

ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

# Прикладная Деловая Динамика



*70 лет Сергею Александровичу Кащенко  
(14 марта 1953 года)*

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Ю. В. Гуляев*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

## ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*И. В. Сысоев*, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*А. Н. Чумаченко*, д. геогр. н., СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

## ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

*В. М. Аникин*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*Б. П. Безручко*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

*С. Боккалетти*, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)

*А. М. Быков*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*В. А. Вакорин*, Ph.D., Университет Саймона Фрейзера (Ванкувер, Канада)

*С. В. Гонченко*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*Н. С. Гинзбург*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*А. С. Дмитриев*, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*С. А. Кащенко*, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)

*А. В. Красков*, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

*Н. В. Кузнецов*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

*Ж. ван Луйтелаар*, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

*А. Люттйоханн*, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

*Г. Г. Малинецкий*, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

*В. В. Матросов*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

*И. И. Мохов*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

*А. Б. Нейман*, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

*В. И. Некоркин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*А. С. Пиковский*, доктор наук, Потсдамский университет (Потсдам, Германия)

*А. Н. Писарчик*, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

*А. В. Порубов*, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

*В. В. Тучин*, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

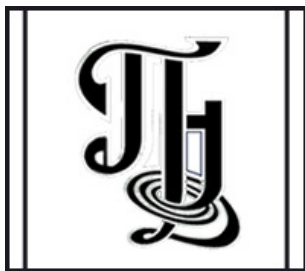
*А. М. Фейгин*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

*В. А. Царёв*, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А (Саратов, Россия)

*В. А. Черепенин*, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

*М. В. Шитикова*, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

*В. Г. Яхно*, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений  
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*Научно-технический журнал*

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

**Учредитель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

**Издатель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (uralpress.ru). Цена свободная

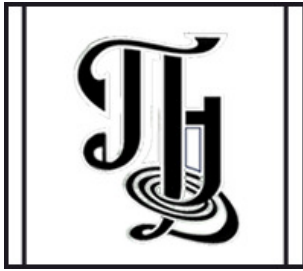
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией М. В. Сысоева  
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова  
Оформление А. А. Токмачевой  
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,  
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,  
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,  
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 16.03.2023  
Вышел в свет 31.03.2023  
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 14,18 (14,72)  
Тираж 100 экз. Заказ № 32-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского  
университета. Адрес типографии: Россия,  
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8  
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



**Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy**  
**APPLIED NONLINEAR DYNAMICS**

*Scientific-technical journal*

Published since 1993, 6 issues per year

**The journal was founded by** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

**The publisher of the journal is** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies ([ural-press.ru](http://ural-press.ru))

The journal is Open Access

Head of Editorial office M. V. Sysoeva  
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova  
Design of A. A. Tokmacheva  
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,  
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,  
+7 (909) 3367208, e-mail: [andjournal@sgu.ru](mailto:andjournal@sgu.ru),  
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 16.03.2023. Published 31.03.2023  
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 14,18 (14,72)  
Edition of 100 copies. Order No. 32-T

Printed by Printing House of Saratov State  
University. Address of Printing House:  
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,  
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: [sguprint@bk.ru](mailto:sguprint@bk.ru)

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

ОТ РЕДАКТОРА

*Кащенко И. С., Глызин С. Д.* К юбилею Сергея Александровича Кащенко ..... 125

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ  
ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС

*Аникин В. М.* Представление точных траекторных решений для хаотических одномерных отображений в форме Шрёдера..... 128

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Курилова Е. В., Кулаков М. П., Фрисман Е. Я.* Механизмы формирования пачечной динамики в системе миграционно связанных сообществ типа хищник–жертва..... 143

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА  
И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

*Козлов А. К., Матросов В. В., Шалфеев В. Д.* О динамике публикационной активности по синхронизации..... 170

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

*Нажесткин И. А., Сварник О. Е.* Теория интегрированной информации и её применение к анализу нейронной активности головного мозга ..... 180

*Писарчик А. Н., Хорев В. С., Бадарин А. А., Антипов В. М., Бударина А. О., Храмов А. Е.* Методология дизайна нейрофизиологических экспериментов с предъявлением визуальных стимулов для оценки уровня владения иностранным языком 202

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

*Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л., Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А.* Влияние параметрической неустойчивости на спиновую накачку дипольно-обменными поверхностными магнитостатическими волнами в структурах ЖИГ–Pt ..... 225

**C O N T E N T S**

EDITORIAL

*Kashchenko I. S., Glyzin S. D.* On the anniversary of Sergei A. Kashchenko ..... 125

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.  
QUANTUM CHAOS

*Anikin V. M.* Representation of exact trajectory solutions for chaotic one-dimensional maps in Schröder form ..... 128

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

*Kurilova E. V., Kulakov M. P., Frisman E. Ya.* Mechanisms leading to bursting oscillations in the system of predator–prey communities coupled by migrations ..... 143

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

*Kozlov A. K., Matrosov V. V., Shalfeev V. D.* About dynamics of publication activity on synchronization ..... 170

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

*Nazhestkin I. A., Svarnik O. E.* Integrated information theory and its application for analysis of brain neuron activity ..... 180


*Pisarchik A. N., Khorev V. S., Badarin A. A., Antipov V. M., Budarina A. O., Hramov A. E.* Methodology of the neurophysiological experiments with visual stimuli to assess foreign language proficiency ..... 202

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION


*Seleznev M. E., Nikulin Y. V., Khivintsev Y. V., Vysotskii S. L., Kozhevnikov A. V., Sakharov V. K., Dudko G. M., Filimonov Y. A.* Influence of parametric instability on spin pumping by dipole-exchange magnetostatic surface waves in YIG–Pt structures ..... 225



## К юбилею Сергея Александровича Кащенко

*И. С. Кащенко , С. Д. Глызин*

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия

E-mail:  [iliyask@uniyar.ac.ru](mailto:iliyask@uniyar.ac.ru), [glyzin@gmail.com](mailto:glyzin@gmail.com)

Поступила в редакцию 10.03.2023, опубликована 31.03.2023

*Для цитирования:* Кащенко И. С., Глызин С. Д. К юбилею Сергея Александровича Кащенко // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 2. С. 125–127. DOI: 10.18500/0869-6632-003035. EDN: JFWSZA

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

14 марта 2023 года отмечает 70-летие Сергей Александрович Кащенко — выдающийся математик, доктор физико-математических наук, профессор.

Сергей Александрович окончил математический факультет Ярославского государственного университета в 1975 году, а в 1977 году после службы в армии без учебы в аспирантуре защитил кандидатскую диссертацию по теме «Некоторые качественные вопросы теории линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с точками поворота» под руководством Ю. С. Колесова. В 1989 году защитил докторскую диссертацию по теме «Исследование установившихся режимов систем сингулярно возмущенных уравнений с распределенными параметрами».

Работать в Ярославском университете Сергей Александрович начал еще студентом, прошел все должности от ассистента до профессора, а в 1991 году в ЯрГУ по его инициативе была создана кафедра математического моделирования, которую он возглавлял до 2019 года. С 2001 года и по настоящее время С. А. Кащенко работает в должности первого проректора Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

За многие годы, посвященные служению науке, Сергеем Александровичем Кащенко создана современная техника асимптотического исследования широкого класса задач нелинейной динамики. Его область научных интересов распространяется на разнообразные задачи, в которых присутствует сингулярное возмущение — это уравнения и системы дифференциальных уравнений с малым множителем при старшей производной, дифференциальные уравнения с большим запаздыванием, уравнения в частных производных с малыми коэффициентами диффузии.

Среди разработанных им математических методов представляется верным выделить несколько направлений.

Во-первых, это изложенные в его кандидатской диссертации изящные, математически красивые результаты об устойчивости сингулярно возмущенных уравнений с периодическими коэффициентами. Во-вторых, это эффективный алгоритм изучения локальной динамики сингулярно возмущенных систем с бесконечномерным фазовым пространством — метод квазинормальных форм. Основанный на идеях нормализации Пуанкаре, в синтезе с асимптотическими подходами к сингулярно возмущенным задачам, этот метод позволяет изучать бифуркации, например, в уравнениях с большим запаздыванием [1], в уравнениях в частных производных с малыми коэффициентами диффузии [2] и других задачах, в том числе прикладных (см., например [3]). В-третьих, это специальный метод большого параметра для исследования нелокальной динамики уравнений с запаздыванием [4,5], с помощью которого как конечномерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, так и бесконечномерные системы с запаздыванием редуцируются к дискретным отображениям. Такой подход позволяет обосновать утверждения о существовании, устойчивости и эволюции импульсных режимов, в том числе разнообразные их бифуркации. В частности, он показал свою успешность даже в моделях управления риском (см. [6]).

Разработанные математические методы С. А. Кащенко широко применяет в различных прикладных задачах. Им получено большое количество важных результатов по динамике популяционных моделей с запаздыванием [4,5,7]. Придуманно изящное доказательство известной гипотезы Райта об области глобальной устойчивости решений логистического уравнения с запаздыванием [8]. Описаны периодические и близкие к периодическим решения, в том числе релаксационные, «пичкового» типа, как в классических задачах, так и в различных их обобщениях. Полученные результаты вошли в монографию [9].

С 90-х годов прошлого века совместно с Еленой Викторовной Григорьевой был получен ряд результатов по динамике лазерных и нелинейных оптических устройств с управляющими элементами. Им удалось исследовать множество моделей, являющихся системами дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом или уравнениями в частных производных, в которых учитывались оптоэлектронная запаздывающая обратная связь, периодическая модуляция параметров, межмодовые взаимодействия, взаимная связь между лазерами и другие факторы. Строгими математическими методами были выявлены и аналитически описаны существенно нелинейные явления в динамике лазеров: бифуркации релаксационных циклов большой амплитуды, мультистабильность циклов, целенаправленные переключения режимов, фазовая синхронизация в ансамбле связанных систем. Эти результаты, опубликованные в большом количестве статей, в итоге составили две монографии [10,11].

Разработанные Сергеем Александровичем математические методы нашли свое применение при моделировании и исследовании динамики нейронов. Совместно с Вячеславом Владимировичем Майоровым удалось создать универсальную модель динамики мембранного потенциала нейрона на базе уравнения с запаздыванием [12], а также изучить коллективное поведение таких нейронов.

Коллеги отмечают необычайную интуицию Сергея Александровича, благодаря которой ему удается не только предсказывать результат, но и выбирать абсолютно верные способы его обоснования.

Под научным руководством Сергея Александровича было защищено 5 кандидатских и 2 докторские диссертации.

За заслуги в разработке приоритетных направлений науки, создании научной школы, воспитании и подготовке научных кадров в 2020 году Сергей Александрович Кащенко награжден почетным званием «Заслуженный деятель науки Российской Федерации».



Несмотря на большую административную нагрузку, Сергей Александрович ведет занятия со студентами и аспирантами, руководит большим научным коллективом. В любой момент он готов поставить своим (и не только своим) ученикам или коллегам новую задачу и обсудить пути ее решения.

*Коллеги, друзья и ученики от души поздравляют Сергея Александровича с Днем рождения и желают ему крепкого здоровья, новых идей и свершений!*

## Список литературы

1. *Кащенко С. А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностного уравнения с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1448–1451.
2. *Kaschenko S. A.* Normalization in the systems with small diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
3. *Grigorieva E. V., Haken H., Kaschenko S. A.* Theory of quasiperiodicity in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // Optics Communications. 1999. Vol. 165, no. 4–6. P. 279–292. DOI: 10.1016/S0030-4018(99)00236-9.
4. *Кащенко С. А.* Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующей задачу хищник–жертва // Доклады Академии наук СССР. 1982. Т. 266, № 4. С. 792–795.
5. *Кащенко С. А.* Стационарные режимы уравнения, описывающего колебания численности насекомых // Доклады Академии наук СССР. 1983. Т. 273, № 2. С. 328–330.
6. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика / В. А. Владимиров, Ю. Л. Воробьев, С. С. Салов, С. А. Кащенко, Г. Г. Малинецкий; под ред. И. М. Макарова. М.: Наука, 2000. 431 с.
7. *Kashchenko S. A.* Asymptotics of the solutions of the generalized Hutchinson equation // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. Vol. 47, no. 7. P. 470–494. DOI: 10.3103/S0146411613070079.
8. *Кащенко С. А., Логинов Д. О.* Оценка области глобальной устойчивости состояния равновесия логистического уравнения с запаздыванием // Известия вузов. Математика. 2020. № 9. С. 39–55. DOI: 10.26907/0021-3446-2020-9-39-55.
9. *Кащенко С. А.* Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием: От ядерных реакторов и динамики лазеров до иммунной системы и новых моделей активности мозга. М.: КРАСАНД, 2020. 576 с.
10. *Григорьева Е. В., Кащенко А. А., Кащенко С. А.* Локальный анализ динамики распределенных моделей лазеров. Ярославль: ЯрГУ, 2022. 348 с.
11. *Grigorieva E. V., Kaschenko S. A.* Asymptotic Representation of Relaxation Oscillations in Lasers. Cham: Springer International Publishing, 2017. 230 p. DOI: 10.1007/978-3-319-42860-4.
12. *Кащенко С. А., Майоров В. В.* Модели волновой памяти. 2-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 288 с.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(2)

Обзорная статья  
УДК 530.182.2

DOI: 10.18500/0869-6632-003034  
EDN: JVVGQR

## Представление точных траекторных решений для хаотических одномерных отображений в форме Шрёдера

*В. М. Аникин*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: AnikinVM@sgu.ru

*Поступила в редакцию 8.01.2023, принята к публикации 2.03.2023,  
опубликована онлайн 20.03.2023, опубликована 31.03.2023*

**Аннотация.** Цель статьи — проиллюстрировать генезис, смысл и значимость функционального уравнения Шрёдера, введенного в теории итераций рациональных функций, для теории детерминированного хаоса при аналитическом вычислении точных траекторных решений, инвариантных плотностей и показателей Ляпунова одномерных хаотических отображений. Демонстрируется *метод* решения функционального уравнения Шрёдера для различных исходных отображений посредством перехода к топологически сопряженным отображениям, для которых нахождение точного траекторного решения является более простой математической процедурой. Приводятся *результаты* аналитического решения уравнения Шрёдера для 12 хаотических отображений различных типов и расчета соответствующих выражений для точных траекторных решений, инвариантных плотностей и показателей Ляпунова. Делается *заключение* о методической целесообразности формулировки и решений уравнений Шрёдера при изучении динамики одномерных хаотических отображений.

**Ключевые слова:** итерационная теория, детерминированный хаос, одномерные отображения, уравнение Шрёдера, точные решения.

**Для цитирования:** Аникин В. М. Представление точных траекторных решений для хаотических одномерных отображений в форме Шрёдера // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 2. С. 128–142. DOI: 10.18500/0869-6632-003034. EDN: JVVGQR

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## Representation of exact trajectory solutions for chaotic one-dimensional maps in Schröder form

V. M. Anikin

Saratov State University, Russia

E-mail: AnikinVM@sgu.ru

Received 8.01.2023, accepted 2.03.2023,  
available online 20.03.2023, published 31.03.2023

**Abstract.** Purpose of the article is to illustrate the genesis, meaning and significance of the functional Schröder equation, introduced in the theory of iterations of rational functions, for the theory of deterministic chaos by analytical calculations of exact trajectory solutions, invariant densities and Lyapunov exponents of one-dimensional chaotic maps. We demonstrate the method for solving the functional Schröder equation for various chaotic maps by passing to a topologically conjugate mappings, for which finding the exact trajectory solution is a simpler mathematical procedure. Results of the analytical solution of the Schröder equation for 12 chaotic mappings of various types and the calculation of the corresponding expressions for exact trajectory solutions, invariant densities and Lyapunov exponents are presented. Conclusion is made about the methodological expediency of formulating and solving the Schröder equations by the study of the dynamics of one-dimensional chaotic mappings.

**Keywords:** iteration theory, deterministic chaos, one-dimensional maps, Schröder equation, exact solutions.

**For citation:** Anikin VM. Representation of exact trajectory solutions for chaotic one-dimensional maps in Schröder form. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(2):128–142. DOI: 10.18500/0869-6632-003034

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

В 1870–1871 гг. немецкий математик Эрнст Шрёдер (Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder, 1841–1902) опубликовал в журнале «Mathematische Annalen» две взаимосвязанные пионерские статьи, содержащие исследования итераций рациональных функций на комплексной плоскости в приложении к нахождению корней нелинейных уравнений [1, 2].

В статье «Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen» [1] он, в частности, продемонстрировал применение алгоритма Ньютона для решения квадратного уравнения  $f(z) = z^2 - 1 = 0$ , то есть рассмотрел разностную итерационную схему

$$z_{n+1} = g(z_n) = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2z_n} = \frac{z_n^2 + 1}{2z_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Э. Шрёдер установил области сходимости к двум имеющимся решениям рассматриваемого уравнения: при начальном значении  $z_0$  с положительной вещественной частью ( $\operatorname{Re} z_0 > 0$ ) итерации  $z_n$  сходятся к положительному корню  $z_1^* = 1$ , а при начальном значении  $z_0$  с отрицательной вещественной частью ( $\operatorname{Re} z_0 < 0$ ) притягивающей точкой становится отрицательное значение корня  $z_2^* = -1$ . В случае же чисто мнимого начального значения ( $\operatorname{Re} z_0 = 0$ ) сходимость отсутствует. Спустя много лет этот результат Шрёдера снисходительно называли «простым» [3, с. 55].

Несколько отходя от главной линии изложения, отметим, что через несколько лет после выхода названной статьи Шрёдера, в 1879 г., англичанин Артур Кэли (Arthur Cayley, 1821–1895) рассмотрел в комплексной плоскости задачу о сходимости итераций к значениям корней кубического уравнения  $z^3 - 1 = 0$  (один действительный корень и два комплексно-сопряженных), также пользуясь алгоритмом Ньютона:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2} = \frac{2z_n^3 + 1}{3z_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

На фоне результатов решения этой задачи (получившей название проблемы Кэли) результат Шрёдера для уравнения второго порядка, действительно, выглядел «простым»: оказалось, что области притяжения всех трех корней кубического уравнения тесно и причудливо переплетаются, а их границы носят фрактальный характер [4–6]. Проблема Кэли, как считают, сыграла для Пьера Фату (Pierre Joseph Louis Fatou, 1878–1929) и Гастона Жюлиа (Gaston Maurice Julia, 1893–1978) роль «старта» при построении теории итерированных голоморфных отображений, теории множеств Фату и Жюлиа [7, 8]. А Э. Шрёдер занял, таким образом, первую строчку в хронологическом списке творцов голоморфной динамики.

Возвращаясь к теме статьи, отметим, что в следующей работе «Über iterirte Functionen» [2] Э. Шрёдер предложил специальный методический инструментарий для исследования проблемы сходимости итерационных процедур на основе решения сконструированного им *функционального уравнения* (сейчас оно носит его имя), содержащего некую неизвестную функцию, нахождение которой позволяет далее явным образом исследовать асимптотическое поведение итерационного процесса [9, 10].

Первоначально математики уделяли главное внимание аналитическим решениям уравнения Шрёдера на комплексной плоскости. Работы в этом направлении были посвящены доказательству существования функций Шрёдера, их аналитическому представлению, установлению общих условий (теорем) сходимости итерационных процедур, установлению связей уравнения Шрёдера с другими функциональными уравнениями и исследованию особенностей применения последних при анализе итерационных процессов, изучению спектральных свойств выделяемого в уравнении Шрёдера так называемого композиционного оператора и другим сопутствующим проблемам. В итоге за уравнением Шрёдера закрепился статус одного из важнейших уравнений функционального анализа [10, 11].

Для теории детерминированного хаоса главную тему исследования представляют не задачи сходимости итераций в комплексной или действительной областях к некоторым пределам, а, наоборот, «несходимость», реализация хаотических режимов в динамических системах. Уравнение Шрёдера приложимо к анализу и подобного рода задач. Более того, *точных конечных* решений уравнений Шрёдера для этого класса «хаотических» задач можно привести гораздо больше, чем точных конечных (не представимых бесконечными рядами) решений для описания сходящихся процессов! С исторической точки зрения интересен и тот факт, что в статье [2] (а она написана в 1869 г.) Шрёдер привел точное траекторное решение своего уравнения для логистического отображения, записываемого в комплексных переменных как

$$z_{n+1} = 4z_n(1 - z_n), \quad |z_n| < 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В настоящей публикации иллюстрируется прикладная значимость функционального уравнения Э. Шрёдера при установлении точных выражений для точек орбит одномерных хаотических отображений, определенных на действительной числовой прямой, как функций начального значения  $x_0$  и номера  $n$  шага итерации  $x_n = x_n(x_0, n)$ . Знание точных решений позволяет аналитически вычислить инвариантную плотность отображения, соответствующие показатель Ляпунова и автокорреляционную функцию его траекторий. Рассмотрение ведется на примерах как тестовых хаотических отображений, так и новых синтезированных хаотических отображений, обладающих инвариантной плотностью в форме классических вероятностных распределений. Траекторные решения получаются в контексте построения дополнительного хаотического отображения, топологически сопряженного с рассматриваемым, но более удобного при вычислении траекторных и вероятностных характеристик. Подобное «удобство» возникает, если сопрягающая функция обладает специфическими (в частности, как будет показано, — периодическими) свойствами.

## 1. Уравнение Шрёдера: формулировка

Рассмотрим отображение, заданное вещественной функцией действительного аргумента на некотором интервале числовой оси  $(a, b)$ :

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad x_n \in (a, b), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Под функциональным уравнением Шрёдера понимается уравнение

$$\omega(g(x)) = \lambda\omega(x), \quad (2)$$

где  $\omega(x)$  и  $\lambda$  — соответственно действительные функция и число, подлежащие нахождению. От функции  $\omega(x)$  требуется взаимно-однозначная обратимость и дифференцируемость обратной функции:

$$u = \omega(x), \quad x = \omega^{-1}(u) = \Omega(u), \quad (3)$$

где через  $\omega^{-1} = \Omega(u)$  обозначена обратная функция для  $\omega(x)$ , так что

$$\Omega(\omega(x)) \equiv x, \quad \omega(\Omega(u)) \equiv u.$$

Пользуясь свойством обратимости (3) функции  $\omega(x)$ , из уравнения (2) получим

$$g(x) = \Omega(\lambda\omega(x)). \quad (4)$$

Применяя (4), можно выразить все члены последовательности  $x_n$ , генерируемые (1), через начальное значение  $x_0$  и число итераций  $n$ . В самом деле, исходя из начальной точки  $x_0$ , получим траекторное «продолжение»  $x_1$ :

$$x_1 = g(x_0) = \Omega(\lambda\omega(x_0)). \quad (5)$$

Если теперь в правую часть (4) подставить значение  $x_1$ , то на основании (5) получим следующее представление для  $x_2$ :

$$x_2 = g(x_1) = \Omega(\lambda\omega(x_1)) = \Omega(\lambda\omega(\Omega(\lambda\omega(x_0)))) = \Omega(\lambda^2\omega(x_0)). \quad (6)$$

Полагая, что для  $n$ -го шага итераций справедливо соотношение

$$x_n = \Omega(\lambda^n\omega(x_0)), \quad (7)$$

посредством действий, примененных на первом шаге итераций, получим

$$x_{n+1} = g(x_n) = \Omega(\lambda^{n+1}\omega(x_0)). \quad (8)$$

В совокупности соотношения (5)–(8) составляют простое доказательство методом математической индукции точного выражения (7) для  $n$ -й итерации. Помимо начального значения  $x_0$  и числа итераций  $n$  выражение (7) содержит числовой параметр  $\lambda$ , значение которого определяется для конкретного отображения в результате решения функционального уравнения (2), то есть в процессе нахождения функций  $\omega(x)$  и  $\Omega(x)$ . Соотношение (7) в дальнейшем именуется траекторным решением в форме Шрёдера.

## 2. Уравнение Шрёдера: генезис

Как представляется, Шрёдер сформулировал уравнение (2) в контексте обобщения полученных им результатов для траекторий разнообразных итерационных процессов. Рассмотрим описываемый формулой Ньютона,

$$x_{n-1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

сходящийся процесс к значению корня уравнения, задаваемого функцией действительного аргумента,

$$f(x) = x^2 - a = 0, \quad a > 0,$$

начиная с некоторого значения  $x_0$ , то есть запишем численный алгоритм извлечения квадратного корня из некоторого положительного числа  $a$ . Соотношение (9) примет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Данная итерационная процедура по извлечению квадратного корня была известна математикам Древнего Мира. Одно из ее названий — итерационная формула Герона Александрийского (он привел ее в своем труде «Metrica», примерно 60-е гг. н. э.). Имеются также ссылки на использование этого алгоритма вавилонянами.

Обозначим итерируемую функцию в (10) как

$$g(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right) = \frac{\sqrt{a}}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x} \right), \quad a > 0. \quad (11)$$

Введем в (11) монотонную (обратимую) замену переменных с использованием *гиперболических функций*

$$\frac{x}{\sqrt{a}} = \operatorname{cth}(u), \quad u = \operatorname{cth}^{-1} \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad (12)$$

где  $\operatorname{cth}(u)$  — гиперболический котангенс,  $\operatorname{cth}^{-1}(t)$  — ареакотангенс гиперболический (обратная функция). Подстановка (12) в (11) приводит к красивому результату:

$$g(u) = \frac{\sqrt{a}}{2} \left( \operatorname{cth}(u) + \frac{1}{\operatorname{cth}(u)} \right) = \sqrt{a} \operatorname{cth}(2u), \quad (13)$$

поскольку для гиперболического котангенса двойного аргумента справедливо соотношение (см., например, [12, с. 18]):

$$\operatorname{cth}(2u) = \frac{1}{2} \left( \operatorname{cth}(u) + \frac{1}{\operatorname{cth}(u)} \right) = \frac{\operatorname{cth}^2(u) + 1}{2 \operatorname{cth}(u)}.$$

Соответственно, однократная итерация для (11) на основании (13) запишется в виде

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt{a} \operatorname{cth} \left( 2 \operatorname{cth}^{-1} \frac{x_0}{\sqrt{a}} \right). \quad (14)$$

Для прояснения структуры решения запишем выражение для второй итерации с использованием (14):

$$\begin{aligned} x_2 &= g(x_1) = g^2(x_0) = \sqrt{a} \operatorname{cth} \left( 2\sqrt{a} \operatorname{cth}^{-1} \frac{x_1}{\sqrt{a}} \right) = \\ &= \sqrt{a} \operatorname{cth} \left( 2\sqrt{a} \operatorname{cth}^{-1} \frac{\sqrt{a} \operatorname{cth}(2 \operatorname{cth}^{-1}(x_0/\sqrt{a}))}{\sqrt{a}} \right) = \sqrt{a} \operatorname{cth} \left( 2^2 \operatorname{cth}^{-1} \frac{x_0}{\sqrt{a}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

При записи (15) учтено свойство композиции прямой и обратной функций:  $\operatorname{cth}(\operatorname{cth}^{-1}(t)) \equiv t$ . Из вида (14) и (15) можно предположить, что для  $n$ -й итерации функции (11),  $x_n = g^n(x_0)$ , справедливо соотношение

$$x_n = g^n(x_0) = \sqrt{a} \operatorname{cth} \left( 2^n \operatorname{cth}^{-1} \frac{x_0}{\sqrt{a}} \right). \quad (16)$$

Для завершения доказательства этого предположения методом математической индукции остается показать, что структура (16) справедлива и для  $(n + 1)$ -й итерации функции  $g(x)$ . В самом деле, используя (16) и результат для однократной итерации (14), приходим к требуемому результату:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g^{n+1}(x_0) = \sqrt{a} \operatorname{cth} \left( 2\sqrt{a} \operatorname{cth}^{-1} \frac{x_n}{\sqrt{a}} \right) = \\ &= \sqrt{a} \operatorname{cth} \left( 2\sqrt{a} \operatorname{cth}^{-1} \frac{\sqrt{a} \operatorname{cth} \left( 2^n \operatorname{cth}^{-1} \frac{x_0}{\sqrt{a}} \right)}{\sqrt{a}} \right) = \sqrt{a} \operatorname{cth} \left( 2^{n+1} \operatorname{cth}^{-1} \frac{x_0}{\sqrt{a}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Полученное точное выражение для  $n$ -й итерации (17) рассматриваемой функции (11) позволяет:

- а) непосредственно установить сходимость итерационного процесса (16) к величине  $\sqrt{a}$ ;
- б) установить соответствие представления (16) с видом решения уравнения Шрёдера.

Так, вычисляя предел функции (16) с учетом ограниченности гиперболического тангенса и монотонного стремления его значения к 1 с ростом аргумента, видим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{cth} \left( 2^n \operatorname{cth}^{-1} \frac{x_0}{\sqrt{a}} \right) = \sqrt{a}.$$

Если же ввести обозначения Шрёдера,

$$u = \omega(\tilde{x}) = \operatorname{cth}^{-1}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = \Omega(u) = \operatorname{cth}(u), \quad \lambda = 2, \quad \tilde{x} = x/\sqrt{a},$$

то решение (16) примет вид решения уравнения Шрёдера (7) для  $\lambda = 2 > 1$ . В теории функционального уравнения Шрёдера со сходимостью итерационного процесса, как правило, соотносят значение  $\lambda < 1$  [10, 11]. Полученный результат с  $\lambda = 2$  — своеобразный «контрпример», обусловленный асимптотическими свойствами сопрягающей гиперболической функции с одновременным существованием для нее формулы удвоения аргумента.

### 3. Уравнение Шрёдера: метод решения

Метод Шрёдера решения функционального уравнения (2), приводящий к нахождению неизвестных характеристик в (7), основан на поиске (построении) преобразования, топологически сопряженного рассматриваемому отображению. Пусть  $T$  и  $\tilde{T}$  — преобразования на действительной оси. Преобразования  $T: X \rightarrow X$  и  $\tilde{T}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  называются сопряженными (топологически эквивалентными, изоморфными) [13, 14], если существует отображение  $h: X \rightarrow \tilde{X}$  такое, что:

- 1)  $h$  является взаимно-однозначным (монотонным, обратимым) преобразованием (существует единственное обратное, причем дифференцируемое, отображение  $h^{-1}: \tilde{X} \rightarrow X$ );
- 2) для конкретных точек композиционные соотношения  $h \circ T x = \tilde{T} \circ h(x)$  или  $T x = h^{-1} \circ \tilde{T} \circ h(x)$  выполняются для всех  $x \in X$ .

Первое условие означает сохранение структуры сопрягаемых числовых пространств. Второе условие требует, чтобы  $h$  однозначно переводило элементы  $T$  в  $\tilde{T}$  независимо от «пути» перехода.

Сопряженное отображению  $\tilde{T}: X \rightarrow \tilde{X}$  преобразование будет иметь, следовательно, вид:

$$\tilde{T}\tilde{x} = h \circ T \circ h^{-1}(\tilde{x}).$$

Смысл произведенных замен переменных в исходном преобразовании и, собственно, получаемого соотношения (7) заключается в том, чтобы найти такую сопрягающую функцию  $h(x)$  (в обозначениях Шрёдера —  $\omega(x)$ ), которая обеспечивала бы получение аналитического выражения, представляющего формулу зависимости  $x_n$  от начального значения  $x_0$  и числа итераций  $n$ . Решение функционального уравнения Шрёдера (2) ориентировано, таким образом, на нахождение специфических функций  $\omega(x)$  и  $\Omega(u) = \omega^{-1}(u)$ , которые должны трактоваться как функции, задающие подходящую замену переменных (сопряжение дискретных динамических систем) с целью выполнения соотношения (7).

В случае хаотичности сопряженных отображений при известной инвариантной плотности одного из них (обозначим ее через  $\rho_1(x)$ ) инвариантная плотность второго отображения  $\rho_2(y)$  при связи траекторий отображений через посредство функции  $y = h(x)$  вычисляется (см., например, [14]) как

$$\begin{aligned} \rho_2(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(x) \delta(y - h(x)) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(h^{-1}(u)) \delta(y - u) dh^{-1}(u) = \rho_1(h^{-1}(y)) |dh^{-1}(y)/dy|. \end{aligned} \quad (18)$$

Выражение (18) существенно упрощается, если  $\rho_1(x)$  описывает равномерное распределение. Для сопряженных отображений показатели Ляпунова и собственные числа операторов Перрона–Фробениуса, ассоциированных с отображениями, являются числовыми инвариантами [14].

Показательно, что к числу важных проблем математического анализа С. Улам в своей книге «Нерешенные математические задачи» относил выяснение возможности сопряжения произвольных функций (в частности, многочленов), отображающих отрезок самого в себя, с кусочно-линейными отображениями. Как отмечается в [15, с. 84], «положительный ответ на этот вопрос свел бы изучение итераций к чисто комбинаторному исследованию свойств кусочно-линейных функций».

**Тестовый пример.** Статья Шрёдера [2], вероятно, является в математической литературе одной из первых, в которой приведен классический пример отображения, обладающего хаотическими свойствами, — логистического отображения с одновременной записью точного траекторного решения. В 1947 г. Дж. фон Нейман и С. Улам впервые применили это отображение в качестве датчика псевдослучайных чисел [16, 17]. Это послужило основанием назвать его (в контексте проблемы машинной генерации последовательностей псевдослучайных чисел) отображением Улама–фон Неймана [14].

Итак, отгалкиваясь от отображения

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n), \quad x_n \in (0, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

посредством замены переменных

$$x = h(t) = \sin^2 \frac{\pi t}{2}, \quad t = h^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad t \in (0, 1),$$

приходим к соотношению:

$$x_{n+1} = \sin^2 \frac{\pi t_n}{2} = 4 \sin^2 \frac{\pi t_n}{2} \left( 1 - \sin^2 \frac{\pi t_n}{2} \right) = \sin^2 \pi t_n = \sin^2 (2 \arcsin \sqrt{x_n}).$$



На пути к формуле нового отображения ключевую роль играет формула двойного угла для синуса, что позволяет параллельно получить в компактном виде точное представление для координат точек траектории исходного отображения через начальное значение  $x_0$  и число итераций  $n$ :

$$x_n = \sin^2(2^n \arcsin \sqrt{x_0}). \quad (20)$$

Сопряженным для логистического отображения (19) является пирамидальное отображение (tent map)

$$t_{n+1} = 1 - |2t_n - 1|, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

обладающее точным траекторным решением [14]

$$t_n = 1 - 2 \{2^{n-1} t_0\}$$

(фигурные скобки обозначают операцию выделения дробной части числа).

**Инвариантная плотность.** Наличие точного траекторного решения (в данном случае представляемого формулой (20)) позволяет аналитически вычислить инвариантную плотность хаотического отображения, являющуюся неподвижной точкой ассоциированного оператора Перрона–Фробениуса. Инвариантная плотность на единичном интервале определяется следующим образом [18, с. 36]:

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(x - g^k(x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(x - x_k). \quad (21)$$

Здесь, как и раньше,  $g^k(x_0) = x_k$  —  $k$ -кратная композиция отображения. Для логистического отображения (19), используя выражение для точного траекторного решения (20), из (21) получим

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(x - x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(x - \sin^2(2^k \arcsin \sqrt{x_0})). \quad (22)$$

Преобразуем аргумент тригонометрической функции в (22):

$$\sin^2(2^k \arcsin \sqrt{x_0}) = \sin^2\left(\pi \cdot 2^k \cdot \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{x_0}\right) = \sin^2(\pi \alpha_k),$$

где

$$\alpha_k = 2^k \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{x_0} = \left[2^k \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{x_0}\right] + \left\{2^k \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{x_0}\right\} = [\alpha_k] + \{\alpha_k\}$$

(квадратные и фигурные скобки обозначают, соответственно, операции выделения целой части и дробной части числа  $\alpha_k$ ). Тогда (22) примет вид:

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(x - \sin^2(\pi \alpha_k)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(x - \sin^2(\pi \{\alpha_k\})). \quad (23)$$

Иррациональная величина  $\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{x_0}$  принимает значения из интервала  $(0, 1)$ . Согласно критерию Г. Вейля [19, 20] о равномерном распределении дробных долей вещественных чисел в единичном интервале последовательность

$$\{\alpha_k\} = \left\{2^k \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{x_0}\right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

как удовлетворяющая этому критерию будет равномерно распределена в области  $(0, 1)$ , что означает возможность представления (23) интегралом Римана на единичном интервале с подынтегральной функцией  $\delta(x - \sin^2(\pi\alpha))$

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta(x - \sin^2(\pi\{\alpha_k\})) = \int_0^1 \delta(x - \sin^2(\pi\alpha)) d\alpha = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \delta(x - \sin^2(\alpha)) d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \delta(x - \xi) \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi(1-\xi)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Таким образом, расчет плотности инвариантного распределения Улама–фон Неймана на основе точного решения для итераций приводит к результату

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \quad x \in (0, 1),$$

правильность которого может быть подтверждена дифференцированием функции  $h^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$ .

**Показатель Ляпунова.** Показатель Ляпунова  $\Lambda(x_0)$  для логистического отображения как характеристика степени чувствительности к начальным условиям при итерировании функции (19), по определению, может быть вычислен на основе точного решения  $x_n = x_n(x_0, n)$ :

$$\Lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dg^n(x_0)}{dx_0} \right|.$$

Получаем согласно (16):

$$\Lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{d}{dx_0} (\sin^2(2^n \arcsin \sqrt{x_0})) = \ln 2.$$

**Автокорреляционная функция.** Для известной инвариантной плотности выражение для автокорреляционной функции траекторий хаотической отображения представляется интегралом [14, 18]:

$$R(m) = \int_0^1 xg^m(x)\rho(x)dx - \left( \int_0^1 x\rho(x)dx \right)^2$$

(усреднение ведется по инвариантной плотности отображения). В случае логистического отображения (Улама–фон Неймана) имеем [14]:

$$R(m) = \begin{cases} 1/8, & m = 0, \\ 0, & m \geq 1. \end{cases}$$

Отсутствие корреляции между сечениями процесса соотносится с понятием *дискретного белого шума*. Это обстоятельство подпитывает особый интерес к отображению Улама–фон Неймана.

#### 4. Уравнение Шрёдера: хаос в схеме Ньютона

Изменим знак в алгоритме извлечения квадратного корня по алгоритму Ньютона (10), считая  $a > 0$ , то есть представим разностное уравнение в виде:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n - \frac{a}{x_n} \right) = \frac{\sqrt{a}}{2} \left( \frac{x_n}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad x_n \in (-\infty, +\infty). \quad (24)$$

Итерационная схема (24) демонстрирует хаотическое поведение — блуждание траектории по всей (!) числовой оси. Для нахождения точного выражения для траекторий отображения (24) введем непрерывную монотонную замену переменных на основе *тригонометрических* функций:

$$x_n = \sqrt{a} \cdot \operatorname{ctg}(\pi v_n), \quad v_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{x_n}{\sqrt{a}}, \quad v_n \in (0, 1). \quad (25)$$

При подстановке (25) в (24) возникнет ситуация, связанная с применением формулы котангенса двойного угла

$$\operatorname{ctg}(2u) = \frac{\operatorname{ctg}^2 u - 1}{2 \operatorname{ctg} u} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} u - \frac{1}{\operatorname{ctg} u} \right),$$

что позволяет получить из (24) с учетом периодичности котангенса уравнение

$$\operatorname{ctg}(\pi v_{n+1}) = \operatorname{ctg}(\pi \cdot 2v_n) = \operatorname{ctg}(\pi[2v_n] + \pi\{2v_n\}) \equiv \operatorname{ctg}(\pi\{2v_n\}).$$

Отсюда следует разностное уравнение для переменной  $v_n$

$$v_{n+1} = \{2v_n\} = 2v_n \bmod 1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad v_n \in (0, 1) \quad (26)$$

(фигурные скобки обозначают операцию выделения дробной части числа). Преобразование (26) представляет хаотическое кусочно-линейное отображение, именуемое сдвигом Бернулли, траекторное решение для которого имеет вид

$$v_n = 2^n v_0 \bmod 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Соответственно (это можно показать, пользуясь индукцией), точное решение для траекторий отображения (24) может быть представлено в виде

$$x_n = \sqrt{a} \operatorname{ctg} \left( 2^n \operatorname{arccctg} \frac{x_0}{\sqrt{a}} \right). \quad (27)$$

В силу топологического сопряжения с хаотическим сдвигом Бернулли отображение (24) также обладает хаотическими свойствами. Показатель Ляпунова, являясь инвариантом для сопряженных отображений, в данном случае положителен и равен  $\Lambda = \ln 2$ . Установление факта сопряженности отображений (24) и (26) позволяет простым дифференцированием обратной функции в (25) определить вид инвариантной плотности отображения (24):

$$\rho(x) = \left| \frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arccctg} \frac{x}{\sqrt{a}} \right) \right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{a}}{a + x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (28)$$

Законом (28) на всей действительной числовой оси задается распределение Коши, принадлежащее к числу «патологических» распределений, для которых математическое ожидание и начальные моменты не определены. Возникновение хаоса в схеме (24) можно интерпретировать как результат формального применения разностной схемы Ньютона для вычисления квадратного корня из отрицательного числа в рамках арифметики вещественных чисел.

## 5. Представление уравнений хаотических траекторий в форме Шрёдера

Примеры хаотических отображений, чьи траекторные решения приведены к форме Шрёдера, представлены в Таблице. Разностные уравнения для 12 отображений, демонстрирующих хаотическое поведение, записаны в первом столбце Таблицы. Они получены посредством топологического сопряжения с кусочно-линейными хаотическими отображениями. Вид сопрягающих

Таблица. Характеристики хаотических отображений с точным траекторным решением в форме Шрёдера  
 Table. Characteristics of chaotic mappings with an exact trajectory solution in the Schröder form

Отображение	Инвариантная плотность	Точное траекторное решение
<b>Отображения на единичном интервале</b>		
$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n), x_n \in (0, 1),$ $n = 0, 1, 2, \dots$	$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$	$x_n = \sin^2(2^n \arcsin \sqrt{x_0})$
$x_{n+1} = 16(1 - \sqrt{x_n})^2, x_n \in (0, 1)$	$\rho(x) = \frac{1}{2\pi x^{3/4}\sqrt{1-\sqrt{x}}}$	$x_n = \sin^4(2^n \arcsin \sqrt[4]{x_0})$
$x_{n+1} = \sqrt{2}(1 - x_n^4)^{1/4}, x_n \in (0, 1)$	$\rho(x) = \frac{4x}{\pi\sqrt{1-x^4}}$	$x_n = \sqrt{ \sin(2^n \arcsin x_0^2) }$
<b>Хаотические отображения на основе полиномов Чебышёва</b>		
$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, x_n \in (-1, 1)$	$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$	$x_n = \cos(2^n \arccos x_0)$
$x_{n+1} = 4x_n^3 - 3x_n, x_n \in (-1, 1)$	$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$	$x_n = -\sin(3^n \arcsin x_0)$
$x_{n+1} = 16x_n^5 - 20x_n^3 + 5x_n,$ $x_n \in (-1, 1)$	$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$	$x_n = \sin(5^n \arcsin x_0)$
<b>Хаотические отображения на бесконечных (полубесконечных) интервалах</b>		
$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n - \frac{ a }{x_n} \right), x \in (-\infty, +\infty)$	Распределение Коши $\rho(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{a}}{a^2 + x^2}$	$x_n = \sqrt{a} \operatorname{ctg} \left( 2^n \operatorname{arcctg} \frac{x_0}{\sqrt{a}} \right)$
$x_{n+1} = \frac{4x_n}{(1-x_n)^2}, x_n \in (0, +\infty)$	F-распределение $\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)}$	$x_n = \operatorname{tg}^2(2^n \operatorname{arcctg} \sqrt{x_0})$
$x_{n+1} = -\ln  \sinh x_n ,$ $x_n \in (-\infty, +\infty)$	Z-распределение $\rho(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\cosh(x)}$	$x_n =$ $-\ln  \operatorname{ctg}(2^n \operatorname{arcctg}(\exp(-x_0))) $
<b>Отображение, генерирующее хаос в области непрерывного изменения параметра</b>		
$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n) \frac{1-k^2x_n}{(1-k^2x_n^2)^2},$ $0 < x_n < 1$	$\rho(x) = \frac{1}{2K\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$	$x_n = \operatorname{sn}^2(2^n \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{x_0}, k), k)$
$x_{n+1} = 1 - \frac{2x_n^2}{(1-k^2x_n^2)^2},$ $-1 < x_n < 1$	$\rho(x) = \frac{1}{2K\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}}$	$x_n = -\operatorname{cn}^2(2^n \operatorname{cn}^{-1}(x_0, k), k)$
$x_{n+1} = \frac{k'^2 - 2k'^2x_n^2 + x_n^4}{k'^2 + 2x_n^2 - x_n^4},$ $k' \leq x_n \leq 1$	$\rho(x) = \frac{1}{K\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}}$	$x_n = \operatorname{dn}(2^n \operatorname{dn}^{-1}(x_0, k'), k'),$ $k' \leq x_0 \leq 1$

функций «читается» в выражениях для инвариантных плотностей (второй столбец) и точных траекторных решений (третий столбец), отвечающих отображениям из первого столбца.

Хаотические отображения в Таблице разделены на четыре группы.

Первая группа — отображения на единичном интервале. «Возглавляет» группу подробно рассмотренное выше логистическое отображение, а два других примера показывают изобретательские возможности при синтезе новых отображений на базе тригонометрических функций.

Вторая группа хаотических преобразований — отображения в форме полиномов Чебышёва первого рода на интервале  $(-1, 1)$ . Все полиномы Чебышёва первого рода могут служить генераторами хаоса (но с одним и тем же инвариантным распределением!), поскольку сопрягаются с хаотическими кусочно-линейными отображениями. В первом отображении из этой группы «завуалирована» формула синуса двойного угла, во втором — формула синуса тройного угла, в третьем — формула вычисления синуса пятикратно увеличенного угла. Значения показателя Ляпунова для этих отображений соответственно равны  $\ln 2$ ,  $\ln 3$ ,  $\ln 5$ .

В третьем блоке Таблицы представлены хаотические отображения, область действия которых распространяется на бесконечные интервалы (подынтервалы). Сопрягающие функции выбраны специальным образом, чтобы инвариантные плотности совпадали с известными вероятностными законами распределения (Коши,  $F$ -распределения,  $Z$ -распределения), находящих широкое применение в различных задачах физики, биофизики, теории надежности и т. п. [21]. Получение отображения с инвариантным распределением в форме закона Коши подробно рассматривалось выше. Другие отображения из этого блока построены на базе формулы (18).

В заключительном блоке Таблицы представлены отображения, включающие зависимость от параметра и демонстрирующее хаотическое поведение для области непрерывного его изменения. Построены это отображения на базе эллиптических функций Якоби [22].

Напомним, что эллиптический синус Якоби  $\operatorname{sn}(u, k)$  определяется как обращение эллиптического интеграла первого рода [23, гл. 22]:

$$u = \int_0^{\operatorname{sn}(u,k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{x}, k) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$(0 < k < 1)$ . Эллиптический косинус Якоби  $\operatorname{cn}(u, k)$  является обращением интеграла

$$u = \int_{\operatorname{cn}(u,k)}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+t^2)}}, \quad \operatorname{cn}^{-1}(x, k) = \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+t^2)}}$$

$(k'^2 = 1 - k^2)$ . Эллиптическая функция  $\operatorname{dn}(u, k)$  — обращение эллиптического интеграла

$$u = \int_{\operatorname{dn}(u,k)}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}, \quad \operatorname{dn}^{-1}(x, k') = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}$$

Полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Периодичность функций Якоби позволяет свести выражения для траекторных решений хаотических отображений к форме Шрёдера.

## Заключение

Представление выражений для траекторий итерационных процессов в форме Шрёдера позволяет *аналитически* оценить наличие или отсутствие сходимости вычислительной процедуры к решению заданного уравнения. Решение уравнения Шрёдера связано с построением отображения, топологически сопряженного с исходным. В целом, как проиллюстрировано в статье, метод построения топологически сопряженных отображений весьма продуктивен. Теоретический и прикладной интерес к идее изоморфных преобразований базовых (как правило, кусочно-линейных) эндоморфизмов, для которых выявлены особенности их хаотического поведения (эргодичность, перемешивания, точности и т. п.) стимулируется:

а) перспективой построения для различных приложений новых нелинейных хаотических генераторов с разнообразными статистическими характеристиками — областями задания, заданными точными инвариантными плотностями, гладкими или разрывными итеративными функциями, различными по значению ляпуновскими показателями и т. д.;

б) возможностью использования при изучении новых отображений инвариантных свойств и характеристик хаотических отображений, результатов траекторного, множественного и спектрального анализа известных отображений;

в) разработкой аналитических методов решения разностных уравнений, «генерирующих» хаос, прямой и обратной задач для интегрального уравнения Фробениуса–Перрона с сингулярным ядром или соответствующего функционального уравнения, связывающих инвариантные плотности и итеративные функции.

Для отображений, демонстрирующих хаотическое поведение, сходимость, как и для регулярных процессов вычислительной математики, тоже очень важна. Но эта сходимость носит термодинамический «оттенок»: речь идет о сходимости к равновесному состоянию, определяемому установлением инвариантного распределения в динамической системе. И в этом случае можно говорить о сходимости процесса к «точке», но эта точка является неподвижной точкой линейного несамосопряженного оператора Перрона–Фробениуса, ассоциированного с хаотическим отображением [24].

## Список литературы

1. Schröder E. Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen // *Mathematische Annalen*. 1870. Bd. 2, Heft 2. S. 317–365. DOI: 10.1007/BF01444024.
2. Schröder E. Ueber iterirte Functionen // *Mathematische Annalen*. 1870<sup>1</sup>. Bd. 3, Heft 2. S. 296–322. DOI: 10.1007/BF01443992.
3. Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.
4. Пайтген Х.-О., Рихтер П.-Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с.
5. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
6. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 528 с.
7. Alexander D. S. A History of Complex Dynamics: From Schröder to Fatou and Julia. Vol. E24 of *Aspects of Mathematics*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1994. 165 p.
8. Alexander D. S., Iavernaro F., Rosa A. Early Days in Complex Dynamics: A History of Complex Dynamics in One Variable During 1906–1942. Vol. 38 of *History of Mathematics*. Providence, RI, London: London Mathematical Society, 2012. 454 p.

<sup>1</sup>Том (Band) 3 журнала «Mathematische Annalen» с выходными данными «1871» состоит из двух выпусков (Heft 1 и Heft 2), на выходных данных которых стоит 1870 год. Статья Э. Шрёдера поступила в журнал в июне 1869 г.

9. *Kuczma M., Choczewski B., Ger R.* Iterative Functional Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 576 p. DOI: 10.1017/CBO9781139086639.
10. *Kuczma M.* Functional Equations in a Single Variable. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishers, 1968. 383 p.
11. *де Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: Иностранная литература, 1961. 248 с.
12. *Янпольский А. Р.* Гиперболические функции. М.: Физматгиз, 1960. 195 с.
13. *Биллингслий П.* Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969. 239 с.
14. *Аникин В. М., Голубенцев А. Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
15. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964. 168 с.
16. *Ulam S. M., von Neumann J.* On combination of stochastic and deterministic processes // Bulletin of the American Mathematical Society. 1947. Vol. 53, no. 11. P. 1120.
17. *von Neumann J.* Collected Works. Vol. 5. New York: Macmillan, 1963. P. 768–770.
18. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
19. *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс. СПб.: Невский Диалект; М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009. 192 с.
20. *Кейперс Л., Нидеррайтер Г.* Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985. 408 с.
21. *Golubentsev A. F., Anikin V. M.* The explicit solutions of Frobenius-Perron equation for the chaotic infinite maps // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8, no. 5. P. 1049–1051. DOI: 10.1142/S0218127498000863.
22. *Голубенцев А. Ф., Аникин В. М.* Специальные функции в теории детерминированного хаоса // Известия вузов. ПНД. 2000. Т. 8, № 3. С. 50–58.
23. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа. В 2 ч. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 500 с.
24. *Аникин В. М., Аркадакский С. С., Ремизов А. С.* Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике / под ред. В. М. Аникина. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2015. 96 с.

## References

1. Schröder E. Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Mathematische Annalen. 1870;2(2):317–365 (in German). DOI: 10.1007/BF01444024.
2. Schröder E. Ueber iterirte Functionen. Mathematische Annalen. 1870<sup>2</sup>;3(2):296–322 (in German). DOI: 10.1007/BF01443992.
3. Milnor J. Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures. 3rd edition. Princeton: Princeton University Press; 2006. 320 p.
4. Peitgen H-O, Richter PH. The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag; 1986. 202 p. DOI: 10.1007/978-3-642-61717-1.
5. Crownover RM. Introduction to Fractals and Chaos. Boston, London: Jones and Bartlett Publishers; 1995. 350 p.
6. Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise. New York: Dover Publications; 2009. 448 p.
7. Alexander DS. A History of Complex Dynamics: From Schröder to Fatou and Julia. Vol. E24 of Aspects of Mathematics. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn; 1994. 165 p.
8. Alexander DS, Iavernaro F, Rosa A. Early Days in Complex Dynamics: A History of Complex Dynamics in One Variable During 1906–1942. Vol. 38 of History of Mathematics. Providence, RI, London: London Mathematical Society; 2012. 454 p.

<sup>2</sup>Volume (Band) 3 of the Mathematische Annalen with the imprint “1871” consists of two issues (Heft 1 and Heft 2) with the imprint dated 1870. The article by E. Schröder entered the journal in June 1869.

9. Kuczma M, Choczewski B, Ger R. Iterative Functional Equations. Cambridge: Cambridge University Press; 1990. 576 p. DOI: 10.1017/CBO9781139086639.
10. Kuczma M. Functional Equations in a Single Variable. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishers; 1968. 383 p.
11. de Bruijn NG. Asymptotic Methods in Analysis. New York: Dover Publications; 1981. 296 p.
12. Yanpol'skii AR. Hyperbolic Functions. Moscow: Fizmatgiz; 1960. 195 p. (in Russian).
13. Billingsley P. Ergodic Theory and Information. New York: John Wiley & Sons; 1965. 193 p.
14. Anikin VM, Golubentsev AF. Analytical Models of Deterministic Chaos. Moscow: FIZMATLIT; 2007. 328 p. (in Russian).
15. Ulam SM. A Collection of Mathematical Problems. New York, London: Interscience Publishers; 1960. 150 p.
16. Ulam SM, von Neumann J. On combination of stochastic and deterministic processes. Bulletin of the American Mathematical Society. 1947;53(11):1120.
17. von Neumann J. Collected Works. Vol. 5. New York: Macmillan; 1963. P. 768–770.
18. Schuster HG, Just W. Deterministic Chaos: An Introduction. 4th, Revised and Enlarged Edition. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA; 2005. 299 p. DOI: 10.1002/3527604804.
19. Ermakov SM. Monte Carlo Method in Computational Mathematics. Saint Petersburg: Nevskii Dialect; Moscow: BINOM, Laboratorija Znaniy; 2009. 192 p. (in Russian).
20. Kuipers L, Niederreiter H. Uniform Distribution of Sequences. Mineola, New York: Dover Publications; 2006. 416 p.
21. Golubentsev AF, Anikin VM. The explicit solutions of Frobenius-Perron equation for the chaotic infinite maps. International Journal of Bifurcation and Chaos. 1998;8(5):1049–1051. DOI: 10.1142/S0218127498000863.
22. Golubentsev AF, Anikin VM. Special functions in the theory of deterministic chaos. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2000;8(3):50–58 (in Russian).
23. Whittaker ET, Watson GN. A Course of Modern Analysis. 4th Edition. Cambridge: Cambridge University Press; 1996. 616 p. DOI: 10.1017/CBO9780511608759.
24. Anikin VM, Arkadakskii SS, Remizov AS. Non-Self-Adjoint Linear Operators in Chaotic Dynamics. Saratov: Saratov University Publishing; 2015. 96 p. (in Russian).

*Аникин Валерий Михайлович* — родился в г. Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (1970). Доктор физико-математических наук (2005), имеет ученое звание профессора (2008). Почетный работник высшего профессионального образования РФ (2012). Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации (2019). Декан физического факультета СГУ (2010–2020). Ученый секретарь (с 1991) и председатель (с 2019) диссертационного совета по физико-математическим наукам на базе СГУ. Заведующий кафедрой общей, теоретической и компьютерной физики Института физики СГУ. Член редколлегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» и «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика». Автор статей и монографий по теории случайных и хаотических процессов, диссертациеведению, истории физико-математического образования в Саратовском университете, в том числе монографий «Аналитические модели детерминированного хаоса» (совместно с А. Ф. Голубенцевым; Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007), «Диссертациеведение: пролегомены» (совместно с Б. Н. Пойзнером; Саратов: издательство Саратовского университета, 2019).



Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: AnikinVM@sgu.ru  
 ORCID: 0000-0002-6506-6997  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 166229





Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(2)

Научная статья  
УДК 517.925.42, 574.34

DOI: 10.18500/0869-6632-003030  
EDN: FGDHNM

## Механизмы формирования пачечной динамики в системе миграционно связанных сообществ типа хищник–жертва

Е. В. Курилова, М. П. Кулаков✉, Е. Я. Фрисман

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН, Биробиджан, Россия

E-mail: katkurilova@mail.ru, ✉k\_matvey@mail.ru, frisman@mail.ru

Поступила в редакцию 22.09.2022, принята к публикации 26.12.2022,

опубликована онлайн 27.02.2023, опубликована 31.03.2023

**Аннотация.** Цель работы — изучение периодических режимов динамики миграционно связанных неидентичных сообществ типа хищник–жертва, возникающих при частичной синхронизации колебаний их численностей. Комбинация этих колебаний приводит к образованию режимов динамики, объединяющих в себе как быстрые всплески численностей (пачечная динамика), так и медленные релаксационные колебания (тоническая динамика), которые характеризуются различным соотношением синхронной и несинхронной динамики в определенные периоды времени. В работе особое внимание уделено описанию сценариев перехода между разными типами пачечной активности. Эти типы отличаются между собой не столько размерами, формой и числом быстрых всплесков численностей в пачке, сколько очередностью появления этих всплесков относительно релаксационного цикла. **Методы.** При исследовании предложенной модели динамики миграционно связанных сообществ используются методы бифуркационного анализа динамических систем, а также геометрические методы, основанные на разделении полной системы на быстрые и медленные уравнения (две подсистемы). **Результаты.** Показано, что динамика первой подсистемы с релаксационным циклом определяет динамику второй — с пачечной динамикой — посредством гладкой зависимости режима от численности хищника и не гладкой зависимости от численности жертв. Были сконструированы инвариантные многообразия, на которых реализуются участки с тонической (медленное многообразие) и пачечной (быстрое многообразие) активностью рассматриваемой системы. **Заключение.** Описаны сценарии возникновения пачек с различной формой, которые определяются внешним видом быстрого инвариантного многообразия и расположения его частей относительно релаксационного цикла. Показано, что переходы между разными типами пачек сопровождаются сменой периода колебаний, степенью синхронизации, и в итоге система переходит к квазипериодической динамике, когда оба сообщества не синхронны между собой.

**Ключевые слова:** хищник–жертва, миграция, синхронизация, пачечная и тоническая динамика, быстро-медленная система.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН.

**Для цитирования:** Курилова Е. В., Кулаков М. П., Фрисман Е. Я. Механизмы формирования пачечной динамики в системе миграционно связанных сообществ типа хищник–жертва // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 2. С. 143–169. DOI: 10.18500/0869-6632-003030. EDN: FGDHNM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Mechanisms leading to bursting oscillations in the system of predator–prey communities coupled by migrations

*E. V. Kurilova, M. P. Kulakov*✉, *E. Ya. Frisman*

Institute for Complex Analysis of Regional Problems,  
Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Birobidzhan, Russia  
E-mail: [katkurilova@mail.ru](mailto:katkurilova@mail.ru), [k\\_matvey@mail.ru](mailto:k_matvey@mail.ru), [frisman@mail.ru](mailto:frisman@mail.ru)

Received 22.09.2022, accepted 26.12.2022, available online 27.02.2023, published 31.03.2023

**Abstract.** The purpose is to study the periodic regimes of the dynamics for two non-identical predator–prey communities coupled by migrations, associated with the partial synchronization of fluctuations in the abundance of communities. The combination of fluctuations in neighboring sites leads to the regimes that include both fast bursts (bursting oscillations) and slow oscillations (tonic spiking). These types of activity are characterized by a different ratio of synchronous and non-synchronous dynamics of communities in certain periods of time. In this paper, we describe scenarios of the transition between different types of burst activity. These types of dynamics differ from each other not so much in size, shape, and number of spikes in a burst, but in the order of these bursts relative to the slow-fast cycle. **Methods.** To study the proposed model, we use the bifurcation analysis methods of dynamic systems, as well as geometric methods based on the division of the full system into fast and slow equations (subsystems). **Results.** We showed that the dynamics of the first subsystem with a slow-fast limit cycle directly determines the dynamics of the second one with burst activity through a smooth dependence of regime on the number of predators and a non-smooth dependence on the number of prey. We constructed the invariant manifolds on which there are parts of dynamics with tonic (slow manifold) and burst (fast manifold) activity of the full system. **Conclusion.** We described the scenario for bursting with different waveforms, which are determined by the appearance of the fast invariant manifold and the location of its parts relative to the slow-fast cycle. The transitions between different types of burst are accompanied by a change in the oscillation period, the degree of synchronization, and, as a result, the dynamics becomes quasi-periodic when both communities are not synchronous with each other.

**Keywords:** predator–prey, migration, synchronization, tonic spiking, bursting, slow-fast system.

**Acknowledgements.** This work was carried out within the framework of the state targets of the Institute for Complex Analysis of Regional Problem of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.

**For citation:** Kurilova EV, Kulakov MP, Frisman EYa. Mechanisms leading to bursting oscillations in the system of predator–prey communities coupled by migrations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(2):143–169. DOI: 10.18500/0869-6632-003030

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Исследование моделей популяционной биологии на протяжении долгого времени продолжает оставаться одним из активно развиваемых направлений мировой и отечественной науки. Все большую востребованность приобретают работы, посвященные изучению динамики развития биологических систем, функционирующих по принципу хищник–жертва, паразит–хозяин, ресурс–потребитель и т. п. [1]. Популярность данных исследований в первую очередь основывается на постоянном расширении области их применения, что способствует получению новых, все более сложных и интересных результатов, несмотря, а возможно, и благодаря богатой истории исследований и значительной проработанности соответствующего математического аппарата. Так, нависшие над человечеством пандемии приводят к актуальности и ставят на пик популярности исследования эколого-эпидемиологических моделей, описывающих распространение инфекций в популяциях, основанных на взаимодействии здоровых и зараженных особей, функционирующих по принципу хищник–жертва или паразит–хозяин [2, 3].

Изучение динамических моделей биологических систем, независимо от области их применения, основывается, как правило, на аппарате обыкновенных дифференциальных уравнений. При исследовании моделей нескольких взаимодействующих сообществ особый интерес вызывают нелинейные явления, возникающие при синхронизации динамики на разных территориях [4–6]

*Курилова Е. В., Кулаков М. П., Фрисман Е. Я.  
Известия вузов. ПНД, 2023, т. 31, № 2*

и связанные, например, с механизмами формирования пространственно-временной неоднородности, сложного динамического поведения и т. п. [7–12].

К одному из популярных направлений нелинейной динамики относятся исследования нейронной активности, которые описываются быстро-медленными системами. В таких системах часто возникают так называемые взрывные колебания [13–16]. За последние десятилетия были обнаружены и описаны разные виды таких колебаний, а также подробно изучены бифуркационные механизмы, приводящие к ним [17–21].

Настоящая работа входит в число таких исследований и посвящена изучению динамики численности двух смежных неидентичных миграционно связанных сообществ, каждое из которых является автоколебательной подсистемой и функционирует по принципу «хищник–жертва» с откликом Холлинга II типа [22, 23]. Рассматриваемая система является модификацией уравнений Базыкина [24, 25] — одной из базовых моделей популяционной биологии, в зарубежной литературе именуемой моделью Розенцвейга–Макартура [26, 27].

Ранее выполненное нами исследование синхронизации регулярных колебаний, возникающих в рассматриваемой системе, выявило несколько особенностей [28–30]. Во-первых, в случае сильной связи возможна полная синхронизация циклов на разных территориях, даже при значительной разнице между сообществами [29]. Однако это приводит к единственно возможному типу динамики — предельному циклу. Во-вторых, снижение силы связи приводит к очень быстрой десинхронизации, при которой каждое сообщество испытывает колебания численности с собственным ритмом. В результате, в случае слабой связи синхронизация возможна лишь для идентичных сообществ, а мало отличающиеся сообщества неспособны к полной синхронизации. В целом, перечисленные результаты хорошо согласуются с результатами других авторов. Однако дальнейшее исследование показало, что слабосвязанные неидентичные сообщества способны, по крайней мере, к частичной синхронизации именно в случае большой разницы между значениями смертности хищников [28]. Кроме того в результате исследования были обнаружены режимы, сочетающие в себе как участки с быстрыми взрывными колебаниями (пачечной активности), так и с медленной тонической динамикой. Возникновение таких режимов происходит при изменении различий между рассматриваемыми сообществами в результате их частичной синхронизации. Это приводит к образованию сложно устроенной фазовой траектории, сочетающей участки синхронной и несинхронной динамики в разные промежутки времени. Степень синхронизации значительно влияет на изменение рисунка динамического поведения, что в свою очередь сказывается на изменении вида пачечной активности [30].

В настоящей работе помимо обобщения результатов, полученных ранее, на основе техники разделения полной системы на медленную и быструю подсистемы проведено детальное изучение и описание сценариев формирования разных видов пачечной активности, влияющих на изменение формы пачки.

## 1. Модель динамики двух неидентичных миграционно связанных сообществ

Уравнения динамики численности двух соседних неидентичных миграционно связанных сообществ «хищник–жертва», описываемых уравнениями Базыкина [24, 25] с функциональным откликом Холлинга II типа, имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = A_1 X_1 \frac{K - X_1}{K} - \frac{BX_1 Y_1}{1 + HX_1}, \\ \frac{dY_1}{dt} = -CY_1 + \frac{SX_1 Y_1}{1 + AX_1} + M(Y_2 - Y_1), \\ \frac{dX_2}{dt} = A_2 X_2 \frac{K - X_2}{K} - \frac{BX_2 Y_2}{1 + HX_2}, \\ \frac{dY_2}{dt} = -CY_2 + \frac{SX_2 Y_2}{1 + HX_2} + M(Y_1 - Y_2), \end{cases} \quad (1)$$

где  $X_1$  и  $X_2$  — численности популяций жертвы,  $Y_1$  и  $Y_2$  — численности популяций хищника в первом и втором сообществах, соответственно;  $K$  — устойчивая равновесная численность популяции жертв в каждом местообитании в отсутствие хищника;  $B$  — удельная скорость потребления популяцией хищника популяции жертвы при единичной плотности обеих популяций;  $C$  — естественная смертность хищника,  $S/B$  — коэффициент переработки потребленной хищником биомассы жертвы в собственную биомассу;  $H$  — коэффициент насыщения хищника;  $M$  — коэффициент миграции хищника. Неидентичность сообществ выражается в существенной разности максимальных скоростей воспроизводства популяций жертвы, обозначенных как  $A_1$  и  $A_2$ , соответственно ( $A_1 \neq A_2$ ). Это отражает ситуацию, когда на сопредельных территориях обитают два принципиально разных вида жертв, но имеющих одинаковую пищевую ценность для хищника.

После замены переменных:  $X_i = Cx_i/s$ ,  $Y_i = A_i y_i/b$  ( $i = 1, 2$ ), модель (1) преобразуется в следующую систему с пятью параметрами:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - ax_1) - \frac{x_1 y_1}{1 + hx_1}, \\ \frac{dy_1}{dt} = -c_1 y_1 + \frac{c_1 x_1 y_1}{1 + hx_1} + c_1 m \left( \frac{c_1}{c_2} y_2 - y_1 \right), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(1 - ax_2) - \frac{x_2 y_2}{1 + hx_2}, \\ \frac{dy_2}{dt} = -c_2 y_2 + \frac{c_2 x_2 y_2}{1 + hx_2} + c_2 m \left( \frac{c_2}{c_1} y_1 - y_2 \right), \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_i$  и  $y_i$  — относительные численности жертв и хищника,  $h = HC/S$  — коэффициент насыщения хищника,  $a = C/(KS)$  — коэффициент самолимитирования жертвы,  $c_i = C/A_i$  — относительная скорость снижения (убыли) численности хищников (смертности) и  $mc_i = M/A_i$  — коэффициент миграции хищников ( $i = 1, 2$ ). В статье [28] более подробно описана постановка задачи и приведено аналитическое исследование системы (1).

Надо заметить, что использованная в системе (2) замена переменных приводит к тому, что два неидентичных сообщества с разными скоростями роста численности жертв ( $A_1 \neq A_2$ ) становятся подобными сообществам, в которых смертность хищников различна ( $c_1 \neq c_2$ ). Однако в этом случае связь между сообществами оказывается несимметричной ( $c_1 m \neq c_2 m$ ), то есть не совпадают темпы оттока особей, покидающих одну территорию (эмигранты), и темпы их притока на другую (иммигранты), что можно интерпретировать как гибель хищников в процессе миграции. Однако из-за разницы в смертности хищника ( $c_1 \neq c_2$ ) эта гибель будет различной при движении из первого или второго сообщества, что прямо указывает на наиболее «выгодное» направление для эмиграции: территория, где ниже смертность хищника или выше рождаемость жертв, что эквивалентно, согласно использованной замене переменных.

Для дальнейшего исследования режимов динамики, возникающих в рассматриваемых сообществах, примем следующие значения параметров:

$$a = 0.1, \quad h = 0.5, \quad c_1 = 0.002, \quad c_2 = 0.5, \quad m = 0.005,$$

где значения  $a$ ,  $h$  приводят к возникновению предельного цикла в каждой из подсистем, соответствующих разным сообществам. Значение  $c_1 = 0.002$  соответствует низкой смертности хищников на первой территории, а  $c_2 = 0.5$  — высокой смертности хищников на второй. Согласно приведенной замене переменных из (1) в (2), сообщество с низкой смертностью хищника имеет высокую скорость воспроизводства жертв, и наоборот, высокая смертность хищника присуща сообществу с медленной скоростью роста числа жертв. Такая ситуация возможна, когда рядом находятся местообитания жертв с принципиально разным репродуктивным потенциалом. Например, жертвами

выступают быстро размножающиеся мелкие грызуны и медленно размножающиеся крупные травоядные, которые обитают на разных территориях (луг и лес), а хищник перемещается между ними.

В ходе исследования будем варьировать  $a$  и  $c_1$  при фиксированных  $h = 0.5$ ,  $c_2 = 0.5$ ,  $m = 0.005$ , следя за устойчивостью особых точек и изучая тип динамического поведения.

Аналитическое исследование показало, что система (2) имеет несколько особых точек:

- тривиальная  $A_0(0; 0; 0; 0)$  с нулевыми численностями всех популяций;
- полутривиальные  $A_1(1/a; 0; 0; 0)$ ,  $A_2(0; 0; 1/a; 0)$ ,  $A_3(1/a; 0; 1/a; 0)$  с нулевой численностью хищников;
- полутривиальные  $B_1\left(\frac{1+2m}{\beta_1}; \frac{(1+m)\beta_2}{\beta_1^2}; 0; \frac{c_2m\beta_2}{c_1\beta_1^2}\right)$  и  $B_2\left(0; \frac{c_1m\beta_2}{c_2\beta_1^2}; \frac{1+2m}{\beta_1}; \frac{(1+m)\beta_2}{c_1\beta_1^2}\right)$  ( $\beta_1 = 1 - h + m - 2hm$ ,  $\beta_2 = \beta_1 - a - 2am$ ), соответствующие нулевым численностям одной популяции жертвы в разных сообществах;
- три нетривиальные  $E_i\left(\bar{x}_1^{(i)}, \bar{y}_1^{(i)}, \bar{x}_2^{(i)}, \bar{y}_2^{(i)}\right)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) с ненулевыми численностями всех популяций.

Были вычислены координаты всех точек, исследованы условия их существования и описаны простейшие бифуркации [28, 30]. Построение бифуркационных диаграмм выполнено с использованием открытой системы исследования динамических систем MatCont [31], а также собственного набора программ. Для выделения области квазипериодической динамики использован метод карт показателей Ляпунова, а также метод карт динамических режимов, построенных для соответствующего отображения Пуанкаре. Результат этого исследования резюмирован на рис. 1.

На рис. 1,  $a$  линиями отмечены основные локальные бифуркации особых точек системы (1), а цветом выделено несколько областей, соответствующих разным типам динамики. Линия  $ТС$  соответствует транскритической бифуркации между точками  $B_1$  и  $E_1$ . Между линиями  $H$  и  $H^-$  находится область существования асимптотически устойчивых предельных циклов (белая область), возникающих вокруг отмеченных в скобках особых точек. При пересечении линии  $H^-$  циклы теряют устойчивость и формируются релаксационные предельные циклы, известные также как быстро-медленный цикл, канард или уточное решение [21, 32–34]. На рис. 1,  $d-e$  показаны примеры перехода предельных циклов  $L_1$  и  $L_2$  в релаксационные циклы  $C_1$  и  $C_2$ , которые отличаются сильно возросшим размахом колебаний, а также структурой, показанной во втором столбце. На фазовых портретах видно, что в отличие от предельных циклов  $L_1$  и  $L_2$ , циклы  $C_1$  и  $C_2$  «прилипают» к отмеченной ветви параболы ( $M_{eq}^S$ ) и одной из осей координат ( $Oy_2$ ), а также содержат участки с быстрым (две или более стрелок) и медленным (одна стрелка) движением фазовых точек.

При приближении к линии  $NB$  релаксационные циклы увеличивают свой размах, период колебаний неограниченно возрастает и формируется максимальный канард. При пересечении этой линии цикл сливается с гомоклинической петлей, исходящей из точки  $A_1$  или  $A_2$  (в зависимости от значения  $c_1$ ), и быстро разрушается. В результате, в серой области при малых значениях параметра  $a$  отсутствуют всякие колебания, и численность всех сообществ медленно падает. При значениях параметров из узкой желтой области на рис. 1,  $a$  формируется длиннопериодический цикл  $L(B_2)$  вокруг полутривиальной точки  $B_2$ . Пример такого цикла показан на рис. 1,  $f$ . Этот цикл характеризуется нулевой численностью жертв на первой территории ( $x_1 = 0$ ), а также сильными и непродолжительными всплесками численностей после длительных периодов их крайне низких значений. Показанный на рис. 1,  $f$  цикл близок к своему максимальному размеру и на фазовом портрете видно, что он проходит в окрестности седловой точки  $A_2$ , а при небольшом возмущении сливается с сепаратрисой точки  $A_2$  и быстро разрушается.

В зеленой области — области  $S$  на рис. 1,  $a$  — реализуется релаксационный цикл, а также многочастотные периодические режимы (рис. 2), сочетающие в себе как медленные тонические изменения численностей, так и быструю пачечную активность. Эти режимы на графиках

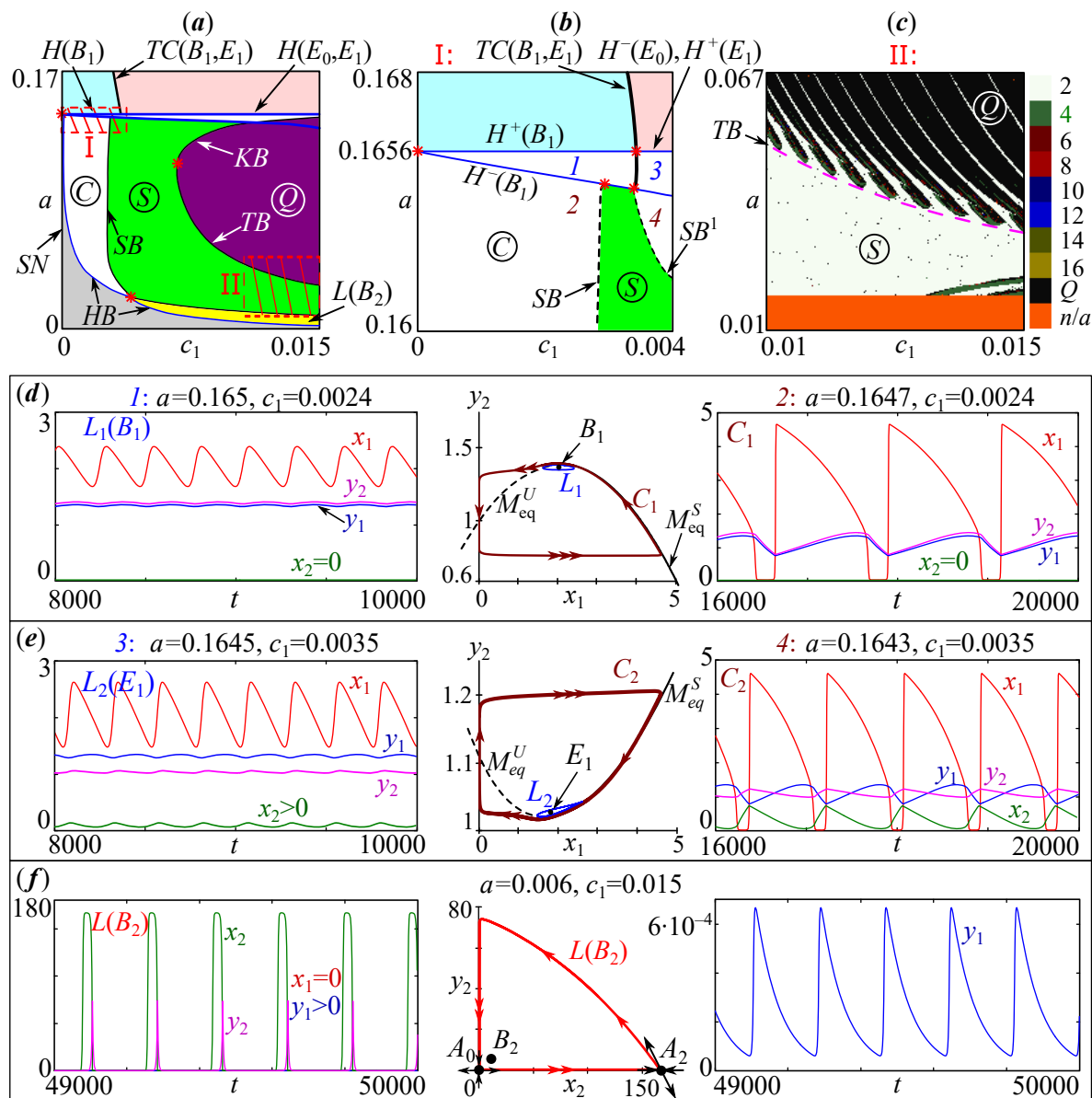


Рис. 1.  $a$  – Бифуркационная диаграмма системы (2) и  $b$  – ее увеличенный фрагмент. Над линией  $H$  устойчива точка  $B_1$  или  $E_1$ . Серая область – отсутствие колебаний (асимптотически устойчива точка  $A_0$ ); белая  $C$  – образование устойчивых предельных циклов; зеленая  $S$  – возникновение пачек; фиолетовая  $Q$  – квазипериодическая динамика. Линия  $H$  – бифуркация Андронова–Хопфа,  $TC$  – транскритическая бифуркация,  $HD$  – гомоклиническая бифуркация,  $SB$  – рождение пачечной динамики,  $KB$  и  $TB$  – возникновение квазипериодической динамики.  $c$  – карта динамических режимов в области II, где цветом закодирован период цикла отображения Пуанкаре.  $d-f$  – примеры предельных циклов в системе (2) (цвет онлайн)

Fig. 1.  $a$  – Bifurcation diagram of the system (2) and  $b$  – its enlarged fragment. Point  $B_1$  or  $E_1$  is stable above the line  $H$ . The gray domain is the absence of oscillations (the point  $A_0$  is asymptotically stable); white domain  $C$  is the region of stable limit cycles; green domain  $S$  corresponds to burst dynamics; magenta domain  $Q$  is quasi-periodic dynamics. Lines  $H$ ,  $TC$  and  $HB$  are Andronov–Hopf, transcritical and homoclinic bifurcations respectively;  $SB$  is the birth of burst dynamics;  $KB$  and  $TB$  are the emergence of quasi-periodic dynamics.  $c$  – map of dynamic regimes in region II where color coded is the cycle period of the Poincaré mapping.  $d-f$  – examples of limit cycles in system (2) (color online)

динамики численности имеют ромбовидную, треугольную (рис. 2, *a*), усеченную трапециевидную (рис. 2, *b*) или более сложные формы (рис. 2, *c*), и отличаются количеством витков на быстром пачечном многообразии. Число витков растет по мере приближения к области квазипериодической динамики  $Q$  (рис. 2, *d-f*).

В пурпурной области  $Q$  (см. рис. 1, *a*) модельная траектория плотно покрывает такие множества, как тор (при пересечении линии  $TB$ ) (см. рис. 2, *f*) или бутылка Клейна (линии  $KB$ ) (см. рис. 2, *d, e*), а периоды колебаний сообществ на разных территориях связаны иррациональным отношением. Такой тип динамики ранее был рассмотрен через анализ сечений Пуанкаре [30]. В данном случае на специально подобранной секущей плоскости траектория формирует замкнутые инвариантные кривые, которые в случае динамики на торе или бутылке Клейна, имеют разное взаимное положение. Обнаружено, что в первом случае кривые вложены друг в друга, а во втором — расположены достаточно далеко друг от друга.

Далее по мере роста  $c_1$  наблюдается только квазипериодический тип динамики, и лишь при  $c_1 \rightarrow c_2$  происходит полная взаимная синхронизация. Хаотические режимы при принятых значениях параметров в данной модели не обнаружены.

На основе численных экспериментов можно утверждать, что области  $S$  и  $Q$  (см. рис. 1, *a*) неоднородны. В первой области происходит чередование режимов, которые отличаются порядком следования быстрой пачечной части цикла относительно медленной. В области  $Q$  участки (зоны) квазипериодической динамики (на рис. 1, *c* отмеченные черным цветом) чередуются с языками синхронизации (закодированные цветом) — областями параметров, приводящих к строго периодической динамике. Число на карте динамических режимов (см. рис. 1, *c*) указывает на количество полных оборотов цикла, необходимых для возвращения модельной траектории в исходную точку фазового пространства. Вне языка это число бесконечно большое.

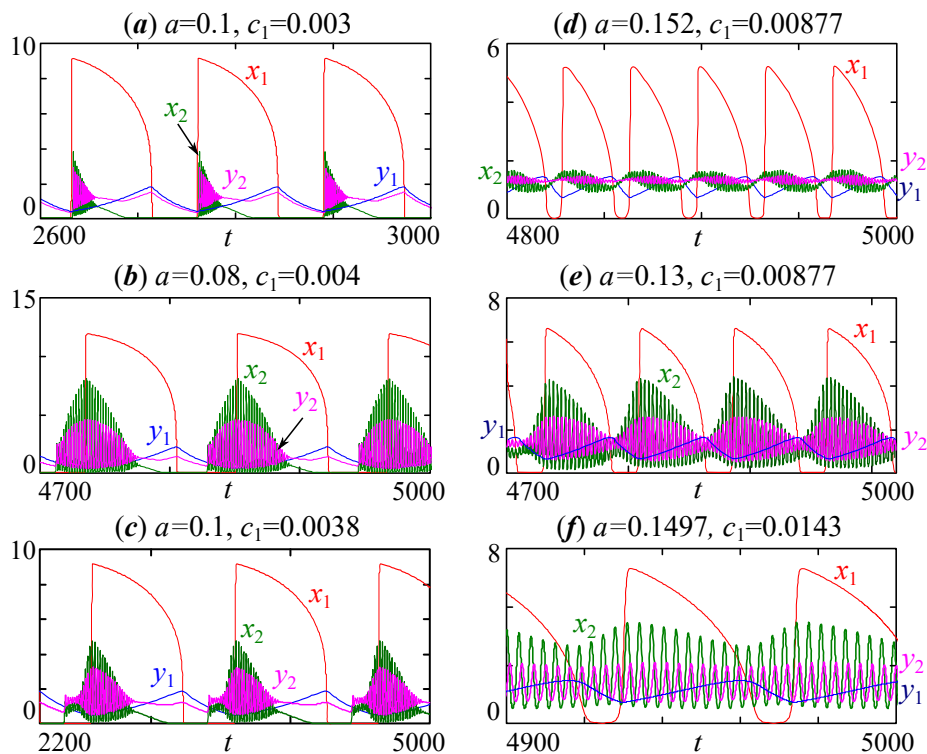


Рис. 2. Примеры пачечной динамики в системе (2) из области  $S$  на рис. 1, которые различаются формой пачек (цвет онлайн)

Fig. 2. Examples of bursting in system (2) from region  $S$  (fig. 1) which differ in the waveform of burst (color online)

Скорости изменения переменных  $y_1$  и  $y_2$  определены параметрами  $c_1$  и  $c_2$ , причем с учетом выбранных значений параметров  $0 < c_1 \ll c_2 < 1$ , следовательно можно принять, что  $0 < c_1 \ll 1$  — малый параметр. Это позволяет рассматривать данную модель, как быстро-медленную систему. В том смысле, что первые два уравнения составляют медленную подсистему, в которой наблюдается только медленный цикл, а последние два — быструю, в которой возможны колебания с периодом много большим, чем у медленной подсистемы. Воспользуемся для исследования системы (2) методологией изучения быстро-медленных систем.

При исследовании таких динамических систем часто используются геометрические методы, основанные на разделении полной системы (2) на быстрые и медленные уравнения (подсистемы). При этом вариация медленной переменной, являющейся бифуркационным или сканирующим параметром, в предельном случае позволяет упростить поиск бифуркаций состояний равновесия, приводящих к рождению предельных циклов быстрой (двумерной) подсистемы, рассматриваемой в сингулярном пределе  $c_1 = 0$ . Также изменение сканирующего параметра при малых  $c_1 \neq 0$  позволяет построить медленное критическое многообразие, являющееся скелетом для различного типа активностей в полной быстро-медленной модели (2). Очевидно, что быстрая подсистема модели (2) обладает, по крайней мере, двумя такими многообразиями: многообразием покоя и тоническим многообразием, на котором возникают быстрые всплески численностей (спайки), показанные на рис. 2. Причем синергия быстрых и медленных взаимодействий может приводить к весьма нетипичным бифуркационным явлениям, возможным только в полной модели [17, 35, 36].

Далее, в соответствии с геометрическим методом, исследуем бифуркации, возникающие в каждой из рассматриваемых подсистем, и сопоставим их с режимами полной системы.

## 2. Бифуркации в медленной и быстрой подсистеме

Рассмотрим подсистемы, каждая из которых соответствует локальному сообществу независимо друг от друга. Для более глубокого изучения процессов, происходящих в первом сообществе, будем считать, что численность жертв и хищников второго сообщества изменяется достаточно медленно и слабо влияет на динамику первого. В этом случае модель (2) преобразуется в систему вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - ax_1) - \frac{x_1y_1}{1 + hx_1} = f_1(x_1, y_1), \\ \frac{dy_1}{dt} = c_1 \left( -y_1(1 + m) + \frac{x_1y_1}{1 + hx_1} + \frac{c_1m}{c_2}y_2 \right) = c_1g_1(x_1, y_1, y_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В системе (3) присутствует малый параметр  $c_1$  ( $0 < c_1 \ll c_2 < 1$ ), который входит во второе уравнение дважды. Наличие малого  $c_1$  приводит к тому, что влияние «замороженной» переменной  $y_2$  на систему значительно слабее, чем  $y_1$  и  $x_1$ .

Для второй подсистемы аналогично можно записать:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = 0, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(1 - ax_2) - \frac{x_2y_2}{1 + hx_2} = f_2(x_2, y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} = -c_2y_2 + \frac{c_2x_2y_2}{1 + hx_2} + c_2m \left( \frac{c_2}{c_1}y_1 - y_2 \right) = g_2(x_2, y_2, y_1). \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) существенно зависит от параметра  $y_1$ , поскольку  $c_2^2m/c_1 \gg c_1$ .



Назовем систему (3) ведущей или сильной, а (4) — ведомой или слабой. Покажем, что сильная система (3) определяет динамику (4), а также совместную динамику полной системы (2).

Для начала рассмотрим бифуркации в подсистеме (3) при изменении параметра  $y_2$ . Состояния равновесия данной подсистемы лежат в плоскости  $(x_1, y_1)$ , на пересечении двух нульклин  $f_1(x_1, y_1) = 0$  и  $g_1(x_1, y_1, y_2) = 0$ , где  $y_2$  — параметр.

Как известно [17,33], для систем вида (3) в предельном случае  $c_1 = 0$  уравнение  $f_1(x_1, y_1) = 0$  задает в фазовом пространстве критическое многообразие или медленную кривую:  $M_{eq} = \{(x_1, y_1) \in R^2 | f_1(x_1, y_1) = 0\} \cup \{x_1 = 0, y_1 \geq 1\}$ . Заметим, что она становится поверхностью для полной системы (2). Эта кусочно-заданная кривая содержит устойчивую  $M_{eq}^S$  (верхняя часть параболы на рис. 3, a) и неустойчивую  $M_{eq}^U$  ветви (нижняя часть параболы и часть прямой  $x_1 = 0$ ). На рис. 3, a эти ветви показаны сплошной и пунктирной линиями, и выступают каркасом релаксационного цикла в ведущей системе (3) при достаточно малых  $c_1 \neq 0$ . Как показано на рис. 3, a одна часть цикла лежит на устойчивой ветке многообразия  $M_{eq}^S$ , другая на  $M_{eq}^U$ .

Точка  $\langle z \rangle$  на рис. 3, a и рис. 5 соответствует центру «масс» предельного цикла (среднее значение координат) и находится из стандартной формулы [36]:

$$\langle z \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) dt,$$

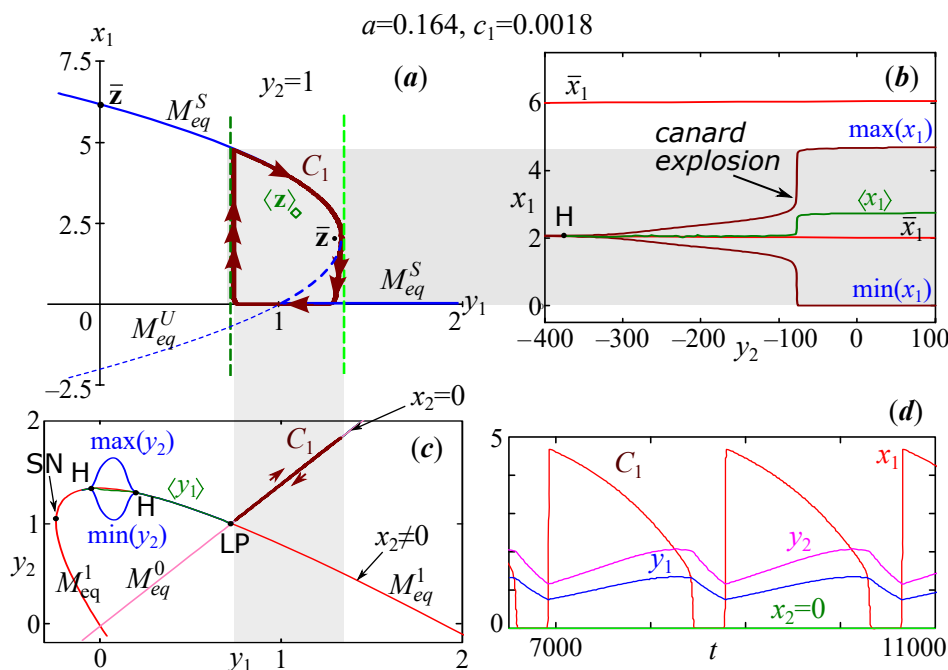


Рис. 3. a — Нульклин системы (3) с нанесенным релаксационным циклом системы (2) — канард  $C_1$ . Стрелочки здесь и на рис. 3, c — направления движения вдоль цикла, их количество — скорость движения. b и c — Бифуркационная диаграмма системы (3) и (4) при вариации параметра  $y_2$  и  $y_1$ , соответственно. Серой полосой выделен диапазон значений переменных цикла  $C_1$ , попадающих в разные части диаграммы b и c. d — Динамика полной системы (2), соответствующая циклу  $C_1$  (цвет онлайн)

Fig. 3. a — Nullcline of system (3) with a slow-fast limit cycle of system (2) (canard  $C_1$ ) lying on top of nullcline. b and c — Bifurcation diagram of system (3) and (4) with variation of the parameter  $y_2$  and  $y_1$ , respectively. The gray bars highlight the range of the limit cycle  $C_1$  falling into different parts of the diagram b and c. d — Dynamics of the full system (2) corresponding to cycle  $C_1$  (color online)

где  $\mathbf{z} = \phi(t)$  — уравнение, описывающее изменение координат предельного цикла с периодом  $T$ . Для системы (3)  $\mathbf{z} = (x_1, y_1)$ , для (4)  $\mathbf{z} = (x_2, y_2)$ . При вычислении этого интеграла рассматриваются численно полученные координаты точек предельного цикла на одном витке, выполняется суммирование их координат, а результат делится на число точек, лежащих на цикле.

На рис. 3, а показан канард, возникающий в системе (3) при фиксированном значении «замороженной» переменной  $y_2$ . Более того, этот цикл с точностью до малых порядка  $O(c_1)$  совпадает с периодическим решением полной системы (2) при указанных значениях параметров. Число стрелок на рис. 3, а указывает на скорость движения вдоль канарда таким образом, что в горизонтальном направлении цикл содержит медленное движение, а в вертикальном — быстрое.

При малом  $c_1 \neq 0$  вариация параметра  $y_2$  двигает вторую нульклину, определяемую уравнением  $g_1(x_1, y_1, y_2) = 0$ , относительно неподвижной первой, не зависящей от значений  $y_2$ . Вместе с ней сдвигается состояние равновесия. При  $c_1 = 0$  нетривиальная стационарная точка  $\bar{z} = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  совпадает с вершиной параболы  $f_1(x_1, y_1) = 0$ , а при  $c_1 > 0$  смещается внутрь цикла. На рис. 3, б показана зависимость координат  $(\bar{x}_1)$  состояний равновесия системы (3) от  $y_2$ . При некотором значении  $y_2$  в системе (3) происходит бифуркация Андронова–Хопфа (точка Н), и из стационарной точки рождается устойчивый предельный цикл. С ростом параметра он увеличивает свой размер (амплитуду колебаний). Чтобы это показать, на рис. 3, б приведена зависимость крайних значений численности жертв ( $\max(x_1)$  и  $\min(x_1)$ ) медленной подсистемы (3), а также среднего значения координат цикла  $\langle x_1 \rangle$  при изменении  $y_2$ . В точке, обозначенной как «canard explosion», цикл стремительно увеличивается в размере и «прилипает» (стремится) к соответствующим ветвям медленной кривой  $M_{eq}$ , а центр цикла значительно отдаляется от стационарной точки. В результате, фазовый портрет подсистемы (3) при допустимых значениях  $y_2 > 0$  представляет собой канард, который практически не меняется даже при значительных вариациях «замороженной» переменной  $y_2$ .

В отличие от сильного сообщества (3), слабое сообщество (4) существенно зависит от параметра  $y_1$ . Рассмотрим локальные бифуркации системы (4) в зависимости от  $y_1$ . Координаты стационарных точек  $\bar{x}_2$  и  $\bar{y}_2$  несложно вычислить как решение системы

$$\begin{cases} f_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 0, \\ g_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2, y_1) = 0. \end{cases}$$

На рис. 3, с показана зависимость стационарных точек от параметра  $y_1$ . Эта зависимость представлена прямой  $M_{eq}^0 = \{(y_1, y_2) \in R^2 | y_2 = c_2 m y_1 / (c_1(1+m)), x_2 = 0\}$  и кривой  $M_{eq}^1 = \{(y_1, y_2) \in R^2 | (c_2 m h y_1 - c_1((1+m)h-1)y_2)^2 - c_1 c_2 m(a+h)y_1 + c_1^2((1+m)(1+h)-1)y_2 = 0, x_2 > 0\}$ . Они пересекаются в точке LP, соответствующей транскритической бифуркации, в которой совпадают координаты стационарных точек и происходит обмен устойчивостью. Справа от нее устойчивы точки, расположенные на прямой, но с нулевой стационарной численностью жертв слабого сообщества ( $\bar{x}_2 = 0$ ). Слева устойчивы точки на параболе с ненулевой стационарной численностью жертв ( $\bar{x}_2 > 0$ ). Во второй точке пересечения совпадают лишь численности хищника, но не жертв. Поэтому качественных изменений там не происходит. Покажем, что множества  $M_{eq}^0$  и  $M_{eq}^1$ , так же как  $M_{eq}$ , можно рассматривать в качестве приближения части инвариантных многообразий полной системы (2).

Из построенных бифуркационных диаграмм несложно понять, что периодические изменения параметра  $y_1$ , вызванные релаксационным циклом (канардом) в ведущей системе (3), провоцируют колебания переменной  $y_2$  в ведомой системе (4). В результате характер динамики полной системы (2) существенно связан с тем, куда на этой диаграмме попадают колебания  $y_1$ . Возможно несколько вариантов расположения вариации  $y_1$  на этой диаграмме, соответствующих принципиально разным режимам системы (2).

Во-первых, если вариация  $y_1$  лежит правее точки LP, то динамика фазовой переменной  $y_2$  строго следует за всеми изменениями  $y_1$  (см. рис. 3, *c*). Как уже было показано, ведущая система может генерировать лишь периодические колебания, поэтому динамика численностей хищников на обоих участках оказывается синфазной (см. рис. 3, *d*). Численность жертв  $x_2$  в ведомой системе в асимптотическом случае оказывается нулевой. Данный предельный цикл (канард  $C_1$ ) формируется вокруг полутривиальной стационарной точки  $B_1$ . На рис. 3, *a* показано, что при проецировании на плоскость  $(x_1, y_1)$  цикл стремится к ветвям многообразия  $M_{eq}$ , а при проецировании на плоскость  $(y_1, y_2)$  — лежит на участке прямой  $M_{eq}^0$  (см. рис. 3, *c*).

Во-вторых, параметр  $y_1$  может изменяться так, что фазовые точки расположены слева от точки LP на диаграмме. В этом случае цикл в ведущей системе провоцирует в ведомой системе противофазные к ней колебания с ненулевой численностью жертв  $x_2$ . Пример такой динамики показан на рис. 4, *a*, где аттрактор полной системы (2) лежит только на участке параболы  $M_{eq}^1$ . Справа показано, как во времени изменяются значения фазовых переменных  $y_1$  и  $y_2$ , а также расположение фазовой кривой на одной из ветвей медленной поверхности при проецировании в трехмерное подпространство  $(x_1, x_2, y_2)$ . В полной системе (2) этот цикл формируется вокруг нетривиальной точки  $E_1$ .

В-третьих, вариация  $y_1$  может попадать как на левую, так и на правую от точки LP часть бифуркационной диаграммы. В результате цикл ведущей системы будет генерировать в ведомой системе чередующиеся участки синфазной и противофазной динамики. Пример такого поведения показан на рис. 4, *d-f*. В период синфазной динамики фазовая кривая лежит на поверхности плоскости  $x_2 = 0$ , а в период противофазной — вне этой плоскости (см. рис. 4, *d*), а также частично на медленной поверхности  $M_{eq}^S$  и на неизвестном многообразии, которое предстоит найти (см. рис. 4, *f*). В этом случае, очевидно, существует петля гистерезиса такая, что увеличение или уменьшение значения  $y_1$  приводит к движению фазовых точек вдоль разных стационарных

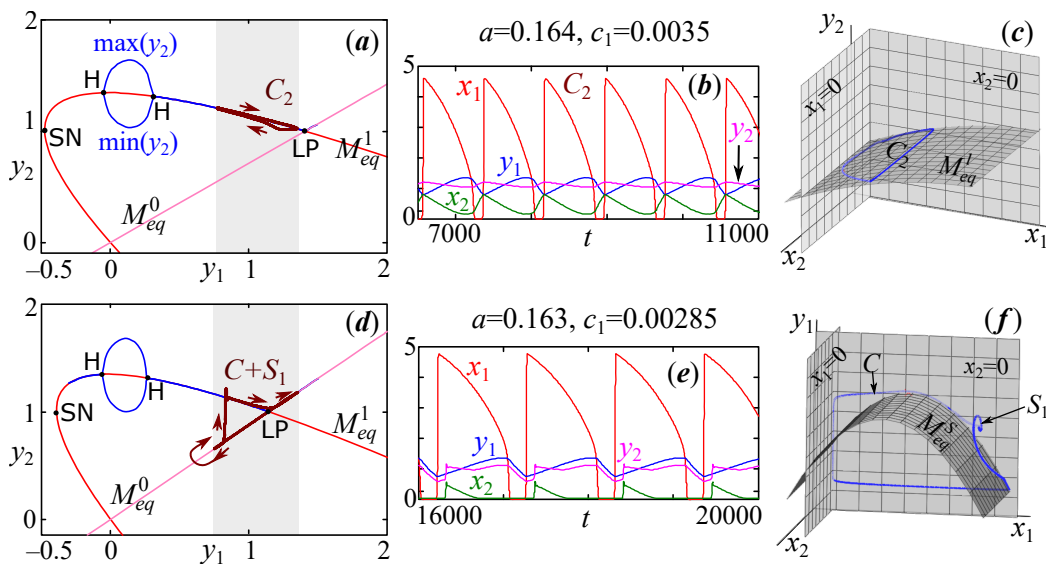


Рис. 4. *a, d* — Бифуркационные диаграммы системы (4) при изменении параметра  $y_1$ , на которые нанесены фазовые точки периодического решения системы (2). *b, e* — Примеры динамики системы (2). *c, f* — Расположение фазовых точек относительно критических многообразий (цвет онлайн)

Fig. 4. *a, d* — Bifurcation diagrams of system (4) with a change in the parameter  $y_1$  on which the phase points of the periodic solution of system (2) are plotted. *b, e* — Examples of dynamics for system (2). *c, f* — Location of phase points with respect to critical manifolds (color online)

состояний ведомой системы (ветвей), пересекающихся в точке LP (см. рис. 4, *d*). Когда значение  $y_1$  снижается, то происходит движение вдоль прямой  $M_{eq}^0$ , в том числе левее точки LP. Затем может возникнуть небольшой всплеск численностей жертв и хищника на втором участке, очевидно не связанный с бифуркациями в ведомой системе, поскольку он наблюдается вдалеке от точки Н. Траектория при этом выходит на параболу  $M_{eq}^1$ , а переменная  $y_1$  переходит к росту, пока не достигнет точки LP. Затем она опять возвращается на прямую  $M_{eq}^0$ . Движение фазовой траектории в этом случае происходит по часовой стрелке вдоль треугольника, образованного двумя ветвями многообразия.

В последних двух случаях характер динамики в противофазной части цикла существенно меняется (возникает пачечная активность) в зависимости от того, насколько близко к точке Н попадает вариация  $y_1$ , а также от происходящих в ведомой системе (4) других качественных изменений. В примерах, приведенных выше, предельный цикл ведомой системы (4) рождается (исчезает) в двух точках Н, лежащих на устойчивой ветке стационарных состояний  $M_{eq}^1$ . Однако при достаточно малых  $c_1$  размах колебаний в ведущей системе (3) самостоятельно никогда не достигает этой точки. Поэтому при достаточно малых  $c_1$  (параметров из области  $C$  на рис. 1, *a*) пачечная активность на основе цикла ведомой системы может быть лишь частью переходного процесса, если начальное значение  $y_1(0)$  расположено между двумя точками Н бифуркации Андронова–Хопфа (см. рис. 4, *a* или *d*).

При выходе из области  $C$ , то есть при увеличении  $c_1$ , правая точка Н смещается ближе к LP, причем настолько, что предельный цикл ведущей системы захватывает как точку LP, так и Н. Этот предельный цикл увеличивает свой размах настолько, что фазовые точки системы (4) приближаются к неустойчивому состоянию равновесия и довольно долго остаются в его окрестности. На это указывает тот факт, что средняя точка цикла  $\langle y \rangle$  стремится к седловой точке. В этот момент цикл сливается с сепаратрисами, исходящими из стационарных точек, и полностью разрушается вследствие гомоклинической бифуркации, отмеченной на рис. 5 точкой НВ.

На приведенных диаграммах с помощью кривых  $\max(y_2)$  и  $\min(y_2)$  (см. рис. 5) можно проследить, как меняется размер предельного цикла ведомой системы (4) при разных значениях параметров  $a$  и  $c_1$ . Указанный подход составляет основу так называемой техники продолжения по параметру. Ветвь кривой, обозначенная через  $\langle y_2 \rangle$  на рис. 5, показывает зависимость средних координат предельного цикла. Заметим, что при уменьшении  $y_1$  средняя ветвь  $\langle y_2 \rangle$  приближается к нижней  $\min(y_2)$ .

Таким образом, на верхней ветке стационарных состояний  $M_{eq}^1$  ведомой системы (4) образуется предельный цикл, который можно рассматривать в качестве каркаса пачечной динамики полной системы (2). При изменении величины  $y_1$  меняется размер и расположение предельного цикла ведомой системы (4). Несложно понять, что в фазовом пространстве полной системы (2) каждый из этих циклов лежит на гладкой поверхности параболической формы, исходящей из точки Н. Эту поверхность можно рассматривать как приближение части инвариантного многообразия системы (2), на котором располагаются быстрые всплески численности хищника и жертв (быстрое многообразие). По крайней мере, той его части, на которой лежат затухающие быстрые периодические движения. Обозначим его через  $M_{PO}$ . Наличие этого многообразия позволяет сразу объяснить механизм рождения пачек треугольной формы, показанных на рис. 5, *a*. В случае таких пачек, сначала траектория медленно движется вниз вдоль прямой  $M_{eq}^0$  (многообразие покоя). Затем, достигнув минимально возможного значения  $y_1$ , траектория «перескакивает» на быстрое многообразие  $M_{PO}$  (левее точки Н). Этот скачок сопровождается стремительным ростом переменной  $x_1$ . На этом многообразии траектория совершает несколько витков, соответствующих только затухающим колебаниям фазовых переменных. Обозначим эту часть динамики как  $S_1$ . Достигнув точки Н, траектория покидает быстрое многообразие и оказывается на многообразии покоя  $M_{eq}^1$ . При переходе через точку LP траектория переходит на прямую  $M_{eq}^0$ , и цикл замыкается.

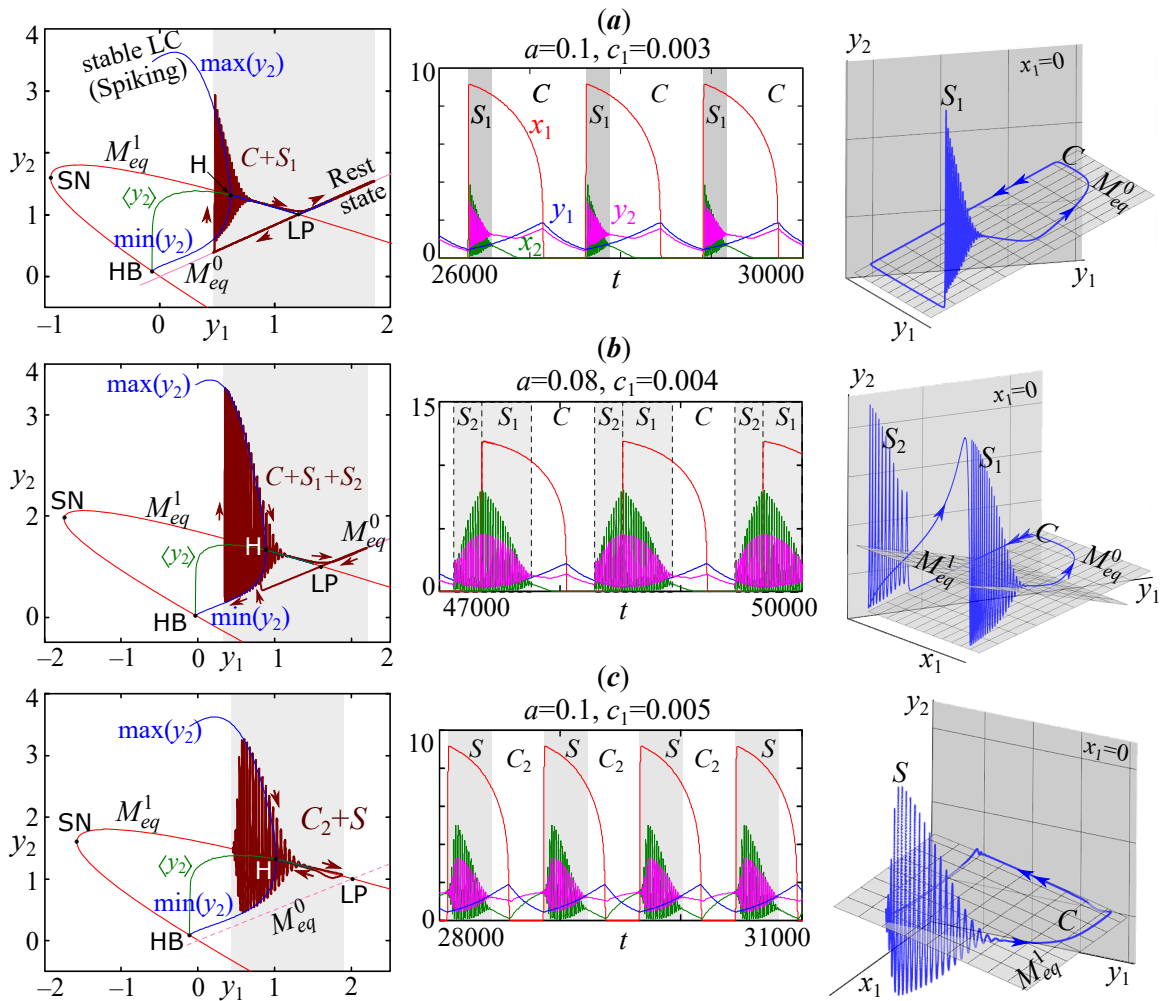


Рис. 5. Слева — бифуркационные диаграммы системы (4) при изменении параметра  $y_1$ , на которые нанесены фазовые точки периодического решения системы (2), в центре — примеры динамики системы (2), справа — вид аттрактора и его расположение относительно многообразия покоя (цвет онлайн)

Fig. 5. On the left — the bifurcation diagrams of system (4) with a change in the parameter  $y_1$  and phase points of the periodic solution of system (2). In the middle — examples of the dynamics of system (2). On the right — the view of the attractors and its location relative to the slow manifold (color online)

Во втором и третьем примерах на рис. 5, *b–c* возникают пачки усеченной ромбовидной формы, что указывает на немного иной механизм формирования быстрых колебаний и существование еще одной ветки быстрого многообразия. Кроме того, переход с быстрого многообразия  $M_{PO}$  на многообразие покоя  $M_{eq}^1$  происходит значительно правее точки  $H$  во всех случаях. Во втором примере на быстром многообразии можно выделить два участка динамики  $S_1$  и  $S_2$ , соединенные канардом  $C$  (см. рис. 5, *b*). Участок  $S_1$  состоит из затухающих быстрых колебаний при максимальных значениях  $x_1 \gg 0$ ,  $S_2$  — из расходящихся колебаний при минимальных значениях  $x_1 \approx 0$  (см. рис. 5, *b*).

Из этого наблюдения можно предположить, что рождение быстрых взрывных колебаний зависит не только от факта роста или падения переменной  $y_1$  сильной подсистемы и ее абсолютных значений, но и от значений переменной  $x_1$ . Так сразу ясно, что затухающие быстрые колебания  $S_1$  возникают только при достаточно высоких значениях  $x_1$ , когда переменная  $y_1$  растет.

При низких или даже близких к нулю значениях  $x_1$  колебаний нет или рождаются расходящиеся колебания  $S_2$ , а величина  $y_1$  только падает (см. рис. 5, *b*). Из этого можно предположить, что быстрое многообразие  $M_{PO}$  не единственное или, по крайней мере, оно имеет дополнительную ветку, на которой реализуются быстрые расходящиеся колебания.

Данное наблюдение было сделано ранее, в работах [28, 30], однако там не было доказано наличие второй ветки быстрого многообразия. Для проверки данного утверждения выделим еще одну подсистему, в которой величина  $x_1$  является постоянной величиной:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0, \\ \frac{dy_1}{dt} = c_1 \left( -y_1(1+m) + \frac{x_1 y_1}{1+hx_1} + \frac{c_1 m}{c_2} y_2 \right) = c_1 g_1(x_1, y_1, y_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(1-ax_2) - \frac{x_2 y_2}{1+hx_2} = f_2(x_2, y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} = -c_2 y_2 + \frac{c_2 x_2 y_2}{1+hx_2} + c_2 m \left( \frac{c_2}{c_1} y_1 - y_2 \right) = g_2(x_2, y_2, y_1). \end{cases} \quad (5)$$

В системе (5) также присутствует малый параметр  $c_1$  ( $0 < c_1 \ll c_2 < 1$ ). Однако, из-за нелинейной зависимости производной  $y_1$  от значения «замороженной» переменной  $x_1$ , влияние  $x_1$  на динамику и бифуркации системы (5) должно существенно отличаться от рассмотренных зависимостей поведения систем (3) и (4) от переменной  $y_1$ .

Проследим за типичными бифуркациями системы (5) при значениях параметров, соответствующих пачечной активности в системе (2) с пачкой сложной формы, состоящей из усеченного ромба и треугольника, при  $a = 0.11$ ,  $c_1 = 0.0035$  (остальные параметры аналогичны использованным выше). В данном случае в полной системе (2) присутствуют затухающие колебания на многообразии  $M_{PO}$ , а также серия затухающих и расходящихся колебаний на искомом инвариантном множестве  $M_{PO}^1$ .

Система (5) имеет единственное нетривиальное состояние равновесия  $E^*(\bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ , которое можно найти как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = 0, \\ f_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 0, \\ g_2(\bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2) = 0. \end{cases}$$

Характер устойчивости состояний равновесия системы (5) показан на рис. 6, *a*, где сплошная линия соответствует зависимости нетривиальной стационарной численности  $\bar{y}_1$  от значения параметра  $x_1$ , а пунктир — тривиальному состоянию равновесия  $(0, 0, 0)$ . В точке  $H^+$  происходит суперкритическая, а в  $H^-$  — субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. Слева от  $H^+$  кривая  $\bar{y}_1(x_1)$  приближается к  $\bar{y}_1 = 0$  с положительной стороны, справа от  $H^-$  она приближается к  $\bar{y}_1 = 0$  из отрицательной области. Данная зависимость имеет разрыв в точке  $x_1^* = (h + 2mh - 1 - m) / ((1 - h)(h + 2mh - 1))$ , которую вместе с точками  $H^+$  и  $H^-$  можно рассматривать как некоторые пороговые значения  $x_1$ , определяющие тип динамики. Кроме того, система (5) имеет полутривиальное состояние равновесия  $(0, 1/a, 0)$ , координата  $\bar{y}_1 = 1/a$  которой лежит выше данных линий и не показана на рис. 6, *a*. Сепаратрисы, исходящие из тривиальной и полутривиальной точки, порождают некоторые области притяжения циклов в системе (5).

Несложно показать, что правее точки  $x_1^*$  производная  $dy_1/dt > 0$  для любых  $x_2 > 0$  и  $y_2 > 0$ , и не важно, монотонно ли они изменяются или колеблются. В результате, если  $x_1 > x_1^*$ , то переменная  $y_1(t)$  может только неограниченно расти при  $y_1(0) > 0$  (вернее, для начальных условий выше сплошной на рис. 6, *a*). Но поскольку в системе (5) присутствует малый

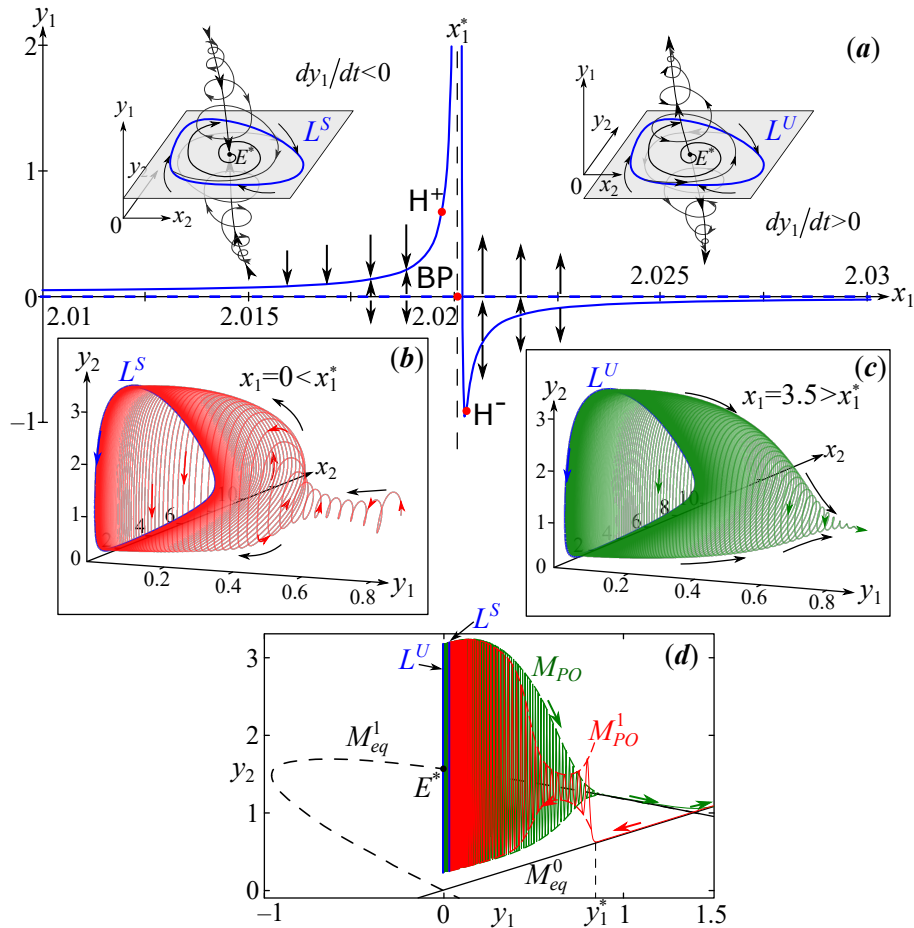


Рис. 6. *a* – Бифуркационная диаграмма системы (5) при  $a = 0.11$ ,  $c_1 = 0.0035$  и эскизы фазовых портретов. *b* – Переходная динамика системы (5) при движении к устойчивому предельному циклу  $L^S$  и *c* – при движении от неустойчивого предельного цикла  $L^U$ . *d* – Приближение быстрых многообразий системы (2) динамикой (циклами) системы (5) (цвет онлайн)

Fig. 6. *a* – Bifurcation diagram at  $a = 0.11$ ,  $c_1 = 0.0035$  and phase portraits sketches of system (5). *b* – Transient dynamics of system (5) when moving towards a stable limit cycle  $L^S$  and *c* – from an unstable limit cycle  $L^U$ . *d* – Approximation of fast manifolds of system (2) by dynamics (cycles) of system (5) (color online)

параметр  $c_1$ , то значения  $y_1$  изменяются настолько медленно, что, прежде чем уйти из окрестности неустойчивого цикла  $L^U$ , фазовая кривая совершает большое число витков в его окрестности. Расстояние между витками медленно увеличивается по мере роста  $y_1$ . Со временем траектория стягивается к лучу, и все фазовые переменные начинают неограниченно и монотонно возрастать (рис. 6, *c*). Можно показать, что с точностью до малых порядка  $O(c_1)$  этот луч совпадает с медленным многообразием  $M_{eq}^1$  или  $M_{eq}^0$  системы (4), поскольку эти кривые совпадают с медленными кривыми системы (5) при  $c_1 = 0$  и, очевидно, сохраняются при малом возмущении  $0 < c_1 \ll 1$ .

На рис. 6, *c* показана динамика системы (5) при  $x_1 = 3.5$ , где стрелки показывают направления движения траектории. Из рисунка видно, что траектория наматывается на поверхность параболической формы  $M_{PO}$ , вид которой не зависит от начальных условий. В данном случае не важно, откуда начинать интегрирование (снаружи или внутри этой фигуры) или насколько далеко от цикла  $L^U$ . Траектория быстро притягивается к этой поверхности, а затем медленно по ней движется, пока не стянется к лучу  $M_{eq}^1$ .

При  $x_1 < x_1^*$  производная  $dy_1/dt < 0$  для любых  $x_2 > 0$  и  $y_2 > 0$ . Поэтому, если  $x_1 < x_1^*$ , то переменная  $y_1(t)$  только падает до своего стационарного значения, определяемого зависимостью  $\bar{y}_1(x_1)$ . Правее точки  $H^+$  рождается устойчивый предельный цикл  $L^S$ , и переменные начинают испытывать колебания. По мере достаточно медленного снижения величины  $y_1$  (из-за малого параметра  $c_1$ ) фазовая траектория наматывается на поверхность, имеющую форму однополостного гиперboloида, а не параболоида, как можно было ожидать (рис. 6, b). Переход траектории на эту поверхность происходит следующим образом. При малых  $0 < x_1 < x_1^*$  существует некоторое критическое значение переменной  $y_1^*$  такое, что при  $y_1 > y_1^*$  переменные  $y_1, x_2$  и  $y_2$  достаточно монотонно падают, а траектория системы (5) движется по  $M_{eq}^0$ . При достижении и преодолении этого значения, то есть при  $y_1 < y_1^*$ , в системе (5) происходит скачок величин  $x_2$  и  $y_2$ , что приводит к возникновению колебаний. По мере падения значений  $y_1$  в системе (5) сначала возникают затухающие колебания  $x_2$  и  $y_2$ , которые при любых начальных условиях не достигают кривой  $M_{eq}^1$ , а затем они сменяются расходящимися. Двигаясь в сторону устойчивого предельного цикла  $L^S$ , траектория совершает большое число витков вдоль поверхности  $M_{PO}^1$ , расстояние между которыми сокращается по мере приближения к циклу  $L^S$ . Более того, численные расчеты показывают, что часть динамики полной системы (2), соответствующая затухающим и расходящимся колебаниям, достаточно точно совпадает с двумя приведенными на рис. 6, d решениями системы (5). Например, если начальная точка систем (5) и (2) лежит на медленном многообразии  $M_{eq}^0$  при  $y_1(0) > y_1^*$  и  $x_1 = 0$ , то их динамика с точностью до малых совпадает в части расходящихся колебаний на  $M_{PO}^1$  до момента перехода траектории системы (2) на многообразии  $M_{PO}$ , в то время как траектория системы (5) продолжит двигаться к циклу  $L^S$ . Аналогично для начальных условий, взятых на многообразии  $M_{PO}$ , динамика (5) и (2) совпадает до малых даже при переходе на ветки медленного многообразия  $M_{eq}^1$  и  $M_{eq}^0$ .

Таким образом, инвариантные многообразия системы (5) можно рассматривать как более точное приближение быстрого многообразия системы (2), образованное участками траектории системы (5) при движении к предельному циклу  $L^S$  или движении от цикла  $L^U$ . Они представляют собой две двумерные «пересекающиеся» поверхности: параболоид  $M_{PO}$  и однополостный гиперboloид  $M_{PO}^1$ .

Для приближенного построения параболической поверхности  $M_{PO}$  (рис. 7, b) достаточно рассмотреть несколько траекторий с начальными точками из разных частей неустойчивого цикла  $L^U$  и выразить координаты фазовых точек через цилиндрические координаты. Затем отсортировать полученные координаты фазовых точек по росту (или падению) величины  $y_1$  и произвести интерполяцию полученных точек, которую будем использовать в качестве параметризации искомой поверхности. На рис. 6, c приведена одна из используемых траекторий. Каждая дополнительная траектория будет заполнять пробелы в местах, где увеличивается расстояние между витками. Параметризация гиперboloида  $M_{PO}^1$  (рис. 7, a) выполняется похожим образом. Однако в качестве стартовых точек подбираются такие значения  $y_1(0)$  и  $y_2(0)$  на медленной кривой  $M_{eq}^0$  ( $x_2(0) = 0$ ), при которых траектория системы (5) максимально приближается к медленной кривой  $M_{eq}^1$  в месте перехода от затухающих колебаний к расходящимся. Одновременно с этим необходимо, чтобы переход от монотонной динамики к колебаниям (скачок с кривой  $M_{eq}^0$  на поверхность  $M_{PO}^1$ ) происходил при максимально возможном значении  $y_1$ . Тем самым оценивается величина  $y_1^*$ .

На рис. 7, a–c показан вид полученных поверхностей. Несложно заметить, что параболоид  $M_{PO}$  пересекает медленную кривую  $M_{eq}^1$  в своей вершине (точка H). В то время как для поверхности  $M_{PO}^1$  кривая  $M_{eq}^1$  выступает своего рода осью «симметрии» и не пересекается с ней. Вместе с тем однополостный гиперboloид  $M_{PO}^1$ , по всей видимости, касается кривой  $M_{eq}^0$  в точке  $y_1^*$ , соответствующей переходу от монотонной динамики к колебаниям в системе (5). Кроме того, на рис. 7, a–c продемонстрировано, что участки динамики системы (2) лежат на данных поверхностях. В этом случае траектория полной системы (2) разделена на две части. В первую



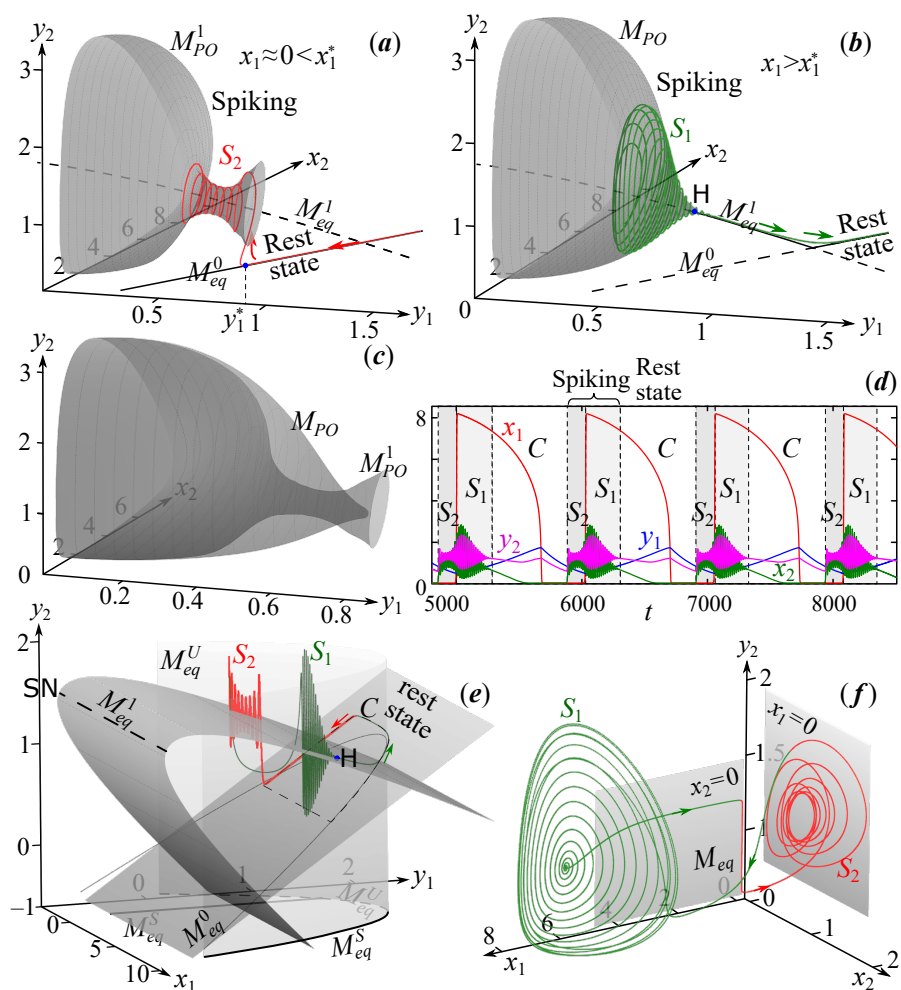


Рис. 7. *a-c* — Две ветки быстрого многообразия  $M_{PO}^1$  и  $M_{PO}$ , на которых лежат участки траектории системы (2), *a* — с расходящимися колебаниями  $S_2$ , для которых  $x_1 \approx 0$ , *b* — с затухающими колебаниями  $S_1$ , для которых  $x_1 \gg 0$ . *d* — Пример поведения системы (2) с выделенными участками динамики. *e-f* — Расположение траектории относительно медленных многообразий  $M_{eq}^0$  и  $M_{eq}$  (цвет онлайн)

Fig. 7. *a-c* — Two branches of fast manifold  $M_{PO}^1$  and  $M_{PO}$  on which lie parts of the trajectory of system (2) *a* — with divergent oscillations  $S_2$  ( $x_1 \approx 0$ ) and *b* — with damped vibrations  $S_1$  ( $x_1 \gg 0$ ). *d* — The example of the behavior of system (2) with selected parts of dynamics. *e-f* — Location of the trajectory with respect to slow manifolds  $M_{eq}^0$  and  $M_{eq}$  (color online)

часть попадают участки динамики, для которых значения  $x_1(t) \approx 0$ , во вторую часть — значения  $x_1(t) \gg 0$ . В результате первая часть траектории лежит на  $M_{PO}^1$  и  $M_{eq}^0$  (см. рис. 7, *a*). Вторая — на  $M_{PO}$ ,  $M_{eq}$  и  $M_{eq}^0$  (см. рис. 7, *b*).

Заметим, что при проектировании в другие подпространства быстрые многообразия  $M_{PO}^1$  и  $M_{PO}$  не пересекаются так, как показано на рис. 7, *c*, и имеют немного другой вид. В подпространстве  $(x_1, y_1, y_2)$   $M_{PO}^1$  и  $M_{PO}$  — двумерные кривые, которые лежат на цилиндрической поверхности с основанием  $M_{eq}^S$  и  $M_{eq}^U$  ( $x_1 > 0$  и  $y_2 > 0$ ) (рис. 7, *e*), образующим каркас релаксационного цикла в системе (3) (см. рис. 3, *a*). Соответственно, быстрые колебания также лежат на данном цилиндре. В подпространстве  $(x_1, x_2, y_2)$   $M_{PO}$  — сильно сплюснутый параболоид, а  $M_{PO}^1$  полностью сливается с плоскостью  $x_1 = 0$  (рис. 7, *f*). В обоих случаях между двумя быстрыми многообразиями расположено многообразие покоя, по которым траектория совершает медленное движение по поверхности цилиндра с основанием  $M_{eq}^S$  и  $M_{eq}^U$  (см. рис. 7, *e*).

### 3. Сценарий образования пачек

Наличие разных типов активности в подсистемах (3), (4) и (5) (монотонный рост или падение численностей, а также затухающие или расходящиеся колебания) позволяет описать сценарий формирования пачечных режимов колебаний в полной модели (2). Этот сценарий построен на анализе взаимного расположения быстрых и медленных многообразий, а также на наблюдениях за фазовой траекторией, которая способна периодически (или нерегулярно) перескакивать между разными аттракторами медленной и быстрой подсистемы. Сначала фазовая точка движется только по релаксационному циклу (канарду)  $C$ , соответствующему фазовой траектории первой (медленной) подсистемы (3). Затем траектория притягивается к одному из периодических решений быстрой подсистемы (4) или (5) (при разных  $x_1$ ). В этом случае решения системы (2) при  $c_1 = 0$  сходятся к аттрактору быстрой подсистемы, которым является ее устойчивое состояние равновесия или предельный цикл. Когда аттрактор быстрой подсистемы является экспоненциально устойчивым, то он зависит гладко от  $y_1$ . Однако гладкость сохраняется лишь при  $x_1 \neq x_1^*$ . Изменение  $y_1$  при некоторых фиксированных  $x_1$  приводит к образованию гладкого притягивающего инвариантного многообразия, которое состоит из медленной и быстрой части. Перечислим их.

- Пространственные кривые  $M_{eq}^S$  и  $M_{eq}^U$ , собранные из состояний равновесий сильного сообщества (3), а также двумерная цилиндрическая поверхность на их основе.
- Кривые, образованные проекцией кривых  $M_{eq}^S$  и  $M_{eq}^U$  на двумерные поверхности  $M_{eq}^0$  и  $M_{eq}^1$ , которые являются состояниями равновесия слабого сообщества (4) и (5) при  $c_1 = 0$ .
- Трехмерная параболическая поверхность  $M_{PO}$  и однополостный гиперболоид  $M_{PO}^1$  (см. рис. 5, а и рис. 7), которые образованы циклами слабого сообщества (5).

Первые две части многообразия соответствуют медленной тонической динамике или состоянию покоя (rest state) обоих сообществ. Как было показано выше, из-за наличия более одной ветки возможно несколько вариантов расположения такого аттрактора (канарда) в фазовом пространстве. Например, канард может лежать только на ветке  $M_{eq}^0 (C_1)$ , тогда динамика хищников на обеих территориях будет синхронной, но с нулевой численностью жертв во втором сообществе. Либо он может лежать только на  $M_{eq}^1 (C_2)$ , тогда динамика будет противофазной с ненулевой численностью жертв. Либо канард может попеременно (регулярно) располагаться на разных ветках, тогда динамика сообществ будет содержать периоды синхронной и несинхронной динамики, совпадающие с периодами околонулевой ( $x_1 \approx 0$ ) и ненулевой ( $x_1 \gg 0$ ) численности жертв во втором сообществе ( $C$ ).

Третья часть многообразия соответствует возникновению пачечной динамики или быстрых взрывных колебаний (spiking) во втором слабом сообществе. Однако здесь есть следующая особенность. В зависимости от того, с какой численностью жертв на первой территории ( $x_1$ ) траектория покидает состояние покоя, изменяется последующий характер динамики хищника на этой территории ( $y_1$ ). Если значение  $x_1$  достаточно высокое, то величина  $y_1$  очевидно растет, то есть хищнику достаточно жертв для своего развития. Если же  $x_1$  близко к нулю, то величина  $y_1$  может только падать, то есть хищник вымирает на этой территории либо эмигрирует.

В первом случае ( $x_1 \gg 0$ ), если  $y_1$  ниже определенной величины (левее точки Н на рис. 7, b), траекторию перебрасывает на параболическую поверхность  $M_{PO}$ , где она совершает несколько витков. Содержательно такое динамическое поведение может соответствовать усилению конкурентных взаимоотношений между хищниками слабого (местные особи) и сильного сообщества (иммигранты). В результате сильная конкуренция приводит к быстрым всплескам численности в слабом сообществе, которое проявляется в виде затухающих колебаний численностей хищников и жертв на этой территории. Эти затухающие колебания продолжаются до тех пор, пока число хищников сильного сообщества растет до определенной величины (точка Н на рис. 7, b). Достигнув этой величины, траектория мягко возвращается в состояние покоя.

Во втором случае, когда количество жертв сильного сообщества  $x_1$  близко к нулю ( $x_1 \approx 0$ ), число хищников  $y_1$  падает. Если при этом  $y_1$  достигает определенного значения  $y_1^*$ , то траекторию резко перебрасывает на гиперboloид  $M_{PO}^1$ , на который она наматывается. Аналогично прошлому случаю, конкуренция иммигрантов из сильного сообщества с местными особями инициирует быстрые расходящиеся колебания численностей в слабом сообществе. Эти колебания продолжаются до достижения минимально возможной численности хищника  $y_1$ , при которой происходит стремительное восстановление жертв  $x_1$  сильного сообщества и медленное восстановление хищников. В самом крайнем случае это происходит в месте «пересечения» гиперboloида  $M_{PO}^1$  с параболоидом  $M_{PO}$  в подпространстве  $(y_1, x_2, y_2)$ , то есть при  $y_1 \rightarrow 0$ . После этого траекторию жестко перебрасывает с гиперboloида на параболоид, и колебания сменяются затухающими на фоне роста числа хищника  $y_1$  сильного сообщества.

При вариации параметров системы (2) меняется как размер релаксационного предельного цикла, так и расположение точек бифуркации в подсистемах (3), (4) и (5), которые выступают «краями» быстрого многообразия. В результате разным типам пачечной активности с разной формой пачки соответствует различное взаимное расположение канарда и поверхностей  $M_{PO}$  и  $M_{PO}^1$ . На рис. 8 схематически показан механизм (сценарий) формирования пачек разной формы. Для этого две ветки быстрого многообразия  $M_{PO}$  и  $M_{PO}^1$  показаны вложенными друг в друга и соединены предельным релаксационным циклом  $C$ , а точки, где они соединяются, выделены звездочкой.

На рис. 8, *a* показано, что если асимптотически устойчив только релаксационный цикл, то поверхности  $M_{PO}$  и  $M_{PO}^1$  существуют, но расположены в стороне от него. В результате для параметров из области  $C$  на рис. 1, *a*, где в предельном случае в системе (2) возможен только релаксационный цикл, быстрые колебания возникают при некоторых возмущениях начальных условий, но как часть переходной динамики. Например, если стартовую точку взять в окрестности

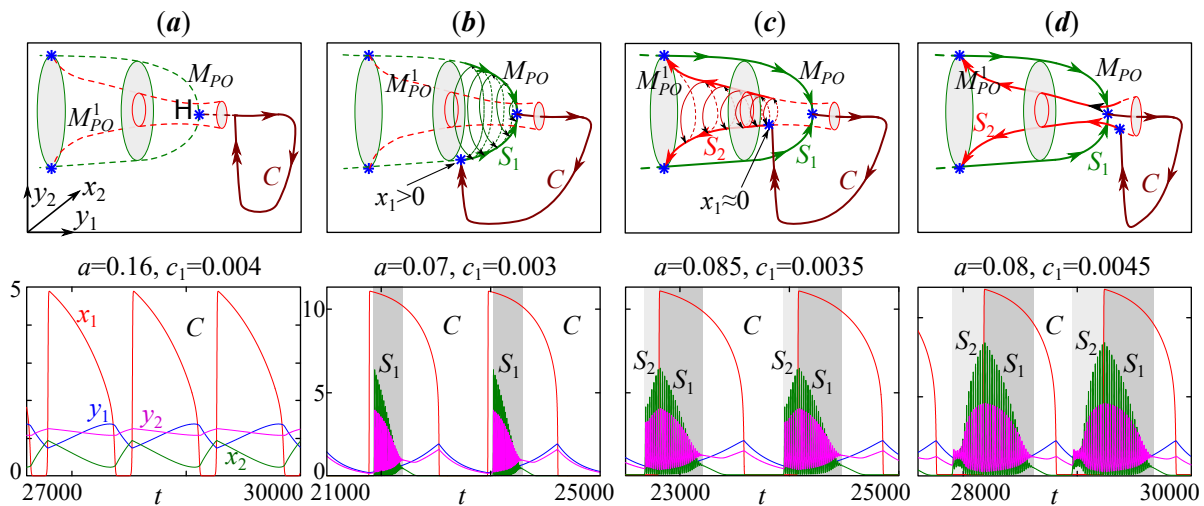


Рис. 8. Первая строка — сценарий формирования пачек разной формы в системе (2), связанный с различным расположением канарда  $C$  и быстрых многообразий  $M_{PO}$  и  $M_{PO}^1$ , где  $S_1$  для  $x_1 \gg 0$ ,  $S_2$  для  $x_1 \approx 0$ . Вторая строка — примеры динамики, соответствующие этим сценариям: *a* — предельный релаксационный цикл (канард), *b* — треугольная пачка, *c* — усеченная ромбовидная пачка и *d* пачка, состоящая из усеченного ромба и треугольника (цвет онлайн)

Fig. 8. The first line is the scenario for the formation of various waveforms bursting in the system (2), associated with different positions of the canard  $C$  and fast manifolds. The second line is examples of dynamics corresponding to these scenarios: *a* — slow-fast limit cycle (canard), *b* — triangular-wave bursting, *c* — truncated rhomboid-wave bursting and *d* — bursting consisting of a truncated rhombus and a triangle (color online)

быстрого многообразия  $M_{PO}$  или  $M_{PO}^1$ , то вначале траектория совершит несколько витков по одной из этих поверхностей, а затем упадет на одну из веток медленного многообразия, где и будет совершать устойчивые периодические движения. Это дополнительно доказывает существование быстрого многообразия.

В случае треугольной пачки канард  $C$  касается поверхности  $M_{PO}$ , и траектория начинает самостоятельно двигаться по нему (рис. 8, *b*). Это происходит лишь после полного восстановления численности жертв  $x_1$  в сильном сообществе, то есть при  $x_1 \gg 0$ . В случае ромбовидной и усеченной ромбовидной пачки канард дополнительно касается  $M_{PO}^1$  (рис. 8, *c-d*), что происходит задолго до восстановления численности жертв  $x_1$ , то есть при  $x_1 \approx 0$ . Но касание канарда с гиперболоидом  $M_{PO}^1$  возможно в разных местах. Если траектория «пересекает» параболоид  $M_{PO}$ , а затем достигает гиперболоид  $M_{PO}^1$ , возникают усеченные ромбовидные пачки (см. рис. 8, *c*). Если же траектория переходит на гиперболоид не пересекая параболоид, то возникает более сложная пачка, в которой затухающие колебания сменяются расходящимися, а затем вновь затухающими (см. рис. 8, *d*). Естественно, никакого пересечения траектории и быстрого многообразия в четырехмерном пространстве не происходит. Это «пересечение» соответствует скачку численностей хищников  $y_1$  и жертв  $x_1$ , что хорошо заметно при проецировании в другие подпространства (см. рис. 7, *e* и *f*).

Между последними двумя вариантами расположения канарда и ветвей быстрого многообразия на рис. 8, *c* и *d* располагается промежуточный сценарий формирования пачек чисто ромбовидной формы. Например такой, как показано на рис. 5, *c*. В этом случае точки, где канард соединяется с гиперболоидом, а затем с параболоидом, оказываются максимально близкими друг к другу (совпадает координата  $y_1$ ). Однако, являясь промежуточным по расположению, он возникает в широком диапазоне параметров. Более того, именно в этом случае чаще формируется квазипериодическая динамика.

Надо отметить, что сценарий на рис. 8 описывает случай полностью периодической динамики, когда после каждого полного оборота фазовая точка строго возвращается в ту же точку фазового пространства (где численности достигают строго тех же значений), например, в точку, отмеченную звездочкой. В этом случае время между появлением всплесков численностей (расстояние между пачками) оказывается постоянным на каждом полном обороте цикла. В случае квазипериодической динамики (область  $Q$  на рис. 1) траектория на каждом своем витке возвращается в малую окрестность исходной точки. В результате точки соединения канарда с одной из веток быстрого многообразия образуют замкнутую инвариантную кривую. Несложно понять, что образованная в результате этого поверхность оказывается неориентируемой, а траектория движется по бутылке Клейна, если канард соединен с «внутренней» веткой  $M_{PO}^1$  быстрого многообразия (левее точки  $H$ ). Если канард соединен с «внешней» веткой  $M_{PO}$  (правее  $H$ ), то поверхность будет ориентируемой, а траектория будет лежать на торе. В случае, если параметры попадают в один из языков синхронизации (на рис. 1, *b*), динамика вновь оказывается периодической, однако траектория возвращается в исходную точку, лишь совершив несколько полных оборотов на торе или бутылке Клейна.

Вообще, возврат строго в одну и ту же точку фазового пространства означает строгое равенство переменных через определенные промежутки времени. Однако для реальных биологических сообществ строгое равенство численностей оказывается практически недостижимо, поскольку случайные факторы постоянно сдвигают фазовую траекторию в сторону от устойчивого режима. Поэтому более вероятно, что в реальных миграционно связанных сообществах, функционирующих согласно описанным принципам и описываемым моделью (2), время между пачками, скорее всего, будет непостоянным, либо динамика окажется квазипериодической.

## Заключение

При исследовании системы двух связанных неидентичных сообществ хищник–жертва обнаружено, что ведущим параметром, определяющим эволюцию пачечных режимов, и как результат, тип динамики, является разница в смертности хищников на разных территориях. Другие параметры, как правило, определяют устойчивость режимов динамики или форму пачек.

При большой разнице в смертности хищников рассмотренная модель относится к классу быстро-медленных систем. Выделение быстрых и медленных переменных позволило показать, что динамика в сильном или ведущем сообществе (подсистема с низкой смертностью) — это длиннопериодические релаксационные колебания, которые полностью определяют поведение слабого или ведомого сообщества (с высокой смертностью). Показано, что в зависимости от численности хищников сильного сообщества гладко изменяется режим динамики ведомого сообщества: от медленного тонического режима слабое сообщество мягко переходит к быстрым пачечным колебаниям численностей. Вместе с тем существует своего рода негладкая зависимость режима динамики слабого сообщества от численности жертв сильного, когда при низкой или высокой численности жертв сильного сообщества сценарий рождения быстрых колебаний различен, а переход между ними происходит достаточно резко.

Используя геометрические методы, в настоящей работе удалось сконструировать инвариантные многообразия, на которых реализуются участки с пачечной и тонической активностью рассматриваемой системы. В результате были подробно описаны механизмы возникновения пачек с различной формой волны. Обнаружена и описана зависимость формы быстрой динамики от внешнего вида инвариантного многообразия и расположения его частей относительно релаксационного цикла.

Как указывалось ранее, исследование быстро-медленных систем является популярным направлением нелинейной динамики. В ходе исследования таких систем обнаруживаются разные режимы динамики, исследование которых основывается на выделении, как правило, лишь двух типичных времен — быстрого и медленного [18, 20]. Траектории в этом случае формируются на основе единственного быстрого и медленного релаксационного цикла (канарда). Так, например, происходит в трехмерной модификации модели Розенцвейга–Макартура, описывающей динамику систем типа жертва–хищник–суперхищник [9]. Качественно такая динамика соответствует сценарию «Складка/Хопф» [17], который является наиболее простым для рассматриваемой системы (2). В медленной подсистеме (слабом сообществе) при этом наблюдаются две бифуркации: седло-узловая (типа складка) и мягкая (суперкритическая) Андронова–Хопфа, в зависимости от значения «замороженной» переменной (численность хищника сильного сообщества). Этими двумя бифуркациями начинается и заканчивается фаза пачечной динамики. Но в большинстве случаев (в большей части области  $S$  на рис. 1, *a*) пачечные режимы представляют собой быстрые колебания другого типа — это комбинация расходящихся и затухающих пачечных режимов. Два этих типа колебаний возникают при разных значениях дополнительной «замороженной» переменной (численность жертв сильного сообщества) и связаны с медленным многообразием в разных его частях. В этом случае расходящиеся колебания наблюдаются во время восстановления жертв на второй территории и, как правило, предшествуют восстановлению жертв первого сильного сообщества. После чего они сменяются затухающими колебаниями и два сообщества сосуществуют. В этом случае в системе, очевидно, существует более двух типичных времен. Подобный сценарий возникает, например, в некоторых трехмерных моделях нейронной активности (модель Хиндмарша–Роуза) [37, 38]. Для них потребовалось выделять три разные временные шкалы, для каждой из которых была построена своя медленная и быстрая подсистема, а также описано три слоя медленных и быстрых многообразий, вложенных друг в друга [34, 36, 38].

В данной работе можно предположить, что затухающие колебания в рассматриваемой модели связанных сообществ — результат мягкой бифуркации Хопфа в системе с медленным временем,

а расходящиеся — жесткой (субкритической) бифуркации Хопфа в системе с супермедленным временем. Два этих цикла заканчиваются седло-узловой бифуркацией предельных циклов либо гомоклинической бифуркацией. В общем-то, описанные качественные перестройки укладываются в сценарии формирования пачечной активности, описанные Е. М. Инжикиевичем [17]. Однако, из-за четырехмерной природы изучаемой модели и негладкой зависимости от «замороженной» переменной (численность жертв сильного сообщества), возникают новые комбинации этих сценариев, связанные с «невозможными» для традиционных трехмерных систем способами соединения траекторий на быстрых и медленных многообразиях (через четвертое измерение). В частности такие, которые «протыкают» быстрое многообразие и порождают траектории на бутылке Клейна, или комбинации, допускающие «пересечение» быстрых многообразий. Такая особенность динамики рассматриваемого сообщества, без сомнения, требует дальнейшего подробного изучения.

### Список литературы

1. Фрисман Е. Я., Кулаков М. П., Ревуцкая О. Л., Жданова О. Л., Неверова Г. П. Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11, № 1. С. 119–151. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
2. Mukhopadhyay B., Bhattacharyya R. Role of predator switching in an eco-epidemiological model with disease in the prey // Ecological Modelling. 2009. Vol. 220, no. 7. P. 931–939. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2009.01.016.
3. Saifuddin M., Biswas S., Samanta S., Sarkar S., Chattopadhyay J. Complex dynamics of an eco-epidemiological model with different competition coefficients and weak Allee in the predator // Chaos, Solitons & Fractals. 2016. Vol. 91. P. 270–285. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.06.009.
4. Jansen V. A. A. The dynamics of two diffusively coupled predator–prey populations // Theoretical Population Biology. 2001. Vol. 59, no. 2. P. 119–131. DOI: 10.1006/tpbi.2000.1506.
5. Liu Y. The Dynamical Behavior of a Two Patch Predator-Prey Model. Theses, Dissertations, & Master Projects. Williamsburg: College of William and Mary, 2010. 46 p.
6. Saha S., Bairagi N., Dana S. K. Chimera states in ecological network under weighted mean-field dispersal of species // Frontiers in Applied Mathematics and Statistics. 2019. Vol. 5. P. 15. DOI: 10.3389/fams.2019.00015.
7. Shen Y., Hou Z., Xin H. Transition to burst synchronization in coupled neuron networks // Physical Review E. 2008. Vol. 77, no. 3. P. 031920. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.031920.
8. Баханова Ю. В., Казаков А. О., Коротков А. Г. Спиральный хаос в моделях типа Лотки–Вольтерры // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т. 19, № 2. С. 13–24. DOI: 10.15507/2079-6900.19.201701.013-024.
9. Bakhanova Y. V., Kazakov A. O., Korotkov A. G., Levanova T. A., Osipov G. V. Spiral attractors as the root of a new type of «bursting activity» in the Rosenzweig–MacArthur model // The European Physical Journal Special Topics. 2018. Vol. 227, no. 7–9. P. 959–970. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800025-6.
10. Huang T., Zhang H. Bifurcation, chaos and pattern formation in a space- and time-discrete predator–prey system // Chaos, Solitons & Fractals. 2016. Vol. 91. P. 92–107. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.05.009.
11. Banerjee M., Mukherjee N., Volpert V. Prey-predator model with a nonlocal bistable dynamics of prey // Mathematics. 2018. Vol. 6, no. 3. P. 41. DOI: 10.3390/math6030041.
12. Yao Y., Song T., Li Z. Bifurcations of a predator–prey system with cooperative hunting and Holling III functional response // Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 110, no. 1. P. 915–932. DOI: 10.1007/s11071-022-07653-7.
13. Smirnov D. Revealing direction of coupling between neuronal oscillators from time series: Phase

- dynamics modeling versus partial directed coherence // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2007. Vol. 17, no. 1. P. 013111. DOI: 10.1063/1.2430639.
14. *Dahasert N., Öztürk İ., Kiliç R.* Experimental realizations of the HR neuron model with programmable hardware and synchronization applications // *Nonlinear Dynamics*. 2012. Vol. 70, no. 4. P. 2343–2358. DOI: 10.1007/s11071-012-0618-5.
  15. *Wang L., Liu S., Zeng Y.* Diversity of firing patterns in a two-compartment model neuron: Using internal time delay as an independent variable // *Neural Network World*. 2013. Vol. 23, no. 3. P. 243–254. DOI: 10.14311/NNW.2013.23.015.
  16. *Santos M. S., Protachevicz P. R., Iarosz K. C., Caldas I. L., Viana R. L., Borges F. S., Ren H.-P., Szezech Jr. J. D., Batista A. M., Grebogi C.* Spike-burst chimera states in an adaptive exponential integrate-and-fire neuronal network // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, no. 4. P. 043106. DOI: 10.1063/1.5087129.
  17. *Izhikevich E. M.* Neural excitability, spiking and bursting // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, no. 6. P. 1171–1266. DOI: 10.1142/S0218127400000840.
  18. *Han X., Jiang B., Bi Q.* Symmetric bursting of focus–focus type in the controlled Lorenz system with two time scales // *Physics Letters A*. 2009. Vol. 373, no. 40. P. 3643–3649. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.08.020.
  19. *Gu H., Pan B., Xu J.* Bifurcation scenarios of neural firing patterns across two separated chaotic regions as indicated by theoretical and biological experimental models // *Abstract and Applied Analysis*. 2013. Vol. S141. P. 374674. DOI: 10.1155/2013/374674.
  20. *Chen J., Li X., Hou J., Zuo D.* Bursting oscillation and bifurcation mechanism in fractional-order Brusselator with two different time scales // *Journal of Vibroengineering*. 2017. Vol. 19, no. 2. P. 1453–1464. DOI: 10.21595/jve.2017.18109.
  21. *Макеева А. А., Дмитричев А. С., Некоркин В. И.* Циклы-утки и торы-утки в слабонеоднородном ансамбле нейронов ФитцХью-Нагумо с возбуждающими связями // *Известия вузов. ПНД*. 2020. Т. 28, № 5. С. 524–546. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-5-524-546.
  22. *Holling C. S.* Some characteristics of simple types of predation and parasitism // *The Canadian Entomologist*. 1959. Vol. 91, no. 7. P. 385–398. DOI: 10.4039/Ent91385-7.
  23. *Holling C. S.* The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation // *The Memoirs of the Entomological Society of Canada*. 1965. Vol. 97, no. S45. P. 5–60. DOI: 10.4039/entm9745fv.
  24. *Базыкин А. Д.* Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985. 181 с.
  25. *Bazykin A. D.* Nonlinear Dynamics of Interacting Populations. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A: Vol. 11. New–Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1998. 216 p. DOI: 10.1142/2284.
  26. *Rosenzweig M. L., MacArthur R. H.* Graphical representation and stability conditions of predator–prey interactions // *The American Naturalist*. 1963. Vol. 97, no. 895. P. 209–223. DOI: 10.1086/282272.
  27. *Rinaldi S., Muratori S.* Slow-fast limit cycles in predator-prey models // *Ecological Modelling*. 1992. Vol. 61, no. 3–4. P. 287–308. DOI: 10.1016/0304-3800(92)90023-8.
  28. *Кулаков М. П., Курилова Е. В., Фрисман Е. Я.* Синхронизация, тоническая и пачечная динамика в модели двух сообществ «хищник–жертва», связанных миграциями хищника // *Математическая биология и биоинформатика*. 2019. Т. 14, № 2. С. 588–611. DOI: 10.17537/2019.14.588.
  29. *Курилова Е. В., Кулаков М. П., Фрисман Е. Я.* Последствия синхронизации колебаний численностей в двух взаимодействующих сообществах типа «хищник–жертва» при насыщении хищника и лимитировании численности жертвы // *Информатика и системы управления*. 2015. № 3(45). С. 24–34.

30. Курилова Е. В., Кулаков М. П. Квазипериодические режимы динамики в модели миграционно связанных сообществ «Хищник–жертва» // Региональные проблемы. 2020. Т. 23, № 2. С. 3–11. DOI: 10.31433/2618-9593-2020-23-2-3-11.
31. Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A., Meijer H. G. E., Sautois B. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.
32. Benoît E., Callot J. L., Diener F., Diener M. Chasse au canard // Collectanea Mathematica. 1981. Vol. 31–32. P. 37–119.
33. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // Динамические системы – 5. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–218.
34. Ersöz E. K., Desroches M., Mirasso C. R., Rodrigues S. Anticipation via canards in excitable systems // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2019. Vol. 29, no. 1. P. 013111. DOI: 10.1063/1.5050018.
35. Shilnikov A., Cymbalyuk G. Homoclinic bifurcations of periodic orbits on a route from tonic spiking to bursting in neuron models // Regular and Chaotic Dynamics. 2004. Vol. 9, no. 3. P. 281–297. DOI: 10.1070/RD2004v009n03ABEH000281.
36. Коломиец М. Л., Шильников А. Л. Методы качественной теории для модели Хиндмарш–Роуз // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 1. С. 23–52. DOI: 10.20537/nd1001003.
37. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proc. R. Soc. Lond. B. 1984. Vol. 221, no. 1222. P. 87–102. DOI: 10.1098/rspb.1984.0024.
38. Linaro D., Champneys A., Desroches M., Storace M. Codimension-two homoclinic bifurcations underlying spike adding in the Hindmarsh–Rose burster // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2012. Vol. 11, no. 3. P. 939–962. DOI: 10.1137/110848931.

## References

1. Frisman YY, Kulakov MP, Revutskaya OL, Zhdanova OL, Neverova GP. The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations. Computer Research and Modeling. 2019;11(1):119–151 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
2. Mukhopadhyay B, Bhattacharyya R. Role of predator switching in an eco-epidemiological model with disease in the prey. Ecological Modelling. 2009;220(7):931–939. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2009.01.016.
3. Saifuddin M, Biswas S, Samanta S, Sarkar S, Chattopadhyay J. Complex dynamics of an eco-epidemiological model with different competition coefficients and weak Allee in the predator. Chaos, Solitons & Fractals. 2016;91:270–285. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.06.009.
4. Jansen VAA. The dynamics of two diffusively coupled predator–prey populations. Theoretical Population Biology. 2001;59(2):119–131. DOI: 10.1006/tpbi.2000.1506.
5. Liu Y. The Dynamical Behavior of a Two Patch Predator-Prey Model. Theses, Dissertations, & Master Projects. Williamsburg: College of William and Mary; 2010. 46 p.
6. Saha S, Bairagi N, Dana SK. Chimera states in ecological network under weighted mean-field dispersal of species. Frontiers in Applied Mathematics and Statistics. 2019;5:15. DOI: 10.3389/fams.2019.00015.
7. Shen Y, Hou Z, Xin H. Transition to burst synchronization in coupled neuron networks. Physical Review E. 2008;77(3):031920. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.031920.
8. Bakhanova YV, Kazakov AO, Korotkov AG. Spiral chaos in Lotka–Volterra like models. Middle



- Volga Mathematical Society Journal. 2017;19(2):13–24 (in Russian). DOI: 10.15507/2079-6900.19.201701.013-024.
9. Bakhanova YV, Kazakov AO, Korotkov AG, Levanova TA, Osipov GV. Spiral attractors as the root of a new type of «bursting activity» in the Rosenzweig–MacArthur model. *The European Physical Journal Special Topics*. 2018;227(7–9):959–970. DOI: 10.1140/epjst/e2018-800025-6.
  10. Huang T, Zhang H. Bifurcation, chaos and pattern formation in a space- and time-discrete predator–prey system. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016;91:92–107. DOI: 10.1016/j.chaos.2016.05.009.
  11. Banerjee M, Mukherjee N, Volpert V. Prey-predator model with a nonlocal bistable dynamics of prey. *Mathematics*. 2018;6(3):41. DOI: 10.3390/math6030041.
  12. Yao Y, Song T, Li Z. Bifurcations of a predator–prey system with cooperative hunting and Holling III functional response. *Nonlinear Dynamics*. 2022;110(1):915–932. DOI: 10.1007/s11071-022-07653-7.
  13. Smirnov D. Revealing direction of coupling between neuronal oscillators from time series: Phase dynamics modeling versus partial directed coherence. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2007;17(1):013111. DOI: 10.1063/1.2430639.
  14. Dahasert N, Öztürk İ, Kiliç R. Experimental realizations of the HR neuron model with programmable hardware and synchronization applications. *Nonlinear Dynamics*. 2012;70(4):2343–2358. DOI: 10.1007/s11071-012-0618-5.
  15. Wang L, Liu S, Zeng Y. Diversity of firing patterns in a two-compartment model neuron: Using internal time delay as an independent variable. *Neural Network World*. 2013;23(3):243–254. DOI: 10.14311/NNW.2013.23.015.
  16. Santos MS, Protachevich PR, Iarosz KC, Caldas IL, Viana RL, Borges FS, Ren HP, Szezech Jr JD, Batista AM, Grebogi C. Spike-burst chimera states in an adaptive exponential integrate-and-fire neuronal network. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(4):043106. DOI: 10.1063/1.5087129.
  17. Izhikevich EM. Neural excitability, spiking and bursting. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2000;10(6):1171–1266. DOI: 10.1142/S0218127400000840.
  18. Han X, Jiang B, Bi Q. Symmetric bursting of focus–focus type in the controlled Lorenz system with two time scales. *Physics Letters A*. 2009;373(40):3643–3649. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.08.020.
  19. Gu H, Pan B, Xu J. Bifurcation scenarios of neural firing patterns across two separated chaotic regions as indicated by theoretical and biological experimental models. *Abstract and Applied Analysis*. 2013;S141:374674. DOI: 10.1155/2013/374674.
  20. Chen J, Li X, Hou J, Zuo D. Bursting oscillation and bifurcation mechanism in fractional-order Brusselator with two different time scales. *Journal of Vibroengineering*. 2017;19(2):1453–1464. DOI: 10.21595/jve.2017.18109.
  21. Makeeva AA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Cycles-canards and torus-canards in a weakly inhomogeneous ensemble of FitzHugh–Nagumo neurons with excitatory synaptic couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(5):524–546 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-5-524-546.
  22. Holling CS. Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *The Canadian Entomologist*. 1959;91(7):385–398. DOI: 10.4039/Ent91385-7.
  23. Holling CS. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation. *The Memoirs of the Entomological Society of Canada*. 1965;97(S45):5–60. DOI: 10.4039/entm9745fv.
  24. Bazykin AD. *Mathematical Biophysics of Interacting Populations*. Moscow: Nauka; 1985. 181 p. (in Russian).
  25. Bazykin AD. *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*. World Scientific Series on Nonlinear

- Science Series A: Vol. 11. New–Jersey, London, Hong Kong: World Scientific; 1998. 216 p. DOI: 10.1142/2284.
26. Rosenzweig ML, MacArthur RH. Graphical representation and stability conditions of predator–prey interactions. *The American Naturalist*. 1963;97(895):209–223. DOI: 10.1086/282272.
  27. Rinaldi S, Muratori S. Slow-fast limit cycles in predator-prey models. *Ecological Modelling*. 1992;61(3–4):287–308. DOI: 10.1016/0304-3800(92)90023-8.
  28. Kulakov MP, Kurilova EV, Frisman EY. Synchronization and bursting activity in the model for two predator–prey systems coupled by predator migration. *Mathematical Biology and Bioinformatics*. 2019;14(2):588–611 (in Russian). DOI: 10.17537/2019.14.588.
  29. Kurilova EV, Kulakov MP, Frisman EY. Effects of synchronization by fluctuations in numbers of two predator–prey communities at saturation predator growth and limitation of the victim number. *Information Science and Control Systems*. 2015;(3(45)):24–34 (in Russian).
  30. Kurilova EV, Kulakov MP. Quasi-periodic dynamics in a model of predator–prey communities coupled by migration. *Regional Problems*. 2020;23(2):3–11 (in Russian). DOI: 10.31433/2618-9593-2020-23-2-3-11.
  31. Dhooge A, Govaerts W, Kuznetsov YA, Meijer HGE, Sautois B. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. 2008;14(2):147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.
  32. Benoît E, Callot JL, Diener F, Diener M. Chasse au canard. *Collectanea Mathematica*. 1981; 31–32:37–119 (in French).
  33. Arnold VI, Afraimovich VS, Ilyashenko YS, Shilnikov LP. Bifurcation theory and catastrophe theory. In: *Dynamical Systems V*. Vol. 5 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Berlin: Springer-Verlag; 1994. P. 1–205.
  34. Ersöz EK, Desroches M, Mirasso CR, Rodrigues S. Anticipation via canards in excitable systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(1):013111. DOI: 10.1063/1.5050018.
  35. Shilnikov A, Cymbalyuk G. Homoclinic bifurcations of periodic orbits on a route from tonic spiking to bursting in neuron models. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2004;9(3):281–297. DOI: 10.1070/RD2004v009n03ABEH000281.
  36. Kolomiets ML, Shilnikov AL. Qualitative methods for case study of the Hindmarsh–Rose model. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2010;6(1):23–52 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1001003.
  37. Hindmarsh JL, Rose RM. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. Lond. B*. 1984;221(1222):87–102. DOI: 10.1098/rspb.1984.0024.
  38. Lino D, Champneys A, Desroches M, Storace M. Codimension-two homoclinic bifurcations underlying spike adding in the Hindmarsh–Rose burster. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2012;11(3):939–962. DOI: 10.1137/110848931.



*Курилова Екатерина Викторовна* — родилась в г. Артем Приморского края (1983). Окончила Биробиджанский государственный педагогический институт по специальности «Математика» (2005). Работает младшим научным сотрудником лаборатории математического моделирования популяционных и экологических систем Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН. Область научных интересов — популяционная биология, нелинейная динамика, синхронизация. Автор 18 работ.

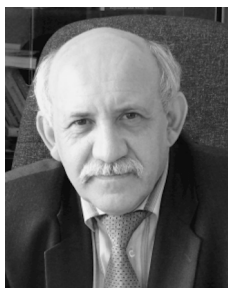
Россия, 679016 Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4  
 Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН  
 E-mail: [katkurilova@mail.ru](mailto:katkurilova@mail.ru)  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 626712

*Кулаков Матвей Павлович* — родился в Биробиджане Еврейской автономной области (1982). Окончил Биробиджанский государственный педагогический институт (2004). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Биофизика» (2018). Старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования популяционных и экологических систем Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН. Научные интересы связаны с использованием методов нелинейной динамики, качественной теории дифференциальных уравнений, бифуркаций, хаоса и синхронизации для изучения особенностей функционирования пространственно распределенных живых систем: популяций животных и биологических сообществ. Автор более 50 работ.

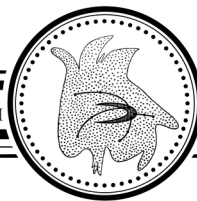


Россия, 679016 Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4  
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН  
E-mail: k\_matvey@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-7060-2731  
AuthorID (eLibrary.Ru): 170285

*Фрисман Ефим Яковлевич* — родился в 1948 году в Сталинабаде (ныне Душанбе). Окончил Новосибирский государственный университет (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук по специальности «Генетика» (1982) и доктора биологических наук по специальности «Биофизика» (1989). Член-корреспондент Российской академии наук по специальности «Общая биология» (2011). После окончания университета работал в Институте автоматизации и процессов управления ДВО РАН: занимал должности от стажера-исследователя до заведующего лабораторией. С 2002 по 2017 — директор Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН. Ныне — научный руководитель этого института. Автор более 200 публикаций по общим вопросам математического моделирования и по конкретным моделям экологических и популяционных систем. Научные интересы связаны с моделированием динамики популяционных и экологических систем, математической популяционной генетикой и задачами оптимального управления.



Россия, 679016 Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4  
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН  
E-mail: frisman@mail.ru  
ORCID: 0000-0003-1629-2610  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1986



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(2)

Научная статья  
УДК 621.397.335

DOI: 10.18500/0869-6632-003024  
EDN: AQMLAL

## О динамике публикационной активности по синхронизации

*А. К. Козлов<sup>1</sup>, В. В. Матросов<sup>2</sup>✉, В. Д. Шалфеев<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Королевский технологический институт, Стокгольм, Швеция

<sup>2</sup>Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: akozlov@kth.se, ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 30.09.2022, принята к публикации 9.11.2022,

опубликована онлайн 16.12.2022, опубликована 31.03.2023

**Аннотация.** *Цель работы.* Изучение динамики изменения числа публикаций в мировой науке по теме: синхронизация. *Методы.* Статистические методы обработки данных. *Результаты.* Установлено, что за последние два десятка лет акцент в изучении явлений синхронизации колебаний сместился с физических и технических наук на биологические (neuroscience) с доминированием стран Азии.

**Ключевые слова:** синхронизация.

**Благодарности.** Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 0729-2020-0040).

**Для цитирования:** Козлов А. К., Матросов В. В., Шалфеев В. Д. О динамике публикационной активности по синхронизации // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 2. С. 170–179. DOI: 10.18500/0869-6632-003024. EDN: AQMLAL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## About dynamics of publication activity on synchronization

A. K. Kozlov<sup>1</sup>, V. V. Matrosov<sup>2</sup>✉, V. D. Shalfeev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden

<sup>2</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: akozlov@kth.se, ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Received 30.09.2022, accepted 9.11.2022, available online 16.12.2022,

published 31.03.2023

**Abstract.** *Purpose* of the work is to research of the world science publications dynamics on the synchronization. *Methods.* The research methods are the statistical methods of data processing. *Results.* The emphasis in the study of synchronization over the past twenty years has shifted from physical and technical sciences to neuroscience with Asian countries domination.

**Keywords:** synchronization.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 0729-2020-0040).

**For citation:** Kozlov AK, Matrosov VV, Shalfeev VD. About dynamics of publication activity on synchronization. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(2):170–179. DOI: 10.18500/0869-6632-003024

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Еще три-четыре десятилетия назад объектами изучения нелинейной динамики были, в основном, физические и технические объекты. На современном этапе развития объектами ее изучения становятся чрезвычайно сложные динамические системы и процессы из биологических, химических, социальных, экономических и др. приложений. Поведение таких систем в фазовом пространстве определяют не только предельные циклы и торы, но и странные хаотические аттракторы и метастабильные состояния. Понимание динамики сложных систем в значительной степени опирается на ключевые процессы нелинейной динамики — конкуренцию и синхронизацию [1, 2].

Теория синхронизации за эти годы совершила в своем развитии гигантский скачок от классической синхронизации двух автоколебательных осцилляторов [3] до синхронизации сетей хаотических осцилляторов [4–6]. Сегодня теория синхронизации — это теория синхронизации сетей осцилляторов, имеющая большое прикладное значение (сети связи, компьютерные сети, энергосети, сети связанных роботов, экологические сети, нейронные сети, наносистемы, квантовые сети и пр.) [7]. Теория синхронизации сетей осцилляторов, в частности, управляемой синхронизации, пока далека от завершения. В весьма популярных простых математических моделях ансамблей осцилляторов Курамото обнаружены новые закономерности синхронизации, в частности, «химерные» состояния (сосуществование синхронности и асинхронности) [8]. Открытие «химер» в науке о синхронизации позволяет предположить существование огромного числа новых форм синхронизации, которые могут быть весьма интересны для приложений (стабилизация синхронизации энергосетей, новые формы связи и шифрования, познание работы мозга и др.).

Таким образом, можно констатировать, что явление синхронизации сейчас представляет интерес в самых разных науках и публикации, связанные с изучением различных аспектов теории синхронизации, сейчас можно найти в огромном количестве научных журналов самых разных профилей. Однако надо заметить, что при анализе публикаций определенную сложность вносят

публикации, где термин «синхронизация» используется некорректно или ошибочно в смысле, отличающемся от принятого в физике (например, при описании синхронности, синхронизма, то есть одновременности совершения событий). Уместно поставить вопрос — возможно ли, не делая детального анализа статей по синхронизации, получить некоторые, хотя бы самые общие сведения о динамике развития этой тематики, исходя из статистики публикаций? Ниже представлена попытка найти ответ на этот вопрос.

## 1. Анализ публикационной активности по синхронизации

Тематика, связанная с вопросами синхронизации, широко представлена в отечественных и зарубежных публикациях. Можно попытаться определить некоторые тенденции развития этой тематики, анализируя самый простой показатель — число публикаций. Ниже представлены результаты анализа англоязычной научной журнальной литературы с использованием компьютерной базы данных Science Citation Index Expanded (SCIE). В этой базе данных представлены практически все мировые журнальные издания. Выбирая тему поиска, задаваемую определенным шаблоном, можно осуществить поиск по названиям статей, ключевым словам и аннотациям. Такой поиск не включает полный текст статьи, поэтому оценка полного количества публикаций по выбранной теме при таком поиске невозможна. Тем не менее такой поиск позволяет определить качественные тенденции изменения числа публикаций по теме и динамику их изменения за рассматриваемый период времени.

Следует заметить, что база данных SCIE (как, впрочем, и другие компьютерные базы данных) не является неизменной, а постоянно пополняется, в частности, в связи с оцифровкой новых материалов. До 1990-х годов база данных включала только названия статей, а с 1990-х примерно до 2000-х активно пополнялась данными о ключевых словах и аннотациях статей. Следовательно, наиболее достоверную информацию можно извлечь из анализа данных, содержащихся в базе, начиная с 2000-х годов.

Ниже представлены результаты экспериментов. На рис. 1, *a* приведена диаграмма, отражающая число публикаций по годам, полученная в результате поиска, содержащего в теме поиска шаблон «synchro», на рис. 1, *b* — шаблон «synchron», а на рис. 1, *c* — слово «synchronization».

Поиск проводился по названиям статей, по ключевым словам и по аннотациям. Естественно, что диаграмма рис. 1, *c* показала наименьшее число публикаций, поскольку поиск по слову

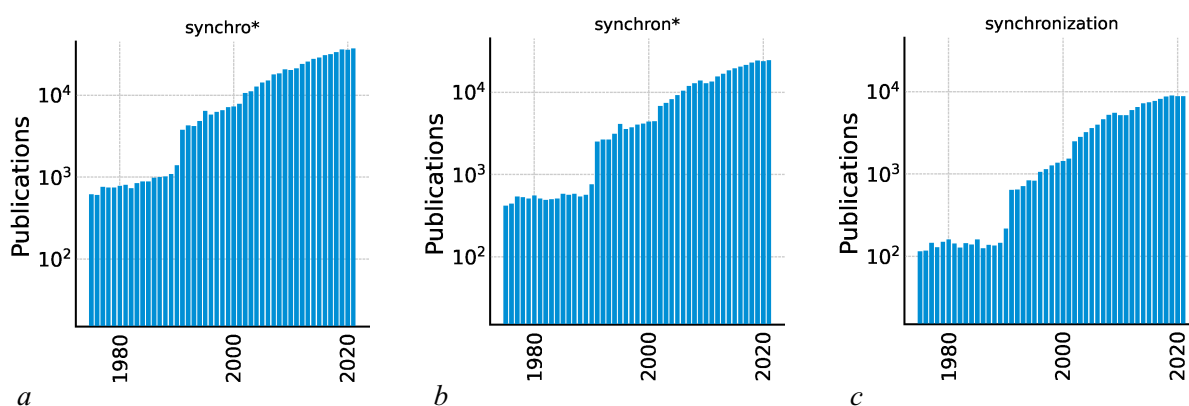


Рис. 1. Число публикаций при поиске по шаблону «synchro» (*a*), «synchron» (*b*), «synchronization» (*c*)

Fig. 1. The number of publications when searching by template «synchro» (*a*), «synchron» (*b*), «synchronization» (*c*)

«synchronization» отфильтровал статьи, не имеющие отношения к явлению синхронизации (со словами, относящимися к одновременности событий: synchronism, synchronizer, synchronous и др., а также synchroscope, synchronoscope, synchrophasotron и др.). Следует отметить, что качественно диаграммы на всех трех рисунках одинаковы, то есть, если не интересоваться точными количественными данными, то для интерпретации результатов можно использовать диаграммы всех трех рисунков, хотя рис. 1, с с поиском по слову «synchronization» предпочтительнее, поскольку отображает более достоверные цифровые данные. Из диаграмм рис. 1 очевиден несомненный рост числа публикаций по синхронизации в последние два десятилетия. Рост «популярности» темы синхронизации можно объяснить так: во все дисциплины, где старые статические модели вытесняются динамическими, проникают и понятия «колебания», «синхронизация», например, биология сейчас давно уже не описательная наука и имеет дело с колебательными моделями, моделями синхронизации на разных уровнях — ансамблевом, молекулярном, клеточном и т. д. В этой связи интересно посмотреть на распределение публикаций по теме «синхронизация» по журналам разных научных направлений.

Распределение публикаций по журналам различных научных профилей показано на рис. 2. Поиск проводился по шаблону «synchron AND oscil» с учетом названий статей, ключевых слов и аннотаций. Рис. 2, а представляет результаты за 1975–1990 гг., рис. 2, б — за 1990–2021 гг. Диаграммы рис. 2 демонстрируют очевидное смещение интереса к теме «синхронизация» от физических и технических наук к биологическим и нейронаукам. В интервале 1975–1990 гг. лидирует электроника, а с 1990 г. — это уже нейронауки.

Конечно, диффузию термина «синхронизация» из традиционных для этого термина физических и технических наук во множество других (биологию, медицину, математику и др.), по-видимому, можно рассматривать как главную причину неуклонного роста числа публикаций

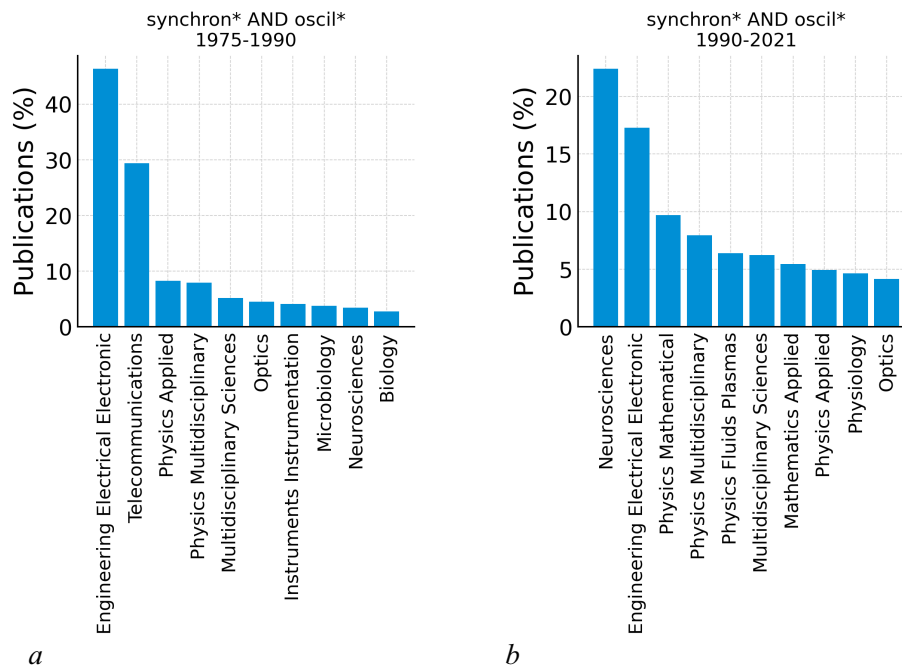


Рис. 2. Распределение публикаций по журналам разных профилей за 1975–1990 (а), 1990–2021 (б)

Fig. 2. Distribution of publications in journals of different profiles for 1975–1990 (a), 1990–2021 (b)

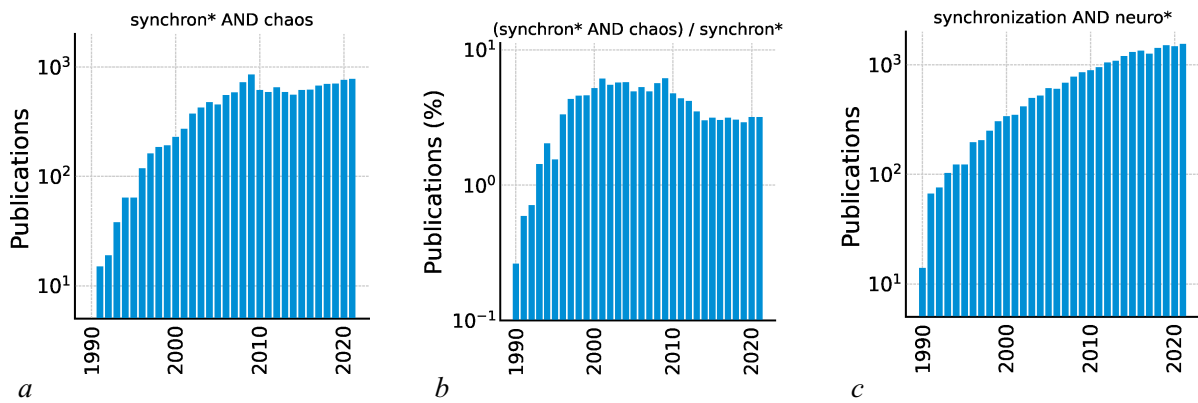


Рис. 3. Число публикаций по синхронизации хаотических колебаний (а), отношение числа публикаций по хаотической синхронизации к общему числу публикаций по синхронизации (б), число публикаций по синхронизации в нейронауках (с)

Fig. 3. The number of publications on synchronization of chaos oscillations (a). The ratio of the number of publications on chaos synchronization to the total number of publications on synchronization (b). The number of publications on synchronization in neurosciences (c)

по синхронизации, отмеченного выше. Наряду с этим, могут быть и другие причины роста числа публикаций, например, причины, связанные с развитием самого термина «синхронизация» при его диффузии в разные науки, расширением и даже некоторым размыванием понятия «синхронизация». Так в 1980-е годы, в связи с открытием динамического хаоса, возникло новое направление в теории синхронизации, занимавшееся синхронизацией хаотических колебаний [4–6], что вызвало появление заметного числа публикаций по синхронизации хаотических колебаний и роста общего числа публикаций по синхронизации. На рис. 3, а представлены диаграммы, отражающие число публикаций по синхронизации хаотических колебаний. Поиск проводился по названиям статей, ключевым словам и аннотациям, в теме поиска присутствовал шаблон «synchron AND chaos». На рис. 3, б представлено отношение числа работ по синхронизации хаотических колебаний к общему числу работ по синхронизации. Очевидно, что вклад хаотической синхронизации (около 4%) достаточно существенен.

Аналогичный анализ можно провести в отношении нейросинхронизации. Синхронизацией в нейронауках интенсивно стали заниматься примерно с 2000-х годов. На рис. 3, с представлены диаграммы, отражающие число публикаций по синхронизации в нейронауках. Поиск проводился с учетом названий статей, ключевых слов и аннотаций по шаблону «synchronization AND neuro». Из диаграмм рис. 3, с очевидно, что число публикаций по синхронизации в нейронауках сейчас весьма существенно и растет достаточно быстро.

## 2. Анализ публикационной активности по теме: системы фазовой автоподстройки частоты

Проанализируем развитие еще одной, важной в прикладном отношении, ветви теории синхронизации, связанной с системами автоматической синхронизации, в частности, с системами фазовой синхронизации (системами фазовой автоподстройки частоты — phase locked loops, PLL). Во второй половине прошлого века теория таких систем активно развивалась в отношении изучения как динамических свойств, так и статистических [9–11]. Эти системы нашли широкое применение в радиотехнике, радиосвязи, радиолокации, радионавигации и др., что стимулировало и большое число публикаций по теории систем автоматической синхронизации.



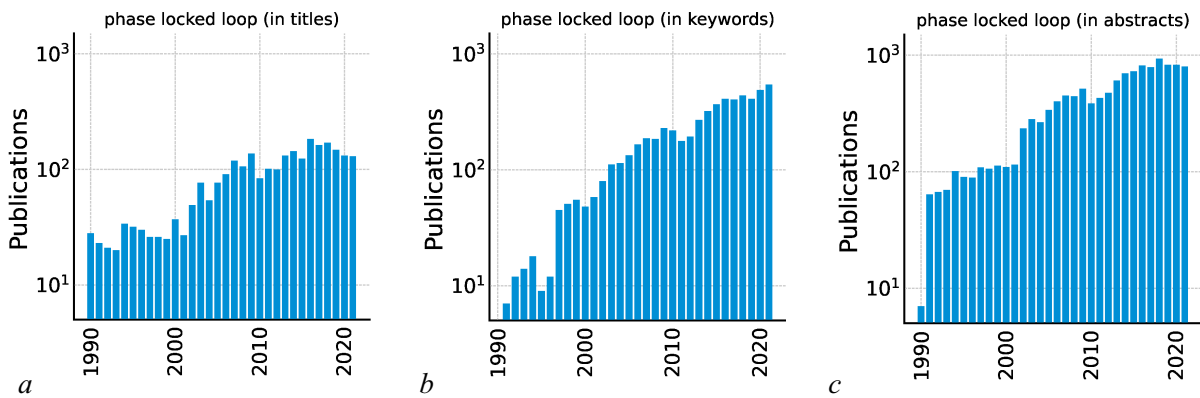


Рис. 4. Число публикаций по системам фазовой автоподстройки при поиске по названиям статей (а), по ключевым словам (b), по аннотациям (c)

Fig. 4. The number of publications on phase locked loop, when searching by titles (a), by key words (b), by abstracts (c)

На рис. 4 представлены диаграммы, отражающие число публикаций по системам фазовой синхронизации. В теме поиска был использован шаблон «phase locked loop (PLL)». На рис. 4, a приведены результаты поиска по названиям статей, на рис. 4, b — по ключевым словам, а на рис. 4, c — по аннотациям. В 2000-х годах заметен рост публикаций по этой тематике. Скорее всего, его можно объяснить распространением интереса к теории таких систем в нетрадиционных для систем фазовой автоподстройки областях (журналы по вычислительной физике, по прикладной математике, по биофизике и др.).

На рис. 5 приведены диаграммы, показывающие распределение публикаций по системам фазовой автоподстройки по странам и годам. Диаграммы дают данные по первой десятке наиболее активно публикующихся стран. Поиск проводился по названиям статей. Из этих диаграмм следует, что в 1975–1990 гг. наибольшее число публикаций осуществлялось из США, что не удивительно, поскольку тематика по системам фазовой синхронизации характерна для технически развитых стран. В 1990–2005 гг. также сохранялось доминирование США, однако в первую десятку по англоязычным публикациям вошли Китай и Россия, которых не было в предыдущий период в первой десятке. Что касается 2005–2021 гг., то здесь в публикациях однозначно доминирование Китая.

На рис. 6, a представлена диаграмма, показывающая число публикаций по системам фазовой автоподстройки частоты при поиске по всем показателям — названиям статей, ключевым словам и аннотациям, а на рис. 6, b дана диаграмма, показывающая процентное отношение числа публикаций по системам фазовой автоподстройки (поиск по шаблону «phase locked loop»)

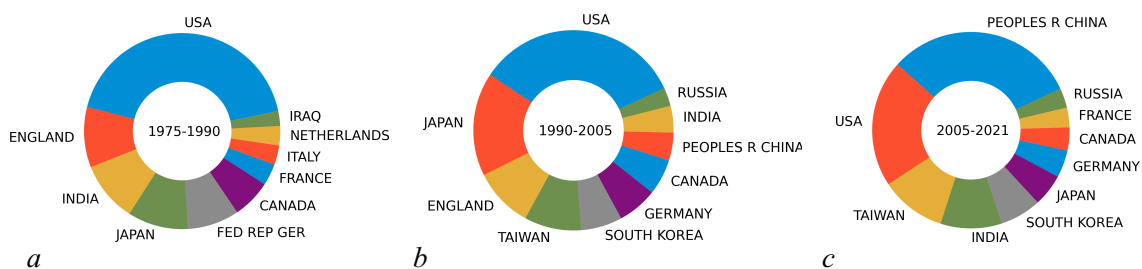


Рис. 5. Распределение публикаций по системам фазовой синхронизации по странам мира (первая десятка стран) за 1975–1990 (a), 1990–2005 (b), 2005–2021 (c) (цвет онлайн)

Fig. 5. Distribution of publications on phase locked loop by country of the world (the top-ten countries) for 1975–1990 (a), 1990–2005 (b), 2005–2021 (c) (color online)

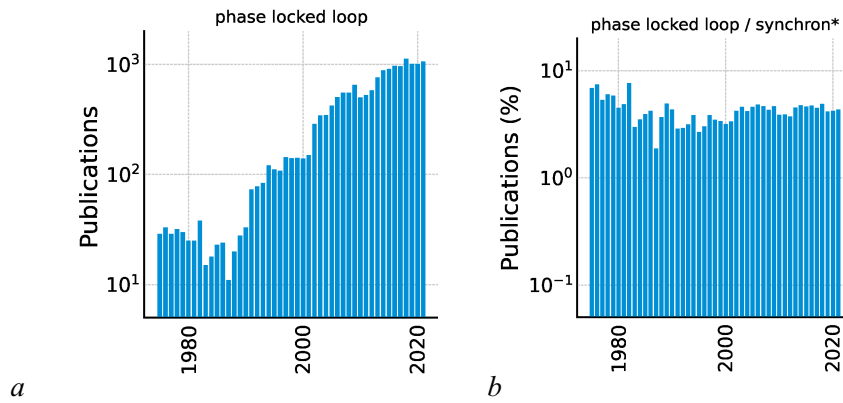


Рис. 6. Количество публикаций по системам фазовой автоподстройки (a), отношение числа публикаций по системам фазовой автоподстройки к общему числу публикаций по синхронизации (b)

Fig. 6. The number of publications on phase locked loop (a), the ratio of the publications on phase locked loop to the total number of publications on synchronization (b)

к общему числу публикаций по синхронизации (поиск по шаблону «synchron»). Интересно отметить, что несмотря на общий рост числа публикаций по системам фазовой автоподстройки и в целом по синхронизации, процентное отношение числа публикаций по системам фазовой автоподстройки к общему числу публикаций по синхронизации остается примерно постоянным за весь рассматриваемый интервал времени — около 4%.

### 3. Возможность прогноза

Полученные диаграммы свидетельствуют о том, что с 1990-х годов имеет место достаточно активный рост числа англоязычных публикаций в мировой журнальной литературе по различным аспектам синхронизации. Возникает вопрос о возможности прогнозирования изменения числа публикаций на предстоящий период времени. Ясно, что постоянные изменения условий развития мировой науки влекут за собой постоянные изменения публикационной активности, по большей части непредсказуемые, вследствие чего построить достаточно правдоподобный прогноз динамики публикационной активности на достаточно долгий период времени по полученным данным не представляется возможным.

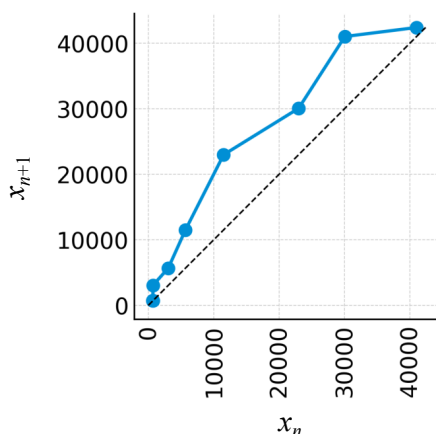


Рис. 7. Функция последования

Fig. 7. The sequence function

Однако на небольшой период времени в условиях отсутствия существенных изменений в развитии науки можно попытаться сделать соответствующий прогноз. Предположим, что существует некая гипотетическая динамическая система, поведение которой описывается переменной  $x$  — количеством публикаций по какому-то разделу науки (за определенное время, например за пять лет). Предполагая, что предыдущее значение  $x_n$  полностью определяет последующее (через пять лет) значение  $x_{n+1}$ , можно рассмотреть отображение сдвига по траектории, определяемой этой динамической системой, и построить функцию последования  $x_{n+1} = F(x_n)$  [12]. На рис. 7 такая функция последования построена, исходя из данных рис. 1, с. Если соединить

между собой полученные точки непрерывной кривой, то легко видеть, что на интервале времени 2010–2020 гг. построенная функция последования расположена выше биссектрисы, однако, аппроксимируя расположение функции последования около значения 42000, нетрудно заметить, что кривая стремится пересечь биссектрису, образуя устойчивую неподвижную точку, что позволяет считать, что в дальнейшем координата  $x$  не превысит прогнозного значения, соответствующего неподвижной точке.

### Заключение

Сейчас получили достаточно широкое распространение различные компьютерные базы данных. В настоящей заметке на примере использования одной из таких баз показана возможность извлечения полезной информации о динамике развития конкретных разделов наук, представляющих интерес для исследователя, на основании только одного показателя — количества публикаций.

### Список литературы

1. Мотова М. И., Шалфеев В. Д. От теории колебаний – к нелинейной динамике? // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22, № 1. С. 93–103. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-1-93-103.
2. Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 515–537. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537.
3. Андронов А. А., Витт А. А. К математической теории захватывания // Журнал прикладной физики. 1930. Т. 7, № 4. С. 3–20.
4. Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Известия вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С. 1050–1060.
5. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
6. Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., Стрелкова Г. И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 144 с.
7. Проскурников А. В., Фрадков А. А. Задачи и методы сетевого управления // Автоматика и телемеханика. 2016. № 10. С. 3–39.
8. Строгац С. Ритмы Вселенной. Как из хаоса возникает порядок. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2017. 560 с.
9. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Советское радио, 1978. 598 с.
10. Капранов М. В., Кулешов В. Н., Уткин Г. М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
11. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 448 с.
12. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.

### References

1. Motova MI, Shalfeev VD. From theory of oscillations to nonlinear dynamics. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2014;22(1):93–103 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-1-93-103.
2. Matrosov VV, Shalfeev VD. Simulation of business and financial cycles: Self-oscillation and synchronization. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4):515–537 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537.

3. Andronov AA, Vitt AA. About a mathematical theory of capture. *Journal of Applied Physics*. 1930;7(4):3–20 (in Russian).
4. Afraimovich VS, Verichev NN, Rabinovich MI. Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1986;29(9):795–803. DOI: 10.1007/BF01034476.
5. Pikovsky A, Rozenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
6. Anishchenko VS, Astakhov VV, Vadivasova TE, Strelkova GI. *Synchronization of Regular, Chaos, and Stochastic Oscillations*. Moscow-Izhevsk: Scientific and Publishing Center «Regular and Chaotic Dynamics»; 2008. 144 p. (in Russian).
7. Proskurnikov AV, Fradkov AA. Problems and methods of network control. *Automation and Remote Control*. 2016;77(10):1711–1740. DOI: 10.1134/S0005117916100015.
8. Strogatz S. *Sync: How Order Emerges from Chaos in the Universe, Nature, and Daily Life*. US: Hachette Books; 2003. 352 p.
9. Lindsey WC. *Synchronization Systems in Communication and Control*. New Jersey: Prentice-Hall; 1972. 695 p.
10. Kapranov MV, Kuleshov VN, Utkin GM. *Theory of Oscillations in Radioengineering*. Moscow: Nauka; 1984. 320 p. (in Russian).
11. Shakhgildyan VV, Lyakhovkin AA. *The Systems of Phase Locked Loop*. Moscow: Svyaz; 1972. 448 p. (in Russian).
12. Andronov AA, Vitt AA, Khaikin SE. *Theory of Oscillators*. New York: Dover Publications; 1987. 815 p.



*Козлов Александр Константинович* — родился в 1964 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н. И. Лобачевского по специальности «Радиофизика» (1989). Кандидат физико-математических наук (1995). Занимался исследованием устойчивости и сложной динамики систем управления в НИИ прикладной математики и кибернетики ННГУ и Институте прикладной физики РАН Нижнего Новгорода. В настоящее время — исследователь и преподаватель в Королевском технологическом университете в Стокгольме (Швеция). Область интересов — математическое моделирование биологических нейронных сетей.

Швеция, 10044 Стокгольм, Линдстедтсвэген, 3  
 Королевский технологический институт  
 E-mail: alexander.kozlov@yahoo.se  
 ORCID: 0000-0003-3994-0799



*Матросов Валерий Владимирович* — родился в 1960 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н. И. Лобачевского по специальности «Прикладная математика» (1982). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н. И. Лобачевского (1984–1999), доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования (1999), профессор этой кафедры (2007), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования (с 2013), декан радиофизического факультета ННГУ им. Н. И. Лобачевского (с 2014). Имеет более 100 научных и методических работ, в том числе 3 монографии и 3 учебных пособия, изданных как в России, так и за рубежом. Под его руководством защищено 4 кандидатских диссертации. Член диссертационного совета Д 212.166.07 при ННГУ (радиофак); научно-методического совета исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». Почетный работник сферы образования РФ, награжден знаком НТОРЭС им. А. С. Попова «За заслуги в развитии радиоэлектроники и связи».

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: matrosov@rf.unn.ru  
 ORCID: 0000-0003-3146-111X  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 24397

*Козлов А. К., Матросов В. В., Шалфеев В. Д.*  
 Известия вузов. ПНД, 2023, т. 31, № 2



*Шалфеев Владимир Дмитриевич* – родился в 1941 году, окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1963). Доктор физико-математических наук (1991), профессор (1991). Заведующий лабораторией, заместитель директора по научной работе НИИ прикладной математики и кибернетики при ГГУ (1963–1976). Декан факультета вычислительной математики и кибернетики ГГУ (1976–1981), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ (1981–2012). Руководитель 12 кандидатских и 3 докторских диссертаций. Лауреат премии Ленинского комсомола (1974), премии РАН им. А. А. Андропова (2012). Действительный член Академии инженерных наук РФ (2000). Область научных интересов: динамика нелинейных систем синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Автор и соавтор более 200 публикаций, в том числе 8 книг.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: shalfeev@rf.unn.ru  
AuthorID (eLibrary.Ru): 19690



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(2)

Обзорная статья  
УДК 57.024

DOI: 10.18500/0869-6632-003033  
EDN: JSTBXP

### Теория интегрированной информации и её применение к анализу нейронной активности головного мозга

И. А. Нажесткин<sup>1</sup>✉, О. Е. Сварник<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет), Россия

<sup>2</sup>Институт психологии РАН, Москва, Россия

E-mail: ✉nazhestkin@phystech.edu, olgasvarnik@gmail.com

Поступила в редакцию 30.10.2022, принята к публикации 18.02.2023,  
опубликована онлайн 2.03.2023, опубликована 31.03.2023

**Аннотация.** Цель настоящего обзора — рассмотреть возможность применения теории интегрированной информации к анализу нейронной активности головного мозга. Ранее было показано, что коэффициент интегрированной информации  $\Phi$  отражает степень динамической сложности системы и способен предсказывать степень успешности её работы, определяемую классическими наблюдаемыми критериями. Исходя из этого, становится актуальным вопрос относительно применения теории интегрированной информации к анализу изменений в спайковой активности головного мозга в процессе приобретения нового опыта. **Заключение.** Были рассмотрены основы теории интегрированной информации и её возможное применение в нейробиологии для исследования процесса приобретения нового опыта. Показано, что коэффициент интегрированной информации  $\Phi$  является метрикой, способной оценить динамическую сложность нейронных сетей головного мозга, увеличивающуюся с приобретением опыта. Предложены методы, позволяющие на практике вычислить значение коэффициента  $\Phi$  для данных нейронной активности.

**Ключевые слова:** мозг, информация, обучение, теория интегрированной информации, сложность.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-013-00851.

**Для цитирования:** Нажесткин И. А., Сварник О. Е. Теория интегрированной информации и её применение к анализу нейронной активности головного мозга // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 2. С. 180–201. DOI: 10.18500/0869-6632-003033. EDN: JSTBXP

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Integrated information theory and its application for analysis of brain neuron activity

I. A. Nazhestkin<sup>1</sup>✉, O. E. Svarnik<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Russia

<sup>2</sup>Institute of Psychology of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: ✉nazhestkin@phystech.edu, olgasvarnik@gmail.com

Received 30.10.2022, accepted 18.02.2023, available online 2.03.2023, published 31.03.2023

**Abstract.** Purpose of this review is to consider the possibility to apply the integrated information theory to investigate the brain neural activity. Earlier was shown that the integrated information amount  $\Phi$  quantifies a degree of a dynamic complexity of a system and able to predict a level of its success defined by classic observable benchmarks. For this reason, a question arises about the application of the integrated information theory to analyse changes in brain spiking activity due the acquisition of new experience. **Conclusion.** The bases of the integrated information theory and its possible application in neurobiology to investigate the process of new experience acquisition were reviewed. It was shown that the amount of integrated information  $\Phi$  is a metric which is able to quantify the dynamic complexity of brain neural networks increasing when the new experience is acquired. Methods, enabling the practical calculation of  $\Phi$  for spiking data, were proposed.

**Keywords:** brain, information, learning, integrated information theory, complexity.

**Acknowledgements.** This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 20-013-00851.

**For citation:** Nazhestkin IA, Svarnik OE. Integrated information theory and its application for analysis of brain neuron activity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(2):180–201. DOI: 10.18500/0869-6632-003033

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Основы теории интегрированной информации

Теория интегрированной информации (Integrated Information Theory, ИТ) и её основное понятие — коэффициент интегрированной информации  $\Phi$  — первоначально были предложены для оценки уровня сознания в головном мозге [1–4]. С помощью ИТ была предпринята попытка объяснить, каковы особенности нейронной активности, лежащей в основе феномена осознанных субъективных ощущений, почему они появляются именно благодаря работе головного мозга и возникают ли они в других сложных системах. Дж. Тонони предположил, что сознание возникает только в тех системах, где происходит интеграция информации. Коэффициент  $\Phi$  оценивает две способности сложной системы, критически важные для её работы — сегрегацию информации и её интеграцию. Сегрегация означает, что система должна иметь возможность находиться в как можно большем числе состояний, чтобы генерировать как можно больше информации. При этом важно, чтобы компоненты системы были сильно специализированы, то есть были связаны с кодированием, например, только одного вида стимулов. Интеграция заключается в том, что такие компоненты системы должны быть взаимосвязаны между собой. Это критически важно для работы системы как единого целого. Малые значения  $\Phi$  указывают либо на слабую генерацию специализированной информации компонентами системы, либо на то, что в системе имеется место со слабой взаимосвязью компонентов. И то и другое отрицательно сказывается на её производительности в задачах, наблюдаемой извне с использованием классических критериев.

Для лучшего понимания, почему и сегрегация, и интеграция важны, Тонони и коллеги приводят аналогию со светочувствительной матрицей фотоаппарата. Каждый из, например, миллиона

пикселей может находиться в одном из двух состояний (на него падает или не падает свет), и таким образом матрица способна закодировать  $2^{1000000}$  возможных состояний. Это означает, что способность матрицы к дифференциации информации очень высока — она способна различить очень большое количество поступающих на неё изображений. Однако никаких взаимозависимостей между состояниями пикселей нет, они полностью независимы и между ними нет никаких связей. Поэтому никаких выводов из закодированной информации сделать нельзя, никакая обработка поступившего изображения в такой системе невозможна. Таким образом, система способна только к хранению информации, но не использованию её для обработки и получения выводов.

С применением ИТ были получены результаты, хорошо согласующиеся с уже имеющимися экспериментальными данными о малом вкладе мозжечка и большом вкладе коры головного мозга в процессы сознания [5], а также были показаны различия в предсказываемом уровне сознания в состояниях бодрствования, сна [6], анестезии [7] и при различных повреждениях мозга [8], что может быть полезно в медицине для определения, в сознании пациент или нет [9, 10]. Однако в таком применении теория была подвергнута серьёзной критике. Во-первых, она приписывала высокий уровень сознания системам, которые не обладают сознанием исходя из здравого смысла, например, компьютерам. Во-вторых, сознание не зависит от наблюдателя, в отличие от информации, поэтому исходя из информации заявлять о присутствии сознания не корректно. Наконец, для вычисления показателя  $\Phi$  используется набор дискретных состояний системы, что, хотя и является достаточным в большинстве случаев, приводит к потере информации — например, для тех же нейронов, у которых локальные полевые потенциалы кодируют большое количество информации [11, 12]. Поэтому вопрос об описании уровня сознания этой теорией остаётся открытым.

В то же время было показано, что коэффициент интегрированной информации  $\Phi$  хорошо описывает производительность других сложных систем, состоящих из некоторого количества взаимодействующих элементов [13, 14]. По мнению исследователей,  $\Phi$  показывает внутреннее состояние сложных самоорганизующихся систем, состоящих из отдельных элементов, в которых при определённом уровне сложности возникает порядок.  $\Phi$  описывает внутреннюю структуру, приводящую к определённому поведению системы, к сложности возникающих в ней состояний («What the system is»), а не описывает наблюдаемые состояния системы извне («What the system does») [15, 16]. Так, в работе [14] коэффициент интегрированной информации вычислялся на двух наборах данных: для команд людей, выполняющих задачи, напрямую связанные с командным взаимодействием, и для группы редакторов статей в Wikipedia. В первом случае 68 групп людей, из 4-х человек каждая, решали различные задачи, например, отвечали на интеллектуальные вопросы методом мозгового штурма или набирали текст в общем онлайн-редакторе. Общим во всех задачах было то, что участники команд должны были взаимодействовать друг с другом для успешного выполнения задания. В качестве узлов в сети выступали люди, которым в каждый момент времени приписывалось состояние «1», если человек в это время разговаривал, и «0», если молчал. Таким образом, коэффициент  $\Phi$  оценивал генерацию информации в сети, состоящей из людей. В результате коллективный интеллект команд (среднее число баллов, набранное командами в процессе выполнения всех задач), статистически значимо коррелировал со значением  $\Phi$ , рассчитанным за время работы команд (рис. 1, а). Во втором наборе данных рассматривалась история редактирования 999 наиболее важных статей в Википедии. Для каждой статьи рассматривались все люди, которые редактировали её. Коэффициент интегрированной информации  $\Phi$  для таких групп людей оказался статистически достоверно связан с оценкой их статьи, выдаваемой пользователями на сайте (по пятибалльной шкале) (рис. 1, б).

В работе [13] коэффициент интегрированной информации рассчитывался для виртуальных модельных организмов («animats»), обучаемых навыку ориентирования в лабиринте. Организм



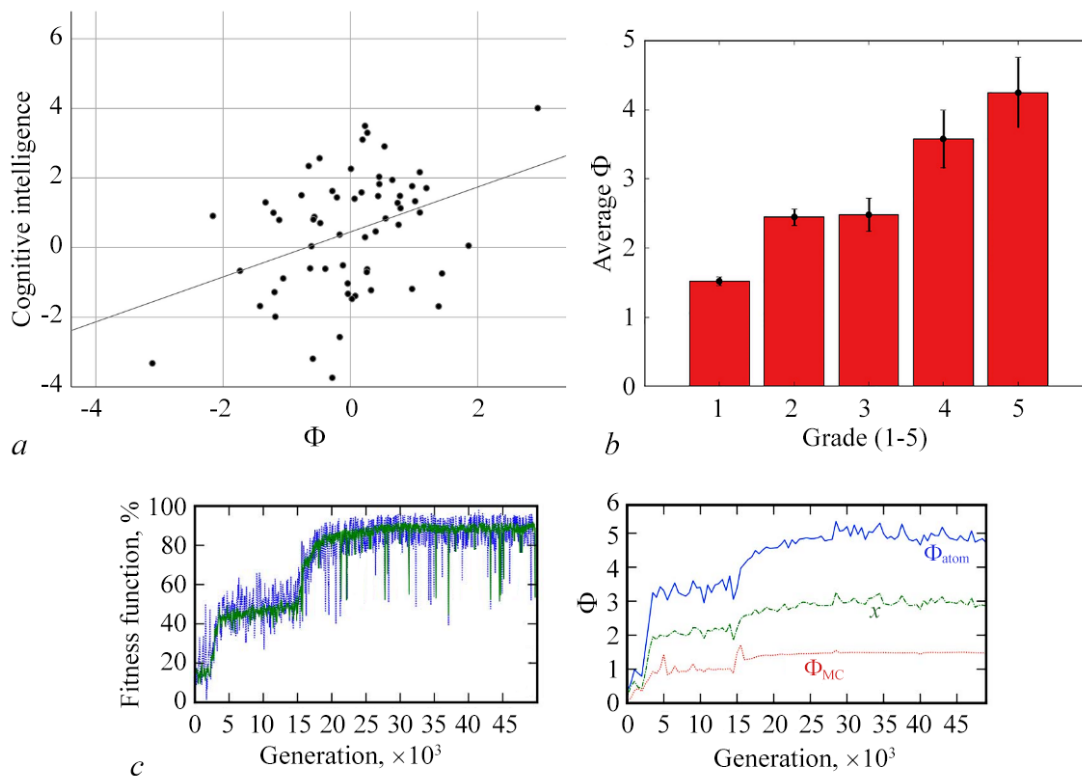


Рис. 1. Примеры применения теории интегрированной информации к анализу поведения различных сложных систем. *a* — Взаимосвязь между коэффициентом интегрированной информации и коллективным интеллектом для групп людей. *b* — Взаимосвязь между группами редакторов статей в Wikipedia и оценками данных статей. Адаптировано из [14]. *c* — Использование коэффициента интегрированной информации, рассчитанного различными методами, для оценки поведения виртуального организма в лабиринте. Слева: ход обучения организмов, показана нормированная фитнес-функция. Справа: изменение со временем коэффициента интегрированной информации, рассчитанного тремя различными способами. Между  $\Phi$  и фитнес-функцией наблюдается корреляция. Адаптировано из [13] (цвет онлайн)

Fig. 1. Examples of the integrated information theory application for analysis of the action of different complex systems. *a* — Correlation between an integrated information coefficient and a collective intelligence for human groups. *b* — Relation between groups of Wikipedia editors and manuscript grades (1–5). Changed from [14]. *c* — Application of an integrated information coefficient calculated with different methods to quantify the behavior of a virtual entity in a maze. Left: learning process; a normalized fitness function is shown. Right: evolution of integrated information coefficient calculated with three different ways. A correlation between  $\Phi$  and a fitness function is observed. Changed from [13] (color online)

имел сенсоры, движущие органы и внутренние промежуточные элементы для обработки информации, каждый из которых являлся узлом сети, имеющим состояние «0» или «1». Сеть из данных элементов работала по вероятностному принципу, с заданными вероятностями перехода из состояния в состояние. Организму требовалось пройти слева направо случайно генерируемый лабиринт со множеством вертикальных стенок, имеющих по одной двери в различных местах. Обучение организмов проводилось с помощью генетического алгоритма, в основе которого лежит применение на каждой итерации (поколении) случайных изменений (мутаций) и случайное слияние сгенерированных систем (скрещивание). При этом от поколения к поколению изменялись вероятности перехода и структура связей между элементами. В результате оказалось, что коэффициент интегрированной информации, рассчитанный для элементов сети (не для вероятностей перехода!) увеличивался с ходом обучения. Точно так же увеличивалась и функция приспособленности, показывающая успех организма, и зависящая от количества проходов через двери и расстояния до последней двери (рис. 1, *c*). Таким образом, показатель  $\Phi$  предположительно оценивает характер

совместной работы системы, сложность взаимодействий между её элементами, обеспечивающую производительность в задачах, выполняемых системой.

Для головного мозга (*in vivo* и в симуляциях) коэффициент  $\Phi$  также показывал взаимосвязь с развитием мозга и успешностью выполняемого поведения. В работе [17] в вычислительной модели головного мозга, в которой были смоделированы 5.2 млн нейронов, производилось обучение по правилу Хэбба. Обучение характеризовалось ростом количества аттракторов (образующихся в результате самоорганизации стабильных паттернов активности нейронов, которые, по имеющимся сведениям, кодируют определённые стимулы [18, 19] и таким образом прямо обеспечивают сегрегацию информации). После обучения был замечен рост показателя интегрированной информации. Для вычисления  $\Phi$  по 5.2 млн модельных нейронов из мембранных потенциалов нейронов были смоделированы сигналы, регистрируемые с помощью электроэнцефаллографии (ЭЭГ) по закону Кулона [17]. В работе Дж. Ислера с соавторами [20] коэффициент интегрированной информации вычислялся для ЭЭГ, записанной у новорождённых детей, в зависимости от возраста (в днях). Было показано, что показатель  $\Phi$  растёт вместе с возрастом. Поскольку в детском возрасте происходит активное развитие мозга, данный факт подтверждает гипотезу о том, что  $\Phi$  описывает развитие сложной системы. В работе [21] при обучении животных пространственному навыку коэффициент  $\Phi$  для нейронной активности гиппокампа, рассчитанный различными способами, имел положительную корреляцию с метрикой успешности обучения, зависящей от среды — количеством вознаграждений, выдаваемых животному. В работе [22] аналогичный результат был показан при пространственно-аверсивном (связанным со страхом) обучении для нейронной активности двух областей головного мозга (гиппокампа и миндалины) (рис. 2, *a*). Кроме того, в те дни, когда наблюдался рост количества вознаграждений, но не в последующие, была показана корреляция между  $\Phi$  для нейронов гиппокампа и  $\Phi$  для нейронов миндалины (рис. 2, *b*).

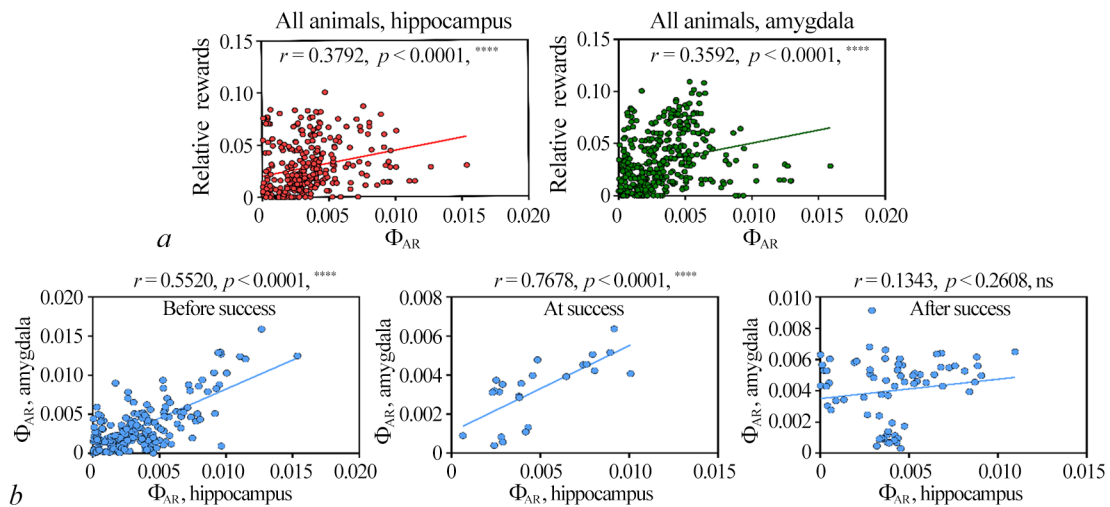


Рис. 2. Пример применения теории интегрированной информации для оценки степени успешности обучения. *a* — взаимосвязь  $\Phi$  для нейронов гиппокампа и миндалины с относительным количеством вознаграждений (нормированным на время сессии обучения). *b* — взаимосвязь  $\Phi$  для нейронов гиппокампа и  $\Phi$  для нейронов миндалины: слева — до достижения дня с максимальным количеством вознаграждений, в середине — в течение этого дня, справа — после этого дня и до конца обучения. Адаптировано из [21, 22] (цвет онлайн)

Fig. 2. Example of the integrated information theory application for quantification of the degree of learning success. *a* — correlation between  $\Phi$  for hippocampus and amygdala neurons and a relative number of rewards (normalized by the learning session duration). *b* — correlation between  $\Phi$  for hippocampus and amygdala neurons: left — before the day when the maximal number of rewards was achieved, middle — during a such day, right — after this day until the end of learning. Changed from [21, 22] (color online)

Эти результаты показывают, что сегрегация и интеграция информации, описываемые коэффициентом интегрированной информации  $\Phi$ , взаимосвязаны с успешностью функционирования сложной системы. Поэтому применение теории интегрированной информации к анализу нейронной активности головного мозга представляется перспективным подходом. Коэффициент  $\Phi$  способен показывать внутренние изменения в сложной системе, поэтому позволит учесть ранее не известные закономерности в паттернах нейронной активности. Это позволит более точно оценивать степень вовлечённости определённых нейронных групп в процесс обучения и уровень пластических изменений, происходящих в головном мозге в процессе приобретения навыков.

### **Основы процессов сегрегации и интеграции информации**

Успешное применение ИТ для анализа различных систем показывает, что сегрегация и интеграция информации обнаруживаются в различных самоорганизующихся системах [13, 14]. Головной мозг не является исключением. Подобные процессы напрямую вытекают из сетевой структуры головного мозга, образованной нейронами и их взаимодействиями. Сетевая структура мозга представлена сообществами с тесными внутренними взаимными связями. Было показано [23], что нейронные сообщества реализуют сегрегацию информации, а связи между ними — интеграцию. Рассмотрим данные процессы подробнее.

Ещё в начале XX века с помощью простейших методов микроскопии было показано, что мозг не является однородным, а имеет большое количество ярко выраженных анатомических областей [24, 25]. В дальнейшем внутри головного мозга были обнаружены кластеры нейронов [26], структура которых определяется анатомическим устройством мозга [27]. При таком устройстве сети в ней образуются особые подгруппы нейронов, которые содержат большое число связей — значительно большее, чем все остальные нейроны. Данная подгруппа называется «клубом избранных» («Rich club»). Такие клетки встречаются в каждом кластере и отвечают за связь и обмен информацией между кластерами. В результате получается, что каждый кластер может содержать клетки, имеющие связи с остальными кластерами. Такие клетки называют хабами. «Клуб избранных» образует мощную структуру, обеспечивающую связи между кластерами, позволяя информации быстро переходить практически из любого кластера в любой. Показано, что по сравнению со случайной сетью такая структура позволяет значительно уменьшить длину пути между областями [28], что, как будет показано далее, критически важно. Образование «клуба избранных» описывается моделью сетей Барабаши–Альберта [29], где связи у каждого узла образуются с вероятностью, пропорциональной уже имеющемуся количеству связей этого узла. Предлагаемая генеративная модель объясняет подобную структуру — клетки из «клуба избранных» будут образовывать синаптические связи вероятнее, чем остальные, поэтому с большой вероятностью свяжутся с клетками из всех других кластеров, а не только с ближайшими. В таких сетях высок глобальный коэффициент кластеризации  $C$ , определяемый как среднее по всем узлам отношение количества связанных между собой пар соседей узлов к полному количеству пар соседей узлов. Он показывает, насколько сильно в сети выражены узлы-хабы, имеющие большое число связей.

Каждый кластер, в свою очередь, внутри построен по определённым правилам, которые являются прямой противоположностью организации хабов. Хорошая специализация на выполнении какой-либо функции требует быстрого обмена информацией внутри сообщества. Для этого требуется максимально сократить длину проводящих путей между нейронами в сообществе. И нейроны в специализированных регионах мозга действительно образуют такие сети, что было подтверждено различными методами [30–33]. Структура нейронных связей в подобных кластерах описывается с помощью модели так называемых «сетей тесного мира» (Small-World networks).

Первоначально подобные сети были предложены для описания графа социальных связей между всеми людьми — было выявлено, что в среднем двух случайно взятых людей разделяют только 6 знакомств, и что люди, используя только свои знакомства, только локально доступных им людей, самостоятельно находят эти пути [34]. Это показывает высокую скорость обмена информацией в подобных сетях. Возникновение сети «тесного мира» описывается моделью Уоттса–Строгаца [35]: в регулярной кольцевой сети с  $k$  для каждой связи производится случайное испытание с вероятностью положительного исхода  $p$ , и в случае положительного исхода эта связь перенаправляется одним из концов на другой узел, случайно выбранный таким образом, что до перенаправления аналогичной связи не существовало. При  $p = 0$  образуется полностью регулярная сеть (что очевидно, поскольку никакие связи в исходной регулярной сети модифицированы не будут), а при  $p = 1$  результирующая сеть получится полностью случайной. Таким образом, сеть в каждом регионе мозга является результатом баланса между случайностью и регулярностью. Важнейшим свойством сетей «тесного мира» является то, что они имеют крайне низкую среднюю длину пути между двумя элементами, слабо зависящую от их количества. Согласно исследованию Уоттса и Строгаца, средняя длина пути в таких сетях определяется следующим образом:

$$\langle l \rangle = \frac{\ln N}{\ln K},$$

где  $N$  — количество элементов в сети, а  $K$  — количество связей у одного элемента. Если взять количество нейронов в какой-либо анатомической области  $N = 1$  млрд, а среднее число синапсов у нейрона  $K = 1000$ , то получим среднюю длину связи  $\langle l \rangle = 3$ . Настолько малая длина позволяет таким сетям быстрее генерировать информацию. Можно показать, что в таких сетях значительно выше мера эффективности обмена информацией:

$$E(G) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j \in G} \frac{1}{d_{i,j}},$$

где  $G$  — рассматриваемая сеть (граф),  $N$  — количество узлов в сети, а  $d_{i,j}$  — длина кратчайшего пути между узлами  $i$  и  $j$  в сети. Нормировка на  $N(N-1)$  нужна для того, чтобы взять за единицу эффективность сети, имеющей все  $N(N-1)/2$  возможных связей [36, 37]. Искусственные нейронные сети, построенные на основе модели «тесного мира», быстрее обучаются и делают меньше ошибок [38].

Подобная закономерность существует и на более высоких уровнях. Есть все основания предполагать, что сети в мозге являются многоуровневыми, то есть узлами могут быть не только нейроны, но и целые сети, построенные по такому же принципу [39], то есть мозг может описываться как гиперсеть [40]. В качестве узлов могут выделяться и искусственные структуры (восстановленные или созданные на основании применения теории графов), например, воксели (трёхмерные пиксели, используемые для анализа данных функциональной магнитно-резонансной томографии, фМРТ). Связь между узлами в таких работах определяется исходя из их активности различными статистическими методами [41–44], после чего тесные сообщества выделяются с помощью специального класса алгоритмов для обнаружения связанных популяций (Community detection) [45, 46]. В таких исследованиях воксели также показывали аналогичную сетевую структуру, с тесными сообществами и хабами [47–50]. Для некоторых областей мозга была показана эквивалентность структуры, полученной анатомическими методами и методами анализа активности групп нейронов по методу фМРТ [51]. Таким образом, сходная структура обнаруживается на разных уровнях. Возможно, сетевая структура на каждом уровне определяет структуру следующего уровня — и так далее, вплоть до более высоких уровней сетей, вроде социальных, непосредственно доступных для наблюдения.

По всей видимости, такие сети возникают эволюционным путём под действием сложной окружающей среды. Проследить эволюцию сети живого мозга достаточно сложно в силу большой сложности таких сетей, поэтому используется компьютерное моделирование. В работе [52] модель многослойной нейронной сети со связями, меняющимися по генетическому алгоритму, обучалась нескольким задачам, причём требуемая задача часто менялась. При этом в такой сети возникли структурные мотивы, сходные с вышеописанными мотивами в сетях живого головного мозга. Специально определённая метрика модульности, показывающая, насколько хорошо в сети можно выделить сообщества с минимумом связей между ними, росла при таком обучении. Более простая линейная модель, в которой вектор результатов получался из вектора ресурсов среды с помощью матрицы, а метрика успешности вычислялась как модуль разницы между вектором результатов и заданным идеальным вектором, показала похожий результат — в матрице обнаруживались блоки из ненулевых элементов на общем фоне, состоящем преимущественно из нулей. Здесь частота изменения задачи оказалась напрямую связана с похожей метрикой модульности для матрицы [53].

Таким образом, в головном мозге в результате эволюции в окружающей среде сосуществуют два прямо противоположных «стандарта» формирования сетей — сети «тесного мира» с большим количеством связей между различными парами элементов и сети с узлами, имеющими большое количество связей. Первые характеризуются малым коэффициентом кластеризации, высокой плотностью связей и небольшой средней длиной пути, а вторые — наоборот, высоким коэффициентом кластеризации, низкой плотностью связей и увеличенной средней длиной пути. Активность узлов в каждом сообществе сильно коррелирует друг с другом и слабо коррелирует с активностью в других сообществах. Эти типы организации сетей напрямую связаны с дифференциацией (сегрегацией) и интеграцией информации [23].

Сегрегация информации означает, что обработка узкоспециализированной информации каждого конкретного типа, выполнение каждой конкретной задачи осуществляется в своих специализированных модулях. Этими модулями как раз и являются вышеупомянутые сообщества, имеющие тесные внутренние связи по модели «тесного мира». В них, во-первых, короткие связи между элементами увеличивают скорость генерации информации, а, во-вторых, группа из большого числа нейронов может находиться в большом количестве состояний, и таким образом различать большое число объектов.

Интеграция информации — наличие взаимосвязей, взаимозависимостей между состояниями узлов в различных сообществах. Это необходимо для обмена информацией и, следовательно, для построения общих выводов на основе информации, обрабатываемой различными сообществами. Физической основой интеграции информации являются узлы-хабы, обеспечивающие взаимосвязь между кластерами. Без этого работа мозга как единого целого была бы невозможной. Интеграция информации основана на взаимосвязях между кластерами и реализуется нейронами из «клуба избранных».

Таким образом, была раскрыта основная суть двух явлений, оцениваемых в теории интегрированной информации: сегрегация и интеграция информации. Можно предположить, что они возникают в мозге эволюционным путём и крайне важны для успешного функционирования головного мозга.

### **Определение параметра интегрированной информации $\Phi$**

Рассмотрим теперь, как именно вычисляется показатель  $\Phi$ . Необходимо вывести такой показатель, который будет описывать степень генерации информации частями системы и степень её интеграции. Для начала необходимо точно охарактеризовать генерацию информации.

Представим систему в виде случайной величины  $X$ , представляющей собой  $N$ -мерный вектор, где  $N$  — количество элементов (узлов) в системе. Каждый элемент вектора показывает состояние одного узла в данный момент времени. Состояния узлов считаются бинарными — узел может быть либо не активен (состояние «0»), либо активен (состояние «1»). Система эволюционирует со временем, вначале находясь в состоянии  $X_0$ , затем, через какое-то время, в состоянии  $X_1$ , затем, через такое же время — в состоянии  $X_2$ , и так далее. В данной теории время рассматривается дискретно, через определённые промежутки  $\Delta t$  [3]:

$$X_1 \xrightarrow{\Delta t} X_2 \xrightarrow{\Delta t} X_3 \dots$$

Тогда количество информации, сгенерированной системой за один шаг  $\Delta t$ , можно оценить с помощью выражения:

$$H(X_t | X_{t+\Delta t}),$$

где  $H(X|Y)$  — условная энтропия переменной  $X$  при условии произошедшего наблюдения переменной  $Y$ . Здесь условная энтропия показывает количество информации, необходимое для описания системы (полного снятия неопределённости о ней) в момент времени  $t$  при условии, что известно состояние системы в момент времени  $t + \Delta t$ . Можно сказать, что этот показатель предсказывает, в какой степени состояние системы в момент времени  $t$  предсказывает будущее состояние системы в момент  $t + \Delta t$ . Теперь необходимо оценить степень интеграции информации, то есть взаимодействия частей системы. Для этого Тонони с коллегами предложили разбить систему на непересекающиеся части, удалив все связи между этими частями, и рассчитать простую разность между количеством информации, генерируемой целой системой, и генерируемой суммой её частей. Эта метрика называется эффективной информацией (Effective Information, EI):

$$EI(X_t \rightarrow X_{t+\Delta t}, P) = \left[ \sum_{i=1}^k H(P_{t,i} | P_{t+\Delta t,i}) \right] - H(X_t | X_{t+\Delta t}).$$

Здесь  $P = P_1, P_2, \dots, P_k$ ;  $P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k = X$  — разбиение системы на  $k$  частей. Энтропии под суммой вычисляются для каждой части системы, для некоторого подмножества её элементов  $P_i$ . Очевидно, что данная разность не всегда будет равной нулю, энтропия суммы частей не равна энтропии всей системы, поскольку в выражении для условной энтропии фигурируют распределения вероятности, и сумма распределений в общем случае не равна совместному распределению. Равенство достигается только в случае полной независимости частей, когда разделение ничего не изменит — тогда сумма энтропий частей будет равна суммарной энтропии системы, и разность будет равна нулю. Это очень важный частный случай, помогающий понять принцип оценки степени интеграции информации — оценивается степень взаимозависимости, степень того, какие последствия будут от разделения системы на части. Чем больше выигрыш от объединения частей в систему, чем больше информации можно дополнительно получить от такого объединения, тем больше будет эффективная информация EI. Теперь необходимо определить, какое конкретно разбиение системы на части необходимо использовать для расчётов. По определению, данному в работе [3], требуется найти такое разбиение, которое даст минимальное значение EI, то есть такое, которое определит наиболее независимые части системы. Это позволяет определить слабое место системы — ту её часть, которая минимально связана с остальной системой и, следовательно, слабо обменивается с ней информацией. Информация, сгенерированная этой частью, менее всего используется системой для создания общих выводов и даёт наименьший вклад в работу системы. В наихудшем пределе такое минимальное значение равно нулю, что означает, что удалось найти полностью независимую подгруппу в системе, не обменивающуюся информацией с остальными

частями. Найденное разбиение в ИТ называют разбиением с минимальной информацией (Minimum Information Partition, MIP). И значением коэффициента интегрированной информации  $\Phi$  является значение эффективной информации EI при разбиении MIP:

$$\Phi = EI(X_t \rightarrow X_{t+\Delta t}, P = \text{MIP}).$$

Наконец, необходимо устранить одну проблему. В случае, если части, на которые разбивается система, будут сильно не равны по размеру, то эффективная информация будет в первую очередь определяться размерами частей системы, а не степенью взаимосвязи и взаимозависимости, как это требуется. Например, в случае разбиения на две сильно неравные части эффективная информация будет почти всегда меньше, чем при разбиении на равные, поскольку отделение небольшого числа элементов слабо затрагивает систему и слабо изменяет количество генерируемой в ней информации. Аналогично, разбиение на много частей даст уменьшение информации гораздо большее, чем разбиение на небольшое число — чем больше частей, тем больше связей будет разорвано, тем больше взаимозависимостей пропадет, и система станет генерировать меньшее число информации. Для устранения таких эффектов при поиске разбиения минимум ищется по нормированным значениям EI, где нормировочный коэффициент  $N_P$  равен минимально возможной информации, генерируемой всеми частями системы:

$$N_P = (k - 1) \min_{i=1\dots k} H_{\max}(P_i),$$

где  $k$  — количество частей в разбиении, а  $H_{\max}(P_i)$  — максимальная энтропия части системы (максимально возможное количество информации, которое требуется, чтобы описать её состояние). Для систем с бинарными узлами максимальная энтропия равна размеру системы. Таким образом,  $N_P = (k - 1) \min_{i=1\dots k} |P_i|$  [3]. В итоге, показатель интегрированной информации определяется выражением

$$\Phi = \arg \min_P \frac{\left[ \sum_{i=1}^k H(P_{t,i} | P_{t+\Delta t,i}) \right] - H(X_t | X_{t+\Delta t})}{(k - 1) \min_{i=1\dots k} |P_i|}, \quad (1)$$

из которого видно, что показатель интегрированной информации измеряется в битах, поскольку  $\Phi$  фактически представляет собой линейную комбинацию различных энтропий, которые тоже измеряются в битах. В теории  $\Phi$  неотрицателен, поскольку сумма энтропий Шеннона частей системы будет больше энтропии целой системы — большее количество связей даёт большее количество взаимозависимостей, что уменьшает количество возможных состояний системы и снижает энтропию. Теоретически максимально возможное значение  $\Phi$  равно количеству элементов в системе, однако на практике оно никогда не достигается, так как для этого требуется, чтобы энтропия целой системы была равна нулю, что невозможно.

### **Практическое вычисление коэффициента интегрированной информации**

Основной проблемой вычислений по такому классическому определению является нахождение разбиения с минимальной информацией. Никаких предположений и ограничений по поводу вида разбиения не делается — теоретически оно может быть произвольным, на любое количество частей и с любым распределением элементов по этим частям. На практике такое разбиение может быть найдено только полным перебором всех возможных разбиений, с вычислением нормированной эффективной информации для каждого и поиском минимума. Оценим сложность алгоритма.

Количество всех возможных разбиений множества из  $N$  элементов определяется числом Белла  $B_N$ . Оно задаётся рекуррентным соотношением [54]

$$B_N = \sum_{k=0}^N C_n^k B_{k-1}.$$

Принимая по очевидным причинам, что  $B_0 = 1$  и  $B_1 = 1$ , легко рассчитать число Белла и для следующих  $N$ . Так, например,  $B_{10} = 115975$ ,  $B_{15} = 1382958545$ , а  $B_{20} = 51724158235372$  (рис. 3).

Число Белла можно оценить как [55]:

$$B_N < \left( \frac{0.792n}{\ln(n+1)} \right)^n,$$

то есть оно растёт быстрее экспоненты, но медленнее факториала. Таким образом, даже для относительно небольших систем вычисление  $\Phi$  становится большой проблемой. Современных вычислительных мощностей, даже на суперкомпьютерах, будет недостаточно для определения показателя  $\Phi$  у систем с  $N \geq 10$  элементами. Поэтому на практике часто ограничиваются разбиением системы на две части. В таком случае число разбиений, которые необходимо перебрать, определяется числом Стирлинга второго рода [56], которое растёт уже экспоненциально (см. рис. 3):

$$S(N, 2) = \frac{1}{2}(2^n - 1)$$

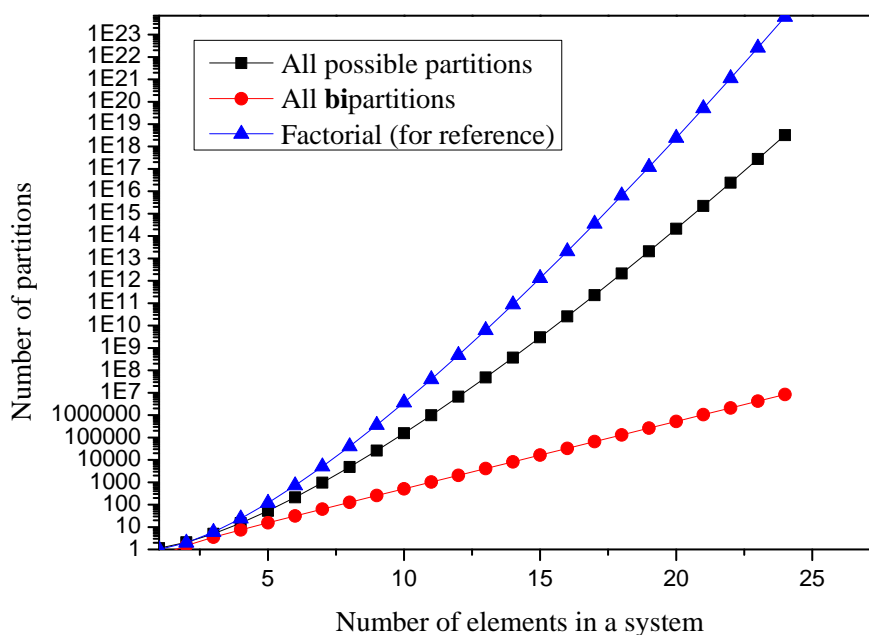


Рис. 3. Количество вариантов разбиения системы на части, которое нужно перебрать для нахождения разбиения с минимальной информацией (МИР). Приведены количества для разбиения на произвольное число частей и разбиений на две части; также для сравнения приведено значение факториала количества элементов. Масштаб по оси  $y$  логарифмический. Построено на основе применения оценки произвольного числа разбиений системы [55] и разбиений на две части [56]

Fig. 3. A number of system partitions required to consider to find the Minimal Information Partition (MIP). Number of partitions is shown for arbitrary partitions and bipartitions; also a factorial of a number of elements is shown for reference. The  $y$  axis is in logscale. Plotted using the estimation of a number of arbitrary partitions [55] and a number of bipartitions [56]



Однако даже в таком упрощённом варианте задача остаётся очень сложной. Например, для 30 нейронов при выполнении вычислений придётся перебрать  $S(30, 2) = 5.369 \cdot 10^8$  возможных разбиений. Поэтому необходимы приближённые методы, которые позволяют произвести расчёт быстрее, получая  $\Phi$ , не сильно отличающееся от точного значения. Они основаны на нахождении разбиения, в той или иной мере повторяющего свойства истинного (требуемого по определению, данного в ИТ), но находимого без полного перебора. Одним из первых предложений было использование так называемого атомарного разбиения (Atomic partition) [13, 57, 58], которое представляет собой простое деление системы из  $N$  узлов на  $N$  частей, где каждый узел оказывается в одной части (рис. 4, *a*). Это частично решает задачу, поскольку соответствует основной идеологии теории интегрированной информации — расчёт выигрыша при работе целой системы по сравнению с работой отдельно взятых частей. При этом приближённо считается, что такими отдельными частями являются сами узлы, и игнорируется присутствие отдельных кластеров (подмножеств), способных к генерации информации. Это серьёзный недостаток такого подхода, поскольку реальная структура нейронных сетей в мозге, как указывалось ранее, не однородна, а состоит из отдельных кластеров, имеющих внутри тесные связи (рис. 4, *b*). Каждый из этих кластеров решает конкретную задачу и является в некоторой степени самостоятельной единицей, и разбиение сети на отдельные нейроны игнорирует этот факт и не позволяет оценить выигрыш в генерации информации вследствие работы таких кластеров. Поэтому необходимы приближения, учитывающие такую кластерную структуру.

Можно предположить, что разбиение на такие кластеры является наиболее близким к тому, которое требуется по определению  $\Phi$ , данному в ИТ (рис. 4, *c*). Разбиение по местам, где между частями системы имеется меньше всего связей (то есть, разбиение вне границ кластеров), приведёт к наименьшему снижению количества информации, генерируемой системой. Для выявления подобных кластеров используются методы статистического анализа нейронной активности. Высокая корреляция между рядами спайковых событий двух нейронов означает, что с большой вероятностью активность одного нейрона может быть причиной активности другого, то есть один из них имеет синаптическую связь с другим. Сила синаптической связи определяется по величине корреляции. После этого используются широко известные методы нахождения тесных

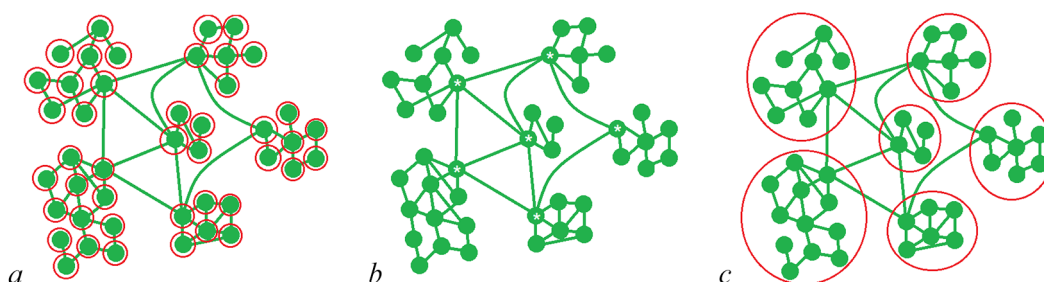


Рис. 4. Приближённые разбиения нейронной сети головного мозга, частично повторяющие свойства искомого ИИП. *a* — Атомарное разбиение, каждый нейрон находится в своей подвыборке (отмечены красными кругами). Подобное разбиение не соответствует реальной структуре сети и пренебрегает обработкой информации нейронными группами. *b* — Кластерная структура нейронной сети. Хорошо видны сообщества нейронов, соединённые между собой связями с помощью узлов-хабов (отмечены звёздочками). *c* — Разбиение нейронной сети на подвыборки, соответствующие сообществам нейронов. Адаптировано из [21] (цвет онлайн)

Fig. 4. Approximated partitions of a brain neural network partially replicating properties of IIP. *a* — Atomic partition, every neuron is contained in its own partition (shown by the red circles). Such partition does not correspond to an existing structure of a neural network and neglects the information processing by neuron groups. *b* — Neural network cluster structure. Neuron communities connected between each other by synapses with hubs (marked by astericks) are visible. *c* — Neural network partition by groups corresponding to neuron clusters. Changed from [21] (color online)

кластеров во взвешенном графе, такие как метод Ловена [59], спектральная кластеризация [60] или взвешенная модель стохастических блоков [61]. Это позволяет вычислить  $\Phi$  за разумное время, получая достаточно точный результат [57].

Вычисление  $\Phi$  по определению (1) на практике весьма затруднено. Здесь возникает известная проблема, возникающая при получении статистических распределений — объём данных может стать сильно недостаточным для получения достаточно точного распределения вероятности. Для системы из  $N$  элементов существует  $2^N$  возможных состояний, и необходимо пронаблюдать каждое из них достаточное количество раз, чтобы рассчитать вероятность возникновения каждого состояния и таким образом получить распределение вероятности, близкое к истинному. На практике проблемы проявляются в возникновении нестабильности вычисляемого значения  $\Phi$ , когда небольшая разница во входных данных (например, наблюдение немного меньшего числа состояний) приводит к очень большим изменениям в  $\Phi$ . При этом нормированная эффективная информация  $EI/N_P$  для нескольких разбиений системы практически не отличается и находится около искомого минимума, а ненормированная эффективная информация  $EI$  для этих разбиений различается уже значительно. Небольшая разница в собранных состояниях системы при этом приводит к тому, что искомый минимум переходит к другому разбиению, которое даст уже сильно другое ненормированное значение  $EI$ , и, следовательно, другое значение  $\Phi$ . Такая нестабильность может серьёзно исказить результаты. Поэтому в [62] был разработан новый алгоритм для вычислений, так называемое авторегрессионное  $\Phi$ . С его помощью возможно вычисление  $\Phi$  для встречающихся на практике данных об эволюции состояний каждого элемента системы со временем. Коэффициент интегрированной информации в таком случае вычисляется следующим образом:

$$\Phi_{AR} = \frac{\min_M \frac{1}{2} \ln \frac{\det \Sigma(X)}{\det \Sigma(E^X)} - \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} \ln \frac{\det \Sigma(M_k)}{\det \Sigma(E^{M_k})}}{L(M)}. \quad (2)$$

Здесь  $\Sigma(X)$  — ковариационная матрица переменной  $X$ ,  $E^X$  — остатки регрессии, предсказывающей состояние системы в момент времени  $t$  на основе состояния в момент времени  $t + \Delta t$ ,  $E^{M_i}$  — такие же остатки, но не для целой системы, а для её частей (подвыборки)  $M_i$ , а  $L(M) = \frac{1}{2} \ln \left[ \min_k \{ (2\pi e)^{|M_k|} \det \Sigma(M_k) \} \right]$  — нормировочный коэффициент. Разделение на подвыборки можно использовать любое, предложенное в одном из приближённых методов расчёта. При вычислении  $\Phi$  подобным способом возможны проблемы в случаях, когда данные меняются слишком медленно (элементы системы находятся всегда в состоянии «0» или «1»), что приводит к невозможности вычисления регрессий в (2). В таком случае наименее слабо меняющийся элемент удаляется из системы [14]. Поскольку такие элементы кодируют мало информации, их удаление не сказывается на результате.

В литературе встречаются и другие определения, в которых применены некоторые усовершенствования, такие как учёт предсказания на каждом этапе и будущего, и предыдущего состояний системы [63], замены разности энтропий на метрику разности распределений (метрику Вассерштейна) [4], и многие другие [64–66]. Однако, на практике в рассмотренных ранее статьях для практических вычислений на данных в виде временных рядов (спайковых или ЭЭГ) они не применялись, поскольку вычисление характеристик распределений, требуемое при использовании данных методов, невозможно на практике из-за недостаточности объёмов данных. Так, например, в работах [20–22] данные нейронной активности представляли собой временные ряды большой длины, поэтому было использовано определение «авторегрессионного  $\Phi$ ». В работе [13] было использовано классическое определение, поскольку вследствие малого объёма данных в искусственно смоделированной системе вычисление энтропий было возможно. В работе [14]

авторегрессионный вариант был использован для вычисления на наборе данных большего объёма; для другого набора данных было использовано классическое определение.

Наконец, для вычисления  $\Phi$  на данных нейронной активности (спайковых или ЭЭГ) необходимо найти параметр  $\Delta t$ , который определяет, за какое количество шагов вычисляется количество сгенерированной системой информации. При расчёте  $\Phi$  в моделируемых системах, где их эволюция со временем происходит по шагам (с помощью программного кода в цикле), (как, например, в [13]), очевидно рассматривается генерация информации за один такой шаг. Для непрерывных, не обладающих дискретностью, систем применение такого подхода неправомерно. В работе [20] приводится обзор подходов к выбору  $\Delta t$  для нейронной активности головного мозга. Внутри головного мозга на разных уровнях происходит огромное число процессов со сложной временной динамикой, поэтому любая оценка  $\Delta t$  будет приблизительной, и вычисление  $\Phi$  с использованием такой оценки не будет основано на количестве информации, сгенерированной за время завершённого цикла. В мозге обнаруживаются процессы, происходящие с разной скоростью, как на уровне отдельных нейронов (потенциалы действия и выброс нейромедиатора), так и на уровне множества нейронов (суммарная активность мозга). На данный момент имеется много подтверждений того, что эти процессы происходят периодически, и могут быть описаны либо по принципу скользящего среднего, либо авторегрессионно (каждое следующее состояние выводится из предыдущего). Необходимо оценить временной масштаб подобных процессов. Можно предположить, что эти периоды определяются ритмичными колебаниями больших нейронных групп, которые видны в виде ритмов на ЭЭГ. Также периодичными, по всей видимости, являются когнитивные процессы [67–69]. По разным источникам (см., обзор в [20]), момент осознанного восприятия, например, наступает в периоде от 50 до 500 мс после предъявления информации, поэтому полезно рассматривать периоды генерации информации нейронными сообществами именно в таких пределах. В целом, все источники едины во мнении, что подобные процессы происходят на временном масштабе быстрее секунды. В итоге, для определения характерного периода, за который генерируется максимальное количество информации, необходимо перебрать все возможные количества шагов, дающие  $\Delta t$  в пределах одной секунды. Значение  $\Delta t$ , при котором достигается максимальный показатель  $\Phi$ , и используется в дальнейших вычислениях. Подобный подход использовался в [14].

### Заключение

Были рассмотрены основы теории интегрированной информации и её возможное применение в нейробиологии для оценки процесса приобретения нового опыта. Указаны способы, позволяющие на практике вычислить значение  $\Phi$  для данных нейронной активности. На настоящее время подобный подход применяется ограниченно в силу значительной вычислительной сложности для больших объёмов спайковых данных. Однако существующие исследования показывают преимущества использования ИТ и её способности оценивать внутренние состояния нейронных сетей в головном мозге.

### Список литературы

1. *Tononi G.* An information integration theory of consciousness // BMC Neuroscience. 2004. Vol. 5. P. 42. DOI: 10.1186/1471-2202-5-42.
2. *Tononi G.* Consciousness as integrated information: a provisional manifesto // The Biological Bulletin. 2008. Vol. 215, no. 3. P. 216–242. DOI: 10.2307/25470707.
3. *Balduzzi D., Tononi G.* Integrated information in discrete dynamical systems: motivation and theoretical framework // PLoS Comput. Biol. 2008. Vol. 4, no. 6. P. e1000091. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1000091.

4. *Oizumi M., Albantakis L., Tononi G.* From the phenomenology to the mechanisms of consciousness: Integrated information theory 3.0 // *PLoS Comput. Biol.* 2014. Vol. 10, no. 5. P. e1003588. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1003588.
5. *Tononi G., Koch C.* Consciousness: here, there and everywhere? // *Phil. Trans. R. Soc. B.* 2015. Vol. 370, no. 1668. P. 20140167. DOI: 10.1098/rstb.2014.0167.
6. *Massimini M., Ferrarelli F., Huber R., Esser S.K., Singh H., Tononi G.* Breakdown of cortical effective connectivity during sleep // *Science.* 2005. Vol. 309, no. 5744. P. 2228–2232. DOI: 10.1126/science.1117256.
7. *Alkire M.T., Hudetz A.G., Tononi G.* Consciousness and anesthesia // *Science.* 2008. Vol. 322, no. 5903. P. 876–880. DOI: 10.1126/science.1149213.
8. *Gosseries O., Di H., Laureys S., Boly M.* Measuring consciousness in severely damaged brains // *Annual Review of Neuroscience.* 2014. Vol. 37. P. 457–478. DOI: 10.1146/annurev-neuro-062012-170339.
9. *Casali A.G., Olivia Gosseries O., Rosanova M., Boly M., Sarasso S., Casali K.R., Casarotto S., Bruno M.-A., Laureys S., Tononi G., Massimini M.* A theoretically based index of consciousness independent of sensory processing and behavior // *Science Translational Medicine.* 2013. Vol. 5, no. 198. P. 198ra105. DOI: 10.1126/scitranslmed.3006294.
10. *King J.R., Sitt J.D., Faugeras F., Rohaut B., Karoui I.E., Cohen L., Naccache L., Dehaene S.* Information sharing in the brain indexes consciousness in noncommunicative patients // *Current Biology.* 2013. Vol. 23, no. 19. P. 1914–1919. DOI: 10.1016/j.cub.2013.07.075.
11. *Searle J.R.* Can information theory explain consciousness? [Electronic resource] // *The New York Review of Books.* 10 January 2013. Available from: <https://www.nybooks.com/articles/2013/01/10/can-information-theory-explain-consciousness/>.
12. *Barrett A.B., Mediano P.A.M.* The Phi measure of integrated information is not well-defined for general physical systems // *Journal of Consciousness Studies.* 2019. Vol. 26, no. 1–2. P. 11–20.
13. *Edlund J.A., Chaumont N., Hintze A., Koch C., Tononi G., Adami C.* Integrated information increases with fitness in the evolution of animats // *PLoS Comput. Biol.* 2011. Vol. 7, no. 10. P. e1002236. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002236.
14. *Engel D., Malone T.W.* Integrated information as a metric for group interaction // *PLoS ONE.* 2018. Vol. 13, no. 10. P. e0205335. DOI: 10.1371/journal.pone.0205335.
15. *Albantakis L., Tononi G.* The intrinsic cause-effect power of discrete dynamical systems—from elementary cellular automata to adapting animats // *Entropy.* 2015. Vol. 17, no. 8. P. 5472–5502. DOI: 10.3390/e17085472.
16. *Niizato T., Sakamoto K., Mototake Y.-I., Murakami H., Tomaru T., Hoshika T., Fukushima T.* Finding continuity and discontinuity in fish schools via integrated information theory // *PLoS ONE.* 2020. Vol. 15, no. 2. P. e0229573. DOI: 10.1371/journal.pone.0229573.
17. *Fujii K., Kanazawa H., Kuniyoshi Y.* Spike timing dependent plasticity enhances integrated information at the EEG level: A large-scale brain simulation experiment // In: *2019 Joint IEEE 9th International Conference on Development and Learning and Epigenetic Robotics (ICDL-EpiRob).* 19-22 August 2019, Oslo, Norway. New York: IEEE, 2019. P. 137–142. DOI: 10.1109/DEVLRN.2019.8850724.
18. *Niessing J., Friedrich R.W.* Olfactory pattern classification by discrete neuronal network states // *Nature.* 2010. Vol. 465, no. 7294. P. 47–52. DOI: 10.1038/nature08961.
19. *Mazzucato L., Fontanini A., La Camera G.* Dynamics of multistable states during ongoing and evoked cortical activity // *Journal of Neuroscience.* 2015. Vol. 35, no. 21. P. 8214–8231. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.4819-14.2015.

20. *Isler J. R., Stark R. I., Grieve P. G., Welch M. G., Myers M. M.* Integrated information in the EEG of preterm infants increases with family nurture intervention, age, and conscious state // *PLoS ONE*. 2018. Vol. 13, no. 10. P. e0206237. DOI: 10.1371/journal.pone.0206237.
21. *Nazhestkin I., Svarnik O.* Different approximation methods for calculation of integrated information coefficient in the brain during instrumental learning // *Brain Sciences*. 2022. Vol. 12, no. 5. P. 596. DOI: 10.3390/brainsci12050596.
22. *Nazhestkin I. A., Svarnik O. E.* Integrated information coefficient estimated from neuronal activity in hippocampus-amygdala complex of rats as a measure of learning success // *Journal of Integrative Neuroscience*. 2022. Vol. 21, no. 5. P. 128. DOI: 10.31083/j.jin2105128.
23. *Sporns O.* Network attributes for segregation and integration in the human brain // *Current Opinion in Neurobiology*. 2013. Vol. 23, no. 2. P. 162–171. DOI: 10.1016/j.conb.2012.11.015.
24. *Brodmann K.* Vergleichende Lokalisationslehre der Grosshirnrinde in ihren Prinzipien dargestellt auf Grund des Zellenbaues. Leipzig: Barth, 1909. 324 s.
25. *Vogt C., Vogt O.* Allgemeine ergebnisse unserer hirnforschung. Bd. 25. JA Barth, 1919. 190 s.
26. *Sporns O., Chialvo D. R., Kaiser M., Hilgetag C. C.* Organization, development and function of complex brain networks // *Trends in Cognitive Sciences*. 2004. Vol. 8, no. 9. P. 418–425. DOI: 10.1016/j.tics.2004.07.008.
27. *Hilgetag C.-C., Burns G. A. P. S., O'Neill M. A., Scannell J. W., Young M. P.* Anatomical connectivity defines the organization of clusters of cortical areas in the macaque monkey and the cat // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*. 2000. Vol. 355, no. 1393. P. 91–110. DOI: 10.1098/rstb.2000.0551.
28. *Sporns O., Zwi J. D.* The small world of the cerebral cortex // *Neuroinformatics*. 2004. Vol. 2, no. 2. P. 145–162. DOI: 10.1385/NI:2:2:145.
29. *Barabási A.-L., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. Vol. 286, no. 5439. P. 509–512. DOI: 10.1126/science.286.5439.509.
30. *Bassett D. S., Bullmore E. D.* Small-world brain networks // *The Neuroscientist*. 2006. Vol. 12, no. 6. P. 512–523. DOI: 10.1177/1073858406293182.
31. *Muldoon S. F., Bridgeford E. W., Bassett D. S.* Small-world propensity and weighted brain networks // *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6, no. 1. P. 22057. DOI: 10.1038/srep22057.
32. *Bassett D. S., Bullmore E. T.* Small-world brain networks revisited // *The Neuroscientist*. 2017. Vol. 23, no. 5. P. 499–516. DOI: 10.1177/1073858416667720.
33. *Liao X., Vasilakos A. V., He Y.* Small-world human brain networks: Perspectives and challenges // *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*. 2017. Vol. 77. P. 286–300. DOI: 10.1016/j.neubiorev.2017.03.018.
34. *Milgram S.* The small-world problem // *Psychology Today*. 1967. Vol. 1, no. 1. P. 61–67.
35. *Watts D. J., Strogatz S. H.* Collective dynamics of ‘small-world’ networks // *Nature*. 1998. Vol. 393, no. 6684. P. 440–442. DOI: 10.1038/30918.
36. *Latora V., Marchiori M.* Efficient behavior of small-world networks // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, no. 19. P. 198701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.198701.
37. *Latora V., Marchiori M.* Economic small-world behavior in weighted networks // *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*. 2003. Vol. 32, no. 2. P. 249–263. DOI: 10.1140/epjb/e2003-00095-5.
38. *Simard D., Nadeau L., Kröger H.* Fastest learning in small-world neural networks // *Physics Letters A*. 2005. Vol. 336, no. 1. P. 8–15. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.12.078.
39. *Lynn C. W., Bassett D. S.* The physics of brain network structure, function and control // *Nature Reviews Physics*. 2019. Vol. 1, no. 5. P. 318–332. DOI: 10.1038/s42254-019-0040-8.
40. *Анохин К. В.* Когнитом: в поисках фундаментальной нейронаучной теории сознания // *Журнал высшей нервной деятельности им. И. П. Павлова*. 2021. Т. 71, № 1. С. 39–71. DOI: 10.31857/S0044467721010032.

41. *Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, no. 2. P. 980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.
42. *Aertsen A. M., Gerstein G. L., Habib M. K., Palm G.* Dynamics of neuronal firing correlation: modulation of “effective connectivity” // *Journal of Neurophysiology.* 1989. Vol. 61, no. 5. P. 900–917. DOI: 10.1152/jn.1989.61.5.900.
43. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D. L., Zhou C. S.* The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports.* 2002. Vol. 366, no. 1–2. P. 1–101. DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00137-0.
44. *Rosenblum M., Pikovsky A.* Synchronization: From pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators // *Contemporary Physics.* 2003. Vol. 44, no. 5. P. 401–416. DOI: 10.1080/00107510310001603129.
45. *Malliaros F. D., Vazirgiannis M.* Clustering and community detection in directed networks: A survey // *Physics Reports.* 2013. Vol. 533, no. 4. P. 95–142. DOI: 10.1016/j.physrep.2013.08.002.
46. *Garcia J. O., Ashourvan A., Muldoon S., Vettel J. M., Bassett D. S.* Applications of community detection techniques to brain graphs: Algorithmic considerations and implications for neural function // *Proceedings of the IEEE.* 2018. Vol. 106, no. 5. P. 846–867. DOI: 10.1109/JPROC.2017.2786710.
47. *van den Heuvel M. P., Hulshoff Pol H. E.* Exploring the brain network: A review on resting-state fMRI functional connectivity // *European Neuropsychopharmacology.* 2010. Vol. 20, no. 8. P. 519–534. DOI: 10.1016/j.euroneuro.2010.03.008.
48. *Liao W., Ding J., Marinazzo D., Xu Q., Wang Z., Yuan C., Zhang Z., Lu G., Chen H.* Small-world directed networks in the human brain: Multivariate Granger causality analysis of resting-state fMRI // *NeuroImage.* 2011. Vol. 54, no. 4. P. 2683–2694. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2010.11.007.
49. *Stam C. J., van Straaten E. C. W.* The organization of physiological brain networks // *Clinical Neurophysiology.* 2012. Vol. 123, no. 6. P. 1067–1087. DOI: 10.1016/j.clinph.2012.01.011.
50. *Kahnt T., Chang L. J., Park S. Q., Heinzle J., Haynes J.-D.* Connectivity-based parcellation of the human orbitofrontal cortex // *Journal of Neuroscience.* 2012. Vol. 32, no. 18. P. 6240–6250. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0257-12.2012.
51. *Yu C., Zhou Y., Liu Y., Jiang T., Dong H., Zhang Y., Walter M.* Functional segregation of the human cingulate cortex is confirmed by functional connectivity based neuroanatomical parcellation // *NeuroImage.* 2011. Vol. 54, no. 4. P. 2571–2581. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2010.11.018.
52. *Kashtan N., Alon U.* Spontaneous evolution of modularity and network motifs // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 2005. Vol. 102, no. 39. P. 13773–13778. DOI: 10.1073/pnas.0503610102.
53. *Lipson H., Pollack J. B., Suh N. P.* On the origin of modular variation // *Evolution.* 2002. Vol. 56, no. 8. P. 1549–1556. DOI: 10.1111/j.0014-3820.2002.tb01466.x.
54. *Rota G.-C.* The number of partitions of a set // *The American Mathematical Monthly.* 1964. Vol. 71, no. 5. P. 498–504. DOI: 10.1080/00029890.1964.11992270.
55. *Berend D., Tassa T.* Improved bounds on Bell numbers and on moments of sums of random variables // *Probability and Mathematical Statistics.* 2010. Vol. 30, no. 2. P. 185–205.
56. *Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O.* *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.* Reading, MA, USA: Addison-Wesley, 1994. 657 p.
57. *Toker D., Sommer F. T.* Information integration in large brain networks // *PLoS Comput. Biol.* 2019. Vol. 15, no. 2. P. e1006807. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1006807.
58. *Mediano P. A. M., Seth A. K., Barrett A. B.* Measuring integrated information: Comparison of candidate measures in theory and simulation // *Entropy.* 2019. Vol. 21, no. 1. P. 17. DOI: 10.3390/e21010017.
59. *Blondel V. D., Guillaume J.-L., Lambiotte R., Lefebvre E.* Fast unfolding of communities in large networks // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.* 2008. Vol. 2008, no. 10. P. P10008. DOI: 10.1088/1742-5468/2008/10/P10008.

60. Ng A., Jordan M., Weiss Y. On Spectral Clustering: Analysis and an algorithm // In: Advances in Neural Information Processing Systems 14. NIPS, 2001.
61. Faskowitz J., Yan X., Zuo X.-N., Sporns O. Weighted stochastic block models of the human connectome across the life span // Scientific Reports. 2018. Vol. 8, no. 1. P. 12997. DOI: 10.1038/s41598-018-31202-1.
62. Barrett A. B., Seth A. K. Practical measures of integrated information for time-series data // PLoS Comput. Biol. 2011. Vol. 7, no. 1. P. e1001052. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1001052.
63. Tononi G. Integrated information theory of consciousness: an updated account // Archives Italiennes de Biologie. 2012. Vol. 150, no. 2–3. P. 56–90. DOI: 10.4449/aib.v149i5.1388.
64. Griffith V. A principled infotheoretic  $\phi$ -like measure // arXiv:1401.0978. arXiv Preprint, 2014. 18 p. DOI: 10.48550/arXiv.1401.0978.
65. Oizumi M., Tsuchiya N., Amari S. Unified framework for information integration based on information geometry // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 2016. Vol. 113, no. 51. P. 14817–14822. DOI: 10.1073/pnas.1603583113.
66. Oizumi M., Amari S., Yanagawa T., Fujii N., Tsuchiya N. Measuring integrated information from the decoding perspective // PLoS Comput. Biol. 2016. Vol. 12, no. 1. P. e1004654. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1004654.
67. VanRullen R. Perceptual cycles // Trends in Cognitive Sciences. 2016. Vol. 20, no. 10. P. 723–735. DOI: 10.1016/j.tics.2016.07.006.
68. Fiebelkorn I. C., Pinsk M. A., Kastner S. A dynamic interplay within the frontoparietal network underlies rhythmic spatial attention // Neuron. 2018. Vol. 99, no. 4. P. 842–853. DOI: 10.1016/j.neuron.2018.07.038.
69. Helfrich R. F., Fiebelkorn I. C., Szczepanski S. M., Lin J. J., Parvizi J., Knight R. T., Kastner S. Neural mechanisms of sustained attention are rhythmic // Neuron. 2018. Vol. 99, no. 4. P. 854–865. DOI: 10.1016/j.neuron.2018.07.032.

## References

1. Tononi G. An information integration theory of consciousness. BMC Neuroscience. 2004;5:42. DOI: 10.1186/1471-2202-5-42.
2. Tononi G. Consciousness as integrated information: a provisional manifesto. The Biological Bulletin. 2008;215(3):216–242. DOI: 10.2307/25470707.
3. Balduzzi D, Tononi G. Integrated information in discrete dynamical systems: motivation and theoretical framework. PLoS Comput. Biol. 2008;4(6):e1000091. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1000091.
4. Oizumi M, Albantakis L, Tononi G. From the phenomenology to the mechanisms of consciousness: Integrated information theory 3.0. PLoS Comput. Biol. 2014;10(5):e1003588. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1003588.
5. Tononi G, Koch C. Consciousness: here, there and everywhere? Phil. Trans. R. Soc. B. 2015; 370(1668):20140167. DOI: 10.1098/rstb.2014.0167.
6. Massimini M, Ferrarelli F, Huber R, Esser SK, Singh H, Tononi G. Breakdown of cortical effective connectivity during sleep. Science. 2005;309(5744):2228–2232. DOI: 10.1126/science.1117256.
7. Alkire MT, Hudetz AG, Tononi G. Consciousness and anesthesia. Science. 2008;322(5903):876–880. DOI: 10.1126/science.1149213.
8. Gosseries O, Di H, Laureys S, Boly M. Measuring consciousness in severely damaged brains. Annual Review of Neuroscience. 2014;37:457–478. DOI: 10.1146/annurev-neuro-062012-170339.
9. Casali AG, Olivia Gosseries O, Rosanova M, Boly M, Sarasso S, Casali KR, Casarotto S, Bruno MA, Laureys S, Tononi G, Massimini M. A theoretically based index of consciousness

- independent of sensory processing and behavior. *Science Translational Medicine*. 2013;5(198):198ra105. DOI: 10.1126/scitranslmed.3006294.
10. King JR, Sitt JD, Faugeras F, Rohaut B, Karoui IE, Cohen L, Naccache L, Dehaene S. Information sharing in the brain indexes consciousness in noncommunicative patients. *Current Biology*. 2013;23(19):1914–1919. DOI: 10.1016/j.cub.2013.07.075.
  11. Searle JR. Can information theory explain consciousness? [Electronic resource] *The New York Review of Books*. 10 January 2013. Available from: <https://www.nybooks.com/articles/2013/01/10/can-information-theory-explain-consciousness/>.
  12. Barrett AB, Mediano PAM. The Phi measure of integrated information is not well-defined for general physical systems. *Journal of Consciousness Studies*. 2019;26(1–2):11–20.
  13. Edlund JA, Chaumont N, Hintze A, Koch C, Tononi G, Adami C. Integrated information increases with fitness in the evolution of animats. *PLoS Comput. Biol.* 2011;7(10):e1002236. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002236.
  14. Engel D, Malone TW. Integrated information as a metric for group interaction. *PLoS ONE*. 2018;13(10):e0205335. DOI: 10.1371/journal.pone.0205335.
  15. Albantakis L, Tononi G. The intrinsic cause-effect power of discrete dynamical systems—from elementary cellular automata to adapting animats. *Entropy*. 2015;17(8):5472–5502. DOI: 10.3390/e17085472.
  16. Niizato T, Sakamoto K, Mototake YI, Murakami H, Tomaru T, Hoshika T, Fukushima T. Finding continuity and discontinuity in fish schools via integrated information theory. *PLoS ONE*. 2020;15(2):e0229573. DOI: 10.1371/journal.pone.0229573.
  17. Fujii K, Kanazawa H, Kuniyoshi Y. Spike timing dependent plasticity enhances integrated information at the EEG level: A large-scale brain simulation experiment. In: 2019 Joint IEEE 9th International Conference on Development and Learning and Epigenetic Robotics (ICDL-EpiRob). 19-22 August 2019, Oslo, Norway. New York: IEEE; 2019. P. 137–142. DOI: 10.1109/DEVLRN.2019.8850724.
  18. Niessing J, Friedrich RW. Olfactory pattern classification by discrete neuronal network states. *Nature*. 2010;465(7294):47–52. DOI: 10.1038/nature08961.
  19. Mazzucato L, Fontanini A, La Camera G. Dynamics of multistable states during ongoing and evoked cortical activity. *Journal of Neuroscience*. 2015;35(21):8214–8231. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.4819-14.2015.
  20. Isler JR, Stark RI, Grieve PG, Welch MG, Myers MM. Integrated information in the EEG of preterm infants increases with family nurture intervention, age, and conscious state. *PLoS ONE*. 2018;13(10):e0206237. DOI: 10.1371/journal.pone.0206237.
  21. Nazhestkin I, Svarnik O. Different approximation methods for calculation of integrated information coefficient in the brain during instrumental learning. *Brain Sciences*. 2022;12(5):596. DOI: 10.3390/brainsci12050596.
  22. Nazhestkin IA, Svarnik OE. Integrated information coefficient estimated from neuronal activity in hippocampus-amygdala complex of rats as a measure of learning success. *Journal of Integrative Neuroscience*. 2022;21(5):128. DOI: 10.31083/j.jin2105128.
  23. Sporns O. Network attributes for segregation and integration in the human brain. *Current Opinion in Neurobiology*. 2013;23(2):162–171. DOI: 10.1016/j.conb.2012.11.015.
  24. Brodmann K. Vergleichende Lokalisationslehre der Grosshirnrinde in ihren Prinzipien dargestellt auf Grund des Zellenbaues. Leipzig: Barth; 1909. 324 s. (in German).
  25. Vogt C, Vogt O. Allgemeine ergebnisse unserer hirnforschung. Bd. 25. JA Barth; 1919. 190 s. (in German).
  26. Sporns O, Chialvo DR, Kaiser M, Hilgetag CC. Organization, development and function of



- complex brain networks. *Trends in Cognitive Sciences*. 2004;8(9):418–425. DOI: 10.1016/j.tics.2004.07.008.
27. Hilgetag CC, Burns GAPS, O'Neill MA, Scannell JW, Young MP. Anatomical connectivity defines the organization of clusters of cortical areas in the macaque monkey and the cat. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*. 2000;355(1393):91–110. DOI: 10.1098/rstb.2000.0551.
  28. Sporns O, Zwi JD. The small world of the cerebral cortex. *Neuroinformatics*. 2004;2(2):145–162. DOI: 10.1385/NI:2:2:145.
  29. Barabási AL, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*. 1999;286(5439):509–512. DOI: 10.1126/science.286.5439.509.
  30. Bassett DS, Bullmore ED. Small-world brain networks. *The Neuroscientist*. 2006;12(6):512–523. DOI: 10.1177/1073858406293182.
  31. Muldoon SF, Bridgeford EW, Bassett DS. Small-world propensity and weighted brain networks. *Scientific Reports*. 2016;6(1):22057. DOI: 10.1038/srep22057.
  32. Bassett DS, Bullmore ET. Small-world brain networks revisited. *The Neuroscientist*. 2017;23(5):499–516. DOI: 10.1177/1073858416667720.
  33. Liao X, Vasilakos AV, He Y. Small-world human brain networks: Perspectives and challenges. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*. 2017;77:286–300. DOI: 10.1016/j.neubiorev.2017.03.018.
  34. Milgram S. The small-world problem. *Psychology Today*. 1967;1(1):61–67.
  35. Watts DJ, Strogatz SH. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*. 1998;393(6684):440–442. DOI: 10.1038/30918.
  36. Latora V, Marchiori M. Efficient behavior of small-world networks. *Phys. Rev. Lett*. 2001;87(19):198701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.198701.
  37. Latora V, Marchiori M. Economic small-world behavior in weighted networks. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*. 2003;32(2):249–263. DOI: 10.1140/epjb/e2003-00095-5.
  38. Simard D, Nadeau L, Kröger H. Fastest learning in small-world neural networks. *Physics Letters A*. 2005;336(1):8–15. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.12.078.
  39. Lynn CW, Bassett DS. The physics of brain network structure, function and control. *Nature Reviews Physics*. 2019;1(5):318–332. DOI: 10.1038/s42254-019-0040-8.
  40. Anokhin KV. The cognitome: Seeking the fundamental neuroscience of a theory of consciousness. *Neuroscience and Behavioral Physiology*. 2021;51(7):915–937. DOI: 10.1007/s11055-021-01149-4.
  41. Rulkov NF, Sushchik MM, Tsimring LS, Abarbanel HDI. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*. 1995;51(2):980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.
  42. Aertsen AM, Gerstein GL, Habib MK, Palm G. Dynamics of neuronal firing correlation: modulation of “effective connectivity”. *Journal of Neurophysiology*. 1989;61(5):900–917. DOI: 10.1152/jn.1989.61.5.900.
  43. Boccaletti S, Kurths J, Osipov G, Valladares DL, Zhou CS. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*. 2002;366(1–2):1–101. DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00137-0.
  44. Rosenblum M, Pikovsky A. Synchronization: From pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators. *Contemporary Physics*. 2003;44(5):401–416. DOI: 10.1080/00107510310001603129.
  45. Malliaros FD, Vazirgiannis M. Clustering and community detection in directed networks: A survey. *Physics Reports*. 2013;533(4):95–142. DOI: 10.1016/j.physrep.2013.08.002.
  46. Garcia JO, Ashourvan A, Muldoon S, Vettel JM, Bassett DS. Applications of community detection techniques to brain graphs: Algorithmic considerations and implications for neural function. *Proceedings of the IEEE*. 2018;106(5):846–867. DOI: 10.1109/JPROC.2017.2786710.
  47. van den Heuvel MP, Hulshoff Pol HE. Exploring the brain network: A review on resting-

- state fMRI functional connectivity. *European Neuropsychopharmacology*. 2010;20(8):519–534. DOI: 10.1016/j.euroneuro.2010.03.008.
48. Liao W, Ding J, Marinazzo D, Xu Q, Wang Z, Yuan C, Zhang Z, Lu G, Chen H. Small-world directed networks in the human brain: Multivariate Granger causality analysis of resting-state fMRI. *NeuroImage*. 2011;54(4):2683–2694. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2010.11.007.
  49. Stam CJ, van Straaten ECW. The organization of physiological brain networks. *Clinical Neurophysiology*. 2012;123(6):1067–1087. DOI: 10.1016/j.clinph.2012.01.011.
  50. Kahnt T, Chang LJ, Park SQ, Heinzle J, Haynes JD. Connectivity-based parcellation of the human orbitofrontal cortex. *Journal of Neuroscience*. 2012;32(18):6240–6250. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0257-12.2012.
  51. Yu C, Zhou Y, Liu Y, Jiang T, Dong H, Zhang Y, Walter M. Functional segregation of the human cingulate cortex is confirmed by functional connectivity based neuroanatomical parcellation. *NeuroImage*. 2011;54(4):2571–2581. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2010.11.018.
  52. Kashtan N, Alon U. Spontaneous evolution of modularity and network motifs. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 2005;102(39):13773–13778. DOI: 10.1073/pnas.0503610102.
  53. Lipson H, Pollack JB, Suh NP. On the origin of modular variation. *Evolution*. 2002;56(8):1549–1556. DOI: 10.1111/j.0014-3820.2002.tb01466.x.
  54. Rota GC. The number of partitions of a set. *The American Mathematical Monthly*. 1964;71(5):498–504. DOI: 10.1080/00029890.1964.11992270.
  55. Berend D, Tassa T. Improved bounds on Bell numbers and on moments of sums of random variables. *Probability and Mathematical Statistics*. 2010;30(2):185–205.
  56. Graham RL, Knuth DE, Patashnik O. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Reading, MA, USA: Addison–Wesley; 1994. 657 p.
  57. Toker D, Sommer FT. Information integration in large brain networks. *PLoS Comput. Biol.* 2019;15(2):e1006807. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1006807.
  58. Mediano PAM, Seth AK, Barrett AB. Measuring integrated information: Comparison of candidate measures in theory and simulation. *Entropy*. 2019;21(1):17. DOI: 10.3390/e21010017.
  59. Blondel VD, Guillaume JL, Lambiotte R, Lefebvre E. Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2008;2008(10):P10008. DOI: 10.1088/1742-5468/2008/10/P10008.
  60. Ng A, Jordan M, Weiss Y. On Spectral Clustering: Analysis and an algorithm. In: *Advances in Neural Information Processing Systems 14*. NIPS; 2001.
  61. Faskowitz J, Yan X, Zuo XN, Sporns O. Weighted stochastic block models of the human connectome across the life span. *Scientific Reports*. 2018;8(1):12997. DOI: 10.1038/s41598-018-31202-1.
  62. Barrett AB, Seth AK. Practical measures of integrated information for time-series data. *PLoS Comput. Biol.* 2011;7(1):e1001052. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1001052.
  63. Tononi G. Integrated information theory of consciousness: an updated account. *Archives Italiennes de Biologie*. 2012;150(2–3):56–90. DOI: 10.4449/aib.v149i5.1388.
  64. Griffith V. A principled infotheoretic  $\phi$ -like measure. arXiv:1401.0978. arXiv Preprint; 2014. 18 p. DOI: 10.48550/arXiv.1401.0978.
  65. Oizumi M, Tsuchiya N, Amari S. Unified framework for information integration based on information geometry. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 2016;113(51):14817–14822. DOI: 10.1073/pnas.1603583113.
  66. Oizumi M, Amari S, Yanagawa T, Fujii N, Tsuchiya N. Measuring integrated information from the decoding perspective. *PLoS Comput. Biol.* 2016;12(1):e1004654. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1004654.

67. VanRullen R. Perceptual cycles. Trends in Cognitive Sciences. 2016;20(10):723–735. DOI: 10.1016/j.tics.2016.07.006.
68. Fiebelkorn IC, Pinsk MA, Kastner S. A dynamic interplay within the frontoparietal network underlies rhythmic spatial attention. Neuron. 2018;99(4):842–853. DOI: 10.1016/j.neuron.2018.07.038.
69. Helfrich RF, Fiebelkorn IC, Szczepanski SM, Lin JJ, Parvizi J, Knight RT, Kastner S. Neural mechanisms of sustained attention are rhythmic. Neuron. 2018;99(4):854–865. DOI: 10.1016/j.neuron.2018.07.032.



*Нажесткин Иван Андреевич* — окончил Московский физико-технический институт (2018) и аспирантуру МФТИ (2022). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Биофизика» (2022, МФТИ). В настоящее время работает в Российском квантовом центре младшим научным сотрудником. Область научных интересов: исследование закономерностей нейронной активности головного мозга при приобретении навыков, разработка нейроморфных устройств на основе сверхпроводников.

Россия, 141701 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
 Московский физико-технический институт  
 E-mail: nazhestkin@phystech.edu  
 ORCID: 0000-0003-2482-7742



*Сварник Ольга Евгеньевна* — окончила Южно-Орегонский университет (США, 1996) со степенью бакалавра психологии, Республиканский центр гуманитарного образования (1998) и аспирантуру Института психологии РАН (2001). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата психологических наук по специальности «Психофизиология» (2003). Работает в лаборатории психофизиологии им. В. Б. Швыркова Института психологии РАН в должности ведущего научного сотрудника. Область научных интересов: активность мозга и отдельных нейронов в процессе приобретения и хранения навыков/знаний.

Россия, 141701 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
 Московский физико-технический институт  
 Россия, 129366 Москва, ул. Ярославская д. 13, к. 1  
 Институт психологии РАН  
 E-mail: olgasvarnik@gmail.com  
 ORCID: 0000-0002-0439-4532  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 92096



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(2)

Обзорная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003031  
EDN: ETJCBV

### Методология дизайна нейрофизиологических экспериментов с предъявлением визуальных стимулов для оценки уровня владения иностранным языком

А. Н. Писарчик<sup>1,2</sup>, В. С. Хорев<sup>1</sup>, А. А. Бадарин<sup>1</sup>✉,  
В. М. Антипов<sup>1</sup>, А. О. Бударина<sup>1</sup>, А. Е. Храмов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, Россия

<sup>2</sup>Мадридский политехнический университет, Испания

E-mail: alexander.pisarchik@ctb.upm.es, khorevvs@gmail.com, ✉Badarin.a.a@mail.ru,  
vantipovm@gmail.com, abudarina@kantiana.ru, aekhramov@kantiana.ru

Поступила в редакцию 5.12.2022, принята к публикации 12.12.2022,  
опубликована онлайн 20.03.2023, опубликована 31.03.2023

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — провести сравнение различных экспериментальных парадигм и определить параметры, пригодные для проведения нейрофизиологического эксперимента с предъявлением визуальных стимулов для оценки уровня владения иностранным языком и обеспечивающие проведение дальнейшего анализа временных рядов сигналов электрической активности нейронов головного мозга для выявления специфических биомаркеров. **Методы.** В данной работе исследуются возможности и ограничения различных экспериментальных исследований, использующих данную парадигму — метаанализ. Для определения значимости результатов применялись статистические подходы. **Результаты.** Проведён обзор современного состояния исследований в области экспериментальных работ, связанных с предъявлением визуальных стимулов и получением вербальных ответов. Были проведены обобщения и аналитические оценки экспериментальных параметров, использованных в исследованиях для формирования рекомендаций к будущим экспериментальным исследованиям. **Заключение.** В данной области прикладных исследований был разработан дизайн эксперимента, а также созданы алгоритмы, позволяющие работать с несколькими источниками данных. Кроме того, проведены экспериментальные исследования с использованием энцефалографии, которые позволили выбрать оптимальную временную структуру.

**Ключевые слова:** дизайн эксперимента, метаанализ, нейролингвистика, нейронаука, нелинейные системы, нейрообразование.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке программы Приоритет-2030 (Головоломка 2022), грант № 260-Л-22.

**Для цитирования:** Писарчик А. Н., Хорев В. С., Бадарин А. А., Антипов В. М., Бударина А. О., Храмов А. Е. Методология дизайна нейрофизиологических экспериментов с предъявлением визуальных стимулов для оценки уровня владения иностранным языком // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 2. С. 202–224. DOI: 10.18500/0869-6632-003031. EDN: ETJCBV

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Methodology of the neurophysiological experiments with visual stimuli to assess foreign language proficiency

A. N. Pisarchik<sup>1,2</sup>, V. S. Khorev<sup>1</sup>, A. A. Badarin<sup>1</sup>✉,  
V. M. Antipov<sup>1</sup>, A. O. Budarina<sup>1</sup>, A. E. Hramov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

<sup>2</sup>Polytechnic University of Madrid, Spain

E-mail: alexander.pisarchik@ctb.upm.es, khorevvs@gmail.com, ✉Badarin.a.a@mail.ru,  
vantipovm@gmail.com, abudarina@kantiana.ru, aekhramov@kantiana.ru

Received 5.12.2022, accepted 12.12.2022, available online 20.03.2023, published 31.03.2023

**Abstract.** *Aim* of this study is to compare different experimental paradigms and to determine parameters suitable for conducting a neurophysiological experiment with visual stimuli to assess foreign language proficiency and providing further time series analysis of electrical brain activity to reveal specific biomarkers. *Methods.* This paper explores the possibilities and limitations of various experimental studies using the metaanalysis paradigm. Statistical approaches are used to determine significance of the results. *Results.* We review the current state of research in the field of experimental works related to visual stimulus presentation and verbal performance acquisition. Generalizations and analytical estimates of the experimental parameters used in the studies are carried out to provide recommendations for future experimental research. *Conclusion.* In this area of applied research, we have developed experimental design and algorithms for working with multiple data sources. In addition, experimental encephalographic studies have been carried out, that allowed the optimal temporal structure selection.

**Keywords:** experimental design, metaanalysis, neuroscience, neurolinguistics, nonlinear systems.

**Acknowledgements.** This work was supported by Priority-2030 grant No. 260-L-22.

**For citation:** Pisarchik AN, Khorev VS, Badarin AA, Antipov VM, Budarina AO, Hramov AE. Methodology of the neurophysiological experiments with visual stimuli to assess foreign language proficiency. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(2):202–224. DOI: 10.18500/0869-6632-003031

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Изучение принципов функционирования головного мозга для решения задач, связанных с когнитивной и эмоциональной деятельностью человека во время образовательного процесса, так называемая нейропедагогика, является весьма важным направлением современных исследований на стыке нейронауки, педагогики и информационных технологий [1–3]. Особый интерес вызывает применение подходов нейронауки в рамках развития лингвистических способностей, что имеет важное значение для повышения уровня усвоения иностранных языков студентами вузов. Исследования в этой области на основе нейрофизиологических сигналов головного мозга направлены на разработку методов анализа состояния человека и оптимизации процесса обучения иностранным языкам [4–12].

Эффективные методики усвоения иностранных языков позволяют систематизировать накопленные знания, необходимые для выполнения различных трудовых функций в рамках практической или исследовательской деятельности. Умения и навыки, например, такие: (1) грамотно систематизировать теоретические знания по методике обучения иностранному языку, (2) научиться самостоятельно ставить и решать профессиональные задачи, (3) определять пути и методы их решения, (4) быть готовым использовать приобретенные систематизированные теоретические

и практические знания для решения профессиональных задач, зависят от эффективности выбранной методики обучения, что подчеркивает актуальность данного исследования [11].

Востребованность таких исследований обусловлена необходимостью создания эффективных методов и устройств для практического внедрения в образовательный процесс, направленных на более качественное и быстрое усвоение иностранных языков, а также на объективную оценку уровня знаний тестируемого субъекта с учетом его нейрофизиологических особенностей [13–17]. Публикации в научных журналах, посвященных экспериментальному исследованию различных аспектов изучения иностранного языка, появились достаточно давно. С тех пор, благодаря усилиям ученых в области когнитивной науки, психологии и нейронауки, сложилась богатая теоретическая база, на основе которой исследователи пытаются понять природу высшей нервной деятельности при общении на неродном языке. Одним из значимых фактов, открытых в результате недавних исследований, является различное время реакции при переключении с родного языка на неродной и наоборот, что свидетельствует о наличии в мозге устойчивой нейронной сети, отвечающей за обработку и формирование речи на неродном языке. Экспериментальная работа по поиску и стимуляции этой сети представляет интерес для нейропедагогики с целью улучшения усвоения иностранного языка с использованием различных методов нейровизуализации [18–20].

Целью настоящего исследования является определение параметров, пригодных для проведения нейрофизиологического эксперимента с предъявлением зрительных стимулов с целью оценки уровня владения иностранным языком, что позволит проводить дальнейший анализ временных рядов нейрофизиологической природы для выявления специфических биомаркеров и проведения экспериментов с использованием выбранных параметров.

## 1. Методика

**1.1. Критерии отбора.** Для обзора литературы был проведен поиск опубликованных статей с использованием поисковой системы Google Scholar. Обзор состоит из двух частей, посвященных разным аспектам экспериментального исследования. При поисковом запросе использовались следующие термины: «название изображений», «нейролингвистика», «лингвистика», «перевод», «билингвы». После первичного поиска по этим терминам перепроверялись пропущенные слова и формулировки, подходящие для дальнейших поисковых запросов в текстах ранее найденных статей. После этого уточнились ранее определенные термины для более сложного поиска, посвященного исследованию нейролингвистики, и проводился поиск в базе данных. На обоих этапах поиска работы считались релевантными для рецензирования, если мы находили один из поисковых запросов или эквивалентную переформулировку в его названии, аннотации или ключевых словах.

**1.2. Сбор и анализ данных.** На первом этапе работы, посвященной обобщению карт областей мозга, соответствующих лингвистическим исследованиям, мы постарались избежать включения исследований с субъектами с нейрофизиологической патологией за исключением работ, где производилось исследование областей мозга, отвечающих за нарушение лингвистических функций. Хотя несколько отобранных работ содержали результаты для гетерогенных групп из-за дизайна эксперимента, для этого обзора мы извлекли информацию только о контрольных группах, то есть субъектах без патологий. Что касается части обзора, посвященной последним исследованиям и практическим приложениям, мы не применяли никаких дополнительных ограничений к протоколу эксперимента, пытаясь охватить все тенденции, которые появились в области нейролингвистики в последние годы.

Дальнейший анализ собранной литературы позволил классифицировать различные методы исследования. Большинство выбранных работ включали количественные методы исследования

с однородными результатами. Всестороннее обобщение научных подходов с учетом целей и результатов проведенных лингвистических экспериментов позволило собрать обширный материал, который мы систематизировали в Таблице. (Количество триалов обозначено  $N_T$ , длительность стимула —  $T_s$ , длительность паузы —  $T_p$ , обозначения языков приведены в соответствии с международной кодификацией ISO 639).

Таблица. Лингвистические исследования с использованием зрительных стимулов и получением вербальных ответов  
Table. Linguistic research using visual stimuli and receiving verbal responses

Публикация	$N_T$ / $T_s$ , мс/ $T_p$ , мс	Цели и задачи	Языки	Полученные результаты
[4]	950/ 2000/ 1000	Посмотреть разницу в скорости реакции при переключения языка	es ca kr	Выявлена задержка при переключении языков
[5,6]	384/ 250/ 500	Проследить разницу во времени обработки стимула при переключении языков	nl en	Ингибирование внимания при переключении языков
[7]	108/ 1000/ 2000	Проследить разницу при предъявлении цифр или изображений	de en	Называние цифры не несет семантического наполнения
[8]	96/ 4300/ 180	Выявить различия в активации у билингвов и монолингвов	es ca	Билингвы при назывании изображения на их родном или неродном языке, имеют активацию выше по сравнению с одноязычными в 5 областях левого полушария
[9]	120/ 2000/ 8000	Изучение влияния активации на скорость реакции при переключении языков	jp en	Лексическое решение, при котором любое активированное значение слова вызывает активацию обратного ответа, приводит к отрицательной связи между количеством активации и скоростью реакции
[10]	360/ 1500/ 500	Различие между существительными во множественном числе в контекстах, где им предшествовал цветовой модификатор	en	Цветовые изменения вызывали более высокую активацию, чем аналогичные различия для множественных объектов
[12]	100/ 1500/ 250	Проследить изменение вызванных потенциалов при переключении языка	nl en	Данные вызванных потенциалов показали тенденцию к уменьшению N400, что свидетельствует о том, что участники использовали механизм постлексической проверки во время блока переключения
[13]	134/ 500/ 1000	Зафиксировать разделение существительных и глаголов	en	Задержка при предъявлении глаголов
[14]	240/ 3000/ 1500	Определить, когда и как изучающие L2 начинают аффективно и семантически обрабатывать слова L2	de nl	L1 и L2 изначально обрабатываются семантически и аффективно через относительно отдельные каналы, которые все более и более связаны с воздействием L2

[15]	124/ 600/ 2400	Анализ наименования изображений, чтобы исследовать ранние эффекты переменных, специально связанных с визуальной, семантической и фонологической обработкой	en	Активация мозга, связанная с визуальным изображением, появляется в затылочной коре примерно через 100 мс после начала представления изображения. Примерно через 150 мс семантические переменные проявляются в левых лобнотемных регионах. Доступ к фонологической информации может начаться параллельно с семантической обработкой около 150 мс
[16]	96/ 3000/ 1500	Проверка гипотезы о модуляции эффектов интерференции и торможения при использовании нового языка L2	pl en	Уровень владения L2 не модулирует эффекты интерференции и торможения
[17]	184/ 4000/ 2000	Проверка гипотезы о том, что мозговые сети, формирующие основу для владения языком L1, задействованы во время явного изучения неродного языка L2	es eu	Электрофизиологические ответы во время обработки L2, аналогичные ответам L1, можно увидеть через несколько часов тренировки
[18]	80/ 3000/ 1000	Изучение воздействия в виде действий других агентов, произвольное переключение при назывании объекта	hi en	Нерелевантные для задачи внешние сигналы могут влиять на выбор языка при произвольном именовании объектов
[19]	576/ 1500/ 1200	Проследить разницу между переключением внимания между языками	en ar	Задержка при переключении языков
[20]	48/ 3500/ 2500	Анализ функциональной связности у трехязычных	que zh en	Эффективный анализ связности выявил корково-подкорково-мозжечковую схему тормозного контроля у трехязычных
[21]	336/ 1500/ 1000	Оценка того, как билингвы выбирают слова на соответствующем языке при воспроизведении и распознавании, сводя к минимуму влияние неродного языка	nl en	Обнаружено, что переключение языка было затратным только для L1, но не для L2
[22]	550/ 5000/ 1000	Исследовать относительный вклад автоматических процессов (преобразование графемы в фонему) и процессов, требующих внимания (семантическая вовлеченность)	nl en	Показан фрактальный паттерн изменчивости для именовании слов на голландском и английском языке
[23]	300/ 1500/ 3000	Проверка гипотезы о том, что входные данные в семантической памяти задействовали определенный гетеромодальный сетевой центр, который интегрирует лексический поиск с соответствующим семантическим содержанием	en	Выявлено увеличение активности центральной части мозолистого тела



[24]	1152/ 300/ 4000	Сравнение повтора и смены языка	de en	Задержка при ожидании смены ниже, чем при простом переключении языка
[25]	96/ 2000/ 1500	Сравнение ответов при парном тестировании	zh en	Синхронизация ответных реакций для вербального и невербального ответа
[26]	384/ 3000/ 700	Проверка гипотезы о том, основано ли обучение, связанное с лексическим отбором, на ошибках, и является ли лексический отбор конкурентоспособным путем оценки последствий создания слов для последующего производства семантических конкурентов	en fr es	После вербального ответа на языке с высокой степенью ошибки (L3) затраты ответа на другом языке с высокой степенью ошибки (L2 по сравнению с L1) была выше
[27]	768/ 2000/ по ответу	Определение превосходства билингвов по сравнению с монолингвами с учетом возраста	fr it	Билингвы имеют преимущество в любой возрастной категории, но молодые справляются с задачей лучше
[28]	432/ 2000/ 1200	Сравнить затраты на переключение языка и переключение концепта	nd en zh	Затраты на переключение концепта выше, чем на переключение языка
[29]	320/ 2000/ 2000	Сравнение ингибирования языка при переключении	zh en	Неродной язык ингибируется на переключении, но не во время повторного использования
[30]	96/ 800/ 1500	Исследовать, в какой степени экспериментально индуцированные языковые режимы влияют на исполнительные функции билингвов	en de	Частота переключения языка была отрицательным предиктором производительности в условиях, активирующих альтернативный и одноязычный режимы управления
[31]	24/ 2000/ 3000	Поиск участков мозга, отвечающих за контроль языка	nd en	Выявлено изменение активности в первичной соматосенсорной коре
[32]	1448/ 2500/ 1000	Исследование взаимодействия между когнитивными и психолингвистическими факторами, лежащими в основе двуязычного производства речи	it de en zh sk	Показано, что на процесс производства отдельных слов у здоровых взрослых двуязычных людей влияет взаимодействие между когнитивными, фонологическими и семантическими факторами
[33]	224/ 500/ 3000	Сравнение эффективности при предъявлении мономорфемных и мультиморфемных слов	de	Выявлено увеличение количества ошибок при предъявлении мультиморфемных слов
[34]	156/ 2500/ 250	Исследование взаимосвязи когнитивного переключения при смене языка	zh ug	Продолжительность воздействия языка меньшинства L1 и возраст овладения языком L2 влияют на языковой контроль в процессе речепроизводства
[35]	31/ по от- вету/ 0	Исследование разности производительности изучения языка в разном возрасте	en zh	Иностранные языки изучаются с большим разрывом в производительности, и обслуживаются принципиально разными механизмами

[36]	183/ 3500/ 500	Рассмотрение модели затрат переключения и обратного эффекта доминирования языка	en zh	Асимметричная стоимость переключения с более высокими затратами на L2 в конгруэнтном контексте по сравнению с базовым и неконгруэнтным контекстами
[37]	70/ 2500/ 1000	Изучение того, влияет ли двуязычие в близких и далеких языковых парах на языковой контроль и общие когнитивные процессы	en ar fr	Более сильное участие языкового контроля и областей общего когнитивного контроля у близких языков
[38]	100/ 1500/ 1200	Изучение влияния того, в какой степени нейронная репрезентация слова одинакова, когда оно готовится к воспроизведению как отдельное слово, по сравнению с тем, когда оно готовится как часть значимой фразы	en	Обнаружена сильная асимметрия между существительными и прилагательными, при этом наименования существительных обычно лучше поддаются декодированию
[39]	144/ 2500/ 500	Исследовать различие между доступом к значению слова и сборкой его произношения	vi	Показано, что просодификация на вьетнамском аналогична германским языкам, а не китайскому
[40]	160/ 1500/ 1500	Изучение активности мозга при предъявлении захватываемых зрительных образов	en	Модуляция моторных ответов и кортикальных ритмов при обработке захватываемых зрительных образов
[41]	286/ 5000/ 3000	Исследование энтропии ответов при именовании изображений	de	Задержка в названии может быть описана энтропией частоты слов в языке
[42]	128/ 1500/ 500	Сравнение статистических показателей при распознавании различных образов	de	Показаны статистически значимые эффекты в связи между задержками и степенью знакомства со словами, визуальной сложностью изображений, психологической валентностью
[43]	96/ 2000/ 250	Исследование влияние языкового доминирования на распознавание языка	zh ug	Начальный возраст освоения L2 (но не недавнее знакомство с языком) и кросс-модальное языковое доминирование способствуют вариациям в распознавании L2
[44]	48/ 2500/ 600	Изучение влияния дополнительного языка на когнитивное восприятие времени	zh mn en	Изучение дополнительного языка может изменить когнитивные способности говорящих при наличии значительных различий между L1 и L2

**1.3. Материалы экспериментальных исследований.** Был проведен ряд экспериментальных исследований, в которых принимали участие 15 некурящих, без нейрофизиологических заболеваний, не подвергающиеся медикаментозному лечению добровольцев в возрасте от 18 до 22 лет с различным уровнем знания английского языка, не являющиеся его носителем, что сравнимо с выборками в работах [5, 6, 19]. Всех добровольцев просили придерживаться здорового образа жизни (не менее 8 часов сна, исключить потребление алкоголя, исключить или ограничить потребление кофеин содержащих продуктов) в течение 48 часов перед каждым экспериментом. Добровольцы были заранее ознакомлены с процедурой проведения эксперимента и возможными вызванными ей неудобствами, имели возможность задать интересующие вопросы и получить на

них удовлетворительные ответы. Каждый испытуемый заполнил и подписал бланк информированного согласия на участие в эксперименте. Все экспериментальные работы были проведены в соответствии с требованиями Хельсинкской декларации.

Эксперимент проводился следующим образом. Испытуемый сидел в удобном кресле, а на столе перед ним располагался монитор (расстояние от экрана до глаз 30–40 см) и микрофон. Во время эксперимента осуществлялась регистрация активности головного мозга при помощи средств электроэнцефалографии (ЭЭГ). Для этого было использовано оборудование, имеющееся в распоряжении лаборатории. Отметим, что сигналы ЭЭГ дают представление об электрической активности головного мозга. Для регистрации ЭЭГ-активности был использован электроэнцефалограф «actiCHamp» производства Brain Products, Германия. Сигналы ЭЭГ были записаны для 64 каналов в соответствии со стандартной схемой «10–10». Заземление располагалось на месте электрода «Fpz», а электрод, служивший референтом, был помещен за правым ухом. Для регистрации ЭЭГ были использованы активные Ag/AgCl электроды «ActiCAP», которые были расположены на поверхности кожи головы в гнездах специальной шапочки «EasyCAP». Для повышения качества сигналов и обеспечения лучшей проводимости кожа головы предварительно была обработана абразивным гелем «NuPrep», а затем электроды были установлены с использованием проводящего геля «SuperVisc». Во время эксперимента отслеживались значения проводимости на каждом из электродов ЭЭГ. Обычно значения составляли менее 15 кОм, что является достаточным для правильной работы активных электродов ЭЭГ.

## 2. Результаты

**2.1. Количество используемых триалов.** При разработке дизайна эксперимента с участием человека экспериментаторы должны решить, сколько триалов совершит каждый участник, а также количество участников. Большинство обсуждений статистической мощности сосредоточено на размере выборки и предполагает достаточное количество испытаний [45]. Исследование влияния обоих факторов на статистическую мощность особенно важно, когда дисперсия внутри групп участников является значительной по сравнению с дисперсией между участниками. Существующие наборы данных для экспериментальных парадигм и методологий должны включать время реакции, сенсорные пороговые значения для функциональной магнито-резонансной томографии, МЭГ, ЭЭГ и оценки дисперсии внутри и между участниками для каждого метода. Тем не менее даже в статьях, опубликованных в престижных журналах, мы не всегда находим достаточное количество испытуемых, что значительно снижает статистическую мощность в использованных парадигмах.

На рис. 1 представлено процентное распределение количества статей по числу испытаний. Хорошо видно, что примерно половина работ ограничилась количеством триалов меньше 100, что могло оказать негативное влияние на значимость и воспроизводимость результатов. Стоит отметить относительно малое количество работ с числом испытаний выше 500. Это косвенно указывает

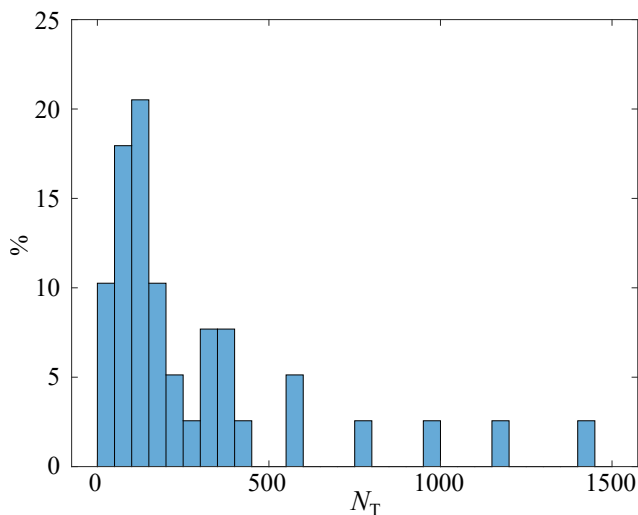


Рис. 1. Процентное распределение количества исследований по числу испытаний

Fig. 1. Percentage of the number of papers versus the number of trials used

на то, что нет необходимости проводить слишком много испытаний, так как это может привести к негативным последствиям вследствие накопления умственной и физической усталости [46]. Принимая во внимание всё вышесказанное, можно заключить, что использование от 100 до 500 испытаний является оптимальным с точки зрения чистоты эксперимента и статистической мощности.

**2.2. Длительность стимула.** С одной стороны, длительность стимула ограничена скоростью передачи и обработки визуальной информации, что обуславливает нижний порог в 200 мс [45, 46]. С другой, слишком длительное предъявление стимула приводит к увеличению затрат на проведение эксперимента и утомлению испытуемого. Кроме того, зрительное восприятие адаптируется к своей недавней истории. С этим связано явление подавления повторения, снижение нервных реакций на повторные предъявления визуальной информации по сравнению со спонтанным визуальным вводом. Временной масштаб, в течение которого происходит подавление всей визуальной иерархии, настроен для улучшения временной статистики визуальных входных функций, которые быстро меняются в областях низкого уровня, но более стабильны в областях более высокого уровня [47–49].

На рис. 2, *a* представлено процентное распределение количества статей в зависимости от длительности стимула. Легко видеть, что данное распределение имеет холмообразный вид. Расчет критерия согласия  $\chi^2$  [50] не опровергает гипотезу о том, что данные прибывают из

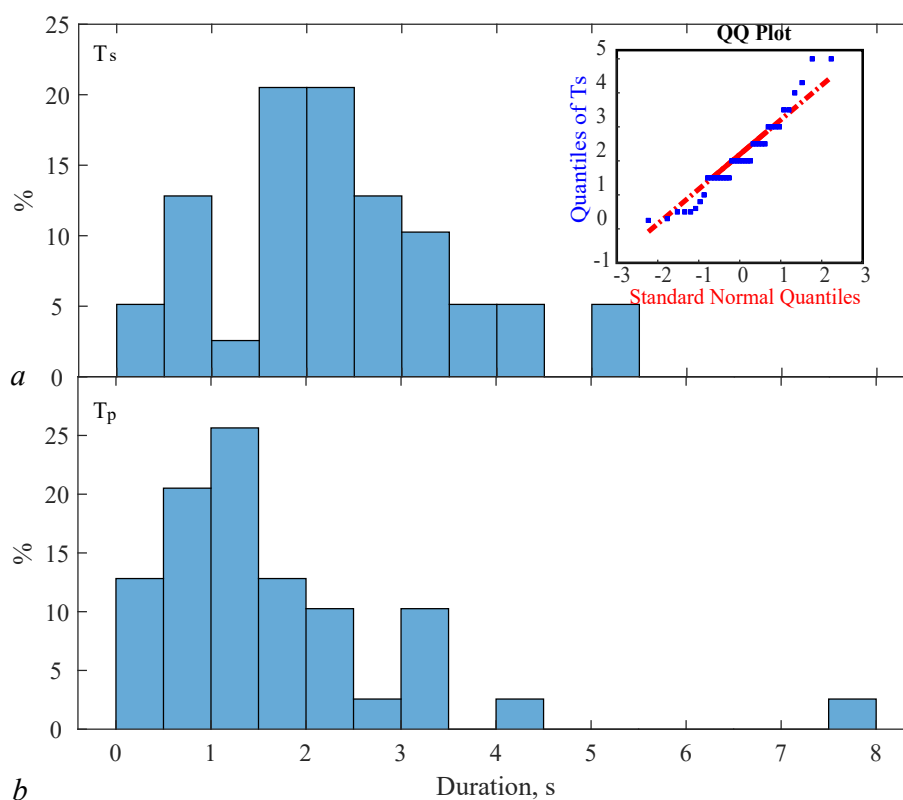


Рис. 2. *a* – Процентное распределение количества исследований по отношению к длительности стимула. График «квантиль–квантиль» для длительности стимула и нормального распределения. *b* – Процентное распределение количества исследований по отношению к длительности стимула и продолжительности паузы между испытаниями (цвет онлайн)

Fig. 2. *a* – Percentage of the number of papers versus stimulus duration. QQ-plot for the stimulus vs normal distribution. *b* – Percentage of the number of papers versus stimulus and inter-trial pause duration (color online)

нормального распределения со средним значением и отклонением, оцененным по всему набору на уровне значимости  $p < 0.05$ . Для экспериментального исследования имеет смысл ограничиться половиной распределения в окрестности максимума распределения. Принимая во внимание всё вышесказанное, можно заключить, что желательно использование стимулов длительностью от 1000 до 3000 мс.

**2.3. Длительность паузы.** Длительность паузы между стимулами очень сильно сказывается на концентрации внимания испытуемых во время экспериментов с предъявлением изображений [51]. Исследования с использованием моделей когнитивных наборов для простых невербальных визуальных стимулов определили особенности динамики электрических колебаний в диапазоне  $\alpha$ -ритма в коре головного мозга в периоды времени между предупреждением и целевыми стимулами или между целевыми и побуждающими стимулами [52]. В обоих случаях известны явления десинхронизации ритма в ответ на представление первого стимула, но в средней части паузы, наоборот, наблюдается синхронизация, которая затем заметно уменьшается или изменяется на десинхронизацию непосредственно перед представлением следующего стимула, как можно наблюдать на рис. 3. Отметим, что данные для иллюстрации на рис. 3 были взяты из эксперимента, который более подробно описан в разделе «Дизайн эксперимента». Такое поведение объясняется реакцией, индуцированной нисходящими потоками, обусловленными длительностью временных интервалов между целевыми стимулами в префронтальной коре во время проведения учебного процесса [53–57].

На рис. 2, *b* представлено процентное распределение количества статей по длительности паузы между стимулами. Данное распределение не имеет четкой конфигурации, соответствующей какому-либо из известных распределений. По всей видимости, исследователи не имеют чёткого представления о времени, необходимом для переключения на новый стимул и достаточном

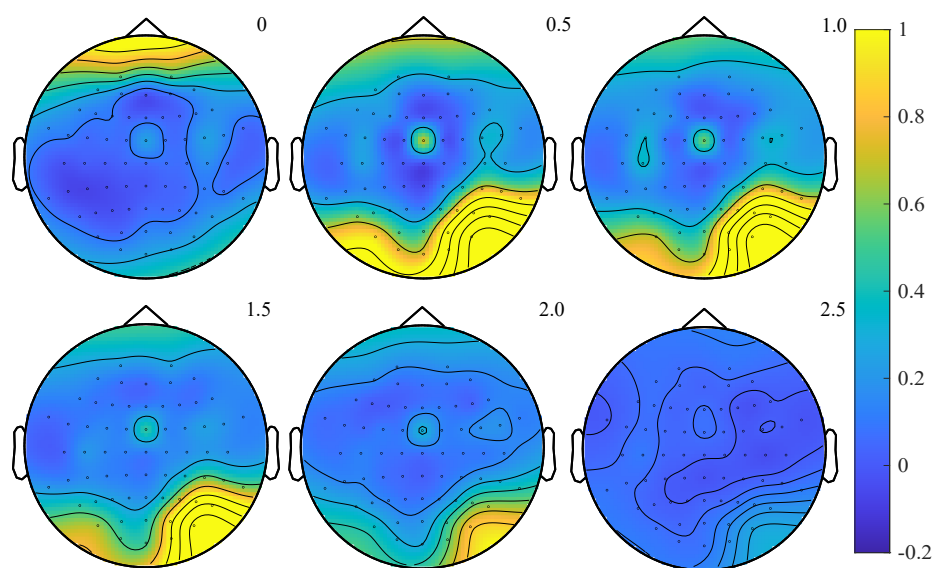


Рис. 3. Топограммы средней по всем триалам активности, связанной с действием синхронизации/десинхронизации в альфа-диапазоне для паузы. Последовательные поверхности соответствуют моментам 0–2.5 с относительно момента исчезновения стимула. Единицы цветовой шкалы нормированы относительно базового уровня до предъявления стимула (цвет онлайн)

Fig. 3. Topogram of average trial activity in alpha band at the event-related synchronization/desynchronization for the pause. The plots refer to fixed latencies at 0–2.5 s with respect to the end of the stimulus. Colormap levels are presented in arbitrary units relative to the prestimulus baseline (color online)

для поддержания внимания испытуемого на осуществлении задачи. Для экспериментального исследования имеет смысл рассматривать часть распределения для промежутков, включающих как минимум несколько работ. Принимая во внимание всё вышесказанное, можно заключить, что желательно использование длительности паузы от 500 до 3000 мс.

**2.4. Локализация участков активности мозга, вовлекаемых в обработку стимулов и формирования вербального ответа на иностранном языке.** В работах [8, 58] в поиске синаптических решений после коррекции для множественного сравнения по всему мозгу найдено, что активированные путем наименования визуального образа и вербального ответа области включали прецентральные и постцентральные извилины, височно-теменные доли, прецентральные и постцентральные борозды, мозжечок, левый таламус и дополнительная моторная кора. Кроме того, отмечалось вовлечение левой передней доли, передней поясничной извилины, дорсальной премоторной коры, левой верхней височной извилины, левой лобной доли и мозжечка. В работе [15] основные изменения наблюдались также в левых лобно-теменных регионах, а в работе [20] — в корково-подкорково-мозжечковой сети.

**2.5. Дизайн эксперимента.** В связи с вышесказанным для оценки психофизиологического состояния студентов во время выполнения упражнений по ходу экспериментальных исследований рекомендуется использовать промежуточное тестирование. В одной из наиболее хорошо зарекомендовавших себя методик — оценки текущего уровня усталости — используется субъективная шкала многомерной оценки утомляемости (MFI-20) [59], состоящая из 20 пунктов и позволяющая оценить усталость по пяти шкалам: общая астения, физическая астения, снижение мотивации, пониженная активность, психическая астения. MFI-20 дает комплексную оценку утомляемости испытуемых.

Хорошей альтернативой является тест для оценки субъективных критериев физического и психического состояния, базирующийся на оценке состояния с помощью визуальной аналоговой шкалы [60]. Данный тест вполне подходит для количественного определения взаимосвязи различных аспектов усталости во время проведения экспериментов по регистрации ЭЭГ при выполнении различных задач [61]. Кроме того, представляется перспективным использование теста NASA TLX (Task Load Index) [62] для субъективной многофакторной оценки рабочей нагрузки в ходе выполнения задания. При этом оценка производится по следующим направлениям: умственная нагрузка, физическая нагрузка, нехватка времени, усилия, эффективность, уровень недовольства [63, 64].

В результате обобщения и анализа экспериментальных и теоретических научных исследований, связанных с предъявлением визуальных стимулов и получением вербальных ответов, в лингвистике был предложен дизайн нейрофизиологического эксперимента. Временная структура эксперимента представлена на рис. 4.

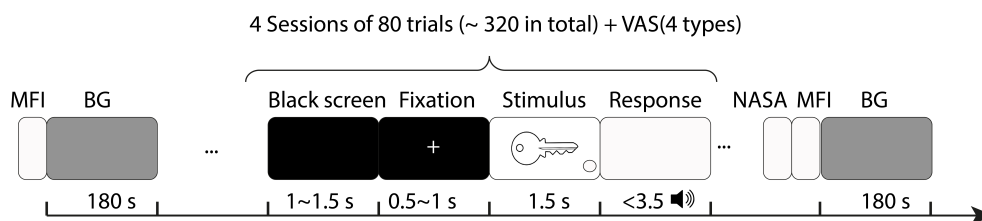


Рис. 4. Временная структура эксперимента. MFI обозначает тест утомляемости, BG — регистрацию фоновой активности, Black screen — черный экран, Fixation — фиксационный крест, Stimulus — предъявление стимула, Response — время на ответ, NASA — тест оценки нагрузки

Fig. 4. Time structure of the experiment

1. Исследование начинается с оценки текущего уровня усталости с использованием субъективной шкалы многомерной оценки утомляемости (MFI-20), состоящей из 20 пунктов и позволяющей оценить усталость по пяти шкалам: общая астения, физическая астения, снижение мотивации, пониженная активность, психическая астения. Для прохождения теста испытуемому необходимо дать ответ от 1 до 5, где 1 — «Да, это правда», а 5 — «Нет, это неправда», на каждое из предъявленных утверждений. MFI-20 дает комплексную оценку утомляемости с особым вниманием к усталости, испытываемой субъектами [59].
2. Далее следует 3-минутная запись фоновой активности, в течение которой испытуемому предлагается расслабиться и не фокусировать внимание на чём-либо.
3. Далее следует четыре блока/сессии по 80 триалов с предъявлением визуальных образов.
  - (a) Состав каждого триала включает:
    - i. показ черного экрана в течение 1–1.5 с;
    - ii. показ креста для фиксации в течение 0.5–1 с;
    - iii. предъявление стимула в виде визуального образа/картинки, сопровождающейся световой индикацией в правом нижнем углу в течение 1.5 с;
    - iv. ожидание вербального ответа испытуемого, сопровождаемое белым фоном в течение времени до 3.5 с, при этом переход к следующему триалу может осуществляться ранее в случае фиксации вербального ответа.
  - (b) По окончании блока, состоящего из 80 триалов, испытуемый каждый раз проходит тест для оценки субъективных критериев физического и психического состояния, базирующийся на оценке состояния с помощью визуальной аналоговой шкалы [60]. В состав входят 4 (четыре) характеристики с соответствующими шкалами:
    - i. физическая усталость;
    - ii. ментальная усталость;
    - iii. усилие — оценка количества усилий, прилагаемых для сохранения высокой эффективности выполнения задания;
    - iv. уровень интереса — оценка заинтересованности испытуемого в выполняемом задании.
  - (c) По завершении четырех блоков (320 триалов) испытуемый проходит тест NASA TLX (Task Load Index), используемый для субъективной многофакторной оценки рабочей нагрузки в ходе выполнения задания [64]. Оценка производится по следующим направлениям: умственная нагрузка, физическая нагрузка, нехватка времени, усилия, эффективность, уровень недовольства.
  - (d) Далее испытуемый повторно проходит тест оценки утомляемости (MFI-20).
  - (e) Завершение эксперимента сопровождается 3-минутной записью фоновой активности.

**2.6. Результаты эксперимента.** Полученные в ходе экспериментального исследования наборы триалов ЭЭГ проходили предварительную обработку, включающую удаление глазодвигательных артефактов и высокочастотных шумов. Данные были усреднены для каждого испытуемого в отдельности по всем триалам. Средний для всех испытуемых триал представлен на рис. 5, а. Вертикальной линией показан момент предъявления стимула. Участок, соответствующий моменту времени 1450–1500 мс после предъявления стимула, потенциально может быть наиболее интересным с точки зрения оценки лингвистических способностей человека к усвоению иностранных языков. Время, соответствующее положению максимума сигнала в данном диапазоне можно считать временем задержки между предъявлением стимула и обработкой информации для формирования вербального ответа. В частности, задержка положения максимума абсолютного значения

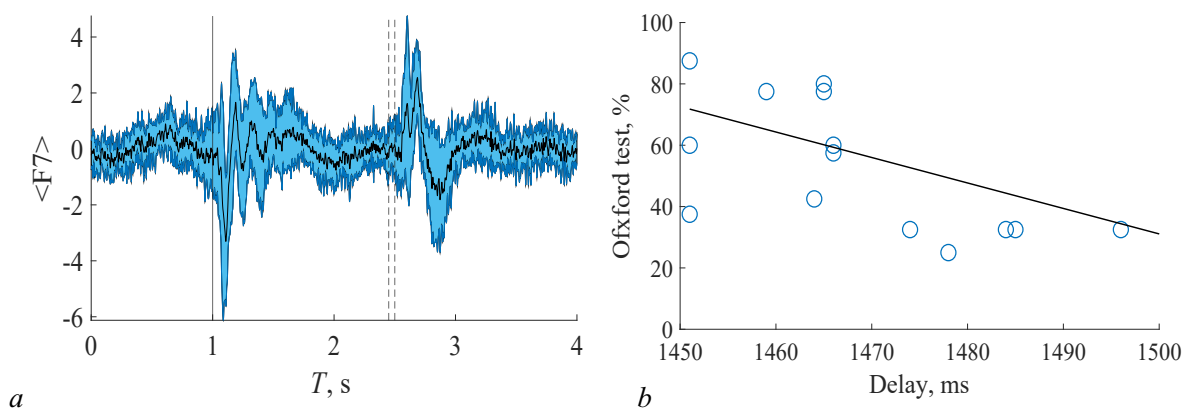


Рис. 5. *a* — ЭЭГ паттерн канала F7, усредненный для всех испытуемых в формате среднее  $\pm$  среднеквадратичное отклонение, пунктирные линии обрамляют участок для выявления задержки. *b* — Линейное приближение зависимости процента успешности прохождения теста Oxford от задержки максимума сигнала ЭЭГ (цвет онлайн)

Fig. 5. *a* — Mean EEG response pattern from the F7 channel averaged over subjects, dash lines confine the delay interest interval. Mean  $\pm$  SD. *b* — Linear fit of the dependence Oxford test % on the EEG delay (color online)

сигнала ЭЭГ с канала F7 в этом диапазоне отрицательно коррелирует (коэффициент взаимной корреляции Пирсона  $r = -0.5187$ , уровень значимости коэффициента  $p = 0.0476$ , рис. 5, *b*) с оценкой уровня знаний тестируемого, полученной в ходе прохождения теста на словарный запас [65]. Отведение F7 соответствует зоне Брока, которая является двигательным центром речи, ответственным за воспроизведение речи [66].

### Заключение

Проведен детальный обзор литературы современного состояния исследований в области экспериментальных научных исследований, связанных с предъявлением визуальных стимулов и получением вербальных ответов. На основе анализа имеющейся литературы разработан дизайн эксперимента по нейролингвистике и созданы алгоритмы, позволяющие работать с несколькими источниками данных. Проведенные экспериментальные исследования позволили определить оптимальную временную структуру и разработать программное обеспечение для проведения ЭЭГ экспериментов и последующей обработки данных.

Кроме того, обобщения полученных результатов и аналитические оценки экспериментальных параметров позволили сформировать рекомендации к будущим экспериментам. В частности, показано, что использование от 100 до 500 испытаний является оптимальным с точки зрения чистоты эксперимента и статистической мощности. Желательно использование стимулов длительностью от 1000 до 3000 мс с паузами между ними от 500 до 3000 мс. При этом крайне желательно варьировать интервалы для предотвращения негативных эффектов в альфа-ритме, связанных с ритмическим повторением. В ходе проведенных экспериментальных испытаний были выявлены перспективные показатели для оценки лингвистических способностей. Также была обнаружена значимая отрицательная корреляция между задержкой пиковой активности в зоне Брока с отведения F7 и оценкой уровня знаний теста на словарный запас у испытуемого.

### Список литературы

1. Feiler J. B., Stabio M. E. Three pillars of educational neuroscience from three decades of literature // Trends in Neuroscience and Education. 2018. Vol. 13. P. 17–25. 10.1016/j.tine.2018.11.001.



2. *Jolles J., Jolles D.D.* On neuroeducation: Why and how to improve neuroscientific literacy in educational professionals // *Front. Psychol.* 2021. Vol. 12. P. 752151. DOI: 10.3389/fpsyg.2021.752151.
3. *Букина Т. В., Храмова М. В., Куркин С. А.* Современные исследования функционирования мозга детей младшего школьного возраста в процессе обучения: обзор // *Известия вузов. ПНД.* 2021. Т. 29, № 3. С. 449–456. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-3-449-456.
4. *Costa A., Santesteban M.* Lexical access in bilingual speech production: Evidence from language switching in highly proficient bilinguals and L2 learners // *Journal of Memory and Language.* 2004. Vol. 50, no 4. P. 491–511. DOI: 10.1016/j.jml.2004.02.002.
5. *Verhoef K., Roelofs A., Chwilla D.J.* Role of inhibition in language switching: Evidence from event-related brain potentials in overt picture naming // *Cognition.* 2009. Vol. 110, no. 1. P. 84–99. DOI: 10.1016/j.cognition.2008.10.013.
6. *Roelofs A., Piai V., Rodriguez G.G.* Attentional inhibition in bilingual naming performance: evidence from delta-plot analyses // *Front. Psychol.* 2011. Vol. 2. P. 184. DOI: 10.3389/fpsyg.2011.00184.
7. *Declerck M., Koch I., Philipp A.M.* Digits vs. pictures: The influence of stimulus type on language switching // *Bilingualism: Language and Cognition.* 2012. Vol. 15, no. 4. P. 896–904. DOI: 10.1017/S1366728912000193.
8. *Parker J. O., Green D. W., Grogan A., Pliatsikas C., Filippopolitis K., Ali N., Lee H. L., Ramsden S., Gazarian K., Prejawa S., Seghier M. L., Price C.J.* Where, when and why brain activation differs for bilinguals and monolinguals during picture naming and reading aloud // *Cereb. Cortex.* 2012. Vol. 22, no. 4. P. 892–902. DOI: 10.1093/cercor/bhr161.
9. *Allen D. B., Conklin K.* Cross-linguistic similarity and task demands in Japanese-English bilingual processing // *PLoS ONE.* 2013. Vol. 8, no. 8. P. e72631. DOI: 10.1371/journal.pone.0072631.
10. *Del Prado P., Pylkkänen L.* MEG evidence for conceptual combination but not numeral quantification in the left anterior temporal lobe during language production // *Front. Psychol.* 2014. Vol. 5. P. 524. DOI: 10.3389/fpsyg.2014.00524.
11. *Чхолок П., Табару Ф., Писарчик А. Н.* Выявление нейронной сети, лежащей в основе парадигмы скрытого наименования изображений, с помощью магнитоэнцефалографии // *Известия вузов. ПНД.* 2022. Т. 30, № 1. С. 76–95. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-76-95.
12. *Lensink S.E., Verdonschot R. G., Schiller N. O.* Morphological priming during language switching: an ERP study // *Front. Hum. Neurosci.* 2014. Vol. 8. P. 995. DOI: 10.3389/fnhum.2014.00995.
13. *Conner C.R., Chen G., Pieters T.A., Tandon N.* Category specific spatial dissociations of parallel processes underlying visual naming // *Cereb. Cortex.* 2014. Vol. 24, no. 10. P. 2741–2750. DOI: 10.1093/cercor/bht130.
14. *Sianipar A., Middelburg R., Dijkstra T.* When feelings arise with meanings: How emotion and meaning of a native language affect second language processing in adult learners // *PLoS ONE.* 2015. Vol. 10, no. 12. P. e0144576. DOI: 10.1371/journal.pone.0144576.
15. *Miozzo M., Pulvermüller F., Hauk O.* Early parallel activation of semantics and phonology in picture naming: Evidence from a multiple linear regression MEG study // *Cereb. Cortex.* 2015. Vol. 25, no. 10. P. 3343–3355. DOI: 10.1093/cercor/bhu137.
16. *Durlík J., Szewczyk J., Muszyński M., Wodniecka Z.* Interference and inhibition in bilingual language comprehension: Evidence from Polish-English interlingual homographs // *PLoS ONE.* 2016. Vol. 11, no. 3. P. e0151430. DOI: 10.1371/journal.pone.0151430.
17. *Bastarrika A., Davidson D.J.* An event related field study of rapid grammatical plasticity in adult second-language learners // *Front. Hum. Neurosci.* 2017. Vol. 11. P. 12. DOI: 10.3389/fnhum.2017.00012.
18. *Bhatia D., Prasad S. G., Sake K., Mishra R. K.* Task irrelevant external cues can influence language selection in voluntary object naming: Evidence from Hindi-English bilinguals // *PLoS ONE.* 2017. Vol. 12, no. 1. P. e0169284. DOI: 10.1371/journal.pone.0169284.

19. *Blanco-Elorrieta E., Pykkänen L.* Bilingual language switching in the laboratory versus in the wild: The spatiotemporal dynamics of adaptive language control // *J. Neurosci.* 2017. Vol. 37, no. 37. P. 9022–9036. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0553-17.2017.
20. *Mosca M., de Bot K.* Bilingual language switching: Production vs. recognition // *Front. Psychol.* 2017. Vol. 8. P. 934. DOI: 10.3389/fpsyg.2017.00934.
21. *Yang J., Ye J., Wang R., Zhou K., Wu Y.J.* Bilingual contexts modulate the inhibitory control network // *Front. Psychol.* 2018. Vol. 9. P. 395. DOI: 10.3389/fpsyg.2018.00395.
22. *Plat R., Lowie W., de Bot K.* Word naming in the L1 and L2: A dynamic perspective on automatization and the degree of semantic involvement in naming // *Front. Psychol.* 2018. Vol. 8. P. 2256. DOI: 10.3389/fpsyg.2017.02256.
23. *Forseth K. J., Kadipasaoglu C. M., Conner C. R., Hickok G., Knight R. T., Tandon N.* A lexical semantic hub for heteromodal naming in middle fusiform gyrus // *Brain.* 2018. Vol. 141, no. 7. P. 2112–2126. DOI: 10.1093/brain/awy120.
24. *Lavric A., Clapp A., East A., Elchlepp H., Monsell S.* Is preparing for a language switch like preparing for a task switch? // *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition.* 2019. Vol. 45, no. 7. P. 1224–1233. DOI: 10.1037/xlm0000636.
25. *Liu H., Zhang M., Pérez A., Xie N., Li B., Liu Q.* Role of language control during interbrain phase synchronization of cross-language communication // *Neuropsychologia.* 2019. Vol. 131. P. 316–324. DOI: 10.1016/j.neuropsychologia.2019.05.014.
26. *Runnqvist E., Strijkers K., Costa A.* Error-based learning and lexical competition in word production: Evidence from multilingual naming // *PLoS ONE.* 2019. Vol. 14, no. 3. P. e0213765. DOI: 10.1371/journal.pone.0213765.
27. *Massa E., Köpke B., El Yagoubi R.* Age-related effect on language control and executive control in bilingual and monolingual speakers: Behavioral and electrophysiological evidence // *Neuropsychologia.* 2020. Vol. 138. P. 107336. DOI: 10.1016/j.neuropsychologia.2020.107336.
28. *Zhang Y., Cao N., Yue C., Dai L., Wu Y.J.* The interplay between language form and concept during language switching: A behavioral investigation // *Front. Psychol.* 2020. Vol. 11. P. 791. DOI: 10.3389/fpsyg.2020.00791.
29. *Zhu J. D., Seymour R. A., Szakay A., Sowman P. F.* Neuro-dynamics of executive control in bilingual language switching: An MEG study // *Cognition.* 2020. Vol. 199. P. 104247. DOI: 10.1016/j.cognition.2020.104247.
30. *Hofweber J., Marinis T., Treffers-Daller J.* Experimentally induced language modes and regular code-switching habits boost bilinguals' executive performance: Evidence from a within-subject paradigm // *Front. Psychol.* 2020. Vol. 11. P. 542326. DOI: 10.3389/fpsyg.2020.542326.
31. *Tabassi Mofrad F., Jahn A., Schiller N. O.* Dual function of primary somatosensory cortex in cognitive control of language: Evidence from resting state fMRI // *Neuroscience.* 2020. Vol. 446. P. 59–68. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2020.08.032.
32. *Schramm S., Tanigawa N., Tussis L., Meyer B., Sollmann N., Krieg S. M.* Capturing multiple interaction effects in L1 and L2 object-naming reaction times in healthy bilinguals: a mixed-effects multiple regression analysis // *BMC Neurosci.* 2020. Vol. 21, no. 1. P. 3. DOI: 10.1186/s12868-020-0549-x.
33. *Weiss Lucas C., Pieczewski J., Kochs S., Nettekoven C., Grefkes C., Goldbrunner R., Jonas K.* The cologne picture naming test for language mapping and monitoring (CoNaT): An open set of 100 black and white object drawings // *Front. Neurol.* 2021. Vol. 12. P. 633068. DOI: 10.3389/fneur.2021.633068.
34. *Wu R., Struys E.* Language dominance and sociolinguistic experience are related to language control and domain-general monitoring control: An investigation in bilinguals who live in a minority/majority sociolinguistic setting // *Front. Psychol.* 2021. Vol. 12. P. 594648. DOI: 10.3389/fpsyg.2021.594648.

35. Kang X., Matthews S., Yip V., Wong P. C. M. Language and nonlanguage factors in foreign language learning: evidence for the learning condition hypothesis // *npj Science of Learning*. 2021. Vol. 6, no. 1. P. 28. DOI: 10.1038/s41539-021-00104-9.
36. Liu C., Li L., Jiao L., Wang R. Bilingual language control flexibly adapts to cultural context // *Front. Psychol.* 2021. Vol. 12. P. 744289. DOI: 10.3389/fpsyg.2021.744289.
37. Radman N., Jost L., Dorood S., Mancini C., Annoni J.-M. Language distance modulates cognitive control in bilinguals // *Sci. Rep.* 2021. Vol. 11, no. 1. P. 24131. DOI: 10.1038/s41598-021-02973-x.
38. Honari-Jahromi M., Chouinard B., Blanco-Elorrieta E., Pylkkänen L., Fyshe A. Neural representation of words within phrases: Temporal evolution of color-adjectives and object-nouns during simple composition // *PLoS ONE*. 2021. Vol. 16, no. 3. P. e0242754. DOI: 10.1371/journal.pone.0242754.
39. Verdonschot R. G., Phudng H. T. L., Tamaoka K. Phonological encoding in Vietnamese: An experimental investigation // *Quarterly Journal of Experimental Psychology*. 2022. Vol. 75, no. 7. P. 1355–1366. DOI: 10.1177/17470218211053244.
40. Visani E., Sebastiano D. R., Duran D., Garofalo G., Magliocco F., Silipo F., Buccino G. The semantics of natural objects and tools in the brain: A combined behavioral and MEG study // *Brain Sci.* 2022. Vol. 12, no. 1. P. 97. DOI: 10.3390/brainsci12010097.
41. Busch J. L., Haeussler F. S., Domahs F., Timmermann L., Weber I., Oehrn C. R. German normative data with naming latencies for 283 action pictures and 600 action verbs // *Behavior Research Methods*. 2022. Vol. 54, no. 2. P. 649–662. DOI: 10.3758/s13428-021-01647-w.
42. Krautz A. E., Keuleers E. LinguaPix database: A megastudy of picture-naming norms // *Behavior Research Methods*. 2022. Vol. 54, no. 2. P. 941–954. DOI: 10.3758/s13428-021-01651-0.
43. Wu R., Struys E. A domain-general monitoring account of bilingual language control in recognition: The role of language dominance and bilingual experience // *Front. Psychol.* 2022. Vol. 13. P. 854898. DOI: 10.3389/fpsyg.2022.854898.
44. Yang W., Gu Y., Fang Y., Sun Y. Mental representations of time in English monolinguals, Mandarin monolinguals, and Mandarin–English bilinguals // *Front. Psychol.* 2022. Vol. 13. P. 791197. DOI: 10.3389/fpsyg.2022.791197.
45. Baker D. H., Vilidaite G., Lygo F. A., Smith A. K., Flack T. R., Gouws A. D., Andrews T. J. Power contours: Optimising sample size and precision in experimental psychology and human neuroscience // *Psychological Methods*. 2021. Vol. 26, no. 3. P. 295–314. DOI: 10.1037/met0000337.
46. Walker G. M., Basilakos A., Fridriksson J., Hickok G. Beyond percent correct: Measuring change in individual picture naming ability // *Journal of Speech, Language, and Hearing Research*. 2022. Vol. 65, no. 1. P. 215–237. DOI: 10.1044/2021\_JSLHR-20-00205.
47. Welford A. T. Choice Reaction Time: Basic Concepts. New York: Academic Press, 1980. 128 p.
48. Jain A., Bansal R., Kumar A., Singh K. D. A comparative study of visual and auditory reaction times on the basis of gender and physical activity levels of medical first year students // *International Journal of Applied and Basic Medical Research*. 2015. Vol. 5, no. 2. P. 124–127. DOI: 10.4103/2229-516X.157168.
49. Fritsche M., Lawrence S. J. D., de Lange F. P. Temporal tuning of repetition suppression across the visual cortex // *J. Neurophysiol.* 2020. Vol. 123, no. 1. P. 224–233. DOI: 10.1152/jn.00582.2019.
50. Боровков А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез: учебное пособие для мат. и физ. спец. вузов. М.: Наука, 1984. 472 с.
51. Kostandov E. A., Cheremushkin E. A., Yakovenko I. A., Petrenko N. E. Induced synchronization of the alpha rhythm during the pauses between visual stimuli with different levels of cognitive set plasticity // *Neuroscience and Behavioral Physiology*. 2015. Vol. 45, no. 2. P. 154–163. DOI: 10.1007/s11055-015-0053-4.
52. Babiloni C., Miniussi C., Babiloni F., Carducci F., Cincotti F., Del Percio C., Sirello G., Fracassi C., Nobre A. C., Rossini P. M. Sub-second “temporal attention” modulates alpha rhythms. A high-resolution EEG study // *Cognitive Brain Research*. 2004. Vol. 19, no. 3. P. 259–268. DOI: 10.1016/j.cogbrainres.2003.12.010.

53. *Coull J. T., Nobre A. C.* Where and when to pay attention: The neural systems for directing attention to spatial locations and to time intervals as revealed by both PET and fMRI // *J. Neurosci.* 1998. Vol. 18, no. 18. P. 7426–7435. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.18-18-07426.1998.
54. *D’Esposito M.* From cognitive to neural models of working memory // *Phil. Trans. R. Soc. B.* 2007. Vol. 362, no. 1481. P. 761–772. DOI: 10.1098/rstb.2007.2086.
55. *Gazzaley A., Nobre A. C.* Top-down modulation: bridging selective attention and working memory // *Trends Cogn. Sci.* 2012. Vol. 16, no. 2. P. 129–135. DOI: 10.1016/j.tics.2011.11.014.
56. *Ivry R. B., Schlerf J. E.* Dedicated and intrinsic models of time perception // *Trends Cogn. Sci.* 2008. Vol. 12, no. 7. P. 273–280. DOI: 10.1016/j.tics.2008.04.002.
57. *Alavash M., Tunc S., Obleser J.* Dynamic large-scale connectivity of intrinsic cortical oscillations supports adaptive listening in challenging conditions // *PLoS Biol.* 2021. Vol. 19, no. 10. P. e3001410. DOI: 10.1371/journal.pbio.3001410.
58. *Liu H., Hu Z., Guo T., Peng D.* Speaking words in two languages with one brain: Neural overlap and dissociation // *Brain Research.* 2010. Vol. 1316. P. 75–82. DOI: 10.1016/j.brainres.2009.12.030.
59. *Smets E. M. A., Garssen B., Cull A., De Haes J. C. J. M.* Application of the multidimensional fatigue inventory (MFI-20) in cancer patients receiving radiotherapy // *British Journal of Cancer.* 1996. Vol. 73, no. 2. P. 241–245. DOI: 10.1038/bjc.1996.42.
60. *Lee K. A., Hicks G., Nino-Murcia G.* Validity and reliability of a scale to assess fatigue // *Psychiatry Research.* 1991. Vol. 36, no. 3. P. 291–298. DOI: 10.1016/0165-1781(91)90027-M.
61. *Sato S. D., Choi J. T.* Corticospinal drive is associated with temporal walking adaptation in both healthy young and older adults // *Front. Aging Neurosci.* 2022. Vol. 14. P. 920475. DOI: 10.3389/fnagi.2022.920475.
62. *Hoonakker P., Carayon P., Gurses A. P., Brown R., Khunlertkit A., McGuire K., Walker J. M.* Measuring workload of ICU nurses with a questionnaire survey: the NASA Task Load Index (TLX) // *IIE Transactions on Healthcare Systems Engineering.* 2011. Vol. 1, no. 2. P. 131–143. DOI: 10.1080/19488300.2011.609524.
63. *Mouzé-Amady M., Raufaste E., Prade H., Meyer J.-P.* Fuzzy-TLX: using fuzzy integrals for evaluating human mental workload with NASA-Task Load index in laboratory and field studies // *Ergonomics.* 2013. Vol. 56, no. 5. P. 752–763. DOI: 10.1080/00140139.2013.776702.
64. *Said S., Gozdzik M., Roche T. R., Braun J., Rössler J., Kaserer A., Spahn D. R., Nöthiger C. B., Tscholl D. W.* Validation of the raw National Aeronautics and Space Administration Task Load Index (NASA-TLX) questionnaire to assess perceived workload in patient monitoring tasks: Pooled analysis study using mixed models // *J. Med. Internet Res.* 2020. Vol. 22, no. 9. P. e19472. DOI: 10.2196/19472.
65. English Vocabulary Level Test [Electronic resource]. Oxford Online English, 2011. Available from: <https://www.oxfordonlineenglish.com/english-level-test/vocabulary>.
66. *Gentilucci M., Bernardis P., Crisi G., Dalla Volta R.* Repetitive transcranial magnetic stimulation of Broca’s area affects verbal responses to gesture observation // *Journal of Cognitive Neuroscience.* 2006. Vol. 18, no. 7. P. 1059–1074. DOI: 10.1162/jocn.2006.18.7.1059.

## References

1. Feiler JB, Stabio ME. Three pillars of educational neuroscience from three decades of literature. *Trends in Neuroscience and Education.* 2018;13:17–25. DOI: 10.1016/j.tine.2018.11.001.
2. Jolles J, Jolles DD. On neuroeducation: Why and how to improve neuroscientific literacy in educational professionals. *Front. Psychol.* 2021;12:752151. DOI: 10.3389/fpsyg.2021.752151.
3. Bukina TV, Khramova MB, Kurkin SA. Modern research on primary school children brain functioning in the learning process: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(3):449–456. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-3-449-456.
4. Costa A, Santesteban M. Lexical access in bilingual speech production: Evidence from language

- switching in highly proficient bilinguals and L2 learners. *Journal of Memory and Language*. 2004;50(4):491–511. DOI: 10.1016/j.jml.2004.02.002.
5. Verhoef K, Roelofs A, Chwilla DJ. Role of inhibition in language switching: Evidence from event-related brain potentials in overt picture naming. *Cognition*. 2009;110(1):84–99. DOI: 10.1016/j.cognition.2008.10.013.
  6. Roelofs A, Piai V, Rodriguez GG. Attentional inhibition in bilingual naming performance: evidence from delta-plot analyses. *Front. Psychol.* 2011;2:184. DOI: 10.3389/fpsyg.2011.00184.
  7. Declerck M, Koch I, Philipp AM. Digits vs. pictures: The influence of stimulus type on language switching. *Bilingualism: Language and Cognition*. 2012;15(4):896–904. DOI: 10.1017/S1366728912000193.
  8. Parker JO, Green DW, Grogan A, Pliatsikas C, Filippopolitis K, Ali N, Lee HL, Ramsden S, Gazarian K, Prejawa S, Seghier ML, Price CJ. Where, when and why brain activation differs for bilinguals and monolinguals during picture naming and reading aloud. *Cereb. Cortex*. 2012;22(4):892–902. DOI: 10.1093/cercor/bhr161.
  9. Allen DB, Conklin K. Cross-linguistic similarity and task demands in Japanese-English bilingual processing. *PLoS ONE*. 2013;8(8):e72631. DOI: 10.1371/journal.pone.0072631.
  10. Del Prato P, Pykkänen L. MEG evidence for conceptual combination but not numeral quantification in the left anterior temporal lobe during language production. *Front. Psychol.* 2014;5:524. DOI: 10.3389/fpsyg.2014.00524.
  11. Chholak P, Tabari F, Pisarchik AN. Revealing the neural network underlying covert picture-naming paradigm using magnetoencephalography. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(1):76–95. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-76-95.
  12. Lensink SE, Verdonchot RG, Schiller NO. Morphological priming during language switching: an ERP study. *Front. Hum. Neurosci.* 2014;8:995. DOI: 10.3389/fnhum.2014.00995.
  13. Conner CR, Chen G, Pieters TA, Tandon N. Category specific spatial dissociations of parallel processes underlying visual naming. *Cereb. Cortex*. 2014;24(10):2741–2750. DOI: 10.1093/cercor/bht130.
  14. Sianipar A, Middelburg R, Dijkstra T. When feelings arise with meanings: How emotion and meaning of a native language affect second language processing in adult learners. *PLoS ONE*. 2015;10(12):e0144576. DOI: 10.1371/journal.pone.0144576.
  15. Miozzo M, Pulvermüller F, Hauk O. Early parallel activation of semantics and phonology in picture naming: Evidence from a multiple linear regression MEG study. *Cereb. Cortex*. 2015;25(10):3343–3355. DOI: 10.1093/cercor/bhu137.
  16. Durlík J, Szewczyk J, Muszyński M, Wodniecka Z. Interference and inhibition in bilingual language comprehension: Evidence from Polish-English interlingual homographs. *PLoS ONE*. 2016;11(3):e0151430. DOI: 10.1371/journal.pone.0151430.
  17. Bastarrika A, Davidson DJ. An event related field study of rapid grammatical plasticity in adult second-language learners. *Front. Hum. Neurosci.* 2017;11:12. DOI: 10.3389/fnhum.2017.00012.
  18. Bhatia D, Prasad SG, Sake K, Mishra RK. Task irrelevant external cues can influence language selection in voluntary object naming: Evidence from Hindi-English bilinguals. *PLoS ONE*. 2017;12(1):e0169284. DOI: 10.1371/journal.pone.0169284.
  19. Blanco-Elorrieta E, Pykkänen L. Bilingual language switching in the laboratory versus in the wild: The spatiotemporal dynamics of adaptive language control. *J. Neurosci.* 2017;37(37):9022–9036. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0553-17.2017.
  20. Mosca M, de Bot K. Bilingual language switching: Production vs. recognition. *Front. Psychol.* 2017;8:934. DOI: 10.3389/fpsyg.2017.00934.
  21. Yang J, Ye J, Wang R, Zhou K, Wu YJ. Bilingual contexts modulate the inhibitory control network. *Front. Psychol.* 2018;9:395. DOI: 10.3389/fpsyg.2018.00395.

22. Plat R, Lowie W, de Bot K. Word naming in the L1 and L2: A dynamic perspective on automatization and the degree of semantic involvement in naming. *Front. Psychol.* 2018;8:2256. DOI: 10.3389/fpsyg.2017.02256.
23. Forseth KJ, Kadipasaoglu CM, Conner CR, Hickok G, Knight RT, Tandon N. A lexical semantic hub for heteromodal naming in middle fusiform gyrus. *Brain.* 2018;141(7):2112–2126. DOI: 10.1093/brain/awyl20.
24. Lavric A, Clapp A, East A, Elchlepp H, Monsell S. Is preparing for a language switch like preparing for a task switch? *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition.* 2019;45(7):1224–1233. DOI: 10.1037/xlm0000636.
25. Liu H, Zhang M, Pérez A, Xie N, Li B, Liu Q. Role of language control during interbrain phase synchronization of cross-language communication. *Neuropsychologia.* 2019;131:316–324. DOI: 10.1016/j.neuropsychologia.2019.05.014.
26. Runnqvist E, Strijkers K, Costa A. Error-based learning and lexical competition in word production: Evidence from multilingual naming. *PLoS ONE.* 2019;14(3):e0213765. DOI: 10.1371/journal.pone.0213765.
27. Massa E, Köpke B, El Yagoubi R. Age-related effect on language control and executive control in bilingual and monolingual speakers: Behavioral and electrophysiological evidence. *Neuropsychologia.* 2020;138:107336. DOI: 10.1016/j.neuropsychologia.2020.107336.
28. Zhang Y, Cao N, Yue C, Dai L, Wu YJ. The interplay between language form and concept during language switching: A behavioral investigation. *Front. Psychol.* 2020;11:791. DOI: 10.3389/fpsyg.2020.00791.
29. Zhu JD, Seymour RA, Szakay A, Sowman PF. Neuro-dynamics of executive control in bilingual language switching: An MEG study. *Cognition.* 2020;199:104247. DOI: 10.1016/j.cognition.2020.104247.
30. Hofweber J, Marinis T, Treffers-Daller J. Experimentally induced language modes and regular code-switching habits boost bilinguals' executive performance: Evidence from a within-subject paradigm. *Front. Psychol.* 2020;11:542326. DOI: 10.3389/fpsyg.2020.542326.
31. Tabassi Mofrad F, Jahn A, Schiller NO. Dual function of primary somatosensory cortex in cognitive control of language: Evidence from resting state fMRI. *Neuroscience.* 2020;446:59–68. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2020.08.032.
32. Schramm S, Tanigawa N, Tussis L, Meyer B, Sollmann N, Krieg SM. Capturing multiple interaction effects in L1 and L2 object-naming reaction times in healthy bilinguals: a mixed-effects multiple regression analysis. *BMC Neurosci.* 2020;21(1):3. DOI: 10.1186/s12868-020-0549-x.
33. Weiss Lucas C, Pieczewski J, Kochs S, Nettekoven C, Grefkes C, Goldbrunner R, Jonas K. The cologne picture naming test for language mapping and monitoring (CoNaT): An open set of 100 black and white object drawings. *Front. Neurol.* 2021;12:633068. DOI: 10.3389/fneur.2021.633068.
34. Wu R, Struys E. Language dominance and sociolinguistic experience are related to language control and domain-general monitoring control: An investigation in bilinguals who live in a minority/majority sociolinguistic setting. *Front. Psychol.* 2021;12:594648. DOI: 10.3389/fpsyg.2021.594648.
35. Kang X, Matthews S, Yip V, Wong PCM. Language and nonlanguage factors in foreign language learning: evidence for the learning condition hypothesis. *npj Science of Learning.* 2021;6(1):28. DOI: 10.1038/s41539-021-00104-9.
36. Liu C, Li L, Jiao L, Wang R. Bilingual language control flexibly adapts to cultural context. *Front. Psychol.* 2021;12:744289. DOI: 10.3389/fpsyg.2021.744289.
37. Radman N, Jost L, Dorood S, Mancini C, Annoni JM. Language distance modulates cognitive control in bilinguals. *Sci. Rep.* 2021;11(1):24131. DOI: 10.1038/s41598-021-02973-x.
38. Honari-Jahromi M, Chouinard B, Blanco-Elorrieta E, Pykkänen L, Fyshe A. Neural representation

- of words within phrases: Temporal evolution of color-adjectives and object-nouns during simple composition. *PLoS ONE*. 2021;16(3):e0242754. DOI: 10.1371/journal.pone.0242754.
39. Verdonschot RG, Phudng HTL, Tamaoka K. Phonological encoding in Vietnamese: An experimental investigation. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*. 2022;75(7):1355–1366. DOI: 10.1177/17470218211053244.
  40. Visani E, Sebastiano DR, Duran D, Garofalo G, Magliocco F, Silipo F, Buccino G. The semantics of natural objects and tools in the brain: A combined behavioral and MEG study. *Brain Sci*. 2022;12(1):97. DOI: 10.3390/brainsci12010097.
  41. Busch JL, Haeussler FS, Domahs F, Timmermann L, Weber I, Oehrn CR. German normative data with naming latencies for 283 action pictures and 600 action verbs. *Behavior Research Methods*. 2022;54(2):649–662. DOI: 10.3758/s13428-021-01647-w.
  42. Krautz AE, Keuleers E. LinguaPix database: A megastudy of picture-naming norms. *Behavior Research Methods*. 2022;54(2):941–954. DOI: 10.3758/s13428-021-01651-0.
  43. Wu R, Struys E. A domain-general monitoring account of bilingual language control in recognition: The role of language dominance and bilingual experience. *Front. Psychol*. 2022;13:854898. DOI: 10.3389/fpsyg.2022.854898.
  44. Yang W, Gu Y, Fang Y, Sun Y. Mental representations of time in English monolinguals, Mandarin monolinguals, and Mandarin–English bilinguals. *Front. Psychol*. 2022;13:791197. DOI: 10.3389/fpsyg.2022.791197.
  45. Baker DH, Vilidaite G, Lygo FA, Smith AK, Flack TR, Gouws AD, Andrews TJ. Power contours: Optimising sample size and precision in experimental psychology and human neuroscience. *Psychological Methods*. 2021;26(3):295–314. DOI: 10.1037/met0000337.
  46. Walker GM, Basilakos A, Fridriksson J, Hickok G. Beyond percent correct: Measuring change in individual picture naming ability. *Journal of Speech, Language, and Hearing Research*. 2022;65(1):215–237. DOI: 10.1044/2021\_JSLHR-20-00205.
  47. Welford AT. *Choice Reaction Time: Basic Concepts*. New York: Academic Press; 1980. 128 p.
  48. Jain A, Bansal R, Kumar A, Singh KD. A comparative study of visual and auditory reaction times on the basis of gender and physical activity levels of medical first year students. *International Journal of Applied and Basic Medical Research*. 2015;5(2):124–127. DOI: 10.4103/2229-516X.157168.
  49. Fritsche M, Lawrence SJD, de Lange FP. Temporal tuning of repetition suppression across the visual cortex. *J. Neurophysiol*. 2020;123(1):224–233. DOI: 10.1152/jn.00582.2019.
  50. Borovkov AA. *Mathematical Statistics*. New York: Gordon & Breach; 1998. 570 p.
  51. Kostandov EA, Cheremushkin EA, Yakovenko IA, Petrenko NE. Induced synchronization of the alpha rhythm during the pauses between visual stimuli with different levels of cognitive set plasticity. *Neuroscience and Behavioral Physiology*. 2015;45(2):154–163. DOI: 10.1007/s11055-015-0053-4.
  52. Babiloni C, Miniussi C, Babiloni F, Carducci F, Cincotti F, Del Percio C, Sirello G, Fracassi C, Nobre AC, Rossini PM. Sub-second “temporal attention” modulates alpha rhythms. A high-resolution EEG study. *Cognitive Brain Research*. 2004;19(3):259–268. DOI: 10.1016/j.cogbrainres.2003.12.010.
  53. Coull JT, Nobre AC. Where and when to pay attention: The neural systems for directing attention to spatial locations and to time intervals as revealed by both PET and fMRI. *J. Neurosci*. 1998;18(18):7426–7435. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.18-18-07426.1998.
  54. D’Esposito M. From cognitive to neural models of working memory. *Phil. Trans. R. Soc. B*. 2007;362(1481):761–772. DOI: 10.1098/rstb.2007.2086.
  55. Gazzaley A, Nobre AC. Top-down modulation: bridging selective attention and working memory. *Trends Cogn. Sci*. 2012;16(2):129–135. DOI: 10.1016/j.tics.2011.11.014.

56. Ivry RB, Schlerf JE. Dedicated and intrinsic models of time perception. *Trends Cogn. Sci.* 2008;12(7):273–280. DOI: 10.1016/j.tics.2008.04.002.
57. Alavash M, Tune S, Obleser J. Dynamic large-scale connectivity of intrinsic cortical oscillations supports adaptive listening in challenging conditions. *PLoS Biol.* 2021;19(10):e3001410. DOI: 10.1371/journal.pbio.3001410.
58. Liu H, Hu Z, Guo T, Peng D. Speaking words in two languages with one brain: Neural overlap and dissociation. *Brain Research.* 2010;1316:75–82. DOI: 10.1016/j.brainres.2009.12.030.
59. Smets EMA, Garssen B, Cull A, De Haes JCJM. Application of the multidimensional fatigue inventory (MFI-20) in cancer patients receiving radiotherapy. *British Journal of Cancer.* 1996;73(2): 241–245. DOI: 10.1038/bjc.1996.42.
60. Lee KA, Hicks G, Nino-Murcia G. Validity and reliability of a scale to assess fatigue. *Psychiatry Research.* 1991;36(3):291–298. DOI: 10.1016/0165-1781(91)90027-M.
61. Sato SD, Choi JT. Corticospinal drive is associated with temporal walking adaptation in both healthy young and older adults. *Front. Aging Neurosci.* 2022;14:920475. DOI: 10.3389/fnagi.2022.920475.
62. Hoonakker P, Carayon P, Gurses AP, Brown R, Khunlertkit A, McGuire K, Walker JM. Measuring workload of ICU nurses with a questionnaire survey: the NASA Task Load Index (TLX). *IIE Transactions on Healthcare Systems Engineering.* 2011;1(2):131–143. DOI: 10.1080/19488300.2011.609524.
63. Mouzé-Amady M, Raufaste E, Prade H, Meyer JP. Fuzzy-TLX: using fuzzy integrals for evaluating human mental workload with NASA-Task Load index in laboratory and field studies. *Ergonomics.* 2013;56(5):752–763. DOI: 10.1080/00140139.2013.776702.
64. Said S, Gozdzik M, Roche TR, Braun J, Rössler J, Kaserer A, Spahn DR, Nöthiger CB, Tscholl DW. Validation of the raw National Aeronautics and Space Administration Task Load Index (NASA-TLX) questionnaire to assess perceived workload in patient monitoring tasks: Pooled analysis study using mixed models. *J. Med. Internet Res.* 2020;22(9):e19472. DOI: 10.2196/19472.
65. English Vocabulary Level Test [Electronic resource]. Oxford Online English; 2011. Available from: <https://www.oxfordonlineenglish.com/english-level-test/vocabulary>.
66. Gentilucci M, Bernardis P, Crisi G, Dalla Volta R. Repetitive transcranial magnetic stimulation of Broca's area affects verbal responses to gesture observation. *Journal of Cognitive Neuroscience.* 2006;18(7):1059–1074. DOI: 10.1162/jocn.2006.18.7.1059.



*Писарчик Александр Николаевич* — кандидат физико-математических наук, профессор. Ведущий научный сотрудник Центра биомедицинских технологий Политехнического университета Мадрида, руководитель проекта по нейролингвистике Балтийского федерального университета. Научные интересы – нейронаука, теория хаоса, синхронизация, мультистабильность, стохастические процессы и перемежаемость, с приложениями к электронным, оптическим и биомедицинским системам. Автор 5 монографий, 17 глав книг, 10 патентов и более 280 статей в рецензируемых научных журналах. Под его руководством успешно защищено 10 диссертаций (Ph.D.) и завершено 30 научно-исследовательских проектов, в том числе Российского научного фонда. Является членом правления Международного общества физики и контроля (IPACS), Консорциума биомедицинских исследований в сети (CYBER, Испания), а также Европейского, Итальянского и Мексиканского физических обществ.

Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
 Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
 España, 28040 Madrid, P Juan XXIII, 11  
 Universidad Politécnica de Madrid  
 E-mail: alexander.pisarchik@ctb.upm.es  
 ORCID: 0000-0003-4228-9124  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 651344



*Хорев Владимир Сергеевич* — родился в Гомеле (1987). Окончил факультет нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета по направлению «Биомедицинская инженерия» (2011). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук на тему «Оценка запаздывания и связи между колебательными системами по временным рядам в задачах радиофизики и биофизики» по специальностям «Биофизика» и «Радиофизика» (2015, СГУ). С 2019 года работает в лаборатории нейронауки и когнитивных технологий университета Иннополис в должности старшего научного сотрудника, с 2022 года — в Балтийском федеральном университете им. И. Канта. Научные интересы — анализ временных рядов, нейронаука, математическое моделирование. Опубликовал свыше 30 научных статей по указанным направлениям.



Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
E-mail: khorevvs@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-6613-8940  
AuthorID (eLibrary.Ru): 679618

*Бадарин Артем Александрович* — окончил с отличием магистратуру факультета нелинейных процессов СГУ (2017). Защитил кандидатскую диссертацию по специальностям «Радиофизика» и «Физическая электроника» (2020). Область научных интересов — математическое моделирование, нейронаука, нейронные сети, нелинейная динамика. Автор более 50 научных публикаций в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах, индексируемых в Scopus/Web of Science (в том числе Sensors, Results in Physics, IEEE Transactions on Electron Devices, Physics of Plasmas и др.), ряда свидетельств о регистрации программ для ЭВМ и патентов.



Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
E-mail: badarin93@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-3212-5890  
AuthorID (eLibrary.Ru): 898302

*Антипов Владимир Михайлович* — окончил с отличием магистратуру Естественно научного факультета ЮЗГУ (2019). Научные интересы: исследование различных видов взаимодействия человека и экзоскелетных систем, взаимодействия стопы человека с опорной поверхностью с помощью тензорезистивных матриц давления, вопросов движения роботов по неровным опорным поверхностям; моделирование и симуляции различных робототехнических систем в программном пакете V-REP. Опубликовал более 15 работ. Является победителем в конкурсной программе «Умник — Цифровая Россия».



Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
E-mail: vantipovm@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-3212-5890  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1033158

*Бударина Анна Олеговна* — с отличием окончила филологический факультет Калининградского государственного университета с присвоением квалификации «Филолог. Преподаватель английского языка. Переводчик» (1996). Кандидат педагогических наук (2001), доктор педагогических наук (2011), профессор (2018). В настоящее время — руководитель образовательно-научного кластера «Институт образования и гуманитарных наук» Балтийского федерального университета имени И. Канта. Научные интересы — теория и методика профессионального лингвистического образования, межкультурная коммуникация, проектирование образовательных сред, проблемы лингводидактического тестирования. Автор 5 монографий и более 80 публикаций в рецензируемых научных журналах. Под ее руководством успешно защищено 6 кандидатских и 1 докторская диссертации.

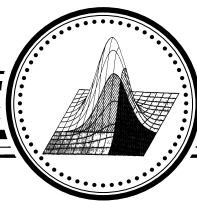


Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
E-mail: ABudarina@kantiana.ru  
ORCID: 0000-0001-8878-7183  
AuthorID (eLibrary.Ru): 281132



*Храмов Александр Евгеньевич* — окончил физический факультет Саратовского государственного университета (кафедра электроники и волновых процессов, 1996). Кандидат физико-математических наук (1999), доктор физико-математических наук (2005), профессор. В настоящее время главный научный сотрудник Балтийского центра нейротехнологий и искусственного интеллекта Балтийского федерального университета имени И. Канта. Научные интересы — нейронаука, теория сложных сетей, математическое моделирование нейронных сетей, искусственный интеллект. Автор 7 монографий, более 30 патентов и 200 статей в рецензируемых научных журналах. Под его руководством успешно защищено 16 кандидатских и 3 докторские диссертации, завершено более 25 научно-исследовательских проектов. Является членом правления Международного общества физики и контроля (IPACS), членом Японского нейронаучного сообщества, IEEE.

Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
E-mail: hramovae@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-2787-2530  
AuthorID (eLibrary.Ru): 34834



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(2)

Научная статья  
УДК 537.86

DOI: 10.18500/0869-6632-003032  
EDN: JYXDDE

### Влияние параметрической неустойчивости на спиновую накачку дипольно-обменными поверхностными магнитостатическими волнами в структурах ЖИГ–Pt

М. Е. Селезнёв<sup>1</sup>, Ю. В. Никулин<sup>1,2</sup>, Ю. В. Хивинцев<sup>1,2</sup>, С. Л. Высоцкий<sup>1,2</sup>,  
А. В. Кожевников<sup>1</sup>, В. К. Сахаров<sup>1,2</sup>, Г. М. Дудко<sup>1</sup>, Ю. А. Филимонов<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

<sup>2</sup>Саратовский национальный исследовательский

государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: mixanich94@mail.ru, yvnikulin@gmail.com, khivintsev@gmail.com, vysotsl@gmail.com,  
kzhavl@gmail.com, valentin@sakharov.info, dugal\_2010@hotmail.com, ✉yuri.a.filimonov@gmail.com

Поступила в редакцию 13.12.2022, принята к публикации 3.02.2023,

опубликована онлайн 20.03.2023, опубликована 31.03.2023

**Аннотация.** Цель работы – с помощью обратного спинового эффекта Холла экспериментально исследовать влияние четырехмагнотной параметрической неустойчивости на спиновую накачку дипольно-обменными поверхностными магнитостатическими волнами в структурах на основе пленок железоиттриевого граната (ЖИГ) и платины (Pt). Методы. Эксперименты выполнялись с макетом линии задержки на основе структуры ЖИГ/Pt, в котором ЭДС ( $U$ ), индуцированная за счет обратного спинового эффекта Холла, демонстрирует рост на частотах резонансного взаимодействия дипольной поверхностной магнитостатической волны с объемными обменными модами. Исследовались амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики макета линии задержки, а также частотная зависимость сигнала ЭДС ( $U(f)$ ) с платины в зависимости от мощности поверхностной магнитостатической волны. Результаты. Показано, что резонансный рост ЭДС на частотах дипольно-обменных резонансов обусловлен наличием на таких частотах сингулярностей ван Хофа в плотности состояний спиновых волн, что приводит к росту эффективности электрон-магнотного рассеяния на интерфейсе ЖИГ–Pt. Рост мощности поверхностных магнитостатических волн за порогом развития четырехмагнотной неустойчивости приводит к «сглаживанию» резонансных особенностей в частотной зависимости ЭДС  $U(f)$ , что объясняется снижением эффективности спиновой накачки из-за разрушения дипольно-обменных резонансов и связанных с ними сингулярностей в плотности состояний спиновых волн. Заключение. Полученные результаты могут представлять интерес для разработки высокочувствительных детекторов спинового тока, а также для создания устройств спинтроники.

**Ключевые слова:** параметрические спиновые волны, спиновая накачка, структуры ЖИГ–Pt, электрон-магнотное рассеяние, сингулярности ван Хофа.

**Благодарности.** Работа поддержана грантом РФФ № 22-19-00500.

**Для цитирования:** Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л., Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А. Влияние параметрической неустойчивости на спиновую накачку дипольно-обменными поверхностными магнитостатическими волнами в структурах ЖИГ–Pt // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 2. С. 225–242. DOI: 10.18500/0869-6632-003032

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Influence of parametric instability on spin pumping by dipole-exchange magnetostatic surface waves in YIG–Pt structures

*M. E. Seleznev*<sup>1</sup>, *Y. V. Nikulin*<sup>1,2</sup>, *Y. V. Khivintsev*<sup>1,2</sup>, *S. L. Vysotskii*<sup>1,2</sup>,  
*A. V. Kozhevnikov*<sup>1</sup>, *V. K. Sakharov*<sup>1,2</sup>, *G. M. Dudko*<sup>1</sup>, *Y. A. Filimonov*<sup>1,2</sup>✉

<sup>1</sup>Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

<sup>2</sup>Saratov State University, Russia

E-mail: [mixanich94@mail.ru](mailto:mixanich94@mail.ru), [yvnikulin@gmail.com](mailto:yvnikulin@gmail.com), [khivintsev@gmail.com](mailto:khivintsev@gmail.com), [vysotsl@gmail.com](mailto:vysotsl@gmail.com),  
[kzhavl@gmail.com](mailto:kzhavl@gmail.com), [valentin@sakharov.info](mailto:valentin@sakharov.info), [dugal\\_2010@hotmail.com](mailto:dugal_2010@hotmail.com), ✉[yuri.a.filimonov@gmail.com](mailto:yuri.a.filimonov@gmail.com)

*Received 13.12.2022, accepted 3.02.2023, available online 20.03.2023, published 31.03.2023*

**Abstract.** The purpose of this work is to study the influence of four-magnon (4M) parametric instability on spin pumping by dipole-exchange magnetostatic surface waves (MSSW) with the help of the inverse spin Hall effect (ISHE) in structures based on yttrium-iron garnet (YIG) and platinum (Pt). *Methods.* The experiments were carried out using the delay line structures based on YIG(900 nm)/Pt(9 nm) where electromotive force (EMF) induced by ISHE demonstrates a growth at the frequencies of the resonant interaction between MSSW and volume exchange modes. The frequency dependencies of the amplitude and phase for the delay line structure and EMF ( $U(f)$ ) from the platinum layer were studied as a function of the MSSW power. *Results.* It was shown that the resonant EMF growth at the frequencies of dipole-exchange resonances is caused by the presence of Van Hove singularities in the density of states for spin waves at such frequencies that leads to an increase in the efficiency of electron-magnon scattering at the YIG–Pt interface. A growth in MSSW power beyond the threshold of 4M instability development results in a “smoothing” of resonant particularities in the EMF frequency dependence  $U(f)$  that can be explained by decreasing efficiency of spin pumping due to destruction of dipole-exchange resonances and related singularities in the density of states of spin waves. *Conclusion.* Obtained results may be of interest for the development of highly sensitive spin current detectors, as well as for the implementation of spintronic devices.

**Keywords:** parametric spin waves, spin pumping, YIG–Pt structures, electron-magnon decay, Van Hove singularities.

**Acknowledgements.** The work was supported by RSF grant No. 22-19-00500.

**For citation:** Seleznev ME, Nikulin YV, Khivintsev YV, Vysotskii SL, Kozhevnikov AV, Sakharov VK, Dudko GM, Filimonov YA. Influence of parametric instability on spin pumping by dipole-exchange magnetostatic surface waves in YIG–Pt structures. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(2):225–242. DOI: 10.18500/0869-6632-003032

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Генерация и обнаружение спиновых токов в гетероструктурах на основе пленок железоиттриевого граната (ЖИГ) и платины (Pt) привлекают большое внимание как в фундаментальной, так и в прикладной спинтронике [1–4]. Спиновые токи в таких гетероструктурах генерируются с помощью спиновой накачки когерентными [5–9] или некогерентными (тепловыми [10, 11] или параметрическими [12–15]) спиновыми волнами (СВ). Плотность инжектируемого в пленку Pt спинового тока  $J_S$  определяется процессами электрон-магнонного рассеяния на границе ЖИГ/Pt [16]. Для обнаружения инжектируемого в платину спинового тока широко используется обратный спиновый эффект Холла (ОСЭХ) [17, 18], который преобразует спиновый ток  $J_S$  в электрический

$$J_c \sim |J_S| \cdot [\vec{n} \times \vec{\sigma}], \quad (1)$$

где  $\vec{n}$  и  $\vec{\sigma}$  — соответственно единичные векторы вдоль нормали к границе раздела ЖИГ/Pt и намагниченности  $\vec{M}$  плёнки ЖИГ на интерфейсе [1, 5–15]. В экспериментах по спиновой накачке

*Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л.,  
Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А.*

когерентными СВЧ спиновыми волнами измеряется, как правило, генерируемая на концах пленки ЭДС  $U \sim |J_c|$ . При этом эффективность спиновой накачки принято характеризовать отношением  $S$  величины ЭДС  $U$  к падающей СВЧ-мощности ( $S = U/P$ ) [5].

Одним из параметров, определяющих эффективность электрон-магнонного рассеяния на границе ЖИГ/Pt, является плотность состояний  $\eta(f)$  в спектре спиновых волн структуры ЖИГ/Pt [16]. При этом особую роль играют частоты  $f^*$  сингулярностей ван Хофа [19] в плотности состояний магнонов ( $\eta(f^*) \rightarrow \infty$ ), которым отвечают частоты с малыми величинами групповой скорости  $v_g$  СВ ( $v_g(f^*) \rightarrow 0$ ). Примерами таких частот  $f^*$ , применительно к накачке спинового тока поверхностными магнитостатическими волнами (ПМСВ), являются длинноволновая ( $f_0$ ) и коротковолновая ( $f_s$ ) границы в спектре [20–22], а также частоты  $f_N$ , на которых ПМСВ резонансно взаимодействует с обменными модами пленки ЖИГ и формируются дипольно-обменные волны [23–25]:

$$f_N = \sqrt{(f_H + f_{ex})(f_H + f_{ex} + f_m)}, \quad (2)$$

где  $f_{ex} = 2\gamma A Q^2/M$ ,  $A$  — обменная жесткость в ЖИГ,  $\gamma = 2.8$  МГц/Э — гиромангнитное отношение в ЖИГ,  $f_H = \gamma H$ ,  $f_m = \gamma 4\pi M$ ,  $Q = \sqrt{k^2 + k_{\perp,N}^2}$  — полное волновое число СВ,  $k$  и  $k_{\perp,N} = \pi N/d$  — соответственно составляющие волнового числа  $Q$  в плоскости и по толщине  $d$  пленки,  $N$  — номер обменной моды, характеризующий число полуволн обменной волны по толщине  $d$ . Значения параметра вольт-ваттной чувствительности  $S$  детекторов спинового тока на частотах  $f^*$  могут возрастать почти на порядок [24, 25], что важно для успешного проектирования устройств спинтроники, использующих СВЧ спиновую накачку. Цель данной работы — исследовать влияние четырехмагнонной (4М) параметрической неустойчивости на спиновую накачку дипольно-обменными ПМСВ в структурах ЖИГ/Pt.

Отметим, что 4М параметрическая неустойчивость возникает при мощности волны накачки выше некоторого порогового уровня  $P_{th}^{4M}$  ( $P > P_{th}^{4M}$ ) и при выполнении законов сохранения [26–28]:

$$2f_p = f_1 + f_2, \quad 2\vec{k}_p = \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \quad (3)$$

где частоты  $f_{p,1,2}$  и волновые векторы  $\vec{k}_{p,1,2}$  отвечают, соответственно, волне накачки и параметрическим СВ. Влияние процессов (3) на спиновую накачку в структурах ЖИГ/Pt исследовалось как в условиях возбуждения ферромагнитного резонанса (ФМР) [12–15, 29–33], так и бегущих дипольных магнитостатических волн (МСВ) [6, 22]. Было показано, что падение СВЧ магнитной восприимчивости при  $P > P_{th}^{4M}$ , а также автоколебания и бистабильности в системе ПСВ [26–28] в структурах ЖИГ/Pt приводят к нелинейной зависимости  $U = U(P)$  [6, 12, 22, 29–31], а также осцилляциям [32] и бистабильностям [33] ЭДС.

К этому следует добавить, что спиновая накачка дипольно-обменными ПМСВ мощностью ниже порога развития 4М неустойчивости ( $P < P_{th}$ ) рассматривалась в работах [5, 24, 25]. При этом в работе [5] наблюдался рост чувствительности  $S$  спиновой накачки при резонансном возбуждении стоячей моды прямоугольного ЖИГ-резонатора на частоте гибридации латеральной и толщинной мод пленки ЖИГ с  $d \approx 2.1$  мкм [12]. В работах [24, 25] рассматривалась спиновая накачка бегущими дипольно-обменными ПМСВ в макетах типа линии задержки на основе структур ЖИГ/Pt. При этом в работе [25] исследования проводились со структурой на основе двухслойной обменно-связанной пленки ЖИГ, а в [24] использовалась структура на основе пленки ЖИГ с  $d \approx 0.9$  мкм. В данной работе представлены результаты исследования влияния процессов (3) на генерацию спинового тока бегущими дипольно-обменными ПМСВ в структуре ЖИГ/Pt с параметрами пленки ЖИГ, идентичными работе [24].

## 1. Исследуемые структуры и методика эксперимента

На рис. 1 схематично показан макет типа линии задержки (ЛЗ) на ПМСВ на основе интегральных структур ЖИГ/Pt. Макет изготавливался на основе пленки ЖИГ толщиной  $d \approx 0.9$  мкм с эффективной намагниченностью насыщения  $4\pi M \approx 1800$  Гс, обменной жесткостью  $A = 4.7 \cdot 10^{-7}$  эрг/см и параметром релаксации  $\alpha \approx 3 \cdot 10^{-4}$  (шириной линии ФМР  $2\Delta H \approx 0.5$  Э), выращенной на подложке гадолиний-галлиевого граната (gadolinium-gallium garnet, GGG) с кристаллографической ориентацией (111). На поверхности ЖИГ методом магнетронного распыления была выращена пленка Pt толщиной  $t \approx 9$  нм и удельным сопротивлением  $\rho \approx 0.41 \cdot 10^{-6}$  Ом·м ( $R_{\square} \approx 50.1$  Ом), из которой методами фотолитографии и ионного травления формировалась микрополоска длиной  $L \approx 220$  мкм и шириной  $W \approx 200$  мкм. Затем методом взрывной фотолитографии на поверхности ЖИГ формировались медные микроантенны СВ и контакты к пленке Pt, обозначенные, соответственно, цифрами 1, 2 и 3, 4 на рис. 1. Антенны имели апертуру  $w \approx 250$  мкм, ширину  $b \approx 4$  мкм, толщину  $h \approx 0.5$  мкм и располагались друг от друга на расстоянии  $D \approx 250$  мкм. Медные контакты имели ширину примерно 15 мкм и перекрывали пленку платины по ширине  $W$ . Также была изготовлена ЛЗ без пленки платины и медных контактов 3 и 4, которая использовалась для уточнения характеристик ПМСВ в пленке ЖИГ и анализа изменений в характеристиках, вызванных Pt и контактами 3 и 4.

Исследуемая структура размещалась между полюсами электромагнита в касательном к поверхности плёнки ЖИГ магнитном поле  $\vec{H}$ , которое ориентировалось вдоль микроантенн и могло меняться в пределах  $-2473 < H < 2473$  Э. Указанная геометрия отвечает возбуждению и распространению ПМСВ Дэймона–Эшбаха [20]. Для измерения коэффициентов передачи макета ЛЗ использовался векторный анализатор цепей Keysight M9374A, который подключался к микроантеннам 1 и 2 с помощью СВЧ микрозондов Picoprobe Model 50A. Измерялись частотные зависимости коэффициентов прохождения  $S_{12}(f)$  между антеннами 1 и 2 и отражения  $S_{22}(f)$  от антенны 2 при различных уровнях падающей мощности  $P_{in}$  и величинах  $H$ . Набег фазы ПМСВ  $\Theta(f)$  в структуре определялся как  $\Theta(f) = \arctg(\text{Im}[S_{12}(f)]/\text{Re}[S_{12}(f)])$  и использовался для расчета волнового числа ПМСВ  $k(f) = \Theta(f)/D$  [34].

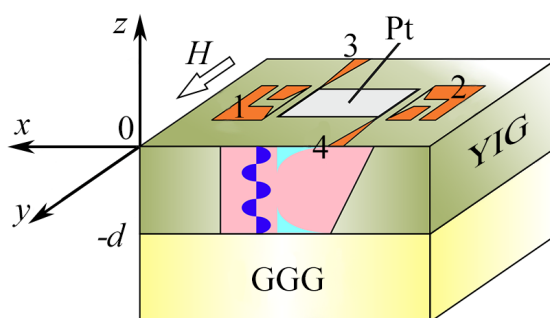


Рис. 1. Линия задержки на ПМСВ на основе микроструктуры ЖИГ/Pt: 1, 2 — медные микроантенны СВ; 3, 4 — медные контакты к пленке Pt. Стрелкой обозначено направление магнитного поля  $H$ . На вставке розовым, синим и бирюзовым цветом схематично показан характер распределения по толщине пленки намагниченности  $|m(z)|$  для, соответственно, дипольной ПМСВ Дэймона–Эшбаха, обменных объемной и поверхностных мод [23] (цвет онлайн)

Fig. 1. The delay line on MSSW based on a YIG/Pt microstructure: 1, 2 — copper microantennas of spin waves (SW); 3, 4 — copper contacts to Pt film. Direction of magnetic field  $H$  is denoted by an arrow. In the inset, a character of magnetization  $|m(z)|$  distribution across the thickness is schematically shown for dipole Damon–Eshbach MSSW, exchange volume and surface modes [23] by pink, blue and light-blue colours, respectively (color online)

Измерение ЭДС  $U(f)$ , генерируемой на контактах (3, 4) к пленке Pt при распространении ПМСВ на частоте  $f$ , проводилось с помощью селективного вольтметра (SR830) в режиме модуляции падающей СВЧ-мощности  $P_{in}$  меандром с частотой  $\Omega_t \approx 11.33$  кГц. Такой подход к измерению сигнала  $U(f)$  позволяет снизить влияние шумов и паразитных сигналов на процесс измерения, а также уменьшить вклад со стороны термоЭДС, вызванный неоднородным нагревом структуры СВЧ-мощностью. При этом вклад в ЭДС со стороны процессов электрон-магнетонного рассеяния, характеризуемый временами  $\tau_{e-m} \sim 10^{-12}$  с [35], отслеживает модуляцию мощности практически безынерционно.

Для исследования влияния 4М параметрических процессов на генерацию спинового тока необходимо создать условия, при которых на частоте накачки  $f_p$  оказываются запрещены параметрические процессы трехмагнетонного (3М) распада, характеризующиеся наименьшими уровнями пороговой мощности  $P_{th}^{3M}$  ( $P_{th}^{3M} \ll P_{th}^{4M}$ ) [26–28]. Добиться этого можно при выполнении условия [36–38]:

$$f_p > 2(f_H + f_{ex}). \quad (4)$$

Применительно к случаю дипольных ПМСВ, когда вкладом частоты  $f_{ex}$  обменного сдвига «дна» спектра можно пренебречь, условие (4) в пленках ЖИГ выполняется во всей полосе частот ПМСВ при поле  $H > 2\pi M \approx 875$  Э [36–38]. Далее будут обсуждаться результаты экспериментов при  $H = 939$  Э. При этом достижение условий развития 4М неустойчивости ПМСВ определялось стандартным методом [22, 39, 40] по снижению модуля коэффициента прохождения  $|S_{12}(f, P)|$  при  $P > P_{th}^{4M}$ .

## 2. Результаты и обсуждение

В данном разделе обсуждаются результаты, доказывающие, что исследуемые структуры ЖИГ/Pt поддерживают распространение дипольно-обменных ПМСВ и что на частотах дипольно-обменных резонансов наблюдается резонансный рост эффективности спиновой накачки, связанный с сингулярностями ван Хофа. Для того чтобы детальнее обсудить влияние 4М параметрических процессов на спиновую накачку дипольно-обменными ПМСВ в структурах ЖИГ/Pt, предварительно рассматриваются нелинейные дипольно-обменные ПМСВ в макете ЛЗ на основе пленки ЖИГ без Pt.

**2.1. Нелинейные дипольно-обменные ПМСВ в пленке ЖИГ.** На рис. 2, а приведены измеренные при различных уровнях падающей мощности  $P_{in}$  спектры передачи макетов ЛЗ на основе пленки ЖИГ. Можно видеть, что при уровне мощности  $P_{in} = -20$  дБм на частотах, отмеченных звездочками, в зависимостях  $|S_{12}(f, P)|$  наблюдаются резонансного вида «провалы», что характерно [23, 41] для резонансного взаимодействия дипольных ПМСВ с обменными объемными модами пленки на частотах  $f_N$ , которые могут быть рассчитаны согласно формуле (2). Резонансный рост потерь на частотах  $f_N$  сопровождается, в соответствии с соотношением Крамерса–Кронига, формированием аномальных участков в законе дисперсии  $k(f)$  ПМСВ [41, 42]. Это можно видеть из вставки к рис. 2, б, где представлены результаты измерения  $k(f)$  в пленке ЖИГ на частоте резонанса ПМСВ с обменной модой номера  $N = 3$ . Результаты измерения закона дисперсии вне частот дипольно-обменных резонансов показаны на рис. 2, б кривой 1 и, в целом, соответствуют закону дисперсии ПМСВ Дэймона–Эшбаха [20]:

$$f^2 = f_0^2 + 1/4 f_m^2 (1 - \exp(-2kd)). \quad (5)$$

где  $f_0^2 = f_H^2 + f_H \cdot f_m$ .

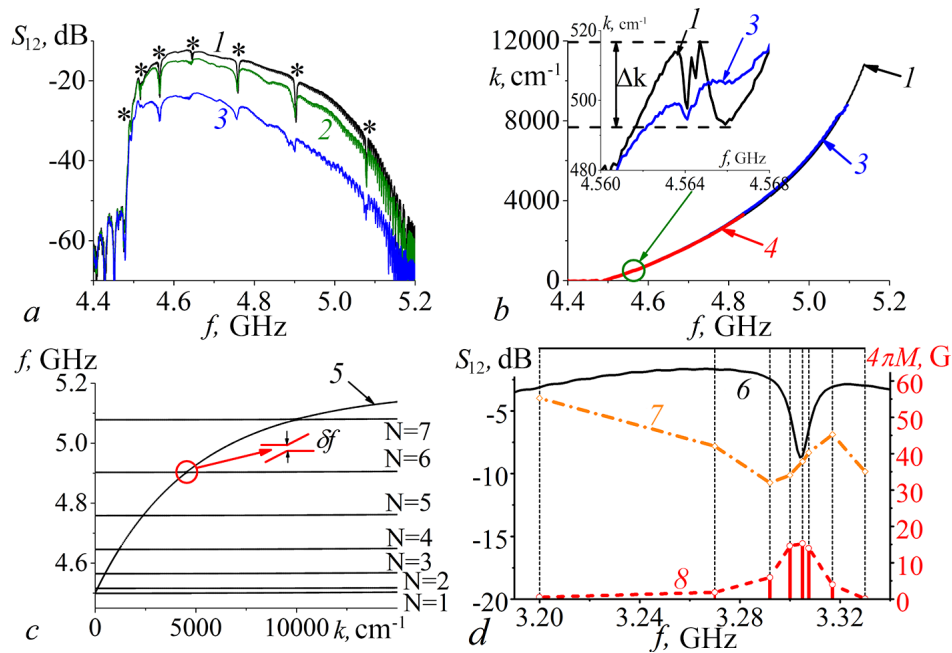


Рис. 2. Результаты измерения при  $H = 939$  Э частотных зависимостей коэффициента прохождения  $S_{12}(f)$  (а) и законов дисперсии  $k(f)$  (б) в макетах на основе пленки ЖИГ при  $P_{in} = -20$  (1),  $-10$  (2),  $0$  (3) дБм, кривой 4 показан результат измерения дисперсии в структуре ЖИГ/Pt при  $P_{in} = -20$  дБм, на вставке к рис. б показан участок дисперсии с аномальным поведением; с – рассчитанный спектр дипольно-обменных ПМСВ в пленке ЖИГ с номерами обменных мод  $N = 1...7$ , где кривой 5 показана дисперсионная зависимость ПМСВ Дэймона–Эшбаха, на вставке к рис. с показан характер расталкивания дисперсионных кривых в окрестности резонанса ПМСВ с обменной модой номера  $N = 6$  и образование «щели»  $\delta f \approx 5$  МГц в спектре; d – микромагнитное моделирование частотных зависимостей в окрестности частоты дипольно-обменного резонанса с номером  $N = 5$ : кривая 6 отвечает  $S_{12}(f)$ ; кривые 7 и 8 отвечают амплитуде намагниченности  $|m(z)|$  на границе  $z = 0$  и амплитуде объемной обменной моды, соответственно. Характер распределения объемной моды показан синим цветом на вставке к рис. 1 (цвет онлайн)

Fig. 2. Measurements results of frequency dependencies of transmission coefficient  $S_{12}(f)$  (a) and dispersions  $k(f)$  (b) in the structures based on YIG films at  $H = 939$  Oe and  $P_{in} = -20$  (1),  $-10$  (2),  $0$  (3) dBm; curve 4 shows the measured dispersion in the YIG/Pt structure at  $P_{in} = -20$  dBm; the inset to Fig. b shows the part of dispersion with anomalous behavior; c – calculated spectrum of dipole-exchange MSSW in the YIG film with the numbers of exchange modes  $N = 1...7$  where the curve 5 shows the dispersion of Damon–Eshbach MSSW; the inset to Fig. c demonstrates the character of dispersion repulsion in the vicinity of the resonance of MSSW with the exchange mode with number  $N = 6$  and formation of a spectrum “gap”  $\delta f \approx 5$  MHz; d – micromagnetic modeling of the frequency dependencies in the vicinity of the dipole-exchange resonance with the number  $N = 5$ : the curve 6 corresponds to  $S_{12}(f)$ , the curves 7 and 8 correspond to the amplitude of magnetization  $|m(z)|$  at the border  $z = 0$  and to the amplitude of volume exchange mode, respectively. The character of volume mode distribution is shown by blue color in the inset to Fig. 1 (color online)

На рис. 2, с приведены результаты расчета спектра  $f = f(k)$  дипольно-обменных ПМСВ в пленке с выбранными параметрами, выполненные в бездиссипативном приближении в рамках подхода [23]. На вставке к рис. 2, с приведен характер дисперсии в окрестности резонанса ПМСВ с обменной модой номера  $N = 6$ . Можно видеть, что дисперсионные кривые расталкиваются и формируют «щель»  $\delta f \approx 5$  МГц в спектре. При достаточно большой диссипации [41, 42] «щель» в спектре исчезает, но возникает аномальный участок дисперсии (см. вставку к рис. 2, б) и резонансный рост потерь, см. узкие «провалы» в зависимости  $|S_{12}(f, P)|$  на рис. 2, а. Следует отметить, что на частотах  $f_N$  в спектре формируются участки дисперсии  $f = f(k)$  с малой групповой скоростью  $v_g(f_N) = 2\pi\partial f/\partial k \rightarrow 0$ . При этом следует ожидать, что на частотах  $f_N$  в плотности состояний СВ будут возникать сингулярности ван Хова  $\eta(f_N) \rightarrow \infty$  [19].



На рис. 2, *d* в рамках подхода [43–45] приведены результаты микромагнитного моделирования частотных зависимостей в окрестности частоты дипольно-обменного резонанса с  $N = 5$  коэффициента прохождения волны (кривая 6), а также амплитуд намагниченности на поверхности пленки ЖИГ  $|m(z = 0)|$  (кривая 7) и амплитуды объемной обменной (кривая 8). Характер распределения амплитуды объемной моды  $|m(z)|$  по толщине пленки иллюстрирует осциллирующая синяя вставка к рис. 1. Можно видеть, что на частоте дипольно-обменного резонанса возникает резонансный рост потерь (кривая 6). При этом амплитуда намагниченности на границе  $z = 0$ , к которой «прижата» ПМСВ Дэймона–Эшбаха, падает (кривая 7). Одновременно происходит рост амплитуды объемной обменной моды (кривая 8). В целом, такое поведение намагниченности отражает перераспределение энергии между двумя колебательными подсистемами в условиях резонанса.

При мощности ПМСВ выше порога параметрической неустойчивости  $P > P_{th}^{4M}$  амплитуда коэффициента  $S_{12}$  падает из-за влияния нелинейного затухания и падения высокочастотной магнитной восприимчивости, что можно видеть из сравнения кривых 1, 2 и 3 на рис. 2, *a*. Также видно, что с ростом  $P$  резонансные особенности в зависимости  $|S_{12}(f, P)|$  сглаживаются. Одновременно уменьшается «амплитуда»  $\Delta k$  аномального участка в законе дисперсии на частотах  $f_N$  (см. рис. 2, *b*). В целом такое поведение зависимостей  $|S_{12}(f, P)|$  и  $k(f)$  с ростом  $P_{in}$  указывает на разрушение дипольно-обменных резонансов процессами (3). Для макета ЛЗ на основе пленки ЖИГ значение  $P_{th}^{4M}$  составляет  $P_{th}^{4M} \approx 20$  мкВт. Указанным пороговым мощностям можно сопоставить пороговые значения амплитуды намагниченности  $m_{th}^{4M}$  ПМСВ с помощью соотношения [39, 40]:

$$m_{th}^{4M} = \sqrt{\frac{P_{th}}{v_g \cdot w \cdot d}}, \quad (6)$$

где произведение  $w \cdot d$  определяет площадь сечения пленки, через которое переносится мощность ПМСВ. Рассчитанные с помощью (6) значения  $m_{th}$  при параметрах, отвечающих рис. 1 составляют в случае 4М процессов  $m_{th}^{4M} \approx 1.2$  Гс, что согласуется с оценкой в рамках теории Сулла для однородной накачки [26–28]  $m_{th}^{4M} \approx \sqrt{M \cdot \Delta H / (4\pi)} \approx 1.7$  Гс.

**2.2. Влияние 4М параметрических процессов на спиновую накачку дипольно-обменными ПМСВ в структуре ЖИГ/Pt.** Прежде чем обсудить влияние процессов (3) на генерацию ЭДС в структуре ЖИГ/Pt за счет спиновой накачки дипольно-обменными ПМСВ, рассмотрим некоторые изменения в характеристиках распространения ПМСВ, вызванные металлизацией пленки ЖИГ. Во-первых, размещение между входным и выходным преобразователями пленки Pt и контактов 3, 4 (см. рис. 1) приводит к заметному ослаблению ПМСВ по сравнению со случаем макета ЛЗ на основе пленки ЖИГ (см. кривые 1 и 2 на рис. 3, *a*). Оказалось, что отмеченный рост потерь ПМСВ обусловлен, в основном, медными контактными микрополосками на платине. В этом мы убедились, изготовив макет ЛЗ без пленки Pt, но с медными контактами 3 и 4, и получив для него зависимость  $S_{12}(f)$ , различающуюся с кривой 1 на рис. 3, *a* в пределах 1–2 дБ. Отметим, что влияние электронов проводимости на дисперсию и затухание ПМСВ характеризуется параметром спин-электронной связи  $G = h / (k \cdot l_{sk}^2)$  [46]. При толщине металла  $h = 500$  нм, глубине скин-слоя  $l_{sk} \approx 1$  мкм и диапазона волновых чисел  $1500 < k < 8000$  см<sup>-1</sup> параметр  $G$  принимает значения  $3 > G > 0.6$ . При таких значениях  $G$  распространяющихся ПМСВ в металлизированной пленке ЖИГ нет [47, 48].

Однако результаты измерения зависимости  $k = k(f)$  для структуры ЖИГ/Pt оказались близки к случаю не металлизированной пленки (см. кривую 4, рис. 2, *b*). Это можно объяснить, если принять во внимание следующие обстоятельства. В нашем случае по ширине медного контакта порядка 15 мкм укладывается не более четырех длин волн ПМСВ. Кроме того, протяженность

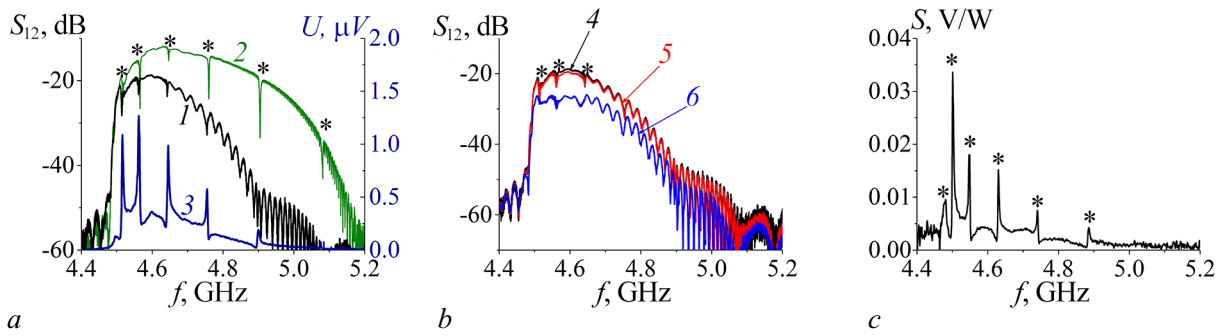


Рис. 3. Структура ЖИГ/Pt. *a* – Частотные зависимости  $S_{12}(f)$  и  $U(f)$  (кривые 1 и 3) при  $P_{in} = -10$  дБм, кривой 2 показана зависимость  $S_{12}(f)$  в макете ЛЗ на основе пленки ЖИГ; *b* –  $S_{12}(f)$  при  $P_{in} = -20$  (4),  $-10$  (5) и  $0$  (6) дБм; *c* – Частотная зависимость вольт-ваттной чувствительности  $S(f)$  при  $P_{in} = -10$  дБм (цвет онлайн)

Fig. 3. YIG/Pt structure. *a* – Frequency dependencies  $S_{12}(f)$  and  $U(f)$  (curves 1 and 3) at  $P_{in} = -10$  dBm; the curve 2 shows the  $S_{12}(f)$  dependence in the delay line structure based on YIG film; *b* –  $S_{12}(f)$  at  $P_{in} = -20$  (4),  $-10$  (5) and  $0$  (6) dBm; *c* – The frequency dependence of volt-watt sensitivity  $S(f)$  at  $P_{in} = -10$  dBm (color online)

участка пленки под медными контактами в направлении распространения ПМСВ составляет примерно 12% от расстояния между входной и выходной антеннами. Наконец, на участке макета ЛЗ, покрытом пленкой Pt при  $t \approx 9$  нм и  $l_{sk} \approx 7$  мкм, параметр  $G < 0.1$  и влияние платины на дисперсию ПМСВ мало [22].

Во-вторых, вносимые электронные потери приводят к заметному росту уровня падающей мощности  $P_{in}$ , необходимого для достижения порога 4М параметрической неустойчивости ПМСВ. Действительно, из сравнения спектров передачи  $|S_{12}(f, P)|$  при  $P_{in} = -20$  дБм и  $P_{in} = -10$  дБм, показанных кривыми 1 и 2 на рис. 2, *a* и рис. 3, *b*, можно видеть, что в структуре ЖИГ/Pt изменения, вызванные развитием параметрической неустойчивости, при  $P_{in} = -10$  дБм наблюдаются лишь в узком диапазоне частот, тогда как в пленке ЖИГ без платины они видны во всей полосе частот и в разы больше.

С учетом сказанного обратимся теперь к результатам измерения эффекта генерации ЭДС в структуре ЖИГ/Pt в зависимости от уровня мощности  $P$ . На рис. 3, *a* кривой 3 показана частотная зависимость ЭДС  $U(f)$  при уровне падающей мощности  $P_{in} = -20$  дБм. Видно, что на частотах, отмеченных «\*», ЭДС резонансно возрастает. При этом вольт-ваттная чувствительность  $S$  также демонстрирует рост значений почти на порядок (см. рис. 3, *c*). Мы связываем такой рост ЭДС с возникновением сингулярностей ван Хофа в плотности состояний  $\eta(f)$  на частотах  $f_N$ , что должно приводить к росту эффективности электрон-магнетонного рассеяния [16].

Действительно, если при объяснении роста ЭДС опираться на пропорциональность плотности спинового тока  $|J_s|$  амплитуде намагниченности на интерфейсе  $|m(z=0)|$ , то, согласно результатам микромагнитного моделирования, показанным кривой 6 на рис. 2, *d*, величина ЭДС должна снижаться пропорционально уменьшению  $|m(z=0)|$  на частоте резонанса  $f_N$ . Кроме того, из сопоставления значений ЭДС или чувствительности  $S$  для резонансов с различными номерами  $N$ , показанных на рис. 3, *c*, следует, что эти величины напрямую не связаны со значениями проекции волнового числа на нормаль к пленке  $k_{\perp, N} = \pi N/d$ .

Рассмотрим теперь влияние 4М параметрических процессов на генерацию ЭДС дипольно-обменными ПМСВ. На рис. 4, *a* приведены результаты измерения зависимостей  $U(f)$  при различных уровнях падающей мощности. Можно видеть, что ЭДС на резонансных частотах  $f_N$  уменьшается с ростом  $P_{in}$ . При дальнейшем увеличении  $P_{in}$  резонансные особенности в зависимости  $U(f)$  могут исчезнуть. Это иллюстрирует рис. 4, *b*, где приведены зависимости  $U = U(P_{in})$  для частоты  $f_1 \approx 4.952$  ГГц, находящейся между резонансными частотами  $f_{N=3}$

Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л.,  
Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А.

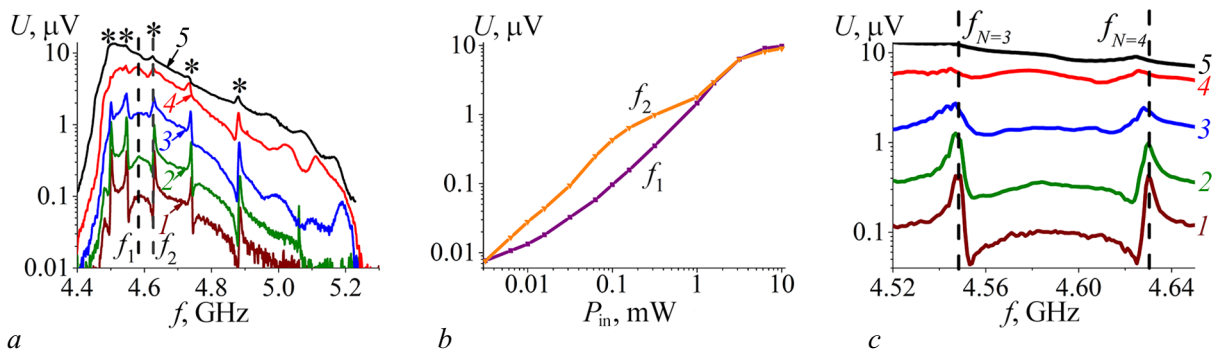


Рис. 4. *a* – Кривые 1–5 отвечают, соответственно, зависимостям  $U(f)$  при  $P_{\text{in}} = -10; -5; 0; 5; 10$  дБм; *b* – зависимости  $U = U(P_{\text{in}})$  на частотах  $f_1 \approx 4.582$  ГГц и  $f_2 \approx 4.631$  ГГц, положение которых показано вертикальными пунктирными линиями на рис. *a*; *c* – влияние мощности ПМСВ на положение частот дипольно-обменных резонансов с номерами  $N = 3$  и  $N = 4$ , вертикальные пунктирные линии показывают положение пика ЭДС на частотах  $f_{N=3}$  и  $f_{N=4}$  при  $P_{\text{in}} = -10$  дБм (цвет онлайн)

Fig. 4. *a* – The curves 1–5 show the  $U(f)$  dependencies at  $P_{\text{in}} = -10; -5; 0; 5; 10$  dBm; *b* – the dependencies  $U = U(P_{\text{in}})$  at frequencies  $f_1 \approx 4.582$  GHz and  $f_2 \approx 4.631$  GHz, which position is shown by vertical dash lines in Fig. *a*; *c* – the influence of MSSW power on position of dipole-exchange resonances with the numbers  $N = 3$  and  $N = 4$ ; vertical dash lines show the EMF peak position at frequencies  $f_{N=3}$  and  $f_{N=4}$  at  $P_{\text{in}} = -10$  dBm (color online)

и  $f_{N=4}$ , и  $f_2 \approx 4.631$  ГГц, которая при  $P_{\text{in}} = -10$  дБм отвечает резонансной частоте  $f_{N=4}$ . Можно видеть, что зависимости  $U = U(f_{1,2}, P_{\text{in}})$  нелинейны и имеют тенденцию к насыщению с ростом  $P_{\text{in}}$ . При этом следует отметить, что зависимость  $U(P_{\text{in}})$  для частоты  $f_1$  растет быстрее при падающей мощности  $0.2 < P_{\text{in}} < 1$  мВт.

Такое поведение можно объяснить, связав величину пика ЭДС с амплитудой  $\Delta k$  участка аномальной дисперсии на частоте дипольно-обменного резонанса, см. вставку к рис. 2, *b*. Исчезновение аномальных участков в спектре ПМСВ отражает отключение процесса заселения участков спектра бегущими дипольно-обменными ПМСВ и, как следствие, падение эффективности электрон-магнонного рассеяния на интерфейсе. Сказанное отнюдь не означает, что уменьшается число магнонов на интерфейсе. Наоборот, разрушение дипольно-обменного резонанса на частоте накачки приводит к уменьшению числа магнонов, «уходящих» от поверхности в объем пленки. Причиной падения эффективности электрон-магнонного рассеяния является уменьшение числа состояний, в которые может рассеяться ферми-частица (электрон) из-за исчезновения сингулярностей в спектре СВ.

К этому следует добавить, что в ряде случаев процессы (3), наоборот, могут способствовать более быстрому росту зависимости  $U(P_{\text{in}})$ . Сказанное иллюстрирует зависимость  $U = U(f_1, P_{\text{in}})$  на рис. 4, *b* при  $0.2 < P_{\text{in}} < 1$  мВт. Такое поведение  $U = U(f_1, P_{\text{in}})$  можно объяснить, если принять во внимание, что рождаемые в результате процессов (3) параметрические СВ заселяют участки спектра СВ с сингулярностями в плотности состояний. Важно также отметить, что на частотах сингулярностей ван Хова растет эффективная масса магнонов  $m^{\text{eff}} \sim \hbar \frac{\partial^2 f}{\partial k^2}$  и может быть больше массы электронов в платине. Интуитивно понятно, что «тяжелые» магноны эффективнее рассеивают электроны.

Отметим, что к разрушению дипольно-обменных резонансов приводит не только рост нелинейных потерь в результате процессов (3). Нелинейность и диссипация приводят к тому, что пленка ЖИГ становится неоднородна в направлении распространения волны [22, 39, 40, 49]. Измеряемые в эксперименте зависимости  $\Delta k(f, P_{\text{in}})$  отражают интегральный набег фазы нелинейной волны в макете ЛЗ [40]. При этом локальные изменения дисперсионных характеристик могут оказаться гораздо больше по величине.

Следует также учитывать нелинейный сдвиг спектра СВ, вызванный уменьшением проекции намагниченности пленки  $4\pi M_y(x)$  на направление магнитного поля  $\vec{H}$  за счет разогрева пленки СВЧ-мощностью и эффекта динамического размагничивания [22, 49]:

$$4\pi M_y(x) = \gamma 4\pi M_0 \cdot \left(1 - \frac{m(x)^2}{M_0^2}\right), \quad (7)$$

где амплитуда  $m(x=0)$  связана с  $P_{in}$  через соотношение (6), а зависимость от координаты  $x$  отражает затухание амплитуды ПМСВ  $m(x)$  при распространении (см. рис. 1). При этом от  $P_{in}$  и координаты  $x$  оказываются зависимыми все характерные частоты, определяющие частоты дипольно-обменных резонансов:

$$f_0(x) = \sqrt{f_H^2 + f_H \cdot f_m(x)}, \quad f_m(x) = \gamma 4\pi M_y(x), \quad (8)$$

$$f_N(x) = \sqrt{(f_H + f_{ex}(x))(f_H + f_{ex}(x) + f_m(x))}. \quad (9)$$

На рис. 4, с приведены зависимости от  $P_{in}$  положения максимумов в частотной зависимости ЭДС для дипольно-обменных резонансов на частотах  $f_{N=3}$  и  $f_{N=4}$ . Видно, что с ростом мощности одновременно с «разрушением» резонансных пиков происходит их сдвиг «вниз» по частоте.

### Заключение

Таким образом, исследовано влияние процессов четырехмагнонной параметрической неустойчивости на генерацию спинового тока при спиновой накачке дипольно-обменными поверхностными магнитостатическими волнами, распространяющимися в линии задержки на основе структуры ЖИГ(900 нм)/Pt(9 нм). Используя для детектирования спинового тока ЭДС, генерируемую за счет обратного спинового эффекта Холла, показано, что эффективность накачки резонансно растет на частотах дипольно-обменных резонансов. Такой рост объясняется ростом эффективности электрон-магнонного рассеяния за счет сингулярностей ван Хофа в плотности состояний спиновых волн и большой эффективной массой магнонов на частотах дипольно-обменных резонансов. Обнаружено, что рост мощности поверхностных магнитостатических волн за порогом  $P_{th}^{4M}$  развития 4М неустойчивости приводит к «сглаживанию» резонансных особенностей в частотной зависимости ЭДС  $U(f)$ . Такое влияние 4М процессов на зависимость  $U(f)$  объясняется снижением эффективности спиновой накачки из-за разрушения при  $P > P_{th}^{4M}$  дипольно-обменных резонансов и связанных с ними сингулярностей в плотности состояний спиновых волн в спектре структуры ЖИГ/Pt. Полученные результаты могут представлять интерес для разработки высокочувствительных детекторов спинового тока и устройств спинтроники.

### Список литературы

1. *Kajiwara Y., Harii K., Takahashi S., Ohe J., Uchida K., Mizuguchi M., Umezawa H., Kawai H., Ando K., Takanashi K., Maekawa S., Saitoh E.* Transmission of electrical signals by spin-wave interconversion in a magnetic insulator // *Nature*. 2010. Vol. 464, no. 7286. P. 262–266. DOI: 10.1038/nature08876.
2. *Sinova J., Valenzuela S. O., Wunderlich J., Back C. H., Jungwirth T.* Spin Hall effects // *Rev. Mod. Phys.* 2015. Vol. 87, no. 4. P. 1213–1260. DOI: 10.1103/RevModPhys.87.1213.
3. *Althammer M.* Pure spin currents in magnetically ordered insulator/normal metal heterostructures // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2018. Vol. 51, no. 31. P. 313001. DOI: 10.1088/1361-6463/aaca89.
4. *Brataas A., van Wees B., Klein O., de Loubens G., Viret M.* Spin insulatronics // *Physics Reports*. 2020. Vol. 885. P. 1–27. DOI: 10.1016/j.physrep.2020.08.006.

Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л.,  
Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А.

5. Sandweg C. W., Kajiwara Y., Ando K., Saitoh E., Hillebrands B. Enhancement of the spin pumping efficiency by spin wave mode selection // *Appl. Phys. Lett.* 2010. Vol. 97, no. 25. P. 252504. DOI: 10.1063/1.3528207.
6. Chumak A. V., Serga A. A., Jungfleisch M. B., Neb R., Bozhko D. A., Tiberkevich V. S., Hillebrands B. Direct detection of magnon spin transport by the inverse spin Hall effect // *Appl. Phys. Lett.* 2012. Vol. 100, no. 8. P. 082405. DOI: 10.1063/1.3689787.
7. Balinsky M., Ranjbar M., Haidar M., Dürrenfeld P., Khartsev S., Slavin A., Åkerman J., Dumas R. K. Spin pumping and the inverse spin-hall effect via magnetostatic surface spin-wave modes in Yttrium-Iron garnet/platinum bilayers // *IEEE Magn. Lett.* 2015. Vol. 6. P. 3000604. DOI: 10.1109/LMAG.2015.2471276.
8. Iguchi R., Ando K., Qiu Z., An T., Saitoh E., Sato T. Spin pumping by nonreciprocal spin waves under local excitation // *Appl. Phys. Lett.* 2013. Vol. 102, no. 2. P. 022406. DOI: 10.1063/1.4775685.
9. d'Allivy Kelly O., Anane A., Bernard R., Ben Youssef J., Hahn C., Molpeceres A. H., Carrétéro C., Jacquet E., Deranlot C., Bortolotti P., Lebourgeois R., Mage J.-C., de Loubens G., Klein O., Cros V., Fert A. Inverse spin Hall effect in nanometer-thick yttrium iron garnet/Pt system // *Appl. Phys. Lett.* 2013. Vol. 103, no. 8. P. 082408. DOI: 10.1063/1.4819157.
10. Uchida K., Xiao J., Adachi H., Ohe J., Takahashi S., Ieda J., Ota T., Kajiwara Y., Umezawa H., Kawai H., Bauer G. E. W., Maekawa S., Saitoh E. Spin Seebeck insulator // *Nature Materials.* 2010. Vol. 9, no. 11. P. 894–897. DOI: 10.1038/nmat2856.
11. Agrawal M., Vasyuchka V. I., Serga A. A., Kirihara A., Pirro P., Langner T., Jungfleisch M. B., Chumak A. V., Papaioannou E. T., Hillebrands B. Role of bulk-magnon transport in the temporal evolution of the longitudinal spin-Seebeck effect // *Phys. Rev. B.* 2014. Vol. 89, no. 22. P. 224414. DOI: 10.1103/PhysRevB.89.224414.
12. Sandweg C. W., Kajiwara Y., Chumak A. V., Serga A. A., Vasyuchka V. I., Jungfleisch M. B., Saitoh E., Hillebrands B. Spin pumping by parametrically excited exchange magnons // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106, no. 21. P. 216601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.216601.
13. Kurebayashi H., Dzyapko O., Demidov V. E., Fang D., Ferguson A. J., Demokritov S. O. Controlled enhancement of spin-current emission by three-magnon splitting // *Nature Materials.* 2011. Vol. 10, no. 9. P. 660–664. DOI: 10.1038/nmat3053.
14. Kurebayashi H., Dzyapko O., Demidov V. E., Fang D., Ferguson A. J., Demokritov S. O. Spin pumping by parametrically excited short-wavelength spin waves // *Appl. Phys. Lett.* 2011. Vol. 99, no. 16. P. 162502. DOI: 10.1063/1.3652911.
15. Manuilov S. A., Du C. H., Adur R., Wang H. L., Bhallamudi V. P., Yang F. Y., Hammel P. C. Spin pumping from spinwaves in thin film YIG // *Appl. Phys. Lett.* 2015. Vol. 107, no. 4. P. 042405. DOI: 10.1063/1.4927451.
16. Tveten E. G., Brataas A., Tserkovnyak Y. Electron-magnon scattering in magnetic heterostructures far out of equilibrium // *Phys. Rev. B.* 2015. Vol. 92, no. 18. P. 180412. DOI: 10.1103/PhysRevB.92.180412.
17. Saitoh E., Ueda M., Miyajima H., Tatara G. Conversion of spin current into charge current at room temperature: Inverse spin-Hall effect // *Appl. Phys. Lett.* 2006. Vol. 88, no. 18. P. 182509. DOI: 10.1063/1.2199473.
18. Maekawa S., Adachi H., Uchida K., Ieda J., Saitoh E. Spin current: Experimental and theoretical aspects // *J. Phys. Soc. Jpn.* 2013. Vol. 82, no. 10. P. 102002. DOI: 10.7566/JPSJ.82.102002.
19. Van Hove L. The occurrence of singularities in the elastic frequency distribution of a crystal // *Phys. Rev.* 1953. Vol. 89, no. 6. P. 1189–1193. DOI: 10.1103/PhysRev.89.1189.
20. Damon R. W., Eshbach J. R. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // *Journal of Physics and Chemistry of Solids.* 1961. Vol. 19, no. 3–4. P. 308–320. DOI: 10.1016/0022-3697(61)90041-5.
21. Nikulin Y. V., Seleznev M. E., Khivintsev Y. V., Sakharov V. K., Pavlov E. S., Vysotskii S. L.,

- Kozhevnikov A. V., Filimonov Y. A.* EMF generation by propagating magnetostatic surface waves in integrated thin-film Pt/YIG structure // *Semiconductors*. 2020. Vol. 54, no. 12. P. 1721–1724. DOI: 10.1134/S106378262012026X.
22. *Селезнев М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л., Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Павлов Е. С., Филимонов Ю. А.* Влияние трехмагнонных распадов на генерацию ЭДС поверхностными магнитостатическими волнами в интегральных структурах ЖИГ–Pt // *Известия вузов. ПНД*. 2022. Т. 30, № 5. С. 617–643. DOI: 10.18500/0869-6632-003008.
  23. *De Wames R. E., Wolfram T.* Dipole-exchange spin waves in ferromagnetic films // *J. Appl. Phys.* 1970. Vol. 41, no. 3. P. 987–993. DOI: 10.1063/1.1659049.
  24. *Селезнев М. Е., Никулин Ю. В., Сахаров В. К., Хивинцев Ю. В., Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Филимонов Ю. А.* Влияние резонансного взаимодействия поверхностных магнитостатических волн с обменными модами на генерацию ЭДС в структурах YIG/Pt // *ЖТФ*. 2021. Т. 91, № 10. С. 1504–1508. DOI: 10.21883/JTF.2021.10.51363.136-21.
  25. *Никулин Ю. В., Кожевников А. В., Высоцкий С. Л., Селезнев М. Е., Хивинцев Ю. В., Филимонов Ю. А.* Исследование интерференции поверхностных магнитостатических волн с помощью обратного спинового эффекта Холла // *ФТТ*. 2022. Т. 64, № 9. С. 1293–1297. DOI: 10.21883/FTT.2022.09.52822.21НН.
  26. *Гуревич А. Г., Мелков Г. А.* Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994. 464 с.
  27. *Вашковский А. В., Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Издательство Саратовского университета, 1993. 312 с.
  28. *Львов В. С.* Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987. 272 с.
  29. *Castel V., Vlietstra N., Ben Youssef J., Van Wees B. J.* Platinum thickness dependence of the inverse spin-Hall voltage from spin pumping in a hybrid yttrium iron garnet/platinum system // *Appl. Phys. Lett.* 2012. Vol. 101, no. 13. P. 132414. DOI: 10.1063/1.4754837.
  30. *Castel V., Vlietstra N., Van Wees B. J., Ben Youssef J.* Frequency and power dependence of spin-current emission by spin pumping in a thin-film YIG/Pt system // *Phys. Rev. B*. 2012. Vol. 86, no. 13. P. 134419. DOI: 10.1103/PhysRevB.86.134419.
  31. *Jungfleisch M. B., Chumak A. V., Kehlberger A., Lauer V., Kim D. H., Onbasli M. C., Ross C. A., Kläui M., Hillebrands B.* Thickness and power dependence of the spin-pumping effect in Y3Fe5O12/Pt heterostructures measured by the inverse spin Hall effect // *Phys. Rev. B*. 2015. Vol. 91, no. 13. P. 134407. DOI: 10.1103/PhysRevB.91.134407.
  32. *Watanabe S., Hirobe D., Shiomi Y., Iguchi R., Daimon S., Kameda M., Takahashi S., Saitoh E.* Generation of megahertz-band spin currents using nonlinear spin pumping // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7, no. 1. P. 4576. DOI: 10.1038/s41598-017-04901-4.
  33. *Ando K., Saitoh E.* Spin pumping driven by bistable exchange spin waves // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 109, no. 2. P. 026602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.026602.
  34. *Khivintsev Y. V., Filimonov Y. A., Nikitov S. A.* Spin wave excitation in yttrium iron garnet films with micron-sized antennas // *Appl. Phys. Lett.* 2015. Vol. 106, no. 5. P. 052407. DOI: 10.1063/1.4907626.
  35. *Nur Kholid F., Hamara D., Terschanski M., Mertens F., Bossini D., Cinchetti M., McKenzie-Sell L., Patchett J., Petit D., Cowburn R., Robinson J., Barker J., Ciccirelli C.* Temperature dependence of the picosecond spin Seebeck effect // *Appl. Phys. Lett.* 2021. Vol. 119, no. 3. P. 032401. DOI: 10.1063/5.0050205.
  36. *Медников А. М.* Нелинейные эффекты при распространении поверхностных спиновых волн в пленках ЖИГ // *ФТТ*. 1981. Т. 23, № 1. С. 242–245.
  37. *Темирязев А. Г.* Механизм преобразования частоты поверхностной магнитостатической волны в условиях трехмагнонного распада // *ФТТ*. 1987. Т. 29, № 2. С. 313–319.

*Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л.,  
Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А.*  
Известия вузов. ПНД, 2023, т. 31, № 2

38. Ползикова Н. И., Раевский А. О., Темиряев А. Г. Влияние обменного взаимодействия на границу трехмагнетонного распада волны Дэймона–Эшбаха в тонких пленках ЖИГ // ФТТ. 1984. Т. 26, № 11. С. 3506–3508.
39. Казаков Г. Т., Кожевников А. В., Филимонов Ю. А. Четырехмагнетонный распад поверхностных магнитостатических волн в пленках железо-иттриевого граната // ФТТ. 1997. Т. 39, № 2. С. 330–338.
40. Казаков Г. Т., Кожевников А. В., Филимонов Ю. А. Влияние параметрически возбужденных спиновых волн на дисперсию и затухание поверхностных магнитостатических волн в ферритовых пленках // ЖЭТФ. 1999. Т. 115, № 1. С. 318–332.
41. Гуляев Ю. В., Бугаев А. С., Зильберман П. Е., Игнатъев И. А., Коновалов А. Г., Луговской А. В., Медников А. М., Нам Б. П., Николаев Е. И. Гигантские осцилляции прохождения квазиповерхностной спиновой волны через тонкую пленку железо-иттриевого граната // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30, № 9. Р. 600–603.
42. Гуляев Ю. В., Зильберман П. Е., Луговской А. В. Влияние неоднородного обмена и диссипации на распространение поверхностных волн Деймона–Эшбаха в ферромагнитной пластине // ФТТ. 1981. Т. 23, № 4. С. 1136–1142.
43. Donahue M. J., Porter D. G. OOMMF User's Guide. Interagency Report NISTIR 6376. Gaithersburg, MD: National Institute of Standards and Technology, 1999. 94 p. DOI: 10.6028/NIST.IR.6376.
44. Dvornik M., Au Y., Kruglyak V. V. Micromagnetic Simulations in Magnonics. In: Demokritov S., Slavin A. (eds) Magnonics. Vol. 125 of Topics in Applied Physics. Berlin: Springer, 2013. P. 101–115. DOI: 10.1007/978-3-642-30247-3\_8.
45. Сахаров В. К., Хивинцев Ю. В., Дудко Г. М., Джумалиев А. С., Высоцкий С. Л., Стогний А. И., Филимонов Ю. А. Особенности распространения спиновых волн в магнетонных кристаллах с неоднородным распределением намагниченности по толщине // ФТТ. 2022. Т. 64, № 9. С. 1255–1262. DOI: 10.21883/ФТТ.2022.09.52815.11НН.
46. Бугаев А. С., Галкин О. Л., Гуляев Ю. В., Зильберман П. Е. Увлечение электронов магнитостатической волной в слоистой структуре феррит-металл // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8, № 8. С. 485–488.
47. Веселов А. Г., Высоцкий С. Л., Казаков Г. Т., Сухарев А. Г., Филимонов Ю. А. Поверхностные магнитостатические волны в металлизированных пленках ЖИГ // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 12. С. 2067–2074.
48. Филимонов Ю. А., Хивинцев Ю. В. Взаимодействие поверхностной магнитостатической и объемных упругих волн в металлизированной структуре ферромагнетик-диэлектрик // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 8. С. 1002–1007.
49. Сахаров В. К., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л., Стогний А. И., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А. Влияние мощности входного сигнала на распространение поверхностных магнитостатических волн в пленках железо-иттриевого граната на подложках кремния // Известия вузов. ПНД. 2017. Т. 25, № 1. С. 35–51. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-35-51.

## References

1. Kajiwara Y, Harii K, Takahashi S, Ohe J, Uchida K, Mizuguchi M, Umezawa H, Kawai H, Ando K, Takanashi K, Maekawa S, Saitoh E. Transmission of electrical signals by spin-wave interconversion in a magnetic insulator. *Nature*. 2010;464(7286):262–266. DOI: 10.1038/nature08876.
2. Sinova J, Valenzuela SO, Wunderlich J, Back CH, Jungwirth T. Spin Hall effects. *Rev. Mod. Phys.* 2015;87(4):1213–1260. DOI: 10.1103/RevModPhys.87.1213.
3. Althammer M. Pure spin currents in magnetically ordered insulator/normal metal heterostructures. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2018;51(31):313001. DOI: 10.1088/1361-6463/aaca89.

4. Brataas A, van Wees B, Klein O, de Loubens G, Viret M. Spin insulatronics. *Physics Reports*. 2020;885:1–27. DOI: 10.1016/j.physrep.2020.08.006.
5. Sandweg CW, Kajiwara Y, Ando K, Saitoh E, Hillebrands B. Enhancement of the spin pumping efficiency by spin wave mode selection. *Appl. Phys. Lett.* 2010;97(25):252504. DOI: 10.1063/1.3528207.
6. Chumak AV, Serga AA, Jungfleisch MB, Neb R, Bozhko DA, Tiberkevich VS, Hillebrands B. Direct detection of magnon spin transport by the inverse spin Hall effect. *Appl. Phys. Lett.* 2012;100(8):082405. DOI: 10.1063/1.3689787.
7. Balinsky M, Ranjbar M, Haidar M, Dürrenfeld P, Khartsev S, Slavin A, Åkerman J, Dumas RK. Spin pumping and the inverse spin-hall effect via magnetostatic surface spin-wave modes in Yttrium-Iron garnet/platinum bilayers. *IEEE Magn. Lett.* 2015;6:3000604. DOI: 10.1109/LMAG.2015.2471276.
8. Iguchi R, Ando K, Qiu Z, An T, Saitoh E, Sato T. Spin pumping by nonreciprocal spin waves under local excitation. *Appl. Phys. Lett.* 2013;102(2):022406. DOI: 10.1063/1.4775685.
9. d’Allivy Kelly O, Anane A, Bernard R, Ben Youssef J, Hahn C, Molpeceres AH, Carrétéro C, Jacquet E, Deranlot C, Bortolotti P, Lebourgeois R, Mage JC, de Loubens G, Klein O, Cros V, Fert A. Inverse spin Hall effect in nanometer-thick yttrium iron garnet/Pt system. *Appl. Phys. Lett.* 2013;103(8):082408. DOI: 10.1063/1.4819157.
10. Uchida K, Xiao J, Adachi H, Ohe J, Takahashi S, Ieda J, Ota T, Kajiwara Y, Umezawa H, Kawai H, Bauer GEW, Maekawa S, Saitoh E. Spin Seebeck insulator. *Nature Materials*. 2010;9(11):894–897. DOI: 10.1038/nmat2856.
11. Agrawal M, Vasyuchka VI, Serga AA, Kirihara A, Pirro P, Langner T, Jungfleisch MB, Chumak AV, Papaioannou ET, Hillebrands B. Role of bulk-magnon transport in the temporal evolution of the longitudinal spin-Seebeck effect. *Phys. Rev. B*. 2014;89(22):224414. DOI: 10.1103/PhysRevB.89.224414.
12. Sandweg CW, Kajiwara Y, Chumak AV, Serga AA, Vasyuchka VI, Jungfleisch MB, Saitoh E, Hillebrands B. Spin pumping by parametrically excited exchange magnons. *Phys. Rev. Lett.* 2011;106(21):216601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.216601.
13. Kurebayashi H, Dzyapko O, Demidov VE, Fang D, Ferguson AJ, Demokritov SO. Controlled enhancement of spin-current emission by three-magnon splitting. *Nature Materials*. 2011;10(9):660–664. DOI: 10.1038/nmat3053.
14. Kurebayashi H, Dzyapko O, Demidov VE, Fang D, Ferguson AJ, Demokritov SO. Spin pumping by parametrically excited short-wavelength spin waves. *Appl. Phys. Lett.* 2011;99(16):162502. DOI: 10.1063/1.3652911.
15. Manuilov SA, Du CH, Adur R, Wang HL, Bhallamudi VP, Yang FY, Hammel PC. Spin pumping from spinwaves in thin film YIG. *Appl. Phys. Lett.* 2015;107(4):042405. DOI: 10.1063/1.4927451.
16. Tveten EG, Brataas A, Tserkovnyak Y. Electron-magnon scattering in magnetic heterostructures far out of equilibrium. *Phys. Rev. B*. 2015;92(18):180412. DOI: 10.1103/PhysRevB.92.180412.
17. Saitoh E, Ueda M, Miyajima H, Tatara G. Conversion of spin current into charge current at room temperature: Inverse spin-Hall effect. *Appl. Phys. Lett.* 2006;88(18):182509. DOI: 10.1063/1.2199473.
18. Maekawa S, Adachi H, Uchida K, Ieda J, Saitoh E. Spin current: Experimental and theoretical aspects. *J. Phys. Soc. Jpn.* 2013;82(10):102002. DOI: 10.7566/JPSJ.82.102002.
19. Van Hove L. The occurrence of singularities in the elastic frequency distribution of a crystal. *Phys. Rev.* 1953;89(6):1189–1193. DOI: 10.1103/PhysRev.89.1189.
20. Damon RW, Eshbach JR. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 1961;19(3–4):308–320. DOI: 10.1016/0022-3697(61)90041-5.
21. Nikulin YV, Seleznev ME, Khivintsev YV, Sakharov VK, Pavlov ES, Vysotskii SL, Kozhevnikov AV,

*Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л.,  
Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А.*



- Filimonov YA. EMF generation by propagating magnetostatic surface waves in integrated thin-film Pt/YIG structure. *Semiconductors*. 2020;54(12):1721–1724. DOI: 10.1134/S106378262012026X.
22. Seleznev ME, Nikulin YV, Khivintsev YV, Vysotskii SL, Kozhevnikov AV, Sakharov VK, Dudko GM, Pavlov ES, Filimonov YA. Influence of three-magnon decays on electromotive force generation by magnetostatic surface waves in integral YIG – Pt structures. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(5):617–643. DOI: 10.18500/0869-6632-003008.
  23. De Wames RE, Wolfram T. Dipole-exchange spin waves in ferromagnetic films. *J. Appl. Phys.* 1970;41(3):987–993. DOI: 10.1063/1.1659049.
  24. Seleznev ME, Nikulin UV, Sakharov VK, Khivintsev UV, Kozhevnikov AV, Vysotskii SL, Filimonov UA. Influence of the resonant interaction of surface magnetostatic waves with exchange modes on the EMF generation in YIG/Pt structures. *Tech. Phys.* 2021;91(10):1504–1508 (in Russian). DOI: 10.21883/JTF.2021.10.51363.136-21.
  25. Nikulin YV, Kozhevnikov AV, Vysotskii SL, Seleznev ME, Khivintsev YV, Filimonov YA. Investigation of the interference of magnetostatic surface waves using the inverse spin Hall effect. *Physics of the Solid State*. 2022;64(9):1284–1288. DOI: 10.21883/PSS.2022.09.54167.21HH.
  26. Gurevich AG, Melkov GA. *Magnetization Oscillations and Waves*. Boca Raton: CRC Press; 1996. 464 p.
  27. Vashkovskii AV, Stalmakhov VS, Sharaevskii YP. *Magnetostatic Waves in High-Frequency Electronics*. Saratov: Saratov University Publishing; 1993. 312 p. (in Russian).
  28. Lvov VS. *Nonlinear Spin Waves*. Moscow: Nauka; 1987. 272 p. (in Russian).
  29. Castel V, Vlietstra N, Ben Youssef J, Van Wees BJ. Platinum thickness dependence of the inverse spin-Hall voltage from spin pumping in a hybrid yttrium iron garnet/platinum system. *Appl. Phys. Lett.* 2012;101(13):132414. DOI: 10.1063/1.4754837.
  30. Castel V, Vlietstra N, Van Wees BJ, Ben Youssef J. Frequency and power dependence of spin-current emission by spin pumping in a thin-film YIG/Pt system. *Phys. Rev. B*. 2012;86(13):134419. DOI: 10.1103/PhysRevB.86.134419.
  31. Jungfleisch MB, Chumak AV, Kehlberger A, Lauer V, Kim DH, Onbasli MC, Ross CA, Kläui M, Hillebrands B. Thickness and power dependence of the spin-pumping effect in Y3Fe5O12/Pt heterostructures measured by the inverse spin Hall effect. *Phys. Rev. B*. 2015;91(13):134407. DOI: 10.1103/PhysRevB.91.134407.
  32. Watanabe S, Hirobe D, Shiomi Y, Iguchi R, Daimon S, Kameda M, Takahashi S, Saitoh E. Generation of megahertz-band spin currents using nonlinear spin pumping. *Scientific Reports*. 2017;7(1):4576. DOI: 10.1038/s41598-017-04901-4.
  33. Ando K, Saitoh E. Spin pumping driven by bistable exchange spin waves. *Phys. Rev. Lett.* 2012;109(2):026602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.026602.
  34. Khivintsev YV, Filimonov YA, Nikitov SA. Spin wave excitation in yttrium iron garnet films with micron-sized antennas. *Appl. Phys. Lett.* 2015;106(5):052407. DOI: 10.1063/1.4907626.
  35. Nur Kholid F, Hamara D, Terschanski M, Mertens F, Bossini D, Cinchetti M, McKenzie-Sell L, Patchett J, Petit D, Cowburn R, Robinson J, Barker J, Ciccarelli C. Temperature dependence of the picosecond spin Seebeck effect. *Appl. Phys. Lett.* 2021;119(3):032401. DOI: 10.1063/5.0050205.
  36. Mednikov AM. Nonlinear effects under the propagation of surface spin waves in YIG films. *Soviet Physics, Solid State*. 1981;23(1):242–245 (in Russian).
  37. Temiryazev AG. The mechanism of transformation of magnetostatic surface waves in the conditions of three-magnon decay. *Soviet Physics, Solid State*. 1987;29(2):313–319 (in Russian).
  38. Polzikova NI, Raevskii AO, Temiryazev AG. Influence of exchange interaction on boundary of three-magnon decay of Damon-Eshbach wave in YIG thin films. *Soviet Physics, Solid State*. 1984;26(11):3506–3508 (in Russian).

39. Kazakov GT, Kozhevnikov AV, Filimonov YA. Four-magnon decay of magnetostatic surface waves in yttrium iron garnet films. *Physics of the Solid State*. 1997;39(2):288–295. DOI: 10.1134/1.1129801.
40. Kazakov GT, Kozhevnikov AV, Filimonov YA. The effect of parametrically excited spin waves on the dispersion and damping of magnetostatic surface waves in ferrite films. *J. Exp. Theor. Phys.* 1999;88(1):174–181. DOI: 10.1134/1.558780.
41. Gulyaev YV, Bugaev AS, Zil'berman PE, Ignat'ev IA, Konovalov AG, Lugovskoi AV, Mednikov AM, Nam BP, Nikolaev EI. Giant oscillations in the transmission of quasi-surface spin waves through a thin yttrium-iron garnet (YIG) film. *JETP Lett.* 1979;30(9):565–568.
42. Gulyaev YV, Zil'berman PE, Lugovskoi AV. Influence of nonuniform exchange and dissipation on propagation of surface Damon-Eshback waves in ferromagnetic plate. *Soviet Physics, Solid State*. 1981;23(4):1136–1142 (in Russian).
43. Donahue MJ, Porter DG. OOMMF User's Guide. Interagency Report NISTIR 6376. Gaithersburg, MD: National Institute of Standards and Technology; 1999. 94 p. DOI: 10.6028/NIST.IR.6376.
44. Dvornik M, Au Y, Kruglyak VV. Micromagnetic Simulations in Magnonics. In: Demokritov S, Slavin A, editors. *Magnonics*. Vol. 125 of Topics in Applied Physics. Berlin: Springer; 2013. P. 101–115. DOI: 10.1007/978-3-642-30247-3\_8.
45. Sakharov VK, Khivintsev YV, Dudko GM, Dzhumaliev AS, Vysotskii SL, Stognij AI, Filimonov YA. Particularities of spin wave propagation in magnonic crystals with nonuniform magnetization distribution across the thickness. *Physics of the Solid State*. 2022;64(9):1247–1254. DOI: 10.21883/PSS.2022.09.54160.11HH.
46. Bugaev AS, Galkin OL, Gulyaev YV, Zilberman PE. Electrons' drag by magnetostatic wave in a layered ferrite-metal structure. *Sov. Tech. Phys. Lett.* 1982;8(8):485–488 (in Russian).
47. Veselov AG, Vysotsky SL, Kazakov GT, Sukharev AG, Filimonov YA. Magnetostatic surface waves in metallized YIG films. *J. Commun. Technol. Electron.* 1994;39(12):2067–2074 (in Russian).
48. Filimonov YA, Khivintsev YV. Interaction of magnetostatic surface and elastic volume waves in a metallized structure ferromagnet-dielectric. *J. Commun. Technol. Electron.* 2002;47(8):1002–1007 (in Russian).
49. Sakharov VK, Khivintsev YV, Vysotskii SL, Stognij AI, Dudko GM, Filimonov YA. Influence of input signal power on magnetostatic surface waves propagation in yttrium-iron garnet films on silicon substrates. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017;25(1):35–51. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-35-51.



*Селезнёв Михаил Евгеньевич* — родился в г. Заречном (1994), окончил факультет нано- и био-медицинских технологий (СГУ, 2017) и аспирантуру (СГУ, 2022). Работает в Саратовском филиале ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН в должности младшего научного сотрудника. Профессиональные интересы: магнетика и спинтроника, магнитные материалы, физика полупроводников, физика твердого тела. Имеет ряд публикаций по указанным направлениям.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
 им. В. А. Котельникова РАН  
 E-mail: mixanich94@mail.ru  
 ORCID: 0000-0002-7359-3201  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1031873

*Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л.,  
 Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А.*  
 Известия вузов. ПНД, 2023, т. 31, № 2

*Никулин Юрий Васильевич* — родился в Саратове (1982), окончил Саратовский государственный университет (2004). После окончания СГУ работает в СФИРЭ им. В. А. Котельникова РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области физической электроники и материаловедения (СГУ, 2014). Опубликовал 28 научных статей по направлениям, указанным выше.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: yvnikulin@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-2957-5468  
AuthorID (eLibrary.Ru): 168029

*Хивинцев Юрий Владимирович* — родился в 1975 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского (1998). Кандидат физико-математических наук (2004). Ведущий научный сотрудник лаборатории магнитоэлектроники Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН и доцент Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. Область научных интересов – магнитные колебания и волны, СВЧ-электроника.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: khivintsev@gmail.com  
AuthorID (eLibrary.Ru): 39882

*Высоцкий Сергей Львович* — родился в Саратове (1955), окончил Саратовский политехнический институт (1977). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики (СГУ, 1994). Ведущий научный сотрудник лаборатории магнитоэлектроники Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Автор более 60 научных работ.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: vysotsl@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-3151-9297  
AuthorID (eLibrary.Ru): 27015

*Кожевников Александр Владимирович* — родился в Саратове (1962), окончил Саратовский государственный университет (1984). Работает в Саратовском филиале ИРЭ РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (2011) в области нелинейных спиновых волн. Опубликовал 23 научных статьи.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: kzhavl@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-8904-475X  
AuthorID (eLibrary.Ru): 27013



*Сахаров Валентин Константинович* — родился в пос. Соколовый Саратовской области (1986). Окончил Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2008) и аспирантуру ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (2011). В настоящее время работает научным сотрудником лаборатории магнитоэлектроники СВЧ Саратовского филиала ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: спин-волновые явления в магнитных микро- и наноструктурах, СВЧ-электроника. Имеет 17 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: valentin@sakharov.info  
ORCID: 0000-0001-7168-1198  
AuthorID (eLibrary.Ru): 818546



*Дудко Галина Михайловна* — родилась в Свердловске (1961). Окончила физический факультет Саратовского университета им. Н. Г. Чернышевского (1983). Кандидат физико-математических наук (2002). Область научных интересов: нелинейная динамика магнито-статических волн, микромагнитное моделирование динамики намагниченности в ферромагнитных нано- и микроструктурах. Имеет более 30 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: dugal\_2010@hotmail.com  
ORCID: 0000-0002-7083-4399  
AuthorID (eLibrary.Ru): 39883



*Филимонов Юрий Александрович* — родился в Куйбышеве (1955). Окончил факультет физической и квантовой электроники МФТИ (1979). Доктор физико-математических наук (2008), профессор по специальности «Физика магнитных явлений» (2012). Директор Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Профессиональные интересы: магнетроника и спинтроника, магнитные материалы и структуры, электронная компонентная база. Имеет более 120 публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: fil@soire.renet.ru  
ORCID: 0000-0002-2645-6669  
AuthorID (eLibrary.Ru): 18696

*Селезнёв М. Е., Никулин Ю. В., Хивинцев Ю. В., Высоцкий С. Л.,  
Кожевников А. В., Сахаров В. К., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А.*  
Известия вузов. ПНД, 2023, т. 31, № 2

## EDITOR-IN-CHIEF

*Yu. V. Gulyaev*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

## DEPUTY EDITORS

*I. V. Sysoev*, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. N. Chumachenko*, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

## EDITORIAL BOARD

*V. M. Anikin*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*B. P. Bezruchko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*S. Boccaletti*, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

*A. M. Bykov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

*V. A. Vakorin*, Ph.D., Simon Fraser University (Vancouver, Canada)

*S. V. Gonchenko*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*N. S. Ginzburg*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. S. Dmitriev*, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*S. A. Kashchenko*, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

*A. V. Kraskov*, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

*N. V. Kuznetsov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

*G. van Luijelaar*, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

*A. Lüttjohann*, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

*G. G. Malinetskii*, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

*V. V. Matrosov*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

*I. I. Mokhov*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

*A. B. Neiman*, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

*V. I. Nekorkin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

*A. S. Pkovsky*, Dr. rer. Nat. habil., Professor, University of Potsdam (Potsdam, Germany)

*A. N. Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

*A. V. Porubov*, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

*V. V. Tuchin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

*A. M. Feigin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

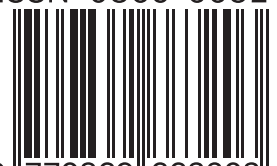
*V. A. Tsarev*, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

*V. A. Cherepenin*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

*M. V. Shitikova*, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

*V. G. Yakhno*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >