильно сказывается на результате. При расстройке параметров A_1 и A_2 ,

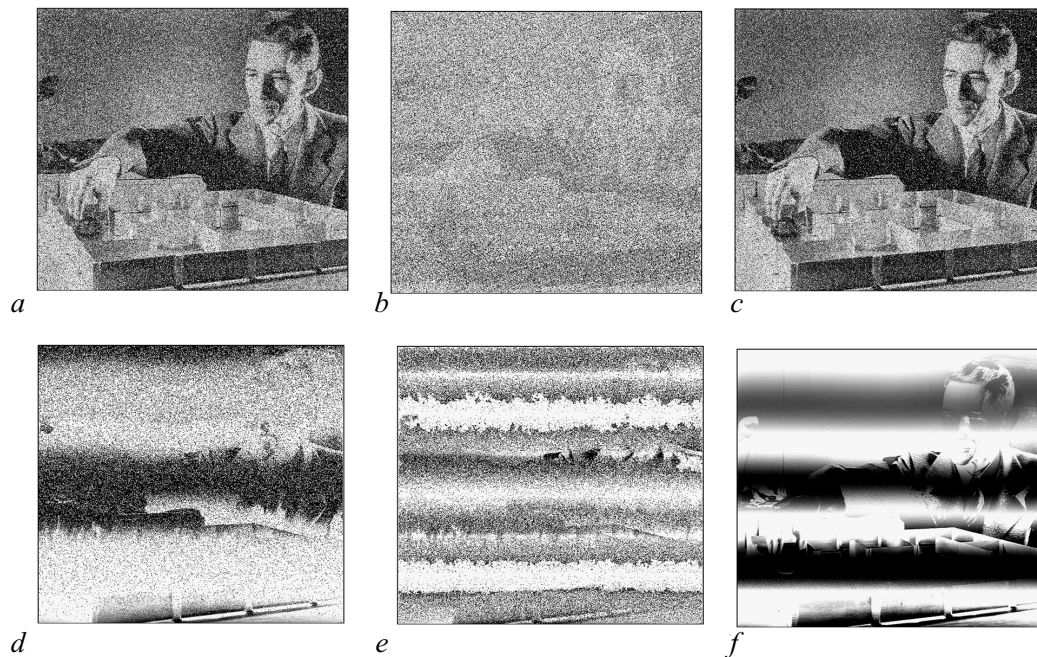


Рис. 5. Изображение, детектированное посредством метода (9) при неидентичных приемнике и передатчике с отстройкой $A_2 = 1.05A_1$ (*a-c*) и $\omega_2 = \omega_1 + 10^{-7}$ (*d-f*). Рисунки *a, d* отвечают коммуникации с гиперболической хаотической несущей, *b, e* — негиперболической, *c, f* — странной нехаотической

Fig. 5. The image detected via the method (9) at nonidentical transmitter and receiver with the detuning $A_2 = 1.05A_1$ (*a-c*) and $\omega_2 = \omega_1 + 10^{-7}$ (*d-f*). Figures *a, d* are for the communication with the hyperbolic chaotic carrier, *b, e* — nonhyperbolic, *c, f* — strange nonchaotic

отвечающих за амплитуду генерации, на пять процентов детектированное изображение оказывается достаточно зашумленным, причем в гораздо большей степени это происходит для негиперболического хаоса. Расстройка частотных параметров приемника и передатчика приводит к полной невозможности распознать передаваемое сообщение в этом случае. Для гиперболической хаотической же и странной нехаотической несущих часть сообщения приближенно восстанавливается. Это возможно в промежутки времени передачи информации, когда накачка осцилляторов передатчика и приемника происходит в одной фазе.

3. Альтернативный метод детектирования информации

Более успешные результаты восстановления передаваемой информации (см. рис. 5) именно в случае гиперболической хаотической и странной нехаотической несущей объясняются, на наш взгляд, возникновением для таких режимов грубой обобщенной синхронизации. При обобщенной синхронизации должна иметь место ненулевая корреляция между переменными. Локальные во времени ее значения, по-видимому, ведут себя более гладко для грубых гиперболических и нехаотических странных связанных систем. Исходя из этого предположения предложен альтернативный метод детектирования информации

$$\sin \rho' = \langle 2s(t) \cos(\omega_2 t) y_2(t) \rangle_\tau. \quad (10)$$

Здесь, в отличие от (9), усредняется не отношение, а произведение переменных y_1 и y_2 . Усреднение дает локальное значение корреляции.

Из результатов альтернативного детектирования на рис. 6, *a* и *c* можно видеть, что локальная корреляция $C_\tau(t) = \langle y_1(t)y_2(t) \rangle_\tau$ постоянна во времени. Восстановленное изображение для

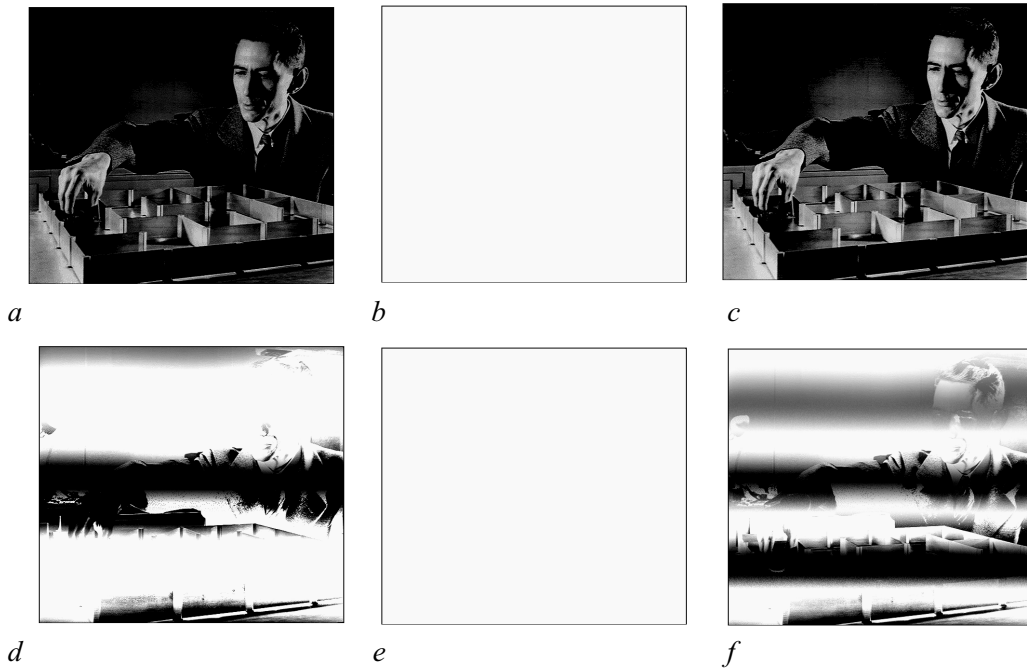


Рис. 6. Изображение, детектированное посредством метода (10) при неидентичных приемнике и передатчике с отстройкой $A_2 = 1.05A_1$ (*a-c*) и $\omega_2 = \omega_1 + 10^{-7}$ (*d-f*). Рисунки *a, d* отвечают коммуникации с гиперболической хаотической несущей, *b, e* – негиперболической, *c, f* – странной нехаотической

Fig. 6. The image detected via the method (10) at nonidentical transmitter and receiver with the detuning $A_2 = 1.05A_1$ (*a-c*) and $\omega_2 = \omega_1 + 10^{-7}$ (*d-f*). Figures *a, d* are for the communication with the hyperbolic chaotic carrier, *b, e* – nonhyperbolic, *c, f* – strange nonchaotic

гиперболического и нехаотического случаев практически не зашумлено, но его тон несколько темнее, чем у оригинального изображения. Это объясняется умножением на константу корреляции: $\sin \rho' = C_\tau \sin \rho$. Также чуть лучше выглядят детектированные по альтернативному методу изображения и при частотной расстройке. Кардинально отличаются результаты применения метода (10) при любых неидентичностях параметров для хаоса негиперболического типа. Локальная корреляция отсутствует, и восстановление абсолютно невозможно.

Заключение

Использование генераторов гиперболического хаоса и грубой странной нехаотической динамики открывает новые перспективы развития систем конфиденциальной и широкополосной коммуникации. Затухший в последние годы интерес к этой области технического приложения динамического хаоса объясняется, в частности, крайними затруднениями в достижении в реальном эксперименте полной синхронизации между передатчиком и приемником, необходимой для успешного детектирования передаваемой информации. В настоящей работе показано, что грубые системы со сложной динамикой могут обеспечить грубую обобщенную синхронизацию даже в случае неидентичных подсистем. Учет этого факта позволяет успешно выделить информационную составляющую из сигнала, пришедшего по каналу связи.

Следует добавить, что, как отмечалось во введении, коммуникационные схемы на основе обобщенной синхронизации уже описывались в литературе и даже воплощались в радиотехническом эксперименте [2, 4]. Указанные схемы работают по принципу переключения передатчика между двумя состояниями, отвечающими разным режимам синхронизации неидентичного с ним приемника. Такие схемы допускают передачу лишь двоичного цифрового сигнала: «1», если обобщенная синхронизация имеет место; «0» – отсутствует. Передача, продемонстрированная в настоящей работе, осуществлена для цифрового сигнала со скоростью 8 бит за отсчет (то есть в 8 раз быстрее, чем в ранее известных схемах) и, более того, может быть обобщена на полностью аналоговую информацию. Помимо этого, преимуществом предлагаемой в работе схемы является отсутствие переходных процессов, возникающих при переключении передатчика между двумя состояниями. Учет этих переходных процессов замедляет передачу и усложняет схемы коммуникации в [2, 4].

Список литературы

1. *Дмитриев А. С., Панас А. И.* Динамический хаос: Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
2. *Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // *Успехи физических наук.* 2009. Т. 179, № 12. С. 1281–1310. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200912c.1281.
3. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
4. *Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Kulminskiy D. D., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Hramov A. E.* Resistant to noise chaotic communication scheme exploiting the regime of generalized synchronization // *Nonlinear Dynamics.* 2017. Vol. 87, no. 3. P. 2039–2050. DOI: 10.1007/s11071-016-3174-6.
5. *Kuznetsov S. P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95, no. 14. P. 144101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.144101.
6. *Жалнин А. Ю., Кузнецов С. П.* О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // *Журнал технической физики.* 2007. Т. 77, № 4. С. 10–18.

7. Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 488 с.
8. Купцов П. В., Кузнецов С. П. О феноменах, сопровождающих переход к режиму синхронного хаоса в связанных неавтономных осцилляторах, представленных уравнениями для комплексных амплитуд // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 3. С. 307–331. DOI: 10.20537/nd0603005.
9. Пиковский А. С. Синхронизация осцилляторов с гиперболическими хаотическими фазами // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 1. С. 78–87. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-78-87.
10. Isaeva O. B., Jalnine A. Y., Kuznetsov S. P. Chaotic communication with robust hyperbolic transmitter and receiver // In: 2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS). 22-25 May 2017, St. Petersburg, Russia. IEEE, 2017. P. 3129–3136. DOI: 10.1109/PIERS.2017.8262295.
11. Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A. Strange Nonchaotic Attractors: Dynamics between Order and Chaos in Quasiperiodically Forced Systems. Singapore: World Scientific, 2006. 228 p. DOI: 10.1142/6006.
12. Ramaswamy R. Synchronization of strange nonchaotic attractors // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56, no. 6. P. 7294–7296. DOI: 10.1103/PhysRevE.56.7294.
13. Zhou C.-S., Chen T.-L. Robust communication via synchronization between nonchaotic strange attractors // Europhys. Lett. 1997. Vol. 38, no. 4. P. 261–265. DOI: 10.1209/epl/i1997-00235-7.
14. Rizwana R., Raja Mohamed I. Applicability of strange nonchaotic Wien-bridge oscillators for secure communication // Pramana. 2018. Vol. 91, no. 1. P. 10. DOI: 10.1007/s12043-018-1582-5.
15. Волковский А. Р., Рульков Н. В. Синхронный хаотический отклик нелинейной колебательной системы как принцип детектирования информационной компоненты хаоса // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19, № 3. С. 71–75.
16. Behnia S., Akhshani A., Mahmodi H., Akhavan A. A novel algorithm for image encryption based on mixture of chaotic maps // Chaos, Solitons & Fractals. 2008. Vol. 35, no. 2. P. 408–419. DOI: 10.1016/j.chaos.2006.05.011.
17. Жалнин А. Ю. Новая схема передачи информации на основе фазовой модуляции несущего хаотического сигнала // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22, № 5. С. 3–12. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-5-3-12.

References

1. Dmitriev AS, Panas AI. Dynamical Chaos: New Information Carriers for Communication Systems. Moscow: Fizmatlit; 2002. 252 p. (in Russian).
2. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Hramov AE. On the use of chaotic synchronization for secure communication. Physics-Uspekhi. 2009;52(12):1213–1238. DOI: 10.3367/UFNe.0179.200912c.1281.
3. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. New York: Cambridge University Press; 2001. 432 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
4. Prokhorov MD, Ponomarenko VI, Kulminskiy DD, Koronovskii AA, Moskalenko OI, Hramov AE. Resistant to noise chaotic communication scheme exploiting the regime of generalized synchronization. Nonlinear Dynamics. 2017;87(3):2039–2050. DOI: 10.1007/s11071-016-3174-6.
5. Kuznetsov SP. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type. Phys. Rev. Lett. 2005;95(14):144101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.144101.
6. Jalnine AY, Kuznetsov SP. On the realization of the Hunt-Ott strange nonchaotic attractor in a physical system. Tech. Phys. 2007;52(4):401–408. DOI: 10.1134/S1063784207040020.
7. Kuznetsov SP. Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Berlin, Heidelberg: Springer; 2012. 320 p. DOI: 10.1007/978-3-642-23666-2.
8. Kuptsov PV, Kuznetsov SP. Transition to a synchronous chaos regime in a system of coupled non-

autonomous oscillators presented in terms of amplitude equations. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2006;2(3):307–331 (in Russian). DOI: 10.20537/nd0603005.

9. Pikovsky AS. Synchronization of oscillators with hyperbolic chaotic phases. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(1):78–87. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-1-78-87.
10. Isaeva OB, Jalnine AY, Kuznetsov SP. Chaotic communication with robust hyperbolic transmitter and receiver. In: 2017 Progress In Electromagnetics Research Symposium - Spring (PIERS). 22-25 May 2017, St. Petersburg, Russia. IEEE; 2017. P. 3129–3136. DOI: 10.1109/PIERS.2017.8262295.
11. Feudel U, Kuznetsov S, Pikovsky A. Strange Nonchaotic Attractors: Dynamics between Order and Chaos in Quasiperiodically Forced Systems. Singapore: World Scientific; 2006. 228 p. DOI: 10.1142/6006.
12. Ramaswamy R. Synchronization of strange nonchaotic attractors. Phys. Rev. E. 1997;56(6): 7294–7296. DOI: 10.1103/PhysRevE.56.7294.
13. Zhou CS, Chen TL. Robust communication via synchronization between nonchaotic strange attractors. Europhys. Lett. 1997;38(4):261–265. DOI: 10.1209/epl/i1997-00235-7.
14. Rizwana R, Raja Mohamed I. Applicability of strange nonchaotic Wien-bridge oscillators for secure communication. Pramana. 2018;91(1):10. DOI: 10.1007/s12043-018-1582-5.
15. Volkovskii AR, Rulkov NF. Synchronous chaotic response of a nonlinear oscillator system as a principle for the detection of the information component of chaos. Tech. Phys. Lett. 1993; 19(2):97–99.
16. Behnia S, Akhshani A, Mahmodi H, Akhavan A. A novel algorithm for image encryption based on mixture of chaotic maps. Chaos, Solitons & Fractals. 2008;35(2):408–419. DOI: 10.1016/j.chaos.2006.05.011.
17. Jalnine AY. A new information transfer scheme based on phase modulation of a carrier chaotic signal. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2014;22(5):3–12 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-5-3-12.

Исаева Ольга Борисовна — родилась в Баку (1977). Окончила Саратовский государственный университет (1999). Кандидат физико-математических наук (2003). Работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время старшим научным сотрудником, и на кафедре динамических систем СГУ (с момента основания кафедры). Область научных интересов — нелинейная динамика и теория хаоса.



Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 410038 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: isaevao@rambler.ru
ORCID: 0000-0001-7750-8388
AuthorID (eLibrary.Ru): 42307

Любченко Дмитрий Олегович — родился в Балакове Саратовской области (1998). Окончил Саратовский государственный университет (2022) и поступил в аспирантуру Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. С 2022 года работает инженером в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН. Область интересов — математическое моделирование и нелинейная динамика.



Россия, 410038 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: dima4398lub@mail.ru
ORCID: 0000-0002-8229-6807
AuthorID (eLibrary.Ru): 1185438



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Научная статья
УДК 537.86/530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003080
EDN: UZXLNV

Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой Часть 1. Фазовое приближение

А. Б. Адилова^{1,2}✉, Н. М. Рыскин^{1,2}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: ✉AdilovaAB@gmail.com, RyskinNM@gmail.com

Поступила в редакцию 13.05.2023, принята к публикации 8.07.2023,
опубликована онлайн 20.12.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. Цель работы — развитие теории взаимной синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Учет запаздывания сигнала, распространяющегося в канале связи, принципиально необходим, в частности, при анализе синхронизации на сверхвысоких частотах, когда расстояние между генераторами велико по сравнению с длиной волны. **Методы.** Теоретический анализ проводится в предположении, что время запаздывания мало по сравнению с характерным временем установления колебаний. Используется фазовое приближение, когда расстройка собственных частот и параметр связи считаются малыми. **Результаты.** С учетом изменения амплитуд колебаний с точностью до членов первого порядка малости по параметру связи получено обобщенное уравнение Адлера для разности фаз колебаний генераторов, которое учитывает комбинированный характер связи (диссипативная и консервативная связь) и неизохронность. С его помощью найдены условия седлоузловых бифуркаций и проанализирована устойчивость различных неподвижных точек системы. Построены границы областей синфазной и противофазной синхронизации на плоскости параметров «частотная расстройка – коэффициент связи». **Заключение.** Показано, что в зависимости от управляющих параметров (параметр неизохронности, параметр возбуждения, набег фазы сигнала в канале связи) система демонстрирует поведение, типичное либо для диссипативной, либо для консервативной связи. Полученные формулы позволили проследить переход от одного типа связи к другому при изменении управляющих параметров.

Ключевые слова: связанные генераторы, автоколебательные системы с жестким возбуждением, синхронизация, запаздывание, фазовое приближение, обобщенное уравнение Адлера.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-72-00109.

Для цитирования: Адилова А. Б., Рыскин Н. М. Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Часть 1. Фазовое приближение // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 42–56. DOI: 10.18500/0869-6632-003080. EDN: UZXLNV

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay

Part 1. Phase approximation

A. B. Adilova^{1,2}✉, N. M. Ryskin^{1,2}

¹Saratov State University, Russia

²Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

E-mail: ✉AdilovaAB@gmail.com, RyskinNM@gmail.com

Received 13.05.2023, accepted 8.07.2023, available online 20.12.2023, published 31.01.2024

Abstract. Aim of this work is to develop the theory of mutual synchronization of two oscillators with hard excitation associated with a delay. Taking into account the delay of a coupling signal is necessary, in particular, when analyzing synchronization at microwave frequencies, when the distance between the oscillators is large compared to the wavelength. *Methods.* Theoretical analysis is carried out under the assumption that the delay time is small compared to the characteristic time for the oscillations. The phase approximation is used when the frequency mismatch and the coupling parameter are considered small. *Results.* Taking into account the change in oscillation amplitudes up to first-order terms in the coupling parameter, a generalized Adler equation for the phase difference of the oscillators is obtained, which takes into account the combined type of the coupling (dissipative and conservative coupling) and non-isochronism. The conditions for saddle-node bifurcations are found and the stability of various fixed points of the system is analyzed. The boundaries of the domains of in-phase and anti-phase synchronization are plotted on the plane of the parameters “frequency mismatch – coupling parameter”. *Conclusion.* It is shown that, depending on the control parameters (non-isochronism parameter, excitation parameter, phase advance of the coupling signal), the system exhibits behavior typical of either dissipative or conservative coupling. The obtained formulas allow for trace the transition from one type of coupling to another when varying the control parameters.

Keywords: coupled generators, self-oscillating systems with hard excitation, synchronization, delay, phase approximation, generalized Adler equation.

Acknowledgements. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 22-72-00109.

For citation: Adilova AB, Ryskin NM. Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay. Part 1. Phase approximation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(1):42–56. DOI: 10.18500/0869-6632-003080

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Изучение взаимной синхронизации в ансамблях связанных осцилляторов является фундаментальной проблемой радиофизики и имеет большое значение для многих приложений [1–5]. В частности, для современной сверхвысокочастотной электроники большой интерес представляет сложение мощностей нескольких связанных генераторов [6]. Наиболее широко исследовалась синхронизация в системах связанных магнетронов и виркаторов (см., например, [7–10]). В частности, экспериментально наблюдалась взаимная синхронизация в ансамблях из нескольких релятивистских магнетронов с различной топологией связи [11]. В последнее время также привлекла внимание задача о взаимной синхронизации мощных гиротронов [12,13], поскольку комплексы, состоящие из нескольких гиротронов, используются для нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза [14].

Поскольку на сверхвысоких частотах расстояние между связанными генераторами может существенно превышать длину волны, необходимо учитывать запаздывание сигнала, распространяющегося между ними. Не вызывает сомнений, что картина синхронизации в системах с запаздыванием имеет ряд специфических особенностей по сравнению с системами с малым числом степеней свободы. Как известно, в теории синхронизации обычно выделяют два типа свя-

зи: диссипативную (диффузионную) и консервативную (инерционную, реактивную) [2–5, 15, 16]. Эти случаи отличаются устройством языков синхронизации, причем при консервативной связи режим синхронизации становится бистабильным: возможна синхронизация как на синфазной, так и на противофазной моде. В работах [17–19], где исследовалась простая модель двух автоколебательных систем с предельным циклом, связанных с задержкой, было показано, что в зависимости от набега фазы сигнала в канале связи доминирует либо диссипативная, либо консервативная связь. Поскольку набег фазы определяется временем распространения сигнала между генераторами, при изменении расстояния между генераторами на величину порядка длины волны характер связи и, соответственно, устройство языков синхронизации может существенно изменяться.

Следует отметить, что в мощных гиротронах максимальный КПД достигается в режиме жесткого возбуждения [20]. Поэтому исследование особенностей синхронизации генераторов, работающих в режиме жесткого возбуждения, представляет значительный интерес. В частности, в [21] была развита теория синхронизации генератора с жестким возбуждением, на который воздействует внешний гармонический сигнал. Был обнаружен ряд важных отличий от хорошо известной картины синхронизации генератора с мягким самовозбуждением. Эти отличия, в основном, обусловлены бистабильным характером автоколебательной системы с жестким возбуждением [1, 3].

Данная работа посвящена исследованию взаимной синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Работа состоит из двух частей. В первой части задача решается в рамках фазового приближения, которое справедливо в случае двух слабо связанных систем, собственные частоты которых отличаются незначительно. При этом можно считать, что связь практически не изменяет амплитуды колебаний взаимодействующих подсистем, так что можно ограничиться исключительно анализом динамики разности фаз, что существенно упрощает рассмотрение. В то же время, с практической точки зрения эта ситуация представляет наибольший интерес.

Более строгий бифуркационный анализ синхронизации, не ограничивающийся фазовым приближением, будет представлен во второй части данной работы.

1. Основные уравнения и классификация неподвижных точек

В работах [17–19], где рассматривалась система двух генераторов с мягким самовозбуждением, связанных с задержкой, была сформулирована система квазилинейных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд колебаний, которая далее была обобщена на случай двух связанных гиротронов [12, 13]. Модель связанных генераторов с жестким возбуждением можно построить аналогичным образом. Необходимо лишь модифицировать функцию, задающую нелинейную характеристику генератора, чтобы она описывала эффекты жесткого возбуждения. Генераторы считаются идентичными за исключением небольшой расстройки собственных частот $\omega_1 \neq \omega_2$, причем $|\omega_1 - \omega_2| \gg \omega_{1,2}$. В итоге можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} + \frac{i\Delta}{2}A_1 &= \left(\sigma + (1 + ib) |A_1|^2 - |A_1|^4 \right) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2(t - \tau), \\ \frac{dA_2}{dt} - \frac{i\Delta}{2}A_2 &= \left(\sigma + (1 + ib) |A_2|^2 - |A_2|^4 \right) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1(t - \tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $A_{1,2}$ — медленно меняющиеся (по сравнению с $\exp(i\omega_{1,2}t)$) комплексные амплитуды колебаний первого и второго генераторов, σ — параметр возбуждения, b — параметр неизохронности, Δ — нормированная расстройка собственных частот, τ — время задержки (подробнее см. [12, 13, 17–19]). Коэффициент связи ρ определяется таким образом, что величина ρ^2 характеризует

долю мощности, поступающей с выхода одного генератора на вход другого, при этом, очевидно, что он принимает значения $0 < \rho < 1$ [7–13, 17–19]. Параметр ψ представляет собой набег фазы сигнала, распространяющегося в канале связи. Все величины в (1) считаются безразмерными, причем в принятой нормировке режим жесткого возбуждения реализуется при $-1/4 < \sigma < 0$ (ср. [3, 21]).

Будем считать, что время задержки мало по сравнению с характерным временем установления колебаний, то есть $\tau \ll 1$. В этом случае уравнения (1) превращаются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} + \frac{i\Delta}{2} A_1 &= \left(\sigma + (1 + ib) |A_1|^2 - |A_1|^4 \right) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2, \\ \frac{dA_2}{dt} - \frac{i\Delta}{2} A_2 &= \left(\sigma + (1 + ib) |A_2|^2 - |A_2|^4 \right) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Полагая $A_{1,2} = R_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$, где $R_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ – вещественные амплитуды и фазы колебаний, соответственно, получим из (2) систему уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= (\sigma + R_1^2 - R_1^4) R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi), \\ \dot{R}_2 &= (\sigma + R_2^2 - R_2^4) R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + b(R_2^2 - R_1^2) + \rho \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность фаз, точка сверху означает дифференцирование по времени t .

Для анализа режимов синхронизации прежде всего необходимо рассмотреть неподвижные точки системы (3). Отметим, что в системе связанных генераторов с жестким возбуждением ситуация усложняется по сравнению с рассмотренной в [17–19], так как число неподвижных точек увеличивается. Действительно, рассмотрим сначала изолированные генераторы ($\rho = 0$). В этом случае из уравнений (3) получаем

$$\sigma + R_{1,2}^2 - R_{1,2}^4 = 0. \quad (4)$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$R_{1,2}^2 = R_{\pm}^2 + \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sigma}}{2}. \quad (5)$$

Решение R_+ является устойчивым, а R_- – неустойчивым [3]. Помимо этого, при $\sigma < 0$ устойчивым является также нулевое решение $R_{1,2} = 0$.

Теперь рассмотрим случай связанных генераторов, считая, что связь слабая, то есть $\rho \ll 1$, а также для простоты положим $\Delta = 0$. При этом для определения неподвижных точек будем иметь уравнения

$$\begin{aligned} (\sigma + R_1^2 - R_1^4) R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi) &= 0, \\ (\sigma + R_2^2 - R_2^4) R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi) &= 0, \\ b(R_2^2 - R_1^2) + \rho \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решения уравнений (6) можно подразделить на симметричные, для которых амплитуды колебаний первого и второго генераторов одинаковы, и несимметричные. Очевидно, что имеется два типа симметричных решений. Во-первых, это решения, для которых $R_{1,2} = R_+ + O(\rho)$.

Они соответствуют режимам синфазной и противофазной синхронизации; будем обозначать их как I и A , соответственно. Также существуют решения, для которых $R_{1,2} = R_- + O(\rho)$, их будем обозначать как I_- и A_- . При этом очевидно, что, поскольку R_- отвечает неустойчивому режиму колебаний изолированного генератора, то и решения I_- , A_- будут неустойчивыми.

Далее обсудим несимметричные решения. Уравнения (6), очевидно, имеют решения, для которых одна из амплитуд близка к R_+ , а другая — к R_- . Действительно, при слабой связи, помимо двух упомянутых выше предельных циклов, для которых $R_{1,2} \approx R_+$ или $R_{1,2} \approx R_-$, в фазовом пространстве системы (3) появляются еще два предельных цикла, для которых $R_1 \approx R_+$, а $R_2 \approx R_-$ или наоборот. Оба этих цикла, очевидно, неустойчивы. При увеличении параметра связи в результате седлоузловых бифуркаций на этих циклах рождаются пары точек седло — неустойчивый узел. Будем обозначать их как S_k , $k = 1, 2, 3, 4$.

Кроме того, имеются еще четыре несимметричных решения, для которых одна из амплитуд близка к нулю, а другая — к R_+ или к R_- . Однако бифуркации этих точек не описываются фазовым приближением, поэтому мы отложим их рассмотрение до второй части данной работы.

Наконец, уравнения (6) имеют нулевое решение $R_1 = R_2 = 0$, которое, по крайней мере при слабой связи, является устойчивым.

Как известно, при слабой связи переход к синхронному режиму осуществляется в результате взаимного захвата частот [1–4]. Такой механизм соответствует седлоузловой бифуркации. Поскольку в случае связанных систем с жестким возбуждением число возможных неподвижных точек увеличивается, ситуация усложняется. Бифуркации симметричных и несимметричных неподвижных точек следует рассмотреть по отдельности.

2. Анализ синхронизации в фазовом приближении

2.1. Седлоузловые бифуркации симметричных решений. Как уже отмечалось выше, в случае слабой связи и малой расстройки бифуркации неподвижных точек системы (3) можно проанализировать в рамках фазового приближения. При введении слабой связи между генераторами, $\rho \ll 1$, устойчивые решения $R_{1,2} = R_+$ превращаются в устойчивый предельный цикл. Если частотная расстройка мала, на этом цикле происходит седлоузловая бифуркация, в результате которой рождаются точки I и A (см. раздел 1). Поскольку связь считается слабой, амплитуды колебаний изменяются незначительно по сравнению с изолированными генераторами, $R_{1,2} \approx R_+$. При этом система (3) редуцируется к уравнению первого порядка для разности фаз φ , которое часто называют уравнением Адлера [3, 5, 22]. Однако, как показано в [17–19], в случае генераторов, связанных с задержкой, уравнение Адлера в своей традиционной форме не позволяет адекватно описать картину синхронизации, в частности, проследить переход от диссипативной связи к консервативной. Необходимо использовать более точное приближение, находя амплитуды колебаний с точностью до членов порядка ρ . Итак, будем искать решения в виде $R_{1,2} = R_+ + r_{1,2}$, где $r_{1,2} \sim \rho$ — малые добавки. Подставляя эти соотношения в первые два уравнения системы (6) и ограничиваясь в них членами порядка ρ , получим

$$\begin{aligned} (\sigma + R_+^2 - R_+^4) r_1 + (2R_+ - 4R_+^3) R_+ r_1 + \rho R_+ \cos(\psi + \varphi) &= 0, \\ (\sigma + R_+^2 - R_+^4) r_2 + (2R_+ - 4R_+^3) R_+ r_2 + \rho R_+ \cos(\psi - \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда с учетом (4) найдем, что

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\rho}{2R_+ (1 - 2R_+^2)} \cos(\psi + \varphi) = 0, \\ r_2 &= -\frac{\rho}{2R_+ (1 - 2R_+^2)} \cos(\psi - \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь можно приближенно найти отношения амплитуд колебаний, входящие в уравнение для фазы в системе (3). После ряда преобразований получим

$$\begin{aligned}\frac{R_1}{R_2} &\approx 1 - \frac{2\rho}{\sqrt{1+4\sigma}(1+\sqrt{1+4\sigma})} \sin \psi \sin \varphi, \\ \frac{R_2}{R_1} &\approx 1 + \frac{2\rho}{\sqrt{1+4\sigma}(1+\sqrt{1+4\sigma})} \sin \psi \sin \varphi.\end{aligned}\quad (9)$$

Эти соотношения следует подставить в третье уравнение системы (3). Также в это уравнение входит слагаемое $b(R_2^2 - R_1^2)$, которое разложим с точностью до членов порядка ρ^2 :

$$\begin{aligned}b(R_2^2 - R_1^2) &\approx \frac{b\rho}{1-2R_+^2} (\cos(\psi + \varphi) - \cos(\psi - \varphi)) + \\ &+ \frac{b\rho^2}{4R_+^2(1-2R_+^2)} (\cos^2(\psi - \varphi) - \cos^2(\psi + \varphi)).\end{aligned}\quad (10)$$

В итоге, подставляя (9) и (10) в третье уравнение системы (3), получим обобщенное уравнение Адлера:

$$\dot{\varphi} + \Delta = -2\rho \sin \varphi \left(\cos \psi - \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \frac{\rho^2}{\lambda} \sin 2\varphi \left(\sin^2 \psi - \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right), \quad (11)$$

где введено обозначение

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{1+4\sigma} (1 + \sqrt{1+4\sigma}). \quad (12)$$

Член порядка ρ , пропорциональный $\sin \varphi$, в правой части уравнения (11) отвечает за диссипативную связь, член порядка ρ^2 , пропорциональный $\sin 2\varphi$ — за консервативную [5, 16].

На рис. 1 приведена зависимость параметра λ от параметра возбуждения σ , построенная согласно (12). При $\sigma \rightarrow -0.25$ параметр λ обращается в нуль, а с ростом σ монотонно возрастает и при $\sigma = 0$ становится равным единице.

В режиме синхронизации, когда $\varphi = \text{const}$, уравнение (11) перепишется в виде

$$\Delta = -2\rho \sin \varphi \left(\cos \psi - \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \frac{\rho^2}{\lambda} \sin 2\varphi \left(\sin^2 \psi - \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right). \quad (13)$$

Нетрудно показать, что граница устойчивости (то есть условие седлоузловой бифуркации) определяется из следующего соотношения, которое представляет собой условие слияния двух корней уравнения (13):

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta}{d\varphi} &= -2\rho \cos \varphi \left(\cos \psi - \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \\ &- \frac{2\rho^2}{\lambda} \cos 2\varphi \left(\sin^2 \psi - \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right) = 0.\end{aligned}\quad (14)$$

Отсюда находим

$$\rho = -\frac{4\lambda \cos \varphi (\cos \psi \sqrt{1+4\sigma} - b \sin \psi)}{\cos 2\varphi (4 \sin^2 \psi \sqrt{1+4\sigma} - b \sin 2\psi)}. \quad (15)$$

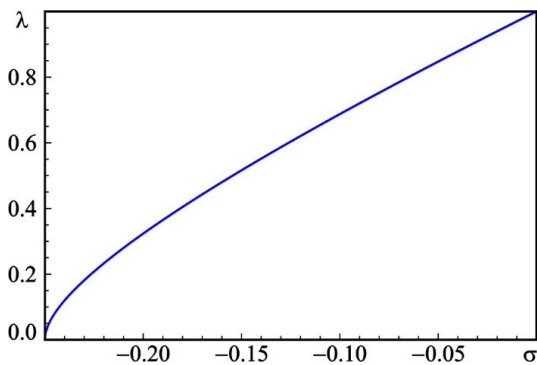


Рис. 1. Зависимость параметра λ от параметра возбуждения σ

Fig. 1. Dependence of the parameter λ on the excitation parameter σ

Соотношения (13) и (15) задают в параметрическом виде границы языка синхронизации на плоскости Δ, ρ . Заметим, что при

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \quad (16)$$

связь является чисто консервативной. При $\sin \psi = 0$, а также при

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{2\sqrt{1+4\sigma}} \quad (17)$$

связь является чисто диссипативной. В случае изохронных осцилляторов ($b = 0$) (16) и (17) превращаются в $\cos \psi = 0$ и $\sin \psi = 0$, соответственно.

На рис. 2 построены соответствующие зависимости $\psi = \psi(b)$. Заметим, что в изохронном случае, связь является чисто диссипативной, когда $\psi = \pi n$, а чисто консервативной — когда $\psi = \pi n + \pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$ (ср. [17]). С увеличением b значение набега фазы, при котором доминирует диссипативная связь, увеличивается, в то время как значение ψ , при котором связь консервативная, уменьшается. В точке, в которой графики функций на рис. 2 пересекаются, то есть при $b = \sqrt{2(1+4\sigma)}$, оба слагаемых в правой части (13) обращаются в нуль, то есть ситуация становится вырожденной, и уравнение (13) уже не применимо. Для корректного описания процесса синхронизации необходимо искать решения для $r_{1,2}$ с точностью до членов порядка ρ^2 , и в обобщенном уравнении Адлера появятся слагаемые порядка ρ^3 . Отметим, что вырождение происходит при $\psi = \arctan(1/\sqrt{2}) \approx \pi n + 0.2\pi$.

На рис. 3 на плоскости параметров Δ, ρ построены области синфазной (I) и противофазной (A) синхронизации для различных значений набега фазы в канале связи ψ при $b = 0.2$. Для определенности выберем $\sigma = -0.16$, тогда $R_+ = \sqrt{0.8} \approx 0.894$, $R_- = \sqrt{0.2} \approx 0.447$. При $\psi = 0$, когда доминирует диссипативная связь (рис. 3, *a*), синхронизация возможна только на синфазной моде, а границы языка являются прямыми линиями. При $\psi \neq 0$ начинает сказываться консервативная связь (рис. 3, *b, c*) и появляются области синхронизации на противофазной моде. Внутри этой области наблюдается мультистабильность синхронных режимов.

С увеличением ψ размер области противофазной синхронизации увеличивается, а при $\psi \approx 0.4\pi$, когда связь становится чисто консервативной, границы синхронизации на синфазной и противофазной модах вырождены (рис. 3, *d*). В этом случае фазовая бистабильность наблюдается

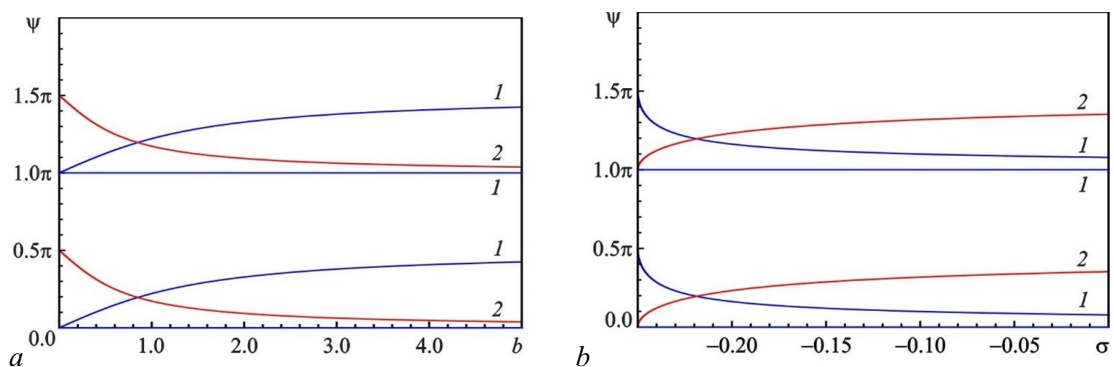


Рис. 2. Зависимости значений набега фазы ψ , при которых связь является чисто диссипативной (кривые 1) и чисто консервативной (кривые 2), от параметра неизохронности b при $\sigma = -0.16$ (а) и от параметра σ при $b = 0.5$ (б)

Fig. 2. Dependences of the phase shift ψ , at which the coupling is purely dissipative (curves 1) and purely conservative (curves 2), on the nonisochronism parameter b for $\sigma = -0.16$ (a) and on the parameter σ for $b = 0.5$ (b)

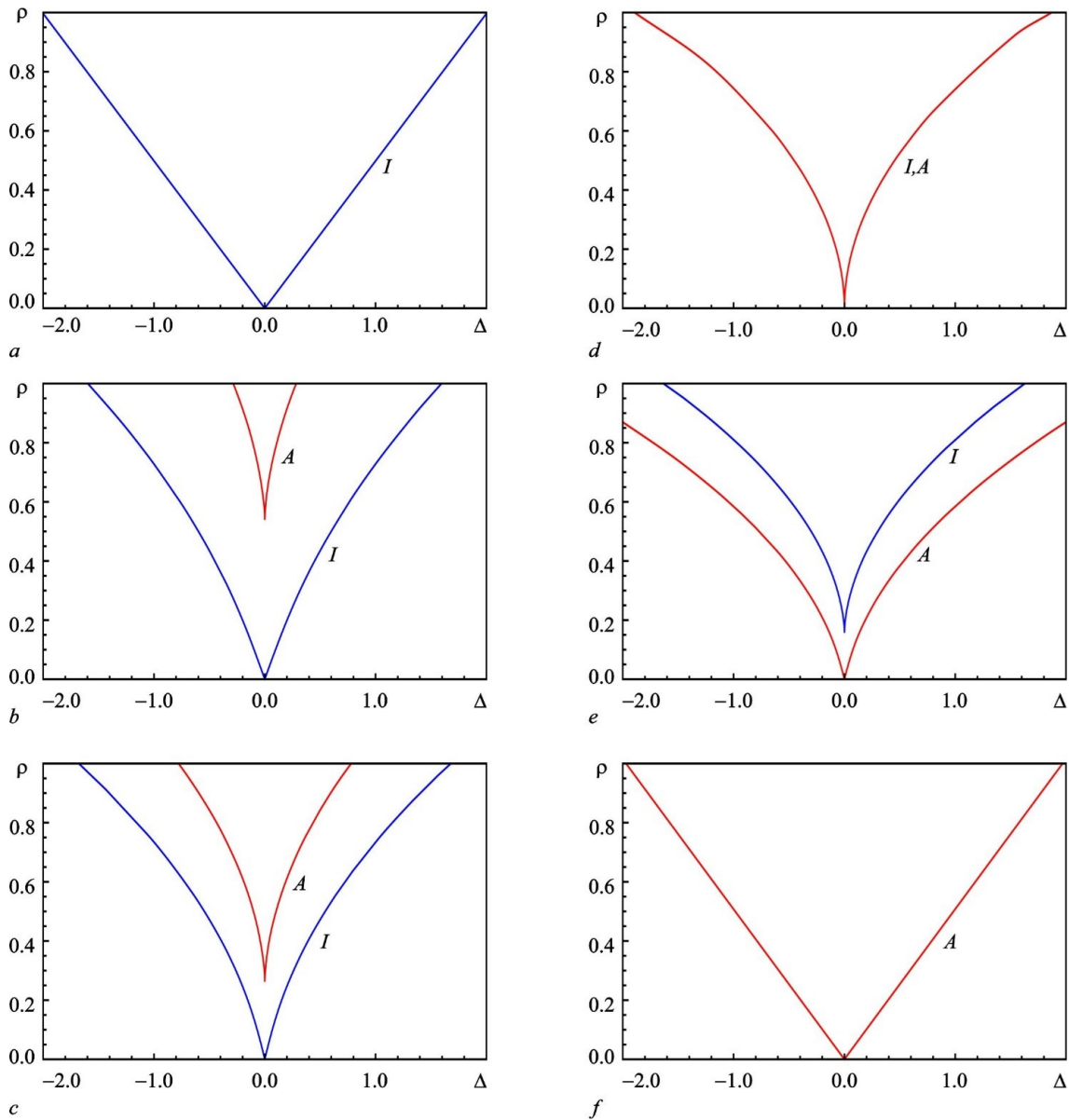


Рис. 3. Области синфазной и противофазной синхронизации на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16, b = 0.2$ и для различных значения набега фазы: $\psi = 0$ (a), 0.25π (b), 0.3π (c), 0.4π (d), 0.5π (e), 1.0π (f)

Fig. 3. Domains of in-phase and anti-phase synchronization on the parameter plane Δ, ρ for $\sigma = -0.16, b = 0.2$ and for different values of the phase shift $\psi = 0$ (a), 0.25π (b), 0.3π (c), 0.4π (d), 0.5π (e), 1.0π (f)

во всей области синхронизации. С дальнейшим увеличением набега фазы границы синхронизации на синфазной и противофазной моде меняются местами. Из рис. 3, e видно, что теперь при слабой связи синхронизация возможна только на противофазной моде. При $\psi = \pi$ снова доминирует диссипативная связь, однако генераторы синхронизируются в противофазе (см. рис. 3, f). Понятно, что принципиальной разницы между рис. 3, a и 3, f нет: во втором случае за время прохождения по каналу связи сигнал приобретает дополнительный фазовый сдвиг $\psi = \pi$ и поступает в колебательную систему другого генератора точно в фазе с его собственными колебаниями. Аналогичное поведение имеет место и для связанных генераторов с мягким возбуждением [17, 18].

Теперь рассмотрим трансформацию языков синхронизации при изменении параметра возбуждения. На рис. 4 построены области синфазной и противофазной синхронизации при $\psi = 0.3\pi$ и $b = 0.5$. Согласно формулам (16) и (17), чисто диссипативная связь реализуется при $\sigma \approx -0.24$, а чисто консервативная — при $\sigma \approx -0.13$. Действительно, на рис. 4, *a* наблюдается только синфазная синхронизация. При увеличении параметра σ начинает проявляться влияние консервативной связи. Это приводит к появлению областей противофазной синхронизации, которые увеличиваются в размерах, что показано на рис. 4, *b, c*. На рис. 4, *d* границы синфазной и противофазной синхронизации вырождаются. При дальнейшем увеличении σ граница синфазной синхронизации отрывается от горизонтальной оси и меняется местами с границей противофазной

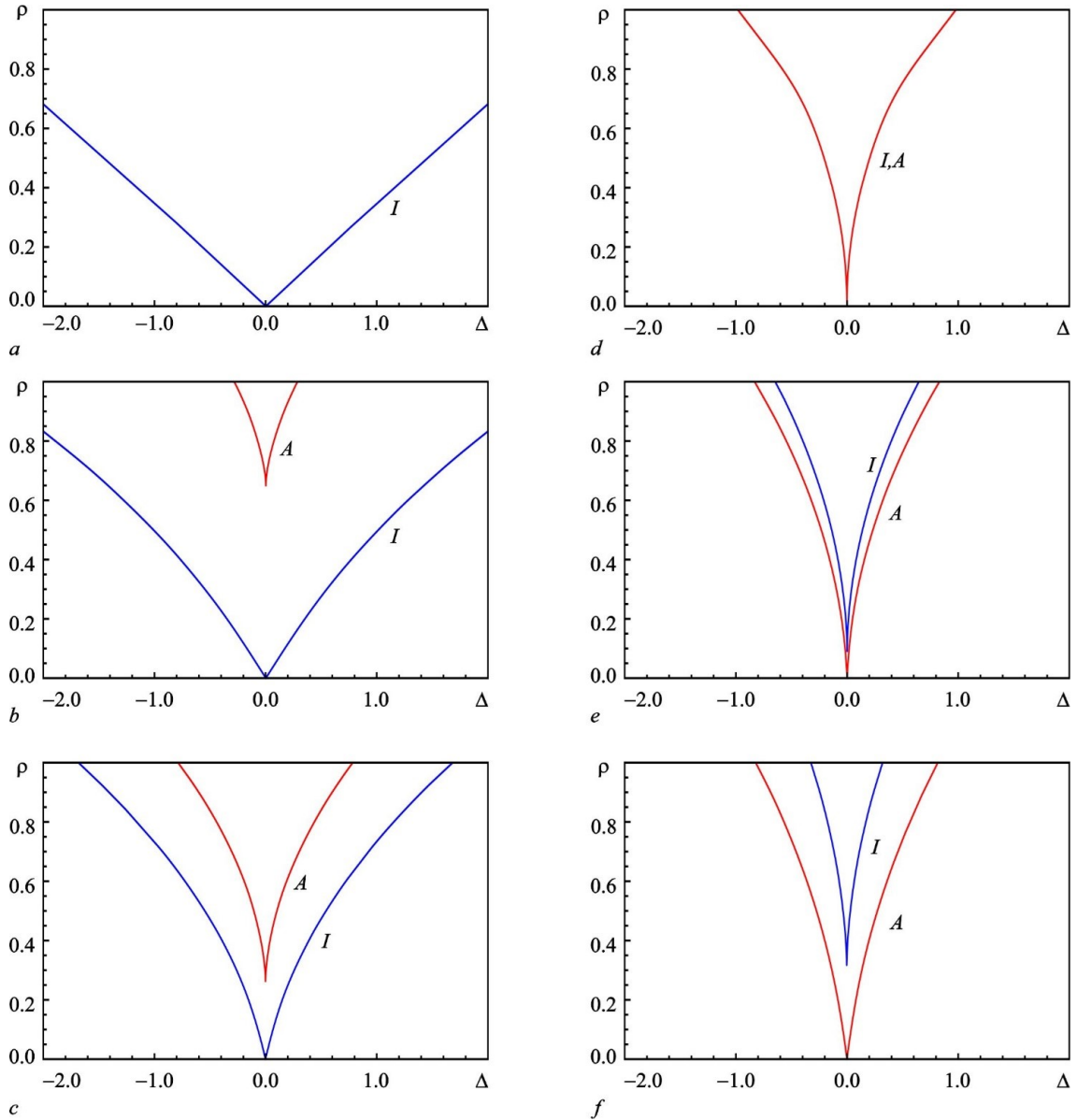


Рис. 4. Области синфазной и противофазной синхронизации на плоскости параметров Δ, ρ при $b = 0.5$, $\psi = 0.3\pi$ и различных значениях параметра возбуждения: $\sigma = -0.24$ (*a*), -0.23 (*b*), -0.2 (*c*), -0.13 (*d*), -0.1 (*e*), -0.01 (*f*)

Fig. 4. Domains of in-phase and anti-phase synchronization on the parameter plane Δ, ρ for $b = 0.5$, $\psi = 0.3\pi$ and for different values of excitation parameter $\sigma = -0.24$ (*a*), -0.23 (*b*), -0.2 (*c*), -0.13 (*d*), -0.1 (*e*), -0.01 (*f*)

синхронизации (рис. 4, e, f). Теперь при малых значениях параметра связи и частотной расстройки имеет место только противофазная синхронизация.

Аналогично можно найти границы седлоузловой бифуркации на неустойчивом предельном цикле, в результате которой рождаются точки I_- и A_- . Для этого достаточно в приведенных выше формулах (7), (8) заменить R_+ на R_- . В итоге границы седлоузловой бифуркации вместо (13), (15) будут определяться следующими формулами:

$$\Delta = -2\rho \sin \varphi \left(\cos \psi + \frac{b}{\sqrt{1+4\sigma}} \sin \psi \right) - \frac{\rho^2}{\lambda} \sin 2\varphi \left(\sin^2 \psi + \frac{b}{4\sqrt{1+4\sigma}} \sin 2\psi \right), \quad (18)$$

$$\rho = -\frac{4\lambda \cos \varphi (\cos \psi \sqrt{1+4\sigma} + b \sin \psi)}{\cos 2\varphi (4 \sin^2 \psi \sqrt{1+4\sigma} + b \sin 2\psi)}, \quad (19)$$

а выражение (12) примет вид

$$\lambda = -\frac{1}{2} \sqrt{1+4\sigma} (1 - \sqrt{1+4\sigma}). \quad (20)$$

О данной бифуркации имеет смысл говорить только при $-1/4 < \sigma < 0$, то есть когда $R_-^2 > 0$ (см. (5)). Поскольку в результате данной бифуркации происходит рождение седла и неустойчивого узла, линии (18), (19) не являются границами области синхронизации.

2.2. Седлоузловые бифуркации несимметричных решений. В рамках фазового приближения можно также провести анализ седлоузловых бифуркаций другого типа, в результате которых появляются несимметричные неподвижные точки $S_{1,2,3,4}$. Для этого будем искать решения в виде $R_1 = R_+ + r_1, R_2 = R_- + r_2$, где $r_{1,2} \sim \rho$ – малые добавки. Тогда вместо соотношений (8) получим

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\rho R_-}{2R_+^2 (1 - 2R_+^2)} \cos(\psi + \varphi) = 0, \\ r_2 &= -\frac{\rho R_+}{2R_-^2 (1 - 2R_-^2)} \cos(\psi - \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Пользуясь (21) с учетом выражений (5) для R_{\pm} , после ряда вычислений найдем, что

$$\frac{R_1}{R_2} \approx \frac{1 + \sqrt{1+4\sigma}}{1 - \sqrt{1+4\sigma}} + \frac{\rho (1 + \sqrt{1+4\sigma})}{4\sigma^2 \sqrt{1+4\sigma}} \left((1 + 2\sigma) \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi \right), \quad (22)$$

$$\frac{R_2}{R_1} \approx \frac{1 - \sqrt{1+4\sigma}}{1 + \sqrt{1+4\sigma}} - \frac{\rho (1 - \sqrt{1+4\sigma})}{4\sigma^2 \sqrt{1+4\sigma}} \left((1 + 2\sigma) \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi \right). \quad (23)$$

Подставляя (22) и (23) в третье уравнение системы (3), получим обобщенное уравнение Адлера, которое после ряда преобразований можно привести к относительно компактному виду:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} + \Delta &= b\sqrt{1+4\sigma} + \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} (\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi) \times \\ &\times \left[1 + \frac{\rho}{2\sigma^2 \sqrt{1+4\sigma}} \left((1 + 2\sigma) \cos \psi \cos \varphi + \sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi \right) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Отметим, что при $\rho \ll 1$ можно пренебречь вторым слагаемым в квадратной скобке (за исключением вырожденных случаев $\sigma \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow -1/4$). В результате (24) значительно упрощается:

$$\dot{\varphi} + \Delta = b\sqrt{1+4\sigma} + \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} (\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi). \quad (25)$$

В отличие от уравнения (11), коэффициент при члене порядка ρ в (25) не обращается тождественно в нуль при каком-либо определенном значении параметра набегга фазы ψ .

Полагая в (25) $\dot{\varphi} = 0$, получаем уравнение для определения неподвижных точек

$$\Delta = b\sqrt{1+4\sigma} + \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} (\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi). \quad (26)$$

Границы седлоузловой бифуркации определяются из условия слияния двух корней уравнения (26):

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} (\sqrt{1+4\sigma} \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi) = 0,$$

откуда можно найти, что

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{ctg} \psi}{\sqrt{1+4\sigma}}.$$

Подставляя это соотношение в (26), после ряда вычислений находим

$$\Delta = b\sqrt{1+4\sigma} \pm \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} \sqrt{1+4\sigma \sin^2 \psi}. \quad (27)$$

Это выражение определяет линии бифуркаций на плоскости Δ, ρ .

Очевидно, что имеется еще одно несимметричное решение, для которого $R_1 = R_- + r_1$, $R_2 = R_+ + r_2$. Для него условия седлоузловой бифуркации совпадают с (27) с точностью до знака:

$$\Delta = -b\sqrt{1+4\sigma} \pm \frac{\rho}{\sqrt{-\sigma}} \sqrt{1+4\sigma \sin^2 \psi}. \quad (28)$$

На основе приведенных выше соотношений можно построить все линии седлоузловых бифуркаций на плоскости параметров Δ, ρ . Пример для случая $\sigma = -0.16$, $b = 0.2$, $\psi = 0.35\pi$ приведен на рис. 5. Область синфазной синхронизации закрашена голубым цветом, противофазной — фиолетовым. Они ограничены линиями SN_1 седлоузловых бифуркаций симметричных решений

$R_{1,2} = R_+ + O(\rho)$, которые задаются соотношениями (13), (15). Также на этом рисунке показаны линии SN_2 седлоузловых бифуркаций неустойчивых решений $R_{1,2} = R_- + O(\rho)$, построенные согласно соотношениям (18), (19). Они лежат ниже линий SN_1 .

Линии $SN_{3,4}$ соответствуют седлоузловым бифуркациям несимметричных решений. Поскольку в уравнениях (27), (28) присутствует слагаемое, отвечающее за неизохронность, на плоскости Δ, ρ эти линии опираются на горизонтальную ось не в начале координат, а в точках $\Delta = \pm b\sqrt{1+4\sigma} = \pm 0.12$.

С помощью приведенных выше соотношений полезно также построить зависимости амплитуд колебаний различных мод от параметра ρ . Пример таких зависимостей приведен на рис. 6 (для простоты рассматриваем случай $\Delta = 0$). На рисунке приведены зависимости

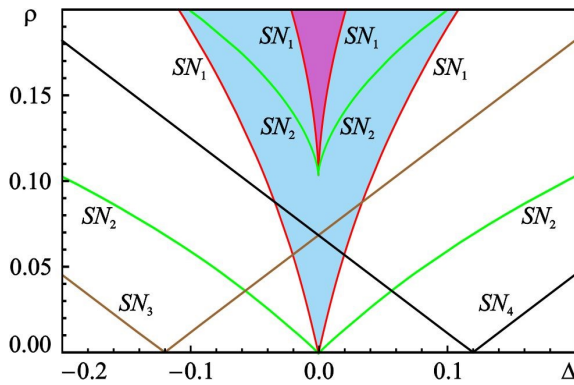


Рис. 5. Линии седлоузловых бифуркаций SN_{1-4} , построенные на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16$, $b = 0.2$ и $\psi = 0.35\pi$. Области синхронизации закрашены цветом (цвет онлайн)

Fig. 5. Lines of saddle-node bifurcations SN_{1-4} , plotted on the parameter plane Δ, ρ for $\sigma = -0.16$, $b = 0.2$ and $\psi = 0.35\pi$. Synchronization domains are shaded (color online)

только для амплитуды R_1 . Приводить значения для амплитуды колебаний второго осциллятора нет необходимости, поскольку при нулевой расстройке для синфазной и противофазной мод $R_1 = R_2$, а решения $S_{1,2}$ и $S_{3,4}$ попарно симметричны друг другу относительно замены

$$(R_1, R_2, \varphi) \rightarrow (R_2, R_1, -\varphi).$$

В случае ненулевой расстройки вырождение снимается и указанная симметрия нарушается.

Из рис. 6 видно, что с ростом связи амплитуда синфазной моды I возрастает, а амплитуда противофазной моды A уменьшается. Для решений, соответствующих седлоузловой бифуркации на неустойчивом цикле, ситуация противоположная. Действительно, в формулы (8) входит величина $1 - 2R_+^2 = -\sqrt{1 + 4\sigma}$. Когда мы рассматриваем решения I_- , A_- , в (8) необходимо заменить R_+ на R_- , при этом $1 - 2R_-^2 = \sqrt{1 + 4\sigma}$ и правые части (8) меняют знак.

Что касается несимметричных решений, то для двух из них с ростом связи амплитуды колебаний первого осциллятора возрастают (при данном значении ψ это S_1 и S_4), а второго — уменьшаются, для двух других имеет место обратная ситуация.

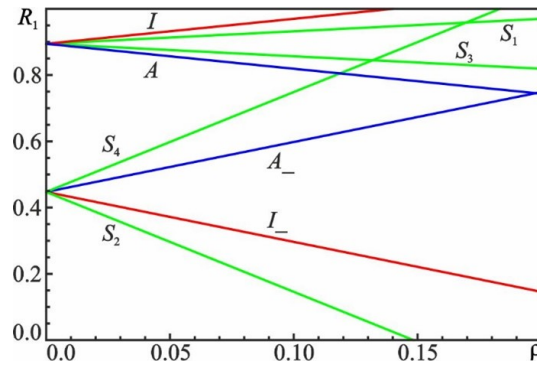


Рис. 6. Зависимости амплитуд колебаний различных мод от параметра связи ρ при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, и $b = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 6 Dependences of the oscillation amplitudes of various modes on the coupling parameter ρ for $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, and $b = 0$ (color online)

Заключение

В данной работе на основе фазового приближения проведен анализ синхронизации системы двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой, в приближении, когда время задержки считается малым по сравнению с характерным временем установления колебаний. Показано, что динамика в такой системе значительно усложняется по сравнению со связанными системами с мягким самовозбуждением. В фазовом пространстве помимо неподвижных точек, отвечающих режимам синфазной и противофазной синхронизации, появляется еще пара неустойчивых неподвижных точек, для которых амплитуды колебаний первого и второго осциллятора близки к амплитуде неустойчивого состояния R_- , а также несимметричные неподвижные точки, для которых амплитуды колебаний первого и второго осциллятора существенно отличаются друг от друга.

Получены обобщенные уравнения Адлера для различных ситуаций, из которых следуют простые аналитические формулы для условий седлоузловых бифуркаций, в результате которых возникают неподвижные точки. Найдены условия, при которых связь является чисто консервативной или чисто диссипативной (соотношения (16) и (17)). С увеличением параметра неизохронности b значение набега фазы ψ , при котором доминирует диссипативная связь, увеличивается, а значение, при котором связь чисто консервативная, уменьшается. Когда доминирует диссипативная связь, синхронизация возможна только на синфазной моде. Когда доминирует консервативная связь, в системе появляется фазовая бистабильность, то есть появляются области противофазной синхронизации. Полученные формулы позволили проследить переход от одного типа связи к другому при изменении управляющих параметров.

Однако следует отметить, что фазовое приближение справедливо лишь при слабой связи и при малых расстройках. Более строгий анализ в рамках так называемого амплитудно-фазового приближения будет представлен во второй части данной работы.

Список литературы

1. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
2. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
3. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
4. Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O. Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer, 2009. 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
5. Кузнецов А. П., Емельянова Ю. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация в задачах. Саратов: Издательский центр «Наука», 2010. 256 с.
6. Zhang J., Zhang D., Fan Y., He J., Ge X., Zhang X., Ju J., Xun T. Progress in narrowband high-power microwave sources // Phys. Plasmas. 2020. Vol. 27, no. 1. P. 010501. DOI: 10.1063/1.5126271.
7. Benford J., Sze H., Woo W., Smith R. R., Harteneck B. Phase locking of relativistic magnetrons // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62, no. 8. P. 969–971. DOI: 10.1103/PhysRevLett.62.969.
8. Cruz E. J., Hoff B. W., Pengvanich P., Lau Y. Y., Gilgenbach R. M., Luginsland J. W. Experiments on peer-to-peer locking of magnetrons // Appl. Phys. Lett. 2009. Vol. 95, no. 19. P. 191503. DOI: 10.1063/1.3262970.
9. Sze H., Price D., Harteneck B. Phase locking of two strongly coupled vircators // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 67, no. 5. P. 2278–2282. DOI: 10.1063/1.345521.
10. Woo W., Benford J., Fittinghoff D., Harteneck B., Price D., Smith R., Sze H. Phase locking of high-power microwave oscillators // J. Appl. Phys. 1989. Vol. 65, no. 2. P. 861–866. DOI: 10.1063/1.343079.
11. Levine J. S., Aiello N., Benford J., Harteneck B. Design and operation of a module of phase-locked relativistic magnetrons // J. Appl. Phys. 1991. Vol. 70, no. 5. P. 2838–2848. DOI: 10.1063/1.349347.
12. Адилова А. Б., Рыскин Н. М. Исследование синхронизации в системе двух гиротронов с запаздыванием в канале связи на основе модифицированной квазилинейной модели // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 68–81. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-6-68-81.
13. Адилова А. Б., Рыскин Н. М. Влияние запаздывания на взаимную синхронизацию двух связанных гиротронов // Известия вузов. Радиофизика. 2020. Т. 63, № 9–10. С. 781–795.
14. Thumm M. K. A., Denisov G. G., Sakamoto K., Tran M. Q. High-power gyrotrons for electron cyclotron heating and current drive // Nucl. Fusion. 2019. Vol. 59, no. 7. P. 073001. DOI: 10.1088/1741-4326/ab2005.
15. Ivanchenko M. V., Osipov G. V., Shalfeev V. D., Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189, no. 1–2. P. 8–30. DOI: 10.1016/j.physd.2003.09.035.
16. Kuznetsov A. P., Stankevich N. V., Turukina L. V. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // Physica D. 2009. Vol. 238, no. 14. P. 1203–1215. DOI: 10.1016/j.physd.2009.04.001.
17. Usacheva S. A., Ryskin N. M. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling // Chaos. 2014. Vol. 24, no. 2. P. 023123. DOI: 10.1063/1.4881837.
18. Адилова А. Б., Герасимова С. А., Рыскин Н. М. Бифуркационный анализ взаимной синхронизации двух генераторов с запаздыванием в цепи связи // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 1. С. 3–12. DOI: 10.20537/nd1701001.
19. Adilova A. B., Balakin M. I., Gerasimova S. A., Ryskin N. M. Bifurcation analysis of multistability of synchronous states in the system of two delay-coupled oscillators // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 11. P. 113103. DOI: 10.1063/5.0065670.

20. *Nusinovich G. S.* Introduction to the Physics of Gyrotrons. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2004. 352 p. DOI: 10.1353/book.62236.
21. *Yakunina K. A., Kuznetsov A. P., Ryskin N. M.* Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode // *Phys. Plasmas*. 2015. Vol. 22, no. 11. P. 113107. DOI: 10.1063/1.4935847.
22. *Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Трубецков Д. И., Селиверстова Е. С.* Удивительный Роберт Адлер: лампа Адлера, уравнение Адлера и многое другое // *Известия вузов. ПНД*. 2015. Т. 23, № 3. С. 3–26. DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-3-3-26.

References

1. Rabinovich MI, Trubetskov DI. Introduction to the Theory of Oscillations and Waves. Moscow: Nauka; 1984. 432 p. (in Russian).
2. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. New York: Cambridge University Press; 2001. 432 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
3. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Ryskin NM. Nonlinear Oscillations. Moscow: Fizmatlit; 2005. 292 p. (in Russian).
4. Balanov A, Janson N, Postnov D, Sosnovtseva O. Synchronization: From Simple to Complex. Berlin: Springer; 2009. 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
5. Kuznetsov AP, Emelianova YP, Sataev IR, Turukina LV. Synchronization in Tasks. Saratov: Publishing Center «Nauka»; 2010. 256 p. (in Russian).
6. Zhang J, Zhang D, Fan Y, He J, Ge X, Zhang X, Ju J, Xun T. Progress in narrowband high-power microwave sources. *Phys. Plasmas*. 2020;27(1):010501. DOI: 10.1063/1.5126271.
7. Benford J, Sze H, Woo W, Smith RR, Harteneck B. Phase locking of relativistic magnetrons. *Phys. Rev. Lett.* 1989;62(8):969–971. DOI: 10.1103/PhysRevLett.62.969.
8. Cruz EJ, Hoff BW, Pengvanich P, Lau YY, Gilgenbach RM, Luginsland JW. Experiments on peer-to-peer locking of magnetrons. *Appl. Phys. Lett.* 2009;95(19):191503. DOI: 10.1063/1.3262970.
9. Sze H, Price D, Harteneck B. Phase locking of two strongly coupled vircators. *J. Appl. Phys.* 1990;67(5):2278–2282. DOI: 10.1063/1.345521.
10. Woo W, Benford J, Fittinghoff D, Harteneck B, Price D, Smith R, Sze H. Phase locking of high-power microwave oscillators. *J. Appl. Phys.* 1989;65(2):861–866. DOI: 10.1063/1.343079.
11. Levine JS, Aiello N, Benford J, Harteneck B. Design and operation of a module of phase-locked relativistic magnetrons. *J. Appl. Phys.* 1991;70(5):2838–2848. DOI: 10.1063/1.349347.
12. Adilova AB, Ryskin NM. Study of synchronization in the system of two delay-coupled gyrotrons using a modified quasilinear model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(6): 68–81 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-6-68-81.
13. Adilova AB, Ryskin NM. Influence of the delay on mutual synchronization of two coupled gyrotrons. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2021;63(9–10):703–715. DOI: 10.1007/s11141-021-10091-x.
14. Thumm MKA, Denisov GG, Sakamoto K, Tran MQ. High-power gyrotrons for electron cyclotron heating and current drive. *Nucl. Fusion*. 2019;59(7):073001. DOI: 10.1088/1741-4326/ab2005.
15. Ivanchenko MV, Osipov GV, Shalfeev VD, Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators. *Physica D*. 2004;189(1–2):8–30. DOI: 10.1016/j.physd.2003.09.035.
16. Kuznetsov AP, Stankevich NV, Turukina LV. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues. *Physica D*. 2009;238(14):1203–1215. DOI: 10.1016/j.physd.2009.04.001.
17. Usacheva SA, Ryskin NM. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling. *Chaos*. 2014;24(2):023123. DOI: 10.1063/1.4881837.
18. Adilova AB, Gerasimova SA, Ryskin NM. Bifurcation analysis of mutual synchronization of

- two oscillators coupled with delay. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2017;13(1):3–12 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1701001.
19. Adilova AB, Balakin MI, Gerasimova SA, Ryskin NM. Bifurcation analysis of multistability of synchronous states in the system of two delay-coupled oscillators. Chaos. 2021;31(11):113103. DOI: 10.1063/5.0065670.
 20. Nusinovich GS. Introduction to the Physics of Gyrotrons. Baltimore: Johns Hopkins University Press; 2004. 352 p. DOI: 10.1353/book.62236.
 21. Yakunina KA, Kuznetsov AP, Ryskin NM. Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode. Phys. Plasmas. 2015;22(11):113107. DOI: 10.1063/1.4935847.
 22. Kuznetsov AP, Sataev IR, Trubetskov DI, Seliverstova ES. Amazing Robert Adler. Adler's tube, Adler's equation, and more. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2015;23(3):3–26 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-3-3-26.



Адилова Асель Булатовна — окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2015). Кандидат физико-математических наук (2021). С 2015 года работает в Саратовском государственном университете, в настоящее время — доцентом кафедры физики открытых систем Института физики СГУ. Область научных интересов — нелинейная теория колебаний и волн, вакуумная СВЧ электроника.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: AdilovaAB@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4079-4488
AuthorID (eLibrary.Ru): 848993



Рыскин Никита Михайлович — окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1996) и доктора физико-математических наук (2005). Главный научный сотрудник, заведующий лабораторией вакуумной микро- и нанoeлектроники Саратовского филиала ИРЭ РАН. Заведующий кафедрой динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: RyskinNM@gmail.com
ORCID: 0000-0001-8501-6658
AuthorID (eLibrary.Ru): 29838



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Научная статья
УДК 537.611.2

DOI: 10.18500/0869-6632-003084
EDN: TPROZK

Распространение спиновых волн в решетке латерально и вертикально связанных ЖИГ-микроволноводов при изменении угла намагничивания в линейном и нелинейном режимах

А. Б. Хутиева[✉], А. А. Грачев, Е. Н. Бегинин, А. В. Садовников

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉abkhtieva@gmail.com, andrew.a.grachev@gmail.com,
egbegin@gmail.com, sadovnikovav@gmail.com

Поступила в редакцию 17.07.2023, принята к публикации 20.11.2023,
опубликована онлайн 27.12.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. Цель. Исследование совместного проявления эффектов анизотропного распространения сигнала, связи и нелинейной зависимости параметров среды от мощности в решетке латерально и вертикально связанных микроволноводов спиновых волн. Рассмотрение случая влияния вращения угла намагничивания и изменения латерального зазора между микроволноводами, расположенными на одной подложке, на поперечный профиль спин-волнового пучка и пространственную локализацию амплитуды спиновых волн. Методы. Методом микромагнитного моделирования на основе численного решения уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта показана возможность управления направлением распространения спиновых волн в ансамбле латерально и вертикально связанных микроволноводов железиттриевого граната путем изменения угла намагничивания. Методом численного интегрирования системы связанных дискретных нелинейных уравнений Шрёдингера показана возможность изменения поперечного профиля спин-волнового пучка при изменении уровня начальной амплитуды сигнала. Результаты. Полученные в микромагнитном моделировании пространственные распределения компонент динамической намагниченности спиновых волн, возбуждаемых в двух микроволноводах, расположенных на одной подложке, свидетельствуют об изменении характера локализации их мощности в выходных секциях микроволноводов. При вариации угла намагничивания решетки наблюдается сдвиг величины пороговой мощности, при которой появляется характерное обужение поперечной ширины спин-волнового пучка в нелинейном режиме. Заключение. При возбуждении поверхностной магнитостатической спиновой волны в решетке латерально и вертикально связанных микроволноводов наблюдается трансформация поперечного профиля волны при отклонении угла намагничивания структуры на 15° , что проявляется в изменении длины волны и ее локализации в каждом из микроволноводов. Совместное проявление эффектов дипольной связи, гиротропии и нелинейности среды позволяют управлять величиной пороговой мощности спиновых волн, при которой в отдельно взятом слое структуры реализуется режим бездифракционного распространения спин-волнового пучка.

Ключевые слова: спиновая волна, микромагнитное моделирование, система уравнений связанных волн, спин-волновой пучок, дискретная дифракция.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ) в соответствии с проектом № 23-79-30027.

Для цитирования: Хутиева А. Б., Грачев А. А., Бегинин Е. Н., Садовников А. В. Распространение спиновых волн в решетке латерально и вертикально связанных ЖИГ-микроволноводов при изменении угла намагничивания в линейном и нелинейном режимах // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 57–71. DOI: 10.18500/0869-6632-003084. EDN: TPROZK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Propagation of spin waves in a lattice of laterally and vertically coupled YIG microwaveguides by changing the magnetization angle in linear and nonlinear modes

A. B. Khutieva[✉], A. A. Grachev, E. N. Beginin, A. V. Sadovnikov

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉abkhutieva@gmail.com, andrew.a.grachev@gmail.com,
egbegin@gmail.com, sadovnikovav@gmail.com

Received 17.07.2023, accepted 20.11.2023, available online 27.12.2023, published 31.01.2024

Abstract. *Purpose.* Investigation of the joint manifestation of the effects of anisotropic signal propagation, coupling, and nonlinear power dependence of the medium parameters in a lattice of laterally and vertically coupled spin-wave (SW) microwaveguides. Consideration of the case of the influence of the rotation of the magnetization angle and the change of the lateral gap between microwaveguides located on the same substrate on the transverse profile of the spin-wave beam and the spatial localization of the SW amplitude. *Methods.* The method of micromagnetic modeling based on the numerical solution of the Landau–Lifshitz–Hilbert equation shows the possibility of controlling the direction of propagation of SW in an ensemble of laterally and vertically coupled iron yttrium garnet (YIG) microwaveguides by changing the magnetization angle. By the method of numerical integration of the system of coupled discrete nonlinear Schrödinger equations, the possibility of changing the transverse profile of the spin-wave beam by changing the level of the initial signal amplitude is shown. *Results.* The spatial distributions of the components of the dynamic magnetization of the SW excited in two microwaveguides located on the same substrate obtained in micromagnetic simulations indicate a change in the character of localization of the SW power in the output sections of the microwaveguides. At variation of the lattice magnetization angle, a shift of the threshold power value is observed, at which a characteristic curbing of the transverse width of the spin-wave beam in the nonlinear mode appears. *Conclusion.* When excitation of surface magnetostatic SW in a lattice of laterally and vertically coupled microwaveguides, a transformation of the transverse profile of the wave is observed at a deviation of the magnetization angle of the structure by 15° , which is manifested in the change of the SW length and its localization in each of the microwaveguides. The combined effects of dipole coupling, gyrotropy, and nonlinearity of the medium make it possible to control the value of the threshold power of the SW, at which the mode of diffractionless propagation of the spin-wave beam is realized in a single layer of the structure.

Keywords: spin wave, micromagnetic modeling, system of coupled wave equations, spin-wave beam, discrete diffraction.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation (RSF) under project number 23-79-30027.

For citation: Khutieva AB, Grachev AA, Beginin EN, Sadovnikov AV. Propagation of spin waves in a lattice of laterally and vertically coupled YIG microwaveguides by changing the magnetization angle in linear and nonlinear modes. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(1):57–71. DOI: 10.18500/0869-6632-003084

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В настоящее время активно исследуются способы построения систем обработки информационного сигнала на основе эффектов переноса магнитных моментов или спинов электронов без переноса заряда [1]. В таких устройствах, основанных на магнотронных принципах, информационный сигнал кодируется в фазе или амплитуде спиновых волн (СВ), а логические операции реализованы на основе принципов спин-волновой интерференции [2]. Планарные ферритовые волноводы конечной ширины на основе пленок железоиттриевого граната (ЖИГ, Iron-Yttrium-Garnet — YIG) могут быть использованы как базовые элементы магнотронных сетей (МС), для создания различных устройств обработки сигналов: линий задержки, фильтров, интерферометров, переключателей и мультиплексоров [3–6].

Магнотронные сети, состоящие из микроволноводов СВ на основе пленок ЖИГ, могут использоваться для обработки информации и в то же время обеспечивать технологическую интеграцию с существующей архитектурой на основе технологий комплементарных структур металл–оксид–полупроводник [7]. В качестве простейшего элемента МС может выступать полоска ферромагнетика.

тика, ограниченная в двух направлениях и представляющая собой волноведущий канал для СВ. Использование ЖИГ при создании спин-волноведущих структур обусловлено рекордно низким затуханием СВ [2]. Экспериментально было продемонстрировано, что создание многослойных топологий трехмерных структур с нарушением трансляционной симметрии позволяет рассматривать создаваемые элементы как узлы межсоединений для вертикально интегрированных МС [9]. Функционирование таких магнанных элементов, как спин-волновой ответитель сигнала на основе латерально [3, 10] или вертикально [11, 12] связанных микроволноводов, может быть основано на нелинейных режимах распространения СВ [13, 14], реализуемых за счет изменения величины намагниченности насыщения ЖИГ при увеличении уровня входного сигнала, и последующем изменении величины длины связи СВ [3]. При этом были исследованы два типа связанных магнанных волноведущих структур: многослойные структуры [15, 16] и микро- и наноразмерные волноводы, расположенные в планарной геометрии [3, 7].

В настоящей работе рассмотрены методы двойного управления характеристиками спин-волнового сигнала на основе изменения величины амплитуды СВ и угла намагничивания двухслойной структуры, в каждом слое которой сформированы волноведущие каналы. С помощью микромагнитного моделирования были исследованы режимы распространения СВ в решетке ЖИГ-микроволноводов. Исследование нелинейных эффектов проводится на основе системы дискретных связанных нелинейных уравнений Шрёдингера (НУШ). Используя сравнение полученных в микромагнитном моделировании карт пространственного распределения намагниченности в двухслойной структуре и в решетке, состоящей из двух слоев, в каждом из которых имеется решетка латеральных микроволноводов, показана возможность управления поперечной структурой поля спиновой волны. При этом выявлены режимы управления передачей спин-волнового сигнала при изменении угла намагничивания структуры. Рассматриваемая структура на основе решетки ЖИГ-микроволноводов может быть использована для создания систем многоканального демультимплексирования информационного сигнала.

1. Структура

Микромагнитное моделирование [17] проводилось для решетки латерально и вертикально связанных ферритовых микроволноводов (рис. 1). В качестве материала был выбран ЖИГ. Микроволноводы выполнены в виде удлиненных полосок длиной $L = 4$ мм, шириной $c = 300$ мкм и толщиной $d = 10$ мкм. Структура представляет собой два слоя, каждый из которых содержит

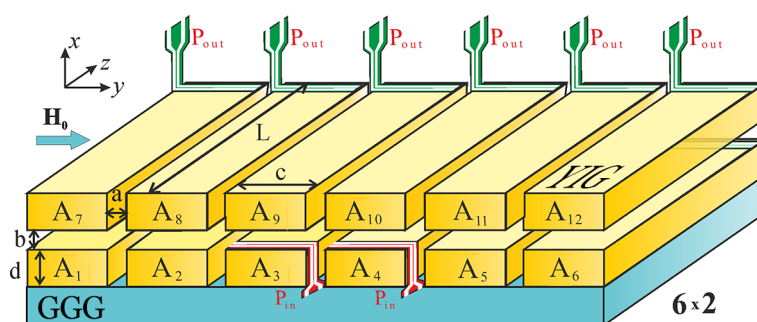


Рис. 1. Схематическое изображение решетки микроволноводов. На рисунке введены обозначения: a – горизонтальный зазор; b – вертикальный зазор; c – ширина; d – толщина; L – длина микроволноводов; P_{in} и P_{out} – микрополосковые антенны для возбуждения и приема СВ, соответственно (цвет онлайн)

Fig. 1. Schematic diagram of the microwaveguides array. The following notations are introduced in the figure: a – horizontal gap; b – vertical gap; c – width; d – thickness; L – length of microwaveguide; P_{in} and P_{out} – microstrip antennas for SW excitation and reception respectively (color online)

по шесть параллельно ориентированных микроволноводов, разделенных воздушным зазором. Намагниченность насыщения ЖИГ составляет $M = 139$ Гс, а величина внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси y , составляет $H_0 = 1200$ Э. Численное исследование проводилось на частоте 5.21 ГГц для всех случаев, рассмотренных в настоящей работе. При этом данная конфигурация намагничивания обеспечивает эффективное возбуждение поверхностных спиновых волн. Как известно, связанные ферритовые структуры расширяют функциональные возможности СВЧ-устройств ввиду дополнительного управляющего параметра, которым является связь между СВ, распространяющимися в отдельно взятых ферромагнитных пленках [13–16, 18–20]. Можно отметить, что при экспериментальном исследовании таких структур ЖИГ-волноводы формируются на подложке из гадолиний-галлиевого граната (ГГГ, Gadolinium-Gallium Garnet – GGG) [10].

2. Микромагнитное моделирование

Рассмотрим принцип работы исследуемой структуры: на входную антенну P_{in} подается микроволновой сигнал, частотный диапазон которого зависит от величины постоянного внешнего магнитного поля. По мере распространения СВ будет происходить перекачка спин-волнового сигнала во все микроволноводы в зависимости от угла отклонения внешнего магнитного поля, частоты и разности фаз подаваемого микроволнового сигнала на входные антенны. С помощью микромагнитного моделирования, основанного на решении уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта (ЛЛГ) [17], было проведено исследование режимов распространения СВ в решетке ЖИГ-микроволноводов. Для уменьшения отражений сигнала от границ расчетной области в численном моделировании были введены области с увеличивающимся в геометрической прогрессии параметром затухания, при этом начальное значение параметра затухания выбиралось $\alpha = 10^{-5}$, что соответствовало значению параметра затухания для эпитаксиально выращенных пленок ЖИГ/ГГГ [2]. Возбуждение структуры было реализовано путем создания локализованной области с переменным внешним магнитным полем на двух центральных микроволноводах в одном из слоев. Благодаря связи между СВ, распространяющимися в отдельных слоях и каналах двуслойной структуры, меняются динамические свойства волновых процессов, что явным образом учитывается в численном моделировании при расчете величины динамического поля размагничивания. Также отметим, что численная модель структуры, сформированная двумя латеральными массивами магнитных микроволноводов, расположенных друг над другом, приводит к неоднородному распределению внутреннего магнитного поля вдоль ширины пленок.

На рис. 2, *a, b* источник СВ показан черными прямоугольниками, расположенными в левой части микроволноводов A_3 и A_4 , при этом длина данных микроволноводов была выбрана равной 6 мм, что на 2 мм превышало длину остальных волноводов из решетки. Распространение в волноводах нижнего слоя A_1 – A_6 показано на рис. 2, *a, c*, а в волноводах верхнего слоя A_7 – A_{12} — на рис. 2, *b, d*. Данный метод возбуждения позволяет реализовать возбуждение как симметричной, так и антисимметричной моды связанной структуры, состоящей из двух связанных микроволноводов. В настоящей работе был рассмотрен случай возбуждения симметричной моды [10]. Была исследована динамика распространения в решетке латерально и вертикально связанных ЖИГ-микроволноводов при помощи построения карт пространственного распределения величины динамической намагниченности $m_z(x, y)$ и интенсивности СВ. Под интенсивностью СВ понимается величина $I(x, y) = \sqrt{m_x^2(x, y) + m_y^2(x, y)}$.

В случае, когда величина латерального и вертикального зазора составляет 10 мкм, интенсивность СВ имеет максимум в двух центральных каналах, при этом при $x = 4$ мм наблюдается перераспределение интенсивности, а именно, мощность СВ передается из двух центральных каналов $A_{3,4}$ в боковые $A_{1,2,5,6}$. Затем в первом слое структуры, в котором расположены возбуждаемые волноводы, наблюдается локализация мощности СВ в области выходных секций центральных

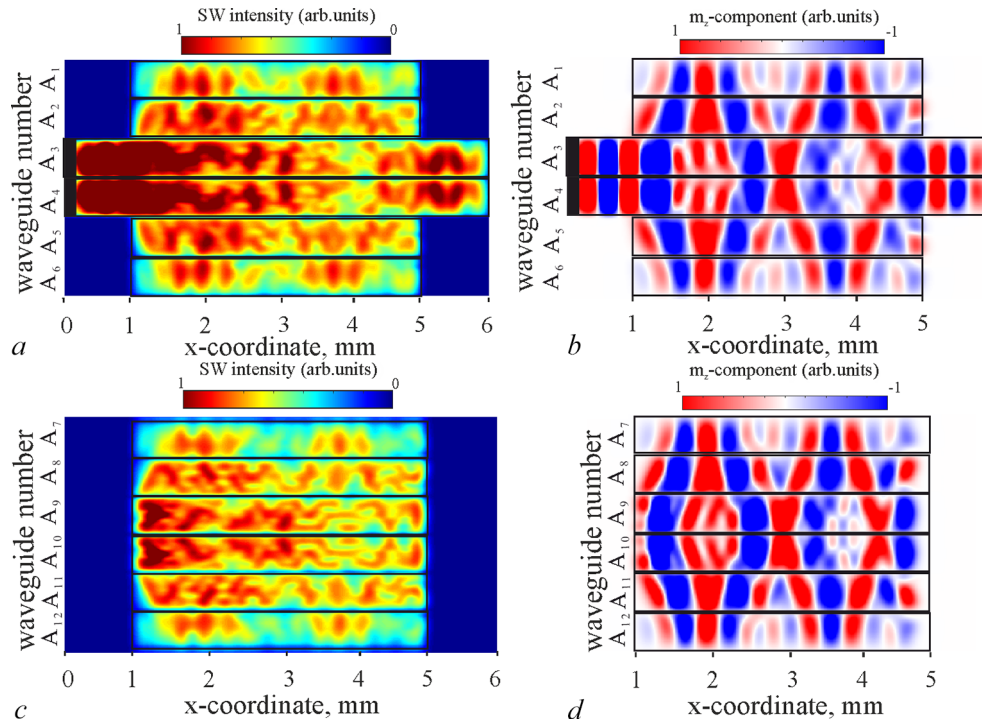


Рис. 2. *a, c* – Пространственное распределение интенсивности СВ, градациями цвета закодирована интенсивность СВ $I(x, y)$ на частоте 5.21 ГГц; *b, d* – карты пространственного распределения компоненты m_z динамической намагниченности для СВ, распространяющихся в решётке микроволноводов, где величина латерального и вертикального зазора составляет 10 мкм (цвет онлайн)

Fig. 2. *a, c* – Spatial distribution of SW intensity, where the color gradations encode the SW intensity $I(x, y)$ at the frequency 5.21 GHz; *b, d* – spatial maps distribution of the m_z component of the dynamic magnetisation for the SW propagating in the microwavguides lattice, where the lateral and vertical gaps are 10 μm (color online)

каналов $A_{3,4}$ (см. рис. 2). Видно, что во входной и выходной областях центральных каналов $A_{3,4}$ длина СВ составляет величину 800 мкм, что соответствует расчету дисперсии симметричной моды латеральной структуры с данными геометрическими размерами [10]. На рис. 2 изображена стационарная картина установления волнового процесса, при котором происходит распространение как в соседние микроволноводы внутри одного слоя, так и вертикальном направлении. Отметим, что в верхнем слое пространственное распределение компоненты m_z динамической намагниченности и интенсивность СВ отличаются от таковых в нижнем слое, а именно минимум локализации в каналах $A_{3,4}$ нижнего слоя наблюдается при $x = 4.05$ мм, в то время как в верхнем слое – при $x = 3.9$ мм.

При сравнении результатов численного моделирования для двух слоев ЖИГ, разделенных воздушным зазором (рис. 3), и для решетки микроволноводов размерностью 26 (см. рис. 2) видно, что влияние неоднородного распределения внутреннего магнитного поля в решетке микроволноводов приводит к уменьшению длины волны по сравнению с двуслойной структурой в 1.4 раза. Можно отметить, что при распространении СВ в центральной части двуслойной пленки структура поля волны обусловлена интерференцией поперечных спин-волновых мод. Так, в поперечном сечении при $1 < x < 5$ мм наблюдается профиль намагниченности, образованный целым числом длин полуволн $3\Lambda/2$, где $\Lambda = 2\pi/k_y$, что вызвано интерференцией первой и третьей ширинных мод с поперечными волновыми числами $k_y^I = \pi/(6c)$ и $k_y^{III} = \pi/(2c)$ и продольными волновыми числами $k_x^I = k_x^I(f)$ и $k_x^{III} = k_x^{III}(f)$ [22, 23]. Амплитуда поля при этом может быть описана соотношением $A(x, y) = a_I \Phi_I(y) \exp(-ik_x^I x) + a_{III} \Phi_{III}(y) \exp(-ik_x^{III} x)$, где функции $\Phi_{I,III}(y)$

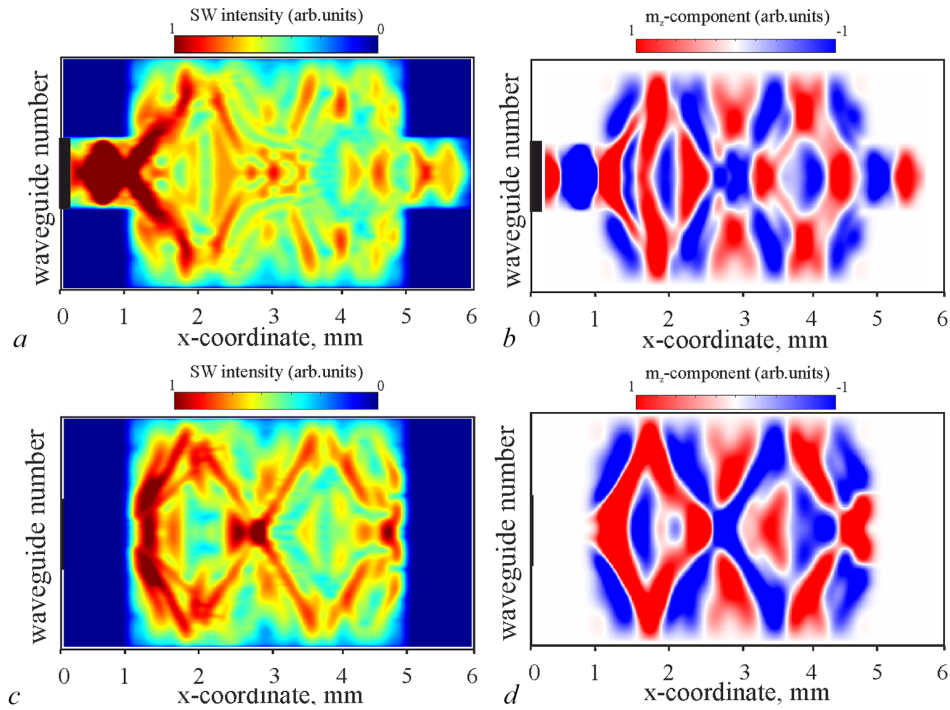


Рис. 3. *a, c* — Пространственное распределение интенсивности СВ; *b, d* — карты пространственного распределения компоненты m_z динамической намагниченности для СВ, распространяющихся в двуслойной структуре, где величина вертикального зазора составляет 10 мкм (цвет онлайн)

Fig. 3. *a, c* — Spatial distribution of the SW intensity; *b, d* — spatial maps distribution of the m_z component of the dynamic magnetisation for the SW propagating in a bilayer structure where the vertical gap is 10 μm (color online)

описывают поперечный профиль первой и третьей ширинных мод. В случае решетки связанных микроволноводов, разделенных латеральным зазором, можно наблюдать формирование периодической перекачки сигнала в каждом отдельном волноводе вдоль направления распространения волны. При этом максимум интенсивности в нижнем слое расположен на линии $x = 3.1$ мм, в то время как в верхнем слое максимум интенсивности СВ происходит при $x = 2.75$ мм.

Стоит отметить, что в случае решетки связанных микроволноводов с помощью микромагнитного моделирования можно исследовать режимы распространения сигнала при разных углах намагничивания. На рис. 4 приведено сравнение двух конфигураций: двух слоев ЖИГ, разделенных воздушным зазором, и решетки микроволноводов размерностью 26 при отклонении угла намагничивания структуры на 15° относительно направления оси y . Для сравнения в стационарном режиме распространения СВ при 0° происходит изменение длины СВ и ее локализация в каждом из микроволноводов. В связи с этим поперечная структура пучка трансформируется и наблюдается волновой процесс (перенос фазы СВ) внутри каждой из пленок в решетке. Такой метод изменения пространственного профиля пучка СВ в решетке связанных микроволноводов позволяет реализовать режим управления сигналом на выходе каналов $A_{3,4}$. Так, например, видно, что максимум амплитуды сигнала может разделяться между выходными секциями каналов A_3 или A_4 (рис. 4, *e*), при этом в верхнем слое амплитуды сигналов в секциях A_7 и A_{12} одинаковы при $x = 5$ мм. Для объяснения наблюдаемого поведения СВ при изменении угла намагничивания можно указать, что закон дисперсии $k_x^I = k_x^I(f)$, $k_x^{III} = k_x^{III}(f)$ меняется при изменении ориентации вектора магнитного поля [2, 23]. Это приводит к изменению результата интерференции поперечных мод спиновых волн в области $1 < x < 5$ мм, что проявляется в зигзагообразном виде профиля динамической намагниченности, изображенного на рис. 4, *a-d*. В случае решетки

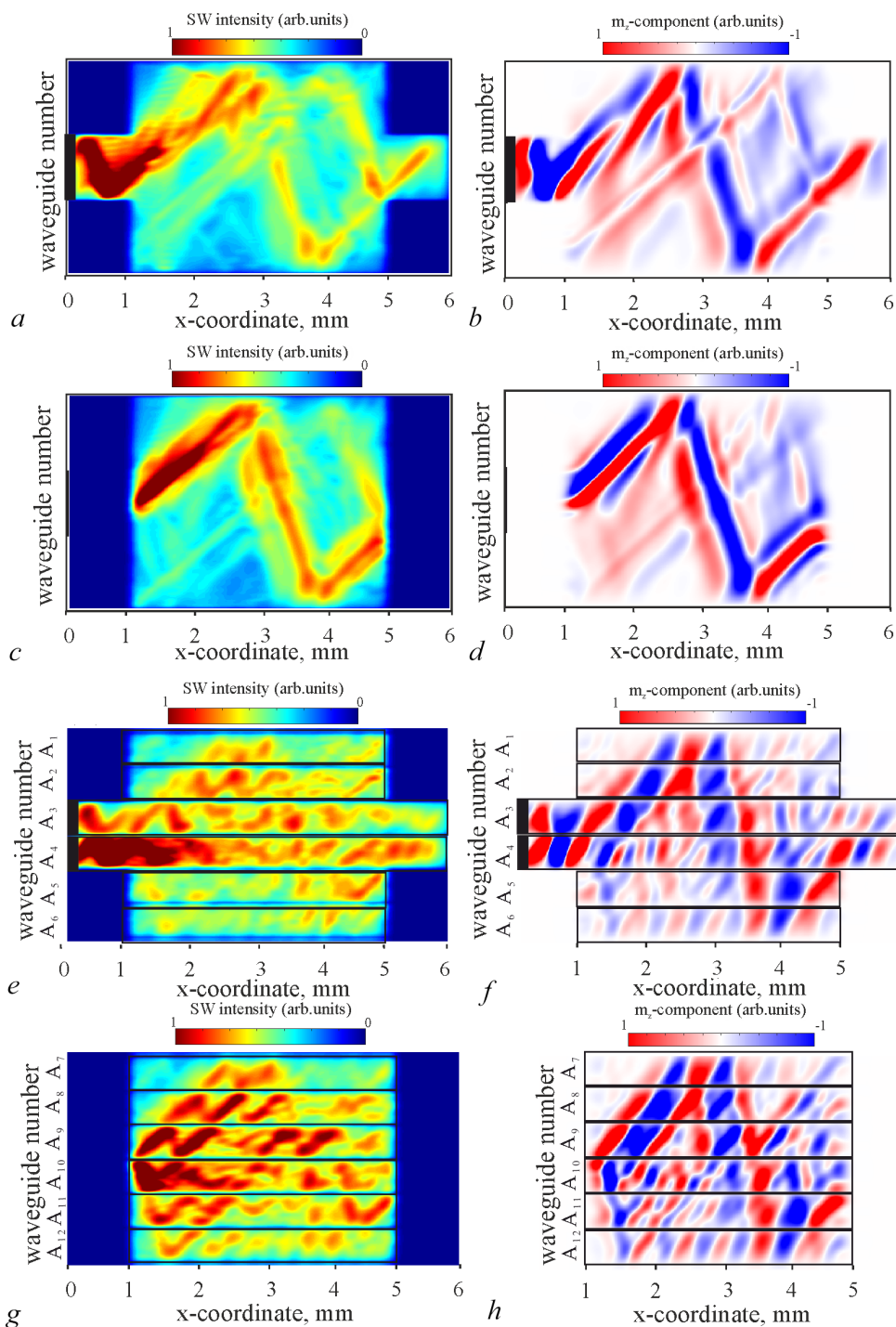


Рис. 4. *a, c, e, g* – пространственное распределение интенсивности СВ; *b, d, f, h* – карты пространственного распределения компоненты m_z динамической намагниченности для СВ (цвет онлайн)

Fig. 4. *a, c, e, g* – spatial distribution of the SW intensity; *b, d, f, h* – spatial maps distribution of the m_z component of the dynamic magnetisation for the SW (color online)

микроволноводов (рис. 4, *e–h*) меняется не только дисперсия СВ в отдельно взятом волноводе, но и величина связи спиновых волн, определяемая интегралом перекрытия собственных волн микроволноводов, расположенных рядом друг с другом.

3. Численная модель на основе связанных дискретных нелинейных уравнений Шрёдингера

Для описания процессов нелинейного распространения СВ в решётке микроволноводов построена численная модель на основе связанных дискретных НУШ [25, 26]:

$$i \frac{dA_{mn}}{dz} + \beta(\varphi)A_{mn} - C_L(\varphi) (A_{m(n+1)} + A_{m(n-1)}) + C_V(\varphi) (A_{(m+1)n} + A_{(m-1)n}) + \Gamma(\varphi)|A_{mn}|^2 A_{mn} = 0, \quad (1)$$

где A_{mn} — амплитуда сигнала в n -м микроволноводе m -го слоя, $\beta(\varphi)$ — коэффициент дисперсии одиночного микроволновода, $C_L(\varphi)$ — коэффициент связи между микроволноводами в латеральном (горизонтальном) направлении, $C_V(\varphi)$ — коэффициент связи между микроволноводами в вертикальном направлении, $\Gamma(\varphi)$ — коэффициент нелинейности. В данном случае для каждого волновода записывается одно уравнение, то есть в общей сложности 12 связанных уравнений.

Для получения коэффициента дисперсии $\beta(\varphi)$ был рассчитан спектр собственных мод одиночного микроволновода и построена дисперсия его первой собственной моды. Расчёт данной характеристики производился в статье [10] с помощью метода конечных элементов. При этом отметим, что $\beta(\varphi)$ имеет явную зависимость от угла намагничивания φ в диапазоне $0...15^\circ$ и приводит к увеличению внутреннего магнитного поля в ЖИГ микроволноводе [27].

Расчёт коэффициентов связи $C_L(\varphi)$ и $C_V(\varphi)$ также сводится к поиску собственных мод, но уже для системы из двух микроволноводов, имеющих дипольную связь в латеральном направлении ($C_L(\varphi)$) [10] и для системы, состоящей из двух вертикально связанных микроволноводов [11, 28]. Данные коэффициенты имеют следующий вид:

$$C_{L,V}(\varphi) = \frac{\pi}{2L_h(\varphi)}, \quad (2)$$

$$L_h(\varphi) = \frac{\pi}{\Delta k} = \frac{\pi}{|k_s - k_{as}|}, \quad (3)$$

где k_s и k_{as} — волновые числа для симметричной и антисимметричной моды в связанных микроволноводах. При этом поворот внешнего магнитного поля на φ в диапазоне $0...15^\circ$ так же, как в случае одиночного волновода, будет приводить к увеличению внутреннего магнитного поля в ЖИГ-микроволноводах и, следовательно, изменять значения k_s и k_{as} [22, 23]. Коэффициент нелинейности $\Gamma(\varphi)$ выражается в виде [29]

$$\Gamma(\varphi) = \frac{d\beta(\varphi)}{d|A_{m,n}|^2}. \quad (4)$$

Расчёт производной проводится аналитически, путем поиска корней дисперсионного уравнения для безграничной касательно намагниченной ферритовой плёнки [30]

$$f^2 - \left(f_H(\varphi) + \frac{f_M}{2} \right)^2 = - \left(\frac{f_M}{2} \right)^2 e^{-2|\beta|t}, \quad (5)$$

где t — толщина плёнки, где $f_M = \gamma 4\pi M$, $f_H = \gamma H_0$, $\gamma = 2.8$ МГц/Э — гиромангнитное отношение. При условии $f_M = f_{M_0} \{ |(A_{m,n})^2| \}$ получается следующий вид коэффициента нелинейности для ПМСВ:

$$\Gamma(\varphi) = \frac{2(2f^2 - 2f_H^2(\varphi) - f_H(\varphi)f_M(|A_{m,n}|^2))}{(4f^2 - 4f_H^2(\varphi) - 4f_H(\varphi)f_M|A_{m,n}|^2 - f_M^2|A_{m,n}|^2)t}. \quad (6)$$

На рис. 5, *a*, *b* показано распределение интенсивности СВ в рассматриваемой решётке ЖИГ-микроволноводов при различном значении амплитуды начального возбуждения. В случае линейного возбуждения СВ ($A_0 = 0.01$) (см. рис. 5, *a*), как и в случае микромагнитного моделирования, показанного выше, наблюдается перенос СВ между микроволноводами. На расстоянии от 2.5 до 3.5 мм в центральной области наблюдается фокусировка СВ. При увеличении амплитуды начального возбуждения $A_0 = 0.18$ (см. рис. 5, *b*) наблюдается увеличение интенсивности СВ в области центральных микроволноводов в результате увеличения длины связи СВ. Можно сказать, что в данном случае в решётке наблюдается режим самофокусировки СВ. Данный режим можно пронаблюдать на рис. 5, *c* при выводе амплитуды СВ вдоль ширины микроволноводов в сечении $z = 5$ мм (зелёная линия на рис. 5, *a*, *b*). В случае $A_0 = 0.18$ (синие квадраты) максимум интенсивности наблюдается в области центральных микроволноводов, в отличие от случая $A_0 = 0.01$ (красные круги).

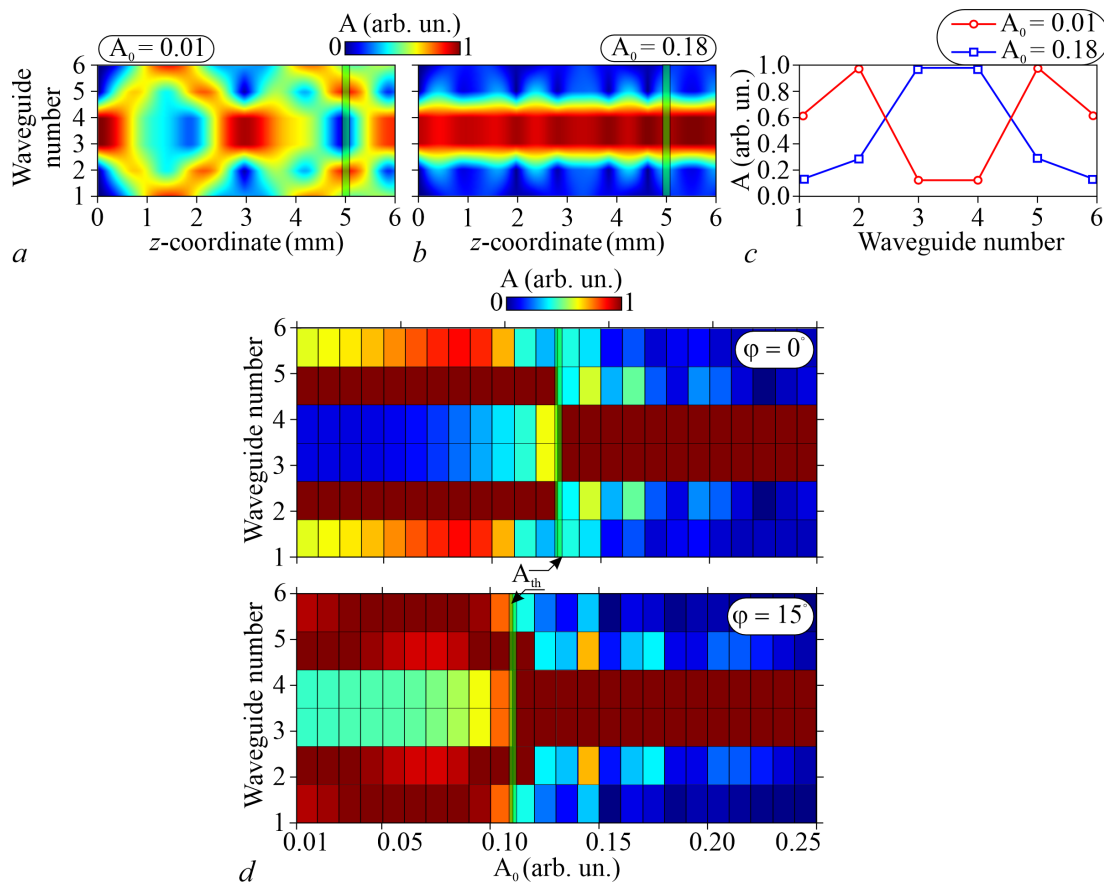


Рис. 5. *a* – Пространственное распределение амплитуды СВ, распространяющихся в решётке микроволноводов при начальной амплитуде возбуждения СВ: $A_0 = 0.01$ (*a*); 0.18 (*b*). *c* – Распределение амплитуды СВ вдоль направления оси y магнитных микроволноводов в сечении $z = 5$ мм для $A_0 = 0.01$ (красные круги) и $A_0 = 0.18$ (синие квадраты). *d* – Пространственные карты амплитуды СВ, распространяющихся в решётке микроволноводов в сечении $z = 5$ мм, как функция начальной амплитуды возбуждения СВ для разных значений угла намагничивания φ (значения φ указаны на рисунке) (цвет онлайн)

Fig. 5. *a* – Spatial distribution of the SW amplitude propagating in the microwaveguides grating at the initial amplitude of the SW excitation $A_0 = 0.01$ (*a*); 0.18 (*b*). *c* – Distribution of the SW amplitude along the y -axis of the magnetic microwaveguides grating in the section $z = 5$ mm for $A_0 = 0.01$ (red circles) and $A_0 = 0.18$ (blue squares). *d* – Spatial maps of the SW amplitude propagating in the microwaveguides grating in the $z = 5$ mm section as a function of the initial SW excitation amplitude for different values of the bias angle φ (the values of φ are given in the figure) (color online)

Модель на основе связанных НУШ позволяет исследовать влияние поворота угла намагничивания φ , поскольку коэффициенты β , $C_{L,V}$ и Γ имеют зависимость от величины внутреннего магнитного поля и от φ . На рис. 5, *d* показаны поперечные распределения интенсивности СВ в сечении $z = 5$ мм при увеличении амплитуды начального возбуждения A_0 (ось абсцисс) для двух значений угла намагничивания φ . В случае $\varphi = 0^\circ$ (верхняя карта на рис. 5, *d*) при $A_0 = 0.14$ в решётке микроволноводов наблюдается режим нелинейного переключения, данное значение можно назвать пороговым значением амплитуды A_{th} , при котором наблюдается обужение пучка. При повороте угла относительно направления оси y ($\varphi = 15^\circ$) порог нелинейного переключения снижается до значения $A_{th} = 0.11$ (нижняя карта на рис. 5, *d*). Таким образом, оказывается возможным управлять пространственным распределением интенсивности СВ в решётке магнитных микроволноводов путём одновременного изменения мощности входного сигнала и ориентации внешнего магнитного поля.

Заключение

В настоящей работе проведено исследование двойного управления характеристиками СВ в решетке ЖИГ-микроволноводов при реализации одновременно латерального и вертикального типа связи. Проведено исследование особенностей процессов формирования пучков спиновых волн для двуслойной структуры и решетки связанных магнитных волноводов. Выявлены особенности распространения и механизмы изменения пространственного распределения профиля спин-волнового пучка при совместном проявлении эффектов анизотропного распространения сигнала, дипольной связи и нелинейной зависимости параметров среды от мощности. На основе полученных пространственных распределений компонент динамической намагниченности СВ продемонстрировано изменение характера локализации мощности СВ в линейном и нелинейном режиме в выходных секциях микроволноводов. При этом показано, что отклонение угла намагничивания от направления, при котором в центральных каналах возбуждается поверхностная магнитостатическая волна, приводит к трансформации поперечной структуры спин-волнового пучка, позволяя менять положение пространственной локализации мощности СВ. Показана возможность изменения поперечного профиля спин-волнового пучка при изменении уровня начальной амплитуды сигнала, при этом при вариации угла намагничивания массива наблюдается сдвиг величины пороговой мощности, при которой появляется характерное обужение спин-волнового пучка. На основании результатов микромагнитного моделирования и расчетов по модельным системам дискретных связанных уравнений можно сделать вывод, что выбранные геометрические размеры структуры на основе магнитных микроволноводов соответствуют режимам фильтрации и возможности пространственно-частотного демультимплексирования сигнала, закодированного в виде амплитуды и фазы СВ. Помимо этого, решетка латерально и вертикально связанных микроволноводов представляет собой элемент межсоединений для трехмерных топологий магнитных сетей [31], демонстрируя при этом функциональные возможности обработки сигналов в различных приложениях, связанных с магнитной микроэлектроникой и спинтроникой.

Список литературы

1. Chumak A. V., Kabos P., Wu M., Abert C., Adelman C., Adeyeye A. O., Åkerman J., Aliev F. G., Anane A., Awad A., Back C. H., Barman A., Bauer G. E. W., Becherer M., Beginin E. N., Bittencourt V. A. S. V., Blanter Y. M., Bortolotti P., Boventer I., Bozhko D. A., Bunyaev S. A., Carmiggelt J. J., Cheenikundil R. R., Ciubotaru F., Cotofana S., Csaba G., Dobrovolskiy O. V., Dubs C., Elyasi M., Fripp K. G., Fulara H., Golovchanskiy I. A., Gonzalez-Ballester C., Graczyk P., Grundler D., Gruszecki P., Gubbiotti G., Guslienko K., Haldar A., Hamdioui S., Hertel R., Hillebrands B., Hioki T., Houshang A., Hu C.-M., Huebl H., Huth M., Iacocca E., Jungfleisch M. B., Kakazei G. N., Khitun A., Khymyn R., Kikkawa T., Kläui M., Klein O., Klos J. W.,

- Knauer S., Koraltan S., Kostylev M., Krawczyk M., Krivorotov I. N., Kruglyak V. V., Lachance-Quirion D., Ladak S., Lebrun R., Li Y., Lindner M., Macêdo R., Mayr S., Melkov G. A., Mieszczak S., Nakamura Y., Nembach H. T., Nikitin A. A., Nikitov S. A., Novosad V., Otálora J. A., Otani Y., Papp A., Pigeau B., Pirro P., Porod W., Porrati F., Qin H., Rana B., Reimann T., Riente F., Romero-Isart O., Ross A., Sadovnikov A. V., Safin A. R., Saitoh E., Schmidt G., Schultheiss H., Schultheiss K., Serga A. A., Sharma S., Shaw J. M., Suess D., Surzhenko O., Szulc K., Taniguchi T., Urbánek M., Usami K., Ustinov A. B., van der Sar T., van Dijken S., Vasyuchka V. I., Verba R., Viola Kusminskiy S., Wang Q., Weides M., Weiler M., Wintz S., Wolski S. P., Zhang X.* Advances in magnetics roadmap on spin-wave computing // *IEEE Transactions on Magnetics*. 2022. Vol. 58, no. 6. P. 0800172. DOI: 10.1109/TMAG.2022.3149664.
2. *Prabhakar A., Stancil D. D.* Spin Waves: Theory and Applications. New York: Springer, 2009. 348 p. DOI: 10.1007/978-0-387-77865-5.
 3. *Wang Q., Kewenig M., Schneider M., Verba R., Kohl F., Heinz B., Geilen M., Mohseni M., Lägél B., Ciubotaru F., Adelman C., Dubs C., Cotozana S. D., Dobrovolskiy O. V., Brächer T., Pirro P., Chumak A. V.* A magnonic directional coupler for integrated magnonic half-adders // *Nature Electronics*. 2020. Vol. 3, no. 12. P. 765–774. DOI: 10.1038/s41928-020-00485-6.
 4. *Vogt K., Schultheiss H., Jain S., Pearson J. E., Hoffmann A., Bader S. D., Hillebrands B.* Spin waves turning a corner // *Appl. Phys. Lett.* 2012. Vol. 101, no. 4. P. 042410. DOI: 10.1063/1.4738887.
 5. *Balynsky M., Gutierrez D., Chiang H., Kozhevnikov A., Dudko G., Filimonov Y., Balandin A. A., Khitun A.* A magnetometer based on a spin wave interferometer // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7, no. 1. P. 11539. DOI: 10.1038/s41598-017-11881-y.
 6. *Raskhodchikov D., Bensmann J., Nikolaev K. O., Lomonte E., Jin L., Steeger P., Preuß J. A., Schmidt R., Schneider R., Kern J., de Vasconcellos S. M., Bratschitsch R., Demokritov S. O., Pernice W. H. P., Demidov V. E.* Propagation of spin waves in intersecting yttrium iron garnet nanowaveguides // *Phys. Rev. Applied*. 2022. Vol. 18, no. 5. P. 054081. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.18.054081.
 7. *Sadovnikov A. V., Beginin E. N., Sheshukova S. E., Sharaevskii Y. P., Stognij A. I., Novitski N. N., Sakharov V. K., Khivintsev Y. V., Nikitov S. A.* Route toward semiconductor magnonics: Light-induced spin-wave nonreciprocity in a YIG/GaAs structure // *Phys. Rev. B*. 2019. Vol. 99, no. 5. P. 054424. DOI: 10.1103/PhysRevB.99.054424.
 8. *Sakharov V., Khivintsev Y., Vysotskii S., Stognij A., Filimonov Y., Sadovnikov A., Beginin E., Nikitov S.* Spin wave filtration by resonances in the sidewalls of corrugated yttrium-iron garnet films // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2022. Vol. 545. P. 168786. DOI: 10.1016/j.jmmm.2021.168786.
 9. *Martyshkin A. A., Davies C. S., Sadovnikov A. V.* Magnonic interconnections: Spin-wave propagation across two-dimensional and three-dimensional junctions between yttrium iron garnet magnonic stripes // *Phys. Rev. Applied*. 2022. Vol. 18, no. 6. P. 064093. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.18.064093.
 10. *Sadovnikov A. V., Beginin E. N., Sheshukova S. E., Romanenko D. V., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A.* Directional multimode coupler for planar magnonics: Side-coupled magnetic stripes // *Appl. Phys. Lett.* 2015. Vol. 107, no. 20. P. 202405. DOI: 10.1063/1.4936207.
 11. *Sasaki H., Mikoshiba N.* Directional coupling of magnetostatic surface waves in a layered structure of YIG films // *J. Appl. Phys.* 1981. Vol. 52, no. 5. P. 3546–3552. DOI: 10.1063/1.329134.
 12. *Morozova M. A., Sharaevskaya A. Y., Sadovnikov A. V., Grishin S. V., Romanenko D. V., Beginin E. N., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A.* Band gap formation and control in coupled periodic ferromagnetic structures // *J. Appl. Phys.* 2016. Vol. 120, no. 22. P. 223901. DOI: 10.1063/1.4971410.
 13. *Дудко Г. М., Филимонов Ю. А.* Самофокусировка ограниченных пучков обратных объемных магнитостатических волн в ферромагнитных плёнках: численный эксперимент // *Известия вузов. ПНД*. 1997. Т. 5, № 6. С. 29–40.

14. *Ustinov A. B., Drozdovskii A. V., Kalinikos B. A.* Multifunctional nonlinear magnonic devices for microwave signal processing // *Appl. Phys. Lett.* 2010. Vol. 96, no. 14. P. 142513. DOI: 10.1063/1.3386540.
15. *Ganguly A. K., Vittoria C.* Magnetostatic wave propagation in double layers of magnetically anisotropic slabs // *J. Appl. Phys.* 1974. Vol. 45, no. 10. P. 4665–4667. DOI: 10.1063/1.1663113.
16. *Puszkarski H.* Theory of interface magnons in magnetic multilayer films // *Surface Science Reports.* 1994. Vol. 20, no. 2. P. 45–110. DOI: 10.1016/0167-5729(94)90011-6.
17. *Vansteenkiste A., Leliaert J., Dvornik M., Helsen M., Garcia-Sanchez F., Van Waeyenberge B.* The design and verification of MuMax3 // *AIP Advances.* 2014. Vol. 4, no. 10. P. 107133. DOI: 10.1063/1.4899186.
18. *Gubbiotti G., Sadovnikov A., Beginin E., Nikitov S., Wan D., Gupta A., Kundu S., Talmelli G., Carpenter R., Asselberghs I., Radu I. P., Adelmann C., Ciubotaru F.* Magnonic band structure in vertical meander-shaped Co₄₀Fe₄₀B₂₀ thin films // *Phys. Rev. Applied.* 2021. Vol. 15, no. 1. P. 014061. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.15.014061.
19. *Sadovnikov A. V., Odintsov S. A., Beginin E. N., Sheshukova S. E., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A.* Toward nonlinear magnonics: Intensity-dependent spin-wave switching in insulating side-coupled magnetic stripes // *Phys. Rev. B.* 2017. Vol. 96, no. 14. P. 144428. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.144428.
20. *Sadovnikov A. V., Odintsov S. A., Sheshukova S. E., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A.* Nonlinear lateral spin-wave transport in planar magnonic networks // *IEEE Magnetics Letters.* 2018. Vol. 9. P. 3707105. DOI: 10.1109/LMAG.2018.2874349.
21. *Вашковский А. В., Стальмахов А. В.* Дисперсия магнитостатических волн в двухслойных структурах феррит–феррит // *Радиотехника и электроника.* 1984. Т. 29, № 5. С. 901–907.
22. *Grachev A. A., Sheshukova S. E., Kostylev M. P., Nikitov S. A., Sadovnikov A. V.* Reconfigurable dipolar spin-wave coupling in a bilateral yttrium iron garnet structure // *Phys. Rev. Applied.* 2023. Vol. 19, no. 5. P. 054089. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.19.054089.
23. *Odincov S. A., Grachev A. A., Nikitov S. A., Sadovnikov A. V.* Intensity and magnetization angle reconfigurable lateral spin-wave coupling and transport // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* 2020. Vol. 500. P. 166344. DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.166344.
24. *Gurevich A. G., Melkov G. A.* Magnetization Oscillations and Waves. London: CRC Press, 1996. 456 p.
25. *Lederer F., Stegeman G. I., Christodoulides D. N., Assanto G., Segev M., Silberberg Y.* Discrete solitons in optics // *Phys. Rep.* 2008. Vol. 463, no. 1–3. P. 1–126. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.04.004.
26. *Кившарь Ю. С., Агравал Г. П.* Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 648 с.
27. *Садовников А. В., Грачев А. А., Бегинин Е. Н., Одинцов С. А., Шешукова С. Е., Шараевский Ю. П., Сердобинцев А. А., Митин Д. М., Никитов С. А.* Связанные спиновые волны в индуцированных упругими деформациями магнитных волноводах в структуре ЖИГ-пьезоэлектрик // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики.* 2017. Т. 106, № 7. С. 445–450. DOI: 10.7868/S0370274X17190092.
28. *Sasaki H., Mikoshiba N.* Directional coupling of magnetostatic surface waves in layered magnetic thin films // *Electronics Letters.* 1979. Vol. 15, no. 6. P. 172–174. DOI: 10.1049/el:19790121.
29. *Зависляк И. В., Тычинский А. В.* Физические основы функциональной микроэлектроники. Киев: УМК ВО, 1989. 105 с.
30. *Damon R. W., Eshbach J. R.* Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // *Journal of Physics and Chemistry of Solids.* 1961. Vol. 19, no. 3–4. P. 308–320. DOI: 10.1016/0022-3697(61)90041-5.
31. *Gubbiotti G.* Three-Dimensional Magnonics: Layered, Micro- and Nanostructures. New York: Jenny Stanford Publishing, 2019. 416 p. DOI: 10.1201/9780429299155.

References

1. Chumak AV, Kabos P, Wu M, Abert C, Adelman C, Adeyeye AO, Åkerman J, Aliev FG, Anane A, Awad A, Back CH, Barman A, Bauer GEW, Becherer M, Beginin EN, Bittencourt VASV, Blanter YM, Bortolotti P, Boventer I, Bozhko DA, Bunyaev SA, Carmiggelt JJ, Cheenikundil RR, Ciubotaru F, Cotofana S, Csaba G, Dobrovolskiy OV, Dubs C, Elyasi M, Fripp KG, Fulara H, Golovchanskiy IA, Gonzalez-Ballester C, Graczyk P, Grundler D, Gruszecki P, Gubbiotti G, Gusliencko K, Haldar A, Hamdioui S, Hertel R, Hillebrands B, Hioki T, Houshang A, Hu C-M, Huebl H, Huth M, Iacocca E, Jungfleisch MB, Kakazei GN, Khitun A, Khymyn R, Kikkawa T, Kläui M, Klein O, Klos JW, Knauer S, Koraltan S, Kostylev M, Krawczyk M, Krivorotov IN, Kruglyak VV, Lachance-Quirion D, Ladak S, Lebrun R, Li Y, Lindner M, Macêdo R, Mayr S, Melkov GA, Mieszczyk S, Nakamura Y, Nembach HT, Nikitin AA, Nikitov SA, Novosad V, Otálora JA, Otani Y, Papp A, Pigeau B, Pirro P, Porod W, Porrati F, Qin H, Rana B, Reimann T, Riente F, Romero-Isart O, Ross A, Sadovnikov AV, Safin AR, Saitoh E, Schmidt G, Schultheiss H, Schultheiss K, Serga AA, Sharma S, Shaw JM, Suess D, Surzhenko O, Szulc K, Taniguchi T, Urbánek M, Usami K, Ustinov AB, van der Sar T, van Dijken S, Vasyuchka VI, Verba R, Viola Kusminskiy S, Wang Q, Weides M, Weiler M, Wintz S, Wolski SP, Zhang X. Advances in magnetics roadmap on spin-wave computing. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2022;58(6): 0800172. DOI: 10.1109/TMAG.2022.3149664.
2. Prabhakar A, Stancil DD. *Spin Waves: Theory and Applications*. New York: Springer; 2009. 348 p. DOI: 10.1007/978-0-387-77865-5.
3. Wang Q, Kewenig M, Schneider M, Verba R, Kohl F, Heinz B, Geilen M, Mohseni M, Lägél B, Ciubotaru F, Adelman C, Dubs C, Cotofana SD, Dobrovolskiy OV, Brächer T, Pirro P, Chumak AV. A magnonic directional coupler for integrated magnonic half-adders. *Nature Electronics*. 2020;3(12):765–774. DOI: 10.1038/s41928-020-00485-6.
4. Vogt K, Schultheiss H, Jain S, Pearson JE, Hoffmann A, Bader SD, Hillebrands B. Spin waves turning a corner. *Appl. Phys. Lett.* 2012;101(4):042410. DOI: 10.1063/1.4738887.
5. Balynsky M, Gutierrez D, Chiang H, Kozhevnikov A, Dudko G, Filimonov Y, Balandin AA, Khitun A. A magnetometer based on a spin wave interferometer. *Scientific Reports*. 2017;7(1): 11539. DOI: 10.1038/s41598-017-11881-y.
6. Raskhodchikov D, Benschmann J, Nikolaev KO, Lomonte E, Jin L, Steeger P, Preuß JA, Schmidt R, Schneider R, Kern J, de Vasconcellos SM, Bratschitsch R, Demokritov SO, Pernice WHP, Demidov VE. Propagation of spin waves in intersecting yttrium iron garnet nanowaveguides. *Phys. Rev. Applied*. 2022;18(5):054081. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.18.054081.
7. Sadovnikov AV, Beginin EN, Sheshukova SE, Sharaevskii YP, Stognij AI, Novitski NN, Sakharov VK, Khivintsev YV, Nikitov SA. Route toward semiconductor magnonics: Light-induced spin-wave nonreciprocity in a YIG/GaAs structure. *Phys. Rev. B*. 2019;99(5):054424. DOI: 10.1103/PhysRevB.99.054424.
8. Sakharov V, Khivintsev Y, Vysotskii S, Stognij A, Filimonov Y, Sadovnikov A, Beginin E, Nikitov S. Spin wave filtration by resonances in the sidewalls of corrugated yttrium-iron garnet films. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2022;545:168786. DOI: 10.1016/j.jmmm.2021.168786.
9. Martyshkin AA, Davies CS, Sadovnikov AV. Magnonic interconnections: Spin-wave propagation across two-dimensional and three-dimensional junctions between yttrium iron garnet magnonic stripes. *Phys. Rev. Applied*. 2022;18(6):064093. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.18.064093.
10. Sadovnikov AV, Beginin EN, Sheshukova SE, Romanenko DV, Sharaevskii YP, Nikitov SA. Directional multimode coupler for planar magnonics: Side-coupled magnetic stripes. *Appl. Phys. Lett.* 2015;107(20):202405. DOI: 10.1063/1.4936207.
11. Sasaki H, Mikoshiha N. Directional coupling of magnetostatic surface waves in a layered structure of YIG films. *J. Appl. Phys.* 1981;52(5):3546–3552. DOI: 10.1063/1.329134.

12. Morozova MA, Sharaevskaya AY, Sadovnikov AV, Grishin SV, Romanenko DV, Beginin EN, Sharaevskii YP, Nikitov SA. Band gap formation and control in coupled periodic ferromagnetic structures. *J. Appl. Phys.* 2016;120(22):223901. DOI: 10.1063/1.4971410.
13. Dudko GM, Filimonov YA. Self-focusing of confined beams of backward volume magnetostatic waves in ferromagnetic films: a numerical experiment. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 1997;5(6):29–40 (in Russian).
14. Ustinov AB, Drozdovskii AV, Kalinikos BA. Multifunctional nonlinear magnonic devices for microwave signal processing. *Appl. Phys. Lett.* 2010;96(14):142513. DOI: 10.1063/1.3386540.
15. Ganguly AK, Vittoria C. Magnetostatic wave propagation in double layers of magnetically anisotropic slabs. *J. Appl. Phys.* 1974;45(10):4665–4667. DOI: 10.1063/1.1663113.
16. Puzskarski H. Theory of interface magnons in magnetic multilayer films. *Surface Science Reports.* 1994;20(2):45–110. DOI: 10.1016/0167-5729(94)90011-6.
17. Vansteenkiste A, Leliaert J, Dvornik M, Helsen M, Garcia-Sanchez F, Van Waeyenberge B. The design and verification of MuMax3. *AIP Advances.* 2014;4(10):107133. DOI: 10.1063/1.4899186.
18. Gubbiotti G, Sadovnikov A, Beginin E, Nikitov S, Wan D, Gupta A, Kundu S, Talmelli G, Carpenter R, Asselberghs I, Radu IP, Adelmann C, Ciubotaru F. Magnonic band structure in vertical meander-shaped Co₄₀Fe₄₀B₂₀ thin films. *Phys. Rev. Applied.* 2021;15(1):014061. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.15.014061.
19. Sadovnikov AV, Odintsov SA, Beginin EN, Sheshukova SE, Sharaevskii YP, Nikitov SA. Toward nonlinear magnonics: Intensity-dependent spin-wave switching in insulating side-coupled magnetic stripes. *Phys. Rev. B.* 2017;96(14):144428. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.144428.
20. Sadovnikov AV, Odintsov SA, Sheshukova SE, Sharaevskii YP, Nikitov SA. Nonlinear lateral spin-wave transport in planar magnonic networks. *IEEE Magnetics Letters.* 2018;9:3707105. DOI: 10.1109/LMAG.2018.2874349.
21. Vashkovskii AV, Stalmakhov AV. Dispersion of magnetostatic waves in two-layer ferrite-ferrite structures. *Radio Engineering and Electronic Physics.* 1984;29(5):901–907 (in Russian).
22. Grachev AA, Sheshukova SE, Kostylev MP, Nikitov SA, Sadovnikov AV. Reconfigurable dipolar spin-wave coupling in a bilateral yttrium iron garnet structure. *Phys. Rev. Applied.* 2023;19(5):054089. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.19.054089.
23. Odincov SA, Grachev AA, Nikitov SA, Sadovnikov AV. Intensity and magnetization angle reconfigurable lateral spin-wave coupling and transport. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials.* 2020;500:166344. DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.166344.
24. Gurevich AG, Melkov GA. *Magnetization Oscillations and Waves.* London: CRC Press; 1996. 456 p.
25. Lederer F, Stegeman GI, Christodoulides DN, Assanto G, Segev M, Silberberg Y. Discrete solitons in optics. *Phys. Rep.* 2008;463(1–3):1–126. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.04.004.
26. Kivshar YS, Agrawal GP. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals.* Waltham: Academic Press; 2003. 540 p.
27. Sadovnikov AV, Grachev AA, Beginin EN, Odintsov SA, Sheshukova SE, Sharaevskii YP, Serdobintsev AA, Mitin DM, Nikitov SA. Coupled spin waves in magnetic waveguides induced by elastic deformations in YIG–piezoelectric structures. *JETP Letters.* 2017;106(7):465–469. DOI: 10.1134/S0021364017190110.
28. Sasaki H, Mikoshiba N. Directional coupling of magnetostatic surface waves in layered magnetic thin films. *Electronics Letters.* 1979;15(6):172–174. DOI: 10.1049/el:19790121.
29. Zavislyak IV, Tychinskii AV. *Physical Principles of Functional Microelectronics.* Kyiv: UMK VO; 1989. 105 p. (in Russian).
30. Damon RW, Eshbach JR. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab. *Journal of Physics and Chemistry of Solids.* 1961;19(3–4):308–320. DOI: 10.1016/0022-3697(61)90041-5.
31. Gubbiotti G. *Three-Dimensional Magnonics: Layered, Micro- and Nanostructures.* New York: Jenny Stanford Publishing; 2019. 416 p. DOI: 10.1201/9780429299155.



Хутиева Анна Борисовна — родилась в городе Кокшетау (Казахстан). Магистрант факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета по специальности «Прикладные математика и физика». Научные интересы: планарные структуры, метаматериалы, системы обработки и передачи информации.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, лаборатория «Метаматериалы»
E-mail: abkhutieva@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4234-420X
AuthorID (eLibrary.Ru): 1100589



Грачев Андрей Андреевич — родился в Саратове (1994). Окончил бакалавриат (2015, «Радиофизика») и магистратуру (2017, «Прикладные математика и физика») факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Кандидат физико-математических наук (2022, «Радиофизика»). Заведующий лабораторией «Метаматериалы» СГУ. Постоянный участник научных конференций. Научные интересы: планарные структуры, метаматериалы, системы обработки и передачи информации, бриллюэновская спектроскопия, управляемые микро- и наноструктуры. Имеет 28 научных статей в реферируемых научных журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, лаборатория «Метаматериалы»
E-mail: andrew.a.grachev@gmail.com
ORCID: 0000-0003-2023-910X
AuthorID (eLibrary.Ru): 967348



Бегинин Евгений Николаевич — родился в 1962 году. Окончил с отличием Саратовский государственный университет (1984). Кандидат физико-математических наук (1997, «Радиофизика»). Заведующий кафедрой нелинейной физики (с 2018 года). Автор 2 коллективных монографий, автор более 80 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах, более 10 патентов на изобретения и полезные модели.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, лаборатория «Метаматериалы»
E-mail: egbegin@gmail.com
ORCID: 0000-0001-7138-8282
AuthorID (eLibrary.Ru): 162724



Садовников Александр Владимирович — родился в Саратове (1987). Окончил с красным дипломом факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (2009). Кандидат физико-математических наук (2012, СГУ). С 2008 года работает в СГУ, в настоящее время в должности доцента кафедры физики открытых систем. Имеет более 60 статей в реферируемых научных журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, лаборатория «Метаматериалы»
E-mail: sadovnikovav@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8847-2621
AuthorID (eLibrary.Ru): 601222



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Научная статья
УДК 537.86

DOI: 10.18500/0869-6632-003079
EDN: VCXHMU

Моделирование динамики нейронных осцилляторов типа Ходжкина–Хаксли при помощи нейронной сети

П. В. Купцов^{1,2}✉, Н. В. Станкевич^{2,1}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

E-mail: ✉kupav@mail.ru, stankevichnv@mail.ru

Поступила в редакцию 27.04.2023, принята к публикации 8.09.2023,

опубликована онлайн 10.12.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. Цель настоящего исследования — представить подробное описание процедуры создания и обучения нейросетевого отображения на примере моделирования динамики нейронного осциллятора типа Ходжкина–Хаксли; показать, что нейросетевые отображения, обученные для одиночного осциллятора, можно использовать в качестве элементов связанной системы, моделирующей поведение связанных осцилляторов. **Методы.** В работе используется численный метод решения жёстких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Также применяется процедура обучения нейронных сетей на основе метода обратного распространения ошибки и алгоритма оптимизации Adam, который представляет собой модифицированный алгоритм градиентного спуска с автоматической подстройкой шага. **Результаты.** Показано, что построенные согласно описанной процедуре нейросетевые отображения с высокой точностью воспроизводят динамику одиночных нейронных осцилляторов. Кроме того, без дополнительного обучения эти отображения можно использовать как элементы связанной системы для моделирования динамики связанных систем нейронных осцилляторов. **Заключение.** Описанное нейросетевое отображение может рассматриваться как новая универсальная конструкция для моделирования сложной динамики. В отличие от моделей на основе разложения в ряды (степенные, тригонометрические), нейросетевое отображение не требует отбрасывания старших членов. Следовательно, оно позволяет моделировать процессы с произвольным порядком нелинейности, и по этой причине есть основания полагать, что в некоторых аспектах оно окажется более эффективным. Развитый в работе подход на основе использования нейросетевого отображения можно рассматривать в некотором смысле как альтернативу традиционным численным методам моделирования динамики. Актуальным этот подход делает бурное развитие в настоящее время технологий создания быстродействующего вычислительного оборудования, поддерживающего обучение и работу нейронных сетей.

Ключевые слова: нейросетевое отображение, нейронная сеть, набор данных, обучение нейронной сети, нейроморфная динамика, численное моделирование.

Благодарности. Исследование математических моделей было проведено в рамках проекта «Зеркальные лаборатории» НИУ ВШЭ (разделы 1, 2). Разработка и исследование нейросетевого отображения (разделы 3–5) выполнены при поддержке Российского научного фонда, проект 20-71-10048.

Для цитирования: Купцов П. В., Станкевич Н. В. Моделирование динамики нейронных осцилляторов типа Ходжкина–Хаксли при помощи нейронной сети // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 72–95. DOI: 10.18500/0869-6632-003079. EDN: VCXHMU

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Modeling of the Hodgkin–Huxley neural oscillators dynamics using an artificial neural network

P. V. Kuptsov^{1,2}, N. V. Stankevich^{2,1}

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

²HSE University, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉kupav@mail.ru, stankevichnv@mail.ru

Received 27.04.2023, accepted 8.09.2023, available online 10.12.2023, published 31.01.2024

Abstract. The purpose of this study — to represent a detailed description of the procedure for creating and training a neural network mapping on the example of the dynamics modeling of a neural oscillator of the Hodgkin–Huxley type; to show that the neural network mappings trained for single oscillators can be used as elements of a coupled system that simulate the behavior of coupled oscillators. **Methods.** Numerical method is used for solving stiff systems of ordinary differential equations. Also a procedure for training neural networks based on the method of back propagation of error is employed together with the Adam optimization algorithm, that is a modified version of the gradient descent supplied with an automatic step adjustment. **Results.** It is shown that the neural network mappings built according to the described procedure are able to reproduce the dynamics of single neural oscillators. Moreover, without additional training, these mappings can be used as elements of a coupled system for the dynamics modeling of coupled neural oscillator systems. **Conclusion.** The described neural network mapping can be considered as a new universal framework for complex dynamics modeling. In contrast to models based on series expansion (power, trigonometric), neural network mapping does not require truncating of the series. Consequently, it allows modeling processes with arbitrary order of nonlinearity, hence there are reasons to believe that in some aspects it will be more effective. The approach developed in this paper based on the neural network mapping can be considered as a sort of an alternative to the traditional numerical methods of modeling of dynamics. What makes this approach topical is the current rapid development of technologies for creating fast computing equipment that supports neural network training and operation.

Keywords: neural network mapping, neural network, dataset, neural network learning, neuromorphic dynamics, numerical simulation.

Acknowledgements. The study of mathematical models was carried out within the framework of the Mirror Laboratories Project of HSE University (Sections 1, 2). Development and research of the neural network mapping (Sections 3–5) was supported by the Russian Science Foundation, 20-71-10048.

For citation: Kuptsov PV, Stankevich NV. Modeling of the Hodgkin–Huxley neural oscillators dynamics using an artificial neural network. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(1):72–95. DOI: 10.18500/0869-6632-003079

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследование динамики нелинейных систем в значительной степени сводится к обработке и анализу данных, генерируемых в ходе эволюции этих систем. По этой причине для обогащения научного инструментария нелинейной динамики и для расширения круга решаемых задач представляется естественным обращаться к опыту бурно развивающихся в настоящее время дисциплин из области машинного обучения и науки о данных.

Не претендуя на полноту, в качестве примера такого междисциплинарного обогащения можно указать несколько работ: применение нейронных сетей для адаптивного моделирования и управления системами [1], применение нейронных сетей для реконструкции аттрактора Эль-Ниньо [2], использование нейронных сетей для предсказания динамики на основе выполненной реконструкции пространства состояний [3], использование методов машинного обучения для построения моделей и анализа динамики биологических систем [4].

Один из важнейших элементов фундамента продуктивного взаимодействия нелинейной динамики с науками о данных и машинном обучении — серия теорем, с математической строгостью

обосновывающих возможность аппроксимации произвольных функций многих переменных при помощи нейронных сетей [5–10]. Из этих работ следует, что уже двухслойной полносвязной сети с сигмоидальной функцией активации достаточно, чтобы с заданной точностью аппроксимировать любую функцию многих переменных. Точность аппроксимации определяется размером слоёв сети, а также выбором эффективного алгоритма обучения. В самом общем виде это означает, что для решения задач, связанных с поиском или анализом функциональных зависимостей, можно привлекать нейронные сети. Ещё один элемент, уже не строго математический, а, скорее, эвристический — способность нейронных сетей к обобщению. При правильной организации процесса обучения сети, она не просто запоминает предъявляемые ей данные, а вычленяет из них наиболее существенные, наиболее общие их признаки. Впоследствии это позволяет уже обученной сети эффективно обрабатывать новые образцы данных, не предъявлявшиеся ей в процессе обучения [11].

В настоящей работе исследуется применимость нейронных сетей для моделирования нелинейной динамики: представляется интересным найти универсальную архитектуру, которая могла бы после соответствующего обучения с заданной точностью воспроизводить любое или почти любое поведение нелинейных систем. В пользу возможности построения такой архитектуры говорят упомянутые выше теоремы об аппроксимации и способность нейронных сетей к обобщению. Теоретическая мотивация такого исследования — получить ещё одну универсальную модель динамики, наряду с широко применяемыми сегодня моделями, например, на основе степенных или тригонометрических рядов. Можно ожидать, что применение нейросетевой модели будет в каких-то аспектах более эффективным по сравнению с моделями на основе разложений в ряды. Последние всегда учитывают ограниченное, часто небольшое число членов ряда и следовательно порядок моделируемой нелинейности также ограничен. В случае же нейронной сети это ограничение снимается. Кроме того, интерес вызывает способность нейронных сетей к обобщению — в идеале даже при наличии ограниченного количества данных можно надеяться, что сеть будет в состоянии извлечь из них информацию о динамических феноменах, недоступную для других методов моделирования. С практической точки зрения моделирование динамики при помощи нейронных сетей можно рассматривать как своего рода альтернативу численным методам решения модельных уравнений. Традиционные методы численного моделирования наилучшим образом реализуются на вычислительных машинах с классической архитектурой и зачастую даже их распараллеливание на несколько вычислительных ядер вызывает затруднения. При этом современная вычислительная техника развивается в сторону адаптации к поддержке работы именно нейронных сетей. В качестве примера можно привести игровые видеокарты и так называемые AI-ускорители [12–15]. Поэтому можно ожидать, что развитие методов моделирования динамики при помощи нейронных сетей будет иметь большое практическое значение.

Ранее в работе [16] было показано, что даже простейшую двухслойную сеть можно обучить воспроизводить достаточно разные виды динамики — системы Лоренца и Рёсслера, а также модель нейрона Хиндмарша–Роуза. Продемонстрировано хорошее соответствие бифуркационных картин, спектров Фурье и показателей Ляпунова. В работе [17] предложена более сложная структура сети, когда каждую из переменных моделирует отдельная подсеть. Такая сеть справляется с моделированием жёсткой динамики, когда переменные системы имеют разные масштабы времени. Было показано что сеть воспроизводит поведение модельного физиологического нейрона, заданного системой уравнений, сформулированных на основе формализма Ходжкина–Хаксли [18]. Продемонстрировано, что благодаря своей способности к обобщению, нейросетевая модель может успешно воспроизводить режим бистабильности даже когда в процессе обучения ей предъявлялась только одна из ветвей решения. Нейросетевая модель, обученная только на колебательном решении, находит также и сосуществующую с ним устойчивую неподвижную точку, и кроме того правильно воспроизводит зависимость её собственных чисел от параметров. В настоящей работе мы рассмотрим нейросетевую модель, предложенную в статье [17].

Цель исследования — продемонстрировать, что такие модели, обученные для одиночных систем, можно без дополнительного обучения использовать для воспроизведения динамики связанных систем. Будет показано, что наблюдается хорошее качественное и количественное соответствие различных динамических режимов связанных систем и их бифуркационных трансформаций.

1. Модельный нейрон на основе формализма Ходжкина–Хаксли

Мы рассматриваем модельный нейрон, уравнения которого получены на основе формализма Ходжкина–Хаксли [18]. Кроме оригинальной системы мы также рассмотрим её модифицированный вариант, предложенный в работе [19]. Исходная система в режиме колебаний имеет неустойчивую неподвижную точку. Модификация приводит к тому, что в пространстве параметров появляется область, в которой неподвижная точка устойчива, то есть в системе возникает бистабильность, характерная для нейронных моделей [20–22]. Так как отвечающая за это модификация активируется только в небольшой области вблизи неподвижной точки, это практически не оказывает видимого влияния на качественный характер колебательного решения.

$$\begin{aligned}\tau\dot{V} &= -I_{Ca}(V) - I_K(V, n) - I_{K2}(V) - I_S(V, S), \\ \tau\dot{n} &= \sigma[n_\infty(V) - n], \\ \tau_S\dot{S} &= S_\infty(V) - S.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь V , n и S — динамические переменные. Входящие в уравнения функции заданы формулами (2), а используемые числовые значения параметров сведены в табл. 1.

$$I_{Ca}(V) = g_{Ca} m_\infty(V) (V - V_{Ca}),\tag{2a}$$

$$I_K(V, n) = g_K n (V - V_K),\tag{2b}$$

$$I_S(V, S) = g_S S (V - V_K),\tag{2c}$$

$$I_{K2}(V) = g_{K2} p_\infty(V) (V - V_K),\tag{2d}$$

$$\omega_\infty(V) = \left(1 + \exp \frac{V_\omega - V}{\theta_\omega}\right)^{-1}, \quad \omega = m, n, S,\tag{2e}$$

$$p_\infty(V) = \left(\exp \frac{V - V_p}{\theta_p} + \exp \frac{V_p - V}{\theta_p}\right)^{-1}.\tag{2f}$$

Уравнения соответствуют оригинальной системе при $g_{K2} = 0$. Модифицированная система рассматривается при $g_{K2} = 0.12$. Переменные системы, а также входящие в уравнения

Таблица 1. Параметры системы (1)

Table 1. Parameters of the system (1)

$\tau = 0.02 \text{ s}$	$\tau_S = 35 \text{ s}$	$\sigma = 0.93$	
$g_{Ca} = 3.6$	$g_K = 10$	$g_S = 4$	$g_{K2} = 0.12$
$V_{Ca} = 25 \text{ mV}$	$V_K = -75 \text{ mV}$		
$\theta_m = 12 \text{ mV}$	$\theta_n = 5.6 \text{ mV}$	$\theta_S = 10 \text{ mV}$	$\theta_p = 1 \text{ mV}$
$V_m = -20 \text{ mV}$	$V_n = -16 \text{ mV}$	$V_S = -36 \text{ mV}$	$V_p = -49.5 \text{ mV}$

функции и параметры имеют биологическую интерпретацию, обсуждение которой можно найти в работах [18, 19].

На рис. 1, *a*, *b* и *c* показаны различные режимы динамики модифицированного варианта системы (1). Рис. 1, *a* и *b* иллюстрируют бистабильность: в зависимости от начальной точки, траектория выходит либо на пачечный аттрактор (см. рис. 1, *a*), либо на неподвижную точку (см. рис. 1, *b*). Видно, что в режиме пачечного аттрактора переменные V и n меняются значительно быстрее чем переменная S . Системы с таким видом поведения называют жёсткими [23]. Рис. 1, *c* демонстрирует другой режим системы, спайковый. В этом режиме все три переменные меняются с одинаковыми временными масштабами. Переход от пачечного аттрактора к спайковому

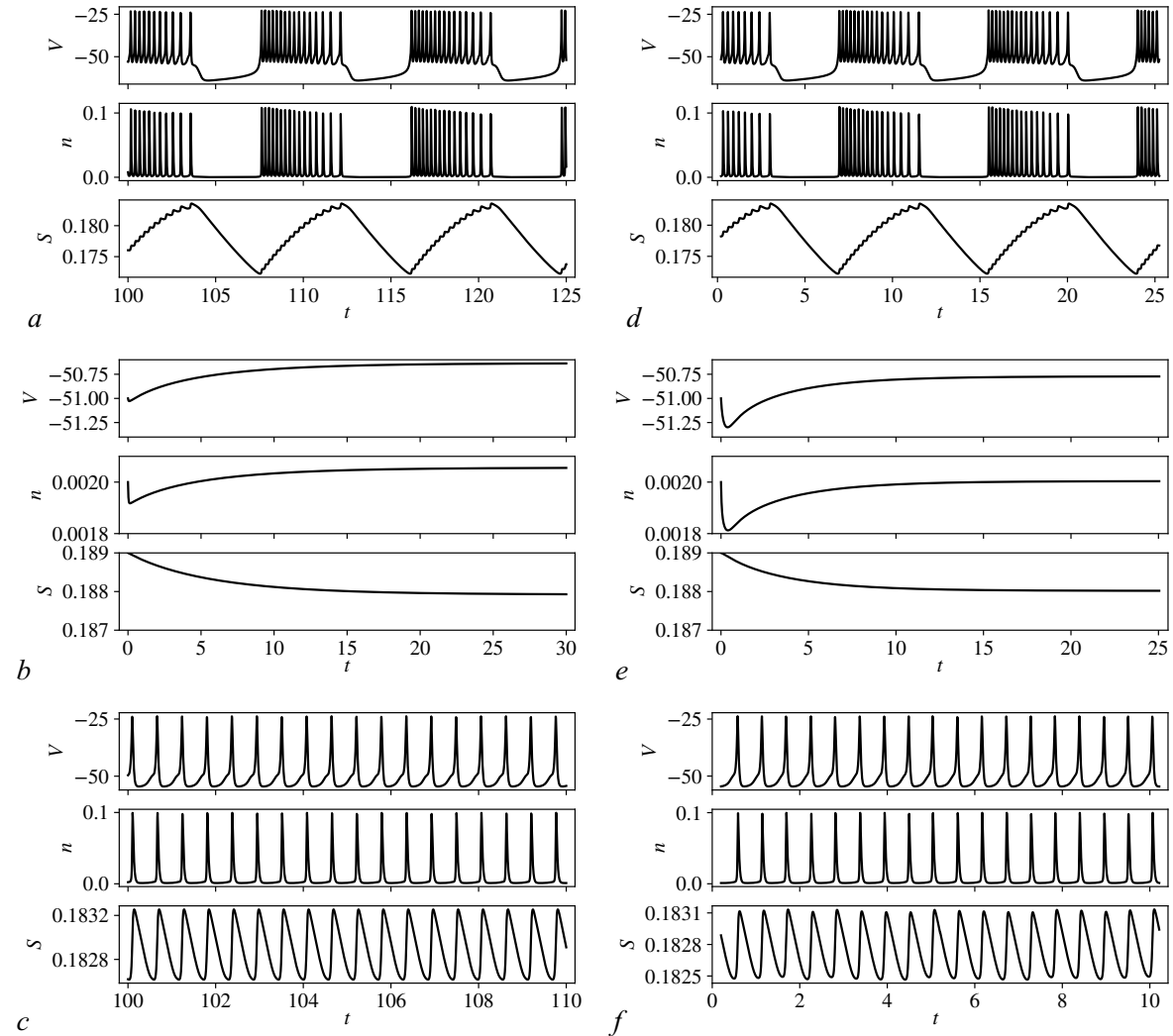


Рис. 1. Решения модифицированной системы (1), то есть при $g_{K2} = 0.12$ (*a*, *b*, *c*), и соответствующего нейросетевого отображения (5) (*d*, *e*, *f*). Диаграммы *a*, *d*, *b* и *e* иллюстрируют бистабильность при $V_S = -36$: *a*, *d* – пачечный (бёрстовый) режим при старте из точки $V_0 = -51$, $n_0 = 2 \cdot 10^{-3}$, $S_0 = 0.185$; *b*, *e* – выход на неподвижную точку при старте из точки $V_0 = -51$, $n_0 = 2 \cdot 10^{-3}$, $S_0 = 0.189$. Диаграммы *c*, *f* демонстрируют спайки при $V_S = -34$

Fig. 1. Solutions for modified system (1), i.e. e. at $g_{K2} = 0.12$ (*a*, *b*, *c*), and for the corresponding neural network mapping (5) (*d*, *e*, *f*). Diagrams *a*, *d*, *b* and *e* illustrate bistability at $V_S = -36$: *a*, *d* – bursts when starting from the point $V_0 = -51$, $n_0 = 2 \cdot 10^{-3}$, $S_0 = 0.185$; *b*, *e* – approach a fixed point when starting from the point $V_0 = -51$, $n_0 = 2 \cdot 10^{-3}$, $S_0 = 0.189$. Diagrams *c*, *f* demonstrate spikes at $V_S = -34$

происходит при увеличении параметра V_S через бифуркацию, называемую катастрофой голубого неба [19, 24]. Отметим, что пачечная или спайковая активность системы, переключение между которыми происходит при изменении параметров, называется нейроморфной динамикой [25].

На рис. 2 показаны фазовые портреты модифицированной системы в трёх измерениях. Рис. 2, *a* демонстрирует пачечный аттрактор. Хорошо видно, что в этом режиме аттрактор имеет характерную структуру из нескольких витков с замыкающей их петлёй. Спайковый аттрактор представлен на рис. 2, *b*. Так как все переменные в этом режиме колеблются с одинаковыми временными масштабами, аттрактор имеет вид предельного цикла.

Исходная версия системы также демонстрирует пачечный и спайковый режимы. Визуально они неотличимы от показанных на рис. 1 и 2 и поэтому не показаны на отдельном рисунке.

Чтобы наглядно демонстрировать изменения характера поведения системы в зависимости от параметров и от выбора начальных условий, будем вычислять скалярную характеристическую величину

$$Q = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S^2(t) dt}. \quad (3)$$

Здесь $S(t)$ — динамическая переменная системы (1), t_0 — некоторое, достаточно большое, время выхода системы на режим, T — время наблюдения. Мы используем $t_0 = 100$ и $T = 100$. Ниже, рассматривая систему связанных модельных нейронов (11), вычисляем величину $Q = (Q_1 + Q_2)/2$, где Q_1 и Q_2 получены по формуле (3) с заменой S на соответствующую величину S_1 или S_2 .

Смысл формулы (3) — сопоставить скаляры инвариантным множествам в фазовом пространстве системы, чтобы иметь возможность компактно и наглядно визуализировать его структуру. Не имеет значения, как конкретно будет выглядеть зависимость Q от параметров. Нас интересуют перестройки режимов, поэтому важно, чтобы при изменении характера поведения системы значение Q менялось бы достаточно значительно. Теоретически разные множества могут описываться одним и тем же Q и быть неразличимы по этому признаку. Однако вероятность этого достаточно мала. Для ещё большего снижения этой вероятности $S(t)$ возводится в квадрат, чтобы в гипотетическом случае возникновения отрицательных значений на Q влияли бы только их абсолютные величины. Не имеет смысла конструировать более сложные формулы для Q , так как представление многомерного множества при помощи скалярной величины всегда приводит к потере той или иной информации и, следовательно, не может считаться исчерпывающим. Поэтому, используя Q ,

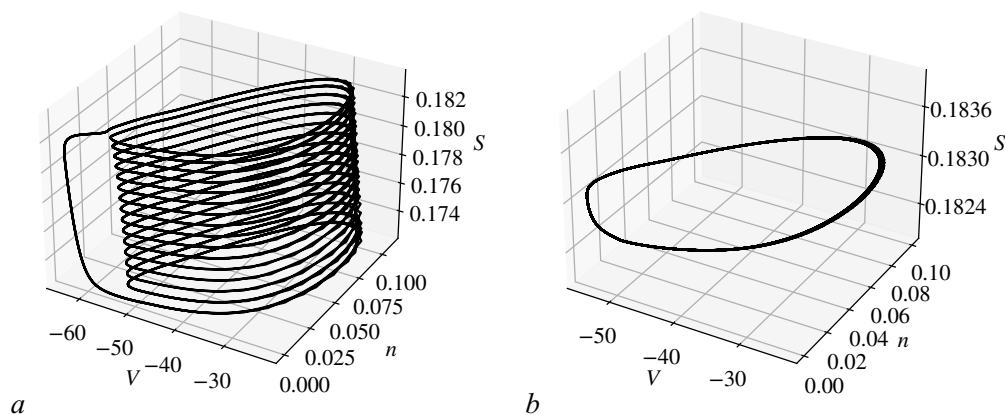


Рис. 2. Трёхмерные фазовые портреты модифицированной системы (1): *a* — пачечный режим при $V_S = -36$, *b* — режим спайков при $V_S = -34$

Fig. 2. Three-dimensional phase portraits of the modified system (1): *a* — bursts at $V_S = -36$, *b* — spikes at $V_S = -34$

следует соотносить его значения с информацией о характере динамики системы, полученной из других соображений. Применительно к изучаемой системе нам заранее известно, что в ней могут наблюдаться пачечный и спайковый режимы, и кроме этого может быть устойчивой неподвижная точка. Поэтому, вычисляя Q в зависимости от параметров, мы ожидаем, что будут встречаться три типичных значения этой величины.

На рис. 3, *a* и 3, *b* для исходной и модифицированной систем показано как меняется в зависимости от V_S распределение Q , получаемое при большом числе запусков системы со случайными начальными значениями V , n и S . Ансамбль начальных значений выбирался из области определения системы (см. ниже табл. 3 и раздел 4) следующим образом. Интервал значений параметра V_S разбивался на 300 равноотстоящих друг от друга точек, и в каждой генерировались по 3000 начальных значений V , n и S из указанных в табл. 3 диапазонов. Градации серого отображают в логарифмическом масштабе частоты появления решений, характеризуемых соответствующими значениями Q . Видно, что эти значения хорошо сгруппированы и образуют систему линий, по виду которых можно судить о происходящих в системах бифуркационных перестройках.

На рис. 3, *a* и 3, *b* линия в левой части представляет пачечный аттрактор. Вид соответствующего решения показан на рис. 1, *a* и 2, *a*. При движении в сторону увеличения V_S вблизи значения $V_S \approx -34$ у оригинальной системы (см. рис. 3, *a*) и при $V_S \approx -35$ у модифицированной (см. рис. 3, *b*) величина Q меняется скачком. Это соответствует переходу от пачечного аттрактора к спайковому (см. рис. 1, *c* и 2, *b*). На рис. 3, *b*, который построен для модифицированной системы, имеется ещё одна линия значений Q в диапазоне между $V_S \approx -37$ и $V_S \approx -35$. Эта линия соответствует неподвижной точке, которая устойчива в этом диапазоне значений параметра. Линия, представляющая неподвижную точку, заметно светлее линии для колебательного решения, существующего при тех же значениях V_S . Это говорит о том, что устойчивая неподвижная точка имеет небольшой по сравнению с колебательным решением размер бассейна притяжения, и поэтому вероятность попадания в него выбранных случайным образом начальных условий достаточно мала. Более подробно это обсуждается в работе [19].

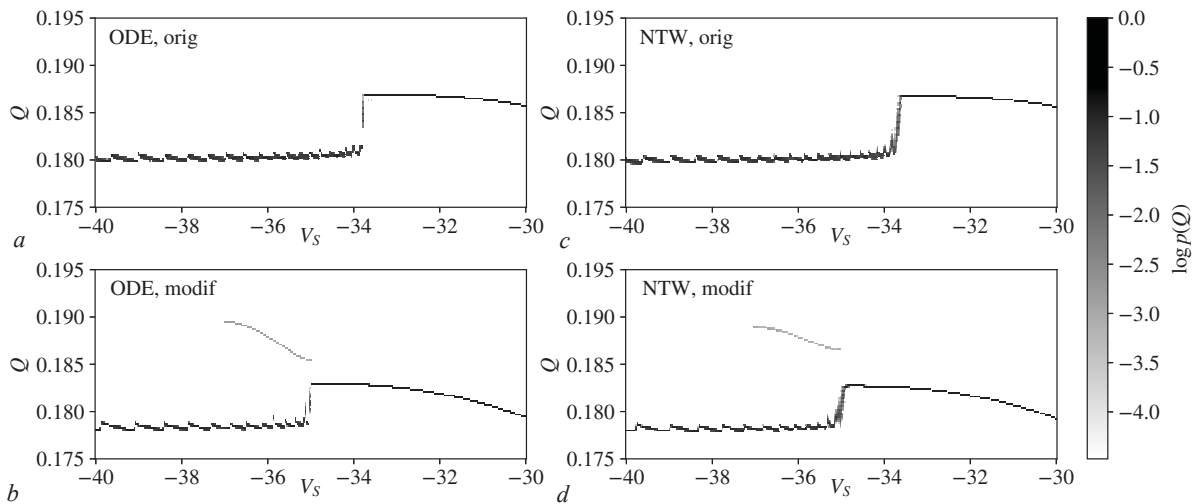


Рис. 3. Распределения Q , см. (3), в зависимости от V_S : *a* и *b* — исходная и модифицированная системы (1), соответственно; *c* и *d* — нейросетевые отображения (5), обученные для этих систем

Fig. 3. Distributions of Q , see Eq. (3), vs. V_S : *a* and *b* — original and modified systems (1), respectively; *c* and *d* — the neural network mapping (5) trained for these systems

На рис. 4, *a* показано, как изменяются одномерные сечения бассейнов притяжения различных инвариантных множеств в фазовом пространстве модифицированной системы в зависимости от V_S . Для построения этого рисунка сначала вычисляется неподвижная точка V_f , n_f , S_f системы при $V_S = -36$. Начальные значения переменных n и S всегда задаются равными $n_0 = n_f$ и $S_0 = S_f$, а начальное значение V_0 варьируется вблизи от V_f и эти значения откладываются на рисунке по вертикали. Параметр V_S варьируется около точки -36 , и эти значения откладываются по горизонтали. Для каждой пары V_S и V_0 вычисляется Q и её значения отображаются на рисунке при помощи градаций серого.

На рис. 4, *a* выделяются три области. Тёмный прямоугольник в центре — область, из которой траектории выходят на устойчивую неподвижную точку. Светло-серая область в левой части — это множество стартовых точек, из которых система выходит на пачечный аттрактор. Эти две области сосуществуют при одних и тех же значениях V_S , что соответствует режиму бистабильности в системе. Тёмно-серая область справа показывает точки, из которых система выходит на спайковый аттрактор.

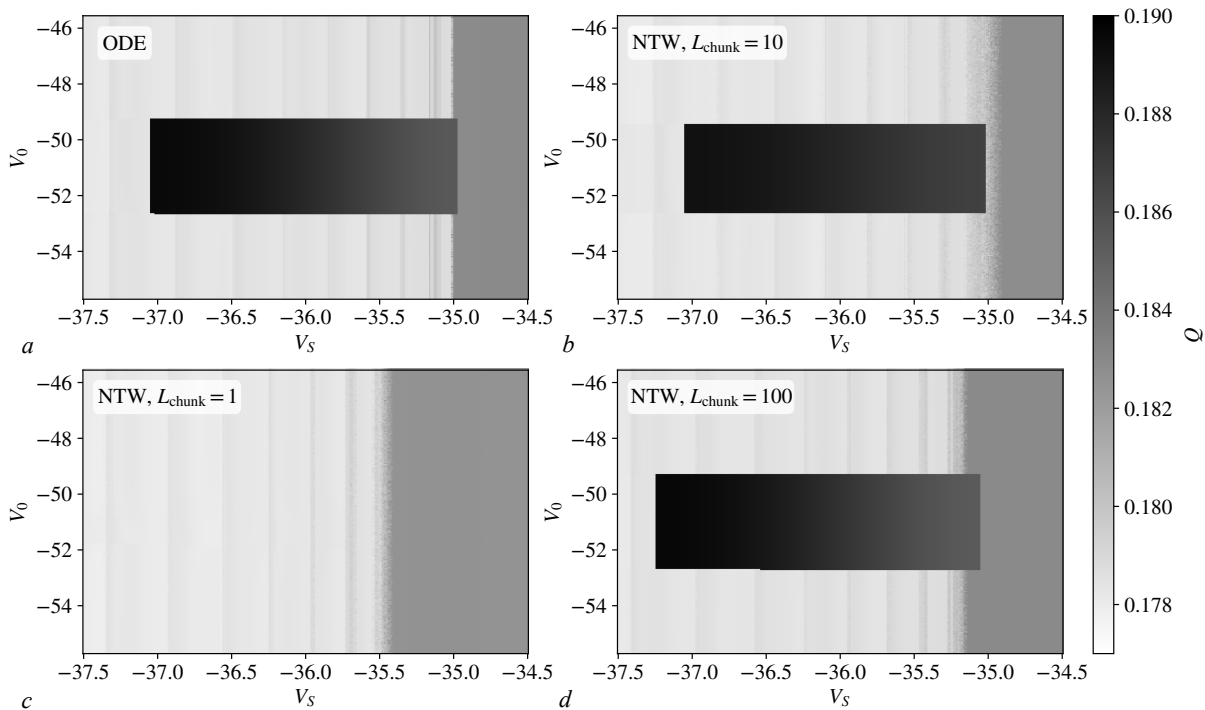


Рис. 4. Одномерные сечения бассейнов притяжения различных режимов динамики: *a* — модифицированная система (1); *b*, *c* и *d* — нейросетевое отображение (5), обученное на наборах данных, построенных из отрезков траекторий длины $L_{\text{chunk}} = 10$, $L_{\text{chunk}} = 1$ и $L_{\text{chunk}} = 100$, соответственно. Диаграммы построены в окрестности точки $V_f = -50.6357$, $n_f = 2.05598 \times 10^{-3}$, $S_f = 0.187922$, которая представляет собой устойчивую неподвижную точку (1) при $V_S = -36$. Начальное значение V_0 , отложенное по вертикали, варьируется в пределах $V_f \pm 0.1V_f$, стартовые значения переменных n_0 и S_0 берутся равными n_f и S_f , соответственно. Для каждой траектории вычисляется Q , значения которой представляются оттенками серого

Fig. 4. One-dimensional sections of attraction basins of different dynamic regimes: *a* — the modified system (1); *b*, *c* and *d* — the neural network mapping (5) trained on datasets, consisting of trajectory segments of lengths $L_{\text{chunk}} = 10$, $L_{\text{chunk}} = 1$ and $L_{\text{chunk}} = 100$, respectively. Diagrams are constructed in the vicinity of the point $V_f = -50.6357$, $n_f = 2.05598 \times 10^{-3}$, $S_f = 0.187922$ that is a stable fixed point of (1) at $V_S = -36$. The initial value of V_0 , vertical axis, is varied within the range $V_f \pm 0.1V_f$, and starting values for variables n_0 and S_0 are taken equal to n_f and S_f , respectively. For each trajectory Q is calculated and its values are represented via gray scale

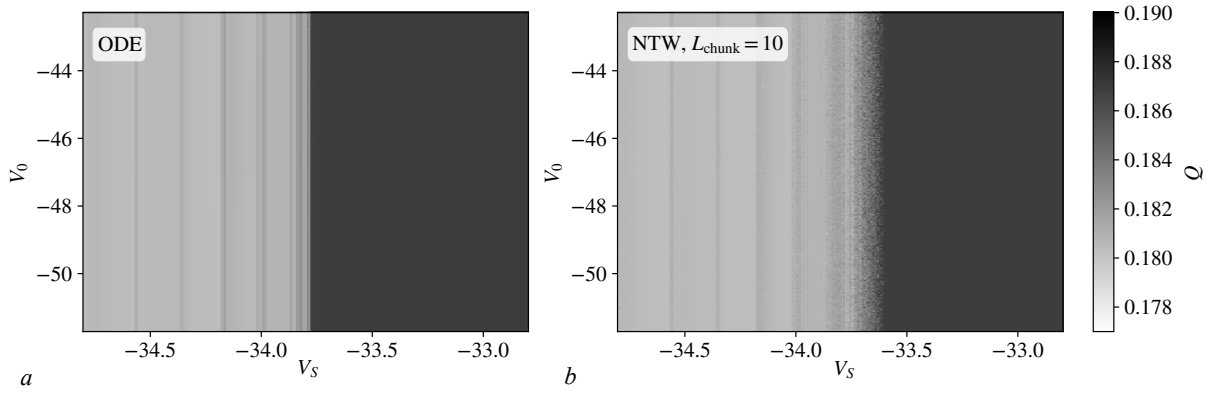


Рис. 5. Одномерные сечения бассейнов притяжения: a – оригинальная система (1); b – нейросетевое отображение, обученное на наборе данных с $L_{\text{chunk}} = 10$. Диаграммы построены в окрестности точки $V_f = -46.9978$, $n_f = 3.92943 \times 10^{-3}$, $S_f = 0.210855$ – неустойчивая неподвижная точка оригинальной системы при $V_S = -33.8$

Fig. 5. One-dimensional sections of basins of attraction: a – original system (1); b – the neural network mapping trained on a dataset with $L_{\text{chunk}} = 10$. The diagrams are built in the vicinity of the point $V_f = -46.9978$, $n_f = 3.92943 \times 10^{-3}$, $S_f = 0.210855$. This is an unstable fixed point of the original system at $V_S = -33.8$

Аналогичное построение для исходной системы представлено на рис. 5, a . Здесь имеются только две области: более светлая в левой части отвечает выходу на пачечный аттрактор, а более тёмная справа – на спайковый.

2. Связанные системы

Рассмотрим теперь две системы вида (1) и введём между ними связь, как это обсуждается в работе [26]. Уравнение для подсистемы 1 имеет вид:

$$\begin{aligned} \tau \dot{V}_1 &= -I_{Ca}(V_1) - I_K(V_1, n_1) - I_{K2}(V_1) - I_S(V_1, S_1) + g_{c,V}(V_1 - V_2), \\ \tau \dot{n}_1 &= \sigma [n_\infty(V_1) - n_1], \\ \tau_S \dot{S}_1 &= S_{\infty,1}(V_1) - S_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения для второй системы получаются заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$. Параметр $g_{c,V}$ отвечает за силу связи. Заметим, что в уравнениях (4) функция $S_{\infty,1}$ снабжена индексом «1». Это сделано потому, что в неё входит параметр V_S , см. (2e). Мы будем рассматривать подсистемы 1 и 2 с одинаковыми параметрами за исключением V_S , который будет задаваться разным для каждой из подсистем как $V_{S,1}$ и $V_{S,2}$, соответственно.

Представление об общей картине поведения связанных систем дают рис. 6, $a-d$, рис. 7, $a-c$ и рис. 8, $a-c$. На рис. 6, аналогично тому, как это сделано на рис. 3, полутонами показаны распределения характеристической величины $Q = (Q_1 + Q_2)/2$, где Q_1 и Q_2 вычислены по формуле (3) для подсистемы 1 и 2, соответственно. По горизонтали отложены значения параметра $V_{S,1}$, а $V_{S,2}$ равен $V_{S,1} + 0.1$. Режимы поведения двух связанных оригинальных систем в значительной мере повторяют режимы одиночной системы (сравни рис. 6, a и 3, a). В левой части диаграммы, то есть при меньших значениях $V_{S,1}$ и $V_{S,2}$ имеет место пачечный режим. Это иллюстрирует рис. 7, a . Справа, при больших $V_{S,1}$ и $V_{S,2}$ возникает спайковый режим (рис. 7, c). Отличие от одиночной системы проявляется в том, как происходит переход от одного режима к другому. Вместо строго определённой точки бифуркации, у связанных систем возникает переходная область, в которой наблюдаются пачечные колебания с нерегулярной длиной. По мере увеличения параметра средняя

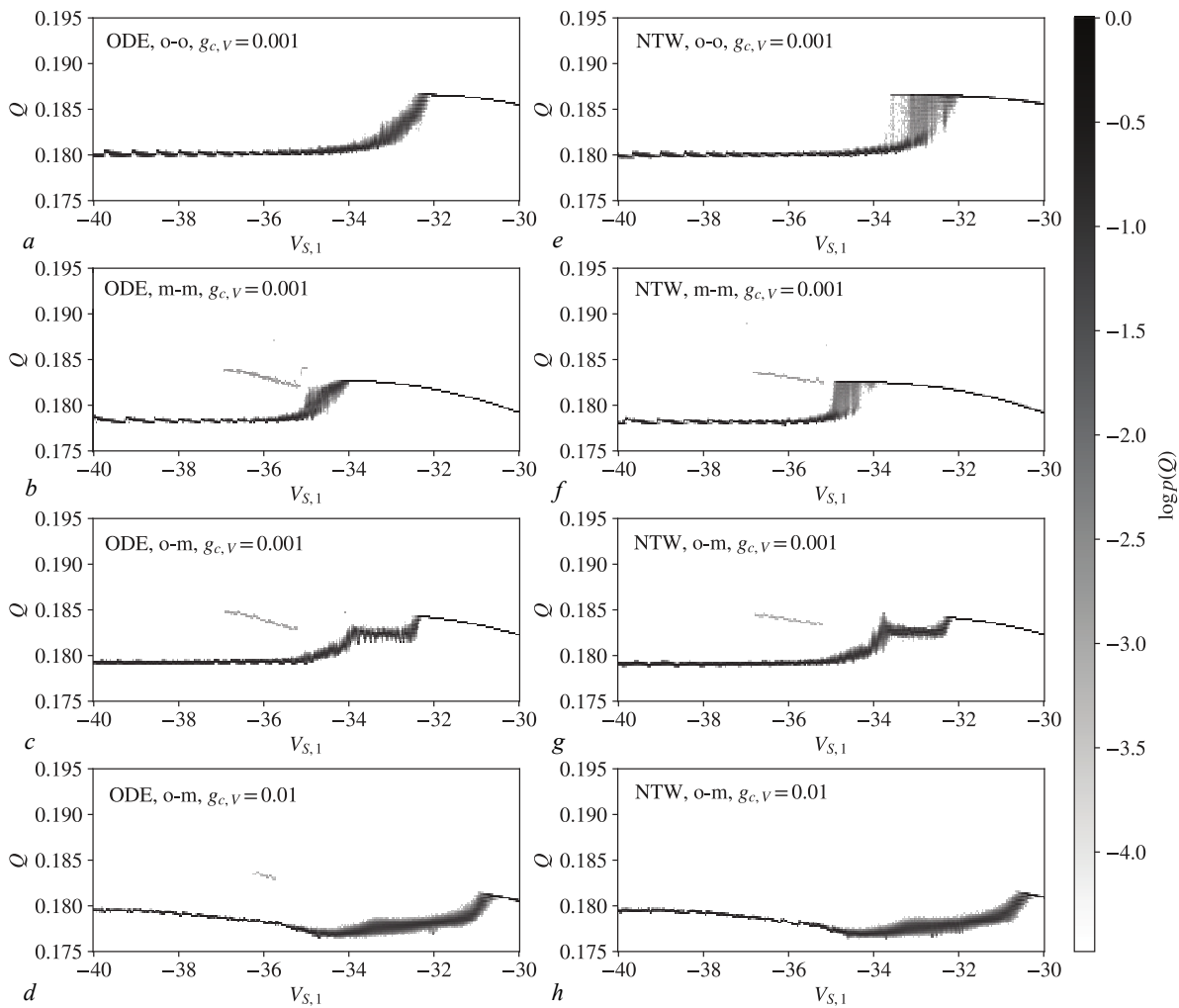


Рис. 6. Распределения $Q = (Q_1 + Q_2)/2$ в зависимости от $V_{S,1}$ при $V_{S,2} = V_{S,1} + 0.1$: $a-d$ – система уравнений (4); $e-h$ – нейросетевое отображение (11). Представлены следующие комбинации подсистем: a и e – две оригинальные системы ($g_{K2} = 0$); b и f – две модифицированные системы ($g_{K2} = 0.12$); c, d, g и h – оригинальная и модифицированная системы. Значения параметра связи: $a-c$ и $e-g$ – $g_{c,v} = 0.001$; d и h – $g_{c,v} = 0.01$

Fig. 6. Distributions of $Q = (Q_1 + Q_2)/2$ vs. $V_{S,1}$ and $V_{S,2} = V_{S,1} + 0.1$: $a-d$ – Eqs. (4); $e-h$ – the neural network mapping (11). The following combinations of subsystems are represented: a and e – two original systems ($g_{K2} = 0$); b and f – two modified systems ($g_{K2} = 0.12$); c, d, g and h – original and modified systems. Coupling parameter values: $a-c$ and $e-g$ – $g_{c,v} = 0.001$; d and h – $g_{c,v} = 0.01$

длительность пачечных всплесков растёт, пока не превращается в спайковый режим. Переходное поведение иллюстрирует рис. 7, b .

Для пары модифицированных систем сценарий перестроек режимов при движении по параметрам $V_{S,1}$ и $V_{S,2}$ в целом такой же – от пачек к спайкам через протяжённую переходную область. Как и у одиночной модифицированной системы, у пары связанных таких систем имеется область бистабильности, в которой с колебательным решением сосуществует устойчивая неподвижная точка (сравни рис. 3, b и 6, b).

Динамика пары оригинальная–модифицированная системы характеризуется уширением области перехода от пачек к спайкам (см. рис. 6, c), а также к появлению более сложных переходных режимов. В качестве иллюстрации на рис. 8, a показаны колебания, когда возникают пачки

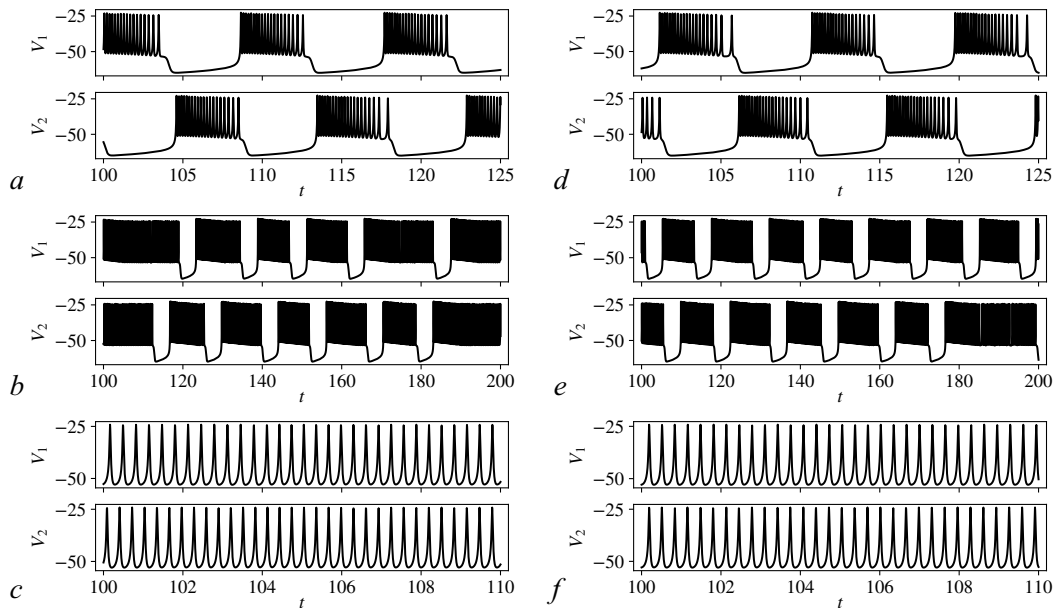


Рис. 7. Решения для связанных оригинальных систем: $a-c$ – уравнения (4); $d-f$ – соответствующие связанные нейросетевые отображения (11). Представлены режимы: a и d – пачечный режим при $V_{S,1} = -36$; b и e – нерегулярные пачки при $V_{S,1} = -33$; c и f – спайки при $V_{S,1} = -31$. Во всех случаях $V_{S,2} = V_{S,1} + 0.1$. Параметр связи $g_{c,V} = 0.001$

Fig. 7. Solutions for the coupled original systems: $a-c$ – Eqs. (4); $d-f$ – corresponding coupled neural network mappings (11). Represented regimes: a and d – bursts with $V_{S,1} = -36$; b and e – irregular bursts with $V_{S,1} = -33$; c and f – spikes at $V_{S,1} = -31$. In all cases $V_{S,2} = V_{S,1} + 0.1$. The coupling parameter is $g_{c,V} = 0.001$

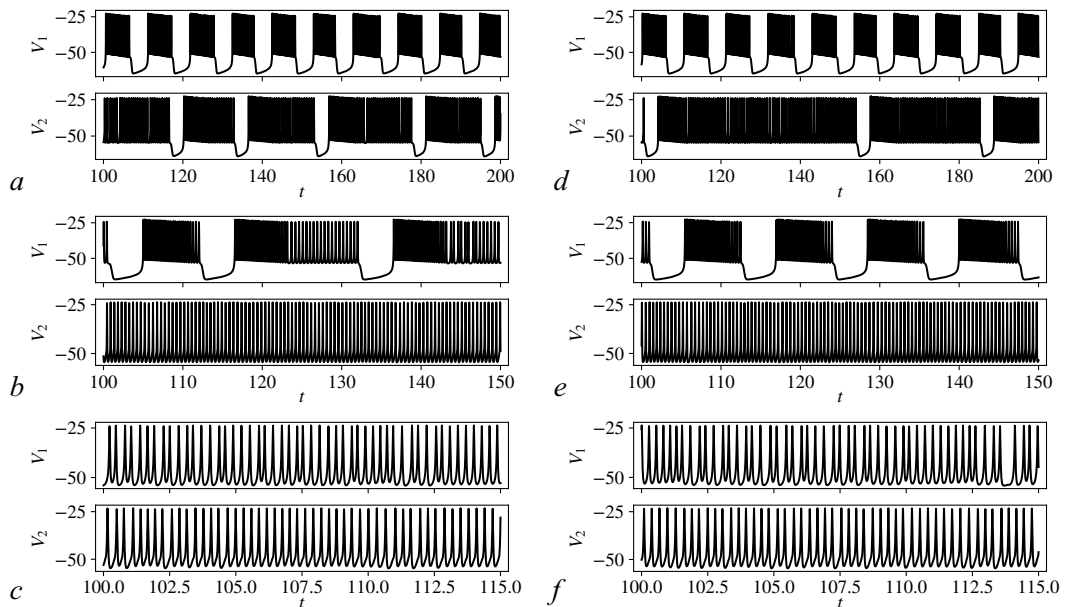


Рис. 8. Решение для пары оригинальная–модифицированная системы: $a-c$ – уравнения (4); $d-f$ – связанные нейросетевые отображения (11). Представлены режимы: a и d – нерегулярные пачки разной длительности при $V_S = -34.4$; b и e – пачки и спайки при $V_S = -33.3$; c и f – нерегулярные спайки при $V_S = -30.5$. Во всех случаях $V_{S,2} = V_{S,1} + 0.1$. Параметр связи: a, b, d и $e - g_{c,V} = 0.001$; c и $f - g_{c,V} = 0.01$

Fig. 8. Solution for the coupled original and modified systems: $a-c$ – Eqs. (4); $d-f$ – coupled neural network mappings (11). Represented regimes: a and d – irregular bursts of different lengths when $V_S = -34.4$; b and e – bursts and spikes at $V_S = -33.3$; c and f – irregular spikes at $V_S = -30.5$. In all cases $V_{S,2} = V_{S,1} + 0.1$. Coupling parameter: a, b, d and $e - g_{c,V} = 0.001$; c and $f - g_{c,V} = 0.01$

нерегулярной длины разные для разных подсистем, а рис. 8, *b* демонстрирует сосуществование пачечного и спайкового режимов для первой и второй подсистем.

При увеличении силы связи между оригинальной и модифицированной системами значительно сокращается область устойчивости неподвижной точки, а переходная область становится ещё шире (см. рис. 6, *d*). На рис. 8, *c* показано, что сразу после переходной области в такой системе возникает нерегулярный спайковый режим.

На рис. 9, *a–c* показаны одномерные сечения бассейнов притяжения различных режимов связанных оригинальной и модифицированной систем при увеличении силы связи $g_{c,V}$.

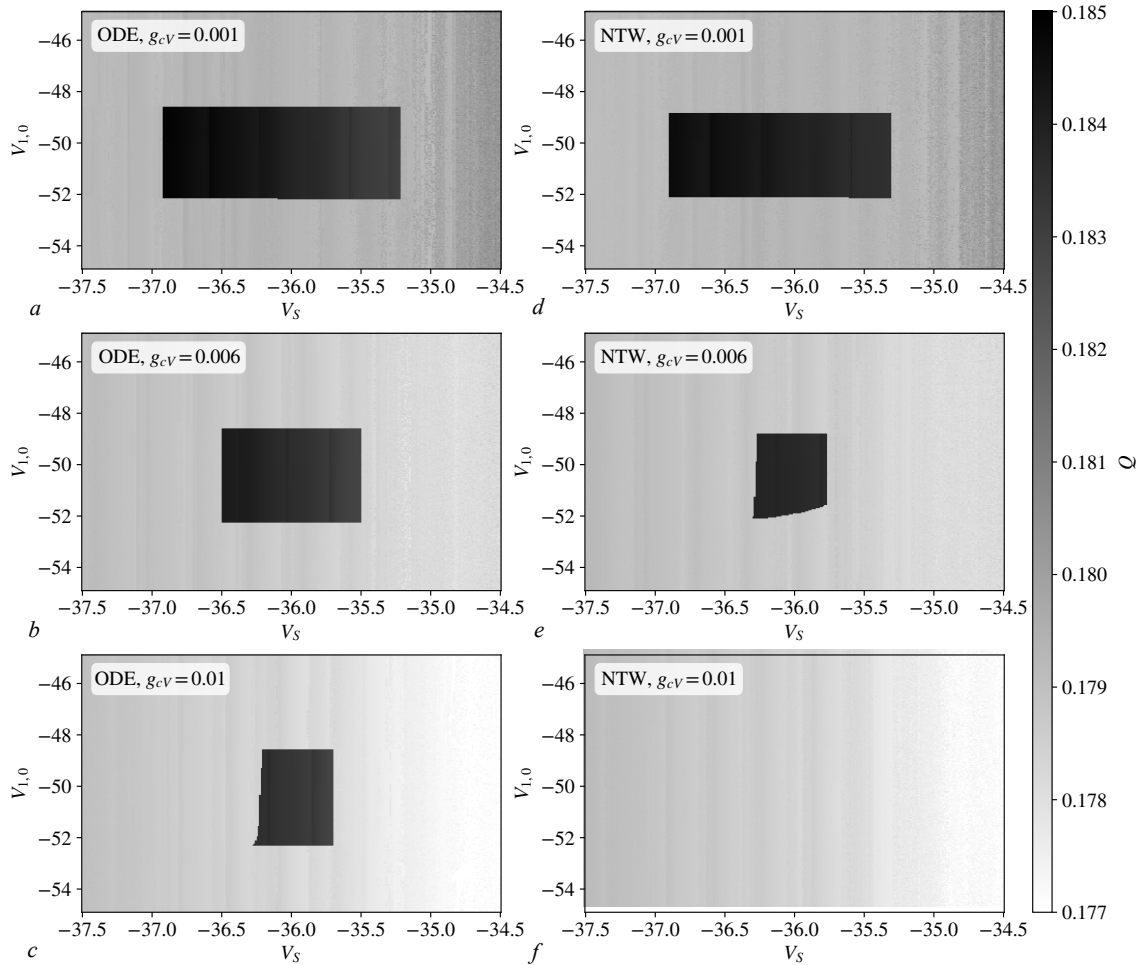


Рис. 9. Одномерные сечения бассейнов притяжения для пары оригинальная–модифицированная системы: *a, b, c* – система уравнений (4); *d, e, f* – связанные нейросетевые отображения (11). Параметр связи $g_{c,V}$: 0.001 (*a, d*); 0.006 (*b, e*); 0.01 (*c, f*). Диаграммы построены в окрестности неподвижной точки $V_{1,f} = -49.8965$, $n_{1,f} = 2.34541 \times 10^{-3}$, $S_{1,f} = 0.199464$, $V_{2,f} = -50.5546$, $n_{2,f} = 2.08592 \times 10^{-3}$, $S_{2,f} = 0.187634$, вычисленной при $V_S = -36$ и $g_{c,V} = 0.001$. Начальное значение $V_{1,0}$ отложенное по вертикали варьируется в пределах $V_{1,f} \pm 0.1V_{1,f}$, начальное значение $V_{2,0}$ также варьируется: $V_{2,0} = V_{1,0} - V_{1,f} + V_{2,f}$, начальные значения остальных переменных выбираются равными приведённым выше значениям

Fig. 9. One-dimensional sections of attraction basins for coupled original and modified system: *a, b, c* – Eqs. (4); *d, e, f* – coupled neural network mappings (11). Coupling parameter $g_{c,V}$: 0.001 (*a, d*); 0.006 (*b, e*); 0.01 (*c, f*). The diagrams are obtained in the neighborhood of a fixed point $V_{1,f} = -49.8965$, $n_{1,f} = 2.34541 \times 10^{-3}$, $S_{1,f} = 0.199464$, $V_{2,f} = -50.5546$, $n_{2,f} = 2.08592 \times 10^{-3}$, $S_{2,f} = 0.187634$ calculated at $V_S = -36$ and $g_{c,V} = 0.001$. Initial values of $V_{1,0}$ plotted vertically vary within the range $V_{1,f} \pm 0.1V_{1,f}$, the initial value of $V_{2,0}$ also varies: $V_{2,0} = V_{1,0} - V_{1,f} + V_{2,f}$, and initial values of other variables are chosen equal to the values given above

Этот рисунок построен аналогично рис. 4 и 5. Только теперь одновременно меняются начальные значения переменной V как для первой, так и для второй подсистем. Чёрная область в центральной части представляет стартовые значения, из которых система выходит на неподвижную точку. Светло-серые области вокруг — точки, из которых система выходит на колебательный режим. Видно, что с увеличением силы связи $g_{c,V}$ область притяжения неподвижной точки уменьшается.

3. Нейросетевое отображение

Нас интересует построение отображения вида $u(t + \Delta t) = F(u(t), p, w)$, способного при правильном подборе числовых значений w воспроизводить поведение различных динамических систем. Здесь $u(t)$ — вектор динамических переменных, p — вектор управляющих параметров, Δt — шаг по времени, который мы будем задавать как фиксированную величину. Математически доказано, см. работы [5–10], что двухслойная полносвязная нейронная сеть может быть использована для аппроксимации произвольных функций многих переменных. Отсюда следует, что она должна быть пригодна для построения упомянутого выше универсального отображения. Этот вопрос исследуется в работе [16]. Было показано достаточно хорошее качество воспроизведения динамики для различных систем: Лоренца, Рёсслера, модели нейрона Хиндмарша–Роуза. Однако было обнаружено, что нейросетевое отображение на основе простой двухслойной архитектуры достаточно трудно обучить для систем жёсткого типа, у которых переменные имеют сильно отличающиеся временные масштабы. Поэтому в работе [17] была предложена более сложная архитектура. Вместо одной сети, получающей на вход вектор $u(t)$ и возвращающей вектор $u(t + \Delta t)$, для каждой динамической переменной теперь создаётся отдельная подсеть — также двухслойная полносвязная. При этом все остальные переменные и значения управляющих параметров вводятся после прохождения ещё одного, дополнительного полносвязного слоя. Такая сеть оказалась в состоянии не только моделировать динамику жёсткой системы, но и правильно воспроизводить поведение, образцы которого не были предъявлены ей в ходе обучения.

В настоящей работе мы рассмотрим нейросетевое отображение из работы [17] с незначительной модификацией:

$$u_i(t + \Delta t) = (1 - \chi)u_i(t) + \chi \left(f \left(u_i(t)a_i + \mu_i + g(u_{-i}(t)A_i + pB_i + \beta_i) \right) b_i + \gamma_i \right). \quad (5)$$

Модификация сводится к введению стабилизирующего множителя $\chi = 0.001$. Благодаря этому исключаются ситуации, когда в результате «неудачной» инициализации весовых коэффициентов случайными числами обученное отображение вместо ожидаемого поведения демонстрировало расходимость. Здесь $u(t)$ — вектор динамических переменных системы размера D_u , $u_i(t)$ — i -ая переменная, а $u_{-i}(t)$ — вектор, получаемый из $u(t)$ удалением i -й переменной. В нашем случае вектор $u(t)$ содержит компоненты V , n и S . Как принято для нейронных сетей, мы будем считать, что $u(t)$ и $u_{-i}(t)$ — это векторы-строки. Символом p обозначен вектор-строка управляющих параметров системы размерности D_p . Мы рассматриваем изменение только одного из параметров системы, а именно V_S . Поэтому он одномерный. Описание других элементов формулы (5) приведено в табл. 2. Функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ в терминах нейронных сетей называются функциями активации. Это скалярные функции скалярных аргументов. Предполагается, что когда они применяются к векторам, то действуют поэлементно.

Структура формулы (5) соответствует структуре двухслойной полносвязной сети. Первый слой на вход получает скалярное значение i -й динамической переменной u_i , а его выход — это вектор размерности N_h (см. табл. 2), получаемый после вычисления выражения $f(u_i(t)a_i + \mu_i + g(\dots))$. Этот слой называется скрытым. Однако в отличие от простой двухслойной сети, здесь вектор смещений (bias) μ_i корректируется значениями, подаваемыми через дополнительный слой

Таблица 2. Описание элементов формулы (5)

Table 2. Description of the elements of Eq. (5)

$u(t)$	вектор-строка	$D_u = 3$
$u_i(t)$	скаляр	
$u_{-i}(t)$	вектор-строка	$D_u - 1$
p	вектор-строка	$D_p = 1$
a_i, μ_i и β_i	векторы-строки	$N_h = 100$
b_i	вектор-столбец	N_h
γ_i	скаляр	
A_i	матрица	$(D_u - 1) \times N_h$
B_i	матрица	$D_p \times N_h$
χ	константа	0.001
$f(\cdot), g(\cdot)$	скалярные функции	$\tanh(\cdot)$

$g(u_{-i}(t)A_i + pB_i + \beta_i)$, который зависит от других динамических переменных и параметров. Второй, выходной слой сети имеет вид: $f(\dots)b_i + \gamma_i$. Этот слой возвращает скалярное значение, которое далее используется для вычисления значения динамической переменной u_i на новом шаге времени как $(1 - \chi)u_i + \chi(\dots)$. Таким образом, нейросетевое отображение (5) сконструировано как нейронная сеть, которая подстраивается под требуемую систему посредством обучения весовых параметров, представленных в виде следующих матриц и векторов:

$$w = \{a_i, \mu_i, A_i, B_i, \beta_i, b_i, \gamma_i \mid i = 1, 2, 3\}. \quad (6)$$

При фактической реализации нейросетевого отображения (5) требуется принять во внимание, что все современные вычислительные инструменты по работе с нейронными сетями, равно как и соответствующие теоретические разработки, подразумевают стандартизацию набора данных, на которых производится обучение. Это означает, что все величины, подаваемые на вход сети, должны попадать в единичный интервал вблизи нуля. Поэтому сеть будет обучаться и функционировать на данных, перемасштабированных согласно формулам (подразумеваются поэлементные операции)

$$u \rightarrow (u - m_u)/s_u, \quad p \rightarrow (p - m_p)/s_p. \quad (7)$$

Здесь m_u, m_p, s_u и s_p — это, соответственно, векторы средних значений и стандартных отклонений по области определения нейросетевого отображения. Вычисление этих векторов обсуждается в разделе 4, а их значения приведены в табл. 3. Таким образом, исходные данные, подаваемые на вход отображения (5), перемасштабируются согласно (7), затем выполняется требуемое число итераций, а для представления результатов полученные значения перемасштабируются обратно.

Таблица 3. Параметры наборов данных

Table 3. Datasets parameters

$V_S \in [-40, -30], V \in [-70, -18], n \in [0.0, 0.13], S \in [0.14, 0.26],$ $m_u = (-44, 0.065, 0.2), m_p = -35, s_u = (26, 0.065, 0.06), s_p = 5,$ $L_{\text{chunk}} = 10, N_{\text{chunks}} = 10^5, \Delta t = 0.005,$ $L_{\text{train}} = L_{\text{chunk}} \times N_{\text{chunks}} = 10^6, L_{\text{validation}} = 10^5, L_{\text{batch}} = 10^4$

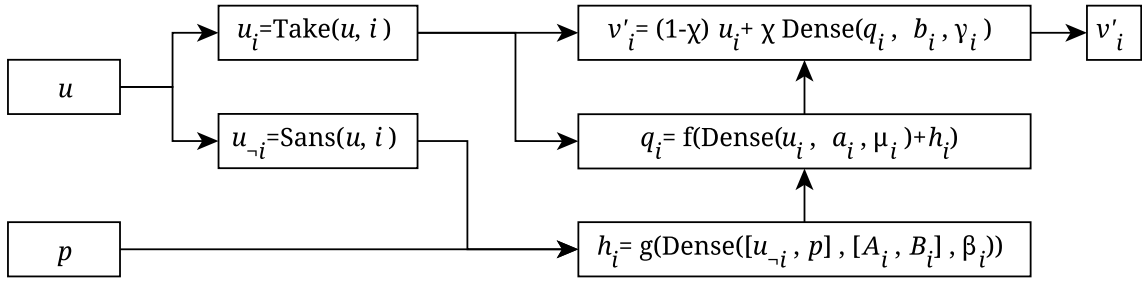


Рис. 10. Структура нейронной сети, соответствующей нейросетевому отображению (5) для i -й переменной моделируемой системы. Здесь $u \equiv u(t)$, $v'_i \equiv u'_i(t + \Delta t)$. Штрих обозначает вычисленную сеть величину, которая при обучении сравнивается с «правильной» величиной $u_i(t + \Delta t)$ из обучающего набора данных

Fig. 10. The structure of the neural network that corresponds to the mapping (5) for i th variable. Here $u \equiv u(t)$, $v'_i \equiv u'_i(t + \Delta t)$. The prime denotes a value computed by the network. This value in the course of training is compared with the “correct” value $u_i(t + \Delta t)$ from the training dataset

При программной реализации отображения в виде нейронной сети используются следующие операторы. Оператор $\text{Take}(u, i)$ возвращает i -й элемент вектора u , а оператор $\text{Sans}(u, i)$ наоборот, удаляет i -й элемент и возвращает вектор u_{-i} без этого элемента. Оператор $\text{Dense}(x, W, b) = xW + b$ представляет полносвязный слой без функции активации: умножение входного вектора x на матрицу W и сдвиг на вектор b . Наконец, квадратные скобки $[\cdot, \cdot]$ обозначают конкатенацию двух векторов или матриц.

Используя эти обозначения, действие нейросетевого отображения можно проиллюстрировать при помощи диаграммы на рис. 10 и соответствующих ей формул (8), которые показывают, как организованы вычисления для i -й переменной. Нейронная сеть имеет два входных вектора, $p = (V_S)$ и $u = (V(t), n(t), S(t))$, формула (8a). Сначала u разбивается на скаляр u_i и вектор u_{-i} , в котором i -й элемент отсутствует, формула (8b). Слой (8c) принимает u_{-i} и p и вычисляет вектор h_i размерности N_h , который включает в себя информацию о влиянии управляющих параметров и всех переменных за исключением i -й. Этот вектор складывается с выходом слоя, обрабатывающего i -ю компоненту, формула (8d). В результате получается вектор скрытого слоя q_i размерности N_h . Он передаётся на выходной слой (8e), после чего используется непосредственно для вычисления решения на новом шаге времени $v'_i \equiv u(t + \Delta t)$. Повторив эти вычисления для $i = 1, 2, 3$ мы получаем сгенерированный сетью вектор решения $u'(t + \Delta t)$.

$$p = \text{Input}(), \quad u = \text{Input}(), \quad (8a)$$

$$u_i = \text{Take}(u, i), \quad u_{-i} = \text{Sans}(u, i), \quad (8b)$$

$$h_i = g(\text{Dense}([u_{-i}, p], [A_i, B_i], \beta_i)), \quad (8c)$$

$$q_i = f(\text{Dense}(u_i, a_i, \mu_i) + h_i), \quad (8d)$$

$$v'_i = (1 - \chi)u_i + \chi \text{Dense}(q_i, b_i, \gamma_i). \quad (8e)$$

Когда сеть уже обучена и используется для вычисления траектории системы, нужно положить $u'(t + \Delta t) = u(t + \Delta t)$. В процессе же обучения весовые коэффициенты сети (6) настраиваются таким образом, чтобы отличие генерируемого результата $u'(t + \Delta t)$ от требуемого $u(t + \Delta t)$ было минимальным. Поэтому в качестве целевой функции естественно выбрать квадрат нормы разности этих векторов:

$$L = \|v - v'\|^2. \quad (9)$$

Обучение состоит в том, чтобы используя метод градиентного спуска, шаг за шагом вычислять поправки к весовым коэффициентам (6), приводящие к уменьшению L :

$$w \rightarrow w - \kappa \nabla_w L, \quad (10)$$

где κ — обычно малый параметр, регулирующий величину шага. Фактически при обучении мы используем модификацию метода градиентного спуска — метод Adam [27]. Это наиболее часто применяемый в настоящее время алгоритм оптимизации весов сети. Его преимущество в том, что значение κ автоматически подстраивается в процессе итераций, что обеспечивает высокую скорость их сходимости.

4. Тренировочный набор данных и обучение сети

Мы создаём нейронную сеть, которая в некоторой степени похожа на так называемую рекуррентную сеть [11]: на вход подаётся вектор $u(t)$, на выходе формируется $u(t + \Delta t)$, который снова подаётся на вход той же самой сети для вычисления следующего значения. Однако имеются важные отличия. Во-первых, внутренняя структура сети подобрана так, чтобы имелась возможность описать её в форме отображения, явного и достаточно компактного, допускающего дальнейший теоретический анализ, см. формулу (5). Современные рекуррентные ячейки, такие как LSTM и GRU, устроены значительно сложнее [11]. Для них нет большого смысла пытаться выписать соответствующее отображение из-за его громоздкости. Во-вторых, процедура обучения нашей сети будет организована по-другому. Традиционные рекуррентные сети обучаются на последовательностях фиксированной, обычно не очень большой длины. Это предполагает что и функционировать они будут на последовательностях такой же длины. Нейросетевое отображение (5) должно быть способно порождать траектории произвольной длины. Поэтому в процессе обучения мы не задействуем рекурсию — в качестве обучающих данных будут использованы пары $(u(t), u(t + \Delta t))$, где первое значение подаётся на вход, сеть делает только одну итерацию и вычисленный результат $u'(t + \Delta t)$ сравнивается с ожидаемым $u(t + \Delta t)$.

Для формирования набора данных зададим область определения таким образом, чтобы в ней оказались все инвариантные объекты фазового пространства — аттракторы колебательных решений и неподвижная точка. Для этого сначала зададим диапазон изменения параметра V_S , см. табл. 3. Напомним, что мы будем менять значения только одного этого параметра, значения остальных приведены в табл. 1. Меняя V_S , будем строить численные решения системы (1), многократно стартуя из произвольно выбранных начальных точек и определяя минимальные и максимальные значения, которые принимают V , n и S . Дополнительно будем вычислять положение неподвижной точки при различных V_S и корректировать найденные диапазоны изменения переменных, чтобы включить в них и её. Найденные диапазоны затем расширим примерно по 10% с каждого края и округлим до двух значащих цифр. При этом нижняя граница для n немного заходит в отрицательную область — заменяем её нулём. Полученные диапазоны для V , n и S вместе с диапазоном для V_S , см. табл. 3, задают область определения нейросетевого отображения, когда оно моделирует систему (1). Отметим, что в работе [17], где основная цель — моделирование одиночной системы, обучение производилось на фрагментах колебательного решения системы. Так как в настоящей работе исследуется возможность моделирования связанных систем (4), сеть обучается на всей области определения.

Для полученной области определения вычисляются средние значения m_u и m_p , а также соответствующие стандартные отклонения s_u и s_p , см. табл. 3. Данные, подаваемые на вход сети, то есть в отображение (5), предварительно перемасштабируются по формулам (7) так,

что фактически значения всех переменных и параметра лежат в диапазоне от -1 до 1 . После вычисления траектории данные, сгенерированные сетью, подвергаются обратному преобразованию для последующего анализа.

Обучающий набор данных создаётся следующим образом. Случайно выбираются значение параметра V_S и начальное значение динамических переменных $u(0) = (V, n, S)$ из области определения, границы которой приведены в табл. 3. Затем вычисляется решение уравнений (1) за $L_{\text{chunk}} + 1$ шагов с временным интервалом Δt , см. табл. 3. Из полученной последовательности конструируются L_{chunk} записей вида $(V_S, u(0), u(\Delta t))$, $(V_S, u(\Delta t), u(2\Delta t))$, $(V_S, u(2\Delta t), u(3\Delta t))$ и так далее, которые помещаются в массив обучающих данных. В целом для тренировочного набора данных генерируется N_{chunks} отрезков траекторий так, что полная длина тренировочного набора данных равна $L_{\text{train}} = L_{\text{chunk}} \times N_{\text{chunks}}$. Перед началом обучения записи в тренировочном наборе перемешиваются, так что сеть «видит» в каждый момент обучения отдельные точки траекторий, а не фрагменты целиком.

Для контроля качества обучения генерируется валидационный набор данных длиной $L_{\text{validation}}$. Для валидации всегда берутся отрезки траектории длиной один шаг. Это значит, что для сгенерированных случайно V_S и $u(0)$ вычисляется $u(\Delta t)$, запись $(V_S, u(0), u(\Delta t))$ помещается в массив валидационных данных, а затем генерируется новая запись.

Стандартный способ экономии памяти в процессе обучения — подавать на вход сети данные порциями, которые в англоязычной литературе называются «batches», что переводится на русский обычно как «пакеты». Для нашей сети размер пакета равен L_{batch} , см. табл. 3. Сначала сети предъявляется тренировочный набор данных, пакет за пакетом. Для каждого пакета выполняется шаг градиентного спуска (10) и корректируются веса сети w . Когда все пакеты тренировочного набора обработаны, говорят что прошла одна эпоха обучения. После этого сети предъявляются валидационные данные, для которых вычисляется значение целевой функции. Градиентный спуск и коррекция весовых коэффициентов на валидационных данных не производится. Кривые зависимости целевой функции от номера эпохи для тренировочных и валидационных данных называются кривыми обучения.

Результат обучения нейронной сети существенным образом зависит от длины фрагментов траекторий L_{chunk} . На рис. 11 показаны кривые обучения на наборе данных модифицированной системы. По вертикали отложено значение целевой функции (9), а по вертикали — номер эпохи

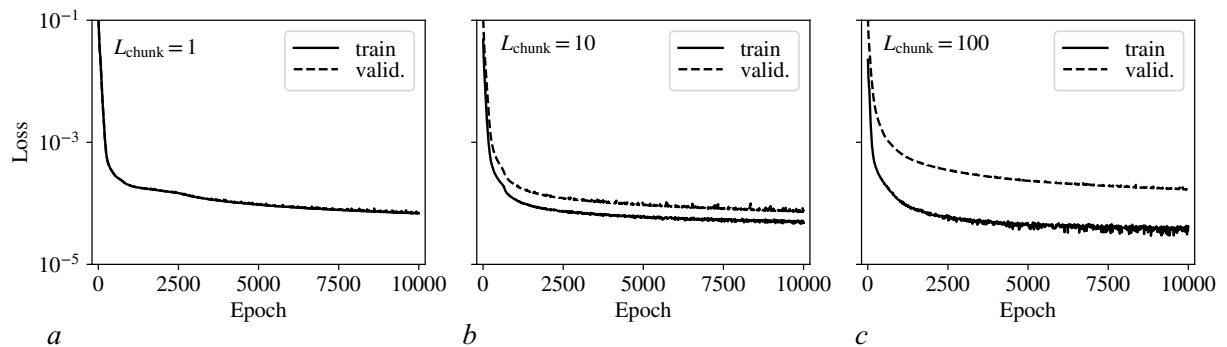


Рис. 11. Кривые обучения нейросетевого отображения (5) для модифицированной системы: a , b и c — длины фрагментов обучающих L_{chunk} траектории равны 1, 10 и 100, соответственно. Показаны тренировочная и валидационная кривые. На диаграмме a эти кривые совпадают

Fig. 11. Learning curves of the neural network mappings (5) for modified system: a , b and c — lengths of the training trajectory chunks L_{chunk} are 1, 10 and 100, respectively. Both training and validation curves are shown. On the diagram a the curves coincide

обучения. Рис. 11, *a*, *b*, *c* получены для наборов данных с разными длинами отрезков траекторий, $L_{\text{chunk}} = 1$, $L_{\text{chunk}} = 10$, $L_{\text{chunk}} = 100$, соответственно. Видно, что чем выше L_{chunk} , тем сильнее расходятся тренировочная и валидационная кривые: целевая функция на тренировочных данных остаётся на прежнем уровне, а валидация становится хуже.

Так как в отличие от тренировочных данных на валидационных данных подстройка весовых коэффициентов сети w не производится, то есть не производится адаптация сети непосредственно к этим данным, сравнение значений целевой функции на тренировочных и валидационных данных позволяет судить о том, насколько хорошо сеть научилась находить обобщённые признаки, а следовательно, насколько хорошо она будет функционировать по окончании обучения. Сильное расхождение между валидационной и тренировочной кривыми говорит о переобучении. Это значит, что сеть преимущественно просто запоминает тренировочные данные. Пример такого поведения показан на рис. 11, *c* — когда фрагменты траектории длинные, сеть более «охотно» запоминает именно их, тогда как на произвольных точках фазового пространства её поведение заметно отличается от поведения моделируемой системы.

С другой стороны, уменьшение L_{chunk} также приводит к негативному эффекту. На рис. 4, *b*, *c* и *d* показаны одномерные сечения бассейнов притяжения различных режимов отображения (5), обученного с $L_{\text{chunk}} = 10$, $L_{\text{chunk}} = 1$, $L_{\text{chunk}} = 100$, соответственно. Сравнивая эти диаграммы с рис. 4, *a*, который построен непосредственно для численных решений системы (1), видим, что сеть, обученная на одношаговых отрезках траекторий, $L_{\text{chunk}} = 1$, вообще не «видит» устойчивую неподвижную точку — на рис. 4, *c* отсутствует характерный тёмный прямоугольник в центре, который есть на всех других диаграммах. Переобученная сеть при $L_{\text{chunk}} = 100$ также плохо воспроизводит особенности динамики системы (1). Видно, что область устойчивости неподвижной точки (ширина тёмного центрального прямоугольника), а также точка перехода от пачечного режима к спайковому (граница между светло-серой и тёмно-серой областями) отличаются от правильных значений на рис. 4, *a*. Таким образом, видно, что оптимальное значение для обучения нейросетевого отображения (5) для воспроизведения модифицированной системы — это $L_{\text{chunk}} = 10$.

Для оригинальной системы не показаны кривые обучения, так как они визуально неотличимы от соответствующих кривых для модифицированной системы на рис. 11. Одномерное сечение бассейнов притяжения в зависимости от параметра V_S для нейросетевого отображения (5), обученного при $L_{\text{chunk}} = 10$, показано на рис. 5, *b*. Видно, что оно хорошо воспроизводит диаграмму для моделируемой системы (1).

Таким образом, для моделирования динамики оригинальной и модифицированной версий системы (1) наилучшим образом подходят наборы обучающих данных, содержащих отрезки траекторий длиной $L_{\text{chunk}} = 10$. В дальнейшем мы рассматриваем нейросетевые отображения, обученные на таких наборах данных.

5. Динамика нейросетевого отображения

Нейросетевое отображение (5), обученное как описано выше, хорошо воспроизводит динамику оригинального и модифицированного вариантов системы (1). На рис. 1, *d*, *e* и *f* показаны зависимости от времени для модифицированной системы, сгенерированные нейросетевым отображением. Видно очень хорошее соответствие с рис. 1, *a*, *b* и *c*, полученными как численные решения (1). Здесь не показаны аналогичные пары решений для оригинальной системы, так как они также хорошо соответствуют друг другу и визуально неотличимы от показанных на рис. 1.

Изменения характера динамики в зависимости от параметра V_S демонстрирует рис. 3. Видно, что нейросетевое отображение хорошо воспроизводит бифуркационную перестройку от пачечного к спайковому аттракторам как в оригинальной (сравни рис. 3, *a* и *c*), так

и в модифицированной (сравни рис. 3, *b* и *d*) системах. Кроме того, для модифицированной системы нейросетевое отображение правильно повторяет область бистабильности, в которой пачечный аттрактор сосуществует с неподвижной точкой.

Как уже упоминалось выше, на рис. 4, *a* и *b* показано, что нейросетевое отображение с высокой степенью точности воспроизводит структуру бассейнов притяжения различных режимов системы. Аналогичное соответствие бассейнов притяжения для оригинальной системы показано на рис. 5.

Обсудим теперь связанные системы. Мы собираемся продемонстрировать, что если между нейросетевыми отображениями, обученными для одиночных систем, ввести связь, они будут воспроизводить динамику связанных систем (4).

Так как в уравнениях (4) связь вводится через компоненты V_1 и V_2 , при переходе к отображениям нужно модифицировать соответствующие части нейросетевого отображения (5), добавив к ним отвечающее за связь слагаемое, пропорциональное $g_{c,V}$:

$$V_1(t + \Delta t) = F_0^{(1)}(V_1(t), n_1(t), S_1(t)) + \frac{\Delta t g_{c,V}}{\tau}(V_1(t) - V_2(t)). \quad (11)$$

Здесь $F_0^{(1)}$ обозначает правую часть нейросетевого отображения для нулевой компоненты первой подсистемы, то есть для V_1 . Отображение для V_2 получается заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$. Все остальные компоненты вычисляются как и раньше, с использованием соответствующего нейросетевого отображения вида (5).

Таким образом, для моделирования динамики связанных систем (4) мы будем использовать нейросетевые отображения, обученные для одиночных систем, как описано в разделах 3 и 4, вводя между ними связь вида (11).

На рис. 6 сравниваются трансформации режимов динамики связанных осцилляторов (4) с соответствующей нейросетевой моделью (11). Левая колонка получена на основе численных решений уравнений (4), а колонка справа — для итераций связанных нейросетевых отображений. Сопоставлены пары оригинальная—оригинальная (см. рис. 6, *a* и *e*), модифицированная—модифицированная (см. рис. 6, *b* и *f*), и оригинальная—модифицированная подсистемы (см. рис. 6, *c*, *d*, *g* и *h*). Для последней показаны случаи двух разных значений силы связи $g_{c,V}$. Видно очень хорошее соответствие рисунков. Характер перестроек режимов, демонстрируемый нейросетевыми отображениями, соответствует перестройкам в системе, заданной уравнениями (4). Это также иллюстрируют рис. 7 и 8, на которых показаны примеры решений при разных значениях V_S . На этих рисунках правые колонки получены как численные решения (4), а справа — итерации связанных нейросетевых отображений. Мы наблюдаем очень хорошее соответствие во всех случаях.

Обсудим теперь ситуацию, когда поведение связанных нейросетевых отображений соответствует поведению системы (4) недостаточно точно. На рис. 6, *c* и *d*, которые построены для пары оригинальная—модифицированная подсистемы при $g_{c,V} = 0.001$ и $g_{c,V} = 0.01$, в районе $V_S = -36$ наряду с колебательным решением имеется диапазон устойчивости неподвижной точки. Отметим низкую насыщенность изображения этого решения, что свидетельствует о низкой вероятности выхода на него системы при старте со случайных начальных точек. Также отметим, что ширина по V_S диапазона существования устойчивой неподвижной точки уменьшается с ростом $g_{c,V}$. Соответствующее нейросетевое отображение очень хорошо воспроизводит область устойчивости неподвижной точки при $g_{c,V} = 0.001$ (сравни рис. 6, *g* и *c*). Однако с увеличением $g_{c,V}$ до 0.01 у нейросетевого отображения она исчезает (сравни рис. 6, *h* и *d*). Эта ситуация проанализирована на рис. 9. Здесь показаны одномерные сечения бассейнов притяжения различных режимов в зависимости от V_S для пары оригинальная—модифицированная системы для разных значений силы связи. Рис. 9, *a–c* построены для решений связанных уравнений (4),

а рис. 9, *в–f* — для связанных нейросетевых отображений. Чёрная центральная область на этих рисунках представляет значения переменных, стартовав из которой система выходит на неподвижную точку. При слабой связи эти области практически идентичны для уравнений и для нейросетевых отображений. Однако с ростом $g_{c,V}$ видоизменение области происходит по-разному: в обоих случаях она сужается по V_S , но для отображений это происходит быстрее. Отличие хорошо видно при $g_{c,V} = 0.006$ на рис. 9, *б* и *е*: чёрная центральная область на рисунке справа значительно уже, чем слева. Далее, при $g_{c,V} = 0.01$ область выхода на неподвижную точку для уравнений ещё сохраняется, а для нейросетевых отображений уже отсутствует. Это говорит о том, что с ростом силы связи в системе нейросетевых отображений неподвижная точка полностью теряет устойчивость раньше чем в моделируемых уравнениях.

Таким образом, в целом можно заключить, что связанные нейросетевые отображения, обученные по отдельности, в целом хорошо воспроизводят поведение связанных систем. Для неподвижной точки наблюдаются незначительные расхождения в границах области её устойчивости, наблюдаемые при изменении силы связи.

Заключение

Мы проанализировали процедуру построения и обучения нейросетевого отображения, способного моделировать динамику нелинейных систем. Детально рассмотрена архитектура такого отображения, метод формирования набора данных и непосредственно процесс обучения. В качестве моделируемой системы рассматривался нейрон, задаваемый уравнениями на основе формализма Ходжкина—Хаксли [18]. Отличительная особенность динамики нейрона — её жёсткость, то есть наличие сильно различающихся временных масштабов изменения переменных. Это выступает дополнительным фактором, затрудняющим построение соответствующего нейросетевого отображения и требует использования специальной архитектуры нейронной сети — каждая переменная должна моделироваться отдельной подсетью [17].

Основной целью настоящей работы было показать, что предложенное нейросетевое отображение можно использовать в составе связанных систем — связанные нейросетевые отображения, обученные для одиночных систем, могут без дополнительного обучения воспроизводить динамику соответствующих связанных нейронов. На примере связанных нейронов показано хорошее соответствие динамики исходных уравнений и связанных нейросетевых отображений. Хорошо воспроизводятся перестройки характера поведения при изменении параметра, в частности — появление и исчезновение бистабильности.

Развиваемый в работе подход сформулирован в максимально общем виде. Рассматриваемое нейросетевое отображение можно попробовать построить для любых динамических систем и ввести произвольные связи между ними. При этом вопрос о границах его применимости пока не проработан. В частности, не ясно, можно ли указать практически интересные, не «экзотические» примеры динамических систем, для которых обучение нейросетевого отображения невозможно. Также представляет интерес вопрос о том, способны ли нейросетевые отображения без дообучения хорошо воспроизводить динамику более двух связанных систем с разными, в том числе нелинейными, связями. Все эти вопросы требуют дальнейшего изучения.

Список литературы

1. *Levin E., Gewirtzman R., Inbar G. F.* Neural network architecture for adaptive system modeling and control // *Neural Networks*. 1991. Vol. 4, no. 2. P. 185–191. DOI: 10.1016/0893-6080(91)90003-N.
2. *Grieger B., Latif M.* Reconstruction of the El Niño attractor with neural networks // *Climate Dynamics*. 1994. Vol. 10, no. 6–7. P. 267–276. DOI: 10.1007/BF00228027.
3. *Zimmermann H. G., Neuneier R.* Combining state space reconstruction and forecasting by neural

- networks // In: Bol G., Nakhaeizadeh G., Vollmer K. H. (eds) *Datamining und Computational Finance*. Vol. 174 of *Wirtschaftswissenschaftliche Beiträge*. Heidelberg: Physica, 2000. P. 259–267. DOI: 10.1007/978-3-642-57656-0_13.
4. *Gilpin W., Huang Y., Forger D. B.* Learning dynamics from large biological data sets: Machine learning meets systems biology // *Current Opinion in Systems Biology*. 2020. Vol. 22. P. 1–7. DOI: 10.1016/j.coisb.2020.07.009.
 5. *Колмогоров А. Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // *ДАН СССР*. 1956. Т. 108, № 2. С. 179–182.
 6. *Арнольд В. И.* О функциях трех переменных // *ДАН СССР*. 1957. Т. 114, № 4. С. 679–681.
 7. *Колмогоров А. Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // *ДАН СССР*. 1957. Т. 114, № 5. С. 953–956.
 8. *Sybenko G.* Approximation by superpositions of a sigmoidal function // *Mathematics of Control, Signals and Systems*. 1989. Vol. 2, no. 4. P. 303–314. DOI: 10.1007/BF02551274.
 9. *Горбань А. Н.* Обобщенная аппроксимационная теорема и точное представление многочленов от нескольких переменных суперпозициями многочленов от одного переменного // *Известия вузов. Математика*. 1998. № 5 (432). С. 6–9.
 10. *Хайкин С.* *Нейронные сети: полный курс*. 2-е издание. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. 1104 с.
 11. *Николенко С., Кадурич А., Архангельская Е.* *Глубокое обучение*. СПб.: Питер, 2018. 480 с.
 12. *Cook S.* *CUDA Programming: A Developer's Guide to Parallel Computing with GPUs*. Morgan Kaufmann, 2012. 592 p.
 13. *Jouppi N. P., Young C., Patil N., Patterson D., Agrawal G., Bajwa R., Bates S., Bhatia S., Boden N., Borchers A., Boyle R., Cantin P.-L., Chao C., Clark C., Coriell J., Daley M., Dau M., Dean J., Gelb B., Ghaemmaghami T. V., Gottipati R., Gulland W., Hagmann R., Ho C. R., Hogberg D., Hu J., Hundt R., Hurt D., Ibarz J., Jaffey A., Jaworski A., Kaplan A., Khaitan H., Killebrew D., Koch A., Kumar N., Lacy S., Laudon J., Law J., Le D., Leary C., Liu Z., Lucke K., Lundin A., MacKean G., Maggiore A., Mahony M., Miller K., Nagarajan R., Narayanaswami R., Ni R., Nix K., Norrie T., Omernick M., Penukonda N., Phelps A., Ross J., Ross M., Salek A., Samadiani E., Severn C., Sizikov G., Snelham M., Souter J., Steinberg D., Swing A., Tan M., Thorson G., Tian B., Toma H., Tuttle E., Vasudevan V., Walter R., Wang W., Wilcox E., Yoon D. H.* In-datacenter performance analysis of a Tensor Processing Unit // *ACM SIGARCH Computer Architecture News*. 2017. Vol. 45, no. 2. P. 1–12. DOI: 10.1145/3140659.3080246.
 14. *Welsler J., Pitera J. W., Goldberg C.* Future computing hardware for AI // In: 2018 IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM). 1-5 December 2018, San Francisco, CA, USA. New York: IEEE, 2018. P. 131–136. DOI: 10.1109/IEDM.2018.8614482.
 15. *Karras K., Pallis E., Mastorakis G., Nikoloudakis Y., Batalla J. M., Mavromoustakis C. X., Markakis E.* A hardware acceleration platform for AI-based inference at the edge // *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2020. Vol. 39, no. 2. P. 1059–1070. DOI: 10.1007/s00034-019-01226-7.
 16. *Kuptsov P. V., Kuptsova A. V., Stankevich N. V.* Artificial neural network as a universal model of nonlinear dynamical systems // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 17, no. 1. P. 5–21. DOI: 10.20537/nd210102.
 17. *Kuptsov P. V., Stankevich N. V., Bagautdinova E. R.* Discovering dynamical features of Hodgkin–Huxley-type model of physiological neuron using artificial neural network // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023. Vol. 167. P. 113027. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.113027.

18. *Sherman A., Rinzel J., Keizer J.* Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing // *Biophysical Journal*. 1988. Vol. 54, no. 3. P. 411–425. DOI: 10.1016/S0006-3495(88)82975-8.
19. *Stankevich N., Mosekilde E.* Coexistence between silent and bursting states in a biophysical Hodgkin-Huxley-type of model // *Chaos*. 2017. Vol. 27, no. 12. P. 123101. DOI: 10.1063/1.4986401.
20. *Malashchenko T., Shilnikov A., Cymbalyuk G.* Six types of multistability in a neuronal model based on slow calcium current // *PLoS ONE*. 2011. Vol. 6, no. 7. P. e21782. DOI: 10.1371/journal.pone.0021782.
21. *Rozhnova M. A., Pankratova E. V., Stasenko S. V., Kazantsev V. B.* Bifurcation analysis of multistability and oscillation emergence in a model of brain extracellular matrix // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021. Vol. 151. P. 111253. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111253.
22. *Pankratova E. V., Sinitsina M. S., Gordleeva S., Kazantsev V. B.* Bistability and chaos emergence in spontaneous dynamics of astrocytic calcium concentration // *Mathematics*. 2022. Vol. 10, no. 8. P. 1337. DOI: 10.3390/math10081337.
23. *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.* Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. 3rd Edition. New York: Cambridge University Press, 2007. 1256 p.
24. *Shilnikov A., Cymbalyuk G.* Transition between tonic spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 94, no. 4. P. 048101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.048101.
25. *Marković D., Mizrahi A., Querlioz D., Grollier J.* Physics for neuromorphic computing // *Nature Reviews Physics*. 2020. Vol. 2. P. 499–510. DOI: 10.1038/s42254-020-0208-2.
26. *Stankevich N., Koseska A.* Cooperative maintenance of cellular identity in systems with intercellular communication defects // *Chaos*. 2020. Vol. 30, no. 1. P. 013144. DOI: 10.1063/1.5127107.
27. *Kingma D. P., Ba J.* Adam: A method for stochastic optimization // arXiv:1412.6980. arXiv Preprint, 2014. DOI: 10.48550/arXiv.1412.6980.

References

1. Levin E, Gewirtzman R, Inbar GF. Neural network architecture for adaptive system modeling and control. *Neural Networks*. 1991;4(2):185–191. DOI: 10.1016/0893-6080(91)90003-N.
2. Grieger B, Latif M. Reconstruction of the El Niño attractor with neural networks. *Climate Dynamics*. 1994;10(6–7):267–276. DOI: 10.1007/BF00228027.
3. Zimmermann HG, Neuneier R. Combining state space reconstruction and forecasting by neural networks. In: Bol G, Nakhaeizadeh G, Vollmer KH, editors. *Datamining und Computational Finance*. Vol. 174 of *Wirtschaftswissenschaftliche Beiträge*. Heidelberg: Physica; 2000. P. 259–267. DOI: 10.1007/978-3-642-57656-0_13.
4. Gilpin W, Huang Y, Forger DB. Learning dynamics from large biological data sets: Machine learning meets systems biology. *Current Opinion in Systems Biology*. 2020;22:1–7. DOI: 10.1016/j.coisb.2020.07.009.
5. Kolmogorov AN. On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of a smaller number of variables. *Amer. Math. Soc. Transl.* 1961;17:369–373.
6. Arnold VI. On functions of three variables. *Amer. Math. Soc. Transl.* 1963;28:51–54.
7. Kolmogorov AN. On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition. *Amer. Math. Soc. Transl.* 1963;28:55–59.
8. Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control, Signals and Systems*. 1989;2(4):303–314. DOI: 10.1007/BF02551274.
9. Gorban AN. Generalized approximation theorem and the exact representation of polynomials in

- several variables via the superpositions of polynomials in one variable. *Russian Mathematics*. 1998;42(5):4–7.
10. Haykin S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall; 1999. 842 p.
 11. Nikolenko S, Kadurin A, Arkhangelskaya E. *Deep Learning*. Saint Petersburg: Piter; 2018. 480 p. (in Russian).
 12. Cook S. *CUDA Programming: A Developer's Guide to Parallel Computing with GPUs*. Morgan Kaufmann; 2012. 592 p.
 13. Jouppi NP, Young C, Patil N, Patterson D, Agrawal G, Bajwa R, Bates S, Bhatia S, Boden N, Borchers A, Boyle R, Cantin PL, Chao C, Clark C, Coriell J, Daley M, Dau M, Dean J, Gelb B, Ghaemmaghami TV, Gottipati R, Gulland W, Hagmann R, Ho CR, Hogberg D, Hu J, Hundt R, Hurt D, Ibarz J, Jaffey A, Jaworski A, Kaplan A, Khaitan H, Killebrew D, Koch A, Kumar N, Lacy S, Laudon J, Law J, Le D, Leary C, Liu Z, Lucke K, Lundin A, MacKean G, Maggiore A, Mahony M, Miller K, Nagarajan R, Narayanaswami R, Ni R, Nix K, Norrie T, Omernick M, Penukonda N, Phelps A, Ross J, Ross M, Salek A, Samadiani E, Severn C, Sizikov G, Snellman M, Souter J, Steinberg D, Swing A, Tan M, Thorson G, Tian B, Toma H, Tuttle E, Vasudevan V, Walter R, Wang W, Wilcox E, Yoon DH. In-datacenter performance analysis of a Tensor Processing Unit. *ACM SIGARCH Computer Architecture News*. 2017;45(2):1–12. DOI: 10.1145/3140659.3080246.
 14. Welser J, Pitera JW, Goldberg C. Future computing hardware for AI. In: 2018 IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM). 1-5 December 2018, San Francisco, CA, USA. New York: IEEE; 2018. P. 131–136. DOI: 10.1109/IEDM.2018.8614482.
 15. Karras K, Pallis E, Mastorakis G, Nikoloudakis Y, Batalla JM, Mavromoustakis CX, Markakis E. A hardware acceleration platform for AI-based inference at the edge. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2020;39(2):1059–1070. DOI: 10.1007/s00034-019-01226-7.
 16. Kuptsov PV, Kuptsova AV, Stankevich NV. Artificial neural network as a universal model of nonlinear dynamical systems. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2021;17(1):5–21. DOI: 10.20537/nd210102.
 17. Kuptsov PV, Stankevich NV, Bagautdinova ER. Discovering dynamical features of Hodgkin–Huxley-type model of physiological neuron using artificial neural network. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023;167:113027. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.113027.
 18. Sherman A, Rinzel J, Keizer J. Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing. *Biophysical Journal*. 1988;54(3):411–425. DOI: 10.1016/S0006-3495(88)82975-8.
 19. Stankevich N, Mosekilde E. Coexistence between silent and bursting states in a biophysical Hodgkin-Huxley-type of model. *Chaos*. 2017;27(12):123101. DOI: 10.1063/1.4986401.
 20. Malashchenko T, Shilnikov A, Cymbalyuk G. Six types of multistability in a neuronal model based on slow calcium current. *PLoS ONE*. 2011;6(7):e21782. DOI: 10.1371/journal.pone.0021782.
 21. Rozhnova MA, Pankratova EV, Stasenko SV, Kazantsev VB. Bifurcation analysis of multistability and oscillation emergence in a model of brain extracellular matrix. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021;151:111253. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111253.
 22. Pankratova EV, Sinitsina MS, Gordleeva S, Kazantsev VB. Bistability and chaos emergence in spontaneous dynamics of astrocytic calcium concentration. *Mathematics*. 2022;10(8):1337. DOI: 10.3390/math10081337.
 23. Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. 3rd Edition. New York: Cambridge University Press; 2007. 1256 p.
 24. Shilnikov A, Cymbalyuk G. Transition between tonic spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe. *Phys. Rev. Lett.* 2005;94(4):048101. DOI:10.1103/PhysRevLett.94.048101.

25. Marković D, Mizrahi A, Querlioz D, Grollier J. Physics for neuromorphic computing. *Nature Reviews Physics*. 2020;2:499–510. DOI: 10.1038/s42254-020-0208-2.
26. Stankevich N, Koseska A. Cooperative maintenance of cellular identity in systems with intercellular communication defects. *Chaos*. 2020;30(1):013144. DOI: 10.1063/1.5127107.
27. Kingma DP, Ba J. Adam: A method for stochastic optimization. arXiv:1412.6980. arXiv Preprint; 2014. DOI: 10.48550/arXiv.1412.6980.

Купцов Павел Владимирович — родился в Саратове (1972). Окончил Саратовский государственный университет (1994). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (СГУ, 1998, научный руководитель С. П. Кузнецов) и доктора физико-математических наук по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (СГТУ имени Гагарина Ю. А., 2013, научный консультант С. П. Кузнецов). В настоящее время работает главным научным сотрудником в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, руководит в этом институте лабораторией теоретической нелинейной динамики. По совместительству работает профессором в СГТУ имени Гагарина Ю. А., в СГУ, в Нижегородском кампусе НИУ ВШЭ. Область научных интересов — нелинейная динамика, численные методы, машинное обучение и наука о данных. Опубликовал свыше 100 научных статей. Член редакционной коллегии журнала «Russian Journal of Nonlinear Dynamics».



Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники
 и электроники им. В. А. Котельникова РАН
 E-mail: kupav@mail.ru
 ORCID: 0000-0003-2685-9828
 AuthorID (eLibrary.Ru): 29426

Станкевич Наталия Владимировна — родилась в Саратове (1985), окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2007). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (СГУ, 2011, научный руководитель А. П. Кузнецов). С 2011 по 2019 год работала доцентом и профессором Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. на кафедре «Радиоэлектроника и телекоммуникации». В настоящее время работает старшим научным сотрудником в лаборатории топологических методов в динамике НИУ «Высшая школа экономики» — Нижний Новгород. Опубликовала 50 научных статей в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Член редакционной коллегии журналов «Universal Journal of Electrical and Electronic Engineering» и «Дифференциальные уравнения и процессы управления».



Россия, 603055 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12
 Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики
 Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники
 и электроники им. В. А. Котельникова РАН
 E-mail: stankevichnv@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-4781-0567
 AuthorID (eLibrary.Ru): 600847



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Научная статья
УДК 537.86

DOI: 10.18500/0869-6632-003085
EDN: TQNUKG

Синхронизация ансамбля мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо

Е. В. Навроцкая, А. В. Курбако, В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров✉

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия
E-mail: sidakev@gmail.com, kurbako.sasha@mail.ru, ponomarenkovi@gmail.com, ✉mdprokhorov@yandex.ru

Поступила в редакцию 2.10.2023, принята к публикации 15.11.2023,
опубликована онлайн 28.12.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. Цель работы — исследование особенностей синхронизации в ансамблях мемристивно связанных неидентичных нейроподобных осцилляторов ФитцХью–Нагумо. **Методы.** Численно и экспериментально исследовалась коллективная динамика в кольце осцилляторов ФитцХью–Нагумо, связанных мемристивной связью. Неидентичность осцилляторов достигалась их расстройкой по пороговому параметру, отвечающему за возбуждение осциллятора, либо расстройкой по параметру соотношения временных масштабов, от величины которого зависит собственная частота колебаний осциллятора. Мы исследовали синхронизацию мемристивно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо в зависимости от величины коэффициента связи, начальных условий всех переменных и количества осцилляторов в ансамбле. В качестве меры синхронизации мы использовали коэффициент, характеризующий близость траекторий осцилляторов. **Результаты.** Показано, что при мемристивной связи осцилляторов ФитцХью–Нагумо их синхронизация зависит не только от величины коэффициента связи, но и от начальных состояний как самих осцилляторов, так и переменных, отвечающих за мемристивную связь. Проведено сравнение особенностей синхронизации неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо при мемристивной и диффузионной связи между ними. Показано, что, в отличие от случая диффузионной связи осцилляторов, при мемристивной связи с ростом силы связи осцилляторов может наблюдаться разрушение режима полностью синхронных синфазных колебаний, вместо которого возникает режим несинфазных колебаний. **Заключение.** Полученные результаты могут быть востребованы при решении задач управления синхронизацией в ансамблях нейроподобных осцилляторов, в частности, для достижения или разрушения режима синфазной синхронизации колебаний в ансамбле связанных осцилляторов.

Ключевые слова: модель ФитцХью–Нагумо, нейроподобные осцилляторы, мемристивная связь, радиофизический эксперимент.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-22-00150, <https://rscf.ru/project/22-22-00150/>.

Для цитирования: Навроцкая Е. В., Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Синхронизация ансамбля мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 96–110. DOI: 10.18500/0869-6632-003085. EDN: TQNUKG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Synchronisation of the ensemble of nonidentical FitzHugh–Nagumo oscillators with memristive couplings

E. V. Navrotskaya, A. V. Kurbako, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov✉

Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

E-mail: sidakev@gmail.com, kurbako.sasha@mail.ru, ponomarenkovi@gmail.com,

✉mdprokhorov@yandex.ru

Received 2.10.2023, accepted 15.11.2023, available online 28.12.2023, published 31.01.2024

Abstract. The aim of the study is to investigate the features of synchronization in ensembles of nonidentical neuron-like FitzHugh–Nagumo oscillators interacting via memristor-based coupling. **Methods.** The collective dynamics in a ring of FitzHugh–Nagumo oscillators connected via memristive coupling was studied numerically and experimentally. The nonidentity of oscillators was achieved by detuning them by the threshold parameter responsible for the excitation of oscillator, or by detuning them by the parameter characterizing the ratio of time scales, the value of which determines the natural frequency of oscillator. We investigated the synchronization of memristively coupled FitzHugh–Nagumo oscillators as a function of the magnitude of the coupling coefficient, the initial conditions of all variables, and the number of oscillators in the ensemble. As a measure of synchronization, we used a coefficient characterizing the closeness of oscillator trajectories. **Results.** It is shown that with memristive coupling of FitzHugh–Nagumo oscillators, their synchronization depends not only on the magnitude of the coupling coefficient, but also on the initial states of both the oscillators themselves and the variables responsible for the memristive coupling. We compared the synchronization features of nonidentical FitzHugh–Nagumo oscillators with memristive and diffusive couplings. It is shown that, in contrast to the case of diffusive coupling of oscillators, in the case of memristive coupling, with increasing coupling strength of the oscillators, the destruction of the regime of completely synchronous in-phase oscillations can be observed, instead of which a regime of out-of-phase oscillations appears. **Conclusion.** The obtained results can be used when solving the problems of synchronization control in ensembles of neuronlike oscillators, in particular, for achieving or destroying the regime of in-phase synchronization of oscillations in an ensemble of coupled oscillators.

Keywords: FitzHugh–Nagumo model, neuronlike oscillators, memristive coupling, radio physical experiment.

Acknowledgements. This study was supported by the Russian Science Foundation, Grant No. 22-22-00150, <https://rscf.ru/project/22-22-00150/>.

For citation: Navrotskaya EV, Kurbako AV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Synchronisation of the ensemble of nonidentical FitzHugh–Nagumo oscillators with memristive couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(1):96–110. DOI: 10.18500/0869-6632-003085

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Спайковые нейронные сети, использующие в качестве узлов биологически реалистичные модели нейронов, являются объектом пристального изучения в различных научных дисциплинах [1]. Такие сети способны демонстрировать присущую реальным нейронам активность, в том числе генерировать спайки (импульсы). Спайковые нейронные сети широко используются для моделирования процессов обработки информации в головном мозге [2]. Они применяются в задачах классификации и идентификации, например, для классификации типичных паттернов в биомедицинских сигналах (электроэнцефалограммах, электромиограммах и др.) [3–6], классификации внешнего воздействия, подаваемого на нейроны сети [7, 8], распознавания аудиовизуальной информации [9, 10]. Высокую практическую значимость спайковые нейронные сети имеют в робототехнике при решении задач управления движением роботов [11–14]. Разработка новых эффективных алгоритмов обучения спайковых нейронных сетей [15] открывает все более широкие перспективы их применения на практике.

Существует несколько хорошо известных моделей нейронов, которые широко используются как узловые элементы для построения спайковых нейронных сетей [16]. Одной из таких моделей, ставшей эталонной моделью возбудимой динамики нейронов, является модель ФитцХью–Нагумо [16]. Ансамбли связанных осцилляторов, описываемых уравнениями ФитцХью–Нагумо, исследовались многими авторами. В частности, в таких ансамблях были исследованы процессы формирования, эволюции и синхронизации различных пространственно-временных структур, включая бегущие волны и химерные состояния [17–21], предложены методы управления пространственными структурами с помощью внешних воздействий [22, 23].

Динамика спайковых нейронных сетей определяется выбором не только узловых элементов сети, но и выбором типа и структуры связей между нейронами. При исследовании сетей, состоящих из осцилляторов ФитцХью–Нагумо, наиболее широко используется диффузионная связь, которая моделирует электрическую синаптическую связь между нейронами. Обычно при численном моделировании такая связь полагается постоянной, не зависящей от времени. Однако реальным нейронам присуща пластичность синаптических связей, которая обеспечивает высокую адаптивность нейронных сетей. Решить проблему реализации синаптической пластичности в спайковых нейронных сетях позволяет использование мемристивной связи между элементами. Особенностью такой связи является зависимость ее величины от предыдущих состояний взаимодействующих систем [24].

Нейронные ансамбли и сети, состоящие из мемристивно связанных модельных нейронов, преимущественно исследовались численно [25–28]. При этом спайковым нейронным сетям, состоящим из мемристивно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, посвящено небольшое количество работ. Например, в [29] было исследовано влияние начальных состояний мемристивной связи на бегущие волны в кольце идентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, а в [30] рассмотрена синхронизация двух мемристивно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо и цепочки, состоящей из диффузионно связанных пар таких осцилляторов. Задача экспериментального исследования ансамблей мемристивно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо является пока малоизученной. Например, в работе [31] была экспериментально изучена синхронизация двух нейроноподобных радиотехнических генераторов типа ФитцХью–Нагумо, связанных через аналоговое мемристивное устройство.

В данной работе мы численно и экспериментально исследовали синхронизацию в ансамбле мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо. Причем в радиофизическом эксперименте мы впервые реализовали сеть из 10 аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо, связанных мемристивной связью, реализованной в цифровом виде.

1. Синхронизация двух мемристивно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо

Рассмотрим сначала случай двух взаимно связанных мемристивной связью нейро-осцилляторов ФитцХью–Нагумо, описываемых дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i \dot{x}_i(t) &= x_i(t) - x_i^3(t)/3 - y_i(t) + kM(\varphi_i(t))(x_{i+1}(t) - x_i(t)), \\ \dot{y}_i(t) &= \gamma_i x_i(t) - y_i(t) + \beta, \\ \dot{\varphi}_i(t) &= x_i(t) - x_{i+1}(t),\end{aligned}\tag{1}$$

где $x_i(t)$ описывает динамику мембранного потенциала i -го нейрона, $i = 1, 2$, с граничными условиями $x_3(t) = x_1(t)$; $y_i(t)$ отвечает за восстановление потенциала покоя мембраны; $\varphi_i(t)$ определяет мгновенное состояние мемристивной связи; ε_i — параметр соотношения временных

масштабов, который обычно является малой величиной; γ_i — пороговый параметр; параметр β характеризует проводимость ионных каналов; k — коэффициент связи; функция $M(\varphi_i(t)) = a + b\varphi_i^2(t)$ описывает проводимость i -го мемристивного элемента связи, где a и b — параметры этой функции. Такой вид функции, описывающей мемристивную связь, был использован в [24, 29, 30].

Следует отметить, что мемристор, представляющий собой пассивный электрический элемент, который способен изменять свое сопротивление в зависимости от протекшего через него электрического заряда, был впервые теоретически описан в работе Чуа [32]. В дальнейшем Чуа развил концепцию мемрстора и обобщил ее на случай любого устройства, характеристики которого зависят от предыстории функционирования [33]. Такие устройства были названы мемристивными [33]. Экспериментальные образцы радиотехнических устройств, обладающих свойствами мемрстора, появились намного позже [34, 35].

Поскольку мгновенное значение переменной $\varphi_i(t)$ в системе (1) определяется следующим образом [29]:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \int_0^t (x_i(\tau) - x_{i+1}(\tau)) d\tau, \quad (2)$$

мгновенное значение силы связи осцилляторов в (1) зависит от их предыдущих состояний. Поэтому такую связь трактуют как мемристивную.

Мы исследовали синхронизацию осцилляторов в системе (1) в зависимости от величины коэффициента связи k и начальных условий всех трех переменных: $x_i(0)$, $y_i(0)$, $\varphi_i(0)$. Неидентичность осцилляторов достигалась их расстройкой по параметру γ_i или ε_i .

Рассмотрим случай малой расстройки осцилляторов по параметру γ_i , который принимал значения $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 1.05$, соответствующие периодическим автоколебаниям несвязанных осцилляторов. Остальные параметры осцилляторов одинаковы: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$, $\beta = 0.2$. Параметры мемристивной связи: $a = 1$, $b = 1$. При численном исследовании системы (1) мы интегрировали модельные уравнения методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом $\Delta t = 0.01$. Для исключения переходного процесса временные ряды переменных не рассматривались на начальном участке длиной $T_1 = 10000$.

В качестве меры синхронизации осцилляторов мы использовали коэффициент R , рассчитываемый по следующим формулам [30]:

$$x_s = (x_1 + x_2)/2, \quad (3)$$

$$R = \frac{\langle x_s^2 \rangle - \langle x_s \rangle^2}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2)},$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. При одинаковых дисперсиях переменных x_1 и x_2 коэффициент R связан с коэффициентом взаимной корреляции r соотношением $R = (1 + r)/2$. Коэффициент r может принимать значения от -1 до 1 , а коэффициент R может меняться от 0 до 1 . При полной синхронизации осцилляторов коэффициент R максимален и равен 1 , а в случаях несинхронных или несинфазных колебаний осцилляторов R принимает малые положительные значения [30]. Для расчета R мы проводили усреднение на интервале времени $T_2 = 1000$.

Обозначим $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$ и построим зависимости $R(\varphi_0)$ при различных значениях k и $x_1(0) = x_2(0)$, $y_1(0) = y_2(0)$ (рис. 1, а). Как видно из рисунка, в широком диапазоне значений φ_0 коэффициент $R = 1$, что указывает на полную синхронизацию осцилляторов. Однако существует интервал значений φ_0 , на котором коэффициент R мал. Отметим, что при более высоких значениях коэффициента связи ($k > 0.007$) характерный провал на графике $R(\varphi_0)$ исчезает и $R = 1$ при любых значениях φ_0 .

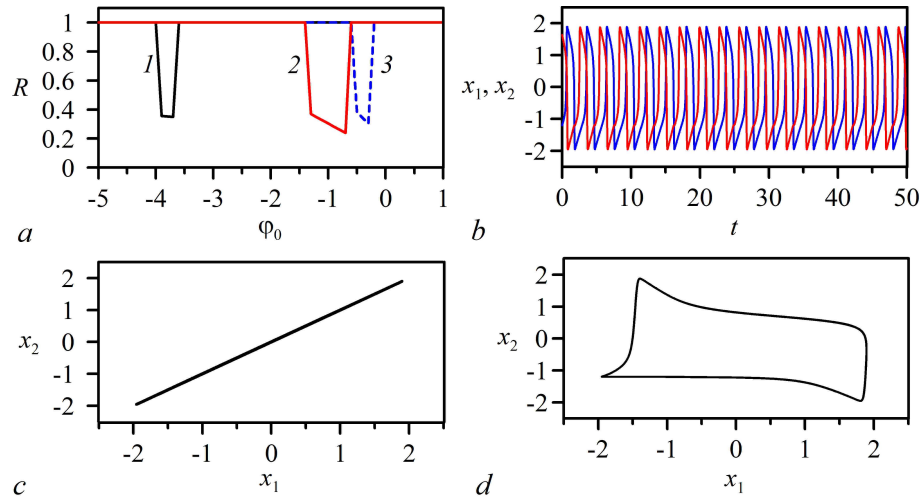


Рис. 1. *a* – Зависимости $R(\varphi_0)$ при $k = 0.0005$ (кривая 1), $k = 0.0025$ (кривая 2), $k = 0.005$ (кривая 3) при $x_1(0) = x_2(0) = 0.2$, $y_1(0) = y_2(0) = 0.1$. *b* – Временные реализации $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при $\varphi_0 = -0.7$, $k = 0.0025$. *c* – Проекция колебаний в случае синфазного режима при $\varphi_0 = -2$, $k = 0.0025$. *d* – Проекция колебаний в случае несинфазного режима при $\varphi_0 = -0.7$, $k = 0.0025$ (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* – Dependences $R(\varphi_0)$ for $k = 0.0005$ (curve 1), $k = 0.0025$ (curve 2), and $k = 0.005$ (curve 3) at $x_1(0) = x_2(0) = 0.2$, and $y_1(0) = y_2(0) = 0.1$. *b* – Temporal realizations of $x_1(t)$ and $x_2(t)$ at $\varphi_0 = -0.7$, $k = 0.0025$. *c* – Projection of oscillations in the case of in-phase mode at $\varphi_0 = -2$, $k = 0.0025$. *d* – Projection of oscillations in the case of out-of-phase mode at $\varphi_0 = -0.7$, $k = 0.0025$ (color online)

На рис. 1, *b* приведены временные реализации переменных x_1 и x_2 при $\varphi_0 = -0.7$, $k = 0.0025$, при которых коэффициент R принимает минимальное значение, $R = 0.24$. Видно, что переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$ совершают при этом несинфазные колебания. В области значений $R = 1$ временные реализации $x_1(t)$ и $x_2(t)$ почти совпадают (не приведены на графике) и практически неразличимы, что свидетельствует о полной (синфазной) синхронизации осцилляторов. Проекция траектории системы (1) на плоскость (x_1, x_2) приведены для случаев синфазных, $R = 1$ (рис. 1, *c*), и несинфазных, $R = 0.24$ (рис. 1, *d*), колебаний, наблюдающихся при разном выборе начальных условий, $\varphi_0 = -2$ и $\varphi_0 = -0.7$, соответственно. За счет мемристивной связи неидентичные осцилляторы оказываются синхронизованы по частоте, но при этом они могут быть как синхронизованы по фазе (см. рис. 1, *c*), так и не синхронизованы по фазе (см. рис. 1, *d*).

Начальные состояния переменных $x_i(t)$ и $y_i(t)$ тоже влияют на вид зависимостей $R(\varphi_0)$. На рис. 2, *a* построены графики $R(\varphi_0)$ для случаев $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ при $k = 0.005$. Видно, что чем больше $x_1(0)$ отличается от $x_2(0)$, а $y_1(0)$ от $y_2(0)$, тем шире область отсутствия полной синхронизации на графике $R(\varphi_0)$.

Кроме коэффициента R мы использовали еще одну меру, характеризующую близость траекторий первого и второго осциллятора:

$$D = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left((x_2(t_j) - x_1(t_j))^2 + (y_2(t_j) - y_1(t_j))^2 \right), \quad (4)$$

где j – номер точки временного ряда, L – количество точек. Чем ближе временные реализации осцилляторов друг к другу, тем меньше абсолютная величина D . При полной синхронизации осцилляторов $D = 0$.

На рис. 2, *b* построены зависимости $D(\varphi_0)$ для тех же случаев, что и на рис. 2, *a*, и $L = 100000$, соответствующем такому же количеству точек, как на интервале времени $T_2 = 1000$ на рис. 2, *a*. Видно, что между зависимостями $R(\varphi_0)$ и $D(\varphi_0)$ имеется высокая корреляция:

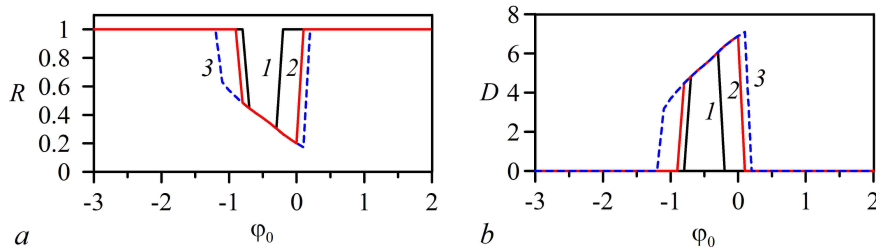


Рис. 2. Зависимости $R(\varphi_0)$ (a) и $D(\varphi_0)$ (b) при $k = 0.005$ и $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.4, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.3$ (кривая 1), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.5, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.4$ (кривая 2), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 2, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 1$ (кривая 3)

Fig. 2. Dependences $R(\varphi_0)$ (a) and $D(\varphi_0)$ (b) for $k = 0.005$ and $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.4, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.3$ (curve 1), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.5, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.4$ (curve 2), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 2, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 1$ (curve 3)

провалам на $R(\varphi_0)$ соответствуют подъемы на $D(\varphi_0)$ в тех же самых диапазонах изменения φ_0 . Поэтому, далее мы будем использовать только коэффициент R в качестве иллюстрации меры синхронизации осцилляторов.

Рассмотрим теперь зависимость коэффициента R от величины коэффициента связи k . На рис. 3, a приведены зависимости $R(k)$, построенные для различных значений φ_0 . Начиная уже с малых положительных значений k , величина R достигает максимального значения $R = 1$, что указывает на полную синхронизацию осцилляторов. Однако при дальнейшем увеличении k коэффициент R уменьшается до малых значений. То есть с ростом силы связи осцилляторов наблюдается разрушение режима синфазной синхронизации, а вместо него возникает режим несинфазных колебаний. Далее, с ростом k опять устанавливается режим полной (синфазной) синхронизации осцилляторов. Отметим, что при положительных значениях φ_0 характерный провал на графике $R(k)$ исчезает и $R = 1$ как при малых, так и при высоких значениях k .

Вид графиков $R(k)$ зависит не только от начальных условий φ_0 , но и от начальных условий $x_i(0)$ и $y_i(0)$. На рис. 3, b построены графики $R(k)$ для случаев $x_1(0) \neq x_2(0), y_1(0) \neq y_2(0)$ при $\varphi_0 = -0.5$. Так же, как и на графиках $R(\varphi_0)$ на рис. 2, a, ширина области малых значений R на графиках $R(k)$, соответствующей отсутствию полной синхронизации, увеличивается с ростом разницы между значениями $x_1(0)$ и $x_2(0)$, и $y_1(0)$ и $y_2(0)$ (рис. 3, b).

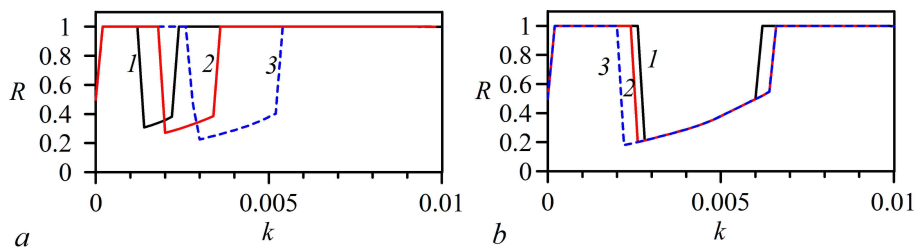


Рис. 3. a – Зависимости $R(k)$ при $\varphi_0 = -1.5$ (кривая 1), $\varphi_0 = -1$ (кривая 2), $\varphi_0 = -0.5$ (кривая 3) при $x_1(0) = x_2(0) = 0.2, y_1(0) = y_2(0) = 0.1$. b – Зависимости $R(k)$ при $\varphi_0 = -0.5$ и $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.4, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.3$ (кривая 1), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 1, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.5$ (кривая 2), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 2, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 1$ (кривая 3)

Fig. 3. a – Dependences $R(k)$ for $\varphi_0 = -1.5$ (curve 1), $\varphi_0 = -1$ (curve 2), $\varphi_0 = -0.5$ (curve 3) при $x_1(0) = x_2(0) = 0.2, y_1(0) = y_2(0) = 0.1$. b – Dependences $R(k)$ for $\varphi_0 = -0.5$ и $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.4, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.3$ (curve 1), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 1, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.5$ (curve 2), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 2, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 1$ (curve 3)

Качественно похожие результаты получаются в случае малой расстройки осцилляторов по параметру ε_i . Вид зависимостей $R(\varphi_0)$ и $R(k)$ при $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ похож на приведенные выше аналогичные графики при расстройке осцилляторов по параметру γ_i .

Рассмотрим отдельно случай $b = 0$, соответствующий диффузионной связи осцилляторов. На рис. 4, *a* приведена зависимость $R(k)$ при тех же значениях параметров, что на рис. 3, *a*, построенном для мемристивной связи. Величина R медленно монотонно растет с ростом k , не демонстрируя никаких провалов. На рис. 4, *b* показаны временные реализации $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при $k = 0.005$. Осцилляторы при этом не синхронизованы по частоте и демонстрируют несинхронный режим двухчастотных биений. Проекция колебаний связанной системы на плоскость (x_1, x_2) для этого случая приведена на рис. 4, *c*. При $k = 0.1$ колебания осцилляторов еще не полностью синхронизованы, $R = 0.99$ (рис. 4, *d*). В этом случае осцилляторы демонстрируют близкие к синфазным колебания, имеющие очень малый сдвиг по фазе. Проекция траектории системы на плоскость (x_1, x_2) принимает вид диагональной линии лишь при $k = 2$ (при этом $R = 1$), что соответствует полностью синхронным синфазным колебаниям. Таким образом, при диффузионной связи требуются более высокие значения коэффициента связи k для синхронизации неидентичных осцилляторов.

Кроме численных исследований модельной системы (1) мы провели ее экспериментальное исследование. Для этого, используя идеологию аналогового моделирования, мы построили аналоговые радиотехнические генераторы типа ФитцХью–Нагумо, динамика которых описывается первыми двумя уравнениями системы (1) при $k = 0$. Для осуществления связи между генераторами была использована система ввода-вывода многоканальных данных National Instruments. Блок-схема экспериментальной установки и ее подробное описание приведены в работе [21]. Однако, в отличие от [21], где была программным образом реализована простая диффузионная связь между радиотехническими генераторами, соответствующая связи генераторов через резистор, в данной работе впервые реализована в цифровом виде мемристивная связь аналоговых генераторов. Поскольку сигналы, отвечающие за связь генераторов, формируются в экспериментальной установке программным образом, в ней достаточно легко реализовать изменяющуюся во времени взаимную связь генераторов.

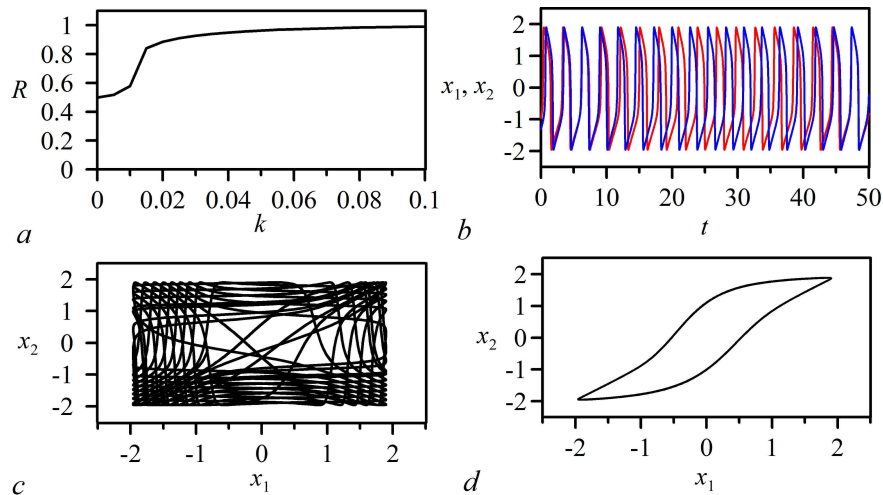


Рис. 4. Случай диффузионной связи ($b = 0$). *a* – Зависимость $R(k)$. *b* – Временные реализации $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при $k = 0.005$. *c* – Проекция колебаний в случае несинхронного режима при $k = 0.005$. *d* – Проекция колебаний в случае почти синфазного режима при $k = 0.1$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Case of diffusive coupling ($b = 0$). *a* – Dependence $R(k)$. *b* – Temporal realizations of $x_1(t)$ and $x_2(t)$ at $k = 0.005$. *c* – Projection of oscillations in the case of non-synchronous regime at $k = 0.005$. *d* – Projection of oscillations in the case of almost in-phase regime at $k = 0.1$ (color online)

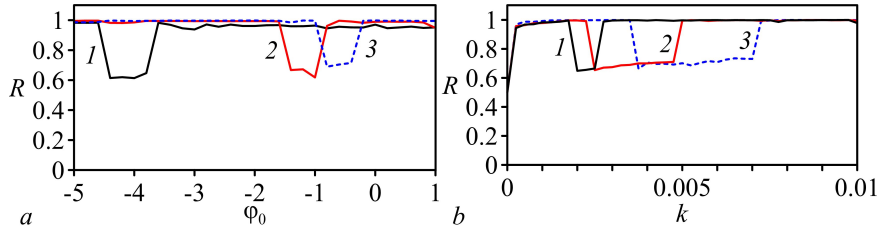


Рис. 5. *a* – Экспериментальные зависимости $R(\varphi_0)$ при $k = 0.0005$ (кривая 1), $k = 0.0025$ (кривая 2), $k = 0.005$ (кривая 3). *b* – Экспериментальные зависимости $R(k)$ при $\varphi_0 = -1.5$ (кривая 1), $\varphi_0 = -1$ (кривая 2), $\varphi_0 = -0.5$ (кривая 3)

Fig. 5. *a* – Experimental dependences $R(\varphi_0)$ for $k = 0.0005$ (curve 1), $k = 0.0025$ (curve 2), $k = 0.005$ (curve 3). *b* – Experimental dependences $R(k)$ for $\varphi_0 = -1.5$ (curve 1), $\varphi_0 = -1$ (curve 2), $\varphi_0 = -0.5$ (curve 3)

Экспериментально полученные зависимости $R(\varphi_0)$ приведены на рис. 5, *a* при $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1.05$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$, $\beta = 0.2$, $a = 1$, $b = 1$ для трех различных значений k при $x_1(0) = x_2(0)$, $y_1(0) = y_2(0)$. Вид этих зависимостей качественно согласуется с графиками $R(\varphi_0)$, построенными на рис. 1, *a* при численном исследовании системы (1). На рис. 5, *b* приведены экспериментальные зависимости $R(k)$, построенные для различных значений φ_0 , которые тоже достаточно хорошо согласуются с численными результатами, представленными на рис. 3, *a*.

2. Синхронизация колебаний в кольце мемриивно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо

Рассмотрим теперь ансамбль осцилляторов ФитцХью–Нагумо, связанных в кольцо мемри- стивной связью, описываемых модельными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \dot{x}_i(t) &= x_i(t) - x_i^3(t)/3 - y_i(t) + k[M(\varphi_{i-1}(t))(x_{i-1}(t) - x_i(t)) + M(\varphi_i(t))(x_{i+1}(t) - x_i(t))], \\ \dot{y}_i(t) &= \gamma_i x_i(t) - y_i(t) + \beta, \\ \dot{\varphi}_i(t) &= x_i(t) - x_{i+1}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где, в отличие от системы (1), $i = 1, \dots, N$, а граничные условия $x_{i+N}(t) = x_N(t)$, где N – количество осцилляторов. Вид функции $M(\varphi_i(t)) = a + b\varphi_i^2(t)$ такой же, как в (1), с такими же значениями параметров $a = 1$, $b = 1$. В общем случае все осцилляторы ансамбля являются неидентичными.

В качестве меры синхронизации осцилляторов использовался коэффициент R , рассчитываемый по следующим формулам [30]:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \\ R &= \frac{\langle x_s^2 \rangle - \langle x_s \rangle^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Так же, как и в случае двух осцилляторов (формула (3)), при полной синхронизации осцилляторов коэффициент R максимален и равен 1, а в случаях несинхронных или несинфазных колебаний осцилляторов R принимает малые положительные значения [30]. Для неидентичных осцилляторов при $k = 0$ коэффициент $R = 1/N$ и стремится к нулю при больших N . Для расчета R мы проводили усреднение на интервале времени $T_2 = 1000$.

Пусть осцилляторы расстроены по параметру γ_i , значения которого заданы случайным образом из интервала $[1, 1.05]$ и соответствуют периодическим автоколебаниям несвязанных осцилляторов. Остальные параметры осцилляторов одинаковы: $\varepsilon_i = 0.05$ для всех i , $\beta = 0.2$.

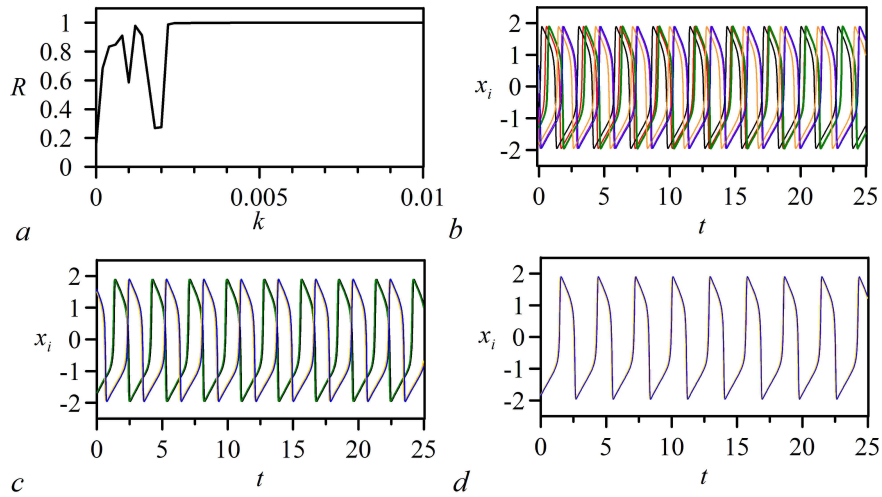


Рис. 6. Зависимость $R(k)$ при $\varphi_0 = -0.5$ и $x_i(0) = 0.2$, $y_i(0) = 0.1$ для $N = 6$ (a) и временные реализации $x_i(t)$ при $k = 0.0001$ (b), $k = 0.002$ (c) и $k = 0.003$ (d) (цвет онлайн)

Fig. 6. Dependence $R(k)$ at $\varphi_0 = -0.5$ and $x_i(0) = 0.2$, $y_i(0) = 0.1$ for $N = 6$ (a) and temporal realizations of $x_i(t)$ at $k = 0.0001$ (b), $k = 0.002$ (c) and $k = 0.003$ (d) (color online)

На рис. 6, a построена зависимость $R(k)$ для случая $N = 6$ при $\varphi_0 = -0.5$ и $x_i(0) = 0.2$, $y_i(0) = 0.1$ для всех i . Как и в случае двух осцилляторов (см. рис. 3), зависимость $R(k)$ на рис. 6 имеет характерный интервал значений k , при которых коэффициент R относительно мал. Однако в отличие от рис. 3, хорошо видна область малых значений k , при которых R относительно мал и еще не достиг значения $R = 1$, соответствующего полной синхронизации осцилляторов в ансамбле. Эта область малых k соответствует несинхронным колебаниям осцилляторов, как в случае, изображенном на рис. 4, b. Временные реализации $x_i(t)$ несинхронных осцилляторов приведены на рис. 6, b при $k = 0.0001$.

На рис. 6, c приведены временные реализации $x_i(t)$ при $k = 0.002$ (при этом $R = 0.27$). Осцилляторы в этом случае синхронизованы по частоте, но демонстрируют несинфазные колебания. В кольце существуют два кластера, внутри которых осцилляторы колеблются почти синфазно, а между кластерами имеется фазовый сдвиг. При $k = 0.003$ коэффициент $R = 1$ и все осцилляторы полностью синхронизованы. Их временные реализации при этом практически совпадают (рис. 6, d).

Когда количество неидентичных осцилляторов в кольце становится достаточно большим, вид зависимости $R(k)$ меняется. Например, при $N = 10$ она становится сильно изрезанной в области малых значений k , предшествующих достижению коэффициентом R максимального значения (рис. 7, a). Этот рисунок построен при тех же параметрах и начальных состояниях $x_i(0)$

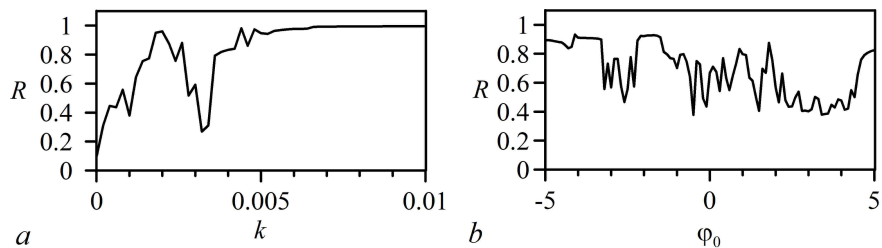


Рис. 7. a – Зависимость $R(k)$ при $\varphi_0 = -0.5$ и $x_i(0) = 0.2$, $y_i(0) = 0.1$ для $N = 10$. b – Зависимость $R(\varphi_0)$ при $k = 0.001$ для $N = 10$

Fig. 7. a – Dependence $R(k)$ at $\varphi_0 = -0.5$ and $x_i(0) = 0.2$, $y_i(0) = 0.1$ for $N = 10$. b – Dependence $R(\varphi_0)$ at $k = 0.001$ for $N = 10$

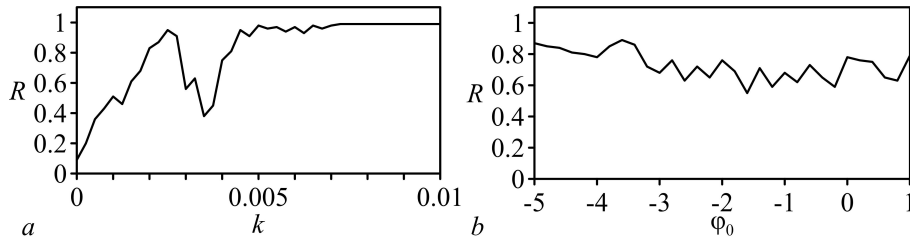


Рис. 8. *a* – Экспериментальная зависимость $R(k)$ при $\varphi_0 = -0.5$ для $N = 10$. *b* – Экспериментальная зависимость $R(\varphi_0)$ при $k = 0.001$ для $N = 10$

Fig. 8. Experimental dependence $R(k)$ at $\varphi_0 = -0.5$ for $N = 10$. *b* – Experimental dependence $R(\varphi_0)$ at $k = 0.001$ for $N = 10$

и $y_i(0)$, что и рис. 6, *a*. Изрезанный характер зависимости $R(k)$ объясняется тем, что для полной синхронизации большого числа неидентичных осцилляторов требуются более высокие значения коэффициента связи, а при малых k может наблюдаться кластерная синхронизация осцилляторов.

На рис. 7, *b* построена зависимость $R(\varphi_0)$ при $k = 0.001$ для кольца из 10 осцилляторов. По сравнению со случаем двух осцилляторов (см. рис. 1, *a*) зависимость $R(\varphi_0)$ на рис. 7, *b* имеет сильно изрезанный вид, а R всюду меньше 1, что объясняется отсутствием полной синхронизации осцилляторов при любых значениях φ_0 для выбранного значения силы связи k .

Мы рассмотрели также случаи, когда начальные состояния переменных $x_i(t)$ и $y_i(t)$ осцилляторов в цепочке отличаются. Начальные условия для $x_i(0)$ и $y_i(0)$ задавались случайным образом в диапазонах $[0.2, 2]$ и $[0.1, 1]$, соответственно. При этом вид зависимостей $R(k)$ и $R(\varphi_0)$ несколько изменился, однако каких-либо качественных отличий от зависимостей, представленных на рис. 7, не наблюдалось.

Экспериментальные зависимости $R(k)$ и $R(\varphi_0)$ представлены на рис. 8. Они качественно похожи на аналогичные зависимости на рис. 7, полученные при численном моделировании.

Заключение

Нами проведено численное и экспериментальное исследование синхронизации в кольце мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо. Показано, что при мемристивной связи осцилляторов ФитцХью–Нагумо их синхронизация зависит не только от величины коэффициента связи, но и от начальных состояний как самих осцилляторов, так и переменных, отвечающих за мемристивную связь. Исследованы особенности синхронизации в зависимости от числа осцилляторов в кольце. Установлено, что зависимость синхронизации от начальных состояний осцилляторов более выражена в кольце с малым числом элементов, при этом, чем больше отличаются начальные состояния разных осцилляторов, тем сложнее добиться полной синхронизации всех осцилляторов ансамбля. Для полной синхронизации неидентичных осцилляторов в кольце с большим числом элементов требуются более высокие значения коэффициента связи, чем для кольца из малого числа элементов. Показано, что, в отличие от случая диффузионной связи осцилляторов, при мемристивной связи с ростом силы связи осцилляторов может наблюдаться разрушение режима полностью синхронных синфазных колебаний, вместо которого возникает режим несинфазных колебаний. Результаты, полученные в радиофизическом эксперименте для кольца из аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо, связанных реализованной в цифровом виде мемристивной связью, хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

Задача управления синхронизацией в ансамблях нейронных осцилляторов актуальна для многих приложений. Причем в одних случаях синхронизация играет положительную роль, а в других случаях является нежелательной. Например, в робототехнике при разработке центральных генераторов ритма важно обеспечить синфазную синхронизацию элементов ансамбля в широкой

области управляющих параметров, а чрезмерная синхронизация нейронов головного мозга может вызывать такие неврологические заболевания, как эпилепсия, шизофрения и болезнь Паркинсона. Поэтому большой интерес вызывает как задача синфазной синхронизации колебаний в ансамбле связанных нейроподобных осцилляторов, так и задача разрушения режима синхронизации.

Решению этих задач может помочь использование мемристивной связи осцилляторов. Полная (синфазная) синхронизация в ансамбле мемристивно связанных осцилляторов наступает при меньших значениях постоянного коэффициента связи k , чем в ансамбле диффузионно связанных осцилляторов. То есть с помощью мемристивной связи легче синхронизовать нейроподобные осцилляторы. С другой стороны, не меняя силу связи k , можно добиться разрушения синфазных колебаний осцилляторов, изменив начальные условия динамических переменных.

Список литературы

1. Yamazaki K., Vo-Ho V.-K., Bulsara D., Le N. Spiking neural networks and their applications: A review // *Brain Sciences*. 2022. Vol. 12, no. 7. P. 863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.
2. Quiroga R. Q., Panzeri S. Principles of Neural Coding. Boca Raton: CRC Press, 2013. 664 p.
3. Kasabov N. Evolving Connectionist Systems: The Knowledge Engineering Approach. London: Springer, 2007. 451 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-347-5.
4. Lobov S., Mironov V., Kastalskiy I., Kazantsev V. A spiking neural network in sEMG feature extraction // *Sensors*. 2015. Vol. 15, no. 11. P. 27894–27904. DOI: 10.3390/s151127894.
5. Lobov S.A., Chernyshov A.V., Krilova N.P., Shamshin M.O., Kazantsev V.B. Competitive learning in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier // *Sensors*. 2000. Vol. 20, no. 2. P. 500. DOI: 10.3390/s20020500.
6. Virgilio G. C. D., Sossa A. J. H., Antelis J. M., Falcón L. E. Spiking Neural Networks applied to the classification of motor tasks in EEG signals // *Neural Netw.* 2020. Vol. 122. P. 130–143. DOI: 10.1016/j.neunet.2019.09.037.
7. Andreev A. V., Ivanchenko M. V., Pisarchik A. N., Hramov A. E. Stimulus classification using chimera-like states in a spiking neural network // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. Vol. 139. P. 110061. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110061.
8. Навроцкая Е. В., Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Оценка параметров импульсного воздействия с помощью сети нейроподобных осцилляторов // *Известия вузов. ПНД*. 2022. Т. 30, № 4. С. 495–512. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512.
9. Hossain M. S., Muhammad G. Emotion recognition using deep learning approach from audio–visual emotional big data // *Information Fusion*. 2019. Vol. 49. P. 69–78. DOI: 10.1016/j.inffus.2018.09.008.
10. Yu D., Deng L. Automatic Speech Recognition: A Deep Learning Approach. London: Springer, 2015. 321 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5779-3.
11. Bing Z., Meschede C., Röhrbein F., Huang K., Knoll A. C. A survey of robotics control based on learning-inspired spiking neural networks // *Frontiers in Neurorobotics*. 2018. Vol. 12. P. 35. DOI: 10.3389/fnbot.2018.00035.
12. Wang X., Hou Z.-G., Lv F., Tan M., Wang Y. Mobile robots' modular navigation controller using spiking neural networks // *Neurocomputing*. 2014. Vol. 134. P. 230–238. DOI: 10.1016/j.neucom.2013.07.055.
13. Chou T.-S., Bucci L. D., Krichmar J. L. Learning touch preferences with a tactile robot using dopamine modulated STDP in a model of insular cortex // *Frontiers in Neurorobotics*. 2015. Vol. 9. P. 6. DOI: 10.3389/fnbot.2015.00006.
14. Lobov S. A., Mikhaylov A. N., Shamshin M., Makarov V. A., Kazantsev V. B. Spatial properties of STDP in a self-learning spiking neural network enable controlling a mobile robot // *Frontiers in Neuroscience*. 2020. Vol. 14. P. 88. DOI: 10.3389/fnins.2020.00088.
15. Yi Z., Lian J., Liu Q., Zhu H., Liang D., Liu J. Learning rules in spiking neural networks: A survey // *Neurocomputing*. 2023. Vol. 531. P. 163–179. DOI: 10.1016/j.neucom.2023.02.026.

16. *Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щапин Д. С., Некоркин В. И.* Нелинейные динамические модели нейронов: обзор // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
17. *Shepelev I. A., Slepnev A. V., Vadivasova T. E.* Different synchronization characteristics of distinct types of traveling waves in a model of active medium with periodic boundary conditions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. Vol. 38. P. 206–217. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.02.020.
18. *Shepelev I. A., Vadivasova T. E., Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S.* New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction // Physics Letters A. 2017. Vol. 381, no. 16. P. 1398–1404. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.02.034.
19. *Shepelev I. A., Shamshin D. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E.* Bifurcations of spatiotemporal structures in a medium of FitzHugh–Nagumo neurons with diffusive coupling // Chaos, Solitons & Fractals. 2017. Vol. 104. P. 153–160. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.08.009.
20. *Plotnikov S. A., Fradkov A. L.* On synchronization in heterogeneous FitzHugh–Nagumo networks // Chaos, Solitons & Fractals. 2019. Vol. 121. P. 85–91. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.02.006.
21. *Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Hramov A. E.* Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators // Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 98, no. 1. P. 735–748. DOI: 10.1007/s11071-019-05224-x.
22. *Plotnikov S. A., Lehnert J., Fradkov A. L., Schöll E.* Adaptive control of synchronization in delay-coupled heterogeneous networks of FitzHugh–Nagumo nodes // Int. J. Bifurc. Chaos. 2016. Vol. 26, no. 4. P. 1650058. DOI: 10.1142/S0218127416500589.
23. *Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Адаптивное управление несинхронными колебаниями в сети идентичных электронных нейроподобных генераторов // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48, № 19. С. 43–46. DOI: 10.21883/PJTF.2022.19.53596.19328.
24. *Корнеев И. А., Слепнев А. В., Семенов В. В., Вадивасова Т. Е.* Волновые процессы в кольце мемристивно связанных автогенераторов // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 3. С. 324–340. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-324-340.
25. *Wang C., Lv M., Alsaedi A., Ma J.* Synchronization stability and pattern selection in a memristive neuronal network // Chaos. 2017. Vol. 27, no. 11. P. 113108. DOI: 10.1063/1.5004234.
26. *Xu F., Zhang J., Jin M., Huang S., Fang T.* Chimera states and synchronization behavior in multilayer memristive neural networks // Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 94, no. 2. P. 775–783. DOI: 10.1007/s11071-018-4393-9.
27. *Usha K., Subha P. A.* Collective dynamics and energy aspects of star-coupled Hindmarsh–Rose neuron model with electrical, chemical and field couplings // Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 96, no. 3. P. 2115–2124. DOI: 10.1007/s11071-019-04909-7.
28. *Bao H., Zhang Y., Liu W., Bao B.* Memristor synapse-coupled memristive neuron network: synchronization transition and occurrence of chimera // Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 100, no. 1. P. 937–950. DOI: 10.1007/s11071-020-05529-2.
29. *Korneev I. A., Semenov V. V., Slepnev A. V., Vadivasova T. E.* The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh–Nagumo oscillators // Chaos, Solitons & Fractals. 2021. Vol. 147. P. 110923. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110923.
30. *Xu Y., Jia Y., Ma J., Alsaedi A., Ahmad B.* Synchronization between neurons coupled by memristor // Chaos, Solitons & Fractals. 2017. Vol. 104. P. 435–442. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.09.002.
31. *Герасимова С. А., Михайлов А. Н., Белов А. И., Королев Д. С., Горшков О. Н., Казанцев В. Б.* Имитация синаптической связи нейроноподобных генераторов с помощью мемристивного устройства // ЖТФ. 2017. Т. 87, № 8. С. 1248–1254. DOI: 10.21883/JTF.2017.08.44735.2033.
32. *Chua L.* Memristor-The missing circuit element // IEEE Transactions on Circuit Theory. 1971. Vol. 18, no. 5. P. 507–519. DOI: 10.1109/TCT.1971.1083337.

33. *Chua L. O., Kang S. M.* Memristive devices and systems // Proceedings of the IEEE. 1976. Vol. 64, no. 2. P. 209–223. DOI: 10.1109/PROC.1976.10092.
34. *Strukov D. B., Snider G. S., Stewart D. R., Williams R. S.* The missing memristor found // Nature. 2008. Vol. 453, no. 7191. P. 80–83. DOI: 10.1038/nature06932.
35. *Patterson G. A., Fierens P. I., García A. A., Grosz D. F.* Numerical and experimental study of stochastic resistive switching // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 87, no. 1. P. 012128. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.012128.

References

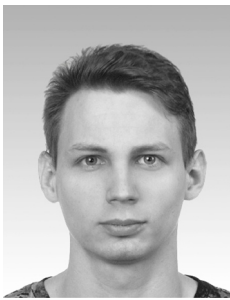
1. Yamazaki K, Vo-Ho V-K, Bulsara D, Le N. Spiking neural networks and their applications: A review. *Brain Sciences*. 2022;12(7):863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.
2. Quiroga RQ, Panzeri S. Principles of Neural Coding. Boca Raton: CRC Press; 2013. 664 p.
3. Kasabov N. Evolving Connectionist Systems: The Knowledge Engineering Approach. London: Springer; 2007. 451 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-347-5.
4. Lobov S, Mironov V, Kastalskiy I, Kazantsev V. A spiking neural network in sEMG feature extraction. *Sensors*. 2015;15(11):27894–27904. DOI: 10.3390/s151127894.
5. *Lobov SA, Chernyshov AV, Krilova NP, Shamshin MO, Kazantsev VB.* Competitive learning in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier // *Sensors*. 2000;20(2):500. DOI: 10.3390/s20020500.
6. Virgilio GCD, Sossa AJH, Antelis JM, Falcón LE. Spiking Neural Networks applied to the classification of motor tasks in EEG signals. *Neural Netw.* 2020;122:130–143. DOI: 10.1016/j.neunet.2019.09.037.
7. Andreev AV, Ivanchenko MV, Pisarchik AN, Hramov AE. Stimulus classification using chimera-like states in a spiking neural network. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;139:110061. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110061.
8. Navrotskaya EV, Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Estimation of impulse action parameters using a network of neuronlike oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(4):495–512. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512.
9. Hossain MS, Muhammad G. Emotion recognition using deep learning approach from audio–visual emotional big data. *Information Fusion*. 2019;49:69–78. DOI: 10.1016/j.inffus.2018.09.008.
10. Yu D, Deng L. Automatic Speech Recognition: A Deep Learning Approach. London: Springer; 2015. 321 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5779-3.
11. Bing Z, Meschede C, Röhrbein F, Huang K, Knoll AC. A survey of robotics control based on learning-inspired spiking neural networks. *Frontiers in Neurorobotics*. 2018;12:35. DOI: 10.3389/fnbot.2018.00035.
12. Wang X, Hou Z-G, Lv F, Tan M, Wang Y. Mobile robots' modular navigation controller using spiking neural networks. *Neurocomputing*. 2014;134:230–238. DOI: 10.1016/j.neucom.2013.07.055.
13. Chou T-S, Bucci LD, Krichmar JL. Learning touch preferences with a tactile robot using dopamine modulated STDP in a model of insular cortex. *Frontiers in Neurorobotics*. 2015;9:6. DOI: 10.3389/fnbot.2015.00006.
14. Lobov SA, Mikhaylov AN, Shamshin M, Makarov VA, Kazantsev VB. Spatial properties of STDP in a self-learning spiking neural network enable controlling a mobile robot. *Frontiers in Neuroscience*. 2020;14:88. DOI: 10.3389/fnins.2020.00088.
15. Yi Z, Lian J, Liu Q, Zhu H, Liang D, Liu J. Learning rules in spiking neural networks: A survey. *Neurocomputing*. 2023;531:163–179. DOI: 10.1016/j.neucom.2023.02.026.
16. Dmitrichev AS, Kasatkin DV, Klinshov VV, Kirillov SY, Maslennikov OV, Shchapin DS, Nekorkin VI. Nonlinear dynamical models of neurons: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(4):5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
17. Shepelev IA, Slepnev AV, Vadivasova TE. Different synchronization characteristics of distinct types of traveling waves in a model of active medium with periodic boundary conditions.

- Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016;38:206–217. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.02.020.
18. Shepelev IA, Vadivasova TE, Bukh AV, Strelkova GI, Anishchenko VS. New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction. *Physics Letters A*. 2017;381(16):1398–1404. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.02.034.
 19. Shepelev IA, Shamshin DV, Strelkova GI, Vadivasova TE. Bifurcations of spatiotemporal structures in a medium of FitzHugh–Nagumo neurons with diffusive coupling. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2017;104:153–160. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.08.009.
 20. Plotnikov SA, Fradkov AL. On synchronization in heterogeneous FitzHugh–Nagumo networks. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2019;121:85–91. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.02.006.
 21. Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Hramov AE. Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators. *Nonlinear Dynamics*. 2019;98(1):735–748. DOI: 10.1007/s11071-019-05224-x.
 22. Plotnikov SA, Lehnert J, Fradkov AL, Schöll E. Adaptive control of synchronization in delay-coupled heterogeneous networks of FitzHugh–Nagumo nodes. *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2016;26(4):1650058. DOI: 10.1142/S0218127416500589.
 23. Kurbako AV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Adaptive control of non-synchronous oscillations in a network of identical electronic neuron-like generators. *Tech. Phys. Lett.* 2022;48(10):38–41. DOI: 10.21883/TPL.2022.10.54796.19328.
 24. Korneev IA, Slepnev AV, Semenov VV, Vadivasova TE. Wave processes in a ring of memristively coupled self-excited oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(3):324–340 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-324-340.
 25. Wang C, Lv M, Alsaedi A, Ma J. Synchronization stability and pattern selection in a memristive neuronal network. *Chaos*. 2017;27(11):113108. DOI: 10.1063/1.5004234.
 26. Xu F, Zhang J, Jin M, Huang S, Fang T. Chimera states and synchronization behavior in multilayer memristive neural networks. *Nonlinear Dynamics*. 2018;94(2):775–783. DOI: 10.1007/s11071-018-4393-9.
 27. Usha K, Subha PA. Collective dynamics and energy aspects of star-coupled Hindmarsh–Rose neuron model with electrical, chemical and field couplings. *Nonlinear Dynamics*. 2019;96(3):2115–2124. DOI: 10.1007/s11071-019-04909-7.
 28. Bao H, Zhang Y, Liu W, Bao B. Memristor synapse-coupled memristive neuron network: synchronization transition and occurrence of chimera. *Nonlinear Dynamics*. 2020;100(1):937–950. DOI: 10.1007/s11071-020-05529-2.
 29. Korneev IA, Semenov VV, Slepnev AV, Vadivasova TE. The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh–Nagumo oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021;147:110923. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110923.
 30. Xu Y, Jia Y, Ma J, Alsaedi A, Ahmad B. Synchronization between neurons coupled by memristor. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2017;104:435–442. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.09.002.
 31. Gerasimova SA, Mikhaylov AN, Belov AI, Korolev DS, Gorshkov ON, Kazantsev VB. Simulation of synaptic coupling of neuron-like generators via a memristive device. *Tech. Phys.* 2017;62(8):1259–1265. DOI: 10.1134/S1063784217080102.
 32. Chua L. Memristor-The missing circuit element. *IEEE Transactions on Circuit Theory*. 1971;18(5):507–519. DOI: 10.1109/TCT.1971.1083337.
 33. Chua LO, Kang SM. Memristive devices and systems. *Proceedings of the IEEE*. 1976;64(2):209–223. DOI: 10.1109/PROC.1976.10092.
 34. Strukov DB, Snider GS, Stewart DR, Williams RS. The missing memristor found. *Nature*. 2008;453(7191):80–83. DOI: 10.1038/nature06932.
 35. Patterson GA, Fierens PI, García AA, Grosz DF. Numerical and experimental study of stochastic resistive switching. *Phys. Rev. E*. 2013;87(1):012128. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.012128.



Навроцкая Елена Владимировна — родилась в Алма-Ате (1987), республика Казахстан. Окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2011) по направлению «Биомедицинская инженерия». Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2016, СГУ). Работает в Саратовском университете с 2008 года, в настоящее время — в должности доцента кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Автор более 15 статей в рецензируемых журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: sidakev@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1649-440X
AuthorID (eLibrary.Ru): 542544



Курбако Александр Васильевич — родился в Знаменске (1997). Окончил бакалавриат (2019) и магистратуру (2021) Саратовского государственного университета по направлению «Биотехнические системы и технологии». Обучается в аспирантуре СГУ имени Н. Г. Чернышевского. Работает ассистентом на кафедре динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ и младшим научным сотрудником СФ ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов — анализ временных рядов.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН
E-mail: kurbako.sasha@mail.ru
ORCID: 0000-0002-3479-4609
AuthorID (eLibrary.Ru): 1055278



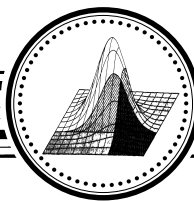
Пономаренко Владимир Иванович — родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (СГУ, 1982). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов — статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1579-6465
AuthorID (eLibrary.Ru): 39986



Прохоров Михаил Дмитриевич — родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-4069-9410
AuthorID (eLibrary.Ru): 39985



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Научная статья
УДК 537.87

DOI: 10.18500/0869-6632-003081
EDN: ULYAJE

Влияние нелинейности на брэгговские резонансы в связанных магннных кристаллах

Н. Д. Лобанов[✉], О. В. Матвеев, М. А. Морозова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉nl_17@mail.ru, olvmatveev@gmail.com, mamorozovama@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.06.2023, принята к публикации 22.09.2023,

опубликована онлайн 20.12.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. Цель. Целью данной работы является исследование влияния нелинейности на механизм формирования и характеристики брэгговских резонансов в вертикально связанных магннных кристаллах с периодической системой канавок на поверхности. В работе построена волновая модель, получено нелинейное дисперсионное соотношение для поверхностных магнннстатических волн в такой структуре; проведено численное исследование характеристик каждого из брэгговских резонансов при увеличении амплитуды сигнала. Методы. Используются теоретические методы исследования спин-волновых возбуждений в широком классе структур с ферромагнитными слоями. В частности, для построения теоретических моделей использованы: метод связанных волн, длинноволновое приближение. Результаты. В работе представлены результаты теоретического исследования влияния магнннн нелинейности на брэгговские резонансы в слоистой структуре на основе магнннных кристаллов с периодическими канавками на поверхности, разделенных диэлектрическим слоем. Выявлен механизм формирования запрещенных зон на частотах брэгговских резонансов в присутствии нелинейности среды. Показано, что при увеличении амплитуды сигнала частотный интервал между запрещенными зонами сокращается. При увеличении разницы намагннченностей насыщения магнннных кристаллов эффект нелинейного сближения более ярко выражен. Заключение. Выявленные особенности расширяют возможности слоистой структуры на основе магнннных кристаллов по частотно-селективной обработке сигналов за счёт управления частотной избирательностью как с помощью статических параметров связи, периодичности и намагннченности насыщения слоев, так и динамически, с помощью изменения амплитуды волны.

Ключевые слова: ферромагнитная пленка, магнннстатическая волна, магнннный кристалл, брэгговский резонанс, запрещенная зона.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-29-00759).

Для цитирования: Лобанов Н. Д., Матвеев О. В., Морозова М. А. Влияние нелинейности на брэгговские резонансы в связанных магнннных кристаллах // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 111–120. DOI: 10.18500/0869-6632-003081. EDN: ULYAJE

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Influence of nonlinearity on the Bragg resonances in coupled magnon crystals

N. D. Lobanov✉, O. V. Matveev, M. A. Morozova

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉nl_17@mail.ru, olvmatveev@gmail.com, mamorozovama@yandex.ru

Received 23.06.2023, accepted 22.09.2023, available online 20.12.2023, published 31.01.2024

Abstract. *Purpose.* The purpose of this paper is to investigate the effect of nonlinearity on formation mechanism and characteristics of Bragg resonances in vertically coupled magnon crystals with periodic groove system on the surface. In this paper a wave model is constructed, a nonlinear dispersion relation for surface magnetostatic waves in such a structure is obtained and the characteristics of each of the Bragg resonances are numerically studied with increasing input signal power. *Methods.* Theoretical methods of investigation of spin-wave excitations in a wide class of structures with ferromagnetic layers have been used. In particular, the following theoretical models have been used: coupled wave method, long-wave approximation. *Results.* This paper presents the results of a theoretical investigation of the effect of magnetic nonlinearity on Bragg resonances in a sandwich structure based on magnon crystals with periodic grooves on the surface separated by a dielectric layer. A mechanism for the formation of band gaps at the Bragg resonance frequencies in the presence of media nonlinearity has been revealed. It is shown that with increasing input power the frequency interval between the band gaps decreases. With increasing magnetization difference of magnon crystals, the effect of nonlinear convergence is more pronounced. *Conclusion.* The identified features extend the capabilities of sandwich structures based on magnon crystals for frequency selective signal processing by controlling the frequency selectivity, both via static coupling parameters, periodicity and layer magnetisation, and dynamically via the input signal power.

Keywords: ferromagnetic film, magnetostatic wave, magnon crystal, Bragg resonance, band gap.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation (grant № 23-29-00759).

For citation: Lobanov ND, Matveev OV, Morozova MA. Influence of nonlinearity on the Bragg resonances in coupled magnon crystals. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(1):111–120. DOI: 10.18500/0869-6632-003081

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В последние годы магноника привлекает широкое внимание исследователей в связи с потенциальными возможностями использования в новом поколении устройств обработки информации, в которых информация будет передаваться магнонами или спиновыми волнами [1–3]. Одной из основных структур, предлагаемых для создания магнонной компонентной базы, являются магнонные кристаллы (МК) — периодические структуры, сформированные на основе магнитных материалов [4, 5]. Использование магнонных кристаллов создает условия для формирования брэгговских резонансов в спектре магнитостатических волн для волновых чисел $k_B = \pi/L$ (L — период структуры), удовлетворяющих условию Брэгга [6]. На частотах брэгговских резонансов формируются запрещенные зоны — полосы непропускания в спектре магнитостатических волн. В этом случае важной является задача управления характеристиками резонансов (резонансной частотой, добротностью, числом резонансов в каждой зоне Бриллюэна).

Как известно, ферромагнитная среда является средой с керровским типом кубической нелинейности [7–9]. Нелинейные процессы в ферромагнитных структурах приводят к ряду новых эффектов при распространении магнитостатических волн, которые открывают широкие возможности по использованию таких структур для функциональной обработки сигналов в зависимости от входной мощности [10, 11]. Показано, что одним из основных нелинейных эффектов в МК в области четырёхмагнонных процессов распада является нелинейный сдвиг запрещенных зон [12]. В частности, в МК на основе плёнок железиттриевого граната (ЖИГ) при увеличении мощности

входного сигнала до 80 мВт экспериментально наблюдался нелинейных сдвиг запрещенных зон на 5–15 МГц в низкочастотную область. Данная особенность позволяет рассматривать волноведущую структуру на основе МК в качестве нелинейного фазовращателя и усилителя отношения сигнал/шум.

Необходимость объединения отдельных магнонных элементов обработки сигналов в магнонные сети привлекает внимание к созданию связанных структур на основе ферромагнитных плёнок. Для этой цели предлагались структуры на основе МК, расположенных в планарной геометрии (латерально связанные МК) [13–16] и в вертикальной геометрии (вертикально связанные МК) [11, 17–19]. В частности, была продемонстрирована возможность переключения между выходными портами связанной структуры при увеличении входной мощности для частоты сигнала, совпадающей с частотой брэгговского резонанса [11]. Данная особенность позволяет рассматривать такие структуры для реализации функций нелинейного делителя мощности с четырьмя выходными портами.

Однако было показано, что в линейном случае в структуре связанных МК имеет место формирование нескольких брэгговских резонансов в первой зоне Бриллюэна [20, 21]. Данная особенность обусловлена взаимодействием на частотах фазового синхронизма симметричных и антисимметричных прямых и отраженных нормальных волн связанной периодической структуры. При этом характеристики и число резонансов зависят от типа несимметричности связанной структуры [20, 22]. Следует ожидать, что влияние нелинейности ферромагнитной среды на каждый из резонансов будет различно. Целью данной работы является исследование влияния нелинейности на механизм формирования и характеристики брэгговских резонансов в вертикально связанных МК с периодической системой канавок на поверхности. В работе построена волновая модель, получено нелинейное дисперсионное соотношение для поверхностных магнитостатических волн в такой структуре; проведено численное исследование характеристик каждого из брэгговских резонансов при увеличении амплитуды входного сигнала.

1. Модель и основные соотношения

Рассмотрим периодическую структуру, схема которой приведена на рис. 1, а, в виде двух связанных одномерных кристаллов МК-2 и МК-1, разделенных диэлектрическим слоем толщиной D . МК-1 и МК-2 представляют собой ферромагнитные пленки толщиной a с намагниченностью насыщения $M_{01,02}$, соответственно. На одну из поверхностей МК-1 и МК-2 нанесена периодическая структура в виде канавок глубиной Δ и шириной c , с периодом L . Предполагается, что в направлении осей x и y структура бесконечна. Связь между МК-1 и МК-2 осуществляется через высокочастотные магнитные поля. Система помещена во внешнее магнитное поле H_0 , направленное вдоль оси x , при этом в МК-1 и МК-2 вдоль оси y распространяются поверхностные магнитостатические волны (ПМСВ).

Дисперсионное соотношение для ПМСВ, распространяющихся в исследуемой структуре, имеет вид [19, 22]:

$$\begin{vmatrix} D_1^+ & \beta_1 k_0 K & \theta_1^- & \theta_1^- K \\ \beta_2 k_0 K & D_2^+ & \theta_2^- K & \theta_2^- \\ \theta_1^+ & \theta_1^+ K & D_1^- & \beta_1 k_{-1} K \\ \theta_2^+ K & \theta_2^+ & \beta_2 k_{-1} K & D_2^- \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

где $D_{1,2}^+ = -f^2 + f_{\perp 1,2}^2 + \beta_{1,2} k_0$, $D_{1,2}^- = -f^2 + f_{\perp 1,2}^2 + \beta_{1,2} k_{-1}^-$, $\beta_{1,2} = \frac{f_{M_{1,2}}^2 d_0}{2}$, $\theta_{1,2}^+ = \beta_{1,2} \frac{\delta d}{2} k_0$, $\theta_{1,2}^- = \beta_{1,2} \frac{\delta d}{2} k_{-1}$, $\delta d = \frac{2\Delta}{\pi d_0} \sin\left(\frac{\pi(L-c)}{L}\right)$, $d_0 = a + \frac{\Delta(L-c)}{L}$, $f_{M_{1,2}} = 4\pi\gamma M_{01,02}$,

$f_H = \gamma H_0$, $f_{\perp 1,2} = \sqrt{f_H(f_H + f_{M_{1,2}})}$, γ – гиромагнитное соотношение, $K = \exp[-kD]$, k_0 – постоянная распространения «0» гармоники, k_{-1} относится к «-1» гармонике, k_0 и k_{-1} связаны условием Брэгга [6]: $k_{-1} = -k_0 + 2k_B$, где $k_B = \pi/L$ – брэггское волновое число.

При больших уровнях входной мощности ферромагнитная плёнка представляет собой нелинейную среду [7, 8]. Основную роль в нелинейных процессах в ферромагнетиках играет увеличение угла прецессии магнитных моментов атомов при увеличении мощности сигнала, что приводит к изменению продольной (сонаправленной с внешним магнитным полем) компоненты магнитного момента. Считаем, что нелинейность каждой плёнки зависит только от намагниченности насыщения этой плёнки, а величина намагниченности насыщения определяется полями как первой, так и второй плёнки. Для получения нелинейного закона дисперсии в одночастотном режиме, при отсутствии параметрических процессов, нелинейность ферромагнитной среды вводилась в линейный закон дисперсии (1) в виде [7, 8]:

$$f_{M_{1,2}} = 4\pi\gamma M_{01,2} \left(1 - q_{1,2}|u|^2\right), \quad (2)$$

где u – амплитуда входного сигнала, $q_{1,2} = 1/2 \left(1 + f_H^2/f_{\perp 1,2}^2\right)$.

2. Результаты численного исследования

Для исследования влияния нелинейности на брэггские резонансы использовалось дисперсионное соотношение (1), с учетом соотношения (2).

В линейном случае (при $u = 10^{-5}$) в связанных однородных пленках ($\delta d = 0$ и $K \neq 0$), как известно [17, 23, 24], дисперсионная кривая для ПМСВ расщепляется на две нормальные моды – симметричную и антисимметричную. Дисперсионные характеристики для этих волн, в отсутствие связи между ними, показаны черными сплошными линиями на рис. 1, *b*: 1 – для симметричной прямой волны; 2 – для антисимметричной прямой волны; 1' – для симметричной волны, отраженной от периодических канавок; 2' – для антисимметричной отраженной волны. При $\delta d \neq 0$

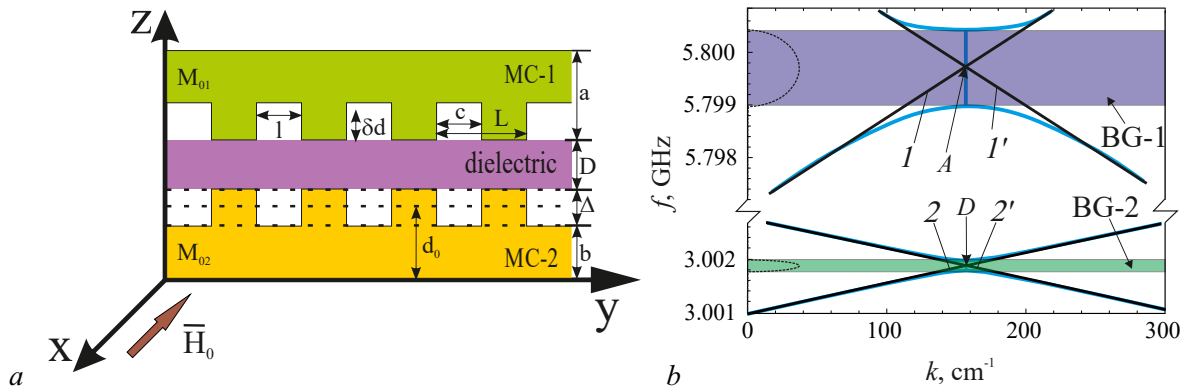


Рис. 1. *a* – Схема слоистой структуры в виде МК-1 и МК-2, разделённых диэлектрическим слоем. *b* – Дисперсионные характеристики ПМСВ в линейном случае ($u = 10^{-5}$) при $\delta d \neq 0$ (сплошные синие линии) и $\delta d = 0$ для прямых волн (линии 1 и 2) и отраженных волн (линии 1' и 2'). Области запрещенных зон BG выделены заливкой. Расчетные параметры: $L = 200$ мкм, $a = 10$ мкм, $c = L/2$, $\Delta = 1$ мкм, $D = 25$ мкм, $M_{01} = 260$ Гс, $M_{02} = 60$ Гс, $H_0 = 800$ Э (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* – Layered structure scheme as MC-1 and MC-2 separated by a dielectric layer. *b* – The dispersion characteristics of the MSSW in the linear case ($u = 10^{-5}$) at $\delta d_{1,2} \neq 0$ (solid blue lines) and $\delta d = 0$ for direct waves (lines 1 and 2) and reflected waves (lines 1' and 2'). Areas of band gaps BG are highlighted by a filler. Calculated parameter: $L = 200$ μm , $a = 10$ μm , $c = L/2$, $\Delta = 1$ μm , $D = 25$ μm , $M_{01} = 260$ G, $M_{02} = 60$ G, $H_0 = 800$ Oe (color online)

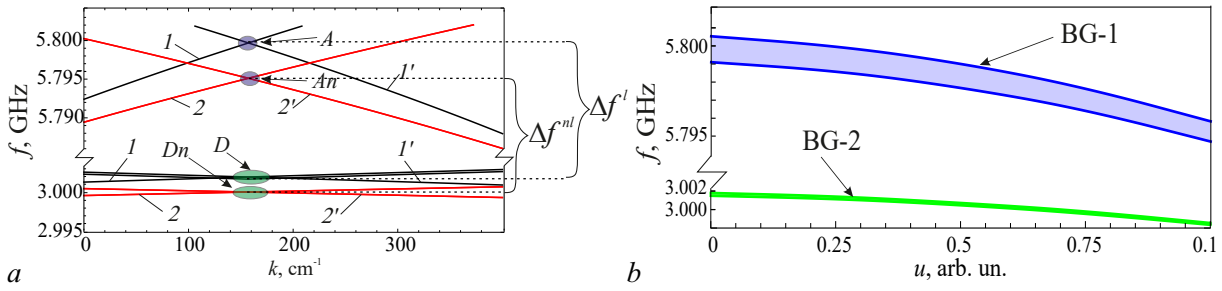


Рис. 2. *a* – Дисперсионные характеристики ПМСВ при $\delta d = 0$ для прямых волн (линии 1 и 2) и отраженных волн (линии 1' и 2') в линейном случае ($u = 10^{-5}$, черные прямые) и нелинейном случае ($u = 0.05$, красные прямые). *b* – Зависимость ширины и положения зон BG-1 (синяя закрашенная область) и BG-2 (зеленая закрашенная область) от амплитуды входного сигнала u . Расчетные параметры те же, что на рис. 1 (цвет онлайн)

Fig. 2. *a* – Dispersion characteristics of MSSW at $\delta d = 0$ for direct waves (lines 1 and 2) and reflected waves (lines 1' and 2') in the linear case ($u = 10^{-5}$, black lines) and nonlinear case ($u = 0.05$, red lines). *b* – Dependence of the width and position of the gaps BG-1 (blue shaded area) and BG-2 (green shaded area) on the input signal amplitude u . The calculated parameters are the same as in Fig. 1 (color online)

на частотах фазового синхронизма при волновом числе, соответствующем первому брэгговскому резонансу $k_B = \pi/L$, взаимодействие четырех описанных типов волн приводит к формированию запрещенных зон (закрашенные области на рис. 1, *b*). Запрещенная зона BG-1 (синяя закрашенная область) формируется за счёт взаимодействия прямой и отраженной симметричных волн, при этом центральная частота совпадает с точкой пересечения линий 1 и 1' (точка A). Запрещенная зона BG-2 (зеленая закрашенная область) формируется за счёт взаимодействия прямой и отраженной антисимметричных волн, при этом центральная частота совпадает с точкой пересечения линий 2 и 2' (точка D). На частотах, соответствующих запрещенным зонам, $\text{Im}(k)$ отлична от 0 (пунктирные кривые на рис. 1, *b*), что свидетельствует о затухании волны.

На рис. 2, *a* приведены дисперсионные характеристики ПМСВ в исследуемой структуре при $\delta d = 0$ для прямых симметричной (линия 1) и антисимметричной (линия 2) волн и отраженных симметричной (линия 1') и антисимметричной (линия 2') волн в линейном режиме при $u = 10^{-5}$ (черные линии) и в нелинейном режиме при $u = 0.05$ (красные линии). Центральная частота зоны BG-1 совпадает с точкой A, отмеченной фиолетовым овалом, а центральная частота зоны BG-2 совпадает с точкой D, отмеченной зеленым овалом. При увеличении входной амплитуды $u = 0.05$ центральная частота зоны BG-1 совпадает с точкой A_n , отмеченной фиолетовым овалом, а центральная частота зоны BG-2 совпадает с точкой D_n , отмеченной зеленым овалом. Видно, что при увеличении входной амплитуды центральные частоты зон BG-1 и BG-2 сдвигаются в низкочастотную область. Частотный сдвиг виден и на рис. 2, *b*, на котором приведена зависимость ширины и положения зоны BG-1 (фиолетовая закрашенная область) и BG-2 (зеленая закрашенная область) от амплитуды входного сигнала u . Частотный сдвиг объясняется уменьшением продольной компоненты магнитного момента при увеличении амплитуды входного сигнала u в соответствии с соотношением (2). Кроме того, видно, что частотный интервал между зонами BG-1 и BG-2 при $u = 10^{-5}$ ($\Delta f^l = f(A) - f(D)$) больше, чем частотный интервал при $u = 0.05$ ($\Delta f^{nl} = f(A_n) - f(D_n)$), то есть имеет место эффект нелинейного сближения зон BG-1 и BG-2.

Для объяснения данной особенности на вставке к рис. 3, *a* приведены зависимости частоты f_M от амплитуды u , построенной по соотношению (2) для разных намагниченностей насыщения M_0 . Видно, что с увеличением u частота f_M уменьшается. На рис. 3, *a* приведены зависимости частоты f_M от намагниченности насыщения M_0 в линейном $u = 10^{-5}$ (черная прямая) и нелинейном случае $u = 0.5$ (красная прямая)¹, построенные с использованием соотношения (2)

¹Выбор большого значения u при расчетах связан с наглядностью данных, представленных на рис. 3, *a*.

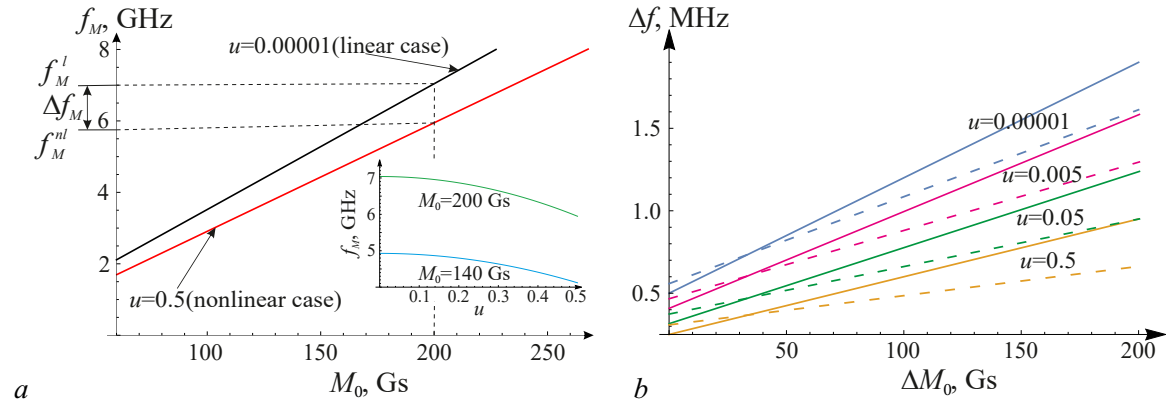


Рис. 3. *a* — Зависимости частоты намагничивания от намагниченности насыщения M_0 в линейном (черная прямая) и нелинейном (красная прямая) случаях. На вставке — зависимости частоты f_M от амплитуды u для разных намагниченностей насыщения M_0 . *b* — Зависимость изменения частотного интервала между зонами BG-1 и BG-2 при увеличении входной амплитуды от разности намагниченностей насыщения МК-1 и МК-2. При разных значениях u и при $H_0 = 800$ Э (сплошные кривые) и $H_0 = 1000$ Э (пунктирные кривые)

Fig. 3. *a* — Dependences of the magnetization frequency on the saturation magnetization M_0 in linear (black line) and nonlinear (red line) cases. The inset shows the dependence of the frequency f_M on the amplitude u for different saturation magnetizations M_0 . *b* — Dependence of the change in the frequency interval between the BG-1 and BG-2 gaps with increasing input amplitude on the difference between the saturation magnetizations of MC-1 and MC-2. At different values of u and at $H_0 = 800$ Oe (solid curves) and $H_0 = 1000$ Oe (dashed curves)

при $M_{0,1,2} = M_0$ и $f_{M,1,2} = f_M$. Видно, что при фиксированном значении M_0 частота намагничивания в линейном случае — f_M^l , а в нелинейном — f_M^{nl} . То есть при увеличении входной амплитуды u имеет место уменьшение частоты f_M на величину $\Delta f_M = f_M^l - f_M^{nl}$. Видно, что Δf_M увеличивается при увеличении M_0 . То есть чем больше намагниченность насыщения в линейном случае (M_0), тем больше нелинейное изменение Δf_M .

Для исследуемой структуры, состоящей из МК с разными намагниченностями насыщения, поведение дисперсионных характеристик симметричных волн (линии 1 и 1') определяется значением намагниченности МК, обладающего большей намагниченностью (M_{01}), а поведение дисперсионных характеристик антисимметричных волн (линии 2 и 2') определяется значением намагниченности МК, обладающего меньшей намагниченностью (M_{02}). Нелинейное изменение частоты намагничивания будет больше для симметричных волн (за счёт взаимодействия которых образуется зона BG-1), чем для антисимметричных волн (за счёт взаимодействия которых образуется зона BG-2). Соответственно, нелинейный сдвиг зоны BG-1 ($f(A) - f(A_n)$) больше, чем нелинейный сдвиг BG-2 ($f(D) - f(D_n)$).

На рис. 3, *b* приведена зависимость изменения частотного интервала между зонами BG-1 и BG-2 $\Delta f = \Delta f^l - \Delta f^{nl}$ при увеличении входной амплитуды от $u = 10^{-5}$ до $u = 0.05$ от разности намагниченностей насыщения МК-1 и МК-2 $\Delta M_0 = M_{01} - M_{02}$. Видно, что, чем больше разница между намагниченностями насыщения МК-1 и МК-2, тем больше Δf , то есть эффект нелинейного сближения запрещенных зон более ярко выражен. При увеличении внешнего магнитного поля данный эффект становится менее ярко выраженным.

Заключение

В работе выявлены особенности брэгговских резонансов в периодической слоистой ферромагнитной структуре на основе магнетонных кристаллов. Показано, что в структуре, состоящей из двух связанных МК, разделенных слоем диэлектрика, в первой зоне Бриллюэна возможно формирование двух запрещенных зон — полос непропускания магнитоэлектронных волн.

Высокочастотная запрещенная зона BG-1 формируется на частоте фазового синхронизма прямой и отраженной симметричных нормальных волн связанной структуры, а низкочастотная зона BG-2 формируется на частоте синхронизма прямой и отраженной антисимметричных волн. Зоны формируются при брэгговском волновом числе и на частотах, отличных от брэгговских частот для каждого из МК в отдельности.

Исследовано влияние амплитуды входного сигнала на частотное положение запрещенных зон. Показано, что при увеличении амплитуды входного сигнала имеет место сдвиг обеих запрещенных зон BG-1 и BG-2 вниз по частоте. Однако нелинейность по-разному влияет на частотное положение каждой из зон. В частности, нелинейный сдвиг высокочастотной запрещенной зоны BG-1 при увеличении амплитуды больше нелинейного сдвига низкочастотной запрещенной зоны BG-2. При этом в нелинейном случае частотный интервал между зонами BG-1 и BG-2 становится меньше, чем в линейном случае. Чем больше разница между намагниченностями насыщения МК-1 и МК-2, тем больше нелинейное сближение запрещенных зон. При увеличении внешнего магнитного поля данный эффект также становится более ярко выраженным.

Таким образом, установленные особенности расширяют возможности исследуемой структуры по частотно-селективной обработке сигналов за счёт управления частотной избирательностью как с помощью статических параметров связи, периодичности и намагниченности слоев, так и динамически, с помощью мощности входного сигнала.

Список литературы

1. Никитов С. А., Сафин А. Р., Калябин Д. В., Садовников А. В., Бегинин Е. Н., Логунов М. В., Морозова М. А., Одинцов С. А., Осокин С. А., Шараевская А. Ю., Шараевский Ю. П., Кирилюк А. И. Диэлектрическая магноника – от гигагерцев к терагерцам // УФН. 2020. Т. 190, № 10. С. 1009–1040. DOI: 10.3367/UFNr.2019.07.038609.
2. Barman A., Gubbiotti G., Ladak S., Adeyeye A. O., Krawczyk M., Gräfe J., Adelman C., Cotofana S., Naeemi A., Vasyuchka V. I., Hillebrands B., Nikitov S. A., Yu H., Grundler D., Sadovnikov A. V., Grachev A. A., Sheshukova S. E., Duquesne J.-Y., Marangolo M., Csaba G., Porod W., Demidov V. E., Urazhdin S., Demokritov S. O., Albisetti E., Petti D., Bertacco R., Schultheiss H., Kruglyak V. V., Poimanov V. D., Sahoo S., Sinha J., Yang H., Münzenberg M., Moriyama T., Mizukami S., Landeros P., Gallardo R. A., Carlotti G., Kim J.-V., Stamps R. L., Camley R. E., Rana B., Otani Y., Yu W., Yu T., Bauer G. E. W., Back C., Uhrig G. S., Dobrovolskiy O. V., Budinska B., Qin H., van Dijken S., Chumak A. V., Khitun A., Nikonov D. E., Young I. A., Zingsem B. W., Winklhofer M. The 2021 magnonics roadmap // Journal of Physics: Condensed Matter. 2021. Vol. 33, no. 41. P. 413001. DOI: 10.1088/1361-648X/abec1a.
3. Barman A., Sinha J. Spin Dynamics and Damping in Ferromagnetic Thin Films and Nanostructures. Cham: Springer, 2018. 156 p. DOI: 10.1007/978-3-319-66296-1.
4. Krawczyk M., Grundler D. Review and prospects of magnonic crystals and devices with reprogrammable band structure // Journal of Physics: Condensed Matter. 2014. Vol. 26, no. 12. P. 123202. DOI: 10.1088/0953-8984/26/12/123202.
5. Chumak A. V., Serga A. A., Hillebrands B. Magnonic crystals for data processing // Journal of Physics D: Applied Physics. 2017. Vol. 50, no. 24. P. 244001. DOI: 10.1088/1361-6463/aa6a65.
6. Brillouin L. Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices. 2d edition. Dover Publications, 1953. 255 p.
7. Wigen P. E. Nonlinear Phenomena and Chaos in Magnetic Materials. Singapore: World Scientific, 1994. 260 p. DOI: 10.1142/1686.
8. Львов В. С. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987. 272 с.
9. Лукомский В. П. Нелинейные магнитостатические волны в ферромагнитных пластинах // Укр. физ. журн. 1978. Т. 23, № 1. С. 134.
10. Wang Q., Kewenig M., Schneider M., Verba R., Kohl F., Heinz B., Geilen M., Mohseni M., Lägél B., Ciubotaru F., Adelman C., Dubs C., Cotofana S. D., Dobrovolskiy O. V., Brächer T.,

- Pirro P., Chumak A. V.* A magnonic directional coupler for integrated magnonic half-adders // *Nature Electronics*. 2020. Vol. 3, no. 12. P. 765–774. DOI: 10.1038/s41928-020-00485-6.
11. *Morozova M. A., Matveev O. V., Romanenko D. V., Trukhanov A. V., Mednikov A. M., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A.* Nonlinear spin wave switches in layered structure based on magnonic crystals // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2020. Vol. 508. P. 166836. DOI: 10.1016/j.jmmm.2020.166836.
 12. *Ustinov A. B., Drozdovskii A. V., Kalinikos B. A.* Multifunctional nonlinear magnonic devices for microwave signal processing // *Applied Physics Letters*. 2010. Vol. 96, no. 14. P. 142513. DOI: 10.1063/1.3386540.
 13. *Castera J. P., Hartemann P.* Adjustable magnetostatic surface-wave multistrip directional coupler // *Electronics Letters*. 1980. Vol. 16, no. 5. P. 195–196. DOI: 10.1049/el:19800140.
 14. *Wang Q., Pirro P., Verba R., Slavin A., Hillebrands B., Chumak A. V.* Reconfigurable nanoscale spin-wave directional coupler // *Science Advances*. 2018. Vol. 4, no. 1. P. e1701517. DOI: 10.1126/sciadv.1701517.
 15. *Vogt K., Fradin F. Y., Pearson J. E., Sebastian T., Bader S. D., Hillebrands B., Hoffmann A., Schultheiss H.* Realization of a spin-wave multiplexer // *Nature Communications*. 2014. Vol. 5, no. 1. P. 3727. DOI: 10.1038/ncomms4727.
 16. *Klingler S., Pirro P., Brächer T., Leven B., Hillebrands B., Chumak A. V.* Spin-wave logic devices based on isotropic forward volume magnetostatic waves // *Applied Physics Letters*. 2015. Vol. 106, no. 21. P. 212406. DOI: 10.1063/1.4921850.
 17. *Sasaki H., Mikoshiba N.* Directional coupling of magnetostatic surface waves in a layered structure of YIG films // *Journal of Applied Physics*. 1981. Vol. 52, no. 5. P. 3546–3552. DOI: 10.1063/1.329134.
 18. *An K., Bhat V. S., Mruczkiewicz M., Dubs C., Grundler D.* Optimization of spin-wave propagation with enhanced group velocities by exchange-coupled ferrimagnet-ferromagnet bilayers // *Physical Review Applied*. 2019. Vol. 11, no. 3. P. 034065. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.11.034065.
 19. *Morozova M. A., Romanenko D. V., Matveev O. V., Grishin S. V., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A.* Suppression of periodic spatial power transfer in a layered structure based on ferromagnetic films // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2018. Vol. 466. P. 119–124. DOI: 10.1016/j.jmmm.2018.06.077.
 20. *Morozova M. A., Sharaevskaya A. Y., Sadovnikov A. V., Grishin S. V., Romanenko D. V., Beginin E. N., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A.* Band gap formation and control in coupled periodic ferromagnetic structures // *Journal of Applied Physics*. 2016. Vol. 120, no. 22. P. 223901. DOI: 10.1063/1.4971410.
 21. *Morozova M. A., Grishin S. V., Sadovnikov A. V., Romanenko D. V., Sharaevskii Y. P., Nikitov S. A.* Tunable bandgaps in layered structure magnonic crystal–ferroelectric // *IEEE Transactions on Magnetics*. 2015. Vol. 51, no. 11. P. 2802504. DOI: 10.1109/TMAG.2015.2446763.
 22. *Морозова М. А., Лобанов Н. Д., Матвеев О. В., Нукитов С. А.* Механизм формирования запрещенных зон спиновых волн в связанных магнетонных кристаллах // *Письма в ЖЭТФ*. 2022. Т. 115, № 12. С. 793–800. DOI: 10.31857/S1234567822120072.
 23. *Louisell W. H.* Coupled Mode and Parametric Electronics. New York: Wiley, 1960. 268 p.
 24. *Вашиковский А. В., Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Издательство Саратовского университета, 1993. 312 с.

References

1. Nikitov SA, Safin AR, Kalyabin DV, Sadovnikov AV, Beginin EN, Logunov MV, Morozova MA, Odintsov SA, Osokin SA, Sharaevskaya AY, Sharaevsky YP, Kirilyuk AI. Dielectric magnonics: from gigahertz to terahertz. *Physics-Uspekhi*. 2020;63(10):945–974. DOI: 10.3367/UFNe.2019.07.038609.
2. Barman A, Gubbiotti G, Ladak S, Adeyeye AO, Krawczyk M, Gräfe J, Adelman C, Cotofana S, Naeemi A, Vasyuchka VI, Hillebrands B, Nikitov SA, Yu H, Grundler D, Sadovnikov AV,

- Grachev AA, Sheshukova SE, Duquesne J-Y, Marangolo M, Csaba G, Porod W, Demidov VE, Urazhdin S, Demokritov SO, Albisetti E, Petti D, Bertacco R, Schultheiss H, Kruglyak VV, Poimanov VD, Sahoo S, Sinha J, Yang H, Münzenberg M, Moriyama T, Mizukami S, Landeros P, Gallardo RA, Carlotti G, Kim J-V, Stamps RL, Camley RE, Rana B, Otani Y, Yu W, Yu T, Bauer GEW, Back C, Uhrig GS, Dobrovolskiy OV, Budinska B, Qin H, van Dijken S, Chumak AV, Khitun A, Nikonov DE, Young IA, Zingsem BW, Winklhofer M. The 2021 magnonics roadmap. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2021;33(41):413001. DOI: 10.1088/1361-648X/abec1a.
3. Barman A, Sinha J. *Spin Dynamics and Damping in Ferromagnetic Thin Films and Nanostructures*. Cham: Springer; 2018. 156 p. DOI: 10.1007/978-3-319-66296-1.
 4. Krawczyk M, Grundler D. Review and prospects of magnonic crystals and devices with reprogrammable band structure. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2014;26(12):123202. DOI: 10.1088/0953-8984/26/12/123202.
 5. Chumak AV, Serga AA, Hillebrands B. Magnonic crystals for data processing. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2017;50(24):244001. DOI: 10.1088/1361-6463/aa6a65.
 6. Brillouin L. *Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices*. 2d edition. Dover Publications; 1953. 255 p.
 7. Wigen PE. *Nonlinear Phenomena and Chaos in Magnetic Materials*. Singapore: World Scientific; 1994. 260 p. DOI: 10.1142/1686.
 8. L'vov VS. *Nonlinear Spin Waves*. Moscow: Nauka; 1987. 272 p. (in Russian).
 9. Lukomsky VP. Nonlinear magnetostatic waves in ferromagnetic plates. *Ukrainian Physical Journal*. 1978;23(1):134 (in Russian).
 10. Wang Q, Kewenig M, Schneider M, Verba R, Kohl F, Heinz B, Geilen M, Mohseni M, Lägél B, Ciubotaru F, Adelman C, Dubs C, Cotofana SD, Dobrovolskiy OV, Brächer T, Pirro P, Chumak AV. A magnonic directional coupler for integrated magnonic half-adders. *Nature Electronics*. 2020;3(12):765–774. DOI: 10.1038/s41928-020-00485-6.
 11. Morozova MA, Matveev OV, Romanenko DV, Trukhanov AV, Mednikov AM, Sharaevskii YP, Nikitov SA. Nonlinear spin wave switches in layered structure based on magnonic crystals. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2020;508:166836. DOI: 10.1016/j.jmmm.2020.166836.
 12. Ustinov AB, Drozdovskii AV, Kalinikos BA. Multifunctional nonlinear magnonic devices for microwave signal processing. *Applied Physics Letters*. 2010;96(14):142513. DOI: 10.1063/1.3386540.
 13. Castera JP, Hartemann P. Adjustable magnetostatic surface-wave multistrip directional coupler. *Electronics Letters*. 1980;16(5):195–196. DOI: 10.1049/el:19800140.
 14. Wang Q, Pirro P, Verba R, Slavin A, Hillebrands B, Chumak AV. Reconfigurable nanoscale spin-wave directional coupler. *Science Advances*. 2018;4(1):e1701517. DOI: 10.1126/sciadv.1701517.
 15. Vogt K, Fradin FY, Pearson JE, Sebastian T, Bader SD, Hillebrands B, Hoffmann A, Schultheiss H. Realization of a spin-wave multiplexer. *Nature Communications*. 2014;5(1):3727. DOI: 10.1038/ncomms4727.
 16. Klingler S, Pirro P, Brächer T, Leven B, Hillebrands B, Chumak AV. Spin-wave logic devices based on isotropic forward volume magnetostatic waves. *Applied Physics Letters*. 2015;106(21):212406. DOI: 10.1063/1.4921850.
 17. Sasaki H, Mikoshiba N. Directional coupling of magnetostatic surface waves in a layered structure of YIG films. *Journal of Applied Physics*. 1981;52(5):3546–3552. DOI: 10.1063/1.329134.
 18. An K, Bhat VS, Mruczkiewicz M, Dubs C, Grundler D. Optimization of spin-wave propagation with enhanced group velocities by exchange-coupled ferrimagnet-ferromagnet bilayers. *Physical Review Applied*. 2019;11(3):034065. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.11.034065.
 19. Morozova MA, Romanenko DV, Matveev OV, Grishin SV, Sharaevskii YP, Nikitov SA. Suppression of periodic spatial power transfer in a layered structure based on ferromagnetic films. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2018;466:119–124. DOI: 10.1016/j.jmmm.2018.06.077.

20. Morozova MA, Sharaevskaya AY, Sadovnikov AV, Grishin SV, Romanenko DV, Beginin EN, Sharaevskii YP, Nikitov SA. Band gap formation and control in coupled periodic ferromagnetic structures. *Journal of Applied Physics*. 2016;120(22):223901. DOI: 10.1063/1.4971410.
21. Morozova MA, Grishin SV, Sadovnikov AV, Romanenko DV, Sharaevskii YP, Nikitov SA. Tunable bandgaps in layered structure magnonic crystal–ferroelectric. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2015;51(11):2802504. DOI: 10.1109/TMAG.2015.2446763.
22. Morozova MA, Lobanov ND, Matveev OV, Nikitov SA. Mechanism of band gap formation in the spin-wave spectrum of coupled magnon crystals. *JETP Letters*. 2022;115(12):742–748. DOI: 10.1134/S0021364022600963.
23. Louisell WH. *Coupled Mode and Parametric Electronics*. New York: Wiley; 1960. 268 p.
24. Vashkovskii AV, Stalmakhov VS, Sharaevskii YP. *Magnetostatic Waves in Microwave Electronics*. Saratov: Saratov University Publishing; 1993. 312 p. (in Russian).



Лобанов Никита Дмитриевич — лаборант-исследователь Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: nl_17@mail.ru

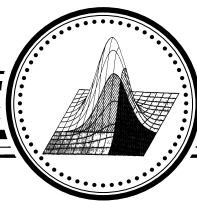
Матвеев Олег Валерьевич — родился в Саратове (1991). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета по направлению «Физика открытых нелинейных систем» (2013). Кандидат физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2019). Старший научный сотрудник лаборатории «Метаматериалы» СГУ имени Н. Г. Чернышевского. Область научных интересов — спиновые волны в магнитных материалах, нелинейные явления (солитоны, автомодуляция, хаос) в тонких ферромагнитных плёнках и структурах на их основе, магنونная логика, обработка спинволновых сигналов в магнитных материалах. Автор свыше 50 научных работ по данной тематике.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: olvmatveev@gmail.com
 ORCID: 0000-0003-2320-907X
 AuthorID (eLibrary.Ru): 786916



Морозова Мария Александровна — родилась в Саратове (1977). Окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (1999). Доктор физико-математических наук (2021), профессор кафедры нелинейной физики, ведущий научный сотрудник лаборатории «Метаматериалы» Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского. Область научных интересов — элементная база магноники и спинтроники, обработка и генерация информационных сигналов в диапазоне СВЧ, волновые явления в магнитных материалах (в магнонных кристаллах, в многослойных ферромагнитных, мультиферроидных и гетероструктурах). Автор свыше 200 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: mamorozovama@yandex.ru
 ORCID: 0000-0003-4442-2443
 AuthorID (eLibrary.Ru): 112875



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003083
EDN: YYDPVE

Воздействие аддитивного шума на химерные и уединенные состояния в нейронных ансамблях

А. Д. Рябченко, Е. В. Рыбалова✉, Г. И. Стрелкова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: andreuryabchenko.2003@gmail.com, ✉rybalovaev@gmail.com, strelkovagi@sgu.ru

Поступила в редакцию 15.08.2023, принята к публикации 3.10.2023,

опубликована онлайн 21.12.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. Цель. Работа направлена на исследование влияния аддитивного белого гауссовского шума на динамику ансамбля нелокально связанных моделей нейронов, в качестве которых взяты осцилляторы ФитцХью–Нагумо. В таком ансамбле в зависимости от значений параметров связи между парциальными элементами могут наблюдаться различные пространственно-временные структуры (химерные состояния, уединенные состояния, режим сосуществования этих состояний (комбинированная структура)), которые по-разному реагируют на добавление в систему аддитивного шума. Методы. Для изучения динамики исследуемой сети строятся мгновенные пространственные профили, пространственно-временные диаграммы, проекции многомерных аттракторов, профили средней фазовой скорости, пространственные профили значений коэффициента взаимной корреляции. Также рассчитываются значения усредненного по ансамблю коэффициента взаимной корреляции, среднее количество уединенных узлов и вероятность установления пространственно-временных структур в присутствии аддитивного шума. Результаты. Показано, что аддитивный шум способен уменьшить вероятность установления режима уединенных состояний и режима комбинированной структуры, при этом вероятность появления только химерных состояний возрастает до 100%. При воздействии шума на ансамбль связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, находящийся в режиме только уединенных состояний, увеличение интенсивности шума ведет, в общем случае, к уменьшению среднего количества уединенных узлов и интервала значений параметров связи, в котором реализуются уединенные состояния. Однако существует область по параметрам связи парциальных элементов, в которой под воздействием аддитивного шума количество уединенных выбросов увеличивается. Заключение. Исследовано изменение вероятности установления в ансамбле осцилляторов ФитцХью–Нагумо химерных состояний, уединенных состояний и режима комбинированной структуры, которые наблюдаются в области мультистабильности, под действием аддитивного шума. Показано, что химерные состояния проявляют себя как более устойчивые и доминирующие структуры среди всех остальных, сосуществующих в ансамбле. В то же время вероятность установления только уединенных состояний, область их существования по параметрам связи и количество уединенных узлов, в общем случае, уменьшается с увеличением интенсивности шума.

Ключевые слова: нелокальная связь, аддитивный шум, химерные состояния, уединенные состояния, осциллятор ФитцХью–Нагумо.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-12-00119, <https://www.rscf.ru/project/20-12-00119/>).

Для цитирования: Рябченко А. Д., Рыбалова Е. В., Стрелкова Г. И. Воздействие аддитивного шума на химерные и уединенные состояния в нейронных ансамблях // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 121–140. DOI: 10.18500/0869-6632-003083. EDN: YYDPVE

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Influence of additive noise on chimera and solitary states in neural networks

A. D. Ryabchenko, E. V. Rybalova✉, G. I. Strelkova

Saratov State University, Russia

E-mail: andreyryabchenko.2003@gmail.com, ✉rybalovaev@gmail.com, strelkovagi@sgu.ru

Received 15.08.2023, accepted 3.10.2023, available online 21.12.2023, published 31.01.2024

Abstract. The purpose of this work is to study numerically the influence of additive white Gaussian noise on the dynamics of a network of nonlocally coupled neuron models which are represented by FitzHugh–Nagumo oscillators. Depending on coupling parameters between the individual elements this network can demonstrate various spatio-temporal structures, such as chimera states, solitary states and regimes of their coexistence (combined structures). These patterns exhibit different responses against additive noise influences. **Methods.** The network dynamics is explored by calculating and plotting snapshots (instantaneous spatial distributions of the coordinate values at a fixed time), space-time diagrams, projections of multidimensional attractors, mean phase velocity profiles, and spatial distributions (profiles) of cross-correlation coefficient values. We also evaluate the cross-correlation coefficient averaged over the network, the mean number of solitary nodes and the probability of settling spatio-temporal structures in the neuronal network in the presence of additive noise. **Results.** It has been shown that additive noise can decrease the probability of settling regimes of solitary states and combined structures, while the probability of observing chimera states arises up to 100%. In the noisy network of FitzHugh–Nagumo oscillators exhibiting the regime of solitary states, increasing the noise intensity leads, in general case, to a decrease of the mean number of solitary nodes and the interval of coupling parameter values within which the solitary states are observed. However, there is a finite region in the coupling parameter plane, inside which the number of solitary nodes can grow in the presence of additive noise. **Conclusion.** We have studied the impact of additive noise on the probability of observing chimera states, solitary states and combined structures, which coexist in the multistability region, in the network of nonlocally coupled FitzHugh–Nagumo neuron models. It has been established that chimera states represent more stable and dominating structures among the other patterns coexisting in the studied network. At the same time, the probability of settling regimes of solitary states only, the region of their existence in the coupling parameter plane and the number of solitary nodes generally decrease when the noise intensity increases.

Keywords: nonlocal coupling, additive noise, chimera state, solitary state, FitzHugh–Nagumo model.

Acknowledgements. The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 20-12-00119, <https://www.rscf.ru/project/20-12-00119/>).

For citation: Ryabchenko AD, Rybalova EV, Strelkova GI. Influence of additive noise on chimera and solitary states in neural networks. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(1):121–140. DOI: 10.18500/0869-6632-003083

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В реальных системах неизбежно присутствуют различные неоднородности и шумы, которые могут оказывать как конструктивное, так и деструктивное влияние на пространственно-временную динамику сложных систем [1–8]. Источники шума могут использоваться для стабилизации и/или эффективного управления режимами работы систем [2–4, 9–13], а также для улучшения ряда характеристик их функционирования. К таким эффектам относятся, например, стохастический резонанс [1, 6, 14] и когерентный резонанс [5, 15]. В последнее время вопросам влияния шумов и неоднородностей на динамику сетей уделяется особое внимание в связи с открытием новых режимов частичной синхронизации в сетях связанных систем, а именно химерных состояний [16–20] и уединенных состояний [21, 22].

Химерные состояния впервые были обнаружены в ансамблях нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов [16, 17]. Этот особый пространственно-временной режим динамики представляет собой промежуточный этап при переходе от режима когерентной динамики (синхронизации) к некогерентной (пространственно-временной хаос) и соответствует сосуществованию

Рябченко А. Д., Рыбалова Е. В., Стрелкова Г. И.
Известия вузов. ПНД, 2024, т. 32, № 1

локализованных в пространстве ансамбля кластеров с когерентной (синхронизированной) и некогерентной (десинхронизированной) динамикой осцилляторов ансамбля. Теоретические и численные исследования показали, что химеры могут возникать в сетях с парциальными элементами различной природы и при различной топологии связей между ними [16–20, 23–31]. Этот режим кластерной синхронизации наблюдается не только в компьютерных экспериментах, но и в реальных системах, например, в сетях электроснабжения [32–34], в социальных системах [35, 36], а также в нейробиологии [37–39]. Показано, что состояния, подобные химерным, возникают в мозге при болезни Паркинсона [40], во время сна одним полушарием у птиц и млекопитающих [41], во время движения глаз [42, 43], при эпилептических приступах [44]. Устойчивость химерных состояний к шумовым возмущениям исследовалась в нелокально связанных сетях осцилляторов с дискретным [45–51] и непрерывным временем [52–55].

Уединенные состояния представляют собой еще один важный режим пространственно-временной динамики, который наблюдается в ансамблях связанных осцилляторов [21, 22]. Для этого режима характерно то, что большинство элементов системы находится в некотором типичном состоянии, а остальные принадлежат другим состояниям (уединенным), которых в общем случае может быть несколько. При этом элементы, принадлежащие уединенным состояниям (уединенные узлы), распределены по всему ансамблю случайно, но достаточно равномерным образом, то есть не сбиваются в кластеры (если не использованы специальные начальные условия), как это происходит при химерном режиме. Отметим, что количество уединенных узлов увеличивается при уменьшении силы связи между элементами сети. Исследования показали, что возникновение уединенных состояний связано с появлением бистабильности в системе за счет нелокального взаимодействия парциальных элементов [21, 22]. Уединенные состояния были обнаружены в сетях моделей Курамото–Сакагути и осцилляторов Курамото с инерцией [21, 22, 56–58], системах с дискретным временем [28, 59, 60], системах осцилляторов ФитцХью–Нагумо [61–64], моделях электрических сетей [65–67] и даже в экспериментальных установках связанных маятников [68]. Режимы, подобные уединенным состояниям, также встречаются в нейронных ансамблях головного мозга. Примером может служить реакция только отдельных нейронов на определенные стимулы [69, 70], в том числе так называемые нейроны бабушки [71, 72], динамика ансамбля нейронов при задаче категоризации [73]. В отличие от химерных состояний, устойчивость уединенных состояний по отношению к шуму очень мало изучена. Например, в работе [74] было показано, что наличие шума в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо приводит к переходу от уединенных состояний к «пятнистой» синхронизации (patched synchrony). Авторами работы [48] было установлено, что в кольце нелокально связанных отображений Лози введение аддитивного шума приводит к уменьшению интервала по параметрам ансамбля, в котором наблюдаются уединенные состояния, и к уменьшению количества уединенных узлов, но преимущественно на границах области существования этих режимов. К качественно подобному эффекту ведет шумовая модуляция управляющих параметров, что показано в работе [75].

Настоящая работа направлена на расширение знаний об эффектах, которые возникают при воздействии аддитивного шума на химерные и уединенные состояния, реализующиеся в ансамблях связанных нелинейных осцилляторов. В данной работе исследуется динамика кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, которые являются классическими моделями нейронной активности. В работах [63, 76] было показано, что в такой системе возможно установление множества пространственно-временных режимов при вариации параметров связи между парциальными элементами. В частности, могут наблюдаться химерные и уединенные состояния, а также режим их сосуществования — комбинированная структура — в пространстве ансамбля. Проводится анализ влияния аддитивного шума на режим только уединенных состояний, а также на режимы, наблюдающиеся в области мультистабильности: химерные состояния, уединенные состояния и комбинированные структуры.

1. Исследуемая модель и используемые методы

В данной работе исследуется динамика кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо [77, 78] в колебательном режиме с добавлением в медленную переменную (ингибитор) аддитивного белого гауссовского шума. Изучаемая сеть описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{du_i}{dt} &= u_i - \frac{u_i^3}{3} - v_i + \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [b_{uu}(u_j - u_i) + b_{uv}(v_j - v_i)], \\ \frac{dv_i}{dt} &= u_i + a + \frac{\sigma}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [b_{vu}(u_j - u_i) + b_{vv}(v_j - v_i)] + \sqrt{2A}\xi_i(t),\end{aligned}\tag{1}$$

где u_i и v_i — переменные, описывающие динамику во времени активатора (быстрой переменной) и ингибитора (медленной переменной), соответственно, $i = 1, 2, \dots, N = 300$ — номер элемента в кольце. Малый параметр $\varepsilon > 0$ отвечает за разделение временных масштабов быстрого активатора от медленного ингибитора (в данной работе значение фиксируется $\varepsilon = 0.05$), а параметр a определяет порог возбудимости. В работе значение данного параметра принимается равным для всех элементов $a = 0.5$, что соответствует колебательному режиму динамики в одиночном элементе. Параметр R определяет количество ближайших соседей справа и слева, с которыми связан каждый i -й элемент. Данный параметр является радиусом нелокальной связи и в проводимых исследованиях фиксирован $R = 105$. Способ задания нелокальной связи между осцилляторами в ансамбле (1) был предложен в работе [76] и характеризуется силой связи σ . Последнее слагаемое во втором уравнении соответствует введению в систему аддитивного шума с интенсивностью A , ξ_i — независимые источники белого гауссовского шума. Начальные условия всех элементов случайно и равномерно выбраны внутри круга $u^2 + v^2 \leq 2^2$.

Система (1) содержит не только прямые связи между элементами, но и перекрестные между активатором (u) и ингибитором (v), которые устанавливаются в соответствии с вращательной матрицей связи [76]:

$$B = \begin{pmatrix} b_{uu} & b_{uv} \\ b_{vu} & b_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},\tag{2}$$

где $\phi \in [-\pi, \pi)$. В работе [76] было показано, что в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо в колебательном режиме могут наблюдаться химерные состояния при $\phi = \pi/2 - 0.1$. В работе [53] данный результат был распространен на парциальные элементы в возбудимом режиме при наличии аддитивного шума в системе.

В работе [63] было изучено влияние параметров связи σ и ϕ на динамику кольца (1) в отсутствие аддитивного шума ($A = 0$) и была построена карта динамических режимов (рис. 1). Аббревиатурами на карте обозначены все режимы, наблюдающиеся в различных областях пространства параметров. Первая диаграмма (рис. 1, *a*) построена для случая слабой связи, при которой в системе в области малых значений ϕ наблюдается два режима: режим синхронизации всех элементов в кольце (SYN) и уединенные состояния (SS). Второй фрагмент карты режимов соответствует случаю сильной связи (рис. 1, *b*). В этой области, помимо уже упомянутых режимов полной синхронизации (SYN) и уединенных состояний (SS), наблюдаются также режимы классической химерной структуры (CS) и химеры уединенных состояний двух типов (SSC-1, SSC-2). SSC-1 имеет некогерентный кластер, состоящий из равномерно распределенных уединенных узлов. Химера уединенных состояний 2-го типа (SSC-2) также характеризуется кластером некогерентности, включающим равномерно распределенные уединенные узлы. Однако на его границах

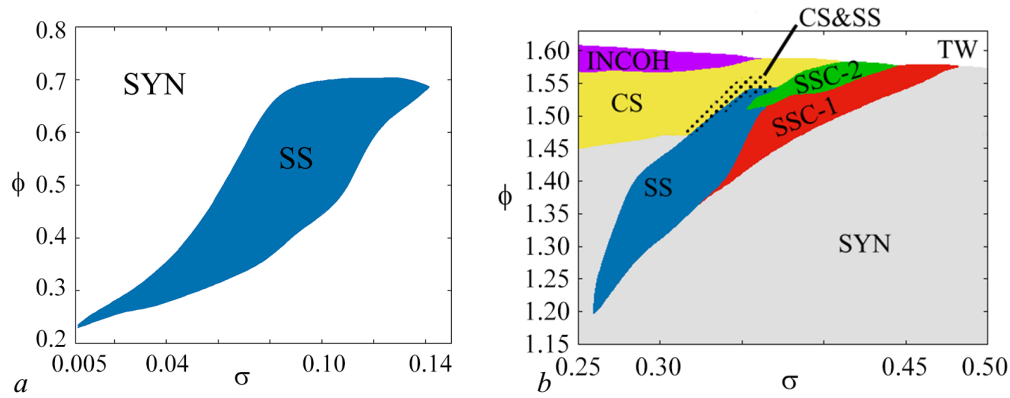


Рис. 1. Карты динамических режимов в системе (1) в отсутствие аддитивного шума для слабой (а) и сильной (б) связей. SYN — режим синхронизации; SS — уединенное состояние; CS — химерное состояние; INCOH — некогерентный режим; TW — режим бегущих волн; SSC-1 и SSC-2 — различные типы химеры уединенного состояния; CS&SS — сосуществование химерных и уединенных состояний на профиле кольца (комбинированная структура). Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$, $A = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 1. Diagrams of dynamical regimes in the network (1) without additive noise for weak (a) and strong (b) coupling. SYN — synchronization regime, SS — solitary state, CS — chimera state, INCOH — incoherence regime, TW — traveling wave regime, SSC-1 and SSC-2 — two different types of a solitary state chimera, CS&SS — coexistence of chimera and solitary states (combined structure). Other parameters: $\varepsilon = 0.05$, $a = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$, $A = 0$ (color online)

образуются «ступеньки», представляющие собой группы уединенных узлов. Помимо областей, в которых наблюдаются только химерные состояния и только уединенные состояния, существует область с комбинированной динамикой, соответствующей сосуществованию химерных и уединенных состояний (CS&SS). В дальнейшем данный режим будем называть комбинированной структурой. В области INCOH динамика кольца характеризуется некогерентным мгновенным пространственным профилем и отвечает режиму рассинхронизации всех элементов ансамбля. Область TW соответствует режиму бегущих волн. Более подробный анализ динамики кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо при параметрах из всех перечисленных областей представлен в работе [63].

Для анализа пространственно-временной динамики ансамбля нелокально связанных элементов строятся мгновенные профили (пространственное распределение значений всех динамических переменных в фиксированный момент времени), пространственно-временные диаграммы (на плоскости параметров «номер элемента (i)–время (t)» цветом отображаются амплитуды парциальных элементов) и проекции многомерных аттракторов системы на плоскость динамических переменных. Однако для получения полной картины эволюции различных пространственно-временных режимов ансамбля в присутствии шумовых воздействий представляется целесообразным расчет коэффициента взаимной корреляции между элементами ансамбля и построение пространственного распределения его значений. Коэффициент взаимной корреляции между первым элементом ансамбля и всеми остальными вычисляется по следующей формуле:

$$C_{1i} = \frac{\langle \tilde{u}_1 \tilde{u}_i \rangle}{\sqrt{\langle (\tilde{u}_1)^2 \rangle \langle (\tilde{u}_i)^2 \rangle}}, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad (3)$$

где $\tilde{u}_i = u_i - \langle u_i \rangle$, $\langle u_i \rangle$ — усреднение значений u_i по ансамблю реализаций, которое в численных экспериментах заменялось усреднением по времени. Величина (3) показывает степень корреляции или синхронизации между первым элементом ансамбля и всеми остальными и изменяется от -1 до 1 , где « 1 » соответствует полной синфазной синхронизации, « -1 » — противофазной

синхронизации. При отсутствии корреляции между элементами данный коэффициент равен 0. В связи с тем, что коэффициент корреляции у уединенных узлов меньше, чем у осцилляторов, принадлежащих когерентной части профиля, данный коэффициент помогает автоматически обнаруживать уединенные состояния и подсчитывать количество уединенных узлов.

Кроме расчета коэффициента взаимной корреляции для каждого элемента (3) используется также усредненный по всем элементам ансамбля коэффициент взаимной корреляции

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\langle \tilde{u}_1 \tilde{u}_i \rangle}{\sqrt{\langle (\tilde{u}_1)^2 \rangle \langle (\tilde{u}_i)^2 \rangle}}, \quad (4)$$

где выражение под знаком суммы соответствует коэффициенту взаимной корреляции между 1-м и i -м элементами (3). Как было показано в работе [75], усредненный коэффициент взаимной корреляции можно использовать в качестве дополнительной величины для оценки количества уединенных узлов в системе. В случае когерентной динамики имеем $C \rightarrow 1$, для режима уединенных состояний значение усредненного коэффициента взаимной корреляции уменьшается.

Для иллюстрации различий между наблюдаемыми пространственно-временными структурами в ансамбле нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо также вычисляется средняя фазовая скорость каждого элемента в ансамбле по формуле

$$w_i = 2\pi M_i / \Delta T, \quad (5)$$

где M_i — число полных оборотов вокруг начала координат, выполняемых i -м осциллятором ФитцХью–Нагумо за интервал времени ΔT [76]. В данных расчетах переходное время бра-лось равным $T_0 = 1000$ единиц безразмерного времени, а время, на котором рассчитывались коэффициенты взаимной корреляции и значения средней фазовой скорости, $T = 2000$.

В некоторых случаях наряду с усредненным коэффициентом взаимной корреляции напрямую подсчитывается количество уединенных узлов и используется такая характеристика, как «среднее нормированное количество уединенных узлов», которая определяется следующим образом:

$$N_S = \frac{1}{M} \sum_M S/N, \quad (6)$$

где S — число уединенных узлов, наблюдаемых при каждой исходной реализации начальных условий динамических переменных и реализации генератора шума, N — общее количество элементов в ансамбле, M — общее количество используемых реализаций.

2. Воздействие шума на режимы в области мультистабильности

В данном случае при исследовании динамики кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо параметры системы выбирались такими, чтобы в отсутствие шума в системе могла наблюдаться комбинированная структура (см. рис. 1, b , область «CS&SS», выделенная точками). Кроме комбинированной структуры в данной области параметров в зависимости от начальных условий могут также реализоваться только химерные состояния или режимы только уединенных состояний. При этом вероятность установления режимов комбинированной структуры и чисто химерных состояний выше, чем режима уединенных состояний. На рис. 2 проиллюстрированы все эти три режима в отсутствие аддитивного шума в ансамбле (1).

В случае установления в системе только химерных состояний, в пространстве ансамбля сосуществуют кластеры с когерентной и некогерентной динамикой осцилляторов (рис. 2, a),

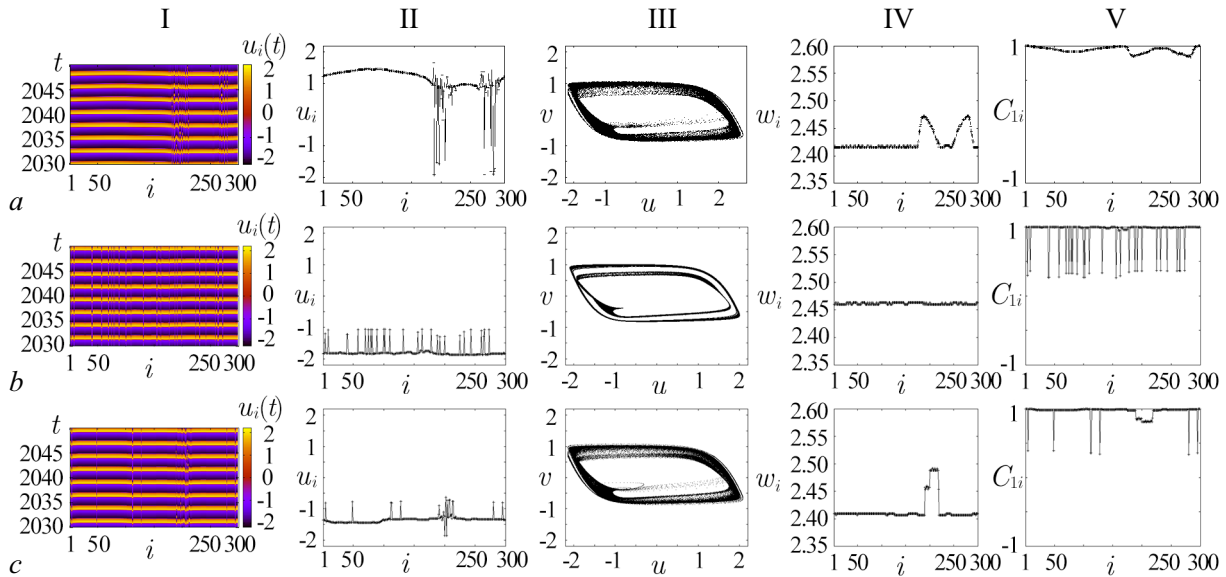


Рис. 2. Динамика кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо (1) при параметрах связи $\sigma = 0.325$, $\phi = 1.48$ и различных начальных распределениях динамических переменных в отсутствие аддитивного шума ($A = 0$): химерное состояние (a), уединенное состояние (b), комбинированная структура (c). Пространственно-временные диаграммы (столбец I), мгновенные профили (столбец II), проекции многомерного аттрактора на плоскость (u, v) (столбец III), профили средних фазовых скоростей (столбец IV), профили коэффициентов взаимной корреляции (столбец V). Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Dynamics of the noise-free ring network of nonlocally coupled FitzHugh–Nagumo oscillators (1) for the coupling parameters $\sigma = 0.325$, $\phi = 1.48$ and different initial distributions of dynamical variables: chimera state (a), solitary state (b), and combined structure (c). Space-time diagrams (column I), snapshots (column II), projections of a multidimensional attractor on the (u, v) plane (column III), mean phase velocity profiles (column IV), cross-correlation coefficient profiles (column V). Other parameters: $\varepsilon = 0.05$, $a = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$, $A = 0$ (color online)

проекция многомерного аттрактора на плоскость (u, v) качественно совпадает с аттрактором, типичным для осциллятора ФитцХью–Нагумо, но имеют место небольшие колебания амплитуды (рис. 2, a, III). На профиле средних фазовых скоростей наблюдаются две куполообразных зависимости в области некогерентных кластеров (рис. 2, a, IV), а коэффициент взаимной корреляции в области некогерентных кластеров принимает значения меньше единицы (рис. 2, a, V). При установлении в системе режима только уединенных состояний (рис. 2, b, I, II) на фазовом портрете всех элементов можно различить два аттрактора, где меньший соответствует уединенным узлам (рис. 2, b, III). При этом значения средних фазовых скоростей для всех элементов почти равны (рис. 2, b, IV), а значения коэффициента взаимной корреляции элементов, соответствующих уединенным узлам, значительно меньше, чем у остальных элементов (рис. 2, b, V). В случае реализации комбинированной структуры (сосуществования химер и уединенных состояний) имеют место все вышеописанные особенности (рис. 2, c).

При добавлении аддитивного шума в ансамбль (1) вероятность установления (со случайных начальных условий) режима уединенных состояний и режима комбинированной структуры стремится к нулю, и все рассмотренные начальные условия приводят к реализации химерных состояний (рис. 3). Так, в присутствии шума даже достаточно малой интенсивности $A < 2 \cdot 10^{-7}$ в системе перестают устанавливаться режимы уединенных состояний, а при $A > 7 \cdot 10^{-6}$ больше не наблюдаются и режимы комбинированных структур. Отметим, что существует значение интенсивности шума, $A = 5 \cdot 10^{-6}$, при котором установление только химерных состояний и режима комбинированной структуры равновероятно.

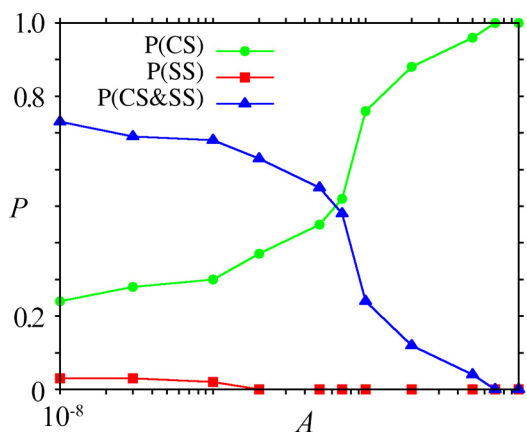


Рис. 3. Зависимости вероятностей установления химерных структур P(CS), режима уединенных состояний P(SS) и режима комбинированной структуры P(CS&SS) в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо от интенсивности аддитивного шума A . Для построения зависимостей использовалось 100 различных начальных распределений динамических переменных. Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Probabilities of settling chimera states P(CS), solitary state regime P(SS), and combined structure regime P(CS&SS) in the network of FitzHugh–Nagumo oscillators versus the noise intensity A . The dependences are plotted using 100 different sets of initial conditions. Other parameters: $\varepsilon = 0.05$, $a = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$ (color online)

На рис. 4 приведены результаты расчетов характеристик, иллюстрирующие динамику кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо при добавлении аддитивного шума разной интенсивности. При малой интенсивности шума в системе еще могут иметь место режимы комбинированных структур, однако в этом случае в ансамбле наблюдается только несколько уединенных узлов (примерно 1...3), что отражено на рис. 4, *a*. Дальнейшее увеличение интенсивности шума ведет к установлению в ансамбле только химерных состояний (рис. 4, *b*, *c*).

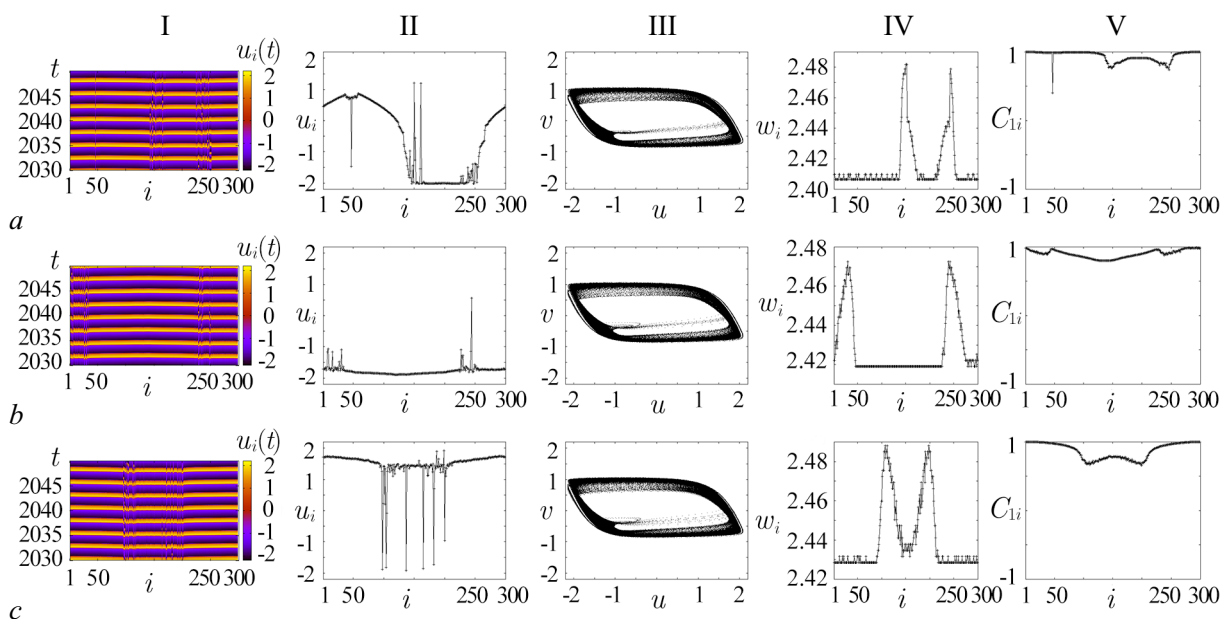


Рис. 4. Динамика кольца нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо при различных значениях интенсивности шума: $A = 10^{-7}$ (*a*), 10^{-6} (*b*), 10^{-5} (*c*). Пространственно-временные диаграммы (столбец I), мгновенные профили (столбец II), проекции многомерного аттрактора на плоскость (u, v) (столбец III), профили средних фазовых скоростей (столбец IV), профили коэффициентов взаимной корреляции (столбец V). Другие параметры и начальные условия соответствуют рис. 2, *c* (цвет онлайн)

Fig. 4. Dynamics of the network of nonlocally coupled FitzHugh–Nagumo oscillators for different values of the noise intensity: $A = 10^{-7}$ (*a*), 10^{-6} (*b*), 10^{-5} (*c*). Space-time diagrams (column I), snapshots (column II), projections of a multidimensional attractor on the (u, v) plane (column III), mean phase velocity profiles (column IV), cross-correlation coefficient profiles (column V). Other parameters and initial conditions corresponds to the structure in Fig. 2, *c* (color online)

3. Воздействие шума на режим уединенных состояний

Проанализируем влияние независимых источников аддитивного нормального белого шума на динамику ансамбля осцилляторов ФитцХью–Нагумо (1) при значениях управляющих параметров ансамбля, которые соответствуют установлению режима уединенных состояний в области слабой и сильной связи (см. рис. 1, синие области).

На рис. 5 представлены распределения значений коэффициента корреляции (4) в соответствии с картами режимов, которые приведены на рис. 1. Видно, что в области, которая соответствует наличию в системе уединенных узлов, коэффициент взаимной корреляции, усредненный по ансамблю, $C \approx 0.96$ (сравните рис. 1 и рис. 5). Такое значение C соответствует наличию в системе небольшого количества уединенных узлов. Как уже говорилось ранее, коэффициент корреляции может только качественно отобразить изменения количества уединенных узлов при увеличении интенсивности аддитивного шума, однако он позволяет проследить за изменением области существования уединенных состояний.

В связи с этим было построено распределение значений усредненных коэффициентов взаимной корреляции при различной интенсивности аддитивного шума для одной реализации случайных начальных условий элементов ансамбля (рис. 6). Как можно видеть, обе области существования уединенных состояний уменьшаются с увеличением интенсивности шума. Однако область, которая находится в интервале слабой связи, более устойчива к внешнему воздействию (рис. 6, *a–d*), чем та, которая находится в интервале сильной связи (рис. 6, *e–h*). Исследования показали, что область, в которой наблюдаются режимы уединенных состояний при слабой связи, полностью исчезает при $A \approx 7 \cdot 10^{-4}$, в то время как в случае сильной связи достаточно интенсивности шума на один порядок меньше $A \approx 7 \cdot 10^{-5}$, чтобы в ансамбле не наблюдались уединенные узлы.

Для более детального исследования влияния аддитивного шума на уединенные состояния в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо была проанализирована зависимость среднего количества уединенных узлов от силы связи между элементами и интенсивности аддитивного шума при фиксированных значениях параметра ϕ в интервале слабой (рис. 7, *a*) и сильной связи (рис. 7, *b*). В данном случае использовалась одна реализация случайно распределенных начальных значений динамических переменных и десять различных реализаций независимых источников белого гауссовского шума. Как можно видеть, при слабой связи количество уединенных узлов меньше, чем при сильной связи (сравните разброс на цветовой шкале N_S на рис. 7, *a* и 7, *b*). При этом зависимость количества уединенных узлов от σ и A в интервале слабой связи, имея куполообразную форму, качественно напоминает зависимости, которые

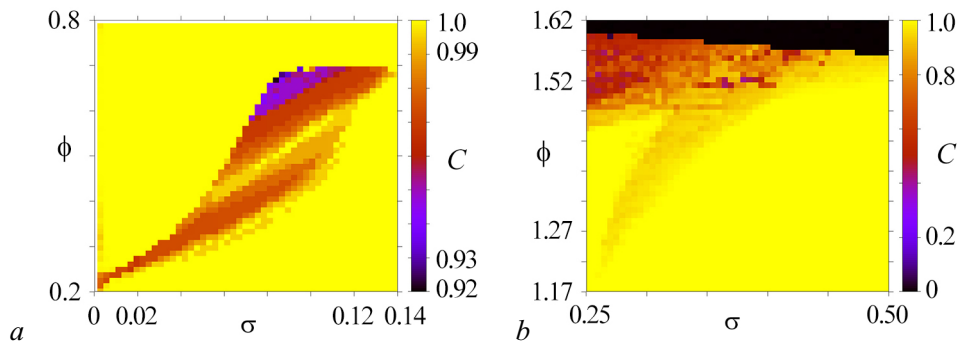


Рис. 5. Распределения значений усредненного коэффициента взаимной корреляции (4) в ансамбле (1) для слабой (*a*) и сильной (*b*) связей в отсутствие шума. Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a_0 = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$, $A = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Distributions of averaged cross-correlation coefficient (4) values in the noise-free network (1) for weak (*a*) and strong (*b*) coupling. Other parameters: $\varepsilon = 0.05$, $a_0 = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$, $A = 0$ (color online)

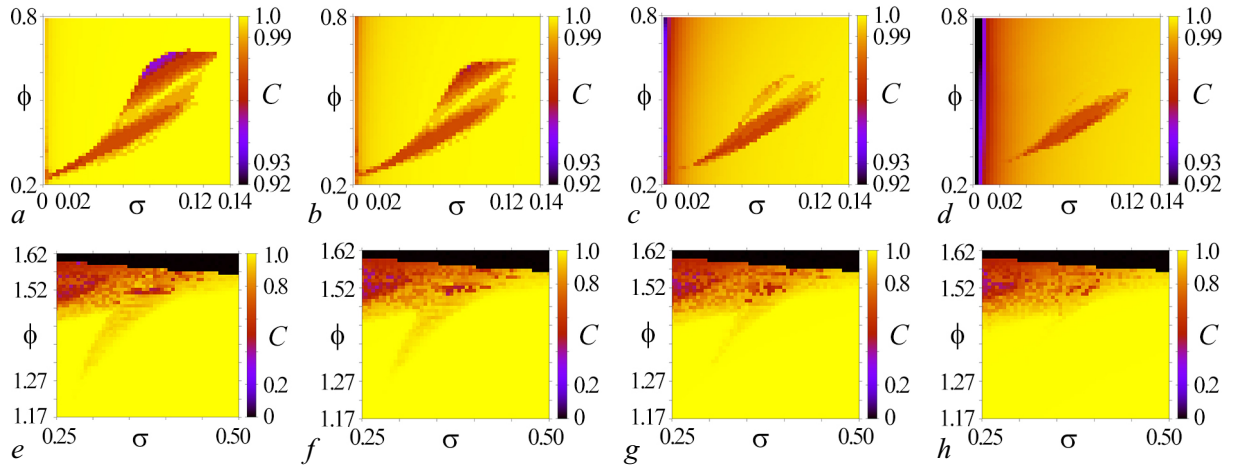


Рис. 6. Карты распределений значений усредненного коэффициента взаимной корреляции (4) в ансамбле (1) на плоскости параметров (σ, ϕ) для слабой ($a-d$) и сильной ($e-h$) связи в присутствии аддитивного шума различной интенсивности: $A = 0.000005$ (a), 0.000025 (b), 0.000100 (c), 0.000200 (d), 0.000005 (e), 0.000010 (f), 0.000025 (g), 0.000050 (h). Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a_0 = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Distribution diagrams for the averaged cross-correlation coefficient (4) in the network (1) in the (σ, ϕ) parameter plane for weak ($a-d$) and strong ($e-h$) coupling for different values of the noise intensity: $A = 0.000005$ (a), 0.000025 (b), 0.000100 (c), 0.000200 (d), 0.000005 (e), 0.000010 (f), 0.000025 (g), 0.000050 (h). Other parameters: $\varepsilon = 0.05$, $a_0 = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$ (color online)

наблюдались в кольцах нелокально связанных отображений Лози, исследованных в работе [48]. Область существования уединенных состояний в случае сильной связи имеет более линейную левую границу (см. рис. 7, b). Однако во всех случаях увеличение интенсивности шума ведет преимущественно к уменьшению количества уединенных узлов и интервала значений параметра σ , в котором они наблюдаются. Только в случае слабой связи при $\sigma \approx 0.119$ можно наблюдать, что при $A = 0$ количество уединенных узлов стремится к 0, а при $A > 0$ может находиться на уровне $P \approx 0.006$ (что соответствует наличию двух–трех уединенных узлов в ансамбле), однако при $A > 0.002$ значение N_S вновь уменьшается до 0 (см. рис. 7, a). То же самое наблюдается

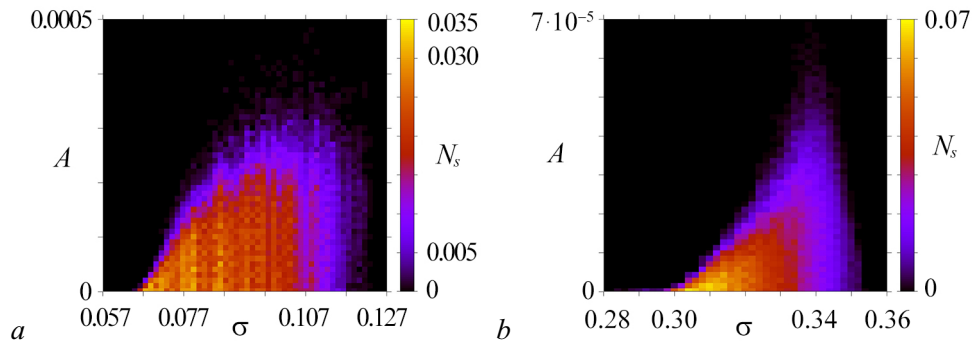


Рис. 7. Среднее нормированное количество уединенных узлов N_S в ансамбле нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо при изменении силы связи σ и интенсивности шума A в интервале слабой (a) и сильной (b) связи при фиксированных значениях параметра ϕ : 0.52 (a), 1.4 (b). Расчеты проводились для одной реализации случайно распределенных начальных значений динамических переменных и десяти различных реализаций шума ($M = 10$). Другие параметры: $\varepsilon = 0.05$, $a_0 = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$ (цвет онлайн)

Fig. 7. Mean normalized number of solitary nodes N_S in the network of coupled FitzHugh–Nagumo oscillators in the (σ, A) parameter plane for weak (a) and strong (b) coupling and for fixed values of the parameter ϕ : 0.52 (a), 1.4 (b). Calculations were performed for a single realization of randomly distributed initial conditions of the dynamical variables and 10 different noise realizations ($M = 10$). Other parameters: $\varepsilon = 0.05$, $a_0 = 0.5$, $R = 105$, $N = 300$ (color online)

на картах распределения усредненного коэффициента взаимной корреляции для случая слабой связи, когда при увеличении интенсивности шума область существования уединенных состояний уменьшалась и слегка сдвигалась вправо в сторону больших значений σ (см. рис. 6, *a-d*).

Заключение

В работе представлены результаты численного моделирования динамики ансамбля нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо в присутствии аддитивного шума. Для анализа влияния шума выбирались значения управляющих параметров связи, соответствующие области мультистабильности, в которой в зависимости от начальных условий могут наблюдаться химерные состояния, режимы уединенных состояний и комбинированные структуры, а также соответствующие реализации в ансамбле только режима уединенных состояний (в интервале слабой и сильной связи).

Показано, что в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо воздействие аддитивного шума на режимы, реализующиеся в области мультистабильности, ведет к увеличению вероятности установления только химерных структур, при этом вероятности наблюдения других режимов уменьшаются до нуля при увеличении интенсивности шума. Таким образом, при наличии аддитивного шумового воздействия химерные состояния проявляют себя как более устойчивые и доминирующие структуры среди всех остальных, сосуществующих в ансамбле.

При введении аддитивного шума в исследуемый ансамбль, который в отсутствие шума демонстрирует режимы только уединенных состояний, увеличение интенсивности шума в общем случае ведет к уменьшению области значений параметров связи, в которой наблюдаются уединенные состояния, и к уменьшению количества уединенных узлов, что также имело место в кольцах нелокально связанных отображений Лози [48]. Однако в кольце нелокально связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо в случае слабой связи введение аддитивного шума может способствовать появлению уединенных состояний при силе связи примерно на 0.04 больше, чем максимальная сила связи, при которой наблюдались уединенные узлы в ансамбле без шума.

Список литературы

1. *Benzi R., Sutera A., Vulpiani A.* The mechanism of stochastic resonance // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1981. Vol. 14, no. 11. P. L453–L457. DOI: 10.1088/0305-4470/14/11/006.
2. *Horsthemke W., Lefever R.* Noise-induced transitions in physics, chemistry, and biology // In: *Noise-Induced Transitions*. Vol. 15 of Springer Series in Synergetics. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984. P. 164–200. DOI: 10.1007/3-540-36852-3_7.
3. *Neiman A.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // *Physical Review E*. 1994. Vol. 49, no. 4. P. 3484–3487. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.3484.
4. *Arnold L.* Random dynamical systems // In: *Johnson R. (eds) Dynamical Systems*. Vol. 1609 of *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995. P. 1–43. DOI: 10.1007/BFb0095238.
5. *Pikovsky A. S., Kurths J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system // *Physical Review Letters*. 1997. Vol. 78, no. 5. P. 775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775.
6. *Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // *УФН*. 1999. Т. 169, № 1. С. 7–38. DOI: 10.3367/UFNr.0169.199901c.0007.
7. *Goldobin D. S., Pikovsky A.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Physical Review E*. 2005. Vol. 71, no. 4. P. 045201. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.045201.
8. *McDonnell M. D., Ward L. M.* The benefits of noise in neural systems: bridging theory and experiment // *Nature Reviews Neuroscience*. 2011. Vol. 12, no. 7. P. 415–425. DOI: 10.1038/nrn3061.

9. *Schimansky-Geier L., Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // *Journal of Statistical Physics*. 1993. Vol. 70, no. 1–2. P. 141–147. DOI: 10.1007/BF01053959.
10. *Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force // *Physical Review Letters*. 1995. Vol. 75, no. 23. P. 4157–4160. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.4157.
11. *Arnold L., Namachchivaya N. S., Schenk-Hoppé K. R.* Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: A case study // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1996. Vol. 6, no. 11. P. 1947–1975. DOI: 10.1142/S0218127496001272.
12. *Han S. K., Yim T. G., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V.* Interacting coherence resonance oscillators // *Physical Review Letters*. 1999. Vol. 83, no. 9. P. 1771–1774. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.1771.
13. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009. Vol. 39, no. 1. P. 72–82. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.01.128.
14. *Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S.* Stochastic resonance in bistable systems // *Physical Review Letters*. 1989. Vol. 62, no. 4. P. 349–352. DOI: 10.1103/PhysRevLett.62.349.
15. *Lindner B., Schimansky-Geier L.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance // *Physical Review E*. 1999. Vol. 60, no. 6. P. 7270–7276. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.7270.
16. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002. Vol. 5, no. 4. P. 380–385.
17. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera states for coupled oscillators // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93, no. 17. P. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
18. *Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E.* Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106, no. 23. P. 234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102.
19. *Panaggio M. J., Abrams D. M.* Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // *Nonlinearity*. 2015. Vol. 28, no. 3. P. R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67.
20. *Zakharova A.* *Chimera Patterns in Networks: Interplay between Dynamics, Structure, Noise, and Delay*. Cham: Springer, 2020. 233 p. DOI: 10.1007/978-3-030-21714-3.
21. *Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, no. 6. P. 060901. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.060901.
22. *Jaros P., Maistrenko Y., Kapitaniak T.* Chimera states on the route from coherence to rotating waves // *Physical Review E*. 2015. Vol. 91, no. 2. P. 022907. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.022907.
23. *Bogomolov S. A., Slepnev A. V., Strelkova G. I., Schöll E., Anishchenko V. S.* Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017. Vol. 43. P. 25–36. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.024.
24. *Panaggio M. J., Abrams D. M.* Chimera states on a flat torus // *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 110, no. 9. P. 094102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.094102.
25. *Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E.* Chimera states in complex networks: interplay of fractal topology and delay // *The European Physical Journal Special Topics*. 2017. Vol. 226, no. 9. P. 1883–1892. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70036-8.
26. *Schöll E.* Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics // *The European Physical Journal Special Topics*. 2016. Vol. 225, no. 6–7. P. 891–919. DOI: 10.1140/epjst/e2016-02646-3.

27. Schöll E. Chimeras in physics and biology: Synchronization and desynchronization of rhythms // In: Hacker J., Lengauer T. (Eds.) *Zeit in Natur und Kultur: Vorträge anlässlich der Jahresversammlung am 20. und 21. September 2019 in Halle (Saale)*. Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, 2021. P. 67–95. DOI: 10.26164/leopoldina_10_00275.
28. Semenova N., Zakharova A., Schöll E., Anishchenko V. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators? // *Europhysics Letters*. 2015. Vol. 112, no. 4. P. 40002. DOI: 10.1209/0295-5075/112/40002.
29. Shima S., Kuramoto Y. Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators // *Physical Review E*. 2004. Vol. 69, no. 3. P. 036213. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.036213.
30. Ulonska S., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Chimera states in networks of Van der Pol oscillators with hierarchical connectivities // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2016. Vol. 26, no. 9. P. 094825. DOI: 10.1063/1.4962913.
31. Zakharova A., Kapeller M., Schöll E. Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks // *Physical Review Letters*. 2014. Vol. 112, no. 15. P. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101.
32. Menck P.J., Heitzig J., Kurths J., Schellnhuber H.J. How dead ends undermine power grid stability // *Nature Communications*. 2014. Vol. 5, no. 1. P. 3969. DOI: 10.1038/ncomms4969.
33. Motter A.E., Myers S.A., Anghel M., Nishikawa T. Spontaneous synchrony in power-grid networks // *Nature Physics*. 2013. Vol. 9, no. 3. P. 191–197. DOI: 10.1038/nphys2535.
34. Wang B., Suzuki H., Aihara K. Enhancing synchronization stability in a multi-area power grid // *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6, no. 1. P. 26596. DOI: 10.1038/srep26596.
35. Hong S., Chun Y. Efficiency and stability in a model of wireless communication networks // *Social Choice and Welfare*. 2010. Vol. 34, no. 3. P. 441–454. DOI: 10.1007/s00355-009-0409-1.
36. González-Avella J. C., Cosenza M. G., San Miguel M. Localized coherence in two interacting populations of social agents // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2014. Vol. 399. P. 24–30. DOI: 10.1016/j.physa.2013.12.035.
37. Bansal K., Garcia J. O., Tompson S. H., Verstynen T., Vettel J. M., Muldoon S. F. Cognitive chimera states in human brain networks // *Science Advances*. 2019. Vol. 5, no. 4. P. eaau8535. DOI: 10.1126/sciadv.aau8535.
38. Majhi S., Bera B. K., Ghosh D., Perc M. Chimera states in neuronal networks: A review // *Physics of Life Reviews*. 2019. Vol. 28. P. 100–121. DOI: 10.1016/j.plrev.2018.09.003.
39. Schöll E. Partial synchronization patterns in brain networks // *Europhysics Letters*. 2022. Vol. 136, no. 1. P. 18001. DOI: 10.1209/0295-5075/ac3b97.
40. Levy R., Hutchison W. D., Lozano A. M., Dostrovsky J. O. High-frequency synchronization of neuronal activity in the subthalamic nucleus of parkinsonian patients with limb tremor // *J. Neurosci*. 2000. Vol. 20, no. 20. P. 7766–7775. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.20-20-07766.2000.
41. Rattenborg N. C., Amlaner C. J., Lima S. L. Behavioral, neurophysiological and evolutionary perspectives on unihemispheric sleep // *Neurosci. Biobehav. Rev*. 2000. Vol. 24, no. 8. P. 817–842. DOI: 10.1016/s0149-7634(00)00039-7.
42. Funahashi S., Bruce C. J., Goldman-Rakic P. S. Neuronal activity related to saccadic eye movements in the monkey's dorsolateral prefrontal cortex // *J. Neurophysiol*. 1991. Vol. 65, no. 6. P. 1464–1483. DOI: 10.1152/jn.1991.65.6.1464.
43. Swindale N. V. A model for the formation of ocular dominance stripes // *Proc. R. Soc. Lond. B*. 1980. Vol. 208, no. 1171. P. 243–264. DOI: 10.1098/rspb.1980.0051.
44. Andrzejak R. G., Rummel C., Mormann F., Schindler K. All together now: Analogies between chimera state collapses and epileptic seizures // *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6, no. 1. P. 23000. DOI: 10.1038/srep23000.
45. Malchow A.-K., Omelchenko I., Schöll E., Hövel P. Robustness of chimera states in nonlocally coupled networks of nonidentical logistic maps // *Physical Review E*. 2018. Vol. 98, no. 1. P. 012217. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.012217.

46. *Bukh A. V., Slepnev A. V., Anishchenko V. S., Vadivasova T. E.* Stability and noise-induced transitions in an ensemble of nonlocally coupled chaotic maps // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2018. Vol. 23, no. 3. P. 325–338. DOI: 10.1134/S1560354718030073.
47. *Rybalova E. V., Klyushina D. Y., Anishchenko V. S., Strelkova G. I.* Impact of noise on the amplitude chimera lifetime in an ensemble of nonlocally coupled chaotic maps // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2019. Vol. 24, no. 4. P. 432–445. DOI: 10.1134/S1560354719040051.
48. *Rybalova E., Schöll E., Strelkova G.* Controlling chimera and solitary states by additive noise in networks of chaotic maps // *Journal of Difference Equations and Applications*. 2022. P. 1–22. DOI: 10.1080/10236198.2022.2118580.
49. *Rybalova E., Muni S., Strelkova G.* Transition from chimera/solitary states to traveling waves // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2023. Vol. 33, no. 3. P. 033104. DOI: 10.1063/5.0138207.
50. *Нечаев В. А., Рыбалова Е. В., Стрелкова Г. И.* Влияние неоднородности параметров на существование химерных структур в кольце нелокально связанных отображений // *Известия вузов. ПНД*. 2021. Т. 29, № 6. С. 943–952. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-943-952.
51. *Nikishina N. N., Rybalova E. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E.* Destruction of cluster structures in an ensemble of chaotic maps with noise-modulated nonlocal coupling // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2022. Vol. 27, no. 2. P. 242–251. DOI: 10.1134/S1560354722020083.
52. *Omelchenko I., Provata A., Hizanidis J., Schöll E., Hövel P.* Robustness of chimera states for coupled FitzHugh-Nagumo oscillators // *Physical Review E*. 2015. Vol. 91, no. 2. P. 022917. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.022917.
53. *Semenova N., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E.* Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements // *Physical Review Letters*. 2016. Vol. 117, no. 1. P. 014102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102.
54. *Zakharova A., Loos S., Siebert J., Gjurchinovski A., Schöll E.* Chimera patterns: influence of time delay and noise // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. Vol. 48, no. 18. P. 7–12. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.002.
55. *Loos S. A. M., Claussen J. C., Schöll E., Zakharova A.* Chimera patterns under the impact of noise // *Physical Review E*. 2016. Vol. 93, no. 1. P. 012209. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.012209.
56. *Wu H., Dhamala M.* Dynamics of Kuramoto oscillators with time-delayed positive and negative couplings // *Physical Review E*. 2018. Vol. 98, no. 3. P. 032221. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.032221.
57. *Jaros P., Brezetsky S., Levchenko R., Dudkowski D., Kapitaniak T., Maistrenko Y.* Solitary states for coupled oscillators with inertia // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2018. Vol. 28, no. 1. P. 011103. DOI: 10.1063/1.5019792.
58. *Berner R., Polanska A., Schöll E., Yanchuk S.* Solitary states in adaptive nonlocal oscillator networks // *The European Physical Journal Special Topics*. 2020. Vol. 229, no. 12–13. P. 2183–2203. DOI: 10.1140/epjst/e2020-900253-0.
59. *Semenova N. I., Rybalova E. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S.* “Coherence–incoherence” transition in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators with nonhyperbolic and hyperbolic attractors // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2017. Vol. 22, no. 2. P. 148–162. DOI: 10.1134/S1560354717020046.
60. *Semenova N., Vadivasova T., Anishchenko V.* Mechanism of solitary state appearance in an ensemble of nonlocally coupled Lozi maps // *The European Physical Journal Special Topics*. 2018. Vol. 227, no. 10–11. P. 1173–1183. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800035-y.
61. *Schülen L., Ghosh S., Kachhvah A. D., Zakharova A., Jalan S.* Delay engineered solitary states in complex networks // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2019. Vol. 128. P. 290–296. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.07.046.
62. *Mikhaylenko M., Ramlow L., Jalan S., Zakharova A.* Weak multiplexing in neural networks:

- Switching between chimera and solitary states // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, no. 2. P. 023122. DOI: 10.1063/1.5057418.
63. Rybalova E., Anishchenko V. S., Strelkova G. I., Zakharova A. Solitary states and solitary state chimera in neural networks // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, no. 7. P. 071106. DOI: 10.1063/1.5113789.
 64. Schülen L., Janzen D. A., Medeiros E. S., Zakharova A. Solitary states in multiplex neural networks: Onset and vulnerability // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021. Vol. 145. P. 110670. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110670.
 65. Taher H., Olmi S., Schöll E. Enhancing power grid synchronization and stability through time-delayed feedback control // *Physical Review E*. 2019. Vol. 100, no. 6. P. 062306. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.062306.
 66. Hellmann F., Schultz P., Jaros P., Levchenko R., Kapitaniak T., Kurths J., Maistrenko Y. Network-induced multistability through lossy coupling and exotic solitary states // *Nature Communications*. 2020. Vol. 11, no. 1. P. 592. DOI: 10.1038/s41467-020-14417-7.
 67. Berner R., Yanchuk S., Schöll E. What adaptive neuronal networks teach us about power grids // *Physical Review E*. 2021. Vol. 103, no. 4. P. 042315. DOI: 10.1103/PhysRevE.103.042315.
 68. Kapitaniak T., Kuzma P., Wojewoda J., Czolczynski K., Maistrenko Y. Imperfect chimera states for coupled pendula // *Scientific Reports*. 2014. Vol. 4, no. 1. P. 6379. DOI: 10.1038/srep06379.
 69. Fried I., MacDonald K. A., Wilson C. L. Single neuron activity in human hippocampus and amygdala during recognition of faces and objects // *Neuron*. 1997. Vol. 18, no. 5. P. 753–765. DOI: 10.1016/s0896-6273(00)80315-3.
 70. Kreiman G., Koch C., Fried I. Category-specific visual responses of single neurons in the human medial temporal lobe // *Nature Neuroscience*. 2000. Vol. 3, no. 9. P. 946–953. DOI: 10.1038/78868.
 71. Rose D. Some reflections on (or by?) grandmother cells // *Perception*. 1996. Vol. 25, no. 8. P. 881–886. DOI: 10.1068/p250881.
 72. Quiroga R. Q., Reddy L., Kreiman G., Koch C., Fried I. Invariant visual representation by single neurons in the human brain // *Nature*. 2005. Vol. 435, no. 7045. P. 1102–1107. DOI: 10.1038/nature03687.
 73. Xin Y., Zhong L., Zhang Y., Zhou T., Pan J., Xu N.-L. Sensory-to-category transformation via dynamic reorganization of ensemble structures in mouse auditory cortex // *Neuron*. 2019. Vol. 103, no. 5. P. 909–921. DOI: 10.1016/j.neuron.2019.06.004.
 74. Franović I., Eydam S., Semenova N., Zakharova A. Unbalanced clustering and solitary states in coupled excitable systems // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2022. Vol. 32, no. 1. P. 011104. DOI: 10.1063/5.0077022.
 75. Rybalova E., Strelkova G. Response of solitary states to noise-modulated parameters in nonlocally coupled networks of Lozi maps // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2022. Vol. 32, no. 2. P. 021101. DOI: 10.1063/5.0082431.
 76. Omelchenko I., Omel'chenko O. E., Hövel P., Schöll E. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: Patched synchrony or multichimera states // *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 110, no. 22. P. 224101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.224101.
 77. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical Journal*. 1961. Vol. 1, no. 6. P. 445–466. DOI: 10.1016/s0006-3495(61)86902-6.
 78. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proceedings of the IRE*. 1962. Vol. 50, no. 10. P. 2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.

References

1. Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1981;14(11):L453–L457. DOI: 10.1088/0305-4470/14/11/006.

2. Horsthemke W, Lefever R. Noise-induced transitions in physics, chemistry, and biology. In: Noise-Induced Transitions. Vol. 15 of Springer Series in Synergetics. Berlin, Heidelberg: Springer; 1984. P. 164–200. DOI: 10.1007/3-540-36852-3_7.
3. Neiman A. Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems. *Physical Review E*. 1994;49(4):3484–3487. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.3484.
4. Arnold L. Random dynamical systems. In: Johnson R, editor. *Dynamical Systems*. Vol. 1609 of Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer; 1995. P. 1–43. DOI: 10.1007/BFb0095238.
5. Pikovsky AS, Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Physical Review Letters*. 1997;78(5):775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775.
6. Anishchenko VS, Neiman AB, Moss F, Shimansky-Geier L. Stochastic resonance: noise-enhanced order. *Phys. Usp.* 1999;42(1):7–36. DOI: 10.1070/PU1999v042n01ABEH000444.
7. Goldobin DS, Pikovsky A. Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise. *Physical Review E*. 2005;71(4):045201. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.045201.
8. McDonnell MD, Ward LM. The benefits of noise in neural systems: bridging theory and experiment. *Nature Reviews Neuroscience*. 2011;12(7):415–425. DOI: 10.1038/nrn3061.
9. Schimansky-Geier L, Herzog H. Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator. *Journal of Statistical Physics*. 1993;70(1–2):141–147. DOI: 10.1007/BF01053959.
10. Shulgin B, Neiman A, Anishchenko V. Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by a periodic force. *Physical Review Letters*. 1995;75(23):4157–4160. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.4157.
11. Arnold L, Namachchivaya NS, Schenk-Hoppé KR. Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: A case study. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1996;6(11):1947–1975. DOI: 10.1142/S0218127496001272.
12. Han SK, Yim TG, Postnov DE, Sosnovtseva OV. Interacting coherence resonance oscillators. *Physical Review Letters*. 1999;83(9):1771–1774. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.1771.
13. Bashkirtseva I, Ryashko L, Schurz H. Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009;39(1):72–82. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.01.128.
14. Gammaitoni L, Marchesoni F, Menichella-Saetta E, Santucci S. Stochastic resonance in bistable systems. *Physical Review Letters*. 1989;62(4):349–352. DOI: 10.1103/PhysRevLett.62.349.
15. Lindner B, Schimansky-Geier L. Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance. *Physical Review E*. 1999;60(6):7270–7276. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.7270.
16. Kuramoto Y, Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002;5(4):380–385.
17. Abrams DM, Strogatz SH. Chimera states for coupled oscillators. *Physical Review Letters*. 2004;93(17):174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
18. Omelchenko I, Maistrenko Y, Hövel P, Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states. *Physical Review Letters*. 2011;106(23):234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102.
19. Panaggio MJ, Abrams DM. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*. 2015;28(3):R67. DOI: 10.1088/0951-7715/28/3/R67.
20. Zakharova A. *Chimera Patterns in Networks: Interplay between Dynamics, Structure, Noise, and Delay*. Cham: Springer; 2020. 233 p. DOI: 10.1007/978-3-030-21714-3.
21. Maistrenko Y, Penkovsky B, Rosenblum M. Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions. *Physical Review E*. 2014;89(6):060901. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.060901.

22. Jaros P, Maistrenko Y, Kapitaniak T. Chimera states on the route from coherence to rotating waves. *Physical Review E*. 2015;91(2):022907. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.022907.
23. Bogomolov SA, Slepnev AV, Strelkova GI, Schöll E, Anishchenko VS. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017;43:25–36. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.06.024.
24. Panaggio MJ, Abrams DM. Chimera states on a flat torus. *Physical Review Letters*. 2013;110(9):094102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.094102.
25. Sawicki J, Omelchenko I, Zakharova A, Schöll E. Chimera states in complex networks: interplay of fractal topology and delay. *The European Physical Journal Special Topics*. 2017;226(9):1883–1892. DOI: 10.1140/epjst/e2017-70036-8.
26. Schöll E. Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics. *The European Physical Journal Special Topics*. 2016;225(6–7):891–919. DOI: 10.1140/epjst/e2016-02646-3.
27. Schöll E. Chimeras in physics and biology: Synchronization and desynchronization of rhythms. In: Hacker J, Lengauer T, editors. *Zeit in Natur und Kultur: Vorträge anlässlich der Jahresversammlung am 20. und 21. September 2019 in Halle (Saale)*. Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft; 2021. P. 67–95. DOI: 10.26164/leopoldina_10_00275.
28. Semenova N, Zakharova A, Schöll E, Anishchenko V. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators? *Europhysics Letters*. 2015;112(4):40002. DOI: 10.1209/0295-5075/112/40002.
29. Shima S, Kuramoto Y. Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators. *Physical Review E*. 2004;69(3):036213. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.036213.
30. Ulonska S, Omelchenko I, Zakharova A, Schöll E. Chimera states in networks of Van der Pol oscillators with hierarchical connectivities. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2016;26(9):094825. DOI: 10.1063/1.4962913.
31. Zakharova A, Kapeller M, Schöll E. Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks. *Physical Review Letters*. 2014;112(15):154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.154101.
32. Menck PJ, Heitzig J, Kurths J, Schellnhuber HJ. How dead ends undermine power grid stability. *Nature Communications*. 2014;5(1):3969. DOI: 10.1038/ncomms4969.
33. Motter AE, Myers SA, Anghel M, Nishikawa T. Spontaneous synchrony in power-grid networks. *Nature Physics*. 2013;9(3):191–197. DOI: 10.1038/nphys2535.
34. Wang B, Suzuki H, Aihara K. Enhancing synchronization stability in a multi-area power grid. *Scientific Reports*. 2016;6(1):26596. DOI: 10.1038/srep26596.
35. Hong S, Chun Y. Efficiency and stability in a model of wireless communication networks. *Social Choice and Welfare*. 2010;34(3):441–454. DOI: 10.1007/s00355-009-0409-1.
36. González-Avella JC, Cosenza MG, San Miguel M. Localized coherence in two interacting populations of social agents. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2014;399:24–30. DOI: 10.1016/j.physa.2013.12.035.
37. Bansal K, Garcia JO, Tompson SH, Verstynen T, Vettel JM, Muldoon SF. Cognitive chimera states in human brain networks. *Science Advances*. 2019;5(4):eaau8535. DOI: 10.1126/sciadv.aau8535.
38. Majhi S, Bera BK, Ghosh D, Perc M. Chimera states in neuronal networks: A review. *Physics of Life Reviews*. 2019;28:100–121. DOI: 10.1016/j.plrev.2018.09.003.
39. Schöll E. Partial synchronization patterns in brain networks. *Europhysics Letters*. 2022;136(1):18001. DOI: 10.1209/0295-5075/ac3b97.
40. Levy R, Hutchison WD, Lozano AM, Dostrovsky JO. High-frequency synchronization of neuronal activity in the subthalamic nucleus of parkinsonian patients with limb tremor. *J. Neurosci*. 2000;20(20):7766–7775. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.20-20-07766.2000.

41. Rattenborg NC, Amlaner CJ, Lima SL. Behavioral, neurophysiological and evolutionary perspectives on unihemispheric sleep. *Neurosci. Biobehav. Rev.* 2000;24(8):817–842. DOI: 10.1016/s0149-7634(00)00039-7.
42. Funahashi S, Bruce CJ, Goldman-Rakic PS. Neuronal activity related to saccadic eye movements in the monkey's dorsolateral prefrontal cortex. *J. Neurophysiol.* 1991;65(6):1464–1483. DOI: 10.1152/jn.1991.65.6.1464.
43. Swindale NV. A model for the formation of ocular dominance stripes. *Proc. R. Soc. Lond. B.* 1980;208(1171):243–264. DOI: 10.1098/rspb.1980.0051.
44. Andrzejak RG, Rummel C, Mormann F, Schindler K. All together now: Analogies between chimera state collapses and epileptic seizures. *Scientific Reports.* 2016;6(1):23000. DOI: 10.1038/srep23000.
45. Malchow A-K, Omelchenko I, Schöll E, Hövel P. Robustness of chimera states in nonlocally coupled networks of nonidentical logistic maps. *Physical Review E.* 2018;98(1):012217. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.012217.
46. Bukh AV, Slepnev AV, Anishchenko VS, Vadivasova TE. Stability and noise-induced transitions in an ensemble of nonlocally coupled chaotic maps. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2018;23(3):325–338. DOI: 10.1134/S1560354718030073.
47. Rybalova EV, Klyushina DY, Anishchenko VS, Strelkova GI. Impact of noise on the amplitude chimera lifetime in an ensemble of nonlocally coupled chaotic maps. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2019;24(4):432–445. DOI: 10.1134/S1560354719040051.
48. Rybalova E, Schöll E, Strelkova G. Controlling chimera and solitary states by additive noise in networks of chaotic maps. *Journal of Difference Equations and Applications.* 2022:1–22. DOI: 10.1080/10236198.2022.2118580.
49. Rybalova E, Muni S, Strelkova G. Transition from chimera/solitary states to traveling waves. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 2023;33(3):033104. DOI: 10.1063/5.0138207.
50. Nechaev VA, Rybalova EV, Strelkova GI. Influence of parameters inhomogeneity on the existence of chimera states in a ring of nonlocally coupled maps. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(6):943–952 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-943-952.
51. Nikishina NN, Rybalova EV, Strelkova GI, Vadivasova TE. Destruction of cluster structures in an ensemble of chaotic maps with noise-modulated nonlocal coupling. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2022;27(2):242–251. DOI: 10.1134/S1560354722020083.
52. Omelchenko I, Provata A, Hizanidis J, Schöll E, Hövel P. Robustness of chimera states for coupled FitzHugh-Nagumo oscillators. *Physical Review E.* 2015;91(2):022917. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.022917.
53. Semenova N, Zakharova A, Anishchenko V, Schöll E. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements. *Physical Review Letters.* 2016;117(1):014102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102.
54. Zakharova A, Loos S, Siebert J, Gjurchinovski A, Schöll E. Chimera patterns: influence of time delay and noise. *IFAC-PapersOnLine.* 2015;48(18):7–12. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.002.
55. Loos SAM, Claussen JC, Schöll E, Zakharova A. Chimera patterns under the impact of noise. *Physical Review E.* 2016;93(1):012209. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.012209.
56. Wu H, Dhamala M. Dynamics of Kuramoto oscillators with time-delayed positive and negative couplings. *Physical Review E.* 2018;98(3):032221. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.032221.
57. Jaros P, Brezetsky S, Levchenko R, Dudkowski D, Kapitaniak T, Maistrenko Y. Solitary states for coupled oscillators with inertia. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 2018;28(1):011103. DOI: 10.1063/1.5019792.
58. Berner R, Polanska A, Schöll E, Yanchuk S. Solitary states in adaptive nonlocal oscillator networks. *The European Physical Journal Special Topics.* 2020;229(12–13):2183–2203. DOI: 10.1140/epjst/e2020-900253-0.

59. Semenova NI, Rybalova EV, Strelkova GI, Anishchenko VS. “Coherence–incoherence” transition in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators with nonhyperbolic and hyperbolic attractors. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2017;22(2):148–162. DOI: 10.1134/S1560354717020046.
60. Semenova N, Vadivasova T, Anishchenko V. Mechanism of solitary state appearance in an ensemble of nonlocally coupled Lozi maps. *The European Physical Journal Special Topics*. 2018;227(10–11):1173–1183. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800035-y.
61. Schülen L, Ghosh S, Kachhvah AD, Zakharova A, Jalan S. Delay engineered solitary states in complex networks. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2019;128:290–296. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.07.046.
62. Mikhaylenko M, Ramlow L, Jalan S, Zakharova A. Weak multiplexing in neural networks: Switching between chimera and solitary states. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(2):023122. DOI: 10.1063/1.5057418.
63. Rybalova E, Anishchenko VS, Strelkova GI, Zakharova A. Solitary states and solitary state chimera in neural networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(7):071106. DOI: 10.1063/1.5113789.
64. Schülen L, Janzen DA, Medeiros ES, Zakharova A. Solitary states in multiplex neural networks: Onset and vulnerability. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021;145:110670. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110670.
65. Taher H, Olmi S, Schöll E. Enhancing power grid synchronization and stability through time-delayed feedback control. *Physical Review E*. 2019;100(6):062306. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.062306.
66. Hellmann F, Schultz P, Jaros P, Levchenko R, Kapitaniak T, Kurths J, Maistrenko Y. Network-induced multistability through lossy coupling and exotic solitary states. *Nature Communications*. 2020;11(1):592. DOI: 10.1038/s41467-020-14417-7.
67. Berner R, Yanchuk S, Schöll E. What adaptive neuronal networks teach us about power grids. *Physical Review E*. 2021;103(4):042315. DOI: 10.1103/PhysRevE.103.042315.
68. Kapitaniak T, Kuzma P, Wojewoda J, Czolczynski K, Maistrenko Y. Imperfect chimera states for coupled pendula. *Scientific Reports*. 2014;4(1):6379. DOI: 10.1038/srep06379.
69. Fried I, MacDonald KA, Wilson CL. Single neuron activity in human hippocampus and amygdala during recognition of faces and objects. *Neuron*. 1997;18(5):753–765. DOI: 10.1016/S0896-6273(00)80315-3.
70. Kreiman G, Koch C, Fried I. Category-specific visual responses of single neurons in the human medial temporal lobe. *Nature Neuroscience*. 2000;3(9):946–953. DOI: 10.1038/78868.
71. Rose D. Some reflections on (or by?) grandmother cells. *Perception*. 1996;25(8):881–886. DOI: 10.1068/p250881.
72. Quiroga RQ, Reddy L, Kreiman G, Koch C, Fried I. Invariant visual representation by single neurons in the human brain. *Nature*. 2005;435(7045):1102–1107. DOI: 10.1038/nature03687.
73. Xin Y, Zhong L, Zhang Y, Zhou T, Pan J, Xu N-L. Sensory-to-category transformation via dynamic reorganization of ensemble structures in mouse auditory cortex. *Neuron*. 2019;103(5):909–921. DOI: 10.1016/j.neuron.2019.06.004.
74. Franović I, Eydam S, Semenova N, Zakharova A. Unbalanced clustering and solitary states in coupled excitable systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2022;32(1):011104. DOI: 10.1063/5.0077022.
75. Rybalova E, Strelkova G. Response of solitary states to noise-modulated parameters in nonlocally coupled networks of Lozi maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2022;32(2):021101. DOI: 10.1063/5.0082431.
76. Omelchenko I, Omel'chenko OE, Hövel P, Schöll E. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: Patched synchrony or multichimera states. *Physical Review Letters*. 2013;110(22):224101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.224101.

77. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*. 1961;1(6):445–466. DOI: 10.1016/s0006-3495(61)86902-6.
78. Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*. 1962;50(10):2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.



Рябченко Андрей Дмитриевич — родился в Саратове (2003). Окончил МОУ «Лицей № 47». Студент 3 курса бакалавриата Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по направлению «Инфокоммуникационные технологии и системы связи». Научные интересы: нелинейная динамика, численное моделирование, влияние флуктуаций.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: andreuryabchenko.2003@gmail.com



Рыбалова Елена Владиславовна — окончила физический факультет Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по направлению «Радиофизика» (2020), поступила в аспирантуру СГУ по направлению «Физика и астрономия». С 2018 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ в должности инженера, а с 2020 — в должности ассистента. Научные интересы: нелинейная динамика и теория колебаний, синхронизация, влияние флуктуаций, ансамбли связанных осцилляторов, химерные и уединенные состояния. Имеет более 25 научных публикаций в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: rybalovaev@gmail.com
ORCID: 0000-0003-3008-1078
AuthorID (eLibrary.Ru): 1109908



Стрелкова Галина Ивановна — окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (1993). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1998) и доктора физико-математических наук (2020). С 1994 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ: ведущим инженером (1994–2008), доцентом кафедры (2008–2021), заведующим кафедрой (с июня 2021 по настоящее время). Область научных интересов: нелинейная динамика, теория колебаний, химерные состояния, синхронизация сложных структур, многослойные сети. В соавторстве опубликовано 3 монографии, 3 учебных пособия и более 100 научных статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: strelkovagi@sgu.ru
ORCID: 0000-0002-8667-2742
AuthorID (eLibrary.Ru): 34836

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

A. N. Chumachenko, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

S. Boccaletti, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

A. M. Bykov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

V. A. Vakorin, Ph.D., Simon Fraser University (Vancouver, Canada)

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

N. S. Ginzburg, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

A. V. Kraskov, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

N. V. Kuznetsov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

G. van Luijelaar, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

A. Lüttjohann, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

I. I. Mokhov, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

A. B. Neiman, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

V. I. Nekorkin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Pkovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, University of Potsdam (Potsdam, Germany)

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

V. V. Tuchin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

V. A. Cherepenin, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >