

ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Трикладная Деловая Динамика



30

лет

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
(Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского
(Саратов, Россия)

С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном
исследовательском совете (Флоренция, Италия)

А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН
(Санкт-Петербург, Россия)

В. А. Вакорин, Ph.D., Университет Саймона Фрейзера (Ванкувер, Канада)

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского
(Нижний Новгород, Россия)

Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН
(Нижний Новгород, Россия)

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
(Москва, Россия)

С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова
(Ярославль, Россия)

А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени
святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

А. Люттйоханн, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета
имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
(Москва, Россия)

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского
(Нижний Новгород, Россия)

И. И. Мохов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы
им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН
(Нижний Новгород, Россия)

А. С. Пиковский, доктор наук, Потсдамский университет (Потсдам, Германия)

А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского
(Саратов, Россия)

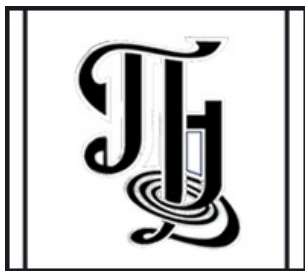
А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А (Саратов, Россия)

В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова
РАН (Москва, Россия)

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (uralpress.ru). Цена свободная

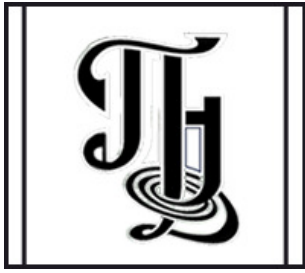
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией М. В. Сысоева
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова
Оформление А. А. Токмачевой
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 17.01.2023
Вышел в свет 31.01.2023
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 13,95 (14,7)
Тираж 100 экз. Заказ № 2-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru)

The journal is Open Access

Head of Editorial office M. V. Sysoeva
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova
Design of A. A. Tokmacheva
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 17.01.2023. Published 31.01.2023
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 13,95 (14,7)
Edition of 100 copies. Order No. 2-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОТ РЕДАКТОРА

Сысоев И. В. К 30-летию «Прикладной нелинейной динамики»..... 5

**БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ
ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС**

Полуновский А. А. Эффективные алгоритмы решения функциональных уравнений с суперпозицией на примере уравнения Фейгенбаума..... 8

Мохсени Т. И., Петросян М. М. Эксперименты по прямохаотической относительной передаче данных в проводном канале связи..... 20

Короновский А. А., Куровская М. К., Москаленко О. И. О типичности явления взрывной синхронизации в сетях осцилляторов с топологиями связей типа «кольцо» и «малый мир»..... 32

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Беленьков Р. Н., Постников Е. Б. Подход к расчету параметра нелинейности ультразвуковых волн в жидкости, основанный на масштабной теории термодинамических флуктуаций давления..... 45

Сафаров И. И., Тешаев М. Х. Динамическое гашение колебаний твёрдого тела, установленного на вязкоупругих опорах..... 63

Соловьев И. А., Клиньшов В. В. Пороги устойчивости аттракторов сети Хопфилда .. 75

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Ковалева Н. С., Матросов В. В., Мищенко М. А. Емкость рабочей памяти: роль параметров импульсной нейронной сети..... 86

Егоров Н. М., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Корнилов М. В., Сысоев И. В. Кольцевой генератор нейроподобной активности с перестраиваемой частотой..... 103

C O N T E N T S

EDITORIAL

<i>Sysoev I. V.</i> 30 years of “Applied Nonlinear Dynamics”	5
--	---

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.
QUANTUM CHAOS

<i>Polunovskii A. A.</i> Effective algorithms for solving functional equations with superposition on the example of the Feigenbaum equation	8
<i>Mokhseni T. I., Petrosyan M. M.</i> Experiments on direct chaotic differentially coherent data transmission in a wired communication channel	20
<i>Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Moskalenko O. I.</i> On the typicality of the explosive synchronization phenomenon in oscillator networks with the link topology of the “ring” and “small world” types	32

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Belenkov R. N., Postnikov E. B.</i> Approach to nonlinearity parameter in liquids calculation based on the scaling theory of thermodynamic fluctuations	45
<i>Safarov I. I., Teshaev M. K.</i> Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports	63
<i>Soloviev I. A., Klinshov V. V.</i> Stability thresholds of attractors of the Hopfield network....	75

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

<i>Kovaleva N. S., Matrosov V. V., Mishchenko M. A.</i> Working memory capacity: the role of parameters of spiking neural network model	86
<i>Egorov N. M., Sysoeva M. V., Ponomarenko V. I., Kornilov M. V., Sysoev I. V.</i> Ring generator of neuron-like activity with tunable frequency	103



К 30-летию «Прикладной нелинейной динамики»

И. В. Сысоев

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ivssci@gmail.com

Поступила в редакцию 15.01.2023, опубликована 31.01.2023

Для цитирования: Сысоев И. В. К 30-летию «Прикладной нелинейной динамики» // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 5–7. DOI: 10.18500/0869-6632-003029. EDN: EHDTNP

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

В этом году наш журнал, первый номер которого вышел в 1993 году, отмечает своё 30-летие. Журнал создавался в непростое время перемен. От регистрации издания в декабре 1991 до первого номера прошло более года, так что задуманный ещё в советское время по тогдашним лекалам, жизнь свою он начал уже в постперестроечной России. Как это всегда бывает с новым изданием, в первые выпуски авторов пришлось зазывать и заманивать самыми разными способами. Процесс вёрстки и издания тоже хромал. Поэтому за 1993 год удалось выпустить только два сдвоенных номера: 1–2 и 3–4. Тем не менее для Саратовского университета это был огромный шаг по возвращению в число научных издателей страны, поскольку издание «Ученых записок СГУ» завершилось в 1962 году и тридцать лет выпуск полноценных периодических рецензируемых журналов в университете не осуществлялся. Поэтому несмотря на принадлежность к почтенной советской серии «Известия вузов» (она наряду с «Известиями АН СССР» составляла костяк отечественной периодики), журнал первые годы не только выступал флагманом издательского дела в университете, но представлял собою своего рода былинного «чудо-богатыря», который и один сам себе в поле воин, воспрявшего от векового сна. Только через 8 лет, в 2001 году общая серия «Известия СГУ» была возрождена [1].

Журнал был задуман Дмитрием Ивановичем Трубецковым и реализован силами его учеников и коллег. Удивительно, но ставший в 1991 году членом-корреспондентом Академии наук и в 1994 году ректором СГУ Дмитрий Иванович тогда не занимал никаких больших должностей — был просто заведующим кафедрой электроники. Примерно в одно время с журналом были

созданы Лицей прикладных наук, ныне носящий его имя, и факультет нелинейных процессов — в то время считавшиеся двумя ступенями «Колледжа прикладных наук». Помимо огромной энергии, талантливых учеников, великолепного видения перспектив, Трубецкову помогло то, что он фактически был как это модно теперь говорить «сетевым человеком». Пускай привычных нам теперь электронных социальных сетей 30 лет назад ещё не было, сеть его знакомств опутывала научное сообщество почти всего распадавшегося Союза. Эти знакомства и уважение к его личности помогли создать и наполнить содержимым журнал, особенно — первые выпуски. Дмитрий Иванович вообще не очень любил тогда быть формальным начальником (двумя годами позднее ему придётся-таки бороться и принять ректорский пост), и если директором Высшего колледжа прикладных наук он попросил стать своего друга и соратника Юрия Ивановича Лёвина, то журнал возглавил другой его добрый знакомый — академик Юрий Васильевич Гуляев. Редакцию с самого начала и до 2019 года возглавляла Наталья Николаевна Лёвина.

При наименовании нового издания было выбрано более популярное в англоязычной среде словосочетание «нелинейная динамика», хотя сам Дмитрий Иванович более предпочитал термин синергетика [2]. Синергетика — это когда в результате совместной деятельности двух или более сущностей появляется что-то, что нельзя представить как сумму результатов их деятельности по отдельности. Можно считать, что этот принцип действительно лёг в основу созданной Дмитрием Ивановичем экосистемы: лицей, факультет, журнал, созданные им конференции подпитывали и дополняли друг друга. Участники конференций узнавали про журнал и публиковались в нём, лицеисты становились студентами и постепенно из активных читателей статей в «Прикладной нелинейной динамике» становились авторами (а ваш покорный слуга даже стал редактором), читатели и авторы журнала приезжали на конференции в Саратов, становились оппонентами бывших учеников лицея и студентов факультета по их кандидатским и докторским диссертациям.

За 30 лет журнал, как и страна в целом, пережил разные времена, в том числе не самые лучшие. Постепенно российские авторы стали всё больше ориентироваться на публикацию лучших материалов в ведущих зарубежных изданиях из-за их престижности. Введение научными фондами наукометрических показателей, исчисляемых в первую очередь по базе данных Web of Science, а позднее и по Scopus, ещё сильнее снизило привлекательность российских журналов, не имевших переводных версий. Реформирование Министерства образования и науки привело к тому, что наша заявка на включение в обновлённый список ВАК потерялась в его недрах и не была обработана вовремя, а отказ от централизованной подписки на Zentralblatt Math — к исключению новых выпусков журнала из этой реферативной базы данных. Одно время ситуация была близка к критической: журнал почти нигде, кроме РИНЦ, не индексировался и его портфель держался фактически на доверии постоянных авторов. Общее число статей в год упало вдвое: с порядка 60 до чуть более 30. Неоднократно посещали мысли о неизбежном закрытии «Прикладной нелинейной динамики». Только большая вера в важность нашего дела, непрерывный труд, упорство и некоторая доля везения позволили выбраться из сложившегося непростого положения. В последние годы журнал смог многого добиться: сначала включения журнала в Scopus в 2018 (к индексации были приняты материалы с 2017 года), а затем в Web of Science (проиндексированы все материалы, начиная с 2018), DOAJ и RSCI — всё в 2020 году. Все выпуски, начиная с 2015 года, добавляются на популярный отечественный математический портал Math-Net.Ru. В декабре 2021 года мы одни из немногих в России получили положительное решение об индексировании архивных выпусков 2005–2016 гг.; все они в настоящее время загружены в Scopus. В 2018–2019 гг. журналу удалось выиграть во всероссийском конкурсе программ развития отечественных периодических изданий, попав сначала в 100, а потом в 70 лучших по стране. В том числе на деньги этой программы были разработаны редакционно-издательская система, модернизирован сайт, сделаны переводы ряда лучших статей на английский язык, новый стилевой файл, присвоены doi архивным выпускам. Наконец, для выпусков 2022 года благодаря помощи

университета в рамках программы Приоритет 2030 впервые будет сделан полнотекстовый перевод на английский всех статей.

30 лет — такой возраст, в котором принято подводить первые итоги и в то же время с оптимизмом смотреть в будущее. К сожалению, в 2020 году журнал осиротел — 12 августа умер его отец Дмитрий Иванович Трубецков. Всё же нам греет душу мысль, что Дмитрий Иванович оставил своё детище уже достаточно взрослым и крепко стоящим на ногах. Журналу есть, что вспомнить и чем гордиться. Он по-прежнему объединяет большое число учёных из многих уголков России и не только. По-прежнему старается быть доступен самым невзыскательным читателям: старшеклассникам, студентам начальных курсов и специалистам в других областях знания. Журнал сохранял и будет впредь сохранять русский язык публикаций, потому что хороших англоязычных изданий у нас теперь хватает, а за рубежом — тем более (и многие из них по-прежнему доступны нашим авторам), а вот просветительская и обучающая роль журнала для людей, делающих первый шаг в науку вообще или в синергетику в частности, — невосполнима. При этом журнал будет стремиться и к достижению более высоких показателей (не в ущерб научному содержанию, конечно) и более престижному месту в мировой таблице о рангах — в последние годы наукометрические показатели журнала регулярно росли, он смог переехать из четвёртого в третий квартиль базы данных Scopus по двум из трёх предметных областей; и мы надеемся, что новые, ещё более значительные успехи у нас впереди.

Редакция и редколлегия поздравляют всех читателей, авторов, рецензентов и даже самих себя с тридцатилетием журнала! Мы будем продолжать работать для вас, пока это в наших силах. И рассчитываем, что когда это потребует, на наше место придут новые люди, которые поставят новые амбициозные задачи и, сменив нас, добьются ещё большего успеха.

Список литературы

1. *Лебедева И., Иванов А.* Возрождение «Известий» // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2001. Т. 1, № 1. С. 11–13.
2. *Хакен Г.* Синергетика / Пер. с англ. В. И. Емельянова. М.: Мир, 1980. 406 с.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1)

Научная статья
УДК 517.96

DOI: 10.18500/0869-6632-003023
EDN: CKLLWX

Эффективные алгоритмы решения функциональных уравнений с суперпозицией на примере уравнения Фейгенбаума

А. А. Полуновский

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия
E-mail: arap2009@yandex.ru

*Поступила в редакцию 30.08.2022, принята к публикации 9.11.2022,
опубликована онлайн 19.01.2023, опубликована 31.01.2023*

Аннотация. *Цель.* Рассмотреть новые алгоритмы решения функциональных уравнений на примере уравнения Фейгенбаума. Данное уравнение представляет большой интерес в теории детерминированного хаоса и является хорошим показательным примером в классе функциональных уравнений с суперпозицией. *Методы.* В статье предлагаются три новых эффективных метода решения функциональных уравнений — метод последовательных приближений, метод последовательных приближений с применением быстрого преобразования Фурье и численно-аналитический метод с применением малого параметра. *Результаты.* Были приведены три новых метода решения функциональных уравнений, рассмотренных на примере уравнения Фейгенбаума. Для каждого из них были исследованы особенности их применения, а также оценена сложность получаемых в результате алгоритмов. Проведено сравнение методов, используемых ранее исследователями для решения функциональных уравнений, с описанными в данной статье. В описании последнего, численно-аналитического метода, были выписаны несколько коэффициентов разложений универсальных постоянных Фейгенбаума. *Заключение.* Полученные алгоритмы позволяют решать функциональные уравнения с суперпозицией, основываясь на методах простой итерации, без необходимости обращения матрицы Якоби. Данная особенность сильно упрощает использование компьютерной памяти и дает выигрыш по времени работы рассматриваемых алгоритмов, по сравнению с ранее используемыми. Также последний, численно-аналитический метод позволил получать последовательно коэффициенты разложений универсальных постоянных Фейгенбаума, что, по сути, может являться аналитическим представлением данных констант.

Ключевые слова: динамический хаос, уравнение Фейгенбаума, функциональные уравнения с суперпозицией, степенные ряды.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00317, <https://rscf.ru/project/22-11-00317/>

Для цитирования: Полуновский А. А. Эффективные алгоритмы решения функциональных уравнений с суперпозицией на примере уравнения Фейгенбаума // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 8–19. DOI: 10.18500/0869-6632-003023. EDN: CKLLWX

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Effective algorithms for solving functional equations with superposition on the example of the Feigenbaum equation

A. A. Polunovskii

A. A. Harkevich Institute of Information Transmission Problems of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: apap2009@yandex.ru

Received 30.08.2022, accepted 9.11.2022, available online 19.01.2023, published 31.01.2023

Abstract. *Purpose.* New algorithms were considered for functional equations solving using the Feigenbaum equation as an example. This equation is of great interest in the theory of deterministic chaos and is a good illustrative example in the class of functional equations with superposition. *Methods.* The article proposes three new effective methods for solving functional equations – the method of successive approximations, the method of successive approximations using the fast Fourier transform and the numerical-analytical method using a small parameter. *Results.* Three new methods for solving functional equations were presented, considered on the example of the Feigenbaum equation. For each of them, the features of their application were investigated, as well as the complexity of the resulting algorithms was estimated. The methods previously used by researchers to solve functional equations are compared with those described in this article. In the description of the latter, the numerical-analytical method, several coefficients of expansions of the universal Feigenbaum constants were written out. *Conclusion.* The obtained algorithms, based on simple iteration methods, allow solving functional equations with superposition without the need to reverse the Jacobi matrix. This feature greatly simplifies the use of computer memory and gives a gain in the operating time of the algorithms in question, compared with previously used ones. Also, the latter, numerically-analytical method made it possible to obtain sequentially the coefficients of expansions of the universal Feigenbaum constants, which in fact can be an analytical representation of these constants.

Keywords: dynamic chaos, Feigenbaum equation, functional equations with superposition, power series.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 22-11-00317, <https://rscf.ru/project/22-11-00317/>

For citation: Polunovskii AA. Effective algorithms for solving functional equations with superposition on the example of the Feigenbaum equation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(1):8–19. DOI: 10.18500/0869-6632-003023

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

1. Известные результаты в решении уравнения Фейгенбаума

1.1. Введение. В теории детерминированного хаоса определенный интерес представляет система функциональных уравнений Фейгенбаума. Данная система имеет следующий вид [1–3]:

$$\begin{cases} g(x) = -\alpha \cdot g\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right), \\ \delta \cdot h(x) = \alpha \cdot g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \cdot h\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha \cdot h\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right), \end{cases} \quad (1)$$

с дополнительными условиями

$$\begin{cases} g(0) = h(0) = 1, \\ g'(0) = h'(0) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где g и h – искомые функции, α и δ – универсальные постоянные Фейгенбаума, также являющиеся неизвестными в данной системе уравнений.

Предполагается, что g и h — четные аналитические функции с квадратичным экстремумом в нуле, определенные на вещественной оси \mathbb{R} . Требуется найти пару функций (g, h) и пару чисел (α, δ) . Сейчас существует только приближенное численное решение этой системы:

$$\begin{cases} g(x) = 1 - 1.52763\dots \cdot x^2 + 0.104815\dots \cdot x^4 + \\ \quad + 0.0267057\dots \cdot x^6 - 0.0035274\dots \cdot x^8 + \dots, \\ \alpha = 2.502907876\dots, \\ h(x) = 1 - 0.325651\dots \cdot x^2 - 0.50554\dots \cdot x^4 + \\ \quad + 0.014560\dots \cdot x^6 - 0.000881\dots \cdot x^8 - \dots, \\ \delta = 4.669201609\dots \end{cases} \quad (3)$$

Впервые в 1979 году М. Фейгенбаум в своих статьях [3, 4] опубликовал первые 12 знаков после запятой константы α и 13 знаков после запятой константы δ . В 1991 году Кит Бриггс, используя тот же метод вычисления, получил значения данных констант с точностью 150 знаков после запятой [5]. Позже, в 1999 году, Саймон Плүфф уточнил результаты Бриггса, и вычислил 1018 знаков после запятой констант α и δ [6].

1.2. Дискретизация. Метод коллокаций. Основным методом дискретизации системы (1), применяемым в предыдущих работах, является метод коллокаций (МК) [3, 5, 7]. Этот метод основан на представлении искомых функций и в виде некоторой суммы базисных функций

$$\begin{cases} g(x) \approx g_N(x) = 1 + \sum_{i=1}^N g_i^N \cdot \phi_i(x), \\ h(x) \approx h_N(x) = 1 + \sum_{i=1}^N h_i^N \cdot \phi_i(x), \end{cases} \quad (4)$$

где $g_i, h_i \in \mathbb{R}$, $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — набор базисных функций, и N — фиксированное целое число. В основном, в силу аналитичности функций g и h [2], данным базисом берется последовательность степеней $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ [3, 5, 7]. Функции g и h в свою очередь представлялись в виде степенных рядов

$$\begin{cases} g(x) \approx g_N(x) = 1 + \sum_{i=1}^N g_i^N \cdot x^{2 \cdot i}, \\ h(x) \approx h_N(x) = 1 + \sum_{i=1}^N h_i^N \cdot x^{2 \cdot i}. \end{cases} \quad (5)$$

Также использовались для расчетов и другие базисы, например в статье [8] разложение велось по полиномам Чебышева.

Зафиксировав некоторый базис функций, выберем теперь набор из N точек $\{x_j\}_{j=1}^N$, равномерно распределенных на полуинтервале $(0, 1]$. Подставив в систему (1) представление функций g и h в виде (5) и рассмотрев полученные равенства в точках $\{x_j\}_{j=1}^N$, получим систему из $2N$ нелинейных уравнений

$$\begin{cases} g_N(x_j) = -\alpha_N \cdot g_N\left(g_N\left(-\frac{x_j}{\alpha_N}\right)\right), \\ \delta_N \cdot h_N(x_j) = \alpha_N \cdot g'_N\left(g_N\left(\frac{x_j}{\alpha_N}\right)\right) \cdot h_N\left(\frac{x_j}{\alpha_N}\right) + \alpha_N \cdot h_N\left(g_N\left(\frac{x_j}{\alpha_N}\right)\right), \\ j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (6)$$

относительно коэффициентов g_i, h_i разложений (5). Добавляя к системе (6) следующие соотношения

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{g(1)}, \\ \delta = \alpha \cdot (g'(1) + h(1)), \end{cases} \quad (7)$$

полученные путем рассмотрения уравнений (1) при $x = 0$, мы получаем замкнутую систему уравнений относительно коэффициентов $h_1, \dots, h_N, g_1, \dots, g_N$ и α_N, δ_N .

Численно решая систему (6) методом Ньютона, получаем приближенные значения α_N, δ_N констант α и δ . Из вычислительной практики получено, что в случае выбора разложений (5), мы наблюдаем сходимость данного метода [3, 5, 7].

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N = \alpha, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N = \delta, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x) = g(x), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} h_N(x) = h(x), \end{cases} \quad (8)$$

где $x \in [-1, 1]$.

Решение системы (6) можно упростить, воспользовавшись важным свойством второго уравнения из системы (1) — число δ является собственным числом оператора

$$[Lf](x) = -\alpha \cdot f\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) - \alpha \cdot g'\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \cdot f\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad (9)$$

а функция h — собственным вектором. Фейгенбаум показал [3], что константа δ является наибольшим по модулю собственным значением данного оператора (9) относительно функции g , полученной из первого уравнения системы (1). Исходя из этого, вычислив коэффициенты g_1, \dots, g_N и α_N из соответствующих уравнений системы (6), можно найти число δ_N и вектор $\mathbf{h}^N = (h_1, \dots, h_N)^T$ как максимальное по модулю собственное значение, и соответствующий собственный вектор оператора (9), вычислив данный оператор в точках $\{x_j\}_{j=1}^N$. Кейт Бриггс использовал для решения данной задачи степенной метод [5].

1.3. Дискретизация. Метод неопределенных коэффициентов. Другим подходом дискретизации системы (1) является метод неопределенных коэффициентов (МНК) [3, 9]. Данный метод также основывается на представлении решения в виде степенных рядов (5). Однако, в отличие от метода коллокаций, мы не вычисляем значения функций в конкретных точках, а рассматриваем систему уравнений, полученных после подстановки рядов (5) в систему (1), и приравнивая получаемые коэффициенты при соответствующих степенях в левой и правой части равенств. После всех необходимых преобразований мы получаем следующую систему уравнений на коэффициенты разложения функции g :

$$\begin{cases} g_1^N = G_1(g_1^N, \dots, g_N^N, \alpha_N), \\ \dots, \\ g_N^N = G_N(g_1^N, \dots, g_N^N, \alpha_N) \end{cases} \quad (10)$$

и, соответственно, систему уравнений на коэффициенты разложения функции h :

$$\begin{cases} \delta_N \cdot h_1^N = H_1(h_1^N, \dots, h_N^N, \alpha_N, g_1^N, \dots, g_N^N), \\ \dots, \\ \delta_N \cdot h_N^N = H_N(h_1^N, \dots, h_N^N, \alpha_N, g_1^N, \dots, g_N^N). \end{cases} \quad (11)$$

Добавляя к системам (10) и (11) соотношения (7), мы получаем замкнутую систему на коэффициенты $h_1, \dots, h_N, g_1, \dots, g_N$ и α_N, δ_N . Решая данную систему методом Ньютона, мы так же, как и в случае с методом коллокаций, получаем некоторое приближение α_N, δ_N к константам α, δ . Аналогично нахождение числа δ и функции h можно упростить, рассматривая систему (11) при вычисленных g_1, \dots, g_N и α_N как задачу на нахождение максимального по модулю собственного значения и соответствующего собственного вектора.

Основная сложность данного подхода к дискретизации заключается в вычислении функций G_i и H_i , где G_i являются многочленами от g_1, \dots, g_N и рациональными функциями от α_N , а H_i являются многочленами от g_1, \dots, g_N , рациональными функциями от α_N , и линейны по h_1, \dots, h_N . В случае большого числа N данные функции становятся громоздкими, и требуют специальных подходов к их вычислению. Однако системы (10) и (11), по сравнению с системой (6), имеют более близкие свойства к исходной системе (1). Можно сказать, что системы (10) и (11) являются проекцией на конечномерное пространство системы (1), где функции и заменяются конечномерными векторами $\mathbf{g}^N = (g_1, \dots, g_N)^T$ и $\mathbf{h}^N = (h_1, \dots, h_N)^T$.

В силу того, что вычисление второго уравнения системы (1) при известном решении первого в той или иной дискретизации, находится уже известными эффективными методами задач на собственные значения, будем рассматривать алгоритмы именно на примере решения первого уравнения исходной системы.

Рассматриваемый в данном параграфе метод дискретизации можно использовать для сравнения с методом коллокаций и их взаимной проверки.

2. Описание предлагаемых новых методов расчета

Все известные ранее вычисления первого уравнения из системы (1) так или иначе сводились к многомерному методу Ньютона, требующему *сложной вычислительной процедуры — обращения матрицы Якоби*. Рассмотрим теперь предлагаемые в данной статье методы, позволяющие избежать этой дорогостоящей операции.

2.1. Метод последовательных приближений.

2.1.1. Вывод системы рекуррентных уравнений. Вернемся к системе уравнений (10), являющейся дискретизацией первого уравнения из системы (1) методом неопределенных коэффициентов. Заметим, что система (10) представляет собой уравнение неподвижной точки относительно вектора $\mathbf{g}^N = (g_1, \dots, g_N)^T$. Воспользуемся этим, предварительно получив из системы (1) следующие соотношения

$$\begin{cases} g(1) = -\frac{1}{\alpha}, \\ g'(1) = -\alpha. \end{cases} \quad (12)$$

Исходя из выбранного степенного разложения (5), условия (12) можно представить в конечном виде

$$\begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^N g_i^N = -\frac{1}{\alpha}, \\ \sum_{i=1}^N (2i) \cdot g_i^N = -\alpha. \end{cases} \quad (13)$$

Теперь, исходя из системы (10) и соотношений (13), выпишем следующую систему рекуррентных уравнений:

$$\begin{cases} g_1^{N,(n+1)} = -1 - \frac{1}{\alpha_N^{(n)}} - \sum_{i=2}^N g_i^{N,(n)}, \\ g_k^{N,(n+1)} = G_k^N \left(g_1^{N,(n)}, \dots, g_N^{N,(n)}, \alpha_N^{(n)} \right), \\ k = 2, \dots, N, \\ \alpha_N^{(n+1)} = - \sum_{i=1}^N (2i) \cdot g_i^{N,(n+1)}, \end{cases} \quad (14)$$

$n \in \mathbb{N}$, где

$$k! \cdot G_k^N = \frac{d^k}{dx^k} \left(-\alpha_N \cdot g_N \left(g_N \left(-\frac{x}{\alpha_N} \right) \right) \right) \Big|_{x=0}. \quad (15)$$

Зафиксировав некоторое начальное приближение $\mathbf{g}_0^N = (g_1^{(0)}, \dots, g_N^{(0)})^T$ и $\alpha_N^{(0)}$, можем, итерируя достаточно долго систему (14), вычислить приближение $\mathbf{g}^N = (g_1, \dots, g_N)^T$ и α_N для заданного N .

2.1.2. Качественные соображения о сходимости данного метода. Уравнения в системе (14), где присутствуют функции G_k^N , представляют собой проекцию первого уравнения из системы (1) на конечномерное пространство размерности N с базисом $\{x^n\}_{n=0}^N$. Однако такая проекция обладает особенностью изначального функционального уравнения — гиперболической расходимостью. При непосредственном итерировании только уравнения с функциями G_k^N из системы (14) итерационный процесс будет расходиться. Данная расходимость связана с наличием одномерного измерения в функциональном пространстве унимодальных функций, в направлении которого первое уравнение из системы (1) — уравнение на неподвижную точку g — является не сжимающим, а растягивающим отображением [1, 2, 9].

Для стабилизации сходимости итераций вводятся дополнительные равенства (12), полученные из самого функционального уравнения (1). С преобразованием данных соотношений (12) в вид, приведенный в системе (14), итерационный процесс (14) становится сходящимся к искомым неизвестным.

Из вычислительной практики известно, что если постепенно увеличивать число N и выбирать каждый раз начальное значение, полученное из предыдущего расчета, то получается сходящийся процесс при $n \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ к искомым g и α . Численные расчеты показывают, что итерационный процесс сходится линейно.

2.1.3. Особенности вычислений функций G_k^N . Формулы в системе (13), где участвуют функции G_k^N , не зависят друг от друга и могут быть вычислены параллельно, однако вычисление самих функций представляет определенную сложность и требует дополнительных методов. Используя символьные вычисления, можно предварительно вычислить производные в функциях G_k^N , получив алгебраические выражения, которые уже можно использовать в итерациях (14). Другой подход для вычисления функций G_k^N — использование формулы Фаа-ди-Бруно [10], выраженную через полиномы Бэлла $B_{n,k}$, при этом вычисляя сами полиномы по рекуррентным формулам [11].

2.2. Метод быстрого преобразования Фурье применительно к методу последовательных приближений.

2.2.1. Модификация метода последовательных приближений (МПП) с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ, Fast Fourier Transformation — FFT). Вычисление функций G_k^N из системы (13) представляет собой более общую задачу — вычисление k -й произ-

водной композиции функций. Рассмотрим для решения данной задачи возможность применения быстрого преобразования Фурье. Введем обозначения

$$F[a_m] := FFT[a_m], \quad (16)$$

где $FFT[a_m]$ — быстрое преобразование Фурье последовательности a_m .

Заметим, что если $f \sim \sum_{n=0}^N f_n \cdot x^n$, преобразование Фурье коэффициентов f_n можно представить в виде

$$F[f_n] := \left\{ f \left(\exp \left(-\frac{2\pi n}{N} i \right) \right), n = 0, \dots, N-1 \right\}. \quad (17)$$

В случае, если g_n — коэффициенты представления функции g в виде степенного ряда, то первое уравнение из системы (1), рассмотрев его в точках $\{x_n = \exp(-\frac{2\pi i}{N}n), n = 0, \dots, N-1\}$ и учитывая разложения (5), можно будет переписать следующим образом:

$$F[g_n^N] = -\alpha_N \cdot g_N \left(F \left[\frac{g_n^N}{\alpha_N} \right] \right), \quad (18)$$

получив отсюда

$$g_n^N = -\alpha_N \cdot F^{-1} \left[g_N \left(F \left[\frac{g_n^N}{\alpha_N} \right] \right) \right], \quad (19)$$

что, по сути, является более короткой записью системы (10). Исходя из этого, перепишем рекуррентные соотношения (14) в следующем виде:

$$\begin{cases} g_1^{N,(n+1)} = -1 - \frac{1}{\alpha_N^{(n)}} - \sum_{i=2}^N g_i^{N,(n)}, \\ g_k^{N,(n+1)} = -\alpha_N^{(n)} \cdot F^{-1} \left[g_N^{(n)} \left(F \left[\frac{g_k^{N,(n)}}{\alpha_N^{(n)}} \right] \right) \right], \\ \alpha_N^{(n+1)} = -\sum_{i=1}^N (2i) \cdot g_i^{N,(n+1)}. \end{cases} \quad (20)$$

Уравнения (20) отличаются от системы (14) только способом вычисления функций G_n^k ; на сходимость самого итерационного процесса это не влияет. Скорость сходимости данного процесса аналогична скорости сходимости системы (14).

2.2.2. Оценка сложности предложенного алгоритма и сравнение с методом последовательных приближений и методом Ньютона. Исходя из того, что сложность алгоритма быстрого преобразования Фурье $O((N) \cdot \log(N))$ [12], основная сложность в данной системе (20) будет состоять в вычислении многочлена g_N N -й степени в N точках. Однако, в силу того, что вычисление многочлена в разных точках можно проводить параллельно, сложность алгоритма, представленного соотношениями (20), можно будет оценить как $O(N) \cdot N/m$ на каждую итерацию, где m — количество параллельных процессов. Совокупно сложность алгоритма будет $O(N) \cdot N^2/m$ с учетом линейной сходимости метода последовательных приближений.

По сравнению с другими способами вычисления функций G_n^k , применение быстрого преобразования Фурье является оптимальным.

В случае символьного вычисления G_n^k необходимо производить разложения композиции многочленов N -й степени на каждом шаге итерации, что приводит к $O(N!)$ сложности. Данная сложность, очевидно, значительно выше, чем $O(N^2)$.

В случае применения формулы Фаа-ди-Бруно [10], выраженной через полиномы Бэлла $B_{n,k}$, вычисленные по рекуррентным формулам [11], сложность вычисления функций G_n^k становится $O(N^3)$. Данная сложность также заметно выше, по сравнению с использованием быстрого преобразования Фурье.

В сравнении с методом Ньютона, у метода последовательных приближений с использованием БПФ два преимущества.

Во-первых, в случае параллельного расчета, данный метод можно линейно масштабировать, сводя сложность вычислений на каждый процессор к $O(N^2)/m$, где m — количество процессоров в системе. Параллельное масштабирование в применении метода Ньютона гораздо более ограничено необходимостью обращения матрицы Якоби.

Во-вторых, метод последовательных приближений с использованием БПФ требует для хранения в памяти только искомый вектор коэффициентов g_k^N , и вектор его фурье-преобразования $F[g_k^N]$, что требует $O(N)$ загрузки памяти компьютера. В методе Ньютона необходимо держать в памяти всю матрицу Якоби, что приводит к требованию по памяти $O(N^2)$.

2.2.3. Применение метода последовательных приближений с БПФ вместе с методом Ньютона. Стоит также отметить, что метод последовательных приближений с БПФ может эффективно работать в паре с методом Ньютона.

По методу Ньютона для уточнения получаемых значащих цифр необходимо делать одну дополнительную итерацию. В силу того, что в среднем на каждой итерации метода Ньютона количество значащих знаков возрастает вдвое, на этапе дополнительной итерации происходит потеря большого количества вычисленных значащих знаков. Метод последовательных приближений с БПФ позволил бы уменьшить потерю значительного количества значащих знаков, в случае его применения на этапе проверки вычисленного значения методом Ньютона.

2.3. Численно-аналитический метод вычисления функциональных уравнений.

2.3.1. Описание алгоритма. Рассмотрим теперь численно-аналитический алгоритм, позволяющий получать решения функциональных уравнений, когда сами коэффициенты разложений искомого решения представляются в виде рядов по малому параметру. Введем в систему уравнений (1) свободный параметр β , предварительно введя следующие разложения

$$\begin{cases} g_\beta(x, \beta) = 1 + g_1(\beta) \cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(\beta) \cdot \beta^{n-1} \cdot x^{2n}, \\ h_\beta(x, \beta) = 1 + h_1(\beta) \cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} h_n(\beta) \cdot \beta^{n-1} \cdot x^{2n}, \end{cases} \quad (21)$$

и

$$\begin{cases} g(x, \beta) = 1 + g_1(\beta) \cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(\beta) \cdot x^{2n}, \\ h(x, \beta) = 1 + h_1(\beta) \cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} h_n(\beta) \cdot x^{2n}. \end{cases} \quad (22)$$

Неизвестные коэффициенты тогда будут тоже представлены в виде рядов

$$\begin{cases} g_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k} \cdot \beta^k, \\ \alpha(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot \beta^k, \\ h_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{n,k} \cdot \beta^k, \\ \delta(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \cdot \beta^k. \end{cases} \quad (23)$$

Тогда, предварительно выполнив замену $x \rightarrow x \cdot \alpha(\beta)$, можно систему уравнений (1) переписать следующим образом:

$$\begin{cases} g(\alpha(\beta) \cdot x, \beta) = -\alpha(\beta) \cdot g_{\beta}(g(x, \beta), \beta), \\ \delta(\beta) \cdot h(\alpha(\beta) \cdot x, \beta) = \alpha(\beta) \cdot g'_{\beta}(g(x, \beta), \beta) \cdot h(x, \beta) + \alpha(\beta) \cdot h_{\beta}(g(x, \beta), \beta). \end{cases} \quad (24)$$

При $\beta = 1$ в силу аналитичности функций g и h разложения (21, 22), представленные в виде степенного ряда, становятся решениями системы (1).

Подставляя разложения (21)–(23) в систему (24) и приравнявая получаемые коэффициенты, получаем цепочку уравнений, из которых последовательно можно вычислять неизвестные коэффициенты в разложениях (23). В частности, при $x = 0$, $\beta = 0$ и при степени $x^2 \cdot \beta^0$ из первого уравнения системы (24) получаем систему

$$\begin{cases} 1 + \alpha_0 \cdot (1 + g_{1,0}) = 0, \\ 2g_{1,0} + \alpha_0 = 0, \end{cases} \quad (25)$$

решением которой является

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 + \sqrt{3}, \\ g_{1,0} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}. \end{cases} \quad (26)$$

2.3.2. Вывод первых коэффициентов искомых разложений. По цепочке вычисляя коэффициенты, решая последовательность линейных уравнений, при $\beta = 1$, получаем следующие разложения констант α и δ :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \sqrt{3} + \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{37}{936} + \frac{53}{1872}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{21967}{438048} - \frac{3053}{97344}\sqrt{3}\right) + \dots, \\ \delta &= -4 - \sqrt{3} + \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{9}\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{346709}{623376} + \frac{79357}{311688}\sqrt{3}\right) + \\ &\quad + \left(-\frac{224225865065}{126833951088} + \frac{786425631715}{761003706528}\sqrt{3}\right) + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Приведем также разложения первых коэффициентов функции g

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{265}{1872} + \frac{101}{1248}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{113621}{876096} - \frac{124663}{1752192}\sqrt{3}\right) + \dots, \\ g_2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3\sqrt{3} + 5}{5\sqrt{3} + 9} + \frac{1}{72} \cdot \frac{71\sqrt{3} + 123}{265\sqrt{3} + 459} + \left(-\frac{113}{5184} \cdot \frac{9973081\sqrt{3} + 17273883}{13058763\sqrt{3} + 22618441}\right) + \dots, \\ g_3 &= -\frac{1}{12} \cdot \frac{7 + 4\sqrt{3}}{93\sqrt{3} + 161} + \frac{1}{432} \cdot \frac{457975465\sqrt{3} + 793236774}{110530697\sqrt{3} + 191444783} + \dots, \\ g_4 &= \frac{1}{3744} \cdot \frac{12327 + 7117\sqrt{3}}{51409\sqrt{3} + 89043} + \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

и функции h

$$\begin{aligned}h_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} + \left(\frac{13}{24} - \frac{23}{72} \sqrt{3} \right) + \left(\frac{29947}{623376} - \frac{763}{46176} \sqrt{3} \right) + \dots, \\h_2 &= \frac{1}{12} \cdot \frac{45 + 26 \sqrt{3}}{97 \sqrt{3} + 168} + \left(-\frac{1}{648} \cdot \frac{806125404 + 465416719 \sqrt{3}}{50843527 + 29354524 \sqrt{3}} \right) + \dots, \\h_3 &= -\frac{1}{12} \cdot \frac{424267 \sqrt{3} + 734852}{79976509 \sqrt{3} + 138523377} + \dots\end{aligned}\tag{29}$$

2.3.3. Особенности данного метода. Основная сложность в данном методе заключается в вычислении коэффициентов при членах $x^j \cdot \beta^i$ после подстановки разложений (21)–(23) в систему (24). Однако, благодаря возможностям символьных вычислений, данные ряды были вычислены более чем с 15-ю членами, аналитический вид которых при повышении порядка быстро становится очень громоздким. Численные вычисления показали сходимость рядов (27)–(29) к известным вычисленным значениям (3). Также вычисления показали, что члены рядов (27)–(29), являющиеся коэффициентами в разложениях (23), при $\beta = 1$ асимптотически уменьшаются как геометрическая прогрессия со знаменателем $q \approx 2.2$.

Стоит отметить, что данные разложения (27)–(29) не единственны, и зависят от выбора задания параметра β в уравнениях (1). Однако здесь был выбран наиболее простой способ задания параметра β , требующий наименьшего количества вычислений. Задание параметра β в разложении (21) при более высоких степенях привело бы как к более сложному начальному алгебраическому уравнению, подобному (25), так и к более сложным вычислениям для нахождения коэффициентов более высокого порядка. В то же время сходимость рядов с заданием β при более высоких степенях в разложении (21) привело бы к более быстрой сходимости получаемых разложений.

Использование численно-аналитических алгоритмов также было применено ранее автором для уравнений в частных производных [13].

2.3.4. Сравнение с другими методами. Отличительной особенностью данного численно-аналитического метода, по сравнению с численными алгоритмами, является возможность получения точных коэффициентов искомым разложений. Данная возможность позволяет использовать различные методы ускорения сходимости степенных рядов, требующих высокой точности значений коэффициентов разложений, таких как аппроксимация Паде или преобразование Шенкса [14, 15]. Методы ускорения сходимости позволяют, основываясь на небольшом количестве вычисленных коэффициентов разложений, получать гораздо большее количество правильных знаков, нежели получаемых прямым суммированием ряда.

Также данные разложения могут быть полезны для теоретического исследования чисел α и δ .

Заключение

В статье предложено три новых подхода к решению нелинейных функциональных уравнений на примере решения уравнения Фейгенбаума.

Два из них связаны с применением численного метода последовательных приближений к дискретизированной системе (10). В первом методе удалось выписать итерационную схему вычисления искомым коэффициентов разложений неизвестных функций. Основная проблема в данном подходе заключалась в вычислении производных высших порядков композиции функций, представленных полиномами. В связи с этим во втором методе была предложена возможность свести вычисление производных высших порядков к быстрому преобразованию Фурье.

Третий метод представлял собой шаг в сторону получения аналитического представления неизвестных функций и констант нелинейного функционального уравнения. Для этого был введен в уравнение дополнительный параметр β таким образом, чтобы коэффициенты искомым разложений удалось находить, решая последовательно линейные уравнения, полученные из степенного разложения данного функционального уравнения.

В заключение отметим, что все методы, предлагаемые в настоящей работе, были продемонстрированы на примере функционального уравнения Фейгенбаума, однако их можно также применять и к другим нелинейным функциональным уравнениям, имеющим близкие свойства.

Список литературы

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 253 с.
2. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. 1983. Т. 141, № 2. С. 343–374. DOI: 10.3367/UFNr.0141.198310e.0343.
3. Feigenbaum M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations // Journal of Statistical Physics. 1979. Vol. 21, no. 6. P. 669–706. DOI: 10.1007/BF01107909.
4. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // Journal of Statistical Physics. 1978. Vol. 19, no. 1. P. 25–52. DOI: 10.1007/BF01020332.
5. Briggs K. How to calculate the Feigenbaum constants on your PC // Australian Mathematical Society Gazette. 1989. Vol. 16. P. 89–92.
6. Broadhurst D. Feigenbaum constants to 1018 decimal places [Electronic resource]. 22 March 1999. Available from: <http://www.plouffe.fr/simon/constants/feigenbaum.txt>.
7. Briggs K. A precise calculation of the Feigenbaum constants // Mathematics of Computation. 1991. Vol. 57, no. 195. P. 435–439. DOI: 10.2307/2938684.
8. Molteni A. An efficient method for the computation of the Feigenbaum constants to high precision [Electronic resource] // arXiv:1602.02357. arXiv Preprint, 2016. Available from: <https://arxiv.org/abs/1602.02357>.
9. Кузнецов С. Динамический хаос. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
10. Faà di Bruno F. Sullo sviluppo delle funzioni // Annali di Scienze Matematiche e Fisiche. 1855. Vol. 6. P. 479–480.
11. Bell E. T. Partition polynomials // Annals of Mathematics. 1927. Vol. 29, no. 1–4. P. 38–46. DOI: 10.2307/1967979.
12. Heideman M. T., Johnson D., Burrus C. Gauss and the history of the fast Fourier transform // IEEE ASSP Magazine. 1984. Vol. 1, no. 4. P. 14–21. DOI: 10.1109/MASSP.1984.1162257.
13. Полуновский А. А. Временные разложения решений уравнений математической физики // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 3. С. 393–402. DOI: 10.1134/S0374064120030103.
14. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 296 с.
15. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.

References

1. Schuster HG. Deterministic Chaos: An Introduction. Weinheim: Physik-Verlag; 1984. 220 p.
2. Feigenbaum MJ. Universal behavior in nonlinear systems. Los Alamos Science. 1980;1(1):4–27.
3. Feigenbaum MJ. The universal metric properties of nonlinear transformations. Journal of Statistical Physics. 1979;21(6):669–706. DOI: 10.1007/BF01107909.
4. Feigenbaum MJ. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. Journal of Statistical Physics. 1978;19(1):25–52. DOI: 10.1007/BF01020332.
5. Briggs K. How to calculate the Feigenbaum constants on your PC. Australian Mathematical Society Gazette. 1989;16:89–92.

6. Broadhurst D. Feigenbaum constants to 1018 decimal places [Electronic resource]. 22 March 1999. Available from: <http://www.plouffe.fr/simon/constants/feigenbaum.txt>.
7. Briggs K. A precise calculation of the Feigenbaum constants. *Mathematics of Computation*. 1991;57(195):435–439. DOI: 10.2307/2938684.
8. Molteni A. An efficient method for the computation of the Feigenbaum constants to high precision [Electronic resource]. arXiv:1602.02357. arXiv Preprint; 2016. Available from: <https://arxiv.org/abs/1602.02357>.
9. Kuznetsov S. *Dynamical Chaos*. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit; 2006. 356 p. (in Russian).
10. Faà di Bruno F. Sullo sviluppo delle funzioni. *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*. 1855;6:479–480 (in Italian).
11. Bell ET. Partition polynomials. *Annals of Mathematics*. 1927;29(1–4):38–46. DOI: 10.2307/1967979.
12. Heideman MT, Johnson D, Burrus C. Gauss and the history of the fast Fourier transform. *IEEE ASSP Magazine*. 1984;1(4):14–21. DOI: 10.1109/MASSP.1984.1162257.
13. Polunovskii AA. Time expansions of equations of mathematical physics. *Differential Equations*. 2020;56(3):381–391. DOI: 10.1134/S0012266120030106.
14. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. New York, London: Academic Press; 1964. 229 p.
15. Baker GA, Graves-Morris P. *Padé Approximants*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press; 1996. 746 p. DOI: 10.1017/CBO9780511530074.



Полуновский Андрей Андреевич — родился в Донецке (Украина). Окончил Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (2019). В настоящее время работает в Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН в должности младшего научного сотрудника. Научные интересы: турбулентность, хаос, степенные ряды, метод неопределенных коэффициентов, функциональные уравнения, уравнения Навье–Стокса, универсальность Фейгенбаума.

Россия, 127051 Москва, Большой Каретный переулок, д. 19, стр. 1
 Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
 E-mail: arap2009@yandex.ru
 ORCID: 0000-0002-6557-3649
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1170892



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1)

Научная статья
УДК 621.373

DOI: 10.18500/0869-6632-003026
EDN: AVHSDG

Эксперименты по прямохаотической относительной передаче данных в проводном канале связи

Т. И. Мохсени✉, М. М. Петросян

Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Москва, Россия

E-mail: ✉mokhseni@gmail.com, manvel93@rambler.ru

Поступила в редакцию 18.10.2022, принята к публикации 23.12.2022,

опубликована онлайн 20.01.2023, опубликована 31.01.2023

Аннотация. Способы относительной передачи информации при использовании шумовых сигналов представляют интерес по причине невозможности реализовать известные методы корреляционного приема для таких сигналов. При потенциально более высокой помехоустойчивости по сравнению с методами передачи информации на основе хаотической синхронизации они, однако, имеют особенность, которая на практике не позволяет реализовать приемопередатчики. Передатчик и приемник схемы на основе уже известных методов относительной передачи требуют наличия у себя задержки, сопоставимой с длительностью передаваемых бит. Это, при аналоговой реализации схемы, приводит к физической длине линии задержки в десятки и более метров. Ранее авторами была предложена и исследована схема относительной передачи, в которой отсутствуют задержки большой длительности. В этой схеме длительность задержек в передатчике и приемнике определяется не длительностью бита, а временем спада функции автокорреляции хаотического сигнала. *Цель* данной работы заключается в экспериментальной демонстрации возможности физической реализации прямохаотической схемы относительной передачи информации в проводном канале связи. *Методы.* Для этого спроектирован и собран макет схемы связи, передающий поток двоичных данных в частотном диапазоне от 200 до 500 МГц. Макет представляет собой сверхширокополосные относительные передатчик и приемник, соединенные через проводной канал. *Результаты.* Результаты эксперимента полностью соответствуют полученным ранее результатам проведенных аналитических оценок, а также данным компьютерного моделирования. *Заключение.* В ходе проведенных исследований разработан, спроектирован и изготовлен приемопередатчик макет относительной сверхширокополосной прямохаотической схемы связи. На нем впервые проведены эксперименты по передаче цифровой информации и тем самым доказаны практическая реализуемость и работоспособность предложенной прямохаотической схемы относительной передачи.

Ключевые слова: динамический хаос, сверхширокополосные сигналы, относительная передача информации, корреляционный прием.

Благодарности. Работа выполнена по государственному заданию ИРЭ РАН.

Для цитирования: Мохсени Т. И., Петросян М. М. Эксперименты по прямохаотической относительной передаче данных в проводном канале связи // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 20–31. DOI: 10.18500/0869-6632-003026. EDN: AVHSDG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Experiments on direct chaotic differentially coherent data transmission in a wired communication channel

T. I. Mokhseni[✉], M. M. Petrosyan

Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ✉mokhseni@gmail.com, manvel93@rambler.ru

Received 18.10.2022, accepted 23.12.2022, available online 20.01.2023, published 31.01.2023

Abstract. Methods of differentially coherent information transmission using noise signals are of interest because of the impossibility of implementing the known methods of correlation reception for such signals. With a potentially higher noise immunity compared to the methods of information transmission based on chaotic synchronization, however, they have a feature that does not allow transceivers to be implemented in practice. The transmitter and receiver of the scheme, based on already known methods of differentially coherent transmission, require a time delay comparable to the duration of the transmitted bits. With an analog implementation of the scheme this leads to a physical length of the delay line of tens of meters or more. Previously, the authors proposed and studied a differentially coherent transmission scheme in which there are no long delays. In this scheme, the duration of delays in the transmitter and receiver is determined not by the duration of the bit, but by the decay time of the autocorrelation function of the chaotic signal. *Purpose* of this work is to experimentally demonstrate the possibility of physical implementation of a direct-chaotic differentially coherent information transmission scheme in a wired communication channel. *Methods.* For this, a layout of the communication scheme, transmitting a binary data stream in the frequency range from 200 to 500 MHz, was designed and assembled. The layout is an ultra-wideband differentially coherent transmitter and receiver connected via a wired channel. *Results* of the experiment are in full agreement with the previously obtained results of the analytical evaluations, as well as with the data of computer simulation. *Conclusion.* In the course of the research, a transceiver layout of a differentially coherent ultra-wideband direct chaotic communication scheme was developed, designed and manufactured. For the first time, experiments on the transmission of digital information were carried out on it, and thereby the practical feasibility and operability of the proposed direct chaotic differentially coherent transmission scheme were proved.

Keywords: dynamic chaos, ultra-wideband signals, differentially coherent information transmission, correlation technique.

Acknowledgements. This work was carried out according to the state assignment of IRE RAS.

For citation: Mokhseni TI, Petrosyan MM. Experiments on direct chaotic differentially coherent data transmission in a wired communication channel. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(1):20–31. DOI: 10.18500/0869-6632-003026

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Схемы относительной передачи данных исследуются с середины 50-х годов 20 века [1–3]. К основным плюсам схем, обеспечивающих относительную передачу/прием данных, относится, прежде всего, простая конструкция схемы приемников. Поэтому с возникновением интереса к использованию хаоса в качестве носителя информации в системах связи они быстро привлекли к себе внимание исследователей. Первая же предложенная схема относительной передачи на основе хаоса DCSK (Differential Chaos Shift Keying), предложенная в конце 90-х годов в [4], продемонстрировала более высокую помехоустойчивость, чем методы на основе явления хаотической синхронизации, известные на тот момент [5–9]. Однако из-за особенности схемы DCSK, заключающейся в наличии задержки сигнала на приемной и передающей сторонах на время, сопоставимое со временем передаваемых бит, практическая реализация схемы приводит к необходимости создания линии задержки длиной в десятки и сотни метров. Вследствие этого попытки физически реализовать схему DCSK связаны, в основном, не с ее аналоговой, а с ее цифровой реализацией [10, 11].

В [12, 13] была предложена альтернатива схеме DCSK — прямохаотическая схема относительной передачи информации DC² (Direct Chaotic Differentially Coherent scheme), в которой для реализации относительной системы связи необходимо значительно меньшее время задержек,

что делает такую систему пригодной для практической реализации. В отличие от схемы DCSK, длина линий задержек в передатчике и приемнике предложенной схемы определяется не длиной бита, а временем τ спада автокорреляционной функции хаотического сигнала. По порядку величины τ можно оценить как $1/\Delta F$, где ΔF — полоса хаотического сигнала. Если, к примеру, полоса хаотического сигнала будет составлять 300 МГц, то время автокорреляции будет порядка 3 нс. Соответственно расстояние, которое за это время проходит электромагнитная волна в вакууме, будет составлять порядка 0.9 м.

В дальнейшем была продемонстрирована возможность работы схемы DC² не только в режиме «точка–точка», но и возможность функционирования в режиме многопользовательского доступа [14], что значительно расширяет диапазон ее потенциального применения.

Стоит также заметить, что в схеме DC² при передаче данных используются хаотические радиоимпульсы со скважностью и большой базой (коэффициентом процессинга), что теоретически должно способствовать обеспечению высокой помехоустойчивости в условиях многолучевого распространения и при значительном уровне искажений и шумов.

Цель данной работы состоит в проектировании, создании и исследовании экспериментального макета схемы DC², предназначенного для передачи информации по каналу в виде фрагмента кабеля. Цель экспериментов — демонстрация работоспособности предложенного способа передачи и приема данных, а также проверка соответствия его характеристик полученным ранее теоретическим оценкам и данным компьютерного моделирования.

Структура прямохаотической схемы относительной передачи данных DC², принципы ее работы и свойства описаны в [12, 13].

1. Блок-схема макета DC²

Блок-схема экспериментального макета схемы передачи DC² представлена на рис. 1.

1.1. Передатчик. Передатчик (Transmitter) схемы DC² (см. рис. 1) состоит из: генератора хаотического сигнала (Chaos source), микроконтроллера (МК — MCU), программируемой логической интегральной схемы (ПЛИС — FPGA), делителя мощности пополам (D), модулятора (M), блока временной задержки (τ), а также сумматора (+).

К источнику подключена программируемая логическая интегральная схема ПЛИС, управляющая его питанием. ПЛИС включает источник хаоса на время, равное длительности импульса T_p , а затем выключает на время, равное $2T_p$. Таким образом, на выход источника поступает

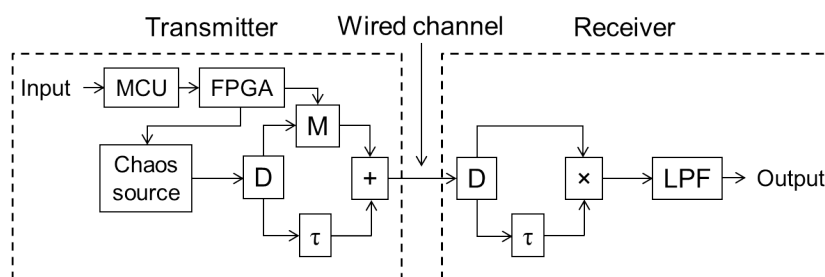


Рис. 1. Прямохаотическая схема относительной передачи: Chaos source — источник хаоса, Input — вход системы, MCU — микроконтроллер МК, FPGA — программируемая логическая интегральная схема ПЛИС, D — делитель, M — модулятор, τ — блок временной задержки, «+» — сумматор, « \times » — перемножитель, LPF — фильтр нижних частот ФНЧ, Output — выход схемы

Fig. 1. Direct chaotic differentially coherent transmission scheme: Chaos source — chaos generator, Input — information input, MCU — microcontroller, FPGA — field-programmable gate array, D — divider, M — modulator, τ — time delay, “+” — adder, “ \times ” — multiplier, LPF — low pass filter, Output — scheme’s output

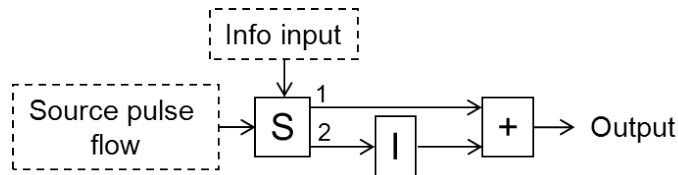


Рис. 2. Модулятор прямохаотической схемы относительной передачи: Source pulse flow – поток импульсов источника, Info input – информационный вход ключа модулятора, S – двухпозиционный ключ, I – инвертор, «+» – сумматор, Output – выход модулятора

Fig. 2. Modulator of direct chaotic differentially coherent transmission scheme: Source pulse flow – modulator source pulse flow input, Info input – modulator information signal input, S – single pole double throw switch, I – inverter, “+” – adder, Output – modulator output

поток хаотических импульсов со скважностью 3. Затем поток импульсов источника попадает на делитель мощности D. Сигнал с верхнего выхода делителя (см. рис. 1) попадает на модулятор, а сигнал с нижнего попадает на блок задержки, где осуществляется его задержка на время τ , большее или равное времени автокорреляции сигнала источника.

Схема модулятора (рис. 2) состоит из двухпозиционного ключа S (Single pole double throw switch), сумматора (+), а также инвертора (I).

Входной информационный сигнал поступает через МК на ПЛИС, управляющую потоком импульсов и подключенную к информационному входу ключа (info input на рис. 2). МК передает поток входящих символов на ПЛИС через SPI интерфейс. В зависимости от значения информационного символа («+1» или «-1») из входного потока и в соответствии со временем прихода импульсов на вход ключа, ПЛИС подает различное напряжение на информационный вход ключа. В свою очередь, в зависимости от уровня напряжения на информационном входе ключа, он находится либо в верхнем, либо в нижнем положении. В верхнем положении ключ пропускает сигнал (импульс) через тракт 1, а тракт 2 разомкнут (см. рис. 2). Соответственно в нижнем положении ключ пропускает сигнал через тракт 2, а тракт 1 разомкнут. Когда ключ находится в верхнем положении, импульс проходит через тракт 1 без изменений и поступает на выход модулятора. Это соответствует передаче «+1». Когда ключ находится в нижнем положении, импульс поступает на блок инвертора, где осуществляется его инвертирование. Затем с выхода инвертора сигнал поступает на выход модулятора. Это соответствует передаче «-1». Сумматор формирует выходной поток модулятора. С выхода модулятора сигнал поступает на верхний вход сумматора, расположенного на выходе передатчика (см. рис. 1). Сигнал с выхода блока задержки поступает на нижний вход сумматора, расположенного на выходе передатчика. Затем с выхода сумматора результирующий сигнал передается в проводной канал связи.

1.2. Приемник. Приемник (Receiver) схемы DC² (см. рис. 1) состоит из: делителя мощности пополам (D), блока временной задержки (τ), перемножителя (\times), а также фильтра нижних частот (ФНЧ, Low Pass Filter – LPF).

Поток импульсов из канала поступает на делитель. Сигнал с верхнего выхода делителя без изменений поступает на верхний вход перемножителя. Сигнал с нижнего выхода делителя поступает на вход блока задержки на время τ (идентична задержке в передатчике). Сигнал с выхода блока задержки поступает на нижний вход перемножителя. Затем сигналы с верхнего выхода делителя и выхода задержки перемножаются. Результат перемножения поступает на вход ФНЧ, выполняющего роль интегратора. Частота среза интегрирующего фильтра обратно пропорциональна длительности импульса источника. Сигнал с выхода ФНЧ сравнивается с нулевым порогом. Если сигнал на выходе ФНЧ превышает нулевой порог, то детектируется «+1». Если же выходной сигнал ниже нулевого порога, то детектируется «-1».

Пусть $S_k(t)$ – k -й хаотический импульс в потоке, формируемом источником хаотических радиоимпульсов; $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ – значение информационного модулирующего сигнала. При передаче k -го двоичного информационного символа сигнал на выходе передатчика в схеме DC² будет выглядеть следующим образом:

$$Y_k(t) = \frac{1}{2}(\alpha_k S_k(t) + S_k(t - \tau)). \quad (1)$$

В приемнике, при отсутствии шумов и внешних искажений, импульс на выходе блока перемножения, соответствующий k -му информационному символу, поступает на интегратор, после которого приобретает вид:

$$Z_k(t) = \frac{1}{16}M[\alpha_k S_k^2(t - \tau) + S_k(t)S_k(t - \tau) + \alpha_k S_k(t)S_k(t - 2\tau) + S_k(t - \tau)S_k(t - 2\tau)], \quad (2)$$

где $M[X(t)] = \int_t^{t+T_p} X(t)dt$ – оператор усреднения по времени. Так как τ – это время, большее или равное времени автокорреляции сигнала источника, то в выражении (2) значение слагаемого $\alpha_k S_k^2(t - \tau)$ на порядок превышает значения остальных трех слагаемых: $S_k(t)S_k(t - \tau)$, $\alpha_k S_k(t)S_k(t - 2\tau)$ и $S_k(t - \tau)S_k(t - 2\tau)$, представляющих собой внутренний шум передатчика и приемника системы, возникающий при модуляции. Таким образом, значение $Z_k(t)$ будет всегда иметь знак $\alpha_k S_k^2(t - \tau)$, то есть знак α_k . Выставление нулевого порога на выходе интегратора позволяет детектировать поток принятых символов.

2. Макет схемы DC²

Экспериментальный макет (рис. 3) схемы передачи DC² был собран на основе блок-схемы на рис. 1.

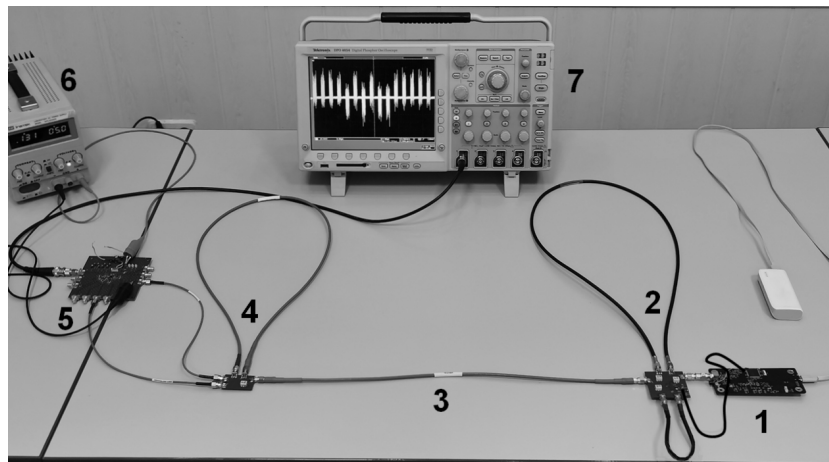


Рис. 3. Фото экспериментального макета прямохаотической схемы относительной передачи: 1 – плата, включающая источник хаотических радиоимпульсов и микроконтроллер, формирующий информационную последовательность; 2 – плата, содержащая делитель на два канала, модулятор, линию задержки на время большее либо равное времени автокорреляции сигнала источника и сумматор; 3 – кабель, выступающий в роли канала связи; 4 – плата, содержащая делитель на два канала, линию задержки в одном из каналов и два выхода; 5 – плата перемножителя; 6 – источник питания; 7 – осциллограф

Fig. 3. Photo of direct chaotic differentially coherent transmission scheme experimental layout: 1 – board, that includes a source of chaotic radio pulses and a microcontroller that forms an information sequence; 2 – board that contains a divider into two channels, a modulator, a delay line for a time greater than or equal to the autocorrelation time of the source signal, and an adder; 3 – cable that serves as a communication channel; 4 – board that contains a divider into two channels, a delay line in one of the channels and two outputs; 5 – multiplier board; 6 – power supply; 7 – oscilloscope

2.1. Макет передатчика. В качестве источника хаотического сигнала был использован генератор с полосой спектра частот от 200 до 500 МГц (рис. 4).

Источник хаотического сигнала, программируемая логическая интегральная схема ПЛИС, формирующая поток импульсов источника и управляющая информационным входом модулятора, а также МК, принимающий входной информационный поток, были расположены на одной плате (помечено цифрой 1 на рис. 3). Длительность импульсов составляла 2 мкс. В качестве делителя мощности был использован делитель/сумматор с рабочей полосой частот до 1 ГГц. При инверсном включении делитель/сумматор можно использовать как сумматор. В качестве сумматора был использован делитель/сумматор, аналогичный использованному делителю. В качестве линии задержки на время, равное или превышающее время автокорреляции импульсов источника, в эксперименте был использован фрагмент коаксиального кабеля. На рис. 5 представлена автокорреляционная функция импульсов источника.

Из графика видно, что за 4–5 нс автокорреляционная функция спадает примерно на порядок относительно максимума. Для обеспечения задержки был использован фрагмент кабеля длиной $L = 1$ м. Скорость распространения сигнала в примененном кабеле составляет примерно 70% (коэффициент скорости $v_p = 0.7$) от скорости света в вакууме. С учетом этого параметра длительность задержки составляет $\tau = L/(v_p \cdot c) = 1/(0.7 \cdot 3 \cdot 10^8) \approx 4.8$ нс, что вполне соответствует времени автокорреляции импульсов источника (см. рис. 5). Делитель, линия задержки и сумматор, а также весь блок модулятора (см. рис. 2) были объединены на одной плате (помечено цифрой 2 на рис. 3). Модулятор состоит из ключа, инвертора и сумматора. В качестве ключа был использован двухпозиционный ключ с рабочей полосой частот до 6 ГГц. В качестве инвертирующего блока была использована задержка на время спадания автокорреляционной функции источника до минимума (см. рис. 5). Минимум автокорреляционной функции хаотических импульсов источника противоположен по знаку максимуму, а по абсолютному значению меньше максимума на 20–30% (см. рис. 5). Таким образом, сравнение с нулевым порогом значений максимума и минимума автокорреляционной функции будет всегда давать противоположный результат, что соответствует критерию детектирования информационных символов на приемнике схемы DC².

Согласно графику на рис. 5, минимум автокорреляционной функции находится на расстоянии приблизительно 1 нс. Это соответствует длине тракта порядка 0.3 м. В качестве инвертирующей задержки был взят фрагмент кабеля длиной $L_{inv} = 0.23$ м ($v_p = 0.7$). С учетом параметров кабеля это соответствует длительности задержки $\tau_{inv} = L_{inv}/(v_p \cdot c) = 0.23/(0.7 \cdot 3 \cdot 10^8) \approx 1.1$ нс,

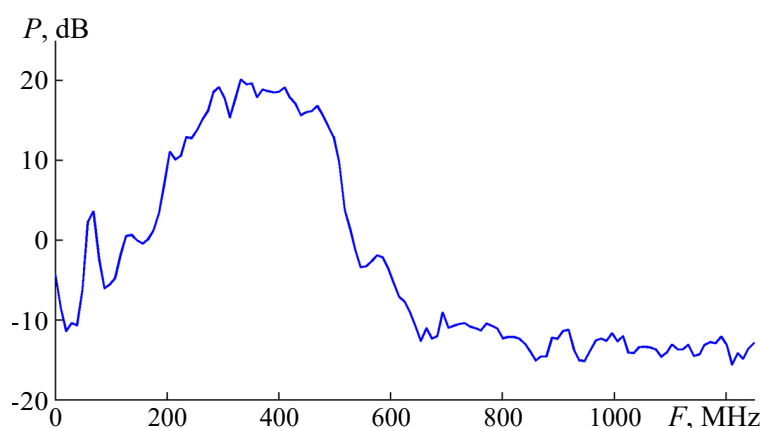


Рис. 4. Спектр мощности импульсов источника

Fig. 4. Source pulses power spectrum

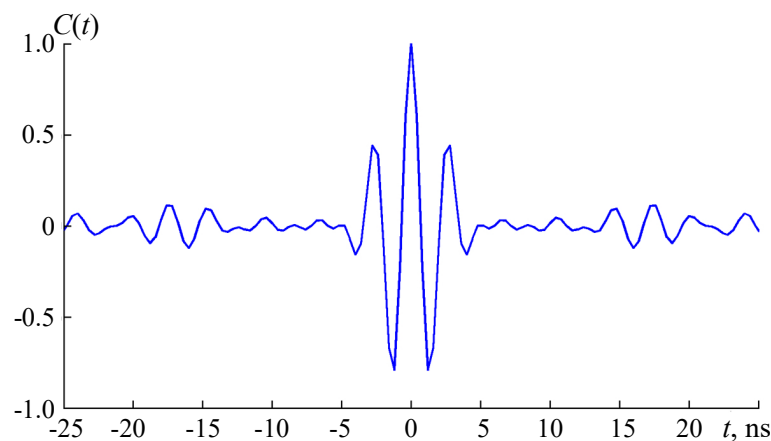


Рис. 5. Автокорреляционная функция импульсов источника

Fig. 5. Source pulses autocorrelation function

что в свою очередь вполне соответствует расстоянию от максимума до минимума автокорреляционной функции импульсов источника из графика на рис. 5.

Выход генератора был подсоединен ко входу делителя при помощи sma-разъемов. Программируемая логическая интегральная схема ПЛИС была подсоединена к информационному входу ключа при помощи тонкого провода. Коаксиальные кабели, выполнявшие роль линии задержки на время автокорреляции, а также инвертирующей задержки, были присоединены к плате при помощи sma-разъемов. Выход передатчика также был представлен в виде sma-разъема. В качестве канала связи выступал фрагмент коаксиального кабеля ($v_p = 0.7$) длиной 25 см (помечено цифрой 3 на рис. 3).

2.2. Макет приемника. Входной sma-разъем, принимавший сигнал из канала связи; делитель; sma-разъемы для подключения задержки; sma-разъемы для подключения платы с перемножителем были объединены на одной плате (помечено цифрой 4 на рис. 3). Перемножитель, имеющий рабочую полосу частот до 1 ГГц, был расположен на отдельной специализированной плате (помечено цифрой 5 на рис. 3). Входы и выход перемножителя на плате, через который он был подключен к осциллографу, также представляли собой sma-разъемы. Делитель/сумматор, а также линия задержки, реализованная в виде фрагмента коаксиального кабеля длиной 1 м, полностью аналогичны примененным в передатчике.

Выход перемножителя был подключен к осциллографу с полосой рабочих частот до 500 МГц при помощи коаксиального кабеля. Дискретизированный сигнал, поступающий с перемножителя в виде CSV-файла, передавался с осциллографа на ПК. Далее в программной среде MATLAB производилась обработка сигналов, в том числе и интеграция/фильтрация ФНЧ с конечной импульсной характеристикой (КИХ ФНЧ).

3. Результаты эксперимента

Система работала в непрерывном режиме, передавая поток импульсов длительностью 2 мкс и скважностью 3 (скорость передачи 167 Кбит). На рис. 6 изображен фрагмент из 10 импульсов, снятых в разных точках схемы DC² в процессе работы экспериментального макета: *a* — на выходе генератора источника, *b* — на информационном входе ключа модулятора, *c* — на выходе передатчика (выходе сумматора), *d* — на выходе перемножителя приемника, *e* — на выходе ФНЧ

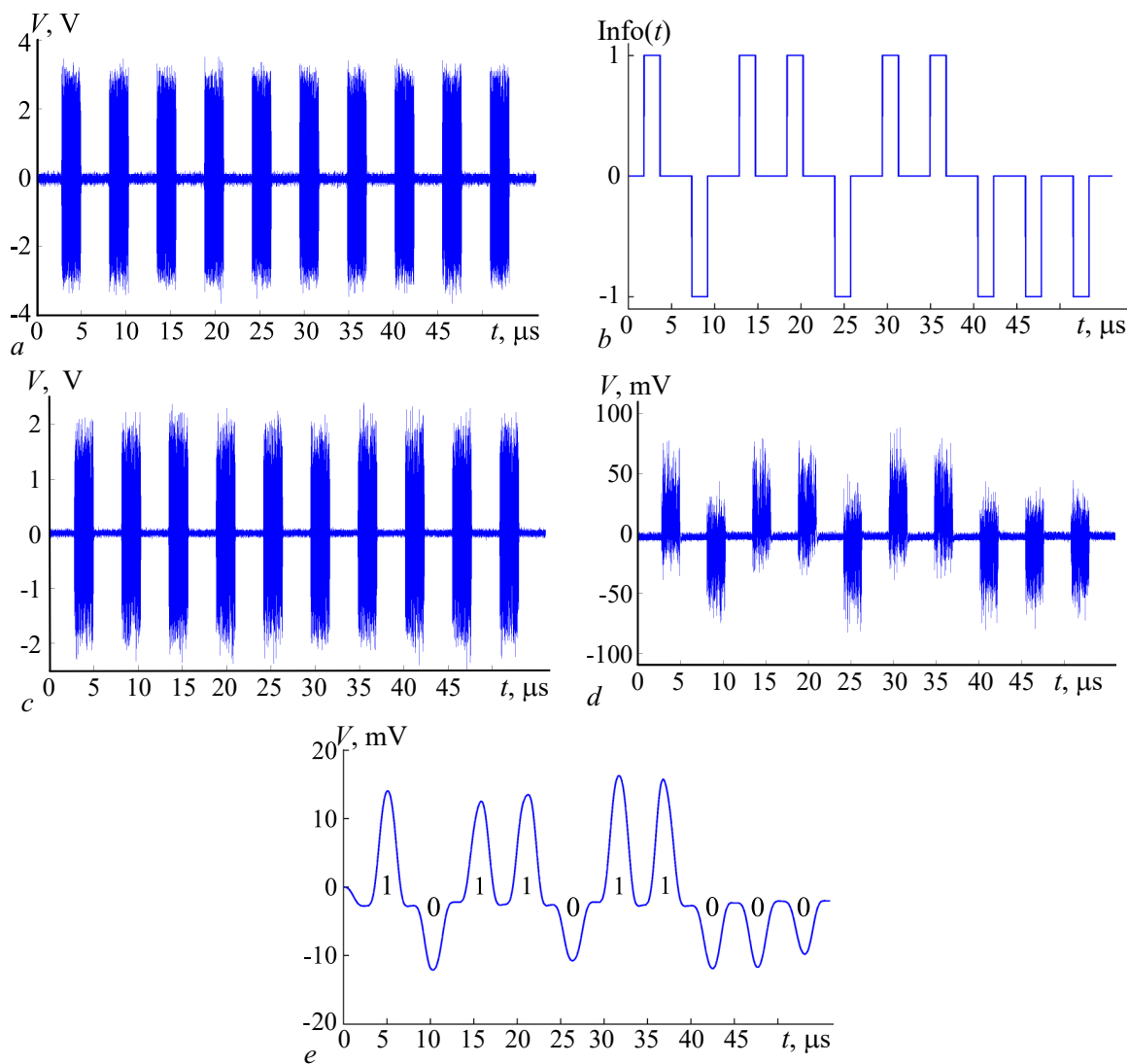


Рис. 6. 10 импульсов, снятых в разных точках схемы DC^2 в процессе эксперимента: *a* — на выходе генератора источника, *b* — на информационном входе ключа модулятора, *c* — на выходе передатчика (выходе сумматора), *d* — на выходе перемножителя приемника, *e* — на выходе ФНЧ приемника

Fig. 6. 10 pulses taken at different points of the DC^2 scheme during the experiment: *a* — at the output of the source generator, *b* — at the information input of the modulator switch, *c* — at the output of the transmitter (output of the adder), *d* — at the output of the receiver multiplier, *e* — at the output of the receiver low-pass filter

приемника. Из рисунка видно, что путем сравнения с нулевым порогом из этих 10 импульсов может быть протектирована последовательность символов 1011011000 (положительные и отрицательные огибающие импульсов на рис. 6, *e*).

4. Реакция приемника на немодулированный шумовой импульс

Что получится, если шумовые импульсы, идентичные по мощности хаотическим импульсам, модулированным методом DC^2 , будут мешать передаче полезного сигнала?

Так как при интегрировании на приемнике один шумовой импульс будет сдвинут относительно другого на время автокорреляции, то они будут практически некоррелированы между собой, и на выходе приемника получится импульс малой амплитуды.

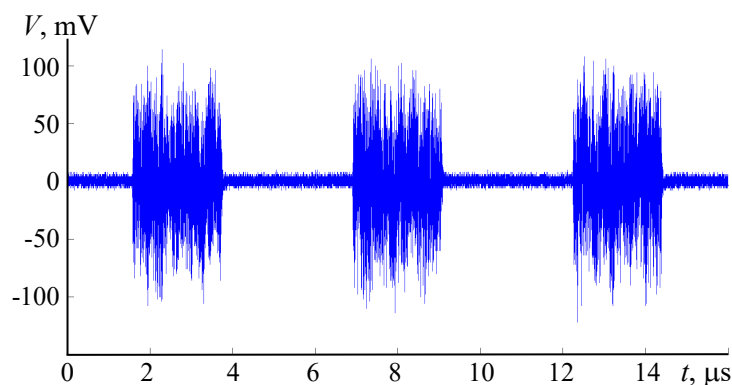


Рис. 7. Немодулированные шумовые импульсы на выходе перемножителя приемника

Fig. 7. Unmodulated noise pulses at the output of the receiver multiplier

Для оценки степени влияния шумовых импульсов на передачу полезного сигнала в данном эксперименте производилось сравнение подачи на приемник прямохаотической схемы потока хаотических импульсов с выхода ее передатчика, несущих полезный сигнал, с потоком немодулированных шумовых импульсов с идентичными спектром и мощностью.

Для экспериментальной проверки степени влияния шумовых импульсов на передачу полезного сигнала был сформирован поток немодулированных шумовых импульсов со спектром и мощностью, идентичными спектру и мощности импульсов на выходе передатчика прямохаотической относительной схемы. Поток был получен следующим образом: из передатчика прямохаотической относительной схемы (см. рис. 1) была убрана задержка между нижним выходом делителя и входом сумматора, а также весь блок модулятора. Сигнал с выхода сумматора подавался на приемник через проводной канал. На рис. 7 изображены 3 шумовых импульса на выходе перемножителя приемника, полученные описанным выше способом.

Для демонстрации передачи полезного сигнала прямохаотическим относительным методом были переданы по отдельности потоки символов «+1» и «-1». На рис. 8 сплошной линией нанесены 3 импульса на выходе ФНЧ приемника, полученные при передаче потока «+1»,

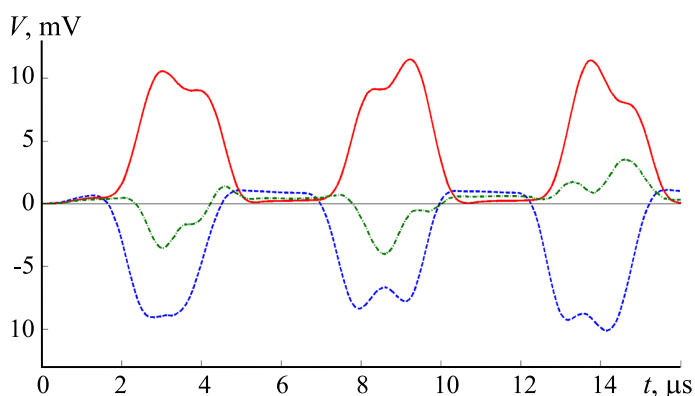


Рис. 8. Импульсы на выходе ФНЧ приемника: сплошной линией изображены 3 импульса при передаче потока символов «+1», штриховой линией изображены 3 импульса при передаче потока символов «-1», штрихпунктирной линией изображены 3 импульса при передаче немодулированного шума

Fig. 8. Pulses at the output of the low-pass filter at the receiver: the solid line shows 3 pulses during the transmission of “+1” symbol stream, the dashed line shows 3 pulses during the transmission of “-1” symbol stream, the dash-dotted line shows 3 pulses during the transmission of unmodulated noise

пунктирной линией нанесены 3 импульса на выходе ФНЧ, полученные при передаче потока «-1». Для сравнения на рис. 8 вместе с импульсами, несущими полезный сигнал, штрихпунктирной линией изображены 3 немодулированных шумовых импульса на выходе ФНЧ.

Из рисунка видно, что при передаче «+1» и «-1» амплитуда импульсов на выходе ФНЧ по абсолютному значению значительно превышает амплитуду импульсов, полученных при передаче немодулированного шума. Таким образом показано, что передача полезного сигнала приводит к существенно большей амплитуде сигнала на выходе приемника по сравнению с передачей немодулированного шума при одинаковой исходной мощности. Можно ожидать, что с увеличением базы сигнала при одинаковой мощности модулированных и немодулированных импульсов разница между их амплитудами на выходе приемника также будет расти.

Заключение

В работе придумана и создана экспериментальная установка, позволяющая апробировать возможность передачи и детектирования потока информационных символов «+1» и «-1» по принципам модуляции и демодуляции прямохаотической схемы относительной передачи DC^2 . Этот макет был собран. На нем удалось продемонстрировать работоспособность предложенного способа передачи и приема данных, а также соответствие его характеристик полученным ранее теоретическим оценкам и данным компьютерного моделирования.

Макет состоял из приемника, передатчика и проводного канала связи между ними и работал по принципу «точка-точка». Макет функционировал в режиме непрерывной передачи потока информации. Передаваемые в эксперименте данные были успешно получены на приемнике. Результаты, снятые при помощи осциллографа в некоторых узлах макета (см. рис. 6) в процессе передачи данных, вполне соответствуют результатам, полученным на предыдущих этапах при моделировании. Также в работе было экспериментально показано, что немодулированные шумовые импульсы при прохождении через приемник по амплитуде оказываются на порядок ниже модулированных хаотических импульсов, пришедших с передатчика прямохаотической схемы при их одинаковой исходной мощности.

Список литературы

1. *Петрович Н. Т., Размахнин М. К.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Советское радио, 1969. 233 с.
2. *Варакин Л. Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985. 384 с.
3. *Петрович Н. Т.* Относительные методы передачи информации. М.: Книга-М, 2003. 108 с.
4. *Kolumban G., Kennedy M. P., Chua L. O.* The role of synchronization in digital communications using chaos. I. Fundamentals of digital communications // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 1997. Vol. 44, no. 10. P. 927–936. DOI: 10.1109/81.633882.
5. *Kocarev L., Halle K. S., Eckert K., Chua L. O., Parlitz U.* Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, no. 3. P. 709–713. DOI: 10.1142/S0218127492000823.
6. *Cuomo K. M., Oppenheim A. V., Strogatz S. H.* Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. 1993. Vol. 40, no. 10. P. 626–633. DOI: 10.1109/82.246163.
7. *Downes P. T.* Secure communication using chaotic synchronization // SPIE. 1993. Vol. 2038. P. 227–234.
8. *Dedieu H., Kennedy M. P., Hasler M.* Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic

- carrier using self-synchronizing Chua's circuits // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. 1993. Vol. 40, no. 10. P. 634–642. DOI: 10.1109/82.246164.
9. Parlitz U., Chua L. O., Kocarev L., Halle K. S., Shang A. Transmission of digital signals by chaotic synchronization // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, no. 4. P. 973–977. DOI: 10.1142/S0218127492000562.
 10. Kaddoum G., Olivain J., Samson G. B., Giard P., Gagnon F. Implementation of a differential chaos shift keying communication system in GNU radio // In: 2012 International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS). 28–31 August 2012, Paris, France. New York: IEEE, 2012. P. 934–938. DOI: 10.1109/ISWCS.2012.6328505.
 11. Hasan F. S., Salah-Addin Ibrahim D. Design and implementation of reverse-DCSK communication system using FPGA technique // International Journal of Advanced Science and Technology. 2020. Vol. 29, no. 3. P. 12893–12905.
 12. Дмитриев А. С., Мохсени Т. И., Сьерра-Теран К. М. Относительная передача информации на основе хаотических радиоимпульсов // Радиотехника и электроника. 2018. Т. 63, № 10. С. 1074–1082. DOI: 10.1134/S0033849418100078.
 13. Дмитриев А. С., Мохсени Т. И., Сьерра-Теран К. М. Сверх- и гиперширокополосная относительная передача информации на основе хаотических радиоимпульсов // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 4. С. 59–74. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-59-74.
 14. Дмитриев А. С., Мохсени Т. И., Сьерра-Теран К. М. Многопользовательский доступ в системах относительной передачи информации на основе хаотических радиоимпульсов // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46, № 13. С. 47–50. DOI: 10.21883/PJTF.2020.13.49592.18323.

References

1. Petrovich NT, Razmakhnin MK. Communication Systems With Noise-Like Signals. Moscow: Sovetskoe Radio; 1969. 233 p. (in Russian).
2. Varakin LE. Communication Systems With Noise-Like Signals. Moscow: Radio I Svyaz; 1985. 384 p. (in Russian).
3. Petrovich NT. Differentially Coherent Information Transmission Methods. Moscow: Kniga-M; 2003. 108 p. (in Russian).
4. Kolumban G, Kennedy MP, Chua LO. The role of synchronization in digital communications using chaos. I. Fundamentals of digital communications. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. 1997;44(10):927–936. DOI: 10.1109/81.633882.
5. Kocarev L, Halle KS, Eckert K, Chua LO, Parlitz U. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization. International Journal of Bifurcation and Chaos. 1992;2(3):709–713. DOI: 10.1142/S0218127492000823.
6. Cuomo KM, Oppenheim AV, Strogatz SH. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with applications to communications. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. 1993;40(10):626–633. DOI: 10.1109/82.246163.
7. Downes PT. Secure communication using chaotic synchronization. SPIE. 1993;2038:227–234.
8. Dedieu H, Kennedy MP, Hasler M. Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. 1993;40(10):634–642. DOI: 10.1109/82.246164.
9. Parlitz U, Chua LO, Kocarev L, Halle KS, Shang A. Transmission of digital signals by chaotic synchronization. International Journal of Bifurcation and Chaos. 1992;2(4):973–977. DOI: 10.1142/S0218127492000562.
10. Kaddoum G, Olivain J, Samson GB, Giard P, Gagnon F. Implementation of a differential chaos shift keying communication system in GNU radio. In: 2012 International Symposium on Wireless

Communication Systems (ISWCS). 28–31 August 2012, Paris, France. New York: IEEE; 2012. P. 934–938. DOI: 10.1109/ISWCS.2012.6328505.

11. Hasan FS, Salah-Addin Ibrahim D. Design and implementation of reverse-DCSK communication system using FPGA technique. *International Journal of Advanced Science and Technology*. 2020;29(3):12893–12905.
12. Dmitriev AS, Mokhseni TI, Sierra Teran KM. Differentially coherent information transmission based on chaotic radio pulses. *J. Commun. Technol. Electron.* 2018;63(10):1183–1190. DOI: 10.1134/S1064226918100078.
13. Dmitriev AS, Mokhseni TI, Sierra-Teran CM. Differentially coherent information transmission based on chaotic radio pulses. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(4):59–74. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-59-74.
14. Dmitriev AS, Mokhseni TI, Sierra-Teran CM. Multiuser access in systems of differentially coherent information transmission based on chaotic radio pulses. *Tech. Phys. Lett.* 2020;46(7):669–672. DOI: 10.1134/S106378502007007X.



Мохсени Тимур Исхакович — родился в Чебоксарах (1985). Окончил Московский физико-технический институт (2008). После окончания института работает в Институте радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов — применение широкополосных хаотических сигналов для передачи информации. Автор более 50 печатных работ (из них 16 статей в соавторстве) по направлению, указанному выше.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mokhseni@gmail.com
ORCID: 0000-0002-3592-0697
AuthorID (eLibrary.Ru): 1145311



Петросян Манвел Мгерович — окончил бакалавриат Ереванского государственного университета по специальности «Телекоммуникация и обработка сигналов» (ЕГУ, 2014), магистратуру Московского физико-технического института по специальности «Физико-математические проблемы волновых процессов» (МФТИ, 2016), аспирантуру Московского физико-технического института по специальности «Информатика и вычислительная техника» (МФТИ, 2020). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (МФТИ, 2020). Работает в Институте радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Ведет научно-исследовательскую работу по направлению использования хаотического электромагнитного излучения для передачи данных и получения информации об окружающей среде. Опубликовал по этой тематике более 10 научных статей в соавторстве.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: manvel93@rambler.ru
ORCID: 0000-0003-2502-5987
AuthorID (eLibrary.Ru): 994954




Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003027
EDN: ABUBJC

О типичности явления взрывной синхронизации в сетях осцилляторов с топологиями связей типа «кольцо» и «малый мир»

А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко 

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Региональный научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»
E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com, mariakurovskaya@gmail.com, o.i.moskalenko@gmail.com

Поступила в редакцию 29.10.2022, принята к публикации 30.11.2022,
опубликована онлайн 29.12.2022, опубликована 31.01.2023

Аннотация. Цель настоящего исследования состоит в изучении вопроса о том, насколько типичным (или же, наоборот, уникальным) оказывается явление взрывной синхронизации в сетях нелинейных осцилляторов с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир», и каким образом должны соотноситься парциальные частоты взаимодействующих осцилляторов друг с другом для того, чтобы явление взрывной синхронизации в этих сетях было возможным. **Методы.** В данной работе используется аналитическое описание поведения сетей нелинейных элементов с топологиями связей типа «кольцо» и «малый мир», находящихся в полностью синхронном состоянии. Для подтверждения полученных результатов используется численное моделирование. **Результаты.** Показано, что в сетях нелинейных осцилляторов с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир» явление взрывной синхронизации может наблюдаться при различных распределениях парциальных частот осцилляторов сети. **Заключение.** В работе рассмотрено аналитическое описание поведения осцилляторов сети с топологиями «кольцо» и «малый мир» и показано, что явление взрывной синхронизации в подобных сетях является хотя и нетипичным, но и не уникальным.

Ключевые слова: явление взрывной синхронизации, осцилляторы Курамото, сети нелинейных элементов, топология «малый мир», топология «кольцо», парциальные частоты.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФ, проект № 19-12-00037.

Для цитирования: Короновский А. А., Куровская М. К., Москаленко О. И. О типичности явления взрывной синхронизации в сетях осцилляторов с топологиями связей типа «кольцо» и «малый мир» // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 32–44. DOI: 10.18500/0869-6632-003027. EDN: ABUBJC

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

On the typicality of the explosive synchronization phenomenon in oscillator networks with the link topology of the “ring” and “small world” types

A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko✉

Saratov State University

Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com, mariakurovskaya@gmail.com, ✉o.i.moskalenko@gmail.com

Received 29.10.2022, accepted 30.11.2022, available online 29.12.2022, published 31.01.2023

Abstract. Purpose of this study is to investigate the problem of how typical (or, conversely, unique) is the phenomenon of explosive synchronization in networks of nonlinear oscillators with topologies of links such as “ring” and “small world”, and, in turn, how the partial frequencies of the interacting oscillators must correlate with each other for the phenomenon of explosive synchronization in these networks can be possible. *Methods.* In this paper, we use an analytical description of the synchronous behavior of networks of nonlinear elements with “ring” and “small world” link topologies. To confirm the obtained results the numerical simulation is used. *Results.* It is shown that in networks of nonlinear oscillators with topologies of links such as “ring” and “small world”, the phenomenon of explosive synchronization can be observed for the different distributions of partial frequencies of network oscillators. *Conclusion.* The paper considers an analytical description of the behavior of network oscillators with “ring” and “small world” topologies of links and shows that the phenomenon of explosive synchronization in such networks is atypical, but not unique.

Keywords: explosive synchronization phenomenon, Kuramoto oscillators, nonlinear element networks, small-world topology, ring topology, partial frequencies.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation, project No. 19-12-00037.

For citation: Koronovskii AA, Kurovskaya MK, Moskalenko OI. On the typicality of the explosive synchronization phenomenon in oscillator networks with the link topology of the “ring” and “small world” types. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(1):32–44. DOI: 10.18500/0869-6632-003027

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

При рассмотрении коллективной динамики сетей нелинейных осцилляторов со сложной топологией межэлементных связей [1, 2] среди большого разнообразия возможных типов синхронного поведения встречается так называемый режим *взрывной синхронизации* [3–6] (*explosive synchronization*), при котором при увеличении параметра связи между элементами внезапно происходит взрывной рост числа синхронных осцилляторов сети и вся сеть начинает демонстрировать синхронное поведение. И, наоборот, при уменьшении параметра связи полностью синхронное состояние сети внезапно разрушается, при этом число синхронных осцилляторов (размер возникшего синхронного кластера) существенным образом уменьшается. Явление взрывной синхронизации описано и изучено для сетей фазовых осцилляторов, и, соответственно, под термином «синхронное поведение» взаимодействующих осцилляторов понимается режим фазовой синхронизации, когда имеет место совпадение частот взаимодействующих осцилляторов, а значит, и захват их мгновенных фаз [7, 8].

Несмотря на то, что явление взрывной синхронизации может наблюдаться для сложных сетей с различными топологиями связей — такими как регулярные сети, где каждый элемент сети связан со всеми остальными [9], сети со случайной топологией связей [10], масштабно-инвариантные сети [6, 11, 12], сети малого мира [13] — режим взрывной синхронизации, несомненно,

имеет универсальный характер, но не является типичным. Он наблюдается в достаточно редких случаях, имеет самоподобный характер [10] и требует весьма специфического набора значений управляющих параметров, как для отдельных осцилляторов, так и для всей сети в целом, при этом важную роль играет распределение собственных частот взаимодействующих осцилляторов $g(\omega)$ (см., например, раздел 4.1.1 обзора [3]). В частности, для случая регулярной сети осцилляторов Курамото с топологией связей между элементами «каждый с каждым» явление взрывной синхронизации описано для случая равномерного эквидистантного распределения собственных частот осцилляторов, а также для частных случаев параболического, треугольного и «шляпообразного» эквидистантных распределений парциальных частот взаимодействующих систем [9]. Точно также, явление взрывной синхронизации возникает в случае равномерного эквидистантного распределения собственных частот взаимодействующих осцилляторов в сетях со случайной топологией связей [10], а также в сетях малого мира и регулярных сетях с топологией связей типа «кольцо» [13]. В то же самое время, для того чтобы явление взрывной синхронизации имело место в масштабно-инвариантных сетях, собственные частоты осцилляторов ω_i должны быть связаны со степенью соответствующего узла k_i [14], при этом достаточно часто используется соотношение $\omega_i = k_i$ [6, 11]. В литературе рассматриваются также и другие достаточно «экзотические» варианты сложных сетей и распределений парциальных частот, такие как масштабно-инвариантные сети с запаздывающими связями [15], частотно-взвешенные сети [16], многослойные сети [17] (в том числе, многослойные сети с частичной и слабой корреляцией [18]) и проч.

В настоящей работе, основываясь на особенностях топологии межэлементных связей сетей типа «кольцо» и «малый мир», рассматривается вопрос о возможных видах распределения парциальных частот взаимодействующих фазовых осцилляторов, при которых возможен «взрывной» характер установления (или разрушения) полностью синхронного состояния сети нелинейных осцилляторов при изменении силы связи между осцилляторами.

1. Рассматриваемая модель сети фазовых осцилляторов

Хотя явление взрывной синхронизации наблюдается для различных типов фазовых осцилляторов (в частности, для кусочно-линейных осцилляторов Ресслера [4], обобщенных осцилляторов Курамото [19]), в качестве эталонной модели фазовых осцилляторов, находящихся в узлах сети со сложной топологией связей, используется модель осцилляторов Курамото [20, 21]

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \lambda \sum_{k=1}^N a_{jk} \sin(\varphi_k - \varphi_j). \quad (1)$$

В соотношении (1) каждый j -й осциллятор характеризуется мгновенным значением фазы φ_j и частоты ω_j (которая является управляющим параметром для каждого осциллятора), топология связей между осцилляторами задается элементами матрицы $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$, принимающими значения ноль ($a_{jk} = a_{kj} = 0$) или единица ($a_{jk} = a_{kj} = 1$) в случае отсутствия или наличия связи между j -м и k -м осцилляторами, соответственно. Очевидно, что диагональные элементы матрицы \mathbf{A} должны быть тождественно равными нулю, $a_{jj} = 0$. Полное количество осцилляторов в сети задаётся управляющим параметром N , величина которого в настоящей работе полагается равной $N = 10^3$. Интенсивность всех связей сети полагается одинаковой и характеризуется величиной управляющего параметра λ .

Линейное преобразование $\varphi_j \rightarrow \varphi_j + \Omega_0 t$ переводит исходное соотношение (1) само в себя, однако, после этого преобразования переменная φ_j будет иметь смысл разности фаз между

исходным j -м осциллятором сети и некоторым опорным осциллятором (возможно, абстрактным), частота колебаний которого является Ω_0 . Аналогично, парциальная частота ω_j после такого преобразования будет иметь смысл разности частот исходного осциллятора с номером j и частотой Ω_0 . Выбирая Ω_0 лежащим внутри интервала парциальных частот взаимодействующих осцилляторов, $\Omega_0 \in (\omega_{\min}, \omega_{\max})$, можно добиться того, что собственные частоты рассматриваемых осцилляторов могут быть как положительными, так и отрицательными, а при выполнении условия $\Omega_0 = \langle \omega_j \rangle$ множество парциальных частот будет иметь нулевое среднее.

Поскольку в настоящей работе рассматривается регулярная сеть нелинейных осцилляторов Курамото с топологией межэлементных связей типа «кольцо», а также сеть с топологией «малый мир», формируемая из регулярной кольцевой сети с помощью метода Ватса–Строгаца [22], введем в рассмотрение аналогично работе [13] пространственную координату x , направленную «вдоль» кольца, начало которой относительно элементов сети может быть выбрано произвольно. Без потери общности будем считать, что во введённой в рассмотрение системе координат длина кольца будет составлять $2\mathfrak{L}$ единиц, а собственные частоты ω_j элементов сети зависят от координаты x и могут рассматриваться как некоторая функция координаты, $\omega(x)$. Аналогично, мгновенные значения величин φ_j также могут быть рассмотрены как функция пространственной переменной и времени, $\varphi(x, t)$, а в случае полностью синхронного состояния всех элементов сети и выбора значения Ω_0 равным частоте синхронных колебаний — как функция только пространственной переменной, $\varphi(x)$.

В предположении большого числа осцилляторов $N \gg 1$ и полностью синхронного состояния всех взаимодействующих осцилляторов для сети нелинейных осцилляторов с топологией межэлементных связей типа «кольцо» исходный оператор эволюции (1) может быть записан в виде

$$\lambda \Delta \cdot \Phi'_s(x) = \omega(x), \quad (2)$$

где величина

$$\Phi_s(x) = -\frac{1}{\Delta^2} \int_0^L \eta \sin(\varphi'(x)\eta) d\eta \quad (3)$$

является некоторой функцией, которую будем называть потенциальной (см. также [13]). В соотношении (2) переменная x пробегает диапазон значений от $-\mathfrak{L}$ до $+\mathfrak{L}$, параметр $\Delta = 2\mathfrak{L}/(N - 1)$ имеет смысл расстояния (в единицах безразмерной координаты x , введённой в рассмотрение вдоль кольцевой сети) между двумя соседними элементами сети (то есть, между j -м и $(j + 1)$ -м осцилляторами), а величина $L = \Delta K$, в свою очередь, характеризует пространственный размер связи (опять же в единицах пространственной переменной x) каждого элемента сети с $2K$ соседями, с которыми он связан.

Действительно, для полностью синхронной сети с топологией межэлементных связей типа «кольцо» и осцилляторов с номерами $j \in [K + 1, N - K]$ соотношение (1) может быть записано в виде

$$0 = \omega(x_j) + \lambda \sum_{k=j-K}^{j+K} \sin(\varphi(x_j + (k - j)\Delta) - \varphi(x_j)), \quad (4)$$

где координата x_j соответствует положению j -го осциллятора. В силу замкнутости сети осцилляторов в кольцо, соотношение (4) (при соответствующем переобозначении номеров осцилляторов) будет справедливо и для осцилляторов с номерами меньше $(K + 1)$ и больше $(N - K)$.

С помощью переобозначений $k \rightarrow k - j$, $x \rightarrow x_j$

$$-\lambda \sum_{k=-K}^{+K} \sin(\varphi(x + k\Delta) - \varphi(x)) = \omega(x), \quad (5)$$

и последовательной цепочки преобразований

$$-\lambda \sum_{k=0}^K \sin(\varphi(x - k\Delta) - \varphi(x)) - \lambda \sum_{k=0}^K \sin(\varphi(x + k\Delta) - \varphi(x)) = \omega(x), \quad (6)$$

$$-\lambda \sum_{k=0}^K \{\sin(\varphi(x + k\Delta) - \varphi(x)) - \sin(\varphi(x) - \varphi(x - k\Delta))\} = \omega(x), \quad (7)$$

соотношение (4) может быть приведено к виду

$$-\lambda \sum_{k=0}^K \{U_k(x + k\Delta) - U_k(x)\} = \omega(x), \quad (8)$$

где

$$U_k(x) = \sin(\varphi(x) - \varphi(x - k\Delta)). \quad (9)$$

В предположении большого числа осцилляторов ансамбля, $N \gg 1$, и, соответственно, стремящегося к нулю расстояния между осцилляторами, $\Delta \ll 1$, соотношение (8) может быть записано в виде

$$-\lambda \Delta \sum_{k=0}^K k U_k'(x) = \omega(x). \quad (10)$$

Вводя в рассмотрение функцию

$$\tilde{\Phi}_s(x) = - \sum_{k=1}^K k U_k(x) = - \sum_{k=1}^K k \sin(\varphi(x) - \varphi(x - k\Delta)) = - \sum_{k=1}^K k \sin(\varphi_j - \varphi_{j-k}), \quad (11)$$

и, пользуясь свойством линейности оператора суммы, соотношение (10) можно записать как

$$\lambda \Delta \cdot \tilde{\Phi}_s'(x) = \omega(x). \quad (12)$$

Теперь, для перехода от полученного соотношения (12) к виду (2) остаётся только учесть

$$U_k(x) = \sin(\varphi(x) - \varphi(x - k\Delta)) \approx \sin(\varphi'(x)k\Delta) \quad (13)$$

и перейти от дискретного суммирования в (11) к непрерывному интегрированию

$$\sum_{k=1}^K k U_k(x) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{k=1}^K (k\Delta) U_k(x) \times \Delta \approx \frac{1}{\Delta^2} \int_0^L \eta \sin(\varphi'(x)\eta) d\eta, \quad (14)$$

что приводит соотношения (12) и (11) к виду, полностью идентичному выражениям (2) и (3), соответственно.

Понятно, что при построении сети элементов с топологией связей «малый мир» с использованием метода Ваттса–Строгаца [22] в результате перезамыкания кольцевых связей появляются «длинные» связи, которые не учитываются соотношениями (2) и (3), и, соответственно, поведение сетей малого мира будет искажено относительно аналитического описания. В то же самое время, можно ожидать, что, поскольку свойства «малого мира» в сетях нелинейных элементов проявляются при малых значениях вероятности p перезамыкания связей в методе Ваттса–Строгаца, появляющиеся искажения будут незначительными и не будут сильно влиять на основные аналитические результаты, полученные в ходе рассмотрения.

2. Полностью синхронный режим и его разрушение

Как уже обсуждалось во Введении, режим взрывной синхронизации заключается в резком, внешне внезапном увеличении числа синхронизованных осцилляторов в сети и переходе сети к полностью синхронному состоянию при увеличении силы связи между элементами сети. Аналогично, при уменьшении силы связи происходит внезапное разрушение полностью синхронного состояния сети и резкое уменьшение числа синхронизованных осцилляторов. Важно отметить, что установление и разрушение полностью синхронного состояния сети, как правило, сопровождается гистерезисом [3], иными словами, критические значения параметра связи при увеличении и уменьшении силы связи могут быть различными.

Аналитические соотношения (2) и (3) в разделе 1 были получены для случая полностью синхронного состояния сети осцилляторов Курамото. В то же самое время, очевидно, что в том случае, когда известна закономерность $\omega(x)$, по которой заданы парциальные частоты взаимодействующих осцилляторов (сделаем предположение об интегрируемости данной закономерности $\omega(x)$), для соотношения (2) всегда существует решение в виде

$$\Phi_s(x) = \frac{1}{\lambda\Delta} \int \omega(x) dx \quad (15)$$

на всем интервале рассмотрения $x \in [-\mathfrak{L}; \mathfrak{L}]$, независимо от величины силы связи λ (разумеется, при условии $\lambda \neq 0$) и степени синхронности динамического режима осцилляторов сети. С учётом вышеизложенного, представляется очевидным, что потенциальная функция $\Phi_s(x)$, определяемая соотношением (15), должна обладать (опять же, на всем интервале рассмотрения $x \in [-\mathfrak{L}; \mathfrak{L}]$) неким определённым свойством в режиме полностью синхронного состояния сети, и, наоборот, не обладать этим свойством в случае невозможности существования полностью синхронного состояния сети при малых значениях параметра связи. Более того, потеря этого свойства потенциальной функцией $\Phi_s(x)$ должна соответствовать критическому значению управляющего параметра λ , соответствующему моменту разрушения полностью синхронного состояния сети взаимосвязанных осцилляторов.

Поскольку из рассмотрения, проведённого в разделе 1, нам известна некоторая информация о потенциальной функции $\Phi_s(x)$ (см. соотношение (3)), и учитывая результаты работы [13], можно предположить, что данным свойством является свойство ограниченности значений потенциальной функции $\Phi_s(x)$ на всем интервале рассмотрения $x \in [-\mathfrak{L}; \mathfrak{L}]$ в некотором диапазоне значений

$$-S \leq \Phi_s(x) \leq S, \quad S > 0. \quad (16)$$

Оценить значение величины S можно из соотношения (3): несмотря на то, что явный вид зависимости фаз осцилляторов от координаты $\varphi(x)$ (производная от которой фигурирует в соотношении (3)) нам не известен, очевидно, что максимально и минимально возможными значениями подынтегральной функции $\sin(\varphi'(x)\eta)$ являются ± 1 , а соответственно, максимально и минимально возможные значения $\Phi_s(x)$ могут быть оценены (сверху) как

$$\pm \frac{1}{\Delta^2} \int_0^L \eta d\eta = \pm \frac{L^2}{2\Delta^2} = \pm \frac{K^2}{2}, \quad (17)$$

и, соответственно,

$$0 < S \leq \frac{K^2}{2}. \quad (18)$$

Таким образом, по результатам вышеприведённого рассмотрения можно сформулировать следующие промежуточные выводы: в сетях фазовых осцилляторов с топологиями межэлементных связей «кольцо» и «малый мир», задавая явный вид распределения парциальных частот

взаимодействующих осцилляторов ω_j (и, соответственно, $\omega(x)$) и отслеживая выполнение условия (16) для потенциальной функции $\Phi_s(x)$ (вид которой известен из соотношения (15)), можно «конструировать» ситуации, в которых при увеличении/уменьшении силы связи между взаимодействующими осцилляторами будет реализоваться взрывной переход (*взрывная синхронизация*) между полностью синхронным состоянием сети и состоянием, в котором существуют синхронные кластеры осцилляторов, размеры которых ощутимо меньше полного числа осцилляторов сети N . Очевидно, что таких зависимостей $\omega(x)$, и, соответственно, конфигураций сетей, в которых возможна реализация взрывной синхронизации, по-видимому, может быть достаточно много, что, в свою очередь, говорит о том, что в сетях с топологиями межэлементных связей «кольцо» и «малый мир» явление взрывной синхронизации является, по крайней мере, не уникальным.

3. Пример: гармоническая зависимость частоты от номера осциллятора

Для того чтобы проиллюстрировать вышесказанное, рассмотрим сети с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир», состоящие из $N = 10^3$ осцилляторов Курамото (1), парциальные частоты которых зависят от номера осциллятора по гармоническому закону

$$\omega_j = \Omega \sin\left(\frac{2m\pi}{N}j\right), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (19)$$

где $\Omega > 0$ — максимально возможное значение парциальной частоты осцилляторов, m — число периодов в зависимости парциальных частот от номеров осцилляторов. Выберем величину параметра $K = 8$, что будет означать, что каждый элемент сети связан с 16 ближайшими осцилляторами. Поскольку теоретическое рассмотрение в разделах 1 и 2 проводилось в диапазоне значений координаты $x \in [-\mathfrak{L}; \mathfrak{L}]$, для непрерывной модели (2) зависимость (19) будет соответствовать зависимости

$$\omega(x) = -\Omega \sin\left(\frac{m\pi}{\mathfrak{L}}x\right), \quad x \in [-\mathfrak{L}; \mathfrak{L}]. \quad (20)$$

При рассмотрении данного примера выберем для удобства $\mathfrak{L} = 0.5$, тогда, как легко видеть, величина управляющего параметра Δ будет равна 10^{-3} . Нетрудно видеть, что для рассматриваемой зависимости (20) потенциальная функция (15) будет иметь вид

$$\Phi_s(x) = \frac{\mathfrak{L}\Omega}{m\pi\lambda\Delta} \cos\left(\frac{m\pi x}{\mathfrak{L}}\right) + C, \quad (21)$$

где C — константа интегрирования, которую, в силу симметрии соотношений (3), (16), (17), (20), будем считать тождественно равной нулю.

Очевидно, что выполнение условия (16) будет иметь место при

$$\frac{\mathfrak{L}\Omega}{m\pi\lambda\Delta} \lesssim \frac{K^2}{2}, \quad (22)$$

что даёт возможность оценить критическое значение параметра связи λ_c , при котором (в случае уменьшения силы связи) должно произойти разрушение полностью синхронного состояния сети осцилляторов Курамото

$$\lambda_c \gtrsim \lambda_* = \frac{2\mathfrak{L}\Omega}{m\pi\Delta K^2}. \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что при выбранных значениях управляющих параметров $\Omega = 0.5$ и $m = 1$ величина λ_c должна быть равна или превышать $\lambda_* = 2.4868$. Иными словами, можно ожидать,

что для указанных значений управляющих параметров при силе связи между элементами сети, находящейся ниже значения λ_* , сеть осцилляторов Курамото (1) с топологией межэлементных связей типа «кольцо» не может находиться в полностью синхронном режиме, а выше этой точки возможно явление взрывной синхронизации.

На рис. 1 показаны зависимости числа осцилляторов в максимальном синхронном кластере сети от величины параметра связи λ при различных значениях управляющих параметров, характеризующих сеть осцилляторов Курамото, полученные с помощью непосредственного численного моделирования модельной системы. Из рисунка хорошо видно, что для всех рассматриваемых случаев в сети осцилляторов наблюдается резкий переход между полностью синхронным состоянием осцилляторов сети и состоянием, когда такое полностью синхронное состояние отсутствует. Кривая 1, соответствующая $\Omega = 0.5$ и $m = 1$, претерпевает резкий переход при $\lambda_c = 2.5224$, что очень хорошо соотносится с полученным значением $\lambda_* = 2.4868$. Выше критического значения сеть осцилляторов Курамото оказывается полностью синхронизованной, тогда как ниже λ_c в сети существуют два равносильных синхронных кластера осцилляторов, точно так же, как это имеет место в случае сети осцилляторов Курамото с равномерным эквидистантным распределением парциальных частот (см. [13]).

Интересно также отметить, что увеличение количества периодов колебаний зависимости $\omega(x)$ на рассматриваемом интервале $[-\mathcal{L}; \mathcal{L}]$ приводит к соответствующему уменьшению величины λ_* и, соответственно, критического значения λ_c (см. соотношение (23), а также ср. кривые 1 и 2, 3 и 4 на рис. 1). В том случае, когда одновременно с количеством периодов колебаний m изменяется частота Ω таким образом, чтобы отношение Ω/m оставалось неизменным, соответствующие зависимости $N_s(\lambda)$ будут практически совпадать друг с другом (см. (23) и ср. кривые 2 и 3 на рис. 1).

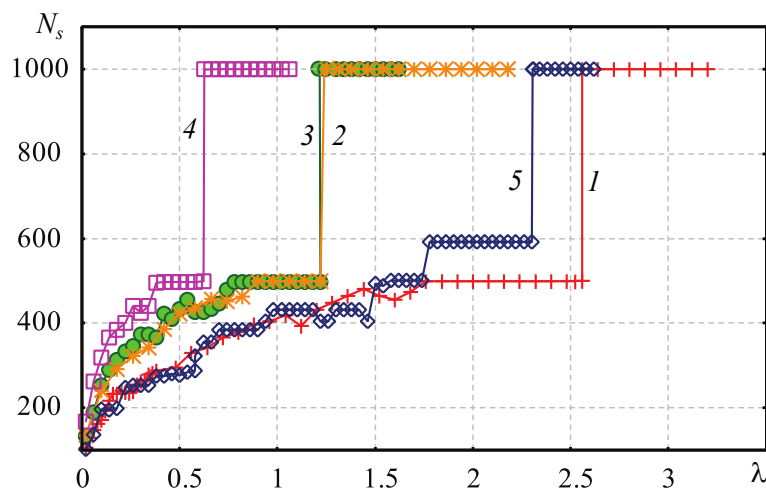


Рис. 1. Зависимость числа синхронных осцилляторов в максимальном синхронном кластере, N_s , от величины параметра связи λ для сети осцилляторов Курамото (1) с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» (кривые 1–4) и «малый мир» (кривая 5). Значения управляющих параметров выбраны следующими: $\mathcal{L} = 0.5$, $N = 10^3$, $K = 8$; $\Omega = 0.5$, $m = 1$ (кривая 1); $\Omega = 0.5$, $m = 2$ (кривая 2); $\Omega = 0.25$, $m = 1$ (кривая 3); $\Omega = 0.25$, $m = 2$ (кривая 4); $\Omega = 0.5$, $m = 1$, $p = 0.01$ (кривая 5). Зависимости построены при уменьшении параметра λ (цвет онлайн)

Fig. 1. The dependence of the number of the synchronous oscillators into the maximal synchronous cluster, N_s , on the coupling strength λ for the Kuramoto oscillator network (1) with topology of links belonging to the types “ring” (curves 1–4) and “small world” (curve 5). The control parameter values are the following: $\mathcal{L} = 0.5$, $N = 10^3$, $K = 8$; $\Omega = 0.5$, $m = 1$ (curve 1); $\Omega = 0.5$, $m = 2$ (curve 2); $\Omega = 0.25$, $m = 1$ (curve 3); $\Omega = 0.25$, $m = 2$ (curve 4); $\Omega = 0.5$, $m = 1$, $p = 0.01$ (curve 5). All curves have been obtained for the decreasing coupling parameter λ (color online)

Из рисунка также видно, что в случае сети малого мира взрывной переход происходит при меньшем (хотя и близком) значении управляющего параметра λ по сравнению с аналогичной сетью осцилляторов Курамото типа «кольцо» (ср. кривые 1 и 5, рис. 1). Подобное различие может быть объяснено тем, что небольшое количество «длинных» связей, образовавшихся в силу перезамыкания связей между осцилляторами при построении сети малого мира из кольца по методу Ваттса–Строгаца [22], вносит некоторые искажения в поведение сети малого мира по сравнению с теоретическими соотношениями, приведёнными в настоящей работе.

Полученное теоретическое соотношение (21) для потенциальной функции $\Phi_s(x)$ можно сопоставить с результатами непосредственного численного моделирования сети осцилляторов Курамото (1), при этом численная зависимость потенциальной функции от координаты x может быть рассчитана с помощью соотношения (11), поскольку для числа элементов сети N , стремящегося к бесконечности, дискретный аналог потенциальной функции $\tilde{\Phi}_s(x)$ стремится к потенциальной функции $\Phi_s(x)$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{\Phi}_s(x) = \Phi_s(x). \quad (24)$$

Так как при численном моделировании поведения сети осцилляторов Курамото в качестве пространственной координаты используется номер элемента j , для сопоставления (11) с (21) имеет смысл перейти к безразмерной координате $x = (j - N/2)/N$.

На рис. 2 показаны сопоставления профилей теоретического $\Phi_s(x)$ и численного $\tilde{\Phi}_s(x)$ представлений потенциальной функции для сети осцилляторов Курамото (1), находящейся в полностью синхронном состоянии. Рис. 2, *a* соответствует случаю сети осцилляторов с топологией связей типа «кольцо», рис. 2, *b* — топологии связей «малый мир». Из рис. 2, *a* видно отличное соответствие результата численного моделирования и теоретической зависимости (21), что позволяет говорить об адекватности предложенного теоретического подхода. В случае сети «малого мира» неучтенные при построении теоретического описания «длинные» связи несколько искажают профиль потенциальной функции. «Длинные» связи, возникшие в результате применения метода Ваттса–Строгаца [22], можно рассматривать как некоторое случайное воздействие на потенциальную функцию, которое искажает её профиль. Искажения гладкого профиля потенциальной функции приводят к тому, что для сети малого мира в некоторых точках x_e потенциальная

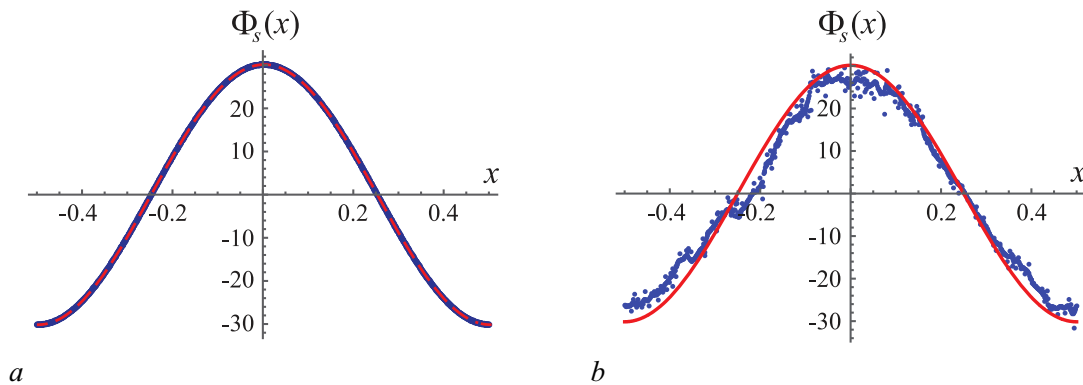


Рис. 2. Зависимость дискретного и непрерывного представлений потенциальной функции от координаты x для сети осцилляторов Курамото (1) с топологией межэлементных связей типа «кольцо» (*a*) и «малый мир» (*b*), $\lambda = 2.64$, $\Omega = 0.5$, $m = 1$, $p = 0.01$ (цвет онлайн)

Fig. 2. The dependence of the discrete and continuous representations of the potential function on coordinate x for the Kuramoto oscillator network with “ring” (*a*) and “small world” (*b*) topologies, $\lambda = 2.64$, $\Omega = 0.5$, $m = 1$, $p = 0.01$ (color online)

функция $\tilde{\Phi}_s(x)$ достигает ограничительных значений S при меньших значениях управляющего параметра λ по сравнению с аналогичной сетью (характеризующейся тем же самым набором значений управляющих параметров) с топологией межэлементных связей типа «кольцо», что приводит к сдвигу области резкого перехода в сторону меньших значений параметра связи λ (см. рис. 1, кривые 1 и 5). Тем не менее эти отличия носят, в основном, несущественный количественный характер и общие закономерности в поведении потенциальной функции для сети синхронных осцилляторов оказываются одинаковыми для топологий межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир», поэтому все выводы, полученные для сети с топологией связей «кольцо» остаются справедливыми и для сетей малого мира.

Заключение

Таким образом, основываясь на теоретических результатах, изложенных в разделах 1 и 2, подтверждённых результатами численного моделирования (раздел 3) динамики сетей осцилляторов Курамото с топологиями межэлементных связей типа «малый мир» и «кольцо», можно сделать вывод о том, что взрывной характер перехода к полностью синхронному состоянию в подобных сетях может наблюдаться для достаточно большого числа возможных зависимостей парциальных частот ω_j осцилляторов от номера осциллятора j , а следовательно, такой взрывной переход в подобных сетях является явлением хотя и нетипичным, но и не уникальным. Более того, предложенный в настоящей работе подход, основанный на задании последовательности парциальных частот ω_j , позволяет целенаправленно «конструировать» сети с топологиями «кольцо» и «малый мир», которые будут демонстрировать явление взрывной синхронизации.

Список литературы

1. Boccaletti S., Latora V., Moreno V., Chavez M., Hwang D.-U. Complex networks: Structure and dynamics // *Physics Reports*. 2006. Vol. 424, no. 4–5. P. 175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
2. Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C. Synchronization in complex networks // *Physics Reports*. 2008. Vol. 469, no. 3. P. 93–153. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.09.002.
3. Boccaletti S., Almendral J. A., Guan S., Leyva I., Liu Z., Sendiña-Nadal I., Wang Z., Zou Y. Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics: Percolation and synchronization // *Physics Reports*. 2016. Vol. 660. P. 1–94. DOI: 10.1016/j.physrep.2016.10.004.
4. Leyva I., Sevilla-Escoboza R., Buldú J. M., Sendiña-Nadal I., Gómez-Gardeñes J., Arenas A., Moreno Y., Gómez S., Jaimés-Reátegui R., Boccaletti S. Explosive first-order transition to synchrony in networked chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 108, no. 16. P. 168702. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.168702.
5. Leyva I., Navas A., Sendiña-Nadal I., Almendral J. A., Buldú J. M., Zanin M., Papo D., Boccaletti S. Explosive transitions to synchronization in networks of phase oscillators // *Scientific Reports*. 2013. Vol. 3. P. 1281. DOI: 10.1038/srep01281.
6. Gómez-Gardeñes J., Gómez S., Arenas A., Moreno Y. Explosive synchronization transitions in scale-free networks // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106, no. 12. P. 128701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.128701.
7. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
8. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // *Радиотехника и электроника*. 2004. Т. 49, № 1. С. 77–83.
9. Pazó D. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72, no. 4. P. 046211. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.046211.

10. *Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Moskalenko O. I., Hramov A., Boccaletti S.* Self-similarity in explosive synchronization of complex networks // *Phys. Rev. E.* 2017. Vol. 96, no. 6. P. 062312. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062312.
11. *Peron T. K. D. M., Rodrigues F. A.* Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 86, no. 5. P. 056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056108.
12. *Zou Y., Pereira T., Small M., Liu Z., Kurths J.* Basin of attraction determines hysteresis in explosive synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112, no. 11. P. 114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.114102.
13. *Короновский А. А., Куровская М. К., Москаленко О. И.* О возможности явления взрывной синхронизации в сетях малого мира // *Известия вузов. ПНД.* 2021. Т. 29, № 4. С. 467–479. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479.
14. *Zhu L., Tian L., Shi D.* Criterion for the emergence of explosive synchronization transitions in networks of phase oscillators // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88, no. 4. P. 042921. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042921.
15. *Peron T. K. D. M., Rodrigues F. A.* Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 86, no. 1. P. 016102. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016102.
16. *Leyva I., Sendiña-Nadal I., Almendral J. A., Navas A., Olmi S., Boccaletti S.* Explosive synchronization in weighted complex networks // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88, no. 4. P. 042808. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042808.
17. *Jiang X., Li M., Zheng Z., Ma Y., Ma L.* Effect of externality in multiplex networks on one-layer synchronization // *Journal of the Korean Physical Society.* 2015. Vol. 66, no. 11. P. 1777–1782. DOI: 10.3938/jkps.66.1777.
18. *Su G., Ruan Z., Guan S., Liu Z.* Explosive synchronization on co-evolving networks // *EPL (Europhysics Letters).* 2013. Vol. 103, no. 4. P. 48004. DOI: 10.1209/0295-5075/103/48004.
19. *Hu X., Boccaletti S., Huang W., Zhang X., Liu Z., Guan S., Lai C.-H.* Exact solution for first-order synchronization transition in a generalized Kuramoto model // *Scientific Reports.* 2014. Vol. 4, no. 1. P. 7262. DOI: 10.1038/srep07262.
20. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // In: Araki H. (eds) *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics.* Vol. 39 of *Lecture Notes in Physics.* Berlin, Heidelberg: Springer, 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
21. *Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez-Vicente C. J., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77, no. 1. P. 137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
22. *Watts D. J., Strogatz S. H.* Collective dynamics of ‘small-world’ networks // *Nature.* 1998. Vol. 393, no. 6684. P. 440–442. DOI: 10.1038/30918.

References

1. Boccaletti S, Latora V, Moreno V, Chavez M, Hwang DU. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports.* 2006;424(4–5):175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009.
2. Arenas A, Díaz-Guilera A, Kurths J, Moreno Y, Zhou C. Synchronization in complex networks. *Physics Reports.* 2008;469(3):93–153. DOI: 10.1016/j.physrep.2008.09.002.
3. Boccaletti S, Almendral JA, Guan S, Leyva I, Liu Z, Sendiña-Nadal I, Wang Z, Zou Y. Explosive transitions in complex networks’ structure and dynamics: Percolation and synchronization. *Physics Reports.* 2016;660:1–94. DOI: 10.1016/j.physrep.2016.10.004.
4. Leyva I, Sevilla-Escoboza R, Buldú JM, Sendiña-Nadal I, Gómez-Gardeñes J, Arenas A, Moreno Y, Gómez S, Jaimes-Reátegui R, Boccaletti S. Explosive first-order transition to synchrony in

- networked chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2012;108(16):168702. DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.168702.
5. Leyva I, Navas A, Sendiña-Nadal I, Almendral JA, Buldú JM, Zanin M, Papo D, Boccaletti S. Explosive transitions to synchronization in networks of phase oscillators. *Scientific Reports.* 2013;3:1281. DOI: 10.1038/srep01281.
 6. Gómez-Gardeñes J, Gómez S, Arenas A, Moreno Y. Explosive synchronization transitions in scale-free networks. *Phys. Rev. Lett.* 2011;106(12):128701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.128701.
 7. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences.* Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.
 8. Anishchenko VS, Vadivasova TE. Relationship between frequency and phase characteristics of chaos: Two criteria of synchronization. *Journal of Communications Technology and Electronics.* 2004;49(1):69–75.
 9. Pazó D. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model. *Phys. Rev. E.* 2005;72(4):046211. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.046211.
 10. Koronovskii AA, Kurovskaya MK, Moskalenko OI, Hramov A, Boccaletti S. Self-similarity in explosive synchronization of complex networks. *Phys. Rev. E.* 2017;96(6):062312. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.062312.
 11. Peron TKDM, Rodrigues FA. Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations. *Phys. Rev. E.* 2012;86(5):056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.056108.
 12. Zou Y, Pereira T, Small M, Liu Z, Kurths J. Basin of attraction determines hysteresis in explosive synchronization. *Phys. Rev. Lett.* 2014;112(11):114102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.114102.
 13. Koronovskii AA, Kurovskaya MK, Moskalenko OI. On the possibility of explosive synchronization in small world networks. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2021;29(4):467–479 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479.
 14. Zhu L, Tian L, Shi D. Criterion for the emergence of explosive synchronization transitions in networks of phase oscillators. *Phys. Rev. E.* 2013;88(4):042921. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042921.
 15. Peron TKDM, Rodrigues FA. Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling. *Phys. Rev. E.* 2012;86(1):016102. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.016102.
 16. Leyva I, Sendiña-Nadal I, Almendral JA, Navas A, Olmi S, Boccaletti S. Explosive synchronization in weighted complex networks. *Phys. Rev. E.* 2013;88(4):042808. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.042808.
 17. Jiang X, Li M, Zheng Z, Ma Y, Ma L. Effect of externality in multiplex networks on one-layer synchronization. *Journal of the Korean Physical Society.* 2015;66(11):1777–1782. DOI: 10.3938/jkps.66.1777.
 18. Su G, Ruan Z, Guan S, Liu Z. Explosive synchronization on co-evolving networks. *EPL (Europhysics Letters).* 2013;103(4):48004. DOI: 10.1209/0295-5075/103/48004.
 19. Hu X, Boccaletti S, Huang W, Zhang X, Liu Z, Guan S, Lai CH. Exact solution for first-order synchronization transition in a generalized Kuramoto model. *Scientific Reports.* 2014;4(1):7262. DOI: 10.1038/srep07262.
 20. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In: Araki H, editor. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics.* Vol. 39 of *Lecture Notes in Physics.* Berlin, Heidelberg: Springer; 1975. P. 420–422. DOI: 10.1007/BFb0013365.
 21. Acebrón JA, Bonilla LL, Pérez-Vicente CJ, Ritort F, Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 2005;77(1):137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
 22. Watts DJ, Strogatz SH. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature.* 1998;393(6684):440–442. DOI: 10.1038/30918.



Короновский Алексей Александрович — родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Проректор по научной работе и цифровому развитию СГУ, заведующий кафедрой физики открытых систем Института физики СГУ. Область научных интересов — динамический хаос, синхронизация, нелинейная динамика и её проявления в различных сферах человеческой деятельности. Автор научных монографий и статей в отечественных и зарубежных рецензируемых журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com
ORCID: 0000-0003-3585-317X
AuthorID (eLibrary.Ru): 73470



Куровская Мария Константиновна — окончила с отличием факультет нелинейных процессов СГУ (2007). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2009). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ (с 2018 г.). Научные интересы — хаотическая синхронизация, перемежающееся поведение, влияние шума на установление синхронных режимов, динамика сложных сетей, нейрофизиология. Опубликовала около 40 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: mariakurovskaya@gmail.com
ORCID: 0000-0002-2805-8402
AuthorID (eLibrary.Ru): 560945



Москаленко Ольга Игоревна — родилась в Саратове (1984), окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006). Кандидат физико-математических наук (2008), доцент (2012), доктор физико-математических наук (2017). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ, начальник управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов — исследование классической и хаотической синхронизации и явлений, имеющих место на ее границе, в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов и характеристики перемежаемости; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях; разработка методов анализа поведения систем по временным рядам и их применение к живым системам. Автор около 200 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах, нескольких монографий и патентов на изобретения и полезные модели.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com
ORCID: 0000-0001-5727-5169
AuthorID (eLibrary.Ru): 150252





Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003020
EDN: BMTNBQ

Подход к расчету параметра нелинейности ультразвуковых волн в жидкости, основанный на масштабной теории термодинамических флуктуаций давления

Р. Н. Беленьков , Е. Б. Постников

Курский государственный университет, Россия
E-mail:  belenkov.roman@bk.ru, postnikov@kursksu.ru

Поступила в редакцию 10.08.2022, принята к публикации 20.09.2022,
опубликована онлайн 29.12.2022, опубликована 31.01.2023

Аннотация. Параметр нелинейности B/A является характеристикой жидкостей и мягкой материи и привлекает все большее внимание благодаря своей чувствительности к составу материалов. Это делает параметр нелинейности перспективным показателем для приложений неразрушающего контроля на основе ультразвукового зондирования, подходящим для различных приложений от физической химии до биомедицинских исследований. В то же время, термодинамическое определение параметра нелинейности требует обширных измерений при повышенных давлениях, которые не всегда доступны; кроме того, известны определенные противоречия таких данных с данными, полученными методами нелинейной акустики. **Цель.** Мы рассматриваем недавно предложенный подход к предсказанию скорости звука при высоких давлениях, который использует свойство инвариантности флуктуаций приведенного давления и данные, полученные только при нормальном давлении окружающей среды. Метод обобщает классическую модель Номото, которая, однако, дает лишь качественную картину, и приводит к количественному соответствию экспериментальным значениям в пределах их неопределенности. **Методы.** Аналитические методы теории термодинамических флуктуаций в приложении к параметрам уравнений нелинейной акустики, а также численное моделирование в среде COMSOL Multiphysics[®]. **Результаты.** Получены выражения для расчета параметра нелинейности с приемлемой точностью, используя только термодинамические данные, определенные при атмосферном давлении. Численные расчеты были проведены для толуола. Кроме того, на основе численного решения уравнения Вестервельта проанализировано несоответствие между значениями параметра нелинейности, полученными термодинамическим и нелинейно-акустическим способами, объясненное недостаточным учетом эффектов поглощения для волн конечной амплитуды при последнем.

Ключевые слова: параметр нелинейности, ультразвук высокой интенсивности, термодинамические флуктуации, нелинейные волны.

Для цитирования: Беленьков Р. Н., Постников Е. Б. Подход к расчету параметра нелинейности ультразвуковых волн в жидкости, основанный на масштабной теории термодинамических флуктуаций давления // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 45–62. DOI: 10.18500/0869-6632-003020. EDN: BMTNBQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Approach to nonlinearity parameter in liquids calculation based on the scaling theory of thermodynamic fluctuations

R. N. Belenkov✉, E. B. Postnikov

Kursk State University, Russia

E-mail: ✉belenkov.roman@bk.ru, postnikov@kursksu.ru

Received 10.08.2022, accepted 20.09.2022, available online 29.12.2022,

published 31.01.2023

Abstract. The nonlinearity parameter B/A is a characteristic of liquids and soft matter, which gains growing attention due to its sensibility to the composition of materials. This makes it a prospective indicator for nondestructive testing applications based on the ultrasound sounding suitable for a variety of applications from physic chemistry to biomedical studies. At the same time, the thermodynamic definition of the nonlinearity parameter requires extensive measurements at elevated pressures that are not always available; in addition, there are known certain contradiction of such data with the data obtained by methods of nonlinear acoustics. **Objective.** In this work, we consider a recently proposed approach to the prediction of the speed of sound at high pressures, which uses the property of invariance of the reduced pressure fluctuations and the data obtained at normal ambient pressure only. The method generalises the classic Nomoto model, which however gives only a qualitative picture, and results in the quantitative correspondence to the experimental values within their range of uncertainty. **Methods.** Analytical methods of the theory of thermodynamic fluctuations applied to the parameters of equations of nonlinear acoustics as well as numerical simulation in the COMSOL Multiphysics® environment. **Results.** Expressions for calculating the nonlinearity parameter with acceptable accuracy were obtained using thermodynamic data obtained only at atmospheric pressure. Numerical calculations were performed for toluene. In addition, the discrepancy between values of the nonlinear parameter obtained via the thermodynamic and nonlinear acoustic routes is analysed based on the numerical solution of the Westervelt equation; it is revealed that this deviation emerges when the effects of absorption of finite-amplitude waves were not properly taken into account.

Keywords: nonlinearity parameter, high-intense ultrasound, thermodynamic fluctuations, nonlinear waves.

For citation: Belenkov RN, Postnikov EB. Approach to nonlinearity parameter in liquids calculation based on the scaling theory of thermodynamic fluctuations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(1):45–62. DOI: 10.18500/0869-6632-003020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Параметр нелинейности B/A (явные выражения для величин A и B через параметры состояния среды будут приведены ниже) как характеристика искажения формы волн конечной амплитуды в жидкостях [1] введен в работе [2] (хотя позднее было отмечено [3], что данный подход концептуально восходит к работе Рэлея, посвященной акустическому давлению [4]).

Более общий подход, связывающий параметр нелинейности с термодинамическими величинами, которые не требуют для его определения работы с мощным ультразвуком, базируется на подходе, изложенном в статье Байера (R. T. Beyer) [5] (в силу этого в ряде источников параметр B/A носит название «параметра нелинейности Байера»), и является основным в теории нелинейной акустики и ее приложении к исследованию широкого круга проблем, варьирующихся от физической химии жидкостей до биомедицинских приложений [6–8]. Подробный обзор современного состояния исследований и значимости нелинейного параметра представлен в [9]. Существенная чувствительность параметра нелинейности к составу и физико-химическим свойствам жидкостей, коллоидов и мягких сред делает его эффективным маркером в области диагностических ультразвуковых исследований и ультразвуковой томографии [10, 11]. В области физики и физической химии жидкости в последние годы растет внимание к параметру нелинейности как к важной характеристике свойств ионных жидкостей и глубоко эвтектических растворителей [12, 13]. В связи с ростом интереса к их использованию в качестве сред для химического синтеза

и теплоносителей при высоких давлениях, встает вопрос о поведении параметра нелинейности в таких условиях, практически не исследованный экспериментально. Соответственно, открытым является вопрос о возможности предсказательного расчета величины B/A как функции температуры и давления по данным, полученным в условиях нормального давления. Помимо этого, существует и фундаментальная задача связи параметра нелинейности B/A и коэффициентов дифференциальных уравнений нелинейной акустики [14, 15].

Первой попыткой теоретического определения параметра нелинейности B/A , универсального относительно температуры и давления, является работа О. Номото [16], выполненная в предположении так называемой «жидкости Рао» (см. также работу [17], представившую более глубокий термодинамический анализ), то есть среды, для которой выполняется эмпирическое степенное соотношение между плотностью и скоростью звука (правило Рао) [18] или же плотностью и изотермической или адиабатической сжимаемостью (правило Вада) [19]. Несмотря на то, что к настоящему времени достаточно ясно, что соотношения Рао–Вада являются существенно приближёнными, они по-прежнему используются в качестве практического метода (с введением эмпирических поправочных коэффициентов), см. например [20–24]. Вместе с тем, использование модели «жидкости Рао» ведет к постоянному значению $B/A = 6$, которое не зависит от температуры и давления, что не соответствует экспериментам и, более того, само значение демонстрирует только качественное согласие с реальностью (для различных жидких и мягких сред эта величина варьируется в пределах от 5 до 12).

В настоящее время было показано [25] на основе аналогии между анализом дифференциальных уравнений термодинамики и динамических систем, что более физически корректная картина взаимосвязи плотности, скорости звука и температуры жидкости должна базироваться на рассмотрении термодинамических флуктуаций плотности и давления, рассматриваемых в комплексе.

1. Параметр нелинейности

Параметр нелинейности B/A для звуковых волн большой амплитуды определяется соотношением коэффициентов разложения изменения давления в среде по отношению к адиабатическому изменению (при постоянной энтропии, что далее указано индексом S в частных производных) ее плотности

$$P - P_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S, \rho = \rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{S, \rho = \rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots,$$

где вводятся обозначения

$$A = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S, \rho = \rho_0} = \rho_0 c_0^2, \quad B = \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{S, \rho = \rho_0}.$$

Здесь ρ_0 и P_0 — равновесные (невозмущенные) плотность и давление, c_0 — скорость звука малой амплитуды (термодинамическая (адиабатическая) скорость звука).

Соответственно (здесь и далее индекс 0 относится к производным, взятым при невозмущенных параметрах термодинамического состояния),

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{S, \rho = \rho_0} = 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial P} \right)_{0, S}. \quad (1)$$

Из этого определения видно, что параметр нелинейности может быть найден, исходя и из термодинамических соотношений, заданных уравнением состояния жидкости $\rho = \rho(P, T)$, с практической точки зрения — из функциональных соотношений, связывающих параметры состояния на основе регрессии равновесных термодинамических экспериментальных данных. Однако следует

отметить, что непосредственное применение формулы (1) затрудняется тем, что энтропия не является непосредственно измеримой термодинамической величиной (хотя и существует специальный фазово-импульсный метод [26], позволяющий определять адиабатическую производную скорости звука в эксперименте, достигая относительной неопределенности значения параметра нелинейности в 2.2%). В силу этого, более практичным является представление (1) через изобарную и изотермическую производные скорости звука, используя стандартные соотношения между термодинамическими производными:

$$\frac{B}{A} = 2\rho_0 c_0 \left(\frac{\partial c}{\partial P} \right)_{0,T} + \frac{2c_0 T \alpha_P}{C_P} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_{0,P} = \left(\frac{B}{A} \right)' + \left(\frac{B}{A} \right)'' , \quad (2)$$

где $\alpha_P = -\rho^{-1} (\partial \rho / \partial T)_P$ – коэффициент изобарного расширения и C_P – изобарная удельная теплоемкость.

В то же время, использование выражения (2) требует наличия достаточного количества данных о скорости звука, измеренных вдоль изотерм при повышенных давлениях, которые не всегда имеются в наличии (что особенно актуально для задач медицинской ультразвуковой диагностики, проводимой при атмосферном давлении). Соответственно, встает вопрос о том, как рассчитать изотермическую производную, оперируя только изобарными данными.

2. Модель Номото

Классической простой предиктивной моделью параметра нелинейности, опирающейся на физико-химические свойства жидкости, является модель Номото [16], основанная на допущениях

$$\left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_P = \frac{3c}{2\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P , \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial P} \right)_T = \frac{3c}{2\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T , \quad (4)$$

которые следуют из так называемого правила Рао

$$\frac{M}{\rho} c^{1/3} = R_w , \quad (5)$$

где M – молярная масса, а R_w – специфическая для вещества константа (молекулярная скорость звука), которая может быть рассчитана с приемлемой точностью по методу групповых вкладов по межатомным химическим связям или субмолекулярным химическим группам либо непосредственно, либо через сжимаемость жидкости [19–21, 27].

Однако данная модель приводит к постоянному значению

$$\frac{B}{A} = 6 , \quad (6)$$

что не выполняется для большинства жидкостей (за исключением воды, имеющей близкий по величине слабо меняющийся параметр нелинейности [8]; следует отметить, что для воды величина R_w действительно слабо зависит как от давления, так и от температуры [28]).

Количественное и качественное отличие результата Номото от экспериментально наблюдаемой ситуации для подавляющего большинства молекулярных и ионных жидкостей можно связать прежде всего с невыполнением условия независимости параметра Рао R_w от выбора термодинамического пути (изобарного или изотермического), что обсуждалось еще в контексте исследования зависимости скорости звука как таковой от плотности вдоль изотерм и вдоль изобар [29, 30]. Таким образом, встает задача выбора комбинации термодинамических параметров, удовлетворяющей требуемому свойству инвариантности с большей точностью.

3. Флуктуационная модель

В качестве упомянутого выше инварианта, позволяющего осуществить отображение изобарной производной скорости звука в изотермическую, в работе [25] было предложено рассмотреть квадрат термодинамических флуктуаций давления в жидкости

$$\langle(\Delta P)^2\rangle = \frac{RT}{M} \rho^2 \frac{1}{\rho \kappa_S}, \quad (7)$$

непосредственно связанных со скоростью звука, в силу выражения последней $c = (\rho \kappa_S)^{-1/2}$ через адиабатическую сжимаемость $\kappa_S = \rho^{-1} (\partial \rho / \partial P)_S$, входящую в (7).

Более точно, используется безразмерная величина приведенных флуктуаций давления, определенная как отношение действительной величины флуктуаций давления к величине квадрата давления в гипотетической среде, обладающей свойствами идеального газа при той же плотности, которую имеет рассматриваемая жидкость ($P_{ig} = \rho RT/M$)

$$v_s \equiv \frac{\langle(\Delta P)^2\rangle}{P_{ig}^2} = \frac{M}{R} \frac{1}{T \rho \kappa_S} \equiv \frac{M c^2}{R T}.$$

В работе [25] для широкого набора жидких углеводородов и их смесей была показана экспоненциальная зависимость параметра приведенных адиабатических флуктуаций v_s от плотности:

$$v_s \equiv \frac{M c^2}{R T} = \Lambda \rho^\lambda, \quad (8)$$

где M/R , Λ , λ — константы (R — газовая постоянная).

Проделаем процедуру, аналогичную той, которая была выполнена при выводе модели Номото, рассмотрев комбинацию

$$\frac{M c^2}{R T^n} = \Lambda \rho^\lambda,$$

в которой введен искусственный показатель степени n с целью проследить в явном виде различия между моделью Номото (для которой $n = 0$, $\lambda = 6$, см. (5)) и флуктуационной моделью, для которой $n = 1$ и λ определяется регрессией выражения (8) вдоль изобары нормального давления.

После взятия частных производных при постоянном давлении и температуре,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{M c^2}{R T^n} \right) \right)_P &= \left(\frac{\partial}{\partial T} (\Lambda \rho^\lambda) \right)_P, \\ \left(\frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{M c^2}{R T^n} \right) \right)_T &= \left(\frac{\partial}{\partial P} (\Lambda \rho^\lambda) \right)_T, \end{aligned}$$

получаем следующие выражения:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial T} \right)_P = \frac{\lambda c}{2\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P + \frac{nc}{2T}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial P} \right)_T = \frac{\lambda c}{2\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T. \quad (10)$$

Видно, что при $n = 1$ в равенстве (9) имеется дополнительный аддитивный член по сравнению с (3), что приводит к изменению величины изобарной производной по сравнению с моделью Номото; равенство же (10) сохраняет ту же функциональную форму, что и (4) для изотермической производной.

Исходя из определения параметра нелинейности (1), раскрывая адиабатическую производную

$$\left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S, \quad (11)$$

и подставляя выражения (9), (10) в (11), получаем

$$\left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_S = \frac{\lambda c}{2\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T + \frac{\lambda c}{2\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P + \frac{nc}{2T} \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{\lambda c}{2\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S + \frac{nc}{2T} \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S. \quad (12)$$

С учетом определения скорости звука, $(\partial \rho / \partial P)_S = c^{-1}$,

$$\frac{B}{A} = \lambda + \frac{n\rho_0 c_0^2}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S, \quad (13)$$

и так как

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{T}{C_P} \left(\frac{\partial V_0}{\partial T}\right)_P \equiv \frac{VT\alpha_P}{C_P}, \quad (14)$$

то подставляя (14) в (13), принимая во внимание, что плотность есть величина, обратная удельному объему V_0 , то есть $\rho_0 V_0 = 1$, и сокращая температуру в числителе и знаменателе, получаем

$$\frac{B}{A} = \lambda + n \frac{c^2 \alpha_P}{C_P}. \quad (15)$$

При $n = 0$, то есть для «жидкости Рао», выражение (15) сводится к известной формуле Номото (6) при соответствующем $\lambda = 6$, а при условии выполнения степенного масштабирования флуктуаций плотности, $n = 1$, к искомому выражению

$$\frac{B}{A} = \lambda + \frac{c^2 \alpha_P}{C_P}. \quad (16)$$

Таким образом, видно, что допущение инвариантного степенного масштабирования не скорости звука самой по себе, а связанных с нею приведенных флуктуаций плотности приводит к появлению в (16) дополнительного слагаемого, зависящего от термодинамического состояния жидкости.

4. Результаты для параметра нелинейности толуола

В качестве вещества для теста расчета параметра нелинейности жидкости при атмосферном давлении выбран толуол, который является хорошо исследованной стандартной референсной жидкостью [31], для которой известно уравнение состояния типа Шпана–Вагнера (Span–Wagner) в форме многопараметрического выражения для свободной энергии Гельмгольца с коэффициентами, полученными регрессией всего наличного набора критически проанализированных экспериментальных данных в широкой области параметров состояния. Это позволяет пользоваться соответствующими аналитическими производными свободной энергии (используя ThermoData Engine (TDE) — NIST [32]) для нахождения всех термодинамических величин, требуемых для

расчета параметра нелинейности B/A по формуле (2). Относительные неопределенности полученных таким образом термодинамических параметров, согласно [31] и сравнению с прямыми экспериментальными данными посредством TDE: 0.05% – плотность, 0.5% – изобарная теплоемкость, 1% – скорость звука, 2% – изотермическая сжимаемость, 1% – изобарный коэффициент расширения. Соответствующие значения параметра нелинейности показаны на рис. 1 маркерами – кружками с указанием интервала стандартной неопределенности $u_r(B/A) = 0.05$, найденного с применением NIST Uncertainty Machine [33].

Кроме того, с точки зрения нелинейно-волновой динамики, существенным является то, что для толуола известно также значение параметра нелинейности, определенного не только косвенным термодинамическим расчетом, но и непосредственно по отношению амплитуд второй и первой гармоник для волн конечной амплитуды [34]; соответствующее значение показано на рис. 1 маркером – звездочкой, снабженной интервалом неопределенности (порядка 10% согласно цитируемой экспериментальной работе).

Результаты расчета по модели (16) показаны на рис. 1 маркерами – квадратиками. Можно заметить, что при низких температурах они демонстрируют определенное завышение величины параметра нелинейности по отношению к величине, полученной на основе термодинамического расчета; разница достигает полутора единиц, что превышает размах интервалов неопределенности (хотя такая разница все равно в полтора раза меньше, чем для модели Номото). При температурах, выше 263.15 К интервалы неопределенности расчетных и термодинамических данных начинают перекрываться и далее, вплоть до температуры кипения они различаются в их пределах.

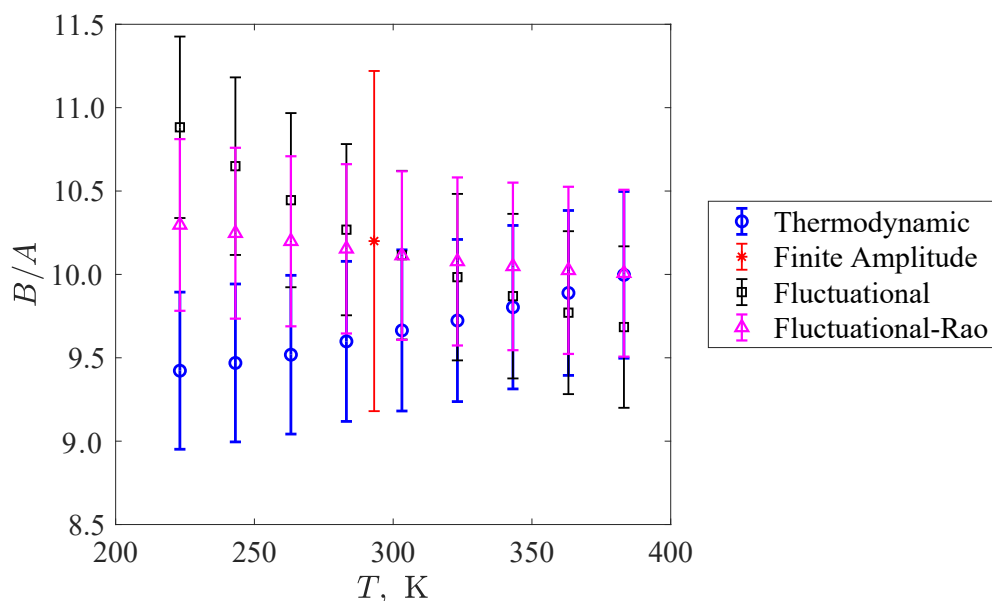


Рис. 1. Зависимость параметра нелинейности толуола от температуры при атмосферном давлении: «Thermodynamic» – рассчитанный согласно (2) по термодинамическим данным; «Finite amplitude» – из эксперимента, непосредственно использующего волны конечной амплитуды [34]; «Fluctuational» – рассчитанный согласно уравнению (16); «Fluctuational-Rao» – при комбинированном расчете с использованием правила Рао для изобары и флуктуационной модели для изотермических производных

Fig. 1. Dependences of the nonlinearity parameter in toluene on temperature at atmospheric pressure, where “Thermodynamic” is calculated according to (2) from thermodynamic data; “Finite amplitude” is taken from the experiment directly using finite amplitude waves [34]; “Fluctuational” is calculated according to the equation (16); “Fluctuational-Rao” follows from a combined calculations, which uses the Rao rule along the isobar and the fluctuational model for isothermal derivatives

При этом тренды температурной зависимости различаются, хотя следует помнить, что в соответствующие выражения (2) и (16) входят производные термодинамические величины, точность определения которых существенно ниже, чем у исходных термодинамических характеристик.

При этом следует также отметить, что экспериментальное значение, полученное непосредственно для волн конечных амплитуд, весьма точно лежит на линии, которую можно провести через маркеры точек данных, полученных из флуктуационной модели.

Рассмотрим возможные причины отклонения расчета по формуле (16) от термодинамических выражений более подробно. Рис. 2 показывает тест масштабной зависимости для выражения (8) и для правила Рао (5). Использование логарифмических координат служит линеаризующим преобразованием, с углом наклона прямых, аппроксимирующих экспериментальные данные, показанные маркерами, соответствующим масштабному показателю λ : $\lambda = 9.1$ (рис. 2, *a*), $\lambda = 6.0$ (рис. 2, *b*) — соответствует правилу Рао.

Однако, несмотря на приемлемую линейность обоих графиков, можно отметить, что отклонения маркеров от прямой на рис. 2, *b* явно меньше. Отсюда возникает вопрос о воспроизводимости отдельных компонентов параметра нелинейности в формуле (2), для чего главным образом следует рассмотреть производные (9), (10), графическое представление которых приведено на рис. 3. Из рис. 3, *a* видно, что флуктуационное выражение дает кривую, существенно более близкую к экспериментальной, чем полученная из допущения $R_w = \text{const}$, для изотермической производной. В то же время для изобарной зависимости (рис. 3, *b*) следует, что зависимость Рао (5) выполняется количественно практически на всем интервале температур, в то время как флуктуационная зависимость приводит к качественно неверной температурной зависимости. Последнее является следствием только приближенной линейности на рис. 2, *a*, что сказывается на поведении производной скорости звука.

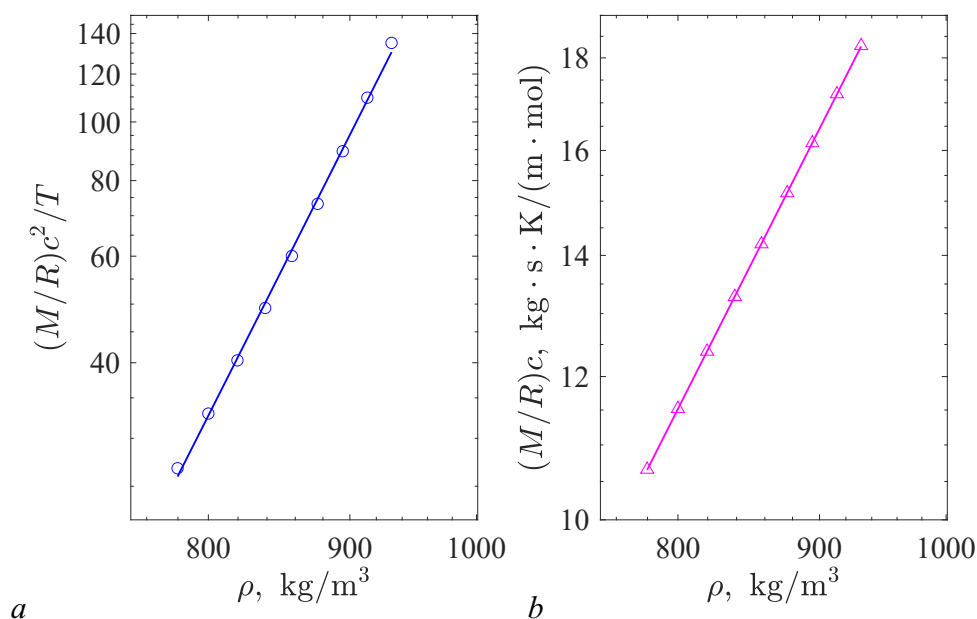


Рис. 2. Графики зависимостей параметра приведенных флуктуаций плотности (*a*) и соотношения, выражающего правило Рао (*b*) в логарифмических координатах как функции плотности вдоль изобары нормального атмосферного давления

Fig. 2. Plots of the dependences of the parameter of reduced density fluctuations (*a*) and the relation expressing Rao's rule (*b*) in logarithmic coordinates as functions of the density along the isobar of normal atmospheric pressure

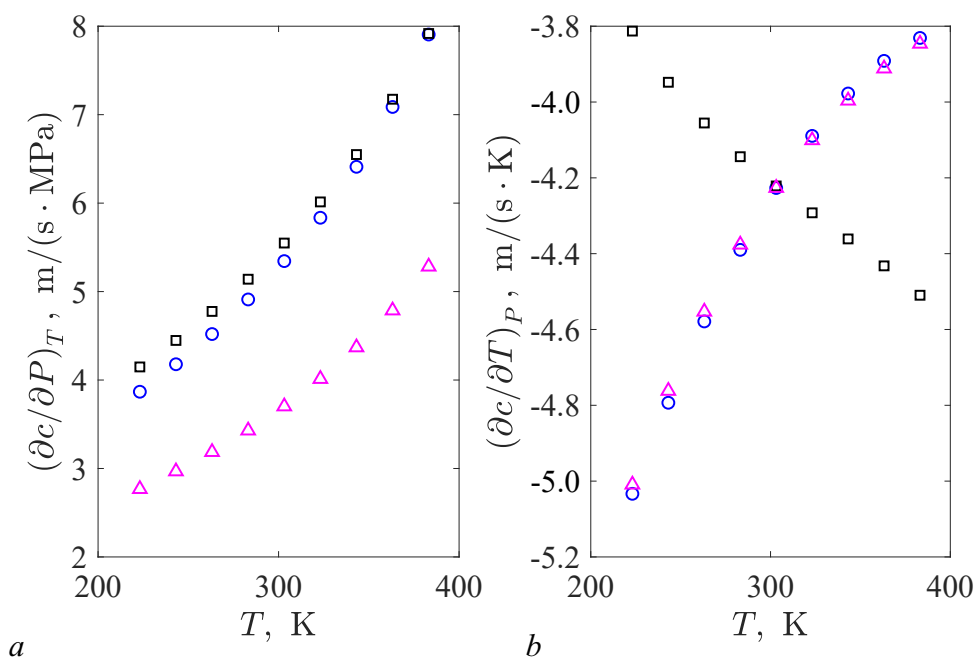


Рис. 3. Изотермическая (а) и изобарная (б) производные скорости звука в толуоле при нормальном атмосферном давлении, полученные из экспериментальных данных (кружки), флуктуационной модели (квадратики) и по правилу Рао (треугольники)

Fig. 3. The isothermal (a) and isobaric (b) derivatives of the sound speed in toluene at normal atmospheric pressure obtained from the experimental data (circles), the fluctuation model (squares), and the Rao rule (triangles)

Таким образом, открывается возможность уточнения расчетной модели следующим образом: изотермическая часть $(B/A)'$ формулы (2) рассчитывается по формуле (10) с масштабным показателем λ , полученным линейной регрессией показателя приведенных флуктуаций давления (заметим, что это соответствует успешной предсказательной модели для расчета скорости звука вдоль изотерм при высоких давлениях, обсужденной в [25]), а изобарная $(B/A)''$ — по формуле Рао–Номото (4). Результат такой комбинации представлен на рис. 1 треугольниками. В данном случае видно, что изменение параметра нелинейности в целом как функции температуры становится малым, что характерно для органических жидкостей, и несмотря на некоторое завышение величины B/A (среднее абсолютное отклонение составляет 4.7%, что согласуется с неопределенностью данных), полученный результат свидетельствует о возможности оценки параметра нелинейности ультразвуковых волн в жидкости на основе данных термодинамических и акустических величин малой амплитуды, измеренных только при атмосферном давлении.

5. Различие величины параметра нелинейности по нелинейно-акустическим и термодинамическим измерениям

Как показано выше, имеется определенная разница между параметром нелинейности толуола, определенным по стационарным термодинамическим свойствам жидкости и на основе анализа затухания гармоник акустического сигнала конечной амплитуды [34]. Методика, реализованная в последнем подходе, основывается на том, что искажение волны непосредственно зависит от параметра нелинейности B/A . Амплитуда второй гармоники (P_2) при удалении от источника на

расстояния $x_2 = X < x_{\text{sh}}$ (x_{sh} – расстояние возникновения ударной волны) вычисляется согласно выражению

$$P_2 = \frac{n+1}{4} \left(P_1^2 \frac{X\omega}{\rho_0 c_0^3} \right), \quad (17)$$

где P_1 – амплитуда первой гармоники вблизи источника звука (измеренная на расстоянии x_1), ω – частота сигнала, параметр $n = B/A + 1$, откуда определяется искомый параметр нелинейности B/A .

Для воспроизведения условий данного эксперимента воспользуемся численным моделированием, имитирующим соответствующие условия данных измерений при помощи COMSOL Multiphysics[®]. Основным стандартным уравнением нелинейной акустики [35], моделирующим распространение и эволюцию формы звуковой волны в приближении умеренной (квадратичной) нелинейности, является уравнение Вестервелта (Westervelt equation), которое реализовано в модели COMSOL Multiphysics[®] [36] в форме [37]

$$\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \left(\nabla p + \frac{\delta}{c_0^2} \frac{\partial(\nabla p)}{\partial t} \right) \right) = \frac{\beta}{\rho_0^2 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}, \quad (18)$$

где c_0 – скорость звука малой интенсивности; ρ_0 – плотность невозмущенной жидкости; коэффициент, учитывающий нелинейность волны $\beta = 1 + B/(2A)$, выраженный через параметр нелинейности; коэффициент, учитывающий релаксационные явления (коэффициент диффузии звука – sound diffusivity)

$$\delta = \frac{1}{\rho_0} \left[\left(\frac{4}{2} \mu + \zeta \right) + \kappa \left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right) \right] \quad (19)$$

(μ и ζ – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, C_P и C_V – изобарная и изохорная удельные теплоемкости, κ – коэффициент теплопроводности).

Следует отметить, что в настоящее время активно исследуется возможность использования уравнения Вестервелта не только для моделирования распространения звуковых волн конечной амплитуды, но и непосредственно для нахождения параметра нелинейности жидкой среды путем сравнения численных решений с регистрируемыми сигналами [15, 38].

В нашем случае параметры для моделирования были выбраны максимально приближенными к экспериментальным [34, 39], а именно: интенсивность излучателя $I = 288 \text{ Вт/м}^2$, частота возбуждения излучателя $f \equiv \omega/(2\pi) = 1.5 \text{ МГц}$, $T = 20^\circ\text{C}$. Термодинамические параметры [31]: $\rho_0 = 866.89 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1324.3 \text{ м/с}$; следующий из них «термодинамический коэффициент нелинейности» $\beta = 5.8$ (для $(B/A)_{\text{therm}} = 9.6$); коэффициенты вязкости [40] $M = 5.8714 \cdot 10^{-4} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\zeta = 0.0076 \text{ Па}\cdot\text{с}$; членом в (19), зависящим от теплопроводности, пренебрегается в силу малости коэффициента [41] $\kappa = (0.13088 \pm 0.00085) \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ и больших значений теплоемкости.

Генерация колебаний в среде производится плоским излучателем, колеблющимся со скоростью $u(t) = u_0 \sin \omega t$ с амплитудой $u_0 = 0.0224 \text{ м/с}$, заданной равенством $u_0 = p_0/(\rho_0 c_0)$.

Областью моделирования является интервал $0 \leq x \leq 4.5x_{\text{sh}}$. Источник излучения с амплитудой $p_0 = \sqrt{2I\rho_0 c_0} = 25715 \text{ Па}$ располагается в точке $x = 0$, точка $x = 4.5x_{\text{sh}}$ терминирована для исключения отражения сигнала. Расстояние возникновения ударной волны

$$x_{\text{sh}} = \frac{c_0^2}{\omega\beta u_0} \quad (20)$$

в данном случае составляет 1.43 м.

Зависимость давления $p(t)$ вблизи излучателя фиксировалась на расстоянии $x_1 = 1 \text{ см}$, удаленной от излучателя точкой считалась $x_2 = 20 \text{ см}$, то есть на расстоянии много меньшем

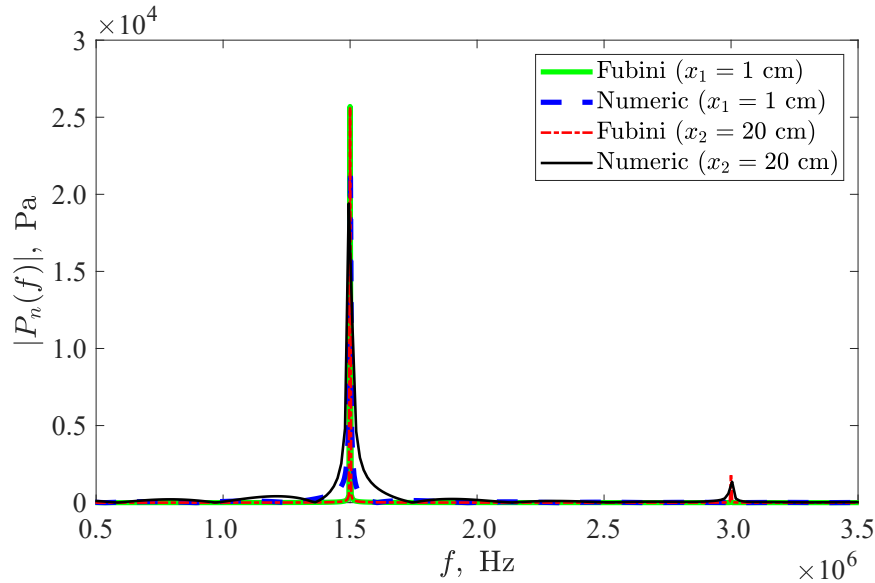


Рис. 4. Спектры сигналов вблизи и на удалении от излучателя по данным численного моделирования и для решения Фубини (цвет онлайн)

Fig. 4. Spectra of signals near the wave source and at a distance from the transmitter according to numerical simulations and from the Fubini solution (color online)

расстояния формирования ударной волны. Для сигналов, полученных численным решением уравнения (18) в соответствующих точках посредством быстрого преобразования Фурье были получены спектры, графики которых представлены на рис. 4.

Амплитуда первой гармоники вблизи излучателя составила $P_1 = 21825.2$ Па, амплитуда второй гармоники на удалении от излучателя $P_2 = 1355.6$ Па. Их подстановка в выражение (17) приводит к значению параметра нелинейности $B/A = 10.2$, что практически совпадает с результатами, приведенными в работе [34], где в ходе эксперимента было получено значение $B/A = 10.4$. Вместе с тем, данное значение очевидно завышено по сравнению с «термодинамическим» значением $(B/A)_{\text{therm}} = 9.6$, использованным как параметр решаемого уравнения (18). Таким образом, можно сделать вывод, что значение, приведенное в работе [34], обусловлено методикой измерения и обработки полученных данных.

В самом деле, выражение (17) базируется на одновременном выполнении двух допущений: малости затухания звуковой волны и малости расстояния от источника до точки измерения второй гармоники, что можно показать аналитически. Касательно первого допущения, решение уравнения Вестервельта при $\sigma = x/x_{\text{sh}} \leq 1$ может быть представлено [8] в форме ряда решения Фубини

$$p(x, t) = p_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\sigma) \sin \left(n\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right), \quad (21)$$

где

$$B_n(\sigma) = \frac{2}{n\sigma} J_n(n\sigma). \quad (22)$$

Подставляя $P_1 = p_0 B_1(\sigma_1)$ и $P_2 = p_0 B_2(\sigma_2)$, где $\sigma_1 = x_1/x_{\text{sh}}$ и $\sigma_2 = x_2/x_{\text{sh}}$ – безразмерные расстояния от излучателя, на которых производятся измерения, в (17), и оставляя только первый член разложения функций Бесселя в ряд Тейлора ($J_1(\sigma) \approx \sigma$, $J_2(2\sigma) \approx \sigma^2/2$), то есть применяя второе допущение, указанное выше, приходим к тождеству.

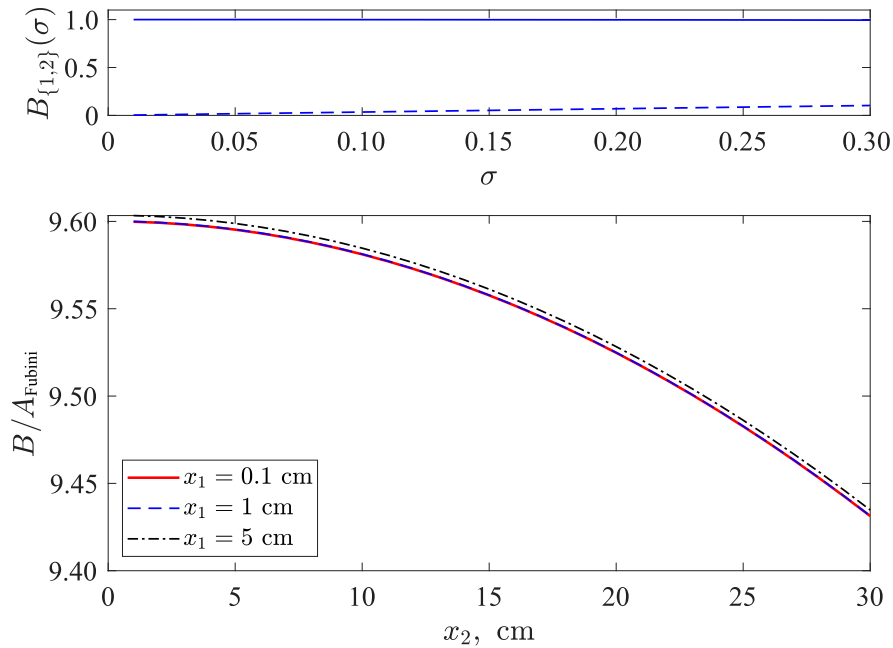


Рис. 5. Коэффициенты $B_1(\sigma)$ и $B_2(\sigma)$ членов ряда решения Фубини (21), (22), показанные сплошной и штриховой линиями, соответственно (верхняя панель), и параметр нелинейности согласно формуле (17) для решения Фубини, измеренный в различных начальных и конечных точках (нижняя панель)

Fig. 5. The coefficients $B_1(\sigma)$ and $B_2(\sigma)$ in the series representing the Fubini solution (21), (22) shown with solid and dashed lines, respectively (upper panel), and the nonlinearity parameter according to the formula (17) for the Fubini solution measured at different initial and end points (lower panel)

Использованное значение $\sigma_2 = 0.14$ уже не может рассматриваться как малое, что проиллюстрировано рис. 5, однако отклонение от исходного значения параметра нелинейности, выявляемого при $x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow 0$, находится в пределах одного процента. Более существенным является влияние коэффициента затухания нелинейных волн в реальной жидкости. Этот эффект проявляется как в припоршневой области для основной гармоники, см. существенно меньшее значение спектрального пика при x_1 по сравнению с соответствующим пиком решения Фубини на рис. 4, так и на расстоянии x_2 для второй гармоники. Так как P_1 при расчете параметра нелинейности по формуле возводится в квадрат и находится в знаменателе, это и дает существенный вклад в завышение величины B/A . Кроме того, сравнивая рис. 5 и рис. 4, следует отметить, что реалистичное значение амплитуды первой гармоники акустического сигнала заметно ниже на расстоянии x_2 , чем на расстоянии x_1 , что свидетельствует о вкладе затухания в толуоле на таких расстояниях в отличие от идеальной среды, соответствующей решению Фубини, для которой уменьшением первой гармоники только за счет развития второй можно пренебречь.

Таким образом, можно сделать вывод, что непосредственно исходные экспериментальные данные, полученные в работе [34], сами по себе обладают достаточно высокой точностью для нахождения параметра нелинейности, однако их корректная обработка должна обращаться не к формуле (17), а к численному решению нелинейного уравнения (18), существенно зависящему от величины поглощения и положения экспериментальных датчиков акустического давления, при различных наборах входящего в уравнение параметра β с последующим выявлением его численного значения, которое наилучшим образом согласует гармоники численного решения с экспериментальными.

Заключение

Основным выводом данной работы является заключение о том, что параметр, выражающий собой величину приведенных флуктуаций плотности, позволяет с приемлемой точностью оценивать не только скорость звука как функцию изменяющегося давления (то есть первую адиабатическую производную плотности), как это показано в настоящее время в практическом приложении к различным типам жидких сред [25, 42], но и параметр нелинейности, связанный со второй производной, существенно более чувствительной к ходу исходных дифференцируемых функций.

Помимо этого, выявлено, что противоречие, существующее в различных источниках касательно значения параметра нелинейности, определенного в ходе термодинамических и нелинейно-акустических измерений, базируется на излишне упрощенном аналитическом приближении к решению нелинейного уравнения Вестервелта, моделирующего распространение нелинейной волны большой амплитуды. При этом согласование численного решения с измеримыми значениями амплитуд первой и второй гармоники нелинейной волны дает принципиальную возможность найти параметр нелинейности, входящий в исходное дифференциальное уравнение, согласующееся с термодинамическим значением параметра нелинейности.

Список литературы

1. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Некоторые вопросы распространения ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкостях // *Успехи физических наук.* 1959. Т. 68, № 4. С. 687–715. DOI: 10.3367/UFNr.0068.195908e.0687.
2. *Fox F. E., Wallace W. A.* Absorption of finite amplitude sound waves // *Journal of the Acoustical Society of America.* 1954. Vol. 26, no. 6. P. 994–1006. DOI: 10.1121/1.1907468.
3. *Beyer R. T.* Lord Rayleigh and nonlinear acoustics // *Journal of the Acoustical Society of America.* 1995. Vol. 98, no. 6. P. 3032–3034. DOI: 10.1121/1.414465.
4. *Lord Rayleigh O. M. F. R. S. XLII.* On the momentum and pressure of gaseous vibrations, and on the connexion with the virial theorem // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.* 1905. Vol. 10, no. 57. P. 364–374. DOI: 10.1080/14786440509463381.
5. *Beyer R. T.* Parameter of nonlinearity in fluids // *Journal of the Acoustical Society of America.* 1960. Vol. 32, no. 6. P. 719–721. DOI: 10.1121/1.1908195.
6. *Shutilov V. A.* *Fundamental Physics of Ultrasound.* London: CRC Press, 1988. 394 p. DOI: 10.1201/9780429332227.
7. *Cobbold R. S. C.* *Foundations of Biomedical Ultrasound.* Oxford: Oxford University Press, 2006. 832 p.
8. *Lauterborn W., Kurz T., Akhatov I.* Nonlinear acoustics in fluids // In: *Rossing T. (eds) Springer Handbook of Acoustics.* Springer Handbooks. New York: Springer, 2007. P. 257–297. DOI: 10.1007/978-0-387-30425-0_8.
9. *Panfilova A., van Sloun R. J. G., Wijkstra H., Sapozhnikov O. A., Mischi M.* A review on B/A measurement methods with a clinical perspective // *Journal of the Acoustical Society of America.* 2021. Vol. 149, no. 4. P. 2200–2237. DOI: 10.1121/10.0003627.
10. *Duck F. A.* Nonlinear acoustics in diagnostic ultrasound // *Ultrasound in Medicine & Biology.* 2002. Vol. 28, no. 1. P. 1–18. DOI: 10.1016/S0301-5629(01)00463-X.
11. *Gan W. S.* B/A nonlinear parameter acoustical imaging // In: *Nonlinear Acoustical Imaging.* Singapore: Springer, 2021. P. 37–48. DOI: 10.1007/978-981-16-7015-2_6.
12. *Dzida M., Zoreński E., Zoreński M., Żarska M., Geppert-Rybczyńska M., Chorążewski M.,*

- Jacquemin J., Cibulka I.* Speed of sound and ultrasound absorption in ionic liquids // *Chemical Reviews*. 2017. Vol. 117, no. 5. P. 3883–3929. DOI: 10.1021/acs.chemrev.5b00733.
13. *Tiwari R. K., Verma V., Awasthi A., Trivedi S. K., Pandey P. K., Awasthi A.* Comparative study of acoustic non-linearity parameter in binary mixtures of N,N-dimethylacetamide with Polyethylene Glycols at different temperatures // *Journal of Molecular Liquids*. 2021. Vol. 343. P. 117707. DOI: 10.1016/j.molliq.2021.117707.
 14. *Jordan P. M.* A survey of weakly-nonlinear acoustic models: 1910–2009 // *Mechanics Research Communications*. 2016. Vol. 73. P. 127–139. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2016.02.014.
 15. *Kaltenbacher B., Rundell W.* On the identification of the nonlinearity parameter in the Westervelt equation from boundary measurements // *Inverse Problems & Imaging*. 2021. Vol. 15, no. 5. P. 865–891. DOI: 10.3934/ipi.2021020.
 16. *Nomoto O.* Nonlinearity parameter of the “Rao liquid” // *Journal of the Physical Society of Japan*. 1966. Vol. 21, no. 4. P. 569–571. DOI: 10.1143/JPSJ.21.569.
 17. *Sharma B. K.* Nonlinearity acoustical parameter and its relation with Rao’s acoustical parameter of liquid state // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1983. Vol. 73, no. 1. P. 106–109. DOI: 10.1121/1.388842.
 18. *Rao M. R.* Velocity of sound in liquids and chemical constitution // *Journal of Chemical Physics*. 1941. Vol. 9, no. 9. P. 682–685. DOI: 10.1063/1.1750976.
 19. *Wada Y.* On the relation between compressibility and molal volume of organic liquids // *Journal of the Physical Society of Japan*. 1949. Vol. 4, no. 4–6. P. 280–283. DOI: 10.1143/JPSJ.4.280.
 20. *Daridon J.-L., Coutinho J. A. P., Ndiaye E. H. I., Paredes M. L. L.* Novel data and a group contribution method for the prediction of the speed of sound and isentropic compressibility of pure fatty acids methyl and ethyl esters // *Fuel*. 2013. Vol. 105. P. 466–470. DOI: 10.1016/j.fuel.2012.09.083.
 21. *Gupta A. K., Gardas R. L.* The constitutive behavior of ammonium ionic liquids: a physiochemical approach // *RSC Advances*. 2015. Vol. 5, no. 58. P. 46881–46889. DOI: 10.1039/C5RA02391B.
 22. *Zhang Y., Zheng X., He M.-G., Chen Y.* Speed of sound in methyl caprate, methyl laurate, and methyl myristate: measurement by Brillouin light scattering and prediction by Wada’s group contribution method // *Energy & Fuels*. 2016. Vol. 30, no. 11. P. 9502–9509. DOI: 10.1021/acs.energyfuels.6b01959.
 23. *Praharaj M. K., Misra S.* Ultrasonic and conductometric studies of NaCl solutions and study of ionicity of the liquid solution through the Walden plot and various ultrasonic parameters // *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*. 2018. Vol. 132, no. 2. P. 1089–1094. DOI: 10.1007/s10973-018-7038-9.
 24. *Daridon J.-L.* Predicting and correlating speed of sound in long-chain alkanes at high pressure // *International Journal of Thermophysics*. 2022. Vol. 43, no. 5. P. 78. DOI: 10.1007/s10765-022-02999-x.
 25. *Postnikov E. B., Jasiok B., Melent’ev V. V., Ryshkova O. S., Korotkovskii V. I., Radchenko A. K., Lowe A. R., Chorążewski M.* Prediction of high pressure properties of complex mixtures without knowledge of their composition as a problem of thermodynamic linear analysis // *Journal of Molecular Liquids*. 2020. Vol. 310. P. 113016. DOI: 10.1016/j.molliq.2020.113016.
 26. *Lu Z., Daridon J. L., Lagourette B., Ye S.* A phase-comparison method for measurement of the acoustic nonlinearity parameter B/A // *Measurement Science and Technology*. 1998. Vol. 9, no. 10. P. 1699–1705. DOI: 10.1088/0957-0233/9/10/009.
 27. *Lagemann R. T., Corry J. E.* Velocity of sound as a bond property // *Journal of Chemical Physics*. 1942. Vol. 10, no. 12. P. 759. DOI: 10.1063/1.1723659.
 28. *Schaaffs W.* Molekularakustische Ableitung einer Zustandsgleichung für Flüssigkeiten bei hohen Drucken // *Acustica*. 1974. Bd. 30. S. 275–280.

29. Kudryavtsev B. B., Samgina G. A. Use of ultrasonic measurements in the study of molecular interactions in liquids // Soviet Physics Journal. 1966. Vol. 9, no. 1. P. 5–8. DOI: 10.1007/BF00818478.
30. Aziz R. A., Bowman D. H., Lim C. C. An examination of the relationship between sound velocity and density in liquids // Canadian Journal of Physics. 1972. Vol. 50, no. 7. P. 646–654. DOI: 10.1139/p72-089.
31. Lemmon E. W., Span R. Short fundamental equations of state for 20 industrial fluids // Journal of Chemical & Engineering Data. 2006. Vol. 51, no. 3. P. 785–850. DOI: 10.1021/je050186n.
32. Diky V., Muzny C. D., Lemmon E. W., Chirico R. D., Frenkel M. ThermoData Engine (TDE): Software implementation of the dynamic data evaluation concept. 2. Equations of state on demand and dynamic updates over the web // Journal of Chemical Information and Modeling. 2007. Vol. 47, no. 4. P. 1713–1725. DOI: 10.1021/ci700071t.
33. Lafarge T., Possolo A. The NIST Uncertainty Machine // NCSLI Measure. 2015. Vol. 10, no. 3. P. 20–27. DOI: 10.1080/19315775.2015.11721732.
34. Шкловская-Корди В. В. Акустический метод определения внутреннего давления в жидкости // Акустический журнал. 1963. Т. 9, № 1. С. 107–111.
35. Wu J. Handbook of Contemporary Acoustics and Its Applications. Singapore: World Scientific, 2016. 468 p. DOI: 10.1142/9470.
36. Nonlinear Acoustics – Modeling of the 1D Westervelt Equation [Electronic resource]. Application ID: 12783. COMSOL Multiphysics®, 2022. Available from: <https://www.comsol.ru/model/nonlinear-acoustics-8212-modeling-of-the-1d-westervelt-equation-12783>.
37. Hamilton M. F., Blackstock D. T. Nonlinear Acoustics. San Diego: Academic Press, 1998. 455 p.
38. Chien L. D., Cormack J. M., Everbach E. C., Hamilton M. F. Determination of nonlinearity parameter B/A of liquids by comparison with solutions of the three-dimensional Westervelt equation // Proceedings of Meetings on Acoustics. 2021. Vol. 45, no. 1. P. 020003. DOI: 10.1121/2.0001563.
39. Зарембо Л. К., Красильников В. А., Шкловская-Корди В. В. О распространении ультразвуковых волн конечной амплитуды в жидкостях // Акустический журнал. 1957. Т. 3, № 1. С. 29–36.
40. Dukhin A. S., Goetz P. J. Bulk viscosity and compressibility measurement using acoustic spectroscopy // Journal of Chemical Physics. 2009. Vol. 130, no. 12. P. 124519. DOI: 10.1063/1.3095471.
41. Ramires M. L. V., Nieto de Castro C. A., Perkins R. A., Nagasaka Y., Nagashima A., Assael M. J., Wakeham W. A. Reference data for the thermal conductivity of saturated liquid toluene over a wide range of temperatures // Journal of Physical and Chemical Reference Data. 2000. Vol. 29, no. 2. P. 133–139. DOI: 10.1063/1.556057.
42. Jasiok B., Postnikov E. B., Pikalov I. Y., Chorążewski M. Prediction of the speed of sound in ionic liquids as a function of pressure // Journal of Molecular Liquids. 2022. Vol. 363. P. 119792. DOI: 10.1016/j.molliq.2022.119792.

References

1. Zarembo LK, Krasil'nikov VA. Some problems in the propagation of ultrasonic waves of finite amplitude in liquids. Sov. Phys. Usp. 1959;2(4):580–599. DOI: 10.1070/PU1959v002n04ABEH003149.
2. Fox FE, Wallace WA. Absorption of finite amplitude sound waves. Journal of the Acoustical Society of America. 1954;26(6):994–1006. DOI: 10.1121/1.1907468.
3. Beyer RT. Lord Rayleigh and nonlinear acoustics. Journal of the Acoustical Society of America. 1995;98(6):3032–3034. DOI: 10.1121/1.414465.

4. Lord Rayleigh OMFRS. XLII. On the momentum and pressure of gaseous vibrations, and on the connexion with the virial theorem. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1905;10(57):364–374. DOI: 10.1080/14786440509463381.
5. Beyer RT. Parameter of nonlinearity in fluids. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1960;32(6):719–721. DOI: 10.1121/1.1908195.
6. Shutilov VA. *Fundamental Physics of Ultrasound*. London: CRC Press; 1988. 394 p. DOI: 10.1201/9780429332227.
7. Cobbold RSC. *Foundations of Biomedical Ultrasound*. Oxford: Oxford University Press; 2006. 832 p.
8. Lauterborn W, Kurz T, Akhatov I. Nonlinear acoustics in fluids. In: Rossing T, editor. *Springer Handbook of Acoustics*. Springer Handbooks. New York: Springer; 2007. P. 257–297. DOI: 10.1007/978-0-387-30425-0_8.
9. Panfilova A, van Sloun RJG, Wijkstra H, Sapozhnikov OA, Misch M. A review on B/A measurement methods with a clinical perspective. *Journal of the Acoustical Society of America*. 2021;149(4):2200–2237. DOI: 10.1121/10.0003627.
10. Duck FA. Nonlinear acoustics in diagnostic ultrasound. *Ultrasound in Medicine & Biology*. 2002;28(1):1–18. DOI: 10.1016/S0301-5629(01)00463-X.
11. Gan WS. B/A nonlinear parameter acoustical imaging. In: *Nonlinear Acoustical Imaging*. Singapore: Springer; 2021. P. 37–48. DOI: 10.1007/978-981-16-7015-2_6.
12. Dzida M, Zoreński E, Zoreński M, Źarska M, Geppert-Rybczńska M, Chorążewski M, Jacquemin J, Cibulka I. Speed of sound and ultrasound absorption in ionic liquids. *Chemical Reviews*. 2017;117(5):3883–3929. DOI: 10.1021/acs.chemrev.5b00733.
13. Tiwari RK, Verma V, Awasthi A, Trivedi SK, Pandey PK, Awasthi A. Comparative study of acoustic non-linearity parameter in binary mixtures of N,N-dimethylacetamide with Polyethylene Glycols at different temperatures. *Journal of Molecular Liquids*. 2021;343:117707. DOI: 10.1016/j.molliq.2021.117707.
14. Jordan PM. A survey of weakly-nonlinear acoustic models: 1910–2009. *Mechanics Research Communications*. 2016;73:127–139. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2016.02.014.
15. Kaltenbacher B, Rundell W. On the identification of the nonlinearity parameter in the Westervelt equation from boundary measurements. *Inverse Problems & Imaging*. 2021;15(5):865–891. DOI: 10.3934/ipi.2021020.
16. Nomoto O. Nonlinearity parameter of the “Rao liquid”. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1966;21(4):569–571. DOI: 10.1143/JPSJ.21.569.
17. Sharma BK. Nonlinearity acoustical parameter and its relation with Rao’s acoustical parameter of liquid state. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1983;73(1):106–109. DOI: 10.1121/1.388842.
18. Rao MR. Velocity of sound in liquids and chemical constitution. *Journal of Chemical Physics*. 1941;9(9):682–685. DOI: 10.1063/1.1750976.
19. Wada Y. On the relation between compressibility and molal volume of organic liquids. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1949;4(4–6):280–283. DOI: 10.1143/JPSJ.4.280.
20. Daridon JL, Coutinho JAP, Ndiaye EHI, Paredes MLL. Novel data and a group contribution method for the prediction of the speed of sound and isentropic compressibility of pure fatty acids methyl and ethyl esters. *Fuel*. 2013;105:466–470. DOI: 10.1016/j.fuel.2012.09.083.
21. Gupta AK, Gardas RL. The constitutive behavior of ammonium ionic liquids: a physiochemical approach. *RSC Advances*. 2015;5(58):46881–46889. DOI: 10.1039/C5RA02391B.
22. Zhang Y, Zheng X, He MG, Chen Y. Speed of sound in methyl caprate, methyl laurate, and methyl

- myristate: measurement by Brillouin light scattering and prediction by Wada's group contribution method. *Energy & Fuels*. 2016;30(11):9502–9509. DOI: 10.1021/acs.energyfuels.6b01959.
23. Praharaj MK, Misra S. Ultrasonic and conductometric studies of NaCl solutions and study of ionicity of the liquid solution through the Walden plot and various ultrasonic parameters. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*. 2018;132(2):1089–1094. DOI: 10.1007/s10973-018-7038-9.
 24. Daridon JL. Predicting and correlating speed of sound in long-chain alkanes at high pressure. *International Journal of Thermophysics*. 2022;43(5):78. DOI: 10.1007/s10765-022-02999-x.
 25. Postnikov EB, Jasiok B, Melent'ev VV, Ryshkova OS, Korotkovskii VI, Radchenko AK, Lowe AR, Chorążewski M. Prediction of high pressure properties of complex mixtures without knowledge of their composition as a problem of thermodynamic linear analysis. *Journal of Molecular Liquids*. 2020;310:113016. DOI: 10.1016/j.molliq.2020.113016.
 26. Lu Z, Daridon JL, Lagourette B, Ye S. A phase-comparison method for measurement of the acoustic nonlinearity parameter B/A. *Measurement Science and Technology*. 1998;9(10):1699–1705. DOI: 10.1088/0957-0233/9/10/009.
 27. Lagemann RT, Corry JE. Velocity of sound as a bond property. *Journal of Chemical Physics*. 1942;10(12):759. DOI: 10.1063/1.1723659.
 28. Schaaffs W. Molekularakustische Ableitung einer Zustandsgleichung für Flüssigkeiten bei hohen Drucken. *Acustica*. 1974;30:275–280 (in German).
 29. Kudryavtsev BB, Samgina GA. Use of ultrasonic measurements in the study of molecular interactions in liquids. *Soviet Physics Journal*. 1966;9(1):5–8. DOI: 10.1007/BF00818478.
 30. Aziz RA, Bowman DH, Lim CC. An examination of the relationship between sound velocity and density in liquids. *Canadian Journal of Physics*. 1972;50(7):646–654. DOI: 10.1139/p72-089.
 31. Lemmon EW, Span R. Short fundamental equations of state for 20 industrial fluids. *Journal of Chemical & Engineering Data*. 2006;51(3):785–850. DOI: 10.1021/je050186n.
 32. Diky V, Muzny CD, Lemmon EW, Chirico RD, Frenkel M. ThermoData Engine (TDE): Software implementation of the dynamic data evaluation concept. 2. Equations of state on demand and dynamic updates over the web. *Journal of Chemical Information and Modeling*. 2007;47(4):1713–1725. DOI: 10.1021/ci700071t.
 33. Lafarge T, Possolo A. The NIST Uncertainty Machine. *NCSLI Measure*. 2015;10(3):20–27. DOI: 10.1080/19315775.2015.11721732.
 34. Shklovskaya-Kordi VV. An acoustic method of determining the internal pressure in a liquid. *Acoustic Journal*. 1963;9(1):107–111 (in Russian).
 35. Wu J. *Handbook of Contemporary Acoustics and Its Applications*. Singapore: World Scientific; 2016. 468 p. DOI: 10.1142/9470.
 36. Nonlinear Acoustics – Modeling of the 1D Westervelt Equation [Electronic resource]. Application ID: 12783. COMSOL Multiphysics®; 2022. Available from: <https://www.comsol.ru/model/nonlinear-acoustics-8212-modeling-of-the-1d-westervelt-equation-12783>.
 37. Hamilton MF, Blackstock DT. *Nonlinear Acoustics*. San Diego: Academic Press; 1998. 455 p.
 38. Chien LD, Cormack JM, Everbach EC, Hamilton MF. Determination of nonlinearity parameter B/A of liquids by comparison with solutions of the three-dimensional Westervelt equation. *Proceedings of Meetings on Acoustics*. 2021;45(1):020003. DOI: 10.1121/2.0001563.
 39. Zarembo LK, Krasilnikov VA, Shklovskaya-Kordi VV. On the propagation of ultrasonic waves of finite amplitude in liquids. *Acoustic Journal*. 1957;3(1):29–36 (in Russian).
 40. Dukhin AS, Goetz PJ. Bulk viscosity and compressibility measurement using acoustic spectroscopy. *Journal of Chemical Physics*. 2009;130(12):124519. DOI: 10.1063/1.3095471.
 41. Ramires MLV, Nieto de Castro CA, Perkins RA, Nagasaka Y, Nagashima A, Assael MJ,

Wakeham WA. Reference data for the thermal conductivity of saturated liquid toluene over a wide range of temperatures. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*. 2000;29(2): 133–139. DOI: 10.1063/1.556057.

42. Jasiok B, Postnikov EB, Pikalov IY, Chorążewski M. Prediction of the speed of sound in ionic liquids as a function of pressure. *Journal of Molecular Liquids*. 2022;363:119792. DOI: 10.1016/j.molliq.2022.119792.



Беленьков Роман Николаевич — родился в Курске (1996). Окончил с отличием факультет физики, математики и информатики Курского государственного университета по направлениям «Электроника и наноэлектроника» (2018) и «Прикладная математика и информатика» (2020). С 2020 года — аспирант кафедры физики и нанотехнологий. Область научных интересов — физика жидкости, цифровая обработка сигналов, программируемые логические интегральные схемы.

Россия, 305000 Курск, Радищева, 33
Курский государственный университет
E-mail: belenkov.roman@bk.ru
ORCID: 0000-0003-0349-5961
AuthorID (eLibrary.Ru): 1022960



Постников Евгений Борисович — родился в Курске (1977). Окончил Курский государственный педагогический университет (1998). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2000) и доктора физико-математических наук (2011). Заведующий отделом теоретической физики НИЦ физики конденсированного состояния и профессор кафедры физики и нанотехнологий Курского государственного университета. Область научных интересов — математическое моделирование в биофизике, транспортные процессы в сложных средах, физика жидкости.

Россия, 305000 Курск, Радищева, 33
Курский государственный университет
E-mail: postnikov@kursksu.ru
ORCID: 0000-0001-7904-1881
AuthorID (eLibrary.Ru): 137444



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1)

Научная статья
УДК 539.2

DOI: 10.18500/0869-6632-003021
EDN: BGFGGN

Динамическое гашение колебаний твёрдого тела, установленного на вязкоупругих опорах

И. И. Сафаров¹, М. Х. Тешаев^{✉2,3}

¹Ташкентский химико-технологический институт, Узбекистан

²Бухарское отделение института Математики имени В. И. Романовского АН РУз

³Бухарский филиал Ташкентского института инженеров ирригации

и механизации сельского хозяйства, Узбекистан

E-mail: safarov54@mail.ru, ✉muhsin_5@mail.ru

Поступила в редакцию 20.05.2022, принята к публикации 29.09.2022,

опубликована онлайн 20.01.2023, опубликована 31.01.2023

Аннотация. В работе рассматривается задача о снижении уровня вибраций на лапах электрических машин с помощью динамических гасителей колебаний. Для этого лапа электрических машин представляется в виде подамортизированного твердого тела с шестью степенями свободы, установленного на вязкоупругих опорах. Как известно, суть метода динамического гашения колебаний заключается в том, чтобы за счет присоединения к объекту виброзащиты дополнительных устройств (массы) добиться изменения его вибрационных характеристик. Целью работы является разработка алгоритмов и комплекса программ для исследования динамических характеристик механических систем с конечным числом степеней свободы. **Методы.** Для достижения цели реальная электрическая машина заменена моделью твердого тела на амортизаторах, имеющего шесть степеней свободы. С помощью принципа Даламбера выведены уравнения малых колебаний твердого тела с гасителями. Для практических расчетов получена упрощенная система уравнений, учитывающая только три степени свободы. **Результаты.** Проведены численные расчеты на ЭВМ для определения амплитудно-частотных характеристик основного тела. Установлено, что когда гаситель настроен на частоту 50 Гц, уровень вибраций на левом конце интервала частоты вращательного движения ротора-преобразователя снижается до 37.5 дБ, а на правом конце — до 42.5 дБ. На частоте 50 Гц лапы не колеблются. При настройке гасителей на частоту 51.5 Гц максимальный уровень вибраций не превосходит 40 дБ. Оптимальная настройка гасителей находится в пределах частоты 50.60...50.70 Гц, и двухмассовый гаситель на 10–15% эффективнее одномассового.

Ключевые слова: вибрация, динамический гаситель, конструкция, вязкоупругая опора, амортизатор.

Для цитирования: Сафаров И. И., Тешаев М. Х. Динамическое гашение колебаний твёрдого тела, установленного на вязкоупругих опорах // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 63–74. DOI: 10.18500/0869-6632-003021. EDN: BGFGGN

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports

I. I. Safarov¹, M. K. Teshaev^{2,3} ✉

¹Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan

²Bukhara branch of Institute of Mathematics AS RUz, Bukhara, Uzbekistan

³Bukhara branch of the Tashkent Institute of Irrigation
and Mechanization Engineering in Agricultural, Bukhara, Uzbekistan

E-mail: safarov54@mail.ru, ✉muhsin_5@mail.ru

Received 20.05.2022, accepted 29.09.2022, available online 20.01.2023, published 31.01.2023

Abstract. The study of the problem of damping vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports is an urgent task. The paper considers the problem of reducing the level of vibrations on the paws of electric machines using dynamic vibration dampers. For this purpose, the paw of electric machines is represented in the form of a subamortized solid body with six degrees of freedom mounted on viscoelastic supports. The *aim* of the work is to develop calculation methods and algorithms for studying the oscillations of the resonant amplitudes of a solid body mounted on viscoelastic supports. Dynamic oscillation (vibration) damping *method* consists in attaching a system to the protected object, the reactions of which reduce the scope of vibration of the object at the points of attachment of this system. Applying the D'Alembert principle, the equations of small vibrations of a solid with dampers are derived. For practical calculations, a simplified system of equations was obtained that takes into account only three degrees of freedom. Numerical calculations were carried out on a computer to determine the amplitude-frequency characteristics of the main body. Numerical experiments were carried out using the Matlab mathematical package. Considering that a solid body is characterized by vibration, as a rule, in a continuous and wide frequency range, therefore, dynamic vibration dampers are used to protect a solid body mounted on viscoelastic supports. It was found that when the damper is set at a frequency of 50 Hz, the vibration level at the left end of the frequency interval of rotary motion of the rotor-converter, decreases to 37.5 dB, and at the right end — to 42.5 dB. At a frequency of 50 Hz, the paws do not oscillate. When setting the dampers to a frequency of 51.5 Hz, the maximum vibration level does not exceed 40 dB. The optimal setting of the dampers is within the frequency of 50.60...50.70 Hz, and a two-mass extinguisher is 10–15% more efficient than a single-mass one. Thus, the paper sets the tasks of dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports, develops solution methods and an algorithm for determining the dynamic state of a solid body with passive vibration of the object in question.

Keywords: vibration, dynamic damper, construction, viscoelastic support, shock absorber.

For citation: Safarov II, Teshaev MK. Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(1):63–74. DOI: 10.18500/0869-6632-003021

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Преобразование в машинах и механизмах одних видов энергии в другие, преобразование форм движения, осуществление рабочих процессов неизбежно связаны с появлением переменных сил, порождающих вибрацию [1–3]. Вибрация отрицательно влияет на прочность и надежность работы машин, несущих конструкций, сооружений и оказывает вредное влияние на физиологическое состояние людей [4, 5]. Во время эксплуатации электрических машин часто наблюдаются вибрации при их работе [6]. Причинами возникновения колебаний могут быть возмущающие силы механического, электрического и аэродинамического происхождения. Балансировкой ротора, улучшением подвески и конструкции электрической машины не всегда удается снизить уровень колебаний до допустимых норм, и поэтому приходится изыскивать дополнительные средства для гашения нежелательных вибраций [7, 8]. С целью ограничения вибрации в различных областях техники существуют требования и нормы по ее регламентации. В большинстве случаев нормы устанавливаются с учетом всех наиболее важных условий и, поскольку они не могут в равной степени удовлетворить всем требованиям, являются результатом компромиссного решения [9–12].

Динамическое гашение вибрации заключается в присоединении к защищаемому объекту системы, реакции которой уменьшают размах вибрации объекта в точках присоединения этой системы.

Если частота возмущающей силы изменяется мало, то одним из перспективных, требующих разработки способов снижения уровня вибраций, является применение динамических гасителей [13, 14]. Динамический гаситель схематически представляет собой массу, подвешенную на пружине и имеющую возможность перемещаться в одном или нескольких направлениях. Известно, что использование гасителя, настроенного на частоту возмущающей силы, позволяет снизить движение тела с одной степенью свободы на этой частоте и снизить уровень вибраций на близких к ней частотах [15–17].

В настоящей работе рассматривается задача о снижении уровня вибраций на лапах электрических машин с помощью динамических гасителей колебаний.

1. Методы

1.1. Постановка задачи и основные соотношения. Для теоретического исследования вопроса об уменьшении уровня вибраций на лапах электромашины выберем следующую расчетную схему. Корпус и лапы электромашины считаем достаточно жесткими, пренебрегаем податливостью ротора и подшипников, а также гироскопическим эффектом ротора, то есть будем представлять электромашину в виде подамортизированного твердого тела с шестью степенями свободы. На корпусе электромашины установим динамические гасители с осями чувствительности, направленными по осям координат, связанным с телом (рис. 1).

Рассмотрим малые колебания системы без трения относительно положения статического равновесия. В качестве независимых координат выберем ξ_0, η_0, ζ_0 — абсолютные перемещения точки G тела, взятой за полюс, три угла φ, ψ, θ последовательных поворотов твердого тела около осей $G_{x_1}, G_{y_2}, G_{z_3}$ и ξ_l, η_j, ζ_k — абсолютные перемещения масс гасителей (см. рис. 1). Характеристикой виброизолятора называется зависимость его реакции от удлинений Δl_l ($l=1, 2, \dots, N$) деформируемого элемента. Деформируемый элемент считается безмассовым.

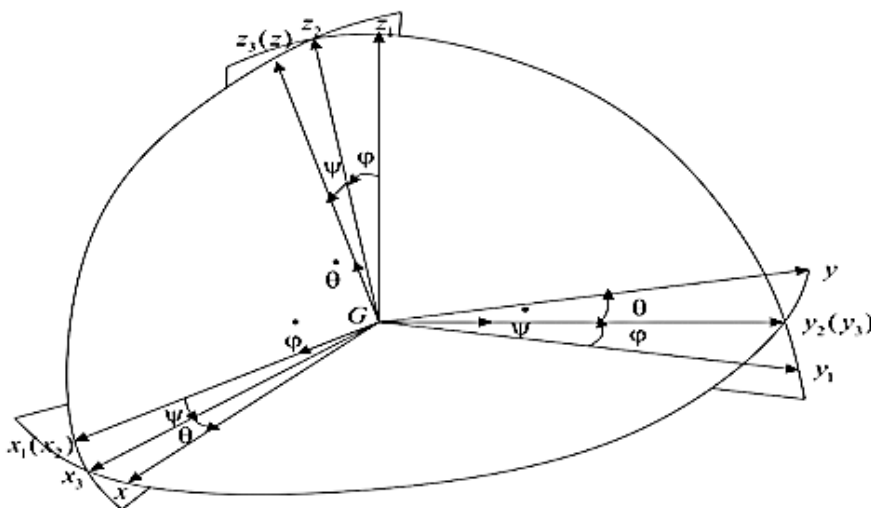


Рис. 1. Твердое тело с тремя степенями свободы

Fig. 1. Rigid body with three degrees of freedom

Связь динамической жесткости и удлинение деформируемого элемента удовлетворяет следующей интегральной зависимости [18, 19]:

$$\tilde{c}_n \varphi(t) = c_{0n} \left[\varphi(t) - \int_{-\infty}^t R_{cn}(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right] \quad (1)$$

(\tilde{c}_n – операторный модуль упругости, $\varphi(t)$ – произвольная функция времени, $R_{cn}(t - \tau)$ – ядро релаксации, c_{0n} – мгновенной модуль упругости), а также физическим соотношениям для деформируемых безмассовых элементов нулевого объема [18, 19]:

$$F_e = -c_e \Delta e = -c_e [1 - \Gamma_e^c(\omega_R) - i\Gamma_e^s(\omega_R)] \Delta e,$$

где

$$\Gamma_e^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda,m}(\tau) \cdot \cos \omega \tau d\tau; \quad \Gamma_e^s(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda,m}(\tau) \cdot \sin \omega \tau d\tau,$$

F_e – усилие в i -м сосредоточенном элементе, Δe – удлинение этого элемента. Далее применены следующие обозначения: E – мгновенный модуль упругости, A , α и β – безразмерные параметры. Используя для вывода уравнений движения принцип Даламбера, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \left(M_0 + \sum_1^{n_2} m_j + \sum_1^{n_3} m_k \right) \ddot{\xi}_0 + \left(M_0 z_{oyt} + \sum_1^{n_2} m_j z_j + \sum_1^{n_3} m_k z_k \right) \ddot{\psi} - \\ & - \left(M_0 Y_{oyt} + \sum_1^{n_2} m_j Y_j + \sum_1^{n_3} m_k Y_k \right) \ddot{\theta} + \sum_1^{r_1} \tilde{c}_l (\xi_0 - Y_{al}\theta + z_{al}\psi) + \\ & + \sum_1^{n_1} \tilde{k}_l (\xi_0 - Y_l\theta + z_l\psi - \xi_l) = \sum_1^{s_1} F_l \sin(p_l t + \nu_l), \\ & \left(M_0 + \sum_1^{n_2} m_l + \sum_1^{n_3} m_k \right) \ddot{\eta}_0 + \left(M_0 x_{oyt} + \sum_1^{n_2} m_l x_l + \sum_1^{n_3} m_k x_k \right) \ddot{\theta} - \\ & - \left(M_0 z_{oyt} + \sum_1^{n_2} m_l z_l + \sum_1^{n_3} m_k z_k \right) \ddot{\varphi} + \sum_1^{n_1} \tilde{c}_j (\eta_0 + x_{aj}\theta - z_{aj}\varphi) + \\ & + \sum_1^{n_1} \tilde{k}_j (\eta_0 + x_j\theta - z_j\varphi - \eta_j) = \sum_1^{s_2} F_l \sin(p_l t + \nu_l), \\ & \left(M_0 + \sum_1^{n_2} m_j + \sum_1^{n_3} m_k \right) \ddot{\xi}_0 + \left(M_0 z_{oyt} + \sum_1^{n_2} m_j z_j + \sum_1^{n_3} m_k z_k \right) \ddot{\psi} - \\ & - \left(M_0 Y_{oyt} + \sum_1^{n_2} m_j Y_j + \sum_1^{n_3} m_k Y_k \right) \ddot{\theta} + \sum_1^{n_1} \tilde{c}_l (\xi_0 - Y_{al}\theta + z_{al}\psi) + \\ & + \sum_1^{n_1} \tilde{k}_l (\xi_0 - Y_l\theta + z_l\psi - \xi_l) = \sum_1^{s_1} F_l \sin(p_l t + \nu_l), \\ & \left[J_{0x} + \sum_1^{n_1} m_l (Y_l^2 + z_l^2) + \sum_1^{n_2} m_j Y_j^2 + \sum_1^{n_2} m_k z_k^2 \right] \ddot{\varphi} - \left[J_{0xy} + \sum_1^{n_1} m_l x_l y_l + \sum_1^{n_2} m_j x_j y_j \right] \ddot{\psi} - \\ & - \left[J_{0xz} + \sum_1^{n_1} m_l x_l z_l + \sum_1^{n_2} m_k x_k z_k \right] \ddot{\theta} + \left[M_0 Y_{oyt} + \sum_1^{n_1} m_l Y_l + \sum_1^{n_2} m_j Y_j \right] \ddot{\xi}_0 - \\ & - \left[M_0 z_{oyt} + \sum_1^{n_1} m_l z_l + \sum_1^{n_2} m_k z_k \right] \ddot{\eta}_0 + \tilde{c}_x \varphi - \\ & - \sum_1^{r_2} \tilde{c}_j (\eta_0 + x_{aj}\theta - z_{aj}\varphi) z_{aj} + \sum_1^{r_3} \tilde{c}_k (\xi_0 - x_{ak}\theta + Y_{ak}\varphi) Y_{ak} - \sum_1^{n_2} \tilde{k}_j (\eta_0 + x_j\theta - z_j\varphi - \eta_j) z_j - \\ & - \sum_1^{n_3} \tilde{k}_k (\xi_0 + x_k\psi - Y_k\varphi - \xi_j) Y_k = M_x - \sum_1^{s_2} F_j z_{Fj} \sin(\omega_j t + \nu_j) + \sum_1^{s_2} F_k Y_{Fk} \sin(p_k t + \nu_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[J_{cy} + \sum_1^{n_2} m_j(x_j^2 + z_j^2) + \sum_1^{n_1} m_l x_l^2 + \sum_1^{n_3} m_k z_k^2 \right] \ddot{\psi} - \left[J_{0yz} + \sum_1^{n_2} m_j z_j Y_j + \sum_1^{n_3} m_k Y_k z_k \right] \ddot{\theta} - \\
& - \left[J_{0xy} + \sum_1^{n_1} m_l Y_l z_l + \sum_1^{n_2} m_j z_j Y_j \right] \ddot{\phi} + \left[M_0 z_{0yt} + \sum_1^{n_2} m_j z_j + \sum_1^{n_3} m_k z_k \right] \ddot{\xi}_0 - \\
& - \left[M_0 X_{0yt} + \sum_1^{n_1} m_l x_l + \sum_1^{n_2} m_j x_j \right] \ddot{\zeta}_0 + \tilde{c}_y \Psi - \\
& - \sum_1^{r_3} \tilde{c}_k (\zeta_0 + x_{ak} \psi - Y_{aj} \varphi) x_{ak} + \sum_1^{r_2} \tilde{c}_i (\xi_0 - Y_{ai} \theta + z_{ai} \psi) z_{ai} - \sum_1^{n_3} \tilde{k}_k (\zeta_0 + Y_k \varphi - z_j \varphi - \zeta_k) x_k - \\
& - \sum_1^{n_2} \tilde{k}_l (\xi_0 - Y_l \theta + z_l \psi - \xi_l) z_l = M_y + \sum_1^{s_1} F_l z_l \sin(p_l t + \nu_l) - \sum_1^{s_3} F_k Y_{Fk} \sin(p_k t + \nu_k), \\
& \left(M_0 x_{yt} + \sum_1^{n_1} m_l x_l + \sum_1^{n_3} m_k x_k \right) \ddot{\eta}_0 - \left(M_0 Y_{oyt} + \sum_1^{n_2} m_j Y_j + \sum_1^{n_3} m_k Y_k \right) \ddot{\xi}_0 + \tilde{c}_z \theta - \\
& - \sum_1^{r_1} \tilde{c}_l (\xi_0 + z_{al} \psi - Y_{al} \theta) Y_{al} + \sum_1^{r_2} \tilde{c}_j (\eta_0 + x_{aj} \theta - z_{aj} \varphi) x_{aj} - \sum_1^{n_1} \tilde{k}_l (\xi_0 - Y_l \theta + z_l \psi - \xi_l) Y_l + \\
& + \sum_1^{n_2} \tilde{k}_j \eta_0 + x_j \theta - z_j \varphi - \eta_j) x_j = M_z + \sum_1^{s_2} F_j x_{Fj} \sin(p_j t + \nu_j) - \sum_1^{s_1} F_l x_{Fl} \sin(p_l t + \nu_l), \\
& \begin{cases} m_l \ddot{\xi}_l - \tilde{k}_l (\xi_0 - Y_l \theta + z_l \psi - \xi_l) = 0 & 1 \leq l \leq n_1, \\ m_j \ddot{\eta}_j - \tilde{k}_j (\eta_0 + x_j \theta - z_j \varphi - \eta_j) = 0 & 1 \leq j \leq n_2, \\ m_k \ddot{\zeta}_k - \tilde{k}_k (\zeta_0 - x_k \psi + Y_k \varphi - \zeta_k) = 0 & 1 \leq k \leq n_3. \end{cases} \quad (2)
\end{aligned}$$

При выводе использованы обозначения: G_{xyz} – система координат, жестко связанная с телом; l, j, k – индексы, показывающие, что элемент, сила, момент и т. п. работает или действует в направлении осей G_x, G_y, G_z , соответственно; M_0, m_j, m_k, m_l – массы твердого тела и гасителей, соответственно; $J_{ox} J_{oy} J_{oz} J_{oxy} J_{ozx} J_{oyz}$ – моменты инерции твердого тела относительно системы координат G_{xyz} ; $x_{oyt}, Y_{oyt}, z_{oyt}$ – координаты центра тяжести твердого тела без учета масс гасителей в системе координат G_{xyz} ; $x_l, Y_l, \dots, Y_k, z_k$ – координаты масс гасителей в положении статического равновесия в системе координат; $x_{al}, Y_{al}, \dots, Y_{ak}, z_{ak}$ – координаты точек прикрепления пружин к твердому телу в системе координат; $x_{Fl}, Y_{Fl}, \dots, Y_{Fk}, z_{Fk}$ – координаты точек приложения внешних сил в системе координат G_{xyz} ; $\tilde{c}_l, \tilde{c}_j, \tilde{c}_k$ – операторные коэффициенты жесткости пружин, на которые подвешено тело, определяемые по зависимости (1); $\tilde{k}_l, \tilde{k}_j, \tilde{k}_k$ – операторные коэффициенты жесткости пружин в гасителях, которые определяются по зависимости (1); $\tilde{c}_x, \tilde{c}_y, \tilde{c}_z$ – операторные коэффициенты жесткости пружин на кручение, расположенных по осям G_x, G_y, G_z , соответственно, которые определяются по зависимости (1); F_j, F_k, F_l – амплитуды внешних возмущающих сил, приложенных к телу; p_j, p_k, p_l – частоты и фаза внешних сил; ν_j, ν_k, ν_l – фазы внешних сил; n_1, n_2, n_3 – число гасителей по каждому направлению; r_1, r_2, r_3 – число пружин, поддерживающих тело; M_x, M_y, M_z – внешние моменты, действующие на тело; s_1, s_2, s_3 – число внешних сил; $\omega_j, \omega_k, \omega_l$ – собственные частоты.

Уравнения движения (2) выведены с использованием принципа Даламбера, возможных перемещений, а также с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода доказана идентичность полученных систем.

Как показывают эксперименты, основными колебаниями машины являются вертикальные перемещения лап, поэтому составим упрощенную систему уравнений движения твердого тела с гасителями. Рассмотрим только те степени свободы движения тела, которые дают вертикальные перемещения его точкам. Такими движениями будут перемещение полюса тела по оси $G_x - \xi_0$, и его вращение относительно осей G_y и $G_z - \psi$ и θ , соответственно.

Считаем, что на твердое тело установлены N_1 динамических гасителей с осями чувствительности, параллельными оси G_x . Начало координат поместим в центре тяжести твердого тела,

а оси координат направим по главным осям инерции тела. Тогда уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} M_0 \ddot{\xi}_0 + \sum_1^{r_1} \tilde{c}_l (\xi_0 - Y_{al}\theta + z_{al}\psi) + \sum_1^{n_1} \tilde{k}_l (\xi_0 - Y_l\theta + z_l\psi - \xi_l) &= \sum_1^{s_1} F_{1l} e^{-ip_l t}, \\ J_{oy} \ddot{\psi} + \sum_1^{r_1} \tilde{c}_l (\xi_0 - Y_{al}\theta + z_{al}\psi) z_{ai} + \sum_1^{n_1} \tilde{k}_l (\xi_0 - Y_l\theta + z_l\psi - \xi_l) z_l &= \sum_1^{s_1} F_{2l} z_{Fl} e^{-ip_l t}, \\ J_{oz} \ddot{\theta} + \sum_1^{r_1} \tilde{c}_l (\xi_0 - Y_{al}\theta + z_{al}\psi) Y_{al} - \sum_1^{n_1} \tilde{k}_l (\xi_0 - Y_l\theta + z_l\psi - \xi_l) Y_l &= - \sum_1^{s_1} F_{3l} Y_{Fl} e^{-ip_l t}, \\ m_l \ddot{\xi}_l - \tilde{k}_l (\xi_0 - Y_l\theta + z_l\psi - \xi_l) &= 0, \quad 1 \leq l \leq n_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где $F_{1l} = F_l e^{i\varphi_1}$, $F_{2l} = F_l e^{i\varphi_2}$, $F_{3l} = F_l e^{i\varphi_3}$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — сдвиги фаз внешних нагрузок. Аналогичным образом учитывается сдвиг фаз элементов механической системы.

1.2. Методы решения. Предположим, что на твердое тело действует возмущающая сила $F_{0l} e^{-i\varphi_l}$, $l = 1, 2, \dots, L$, где L — количество внешних нагрузок.

Если интегральный член

$$\tilde{c}_n[\varphi(t)] = c_{0n} \left[\varphi(t) - \int_0^t R_{cn}(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau \right], \quad n = (i, j, k) \quad (4)$$

дан на конечном отрезке $[0, t]$, тогда рассматриваются собственные колебания механической системы (1). Принимаем интегральный член в (4) малым, тогда $\varphi(t) = \psi(t) e^{-i\omega_R t}$, где $\psi(t)$ — медленно меняющаяся функция времени, ω_R — действительная частота. Заменим соотношения (4) приближенными, вида [19, 20]

$$\bar{c}_n[\varphi] = c_{0j} [1 - \Gamma_j^c(\omega_R) - i\Gamma_j^s(\omega_R)] [\varphi], \quad (5)$$

где

$$\Gamma_n^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_n(\tau) \cdot \cos \omega_R \tau d\tau; \quad \Gamma_n^s(\omega_R) = \int_0^\infty R_n(\tau) \cdot \sin \omega_R \tau d\tau,$$

косинус и синус — образы Фурье ядра релаксации материала. В качестве примера вязкоупругого материала примем трехпараметрическое ядро релаксации Ржаницына–Колтунова: $R_n(t) = A_n e^{-\beta_n t} / t^{1-\alpha_{jn}}$. На функцию влияния $R_n(t-\tau)$ накладываются обычные требования интегрируемости, непрерывности (кроме $t = \tau$) знако-определенности и монотонности:

$$R > 0, \quad \frac{dR(t)}{dt} \leq 0, \quad 0 < \int_0^\infty R(t) dt < 1.$$

При решении задачи на собственные колебания внешние нагрузки отсутствуют и определяются собственные частоты при заданных значениях физико-механических и геометрических параметров.

Если есть вибрационные воздействия на тело, тогда задаются резонансные частоты и строятся амплитудно-частотные характеристики различных точек механической системы.

Решение задачи вынужденных колебаний будем искать в виде:

$$\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \psi \\ \theta \\ \xi_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_0 \\ \Psi \\ \Theta \\ \Sigma_l \end{pmatrix} e^{-\omega t}, \quad (6)$$

где ω — заданная действительная величина. А при решении задачи собственных колебаний $\omega = \omega_R + i\omega_I$ — комплексная неизвестная величина (частота), которую требуется определить.

Подставляя (6) в систему (2) и исключая Σ_i , получим алгебраическую систему из трех уравнений относительно трех амплитуд колебаний Σ_0, Ψ, Θ . Абсолютное перемещение произвольной точки тела с координатами Y_B и z_B дается выражением

$$\xi = \xi_0 + z_B \Psi - Y_B \Theta = [\Sigma_0 + z_B \Psi - Y_B \Theta] e^{-\omega t} = \Sigma e^{-\omega t}.$$

Можно показать, что каждый гаситель при настройке его на частоту возмущающей силы воздействует на ту точку твердого тела, на которой он установлен. Следовательно, для тела с тремя степенями свободы на частоте настройки необходимо, в общем случае, иметь три гасителя, не расположенных на одной прямой.

Для вычисления амплитудно-частотных характеристик был использован программный комплекс «MAPLE-18» [19, 20]. Составленный алгоритм позволяет производить вычисления для различных сил дисбаланса углов между ними в разных плоскостях, масс гасителей и их местоположения, настроек гасителей и вязкоупругих свойств вязкоупругого элемента.

2. Результаты и обсуждения

Вязкоупругие свойства материала описываются с помощью трехпараметрического ядра релаксации [21–23]:

$$R_{cj}(t) = R_{cl}(t) = R_{ck}(t) = A_p e^{-\beta_p t} / t^{1-\alpha_p},$$

$$R_{kj}(t) = R_{kl}(t) = R_{kk}(t) = A_g e^{-\beta_g t} / t^{1-\alpha_g}.$$

Подход к оптимизации параметров для гасителя с вязким трением отличается от случая гасителя без демпфирования. Для получения оптимальных параметров гасителя в работах [24, 25] использованы свойства линейной системы с одним гасителем. Выяснено, что один гаситель эффективен для механической системы с одной степенью свободы.

Исследованы амплитуды перемещений центра масс тела с тремя степенями свободы в зависимости от частоты. Результаты получены в безразмерных параметрах с учетом и без учета гасителя. Для расчета был выбран случай четырех гасителей, установленных на лапах, $A_p = 0.01$, $\beta_p = 0.05$, $\alpha_p = 0.1$, $A_g = 0.001$, $\beta_g = 0.025$, $\alpha_g = 0.05$.

$$Y_{gl} = \frac{Y_l}{Y_{01}}, \quad Z_{gl} = \frac{z_l}{z_{01}}, \quad \eta_{ml} = \frac{m_l}{M_0}, \quad \eta_{kl} = \frac{k_l}{c_1}, \quad c_1 = c_2,$$

$$\eta_{mi} = 0.025, \quad \eta_{ki} = 0.65, \quad Y_{gi} = 1, \quad Z_{gi} = 1.$$

На рис. 2 приведены амплитудно-частотные характеристики перемещений центра масс основной массы без гасителей и с гасителями. Видно, что четыре гасителя, установленные на лапах, эффективно снижают амплитуды перемещений.

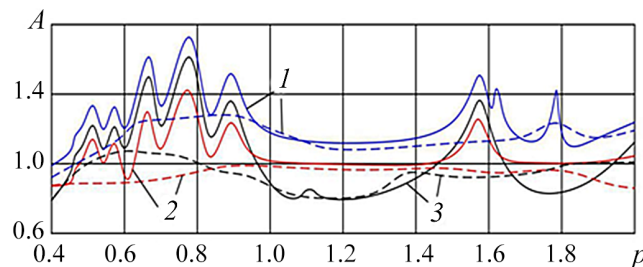


Рис. 2. Изменение амплитуды смещений центра масс основного тела в зависимости от частоты (пунктирная кривая — без гасителей, сплошная — с гасителями)

Fig. 2. Amplitude-frequency characteristics of displacements of the center of mass of the main mass (dotted curve — without absorbers and solid — with absorbers)

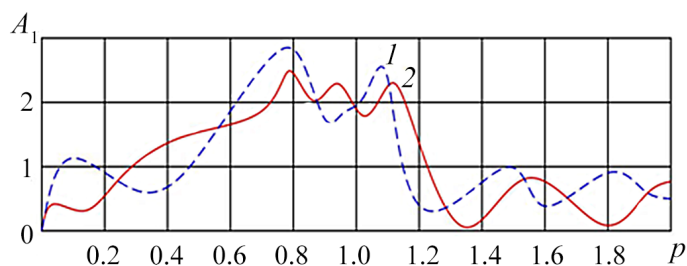


Рис. 3. Изменение амплитуды смещений центра масс основного тела в зависимости от частоты (с одномассовым гасителем — 1; с двухмассовым гасителем — 2)

Fig. 3. The amplitude-frequency characteristics of the displacements of the center of mass of the main mass (1 — with one-mass absorber, 2 — with two-mass absorber)

На рис. 3 приведены амплитуды колебаний главной массы при прохождении через резонанс 1 — с одномассовым гасителем, и 2 — с двухмассовым гасителем. Установлено, что двухмассовый гаситель на 10–15% эффективнее одномассового гасителя.

Расчеты конкретного примера производились для тела весом 350 кг. Для расчета был выбран случай четырех гасителей весом по 9 кг каждый, установленных на лапах, $A_p = 0.01$, $\beta_p = 0.05$, $\alpha_p = 0.1$, $A_g = 0.001$, $\beta_g = 0.025$, $\alpha_g = 0.05$, $c_{01} = c_{02} = 2510$ Н/м, $k_{01} = k_{02} = k_{03} = 1500$ Н/м.

На рис. 4 представлены результаты расчета амплитудно-частотной характеристики в децибелах для твердого тела без гасителей (пунктирная кривая) и с гасителями (сплошная и штрихпунктирная кривая). По оси ординат отложен уровень вибраций в децибелах $W_{dB} = 20 \lg(w/w_0)$, где w — ускорение точки тела, $w_0 = 2.8 \cdot 10^{-4}$ м/с. По оси абсцисс отложена относительная частота возмущающей силы $\omega_{01} = \omega/\Omega_1$, где ω — частота возмущающей силы, Ω_1 — частота вертикальных колебаний твердого тела на амортизаторах ($\Omega_1 = 18.79$ Гц).

При заданном уровне сил от дисбаланса ротора $F_{01} = 0.756$ кг и $F_{02} = 0.767$ кг уровень вибраций в районе частоты $\omega = 50$ Гц ($\omega_{01} = 2.66$) оказался равным 45.5 дБ, что близко к предельно допустимому уровню в 46 дБ.

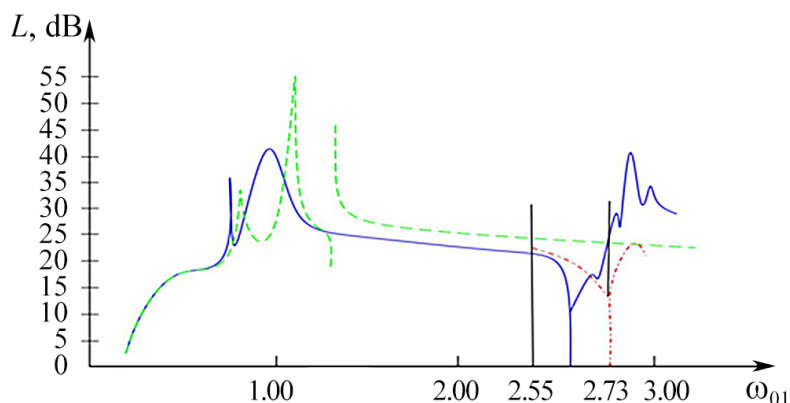


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики твердого тела с тремя степенями свободы: без гасителей (пунктирная кривая) и с гасителями (сплошная)

Fig. 4. Amplitude-frequency characteristics of a rigid body with three degrees of freedom: dashed curve — without absorbers and solid curve — with absorbers

Заключение

По результатам исследований сделаны следующие выводы:

- частота вращательного движения ротора-преобразователя колеблется в пределах от 48 до 51.25 Гц ($2.55 \leq \omega_{01} \leq 2.73$);
- при настройке гасителя на частоту 50 Гц уровень вибраций снижается до 37.5 дБ на левом конце интервала и до 42.5 дБ на правом конце интервала;
- на частоте 50 Гц, как это и следует из теории, лапы не колеблются;
- при настройке гасителей на частоту 51.5 Гц максимальный уровень вибраций не превосходит 40 дБ;
- оптимальная настройка гасителей находится в районе 50.6...50.7 Гц;
- установлено, что двухмассовый гаситель на 10–15% эффективнее одномассового гасителя.

Список литературы

1. Вибрации в технике: Справочник: В 6 т. Т. 6. Защита от вибраций и ударов / Под ред. К. В. Фролова. М.: Машиностроение, 1981. 456 с.
2. Токарев М. Ф., Талицкий Е. Н., Фролов В. А. Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры: Учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1984. 224 с.
3. Хашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. М.: Мир, 1988. 448 с.
4. Teshaev M. K., Safarov I. I., Mirsaidov M. Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2019. Vol. 13, no. 2. P. 104–115. DOI: 10.24874/jsscm.2019.13.02.08.
5. Глудкин О. П. Методы и устройства испытаний РЭС и ЭВС. М.: Высшая школа, 1991. 336 с.
6. Глудкин О. П., Енгальчев А. Н., Коробов А. И., Трегубов Ю. В. Испытания радиоэлектронной, электронно-вычислительной аппаратуры и испытательное оборудование. М.: Радио и связь, 1987. 272 с.
7. Лысенко А. В., Горячев Н. В., Граб И. Д., Кемалов Б. К., Юрков Н. К. Краткий обзор методов имитационного моделирования // Современные информационные технологии. 2011. № 14. С. 171–176.
8. Федоров В., Сергеев Н., Кондрашин А. Контроль и испытания в проектировании и производстве радиоэлектронных средств. М.: Техносфера, 2005. 502 с.
9. ГОСТ 30630.1.2-99. Методы испытаний на стойкость к механическим внешним воздействующим факторам машин, приборов и других технических изделий. Испытания на воздействие вибрации. Введ. 01.01.2001. Минск: Межгосударственный Совет по стандартизации, метрологии и сертификации, 1999. 35 с.
10. Каленкович Н. И. Радиоэлектронная аппаратура и основы ее конструкторского проектирования: Учебно-методическое пособие для студентов спец. «Моделирование и компьютерное проектирование» и «Проектирование и производство РЭС». Минск: БГУИР, 2008. 200 с.
11. Юрков Н. К. Технология радиоэлектронных средств. Пенза: Изд-во ПГУ, 2012. 640 с.
12. Кофанов Ю. Н., Шалумов А. С., Журавский В. Г., Гольдин В. В. Математическое моделирование радиоэлектронных средств при механических воздействиях. М.: Радио и связь, 2000. 226 с.
13. Capatti M. C., Carbonari S., Gara F., Roia D., Dezi F. Experimental study on instrumented micropiles // In: 2016 IEEE Workshop on Environmental, Energy, and Structural Monitoring Systems (EESMS). 13–14 June 2016, Bari, Italy. New York: IEEE, 2016. P. 16125758. DOI: 10.1109/EESMS.2016.7504831.
14. Adamo F., Attivissimo F., Lanzolla A. M. L., Saponaro F., Cervellera V. Assessment of the

- uncertainty in human exposure to vibration: An experimental study // IEEE Sensors Journal. 2014. Vol. 14, no. 2. P. 474–481. DOI: 10.1109/JSEN.2013.2284257.
15. *Palacios-Quiñonero F., Karimi H. R., Rubió-Massegú J., Rossell J. M.* Passive-damping design for vibration control of large structures // In: 2013 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA). 12–14 June 2013, Hangzhou, China. New York: IEEE, 2013. P. 33–38. DOI: 10.1109/ICCA.2013.6565018.
 16. *Zhang X., Sun D., Song Y., Yan B.* Dynamics characteristic study of the visco-elastic suspension system of construction vehicles // In: International Technology and Innovation Conference 2009 (ITIC 2009). 12–14 October 2009, Xi'an, China. Stevenage: IET, 2010. P. 1–4. DOI: 10.1049/cp.2009.1508.
 17. *Sahu S. K., Datta P. K.* Dynamic stability of laminated composite curved panels with cutouts // J. Eng. Mech. 2003. Vol. 129, no. 11. P. 1245–1253. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:11(1245).
 18. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
 19. *Колтунов М. А.* Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 278 с.
 20. *Cabańska-Placzkiewicz K.* Vibrations of a complex system with damping under dynamic loading // Strength of Materials. 2002. Vol. 34, no. 2. P. 165–180. DOI: 10.1023/A:1015366527597.
 21. *Mirsaidov M. M., Safarov I. I., Teshaeв M. K.* Dynamics of structurally inhomogeneous lamellar and shell mechanical systems. Part 1 // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2019. Vol. 7, no. 10. P. 2283–2302. DOI: 10.4236/jamp.2019.710155.
 22. *Mirsaidov M., Safarov I. I., Teshaeв M. K.* Dynamics of structural-inhomogeneous laminate and shell mechanical systems with point constraints and focused masses. Part 2. Statement of the problem of forced oscillations, methods of solution, computational algorithm and numerical results // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2019. Vol. 7, no. 11. P. 2671–2684. DOI: 10.4236/jamp.2019.711182.
 23. *Mirsaidov M., Safarov I., Teshaeв M.* Dynamic instability of vibrations of thin-wall composite curvilinear viscoelastic tubes under the influence of pulse pressure // E3S Web Conf. 2020. Vol. 164. P. 14013. DOI: 10.1051/e3sconf/202016414013.
 24. *Teshaeв M. K., Safarov I. I., Kuldashov N. U., Ishmatov M. R., Ruziev T. R.* On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity // Journal of Vibration Engineering & Technologies. 2020. Vol. 8, no. 4. P. 579–585. DOI: 10.1007/s42417-019-00160-x.
 25. *Корнев Б. Г., Резников Л. М.* Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. М.: Наука, 1988. 304 с.

References

1. Frolov KV, editor. Protection Against Vibrations and Shocks. Vol. 6 of Vibration in Technology. Moscow: Mashinostroenie; 1981. 456 p. (in Russian).
2. Tokarev MF, Talitsky EN, Frolov VA. Mechanical Influences and Protection of Radio Electronic Equipment. Moscow: Radio i Svyaz; 1984. 224 p. (in Russian).
3. Nashif AD, Jones DIG, Henderson JP. Vibration Damping. New York: John Wiley & Sons; 1985. 480 p.
4. Teshaeв MK, Safarov II, Mirsaidov M. Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes. Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2019;13(2):104–115. DOI: 10.24874/jsscm.2019.13.02.08.
5. Gludkin OP. Methods and Devices for Testing RES and EMU. Moscow: Vysshaya Shkola; 1991. 336 p. (in Russian).

6. Gludkin OP, Engalychev AN, Korobov AI, Tregubov YV. Testing of Radio Electronic, Electronic-Computing Instrumentation and Test Equipment. Moscow: Radio i Svyaz; 1987. 272 p. (in Russian).
7. Lysenko AV, Goryachev NV, Grab ID, Kemalov BK, Yurkov NK. A brief overview of simulation methods. Modern Information Technologies. 2011;(14):171–176 (in Russian).
8. Fedorov V, Sergeev N, Kondrashin A. Control and Testing in Design and Production of Radio Electronic Means. Moscow: Tekhnosfera; 2005. 502 p. (in Russian).
9. GOST 30630.1.2-99. Mechanical environment stability test methods for machines, instruments and other industrial products. Tests for influences of vibration. Entered 01.01.2001. Minsk: Inter-Governmental Council on Standardization, Metrology, and Certification; 1999. 35 p. (in Russian).
10. Kalenkovich NI. Electronic Equipment and Its Basics Design Engineering. Minsk: Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics; 2008. 200 p. (in Russian).
11. Yurkov NK. Technology of Radio Electronic Means. Penza: Penza State University Publishing; 2012. 640 p. (in Russian).
12. Kofanov YN, Shalumov AS, Zhuravskii VG, Goldin VV. Mathematical Modeling of Radio Electronic Means Under Mechanical Influences. Moscow: Radio i Svyaz; 2000. 226 p. (in Russian).
13. Capatti MC, Carbonari S, Gara F, Roia D, Dezi F. Experimental study on instrumented micropiles. In: 2016 IEEE Workshop on Environmental, Energy, and Structural Monitoring Systems (EESMS). 13–14 June 2016, Bari, Italy. New York: IEEE; 2016. P. 16125758. DOI: 10.1109/EESMS.2016.7504831.
14. Adamo F, Attivissimo F, Lanzolla AML, Saponaro F, Cervellera V. Assessment of the uncertainty in human exposure to vibration: An experimental study. IEEE Sensors Journal. 2014;14(2): 474–481. DOI: 10.1109/JSEN.2013.2284257.
15. Palacios-Quiñero F, Karimi HR, Rubió-Massegú J, Rossell JM. Passive-damping design for vibration control of large structures. In: 2013 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA). 12–14 June 2013, Hangzhou, China. New York: IEEE; 2013. P. 33–38. DOI: 10.1109/ICCA.2013.6565018.
16. Zhang X, Sun D, Song Y, Yan B. Dynamics characteristic study of the visco-elastic suspension system of construction vehicles. In: International Technology and Innovation Conference 2009 (ITIC 2009). 12–14 October 2009, Xi'an, China. Stevenage: IET; 2010. P. 1–4. DOI: 10.1049/cp.2009.1508.
17. Sahu SK, Datta PK. Dynamic stability of laminated composite curved panels with cutouts. J. Eng. Mech. 2003;129(11):1245–1253. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:11(1245).
18. Ilyushin AA, Pobedrya BE. Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity. Moscow: Nauka; 1970. 280 p. (in Russian).
19. Koltunov ML. Creep and Relaxation. Moscow: Vysshaya Shkola; 1976. 278 p. (in Russian).
20. Cabańska-Placzkiewicz K. Vibrations of a complex system with damping under dynamic loading. Strength of Materials. 2002;34(2):165–180. DOI: 10.1023/A:1015366527597.
21. Mirsaidov MM, Safarov II, Tshaev MK. Dynamics of structurally inhomogeneous lamellar and shell mechanical systems. Part 1. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2019;7(10): 2283–2302. DOI: 10.4236/jamp.2019.710155.
22. Mirsaidov M, Safarov II, Tshaev MK. Dynamics of structural-inhomogeneous laminate and shell mechanical systems with point constraints and focused masses. Part 2. Statement of the problem of forced oscillations, methods of solution, computational algorithm and numerical results. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2019;7(11):2671–2684. DOI: 10.4236/jamp.2019.711182.
23. Mirsaidov M, Safarov I, Tshaev M. Dynamic instability of vibrations of thin-wall composite

curvilinear viscoelastic tubes under the influence of pulse pressure. E3S Web Conf. 2020;164:14013. DOI: 10.1051/e3sconf/202016414013.

24. Teshayev MK, Safarov II, Kuldashov NU, Ishmamatov MR, Ruziev TR. On the distribution of free waves on the surface of a viscoelastic cylindrical cavity. Journal of Vibration Engineering & Technologies. 2020;8(4):579–585. DOI: 10.1007/s42417-019-00160-x.
25. Korenev BG, Reznikov LM. Dynamic Vibration Absorbers: Theory and Technical Applications. New York: Wiley; 1993. 296 p.



Саваров Исмоил Иброхимович — родился в 1954 году в Вахкентском районе Бухарской области (Узбекистан). Окончил Ташкентский государственный университет (1977). Доктор физико-математических наук (1993), профессор (1995). Заведующий кафедрой высшей математики Ташкентского химико-технологического института. Научные интересы: теория вязко-упругости, теория распространения волн, теория колебаний, теория устойчивости.

Узбекистан, 100011 Ташкент, ул. Алишера Навои, 32
Ташкентский химико-технологический институт
E-mail: safarov54@mail.ru
ORCID: 0000-0003-0983-8451



Тешаев Мухсин Худойбердиевич — родился в 1961 году в селе Гончи Каганского района Бухарской области (Узбекистан). Окончил Ташкентский государственный университет по специальности «Механика» (1983). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1993) и доктора физико-математических наук (2019). Работает в Бухарском отделении института Математики имени В. И. Романовского в должности главного научного сотрудника. Область научных интересов: теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела. Автор более 350 статей и 12 монографий.

Узбекистан, Бухара, ул. М. Икбала, 11
Бухарское отделение института Математики имени В. И. Романовского АН РУз
Узбекистан, Бухара, проспект Газли, 32
Бухарский филиал Ташкентского института инженеров ирригации
и механизации сельского хозяйства
E-mail: muhsin_5@mail.ru



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003028
EDN: CFEFMZ

Пороги устойчивости аттракторов сети Хопфилда

И. А. Соловьев^{1,2}, В. В. Клиньшов^{1,2}✉

¹Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

²Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия
E-mail: solocool46@gmail.com, ✉vladimir.klinshov@ipfran.ru

Поступила в редакцию 24.11.2022, принята к публикации 26.12.2022,
опубликована онлайн 18.01.2023, опубликована 31.01.2023

Аннотация. Цель работы заключается в детальном изучении аттракторов сети Хопфилда и бассейнов их притяжения в зависимости от параметров системы — размера сети и числа запомненных образов. Для характеристики бассейнов притяжения аттракторов использовался метод вычисления порога устойчивости — минимального расстояния от аттрактора до границы его бассейна притяжения. Для полезных аттракторов данная величина соответствует минимальному искажению запомненного образа, после которого система не в состоянии его распознать. В результате исследования показано, что зависимость среднего порога устойчивости полезных аттракторов от числа запомненных образов может быть немонотонной, за счет чего устойчивость сети может возрастать при запоминании новых образов. Анализ порогов устойчивости позволил оценить максимальное число образов, которые может хранить сеть без фатальных ошибок в их распознавании. При этом порог устойчивости полезных аттракторов оказывается близким к минимально возможному, то есть к единице. В *Заключении* работы сделан вывод о том, что вычисление порогов устойчивости дает важную информацию о бассейнах притяжения аттракторов сети.

Ключевые слова: динамические сети, коллективная динамика, ассоциативная память.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 20-52-12021.

Для цитирования: Соловьев И. А., Клиньшов В. В. Пороги устойчивости аттракторов сети Хопфилда // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 75–85. DOI: 10.18500/0869-6632-003028. EDN: CFEFMZ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Stability thresholds of attractors of the Hopfield network

I. A. Soloviev^{1,2}, V. V. Klinshov^{1,2}✉

¹Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

²National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: solocool46@gmail.com, ✉vladimir.klinshov@ipfran.ru

Received 24.11.2022, accepted 26.12.2022, available online 18.01.2023, published 31.01.2023

Abstract. Purpose of the work is the detailed study of the attractors of the Hopfield network and their basins of attraction depending on the parameters of the system, the size of the network and the number of stored images. To characterize the basins of attraction we used the *method* of the so-called stability threshold, i.e., the minimum distance from an attractor to the boundary of its basin of attraction. For useful attractors, this value corresponds to the minimum distortion of the stored image, after which the system is unable to recognize it. In the *result* of the study it is shown that the dependence of the average stability threshold of useful attractors on the number of stored images can be nonmonotonic, due to which the stability of the network can improve when new images are memorized. An analysis of the stability thresholds allowed to estimate the maximum number of images that the network can store without fatal errors in their recognition. In this case, the stability threshold of useful attractors turns out to be close to the minimum possible value, that is, to unity. To *conclude*, calculation of the stability thresholds provides important information about the attraction basins of the network attractors.

Keywords: dynamical networks, collective dynamics, associative memory.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No 20-52-12021.

For citation: Soloviev IA, Klinshov VV. Stability thresholds of attractors of the Hopfield network. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1):75–85. DOI: 10.18500/0869-6632-003028

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Сеть Хопфилда [1] является классической моделью ассоциативной памяти или памяти с адресацией по содержимому. Функция памяти в этой сети реализуется за счет ее коллективной динамики, которая обеспечивает восстановление сохраненной в ней информации по предоставленному фрагменту. Для этого связи в сети выбираются по определенному правилу, что обеспечивает формирование в ее фазовом пространстве аттракторов, соответствующих сохраненным в ней данным.

Предложенная более сорока лет назад модель Хопфилда по сей день привлекает пристальное внимание исследователей в области нейронауки и информационных систем. Рассматривались варианты сети как в классическом дискретном, так и в непрерывном исполнении [2]. Были предложены реализации сети Хопфилда в виде физических систем, например оптических систем [3] или цепей фазовой автоподстройки частоты [4]. Было показано, что помимо ассоциативной памяти, сеть Хопфилда может решать ряд других задач, например оптимизации [5] и линейного программирования [6]. Большое внимание при исследовании сетей Хопфилда уделялось исследованию емкости памяти, то есть максимального количества данных, которое система способна запомнить без существенного ухудшения производительности [7, 8]. Последние годы ознаменовались появлением так называемых новых сетей Хопфилда (modern Hopfield networks, [9]) или сетей плотной ассоциативной памяти (dense associative memories, [10]), в которых использование более сильной нелинейности приводит к существенному росту емкости памяти.

С точки зрения нелинейной динамики емкость памяти системы равна максимальному числу кодирующих данные аттракторов, которые могут быть созданы в фазовом пространстве одновременно. Однако оказывается, что помимо таких «полезных» аттракторов могут возникать и другие, «паразитные» аттракторы, не соответствующие никаким сохраненным данным. Важной характеристикой как полезных, так и паразитных аттракторов является их бассейн притяжения — множество всех начальных состояний сети, из которых она эволюционирует к данному аттрактору.

В контексте ассоциативной памяти бассейн притяжения аттрактора представляет собой совокупность различных начальных данных, которые сеть распознает как соответствующий образ из ее памяти. В многомерном фазовом пространстве сети бассейны притяжения ее аттракторов могут представлять собой чрезвычайно сложные множества, и их определение и описание является весьма нетривиальной задачей.

Настоящая работа посвящена исследованию как полезных, так и паразитных аттракторов сети Хопфилда и их бассейнов притяжения. Мы показываем, что при сохранении в сети достаточно большого числа образов в ней также появляются многочисленные паразитные аттракторы, которые располагаются в областях фазового пространства, удаленных от полезных аттракторов. Для характеристики бассейнов притяжения аттракторов мы используем численную меру — порог устойчивости, равный минимальному расстоянию от аттрактора до границы его бассейна [11]. Мы показываем, что использование данной характеристики позволяет получить новую важную информацию о структуре и свойствах бассейнов притяжения.

1. Модель сети

В настоящей работе мы рассматриваем дискретный вариант сети Хопфилда, в которой каждый элемент (нейрон) описывается переменной состояния V_i , принимающей значение 0 или 1. Вектор $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_N)$, определяющий состояние сети, будем также иногда называть «образом». Динамика сети разворачивается в дискретном времени, и на каждом временном шаге состояние всех нейронов одновременно или последовательно изменяется по следующему правилу:

$$V_i \rightarrow 0, \text{ если } \sum_{j=1}^N T_{ij}V_j < U, \quad (1a)$$

$$V_i \rightarrow 1, \text{ если } \sum_{j=1}^N T_{ij}V_j > U. \quad (1b)$$

Здесь N — размер сети, T_{ij} — коэффициенты связи между нейронами. Матрица связи при этом выбирается в следующем виде. Пусть заданы S образов $\mathbf{V}^1, \dots, \mathbf{V}^S$, тогда

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^S (2V_i^k - 1) (2V_j^k - 1). \quad (2)$$

Можно показать [1], что при такой матрице связи каждый из образов \mathbf{V}^k становится аттрактором сети, то есть образы «записываются» в ее память. Теперь при выборе начальных условий вблизи некоторого из записанных образов система перейдет к нему, то есть осуществит восстановление запомненного образа. В дальнейшем мы также будем называть образы \mathbf{V}^k «полезными» аттракторами системы.

2. Паразитные аттракторы

Оказывается однако, что наряду с полезными аттракторами в сети могут возникать и «паразитные», не соответствующие ни одному из запомненных образов. Выбор начального состояния сети вблизи паразитного аттрактора приводит к неспособности сети распознать предъявленный ей образ. Таким образом, наличие паразитных аттракторов оказывает существенное влияние на функционирование сети, поэтому вопрос об их наличии и количестве является важным. Кроме того, важно понять, являются ли паразитные аттракторы слегка искаженными версиями полезных или представляют собой совершенно отличные, непохожие на них образы.

Для исследования количества и расположения паразитных аттракторов было проведено масштабное численное моделирование в зависимости от размера N и числа запомненных образов S . Для каждого набора параметров рассматривалось 360 различных реализаций сети, в каждой из которой запоминались S случайных образов. Для каждой реализации сети выбиралось 100 начальных условий и моделировалась динамика сети до ее прихода к аттрактору, в результате чего составлялся список уникальных паразитных аттракторов. Важно отметить, что для любого аттрактора сети инвертированный образ также является аттрактором, что легко показать на основе правила (1). Поэтому аттракторы, являющиеся инвертированными запомненными образами, мы не считали паразитными. Также два паразитных аттрактора, являющиеся инвертированными версиями друг друга, считались за один.

На рис. 1 и 2 приведены результаты исследования, усредненные по всем реализациям сети. На рис. 1, a представлена зависимость количества уникальных паразитных аттракторов от размера сети N , а на рис. 1, b — от числа сохраненных образов S . Зависимость числа паразитных аттракторов от размера сети является монотонно возрастающей и носит насыщающийся характер. Гораздо более интересна зависимость числа паразитных аттракторов от числа запомненных образов S . Эта зависимость является немонотонной с максимумом при $S = 7-8$, причем это значение практически не меняется при варьировании N в широких пределах от 20 до 600.

На рис. 2 приведены данные о среднем расстоянии от паразитного аттрактора до ближайшего полезного аттрактора, а также до ближайшего другого паразитного аттрактора. При этом расстояние между двумя образами рассчитывалось как расстояние Хэмминга, то есть определялось число несовпадающих элементов:

$$L(\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2) = \sum_{i=1}^N |V_i^1 - V_i^2|. \quad (3)$$

Так, рассчитанное расстояние связано с коэффициентом корреляции ρ между двумя образами как $L = N(1 - \rho)/2$. Заметим, что на графиках расстояние нормировалось на размер сети N . Видно, что зависимость среднего расстояния от паразитных аттракторов до другого ближайшего аттрактора близка к линейной, особенно при больших N . Таким образом, паразитные аттракторы

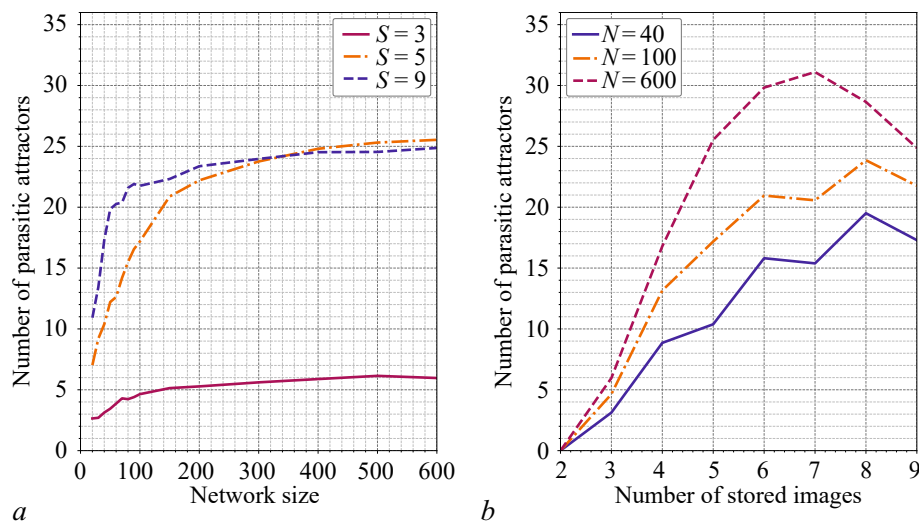


Рис. 1. Среднее количество паразитных аттракторов в сети Хопфилда в зависимости от ее размера (a) и от числа запомненных образов (b)

Fig. 1. Average number of parasitic attractors in the hopfield network depending on the network size (a) and the number of stored images (b)

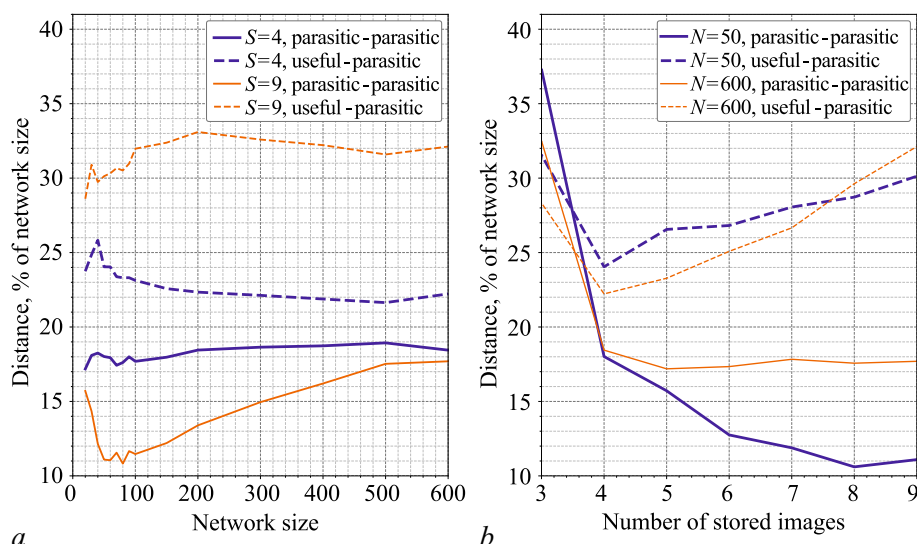


Рис. 2. Среднее расстояние от паразитных аттракторов до ближайшего полезного и ближайшего паразитного аттрактора в зависимости от размера сети (а) и от числа запомненных образов (б) (цвет онлайн)

Fig. 2. Average distance between parasitic attractors and the nearest useful attractor, average distance between parasitic attractors and the nearest parasitic attractor depending on the network size (a) and the number of stored images (b) (color online)

существенно отличаются от полезных и друг от друга. Однако следует заметить, что для паразитных аттракторов характерна значительная корреляция с некоторым из запомненных образов, так как расстояние до ближайшего из них всегда существенно меньше чем $N/2$.

Интересна зависимость от числа запомненных образов, которая существенно различна для расстояния до ближайшего паразитного и ближайшего полезного аттрактора. В первом случае зависимость является монотонно убывающей, а во втором демонстрирует минимум при $S = 4$, причем это значение практически одинаково для всех N в пределах от 20 и до 600.

3. Бассейны притяжения и их характеристики

Важной характеристикой аттрактора является его бассейн притяжения — множество начальных состояний сети, которые за счет ее динамики сходятся к данному аттрактору. В контексте ассоциативной памяти бассейн притяжения полезного аттрактора представляет собой множество образов, распознаваемых системой. Бассейны притяжения паразитных аттракторов, в свою очередь, определяют множество образов, предъявление которых системе приводит к сбою в ее работе. Для хорошей работоспособности системы памяти бассейны притяжения полезных аттракторов должны быть в некотором смысле большими, а бассейны паразитных аттракторов — маленькими. Для формализации этого интуитивного соображения необходимо ввести некоторые способы количественной оценки бассейнов притяжения.

В многомерном фазовом пространстве бассейны притяжения аттракторов представляют собой чрезвычайно сложные множества, и их описание является нетривиальной задачей. Было предложено несколько различных численных мер для характеристики размеров бассейнов сложных динамических систем. Например, бассейновая устойчивость [12] характеризует объем бассейна в фазовом пространстве. Порог устойчивости [11] представляет собой кратчайшее расстояние от аттрактора до границы его бассейна притяжения. Для системы ассоциативной памяти порог устойчивости полезных аттракторов представляется наиболее информативной характеристикой, так как он задает максимальную степень искажения образа, который гарантированно

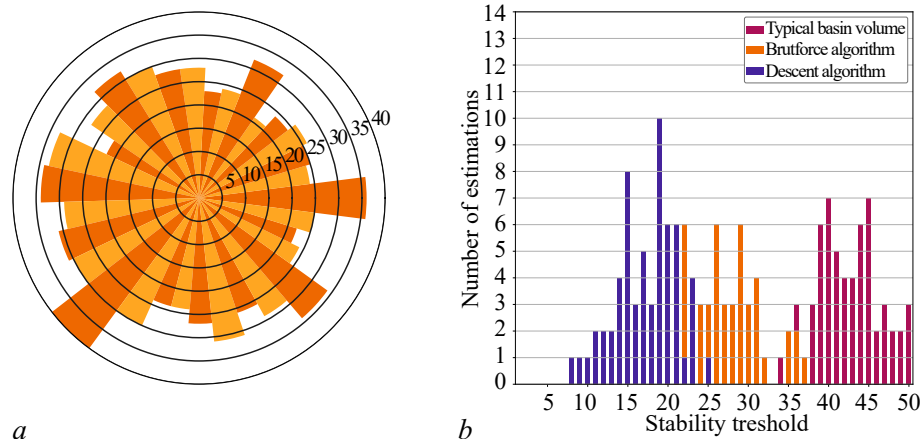


Рис. 3. *a* — Результаты определения порога устойчивости одного аттрактора при запуске алгоритма с различных случайных условий. *b* — Результаты определения порогов устойчивости различных аттракторов методом спуска и методом «грубой силы» в сравнении с характерными размерами бассейнов (цвет онлайн)

Fig. 3. *a* — Stability threshold estimations of one attractor for several runs of the algorithm with different initial conditions. *b* — Distributions of stability threshold estimation for descent and brutforce algorithms compared to the typical basin volume (color online)

будет распознан сеть. При этом возмущение, соответствующее порогу устойчивости, является минимальным искажением образа, которое приводит к сбою работы системы. Нахождение такого возмущения позволяет определить «слабое место» системы, уязвимое для возможных атак [13].

Для определения порога устойчивости сети Хопфилда мы использовали вариант градиентного спуска, предложенного в [11], модифицированный для дискретных систем. Алгоритм стартует со случайного образа U , находящегося вне бассейна притяжения интересующего нас аттрактора V , и пытается приблизиться к аттрактору, делая шаги в его направлении. Шаг делается следующим образом: из множества элементов образа U , отличающихся от соответствующих элементов вектора V , случайным образом выбирается один элемент, и его значение инвертируется, что приводит к уменьшению расстояния между U и V . В случае попадания образа U в бассейн притяжения аттрактора V сделанный шаг отвергается, в противоположном случае он принимается. Описанные шаги повторяются до тех пор, пока не возникает ситуация, при которой никакой шаг не возможен. В этом случае образ U находится на границе бассейна притяжения аттрактора V , причем достигнут локальный минимум расстояния между аттрактором и границей его бассейна притяжения. Стартуя с различных начальных образов U , алгоритм находит множество локальных минимумов, и минимальный из них принимается в качестве оценки порога устойчивости.

Рис. 3 иллюстрирует типичные результаты поиска порога устойчивости одного из аттракторов сети. Алгоритм стартовал 100 раз с различных случайных образов, и круговая диаграмма на рис. 3, *a* отображает расстояния до найденных локальных минимумов. Отметим несколько важных моментов. Во-первых, локальных минимумов оказывается очень много: практически каждый раз алгоритм находит новый минимум. Во-вторых, расстояние от аттрактора до найденных минимумов существенно меньше характерного размера бассейна аттрактора*, которое также отмечено на рисунке. Указанные особенности говорят о чрезвычайно сложной, изрезанной форме бассейна притяжения, для которого характерно наличие множества глубоких и узких «впадин» (ср. [14]). Определение порога устойчивости для бассейна такой формы чрезвычайно важно, так как позволяет определить очень специфические слабые возмущения, приводящие в ошибкам в работе системы.

*Характерный размер бассейна аттрактора рассчитывался как радиус гипершара с объемом, равным объему данного бассейна.

Также полученные результаты свидетельствуют об эффективности нашего алгоритма для получения оценки порога устойчивости. На рис. 3, *b* приведено распределение порогов устойчивости, полученных с помощью предложенного алгоритма спуска для аттракторов 60 различных сетей с одинаковыми параметрами. Для сравнения на том же рисунке представлены оценки, полученные с помощью метода «грубой силы», то есть путем случайного перебора различных начальных условий и проверки их принадлежности бассейну. Параметры обоих алгоритмов выбирались таким образом, чтобы обеспечить одинаковое вычислительное время. При этом алгоритм спуска дает существенно лучшие результаты.

4. Исследование порогов устойчивости системы

С помощью предложенного алгоритма было проведено систематическое исследование бассейнов притяжения как полезных, так и паразитных аттракторов сети Хопфилда в зависимости от размера сети N и числа запомненных образов S . Для каждого набора параметров N и S рассматривалось 120 различных реализаций сети, в каждой из которых запоминаемые образы выбирались случайно. Для каждой реализации сначала находились все паразитные аттракторы, как это описано выше, а затем определялись пороги устойчивости полезных и паразитных аттракторов. Полученные результаты усреднялись по всем аттракторам и по всем реализациям сети.

Результаты исследования представлены на рис. 4, *a, b*, на которых показана зависимость порогов устойчивости от размера сети и числа запомненных образов. Заметим, что на графиках порог нормируется на размер сети N . Зависимость нормированного порога устойчивости от размера сети насыщается при больших N как для полезных, так и для паразитных аттракторов. Таким образом, аттракторы в больших сетях $N \gg S$ характеризуются достаточно сильной устойчивостью: для вывода системы из их бассейна притяжения необходимо приложить возмущение размером порядка 0.15–0.25, то есть изменить состояние 15–25% элементов.

Большой интерес представляет зависимость порогов устойчивости от числа запомненных в сети образов. Остановимся сначала на порогах устойчивости полезных аттракторов.

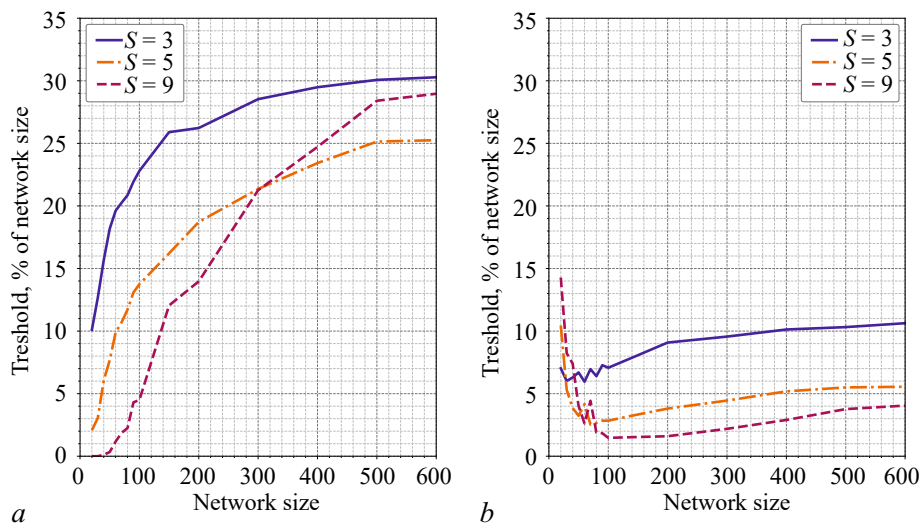


Рис. 4. Зависимость среднего порога устойчивости от размера сети N при различном числе запомненных образов S , указанном на рисунке, для полезных аттракторов (*a*) и паразитных аттракторов (*b*)

Fig. 4. Average stability threshold depending on the network size N with different numbers of stored images S for useful (*a*) and parasitic (*b*) attractors

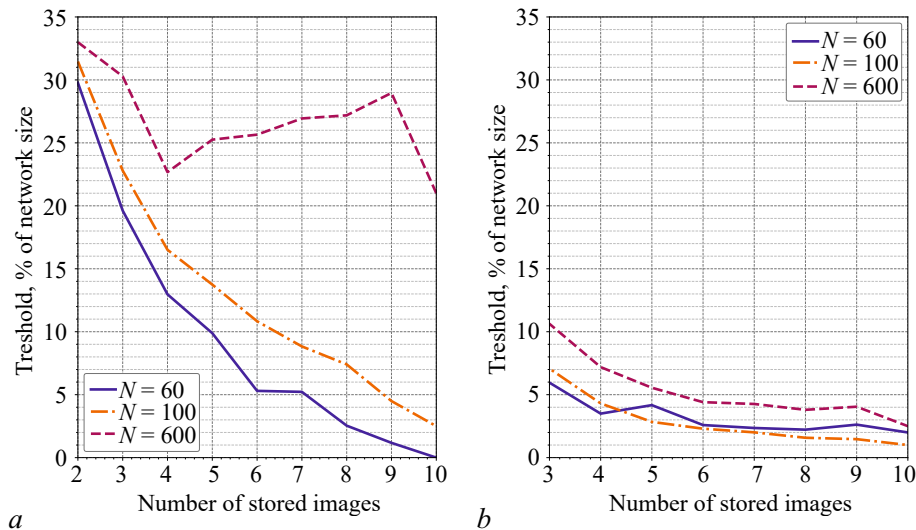


Рис. 5. Зависимость среднего порога устойчивости от числа запомненных образов S при различном размере сети N , указанном на рисунке, для полезных аттракторов (a) и паразитных аттракторов (b)

Fig. 5. Average stability threshold depending on the number of stored images S with different network sizes N for useful (a) and parasitic (b) attractors

Из рис. 5, a видно, что зависимость различна для малых ($N \leq 100$) и больших ($N > 100$) сетей. Если для малых сетей порог устойчивости монотонно убывает с ростом числа запомненных образов, то для больших сетей эта зависимость носит немонотонный характер: порог устойчивости сначала убывает, достигает локального минимума (при $S = 4$ для $N = 600$), затем возрастает, и снова начинает убывать при достаточно больших S . Наличие возрастающего участка на данной зависимости противоречит интуиции, так как при добавлении в систему новых аттракторов средний размер их бассейнов притяжения уменьшается, и естественно ожидать также уменьшения порогов устойчивости. Однако оказывается, что форма бассейнов «сглаживается», и наиболее глубокие «впадины» становятся мельче, что приводит к увеличению порога устойчивости. Данное наблюдение приводит к неожиданным рекомендациям по увеличению устойчивости системы к внешним атакам: иногда для этого достаточно добавить в систему новые образы, что приведет к увеличению порогов устойчивости.

Заметим однако, что аномальная возрастающая зависимость порога устойчивости от числа запомненных образов может наблюдаться только при небольшом (по сравнению с N) числе образов. Дальнейший рост S всегда приводит к уменьшению порога устойчивости. Для паразитных аттракторов порог устойчивости также уменьшается с ростом S , как показано на 5, b. Однако при больших S порог устойчивости паразитных аттракторов уменьшается медленнее, чем порог устойчивости полезных аттракторов, и при определенном числе запомненных образов их значения становятся равными, как показано на рис. 6. Число образов, при котором достигается такое равенство, является важной характеристикой системы, определяющей предельное число образов, которые система может запомнить и корректно распознать. При попытке запомнить большее число образов порог устойчивости полезных аттракторов быстро падает до нуля, что означает потерю ими устойчивости и отказ системы.

Определим критическое число образов S^* как число образов, при запоминании которого в системе средний порог устойчивости полезных аттракторов равен среднему порогу устойчивости паразитных аттракторов. На рис. 7, a представлена зависимость критического числа образов от размера системы, и эта зависимость близка к линейной. Интересно, что таким образом определенное критическое число образов близко к оценке максимально допустимого числа образов

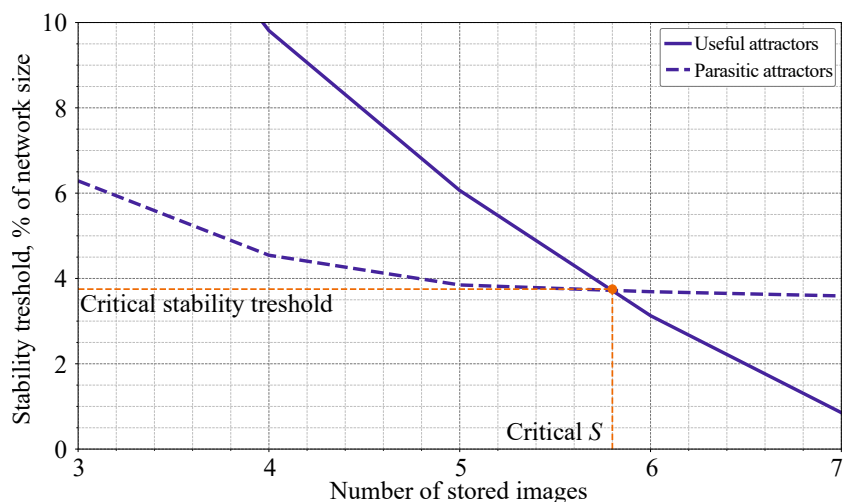


Рис. 6. Зависимость среднего порога устойчивости полезных и паразитных аттракторов от числа запомненных образов S при $N = 40$. Точке пересечения графиков соответствуют критическое число образов и критический порог

Fig. 6. Average stability threshold depending on the number of stored images S with network size $N = 40$ for useful and parasitic attractors. The point of intersection determines the critical number of stored images and the critical stability threshold

$S \approx 0.1N$, данной в оригинальной работе [1]. Таким образом, сравнение порогов устойчивости полезных и паразитных аттракторов позволяет получить независимую оценку емкости памяти сети Хопфилда, которая хорошо согласуется с традиционной. Интересно при этом проанализировать величину порога устойчивости при критическом числе образов. Зависимость этого критического порога от размера сети представлена на рис. 7, b , причем следует заметить, что в отличие от остальных графиков здесь представлена абсолютная величина порога, не нормированная на размер сети. Из графика видно, что критический порог устойчивости в абсолютном выражении близок к единице, то есть возмущение всего лишь одного элемента запомненного образа приводит к невозможности его распознавания, то есть сбою системы.

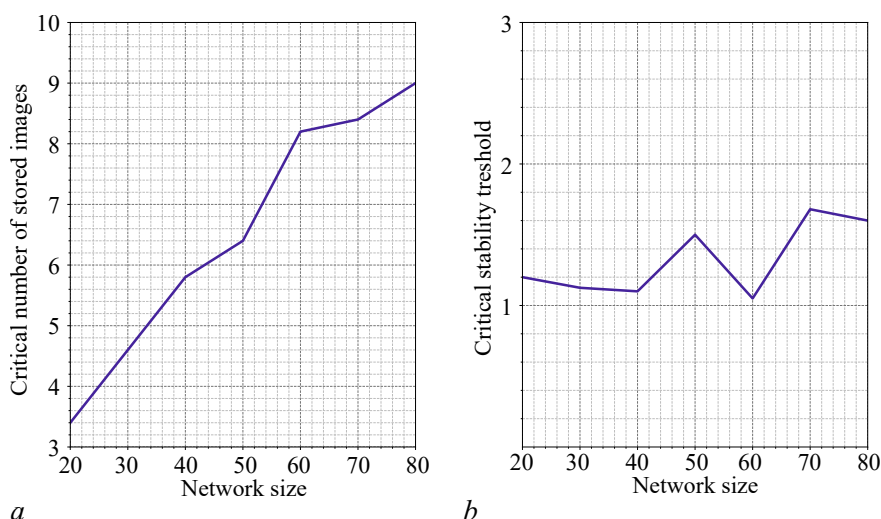


Рис. 7. Зависимость от размера сети критического числа образов (a) и критического порога устойчивости (b)

Fig. 7. Critical number of stored images (a) and critical stability threshold (b) depending on the network size

Заключение

В настоящей работе были исследованы аттракторы сети Хопфилда и их бассейны притяжения. Показано, что при записи в сеть более двух образов, помимо полезных аттракторов, соответствующих этим образам, в системе возникают также и паразитные аттракторы, не соответствующие и не близкие ни к каким из записанных образов. Число паразитных аттракторов демонстрирует насыщающуюся зависимость от размера сети и немонотонную зависимость с выраженным максимумом от числа запомненных образов. Паразитные аттракторы располагаются достаточно далеко от полезных аттракторов и друг от друга.

Для изучения бассейнов притяжения аттракторов был использован метод на основе порога устойчивости, предложенный в работе [11]. Данный метод позволяет найти минимальные по амплитуде возмущения аттрактора, приводящие к выходу из его бассейна притяжения. В контексте ассоциативной памяти, реализуемой в сети Хопфилда, порог устойчивости соответствует минимальному искажению образа, приводящему к его неправильному распознаванию. Определение таких возмущений важно с точки зрения уязвимости для возможных атак.

Был предложен алгоритм вычисления порога устойчивости в дискретных системах, и на его основе было проведено детальное исследование бассейнов в сети Хопфилда в зависимости от ее параметров. Показано, что типичный бассейн притяжения аттрактора характеризуется сложной формой, в которой присутствуют многочисленные узкие и глубокие впадины. Были изучены зависимости порогов устойчивости как полезных, так и паразитных аттракторов сети от ее параметров. Наиболее интересной является зависимость среднего порога устойчивости от количества запомненных образов при больших размерах сети N . Данная зависимость демонстрирует выраженный минимум, откуда следует неожиданная возможность увеличения устойчивости сети к внешним атакам путем добавления в ее память дополнительных образов.

На основе исследования предложен новый критерий определения максимального числа образов, которое способна хранить система без существенного ухудшения качества их распознавания: это такое число образов, при котором порог устойчивости полезных аттракторов становится равным (в среднем) порогу устойчивости паразитных аттракторов. Показано, что таким способом определенное критическое число образов близко к классической оценке емкости системы $0.1N$, а критический порог близок к единице. Таким образом, метод порогов устойчивости позволил получить новую важную информацию о свойствах сети Хопфилда.

References

1. Hopfield JJ. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 1982;79(8):2554–2558. DOI: 10.1073/pnas.79.8.2554.
2. Hopfield JJ. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 1984;81(10):3088–3092. DOI: 10.1073/pnas.81.10.3088.
3. Farhat NH, Psaltis D, Prata A, Paek E. Optical implementation of the Hopfield model. Applied Optics. 1985;24(10):1469–1475. DOI: 10.1364/AO.24.001469.
4. Hoppensteadt FC, Izhikevich EM. Pattern recognition via synchronization in phase-locked loop neural networks. IEEE Transactions on Neural Networks. 2000;11(3):734–738. DOI: 10.1109/72.846744.
5. Joya G, Atencia MA, Sandoval F. Hopfield neural networks for optimization: study of the different dynamics. Neurocomputing. 2002;43(1–4):219–237. DOI: 10.1016/S0925-2312(01)00337-X.
6. Wen UP, Lan KM, Shih HS. A review of Hopfield neural networks for solving mathematical programming problems. European Journal of Operational Research. 2009;198(3):675–687. DOI: 10.1016/j.ejor.2008.11.002.

7. McEliece R, Posner E, Rodemich E, Venkatesh S. The capacity of the Hopfield associative memory. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1987;33(4):461–482. DOI: 10.1109/TIT.1987.1057328.
8. Storkey A. Increasing the capacity of a hopfield network without sacrificing functionality. In: Gerstner W, Germond A, Hasler M, Nicoud JD. editors. *Artificial Neural Networks — ICANN'97*. ICANN 1997. Vol. 1327 of *Lecture Notes in Computer Science*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1997. P. 451–456. DOI: 10.1007/BFb0020196.
9. Krotov D, Hopfield JJ. Dense associative memory for pattern recognition. In: *NIPS'16: Proceedings of the 30th International Conference on Neural Information Processing Systems*. 5–10 December 2016, Barcelona, Spain. New York: Curran Associates Inc.; 2016. P. 1180–1188. DOI: 10.5555/3157096.3157228.
10. Ramsauer H, Schäfl B, Lehner J, Seidl P, Widrich M, Adler T, Gruber L, Holzleitner M, Pavlović M, Sandve GK, Greiff V, Kreil D, Kopp M, Klambauer G, Brandstetter J, Hochreiter S. Hopfield networks is all you need [Electronic resource]. arXiv:2008.02217. arXiv Preprint; 2020. 94 p. Available from: <https://arxiv.org/abs/2008.02217>.
11. Klinshov VV, Nekorkin VI, Kurths J. Stability threshold approach for complex dynamical systems. *New Journal of Physics*. 2016;18(1):013004. DOI: 10.1088/1367-2630/18/1/013004.
12. Menck PJ, Heitzig J, Marwan N, Kurths J. How basin stability complements the linear-stability paradigm. *Nature Physics*. 2013;9(2):89–92. DOI: 10.1038/nphys2516.
13. Chakraborty A, Alam M, Dey V, Chattopadhyay A, Mukhopadhyay D. Adversarial attacks and defences: A survey [Electronic resource]. arXiv:1810.00069. arXiv Preprint; 2018. 31 p. Available from: <https://arxiv.org/abs/1810.00069>.
14. Amari SI, Maginu K. Statistical neurodynamics of associative memory. *Neural Networks*. 1988;1(1):63–73. DOI: 10.1016/0893-6080(88)90022-6.



Соловьев Игорь Александрович — родился в Нижнем Новгороде (2000). Окончил бакалавриат радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2022). С 2021 года работает в Институте прикладной физики РАН. Область научных интересов — нелинейная динамика, динамика нейронных сетей.

Россия, Нижний Новгород 603950, ул. Ульянова, 46
 Институт прикладной физики РАН
 Россия, 603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: solocool46@gmail.com



Клиньшов Владимир Викторович — родился в Нижнем Новгороде (1984). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2006). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2009, ИПФ РАН). С 2003 года работает в Институте прикладной физики РАН, в настоящее время — в должности старшего научного сотрудника. Область научных интересов — нелинейная динамика, динамические сети, синхронизация, системы с запаздыванием. Имеет более 60 научных публикаций по указанным направлениям. В 2017 году награжден медалью Российской академии наук с премией для молодых ученых РАН.

Россия, Нижний Новгород 603950, ул. Ульянова, 46
 Институт прикладной физики РАН
 Россия, 603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: vladimir.klinshov@ipfran.ru
 ORCID: 0000-0003-4733-1352
 AuthorID (eLibrary.Ru): 247610




Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1)

Научная статья
УДК 001.57; 004.81; 51.76

DOI: 10.18500/0869-6632-003022
EDN: AKKIBM

Емкость рабочей памяти: роль параметров импульсной нейронной сети

Н. С. Ковалева , В. В. Матросов, М. А. Мищенко

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия
E-mail: natazh29@yandex.ru, matrosov@rf.unn.ru, mischenko@neuro.nnov.ru

Поступила в редакцию 31.08.2022, принята к публикации 25.10.2022,
опубликована онлайн 19.01.2023, опубликована 31.01.2023

Аннотация. Цель работы — исследование формирования рабочей памяти на основе вычислительной модели импульсной нейронной сети с пластичными связями и изучение емкости рабочей памяти в зависимости от временных масштабов синаптической фасилитации и депрессии, а также фонового возбуждения сети. **Методы.** Модель имитирует формирование рабочей памяти в рамках синаптической теории: запоминаемые элементы сохраняются в виде кратковременных потенцированных связей в выборочной популяции, а не в виде постоянной активности. В качестве элементов сети используются нейроны — пороговые интеграторы, находящиеся в возбудимом режиме. Связи между элементами сети описываются моделью кратковременной пластичности. **Результаты.** Показано, что значение емкости рабочей памяти рассматриваемой сети увеличивается в среднем при увеличении параметра времени восстановления уровня кальция в синаптическом окончании или при уменьшении параметра времени восстановления нейротрансмиттеров. Увеличение фонового шумового воздействия за счет увеличения параметров среднего значения и дисперсии приводит к увеличению емкости в среднем, при этом зависимость значения емкости от синаптических времен пластичности сохраняется. **Заключение.** Подробно исследовано влияние времен синаптической пластичности и фонового возбуждения нейронной сети на объем рабочей памяти. Емкость рабочей памяти сильно зависит от внутренних параметров нейронных сетей и, как показано, может быть больше, чем классические экспериментальные оценки четырех элементов.

Ключевые слова: рабочая память, емкость памяти, импульсная нейронная сеть, отсроченная активность, кратковременная синаптическая пластичность.

Благодарности. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 0729-2020-0040) и РФФИ (проект № 20-32-90157).

Для цитирования: Ковалева Н. С., Матросов В. В., Мищенко М. А. Емкость рабочей памяти: роль параметров импульсной нейронной сети // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 86–102. DOI: 10.18500/0869-6632-003022. EDN: AKKIBM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Working memory capacity: the role of parameters of spiking neural network model

N. S. Kovaleva[✉], V. V. Matrosov, M. A. Mishchenko

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉natazh29@yandex.ru, matrosov@rf.unn.ru, mischenko@neuro.nnov.ru

Received 31.08.2022, accepted 25.10.2022, available online 19.01.2023, published 31.01.2023

Abstract. Purpose of this work is to study a computational model of working memory formation based on spiking neural network with plastic connections and to study the capacity of working memory depending on the time scales of synaptic facilitation and depression and the background excitation of the network. *Methods.* The model imitates working memory formation within synaptic theory: memorized items are stored in form of short-term potentiated connections in selective population but not in form of persistent activity. Integrate-And-Fire neuron model in excitable mode are used as network elements. Connections between excitatory neurons demonstrates the effect of short-term plasticity. *Results.* It is shown that the working memory capacity increases as calcium recovery time parameter grow up or the capacity increases with neurotransmitter recovery time parameter becomes lower. Working memory capacity is found to decrease to zero with decrease of the background excitation as a result of lower values of both the mean and the variance of the external noise. *Conclusion.* Working memory capacity was studied as a function of time scales of synaptic facilitation and depression and background excitation of the network. Estimated working memory capacity is shown to be possibly larger than classical experimental estimations of four items. But capacity strongly depends on intrinsic parameters of neural networks.

Keywords: working memory, memory capacity, spiking neural network, delayed activity, short-term synaptic plasticity.

Acknowledgements. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 0729-2020-0040) and by RFBR (project No. 20-32-90157).

For citation: Kovaleva NS, Matrosov VV, Mishchenko MA. Working memory capacity: the role of parameters of spiking neural network model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(1):86–102. DOI: 10.18500/0869-6632-003022

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Рабочая память (РП) — это система кратковременного хранения и обработки информации [1–3]. РП способна обрабатывать информацию в масштабах времени от нескольких секунд до минут и играет важную роль в рассуждениях, мысленном планировании и, например, расчетах «в уме» [4]. РП стоит на перекрестке между памятью, вниманием и восприятием [1, 5].

Простой пример задачи РП — запоминание последовательности слов, произнесенных собеседником в диалоге. Рабочая память также важна для выполнения и удержания в памяти цепочки новой информации или серии движений [6]. В зрительно-пространственной рабочей памяти испытуемый на короткое время удерживает, например, местоположение, цвет или ориентацию предъявляемых зрительных стимулов [7, 8]. В экспериментах с рабочей памятью оценивается точность воспоминаний. Как правило, в таких экспериментах испытуемым на короткое время предъявляются сенсорные данные, которые затем удаляются. Через некоторое время, называемое периодом задержки, испытуемых просят оценить по памяти какую-либо характеристику входных данных.

Предполагается, что нейронные цепи префронтальной коры (ПФК) головного мозга ответственны за реализацию РП [9, 10]. У приматов визуальная РП изучалась в задачах с отложенным ответом, которые требуют хранить в памяти образы в течение короткого периода времени, длящегося несколько секунд [11]. Записи в префронтальной коре обезьян в задачах с отложенным ответом показали, что некоторые нейроны проявляли постоянную и стимульно-специфическую активность во время периода задержки [12–15]. Такая активность считается нейронным коррелятом РП [10, 16]. Это означает, что информация в РП представлена самоподдер-

живающимися состояниями активности. Активность в течение периода задержки в специфичных нейронных ансамблях отражает сохранение запомненного образа «онлайн».

Нейронные механизмы РП остаются неясными и дискуссионными. Электрофизиологические записи нейронной активности во время задач РП демонстрируют, что некоторые нейроны префронтальной коры остаются активными в течение периода задержки. Предполагается, что эта «постоянная активность» является нейронным коррелятом удержания запомненного стимула в РП [17–19]. Эта концепция стала классической и имеет свои экспериментальные доказательства и математические модели [20–23].

Однако важно отметить, что постоянная спайковая (импульсная) активность, наблюдаемая в экспериментах, может быть результатом классического подхода к усреднению данных во времени и между испытаниями. В этом случае постоянная активность является артефактом этого усреднения, даже несмотря на то, что в режиме реального времени, например, в одиночных испытаниях, зарегистрированная активность нейронных ансамблей является разреженной [24].

Другие исследования, однако, находят свидетельства существования другого механизма хранения информации в РП [24, 25]. Некоторые исследователи предполагают, что информация в РП может быть представлена в виде сложных последовательностей различных паттернов активности, так называемых переходных траекторий [26–29]. В задачах РП были зарегистрированы короткие, редкие всплески активности сети, называемые популяционными разрядами или берстами, а не постоянная активность. Информация о запомненных образах сохраняется между берстами за счет изменений весов связей, вызванных активностью сети [30, 31]. В работе [32] показано, что спайки в префронтальной коре могут вызвать быстрое усиление связей, которое длится сотни миллисекунд. Поскольку время, в течение которого стимульно-специфическая нейронная популяция находится в активном состоянии, сведено к минимуму, элементы РП менее подвержены нарушениям, например, из-за нового сенсорного ввода, применяемого к другой нейронной популяции. Несколько элементов могут одновременно храниться в РП в виде не активной, но усиленной нейронной популяции. Кратковременные разделенные во времени реактивации нейронных популяций обновляют усиление связей внутри популяций и позволяют дольше удерживать элементы в памяти [24].

Другой интересный динамический механизм образования РП предложен в работе [33]. Обнаружено, что астроциты, работающие во временном масштабе в десятки секунд, могут успешно сохранять следы активации нейронов, соответствующие информационным паттернам. На этапе извлечения астроцитарная сеть избирательно модулирует синаптические связи в нейронных сетях, что приводит к успешному воспроизведению хранящегося в РП образа.

Неясно, какие динамические механизмы на самом деле лежат в основе нейронной реализации РП, поскольку как гипотеза постоянной активности, так и гипотеза переходной динамики имеют экспериментальное подтверждение [8]. Этот факт оставляет нейронные механизмы РП открытым вопросом.

Объем рабочей памяти сильно ограничен, как мы видим из повседневного опыта, и ограничивается всего несколькими элементами [34], а точность извлечения из памяти ухудшается, когда набор элементов, подлежащих запоминанию, слишком велик [35]. Часто предполагается, что мозг обладает специальным буфером, называемым «фокусом внимания», где элементы памяти могут временно храниться в течение коротких периодов времени, и емкость РП соответствует размеру этого буфера [36–38].

Емкость РП в мозге нелегко определить экспериментально, потому что информация сохраняется несколькими механизмами. Эксперименты должны быть тщательно спланированы, чтобы предотвратить или контролировать стратегии обработки (например, молчаливое повторение элементов, которые необходимо запомнить, или объединение нескольких элементов в один элемент памяти по любому мнемоническому правилу) [1, 36, 39]. Другим способом определения

емкости РП в психологическом эксперименте являются непрерывные процедуры, когда испытуемый не знает, когда закончится предъявляемый набор, и должен вспомнить как можно больше объектов из конца списка [40]. Экспериментальная оценка пропускной способности РП до сих пор остается проблемой [41].

В математическом моделировании также широко обсуждается определение емкости РП. Максимальная емкость модели РП с постоянной активностью зависит от характеристик сети, но, по-видимому, не имеет фундаментального верхнего предела [22]. В работе [21] предположено, что емкость РП оценивается как отношение гамма- и тета-частот, что согласуется с более ранними психофизическими оценками [34]. В рамках синаптической теории РП, предложенной в [30], емкость РП анализировалась с точки зрения основных синаптических параметров сети [42].

В данной статье мы развиваем результаты более ранних исследований в рамках синаптической теории РП [30] и представляем результаты исследования емкости РП в спайковой нейронной сети в зависимости от синаптической пластичности и параметров фонового возбуждения. Проведен скрупулезный вычислительный анализ динамики импульсной нейронной сети и влияния параметров на ее динамические режимы.

1. Материалы и методы

В работе [30] предположено, что запоминаемый образ сохраняется в РП за счет кратковременного усиления связей между нейронами, кодирующими этот образ. Информация о запомненных объектах удерживается в РП путем изменения синаптических весов, «отпечатков», оставшихся в сети после предъявления стимула. Поскольку утечка остаточного кальция, способствующая синаптической передаче, является относительно медленным процессом, образ может сохраняться в памяти около одной секунды без постоянной импульсной активности. В то время как связи между нейронами остаются усиленными, даже слабый стимул или шум могут повторно активировать кодирующие нейроны и извлечь запомненный образ.

Большинство моделей формирования РП, как модели с постоянной активностью, так и модели с переходной динамикой, используют рекуррентную сетевую архитектуру. В синаптической теории РП рекуррентная нейронная сеть состоит из возбуждающих и тормозных нейронов, связанных случайным образом. Низкая вероятность соединений (около 20%) позволяет формировать разреженно связанные сети. Некоторые возбуждающие нейроны случайным образом сгруппированы в подсети, называемые кластерами, селективными к определенному стимулу (рис. 1). Связи между нейронами в одном кластере сильнее, чем связи между разными кластерами,

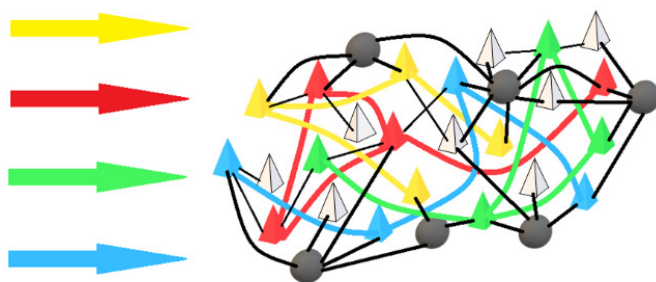


Рис. 1. Сетевая архитектура: цветные треугольники — возбуждающие нейроны, кодирующие разные воспоминания. Светлые треугольники — неселективные возбуждающие нейроны. Черные кружки — тормозные нейроны с неструктурированными связями со всей сетью (цвет онлайн)

Fig. 1. Network architecture: Colored triangles are excitatory neurons that code for different memories. Light triangles are nonselective excitatory neurons. Black circles are inhibitory neurons with nonstructured connections to the entire network (color online)

имитируя предварительное формирование нейронных сетей [43] или динамическое долговременное формирование сети с адаптивными связями [44]. Кластеры имитируют группы нейронов, например, с похожими рецептивными полями. Тормозные нейроны образуют неспецифический ансамбль, связанный с возбуждающими кластерами неструктурированным образом, что приводит к динамической конкуренции между различными селективными популяциями (см. рис. 1).

Вся сетевая динамика формируется в результате взаимодействия возбуждения и торможения. Когда некоторые нейроны одного кластера генерируют импульсы почти одновременно (в результате локальной стимуляции или шумовой спонтанной активности), они возбуждают другие нейроны кластеров через сильные связи, а также часть тормозных нейронов, что тормозит активность других нейронов сети. При затухании активности в возбужденном кластере активность тормозных нейронов также затухает и «освобождает» от подавления другие нейроны.

Сеть состоит из N_E возбуждающих и N_I тормозных нейронов — пороговых интеграторов. Подпороговая динамика их мембранного потенциала описывается уравнением (1):

$$\tau_m \dot{V}_i = V_r - V_i + I_i^{(\text{rec})}(t) + I_i^{(\text{ext})}(t), \quad (1)$$

где $i = [1, N_E + N_I]$ — номер нейрона, τ_m — постоянная времени мембраны, $I_i^{(\text{ext})}$ — внешний ток, поступающий из отдаленных зон мозга. Сопротивление мембраны учитывается при определении токов. Каждый раз, когда деполяризация достигает определенного порога θ , нейрон генерирует импульс и становится невосприимчивым в течение рефрактерного периода τ_{arp} , после чего снова восстанавливается с подпорогового потенциала сброса V_r [45]. Рекуррентный ток $I_i^{(\text{rec})}(t)$ является суммой постсинаптических токов от всех других нейронов, связанных с нейроном i (2):

$$I_i^{(\text{rec})}(t) = \sum_j \widehat{J}_{ij}(t) \sum_k \delta(t - t_k^{(j)}), \quad (2)$$

где $\widehat{J}_{ij}(t)$ — мгновенная эффективность синапса, соединяющего нейрон j с нейроном i (зависимость от времени обусловлена кратковременной синаптической динамикой); сумма по k рассчитывается по всем временам импульсов $t_k^{(j)}$ пресинаптического нейрона j . Для упрощения пренебрегается временами нарастания и спада постсинаптических токов. В случае одиночного нейрона динамика полностью определяется подаваемым внешним током $I^{(\text{ext})}$. Если приложенный ток относительно слаб, мембранный потенциал V_i в модели (1) не достигает порога θ и импульс не генерируется. По мере увеличения внешнего тока мембранный потенциал V_i достигает порога и генерируется импульс. При этом частота генерации увеличивается по мере увеличения внешнего тока.

Синапсы между возбуждающими нейронами демонстрируют эффект кратковременной пластичности. Существует два типа кратковременной пластичности: депрессия и фасилитация. Синаптическая депрессия вызвана истощением ресурса нейротрансмиттеров, используемых для передачи сигнала на пресинаптических нейронах, в то время как фасилитация вызвана притоком ионов кальция в терминаль аксона сразу после генерации импульса, что увеличивает вероятность высвобождения нейротрансмитчика. Все синапсы, связывающие возбуждающие нейроны, демонстрируют усиленную передачу, описанную феноменологической моделью кратковременной пластичности [46]. Кратковременная синаптическая пластичность описывается уравнениями

$$\dot{u}_j(t) = \frac{U - u_j(t)}{\tau_F} + U [1 - u_j(t)] \sum_k \delta(t - t_k^{(j)}), \quad (3)$$

$$\dot{x}_j(t) = \frac{1 - x_j(t)}{\tau_D} + u_j(t)x_j(t) \sum_k \delta(t - t_k^{(j)}), \quad (4)$$

где u — доля доступного ресурса нейротрансмитчика, высвобождаемого во время синаптической передачи, x — доступный ресурс нейротрансмитчика, τ_F и τ_D — временные параметры кратковременной синаптической пластичности. Для фасилитации синапсов $\tau_F > \tau_D$, и наоборот, $\tau_F < \tau_D$

для депрессии синапсов. В синапсах ПФК наблюдается фасилитация, и временной масштаб τ_F достигает нескольких секунд, а τ_D составляет порядка нескольких сотен миллисекунд [42].

Мгновенная синаптическая эффективность $\widehat{J}_{ij}(t)$ в уравнении (2), также известная как синаптический вес, описывается уравнением

$$\widehat{J}_{ij}(t) = J_{ij}u_j(t)x_j(t), \quad (5)$$

где J_{ij} — абсолютная синаптическая эффективность связи между нейронами j и i .

Все остальные связи между тормозными и возбуждающими и тормозными нейронами демонстрируют линейную синаптическую передачу, то есть $\widehat{J}_{ij}(t) = J_{ij}$.

Внешние токи моделируются как гауссовский белый шум

$$I_i^{(\text{ext})}(t) = \mu_{\text{ext}} + \sigma_{\text{ext}}\eta_i(t). \quad (6)$$

При $\langle \eta_i(t) \rangle = 0$, $\langle \eta_i(t)\eta_j(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t - t')$, так что μ_{ext} и σ_{ext}^2 являются, соответственно, средним значением и дисперсией внешних токов.

Динамика сети полностью описывается уравнениями (1)–(6). Численное моделирование проводилось с использованием схемы Эйлера–Маруямы. Биологически релевантные значения параметров нейронов аналогичны значениям, приведенным в работе [42]. Параметры модели представлены в Таблице.

Также рассмотрена сеть с перекрывающимися популяциями. В такой сети некоторые нейроны из одной селективной популяции имеют сильные (на потенцированном уровне) связи с нейронами другой селективной популяции.

Проведено математическое моделирование нейронной сети из 1000 нейронов. Сеть содержит 8 селективных популяций из 70 возбуждающих нейронов (нейроны 1–560), 200 тормозных нейронов (нейроны 801–1000) и остальные 240 возбуждающих неселективных нейронов. Вероятность связи между любыми двумя нейронами равна 20%.

Через 5 секунд спонтанной активности от начала моделирования каждая выборочная популяция (или кластер) последовательно стимулируется внешним током 30 мВ в течение 0.3 секунды. Эта внешняя стимуляция представляет собой процесс предъявления и запоминания 8 образов. Динамика сети показана на растровом графике (рис. 2), где каждая точка представляет собой импульс на определенном нейроне.

Таблица. Параметры модели

Table. Parameters of model

Параметры нейронов	Возбуждающие	Тормозные
θ — импульсный порог	20 mV	20 mV
V_r — потенциал сброса	16 mV	13 mV
τ — постоянная времени мембраны	15 ms	10 ms
$\tau_{\text{арр}}$ — абсолютный рефрактерный период	2 ms	2 ms
N — количество нейронов	800	200
Параметры кратковременной синаптической динамики		
U — базовый уровень остаточного кальция	0.1	
J_{IE} — синаптическая эффективность $I \rightarrow E$	−0.6 mV	
J_{EI} — синаптическая эффективность $E \rightarrow I$	0.2 mV	
J_{II} — синаптическая эффективность $I \rightarrow I$	−0.6 mV	
J_b — базовый уровень $E \rightarrow E$ синапсов	0.02 mV	
J_p — потенцированный уровень $E \rightarrow E$ синапсов	2.7 mV	

Активность популяции возрастает на время внешней стимуляции, изменяя внутреннее состояние синаптических связей. Связи демонстрируют как депрессию (уменьшение ресурса x), так и фасилитацию (увеличение уровня кальция в синапсе u), причем депрессия преобладает на более коротком временном масштабе τ_D , а фасилитация — на более длинном временном масштабе τ_F . Пока внутрикластерные связи остаются усиленными, объект может быть вызван из РП за счет реактивации активности кластера в ответ на предъявление слабого неспецифического возбуждающего сигнала всей сети или за счет внутренней шумовой активности, даже если нейронная активность находится на спонтанном уровне [30]. Реактивация активности кластера выражается в виде популяционного разряда, когда почти каждый нейрон в популяции генерирует импульс в течение короткого интервала времени.

На рис. 2 семь из восьми популяций демонстрируют спонтанную реактивацию, что соответствует семи элементам, хранящимся в сетевой памяти. Каждый популяционный разряд обновляет запоминаемый объект, увеличивая переменную u синапсов в популяции.

Количество элементов, которое может одновременно храниться в рабочей памяти, определяет ее емкость. В исследуемой модели емкость рабочей памяти определяется как количество кластеров, генерирующих популяционные разряды в течение 5 секунд после прекращения внешней стимуляции и не ранее 1 секунды для каждого кластера после загрузки элемента, во избежание переходных процессов. Кроме того, нейронная сеть не должна иметь спонтанных популяционных разрядов перед внешней стимуляцией. Например, емкость сети, смоделированной на рис. 2, равна семи элементам. Для оценки емкости рабочей памяти были усреднены результаты 10 реализаций для фиксированного набора параметров.

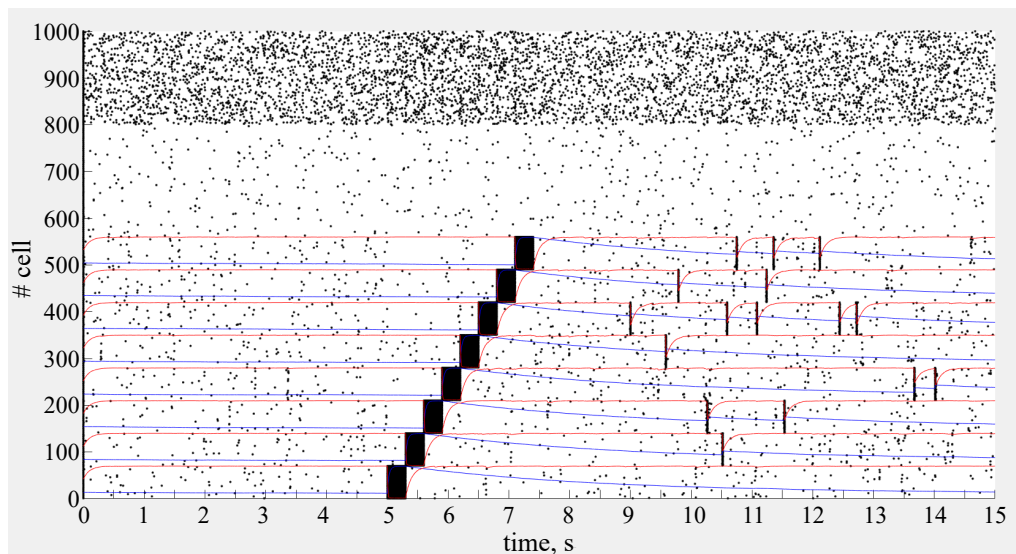


Рис. 2. Пример моделирования сети, демонстрирующей спонтанную активность до стимула и последующую загрузку восьми элементов в РП. Каждая точка представляет собой импульс одного из 1000 нейронов, расположенных в таком порядке, что первые 560 нейронов кодируют восемь элементов, хранящихся в сети. Для каждого кластера графики изменения средних значений синаптической эффективности u в кластерах показаны синим цветом, а изменения средних значений синаптического ресурса x в кластерах — красным. Параметры следующие: $J_p = 2.7$, $\mu_{\text{ext}} = 10$, $\sigma_{\text{ext}}^2 = 0.12$, $\tau_F = 3.6$, $\tau_D = 0.1$ (цвет онлайн)

Fig. 2. An example of network simulation, demonstrating a pre-stimulus spontaneous activity and consequent loading eight items into working memory. Each dot represents a spike of one of 1,000 neurons arranged in order such that the first 560 neurons are encoding eight items stored in the network. For each cluster, graphs of changes in the average values of synaptic efficiency u in clusters are shown in blue, and changes in the average values of synaptic resource x in clusters are shown in red. Parameters are as follows: $J_p = 2.7$, $\mu_{\text{ext}} = 10$, $\sigma_{\text{ext}}^2 = 0.12$, $\tau_F = 3.6$, $\tau_D = 0.1$ (color online)

2. Результаты

Показана роль параметров сети в формировании рабочей памяти и ее емкости. Модель (1)–(6) имеет значительное количество параметров: синаптические веса, времена синаптической фасилитации и депрессии, среднее значение и дисперсию внешних токов, размеры сети и кластера, и другие. Все эти параметры играют существенную роль в динамике сети и, соответственно, в формировании рабочей памяти. Например, баланс возбуждения и торможения сети имеет решающее значение для формирования популяционных разрядов и согласованности между различными кластерами. Изучена роль параметров времен кратковременной синаптической пластичности τ_F и τ_D и общей сетевой активности, определяемой средним значением и дисперсией неспецифических внешних токов, воздействующих на каждый нейрон сети.

2.1. Роль синаптических параметров. Изучено влияние синаптических параметров на емкость рабочей памяти в модели импульсной нейронной сети. Емкость рабочей памяти сети оценивалась для различных параметров времен кратковременной синаптической пластичности τ_F и τ_D и синаптического веса связей между возбуждающими нейронами, принадлежащими одному кластеру. Следует отметить, что существование популяционных разрядов и согласованность между разными кластерами возможны только при балансе параметров синаптического веса и внешнего возбуждения. Небольшое отклонение от баланса параметров может привести к отсутствию популяционных импульсов, появлению глобальной асинхронной активности в сети или появлению популяционных разрядов до загрузки в память предъявленных элементов. Зависимости емкости рабочей памяти от τ_F и τ_D , полученные при численном моделировании уравнений (1)–(6), представлены на рис. 3 для двух значений потенцированных внутрикластерных синаптических весов $J_p = 2.3$ (рис. 3, а) и $J_p = 2.7$ (рис. 3, б).

Обнаружено, что емкость рабочей памяти увеличивается по мере увеличения времени синаптической фасилитации τ_F . Время синаптической депрессии τ_D показывает противоположную роль в наших симуляциях: при фиксированном τ_F емкость увеличивается с уменьшением τ_D . Этот результат частично противоречит выводам, приведенным в работе [42]: «неожиданно, хотя РП в модели поддерживается за счет синаптической фасилитации, полученная зависимость показывает, что емкость РП в основном увеличивается с постоянной времени синаптической депрессии

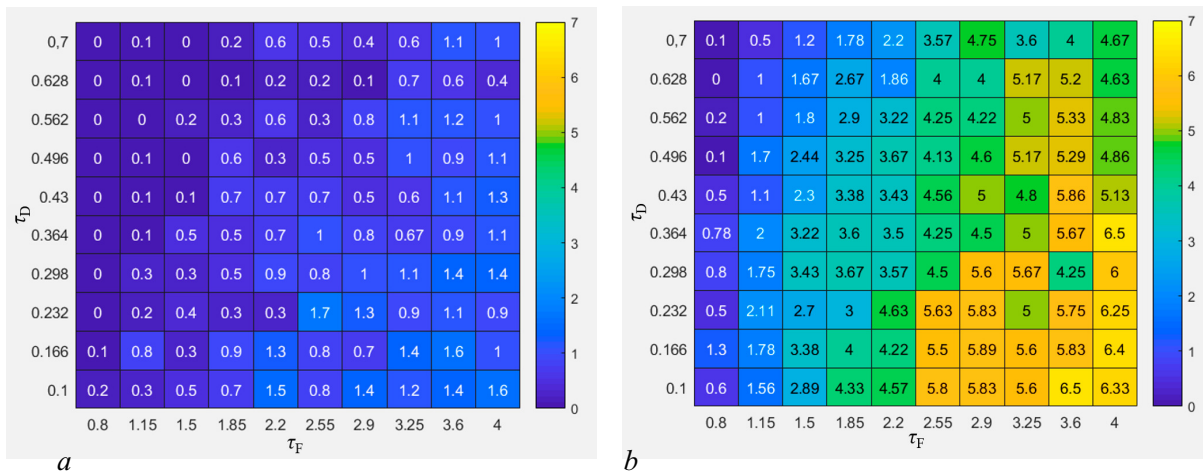


Рис. 3. Зависимости емкости рабочей памяти от τ_F и τ_D , полученные при численном моделировании уравнений (1)–(6) для двух значений потенцированных внутрикластерных синаптических весов $J_p = 2.3$ (а) и $J_p = 2.7$ (б). $\mu_{\text{ext}} = 10$, $\sigma_{\text{ext}}^2 = 0.12$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Working memory capacity as a function of τ_F and τ_D obtained with numerical simulations of equations (1)–(6) for two values of potentiated intracluster synaptic weights $J_p = 2.3$ (a) and $J_p = 2.7$ (b). $\mu_{\text{ext}} = 10$, $\sigma_{\text{ext}}^2 = 0.12$ (color online)

и лишь слабо увеличивается с постоянной времени синаптической фасилитации». Это противоречие выглядит удивительным, но уменьшение постоянной времени синаптической депрессии позволяет кластеру генерировать следующий популяционный разряд раньше, что освежает синаптический «отпечаток» для этого кластера. Частота популяционных разрядов растет, а значения весовых коэффициентов в кластерах остаются на более высоких уровнях, увеличивая емкость.

Потенцированные внутрикластерные синаптические веса J_p играют масштабирующую роль для емкости рабочей памяти в зависимости от τ_F и τ_D : при уменьшении J_p с 2.7 (рис. 3, b) до 2.3 (рис. 3, a) емкость в среднем уменьшается, но общая зависимость от τ_F и τ_D остается такой же.

2.2. Роль фонового возбуждения. Изучено влияние параметров фонового возбуждения на емкость РП. Фоновое возбуждение — это неспецифический ввод, подаваемый на каждый нейрон

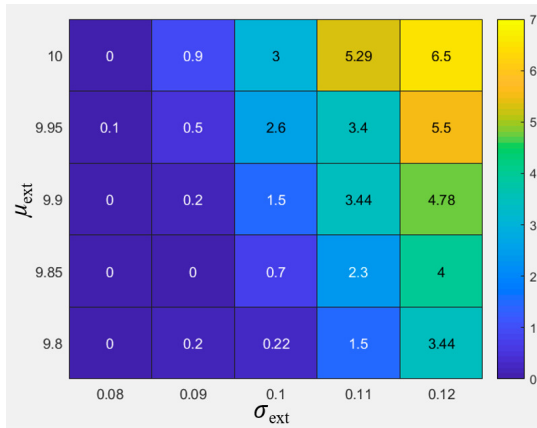


Рис. 4. Емкость рабочей памяти в зависимости от параметров фонового возбуждения μ_{ext} и σ_{ext}^2 при $\tau_F = 3.6$, $\tau_D = 0.1$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Working memory capacity as a function of background excitation parameters μ_{ext} and σ_{ext}^2 for $\tau_F = 3.6$, $\tau_D = 0.1$ (color online)

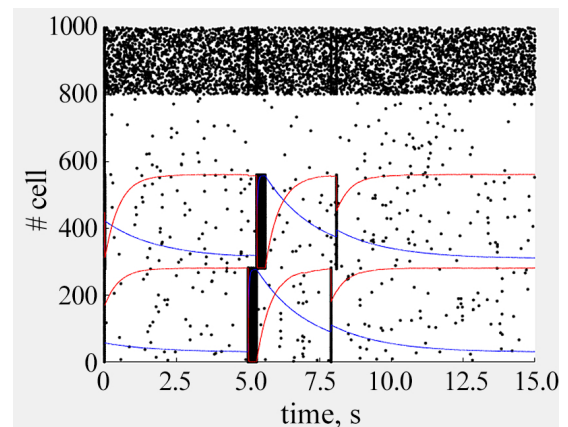
в сети, моделируемой как гауссовский белый шум со средним значением μ_{ext} и дисперсией σ_{ext}^2 . Емкость РП рассчитывалась для различных комбинаций среднего значения и дисперсии белого шума (рис. 4).

Обнаружено, что емкость рабочей памяти уменьшается до нуля при снижении глобальной сетевой активности в результате более низких значений как среднего μ_{ext} , так и дисперсии σ_{ext}^2 шума. Дисперсия, кажется, играет более важную роль для емкости. Уровень фонового возбуждения позволяет эффективно «настроить» РП на требуемую емкость; в частности, уменьшение фонового воздействия ниже критического значения делает нейронную сеть неспособной производить популяционные разряды, следовательно, удаляет запомненные образы из РП, чтобы освободить место для новых входных данных [42].

2.3. Рабочая память в сети с перекрывающимися кластерами. Одна из нереалистичных особенностей модели касается отсутствия перекрытий между представлениями разных элементов памяти. Модель была модифицирована таким образом, чтобы некоторые возбуждающие нейроны одних кластеров имели потенцированные связи с нейронами других кластеров, то есть репрезентации памяти перекрывались. Динамика сети в случае загрузки двух элементов показана на рис. 5.

Рис. 5. Пример моделирования сети с перекрывающимися кластерами, включая спонтанную активность и РП, запускаемую загрузкой двух стимулов. Спайки 1000 нейронов показаны точками; нейроны расположены в таком порядке, что первые 560 нейронов кодируют два образа, хранящихся в сети. Серой заштрихованной областью отмечены 4 нейрона, принадлежащих к обоим кластерам. Параметры следующие: $J_p = 2.3$, $\mu_{\text{ext}} = 9.63$, $\sigma_{\text{ext}}^2 = 0.12$, $\tau_F = 3$, $\tau_D = 0.6$ (цвет онлайн)

Fig. 5. An example of network with overlapping clusters simulation, including spontaneous activity and WM triggered by loading two stimuli. Spikes of 600 neurons are shown as dots; neurons are arranged in order such that the first 560 neurons are encoding two items stored in the network. Grey shaded area marks the 4 neurons belonging to both clusters. Parameters are as follows: $J_p = 2.3$, $\mu_{\text{ext}} = 9.63$, $\sigma_{\text{ext}}^2 = 0.12$, $\tau_F = 3$, $\tau_D = 0.6$ (color online)



Сеть на рис. 5 содержит два кластера возбуждающих нейронов, при этом 4 нейрона принадлежат обоим кластерам (1.4% от размера кластера). Для каждого кластера усредненные значения переменных кратковременной синаптической пластичности u и x показаны синим и красным цветом, соответственно. Через 5 секунд спонтанной активности от начала моделирования каждый кластер последовательно стимулируется внешним током 30 мВ в течение 0.3 секунды. После загрузки двух элементов в рабочую память они представляются как временное усиление связей в кластерах и популяционные разряды. Несмотря на наличие перекрытия в кластерах, различие между кластерами сохраняется, и популяционные спайки одного кластера не активируют нейроны другого кластера через перекрывающиеся связи.

Изучена емкость модели с восемью элементами, загружаемыми в рабочую память, с 5.5% перекрытия кластеров. Зависимость емкости от τ_F и τ_D получена для перекрывающихся кластеров при $J_p = 2.3$ (рис. 6).

Зависимость емкости рабочей памяти для перекрывающихся кластеров схожа с зависимостями, полученные без перекрытия (см. рис. 3). Таким образом, наблюдаемая модель является грубой и не требует жесткого разграничения кластеров. Следовательно, все результаты для непересекающихся представлений памяти можно адаптировать к перекрывающимся.

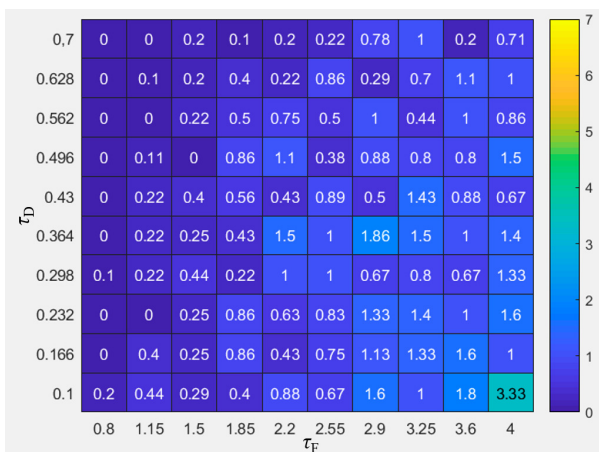


Рис. 6. Зависимость емкости рабочей памяти в сети с перекрывающимися кластерами от τ_F и τ_D , полученная при численном моделировании уравнений (1)–(6) для $J_p = 2.3$, $\mu_{\text{ext}} = 10$ и $\sigma_{\text{ext}}^2 = 0.12$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Working memory capacity in a network with overlapping clusters as a function of τ_F and τ_D obtained with numerical simulations of equations (1)–(6) for $J_p = 2.3$ and $\mu_{\text{ext}} = 10$ and $\sigma_{\text{ext}}^2 = 0.12$ (color online)

3. Обсуждение

Изучена вычислительная модель формирования рабочей памяти на основе импульсной нейронной сети. Модель имитирует формирование рабочей памяти в рамках синаптической теории: запоминаемые образы сохраняются в виде кратковременно усиленных связей в выборочной популяции, а не в виде постоянной активности. Кратковременное усиление связей моделировалось как кратковременная синаптическая пластичность. Рекуррентная нейронная сеть состоит из возбуждающих и тормозных нейронов, связанных вероятностным образом. Некоторые возбуждающие нейроны принадлежат кластерам и селективны к определенному стимулу. Связи между нейронами в кластере сильнее, чем связи между разными кластерами; они имитируют предварительное формирование нейронных цепей или динамическое долговременное формирование сети с адаптивными связями [44]. Тормозные нейроны формируют неспецифическую группу, связанную с возбуждающими кластерами неструктурированным образом, что приводит к динамической конкуренции между различными выборочными популяциями. Пока внутрикластерные связи остаются усиленными, объект может быть вызван из РП за счет реактивации кластерной активности в ответ на предъявление слабого неспецифического возбуждающего сигнала всей сети или за счет внутренней шумовой активности, даже если нейронная активность находится на спонтанном уровне. Реактивация кластерной активности выражается в виде популяционного разряда, когда почти каждый нейрон в популяции генерирует импульс в течение короткого интервала времени.

Количество элементов, которые могут одновременно храниться в рабочей памяти, отражает ее емкость. В исследуемой модели емкость рабочей памяти определяется как количество кластеров, генерирующих популяционные разряды после прекращения внешней стимуляции.

Эта популяционная активность является той же активностью, зарегистрированной в электрофизиологических экспериментах в префронтальной коре, которая предположительно является нейронной основой РП [20, 25].

Изучена емкость рабочей памяти в зависимости от времен синаптической фасилитации и депрессии и фонового возбуждения сети. Эти параметры являются основными параметрами корковых сетей.

Обнаружено, что емкость рабочей памяти увеличивается по мере увеличения времени синаптической фасилитации τ_F . Время синаптической депрессии τ_D показывает противоположную роль в наших симуляциях: при фиксированном τ_F емкость увеличивается с уменьшением τ_D . Этот результат частично противоречит выводам, приведенным в работе [42]: как «емкость РП в основном увеличивается с постоянной времени синаптической депрессии», но «увеличение постоянной времени синаптической депрессии выше определенного значения приводит сеть в режим, при котором невозможны никакие популяционные разряды, и, следовательно, РП разрушается». Наши результаты показывают, что такого противоречия в роли времени синаптической депрессии нет.

Также показано, что емкость РП уменьшается до нуля при снижении глобальной сетевой активности в результате более низких значений как среднего значения μ_{ext} , так и дисперсии σ_{ext}^2 фонового шумового возбуждения. Дисперсия, кажется, играет более важную роль для емкости. Это интересно, поскольку демонстрирует возможную существенную роль нетождественностей и неидеальностей в динамике нейронных сетей и должно учитываться при математическом моделировании нейронных сетей. Зависимость емкости РП от фонового возбуждения позволяет эффективно «настроить» систему на требуемую емкость.

Показано, что емкость РП может быть больше, чем классические экспериментальные оценки четырех элементов [39, 47]. Но емкость сильно зависит от параметров нейронных сетей, которые нельзя значительно улучшить простым обучением. Столь сильная зависимость емкости от внутренних параметров нейронной сети могла быть причиной индивидуальных различий в экспериментальных исследованиях. Эти параметры также могут быть одной из причин дисфункции РП при шизофрении [48, 49]. Все полученные данные о зависимости емкости РП от параметров нейронной сети могут быть полезны в клинических исследованиях нарушений памяти, связанных с неврологическими расстройствами.

Заключение

В данной статье представлено подробное исследование влияния времен синаптической фасилитации и депрессии и фонового возбуждения нейронной сети на емкость рабочей памяти. Емкость рабочей памяти сильно зависит от многих параметров и, как показано, может быть больше, чем классические экспериментальные оценки. Наши результаты демонстрируют возможность синаптической теории рабочей памяти имитировать различные экспериментальные оценки емкости РП по индивидуальным различиям параметров синаптической пластичности. Модель может быть улучшена для имитации различных экспериментальных протоколов загрузки памяти.

Список литературы

1. *Baddeley A.* Working memory // *Science*. 1992. Vol. 255, no. 5044. P. 556–559. DOI: 10.1126/science.1736359.
2. *Baddeley A.* Working memory: looking back and looking forward // *Nat. Rev. Neurosci.* 2003. Vol. 4, no. 10. P. 829–839. DOI: 10.1038/nrn1201.
3. *Miller E. K., Erickson C. A., Desimone R.* Neural mechanisms of visual working memory in prefrontal cortex of the macaque // *J. Neurosci.* 1996. Vol. 16, no. 16. P. 5154–5167. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.16-16-05154.1996.
4. *Fuster J. M., Alexander G. E.* Neuron activity related to short-term memory // *Science*. 1971. Vol. 173, no. 3997. P. 652–654. DOI: 10.1126/science.173.3997.652.

5. *Funahashi S., Bruce C.J., Goldman-Rakic P.S.* Mnemonic coding of visual space in the monkey's dorsolateral prefrontal cortex // *J. Neurophysiol.* 1989. Vol. 61, no. 2. P. 331–349. DOI: 10.1152/jn.1989.61.2.331.
6. *Spaak E., Watanabe K., Funahashi S., Stokes M.G.* Stable and dynamic coding for working memory in primate prefrontal cortex // *J. Neurosci.* 2017. Vol. 37, no. 27. P. 6503–6516. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.3364-16.2017.
7. *Barak O., Tsodyks M.* Working models of working memory // *Curr. Opin. Neurobiol.* 2014. Vol. 25. P. 20–24. DOI: 10.1016/j.conb.2013.10.008.
8. *Goldman-Rakic P.S.* Cellular basis of working memory // *Neuron.* 1995. Vol. 14, no. 3. P. 477–485. DOI: 10.1016/0896-6273(95)90304-6.
9. *Bray N.* Working memory: Persistence is key // *Nat. Rev. Neurosci.* 2017. Vol. 18, no. 7. P. 385. DOI: 10.1038/nrn.2017.70.
10. *Guo Z.V., Inagaki H.K., Daie K., Druckmann S., Gerfen C.R., Svoboda K.* Maintenance of persistent activity in a frontal thalamocortical loop // *Nature.* 2017. Vol. 545, no. 7653. P. 181–186. DOI: 10.1038/nature22324.
11. *Baddeley A.* Working memory // *Curr. Biol.* 2010. Vol. 20, no. 4. P. R136–R140. DOI: 10.1016/j.cub.2009.12.014.
12. *Diamond A.* Executive functions // *Annu. Rev. Psychol.* 2013. Vol. 64. P. 135–168. DOI: 10.1146/annurev-psych-113011-143750.
13. *Pasternak T., Greenlee M.W.* Working memory in primate sensory systems // *Nat. Rev. Neurosci.* 2005. Vol. 6, no. 2. P. 97–107. DOI: 10.1038/nrn1603.
14. *Afraimovich V., Gong X., Rabinovich M.* Sequential memory: Binding dynamics // *Chaos.* 2015. Vol. 25, no. 10. P. 103118. DOI: 10.1063/1.4932563.
15. *Kilpatrick Z.P.* Synaptic mechanisms of interference in working memory // *Sci. Rep.* 2018. Vol. 8, no. 1. P. 7879. DOI: 10.1038/s41598-018-25958-9.
16. *Nachstedt T.* The Processing and Storage of Information in Neuronal Memory Systems Across Time Scales. Dissertation for the award of the degree «Doctor rerum naturalium». Göttingen: Georg-August-Universität Göttingen, 2017. 149 p.
17. *Curtis C.E., D'Esposito M.* Persistent activity in the prefrontal cortex during working memory // *Trends Cogn. Sci.* 2003. Vol. 7, no. 9. P. 415–423. DOI: 10.1016/S1364-6613(03)00197-9.
18. *Riley M.R., Constantinidis C.* Role of prefrontal persistent activity in working memory // *Front. Syst. Neurosci.* 2016. Vol. 9. P. 181. DOI: 10.3389/fnsys.2015.00181.
19. *Bolkan S.S., Stujenske J.M., Parnaudeau S., Spellman T.J., Rauffenbart C., Abbas A.I., Harris A.Z., Gordon J.A., Kellendonk C.* Thalamic projections sustain prefrontal activity during working memory maintenance // *Nat. Neurosci.* 2017. Vol. 20, no. 7. P. 987–996. DOI: 10.1038/nn.4568.
20. *Constantinidis C., Funahashi S., Lee D., Murray J.D., Qi X.-L., Wang M., Arnsten A.F.T.* Persistent spiking activity underlies working memory // *J. Neurosci.* 2018. Vol. 38, no. 32. P. 7020–7028. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.2486-17.2018.
21. *Rabinovich M., Huerta R., Laurent G.* Transient dynamics for neural processing // *Science.* 2008. Vol. 321, no. 5885. P. 48–50. DOI: 10.1126/science.1155564.
22. *Mongillo G., Barak O., Tsodyks M.* Synaptic theory of working memory // *Science.* 2008. Vol. 319, no. 5869. P. 1543–1546. DOI: 10.1126/science.1150769.
23. *Lundqvist M., Rose J., Herman P., Brincat S.L., Buschman T.J., Miller E.K.* Gamma and beta bursts underlie working memory // *Neuron.* 2016. Vol. 90, no. 1. P. 152–164. DOI: 10.1016/j.neuron.2016.02.028.
24. *Lisman J.E., Idiart M.A.P.* Storage of 7 ± 2 short-term memories in oscillatory subcycles // *Science.* 1995. Vol. 267, no. 5203. P. 1512–1515. DOI: 10.1126/science.7878473.
25. *Rolls E.T., Dempere-Marco L., Deco G.* Holding multiple items in short term memory: A neural mechanism // *PLOS ONE.* 2013. Vol. 8, no. 4. P. e61078. DOI: 10.1371/journal.pone.0061078.

26. *Dempere-Marco L., Melcher D. P., Deco G.* Effective visual working memory capacity: An emergent effect from the neural dynamics in an attractor network // PLOS ONE. 2012. Vol. 7, no. 8. P. e42719. DOI: 10.1371/journal.pone.0042719.
27. *Miller E. K., Lundqvist M., Bastos A. M.* Working memory 2.0 // Neuron. 2018. Vol. 100, no. 2. P. 463–475. DOI: 10.1016/j.neuron.2018.09.023.
28. *Lundqvist M., Herman P., Miller E. K.* Working memory: Delay activity, yes! Persistent activity? Maybe not // J. Neurosci. 2018. Vol. 38, no. 32. P. 7013–7019. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.2485-17.2018.
29. *Jun J. K., Miller P., Hernández A., Zainos A., Lemus L., Brody C. D., Romo R.* Heterogenous population coding of a short-term memory and decision task // J. Neurosci. 2010. Vol. 30, no. 3. P. 916–929. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.2062-09.2010.
30. *Hussar C. R., Pasternak T.* Memory-guided sensory comparisons in the prefrontal cortex: Contribution of putative pyramidal cells and interneurons // J. Neurosci. 2012. Vol. 32, no. 8. P. 2747–2761. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.5135-11.2012.
31. *Rabinovich M. I., Simmons A. N., Varona P.* Dynamical bridge between brain and mind // Trends Cogn. Sci. 2015. Vol. 19, no. 8. P. 453–461. DOI: 10.1016/j.tics.2015.06.005.
32. *Wang Y., Markram H., Goodman P. H., Berger T. K., Ma J., Goldman-Rakic P. S.* Heterogeneity in the pyramidal network of the medial prefrontal cortex // Nat. Neurosci. 2006. Vol. 9, no. 4. P. 534–542. DOI: 10.1038/nn1670.
33. *Gordleeva S. Y., Tsybina Y. A., Krivonosov M. I., Ivanchenko M. V., Zaikin A. A., Kazantsev V. B., Gorban A. N.* Modeling working memory in a spiking neuron network accompanied by astrocytes // Front. Cell. Neurosci. 2021. Vol. 15. P. 631485. DOI: 10.3389/fncel.2021.631485.
34. *Miller G. A.* The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information // Psychol. Rev. 1956. Vol. 63, no. 2. P. 81–97. DOI: 10.1037/h0043158.
35. *Koyluoglu O. O., Pertzov Y., Manohar S., Husain M., Fiete I. R.* Fundamental bound on the persistence and capacity of short-term memory stored as graded persistent activity // eLife. 2017. Vol. 6. P. e22225. DOI: 10.7554/eLife.22225.
36. *Cowan N., Elliott E. M., Saults J. S., Morey C. C., Mattox S., Hismjatullina A., Conway A. R. A.* On the capacity of attention: Its estimation and its role in working memory and cognitive aptitudes // Cogn. Psychol. 2005. Vol. 51, no. 1. P. 42–100. DOI: 10.1016/j.cogpsych.2004.12.001.
37. *Conway A. R. A., Cowan N., Bunting M. F.* The cocktail party phenomenon revisited: The importance of working memory capacity // Psychon. Bull. Rev. 2001. Vol. 8, no. 2. P. 331–335. DOI: 10.3758/BF03196169.
38. *Oberauer K.* Access to information in working memory: Exploring the focus of attention // J. Exp. Psychol. Learn. Mem. Cogn. 2002. Vol. 28, no. 3. P. 411–421. DOI: 10.1037/0278-7393.28.3.411.
39. *Cowan N.* The magical mystery four: How is working memory capacity limited, and why? // Curr. Dir. Psychol. Sci. 2010. Vol. 19, no. 1. P. 51–57. DOI: 10.1177/0963721409359277.
40. *Cowan N.* The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity // Behav. Brain Sci. 2001. Vol. 24, no. 1. P. 87–114. DOI: 10.1017/S0140525X01003922.
41. *Frost A., Moussaoui S., Kaur J., Aziz S., Fukuda K., Niemeier M.* Is the n-back task a measure of unstructured working memory capacity? Towards understanding its connection to other working memory tasks // Acta Psychol. 2021. Vol. 219. P. 103398. DOI: 10.1016/j.actpsy.2021.103398.
42. *Mi Y., Katkov M., Tsodyks M.* Synaptic correlates of working memory capacity // Neuron. 2017. Vol. 93, no. 2. P. 323–330. DOI: 10.1016/j.neuron.2016.12.004.
43. *Hopfield J. J.* Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 1982. Vol. 79, no. 8. P. 2554–2558. DOI: 10.1073/pnas.79.8.2554.
44. *Song S., Sjöström P. J., Reigl M., Nelson S., Chklovskii D. B.* Highly nonrandom features of synaptic connectivity in local cortical circuits // PLOS Biol. 2005. Vol. 3, no. 3. P. e68. DOI: 10.1371/journal.pbio.0030068.

45. *Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щапин Д. С., Некоркин В. И.* Нелинейные динамические модели нейронов: обзор // *Известия вузов. ПНД.* 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
46. *Tsodyks M. V., Markram H.* The neural code between neocortical pyramidal neurons depends on neurotransmitter release probability // *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 1997. Vol. 94, no. 2. P. 719–723. DOI: 10.1073/pnas.94.2.719.
47. *Luck S. J., Vogel E. K.* The capacity of visual working memory for features and conjunctions // *Nature.* 1997. Vol. 390, no. 6657. P. 279–281. DOI: 10.1038/36846.
48. *Potkin S. G., Turner J. A., Brown G. G., McCarthy G., Greve D. N., Glover G. H., Manoach D. S., Belger A., Diaz M., Wible C. G., Ford J. M., Mathalon D. H., Gollub R., Lauriello J., O’Leary D., van Erp T. G. M., Toga A. W., Preda A., Lim K. O., FBIRN.* Working memory and DLPFC inefficiency in schizophrenia: The FBIRN study // *Schizophr. Bull.* 2009. Vol. 35, no. 1. P. 19–31. DOI: 10.1093/schbul/sbn162.
49. *Godwin D., Ji A., Kandala S., Mamah D.* Functional connectivity of cognitive brain networks in schizophrenia during a working memory task // *Front. Psychiatry.* 2017. Vol. 8. P. 294. DOI: 10.3389/fpsy.2017.00294.

References

1. Baddeley A. Working memory. *Science.* 1992;255(5044):556–559. DOI: 10.1126/science.1736359.
2. Baddeley A. Working memory: looking back and looking forward. *Nat. Rev. Neurosci.* 2003;4(10): 829–839. DOI: 10.1038/nrn1201.
3. Miller EK, Erickson CA, Desimone R. Neural mechanisms of visual working memory in prefrontal cortex of the macaque. *J. Neurosci.* 1996;16(16):5154–5167. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.16-16-05154.1996.
4. Fuster JM, Alexander GE. Neuron activity related to short-term memory. *Science.* 1971;173(3997): 652–654. DOI: 10.1126/science.173.3997.652.
5. Funahashi S, Bruce CJ, Goldman-Rakic PS. Mnemonic coding of visual space in the monkey’s dorsolateral prefrontal cortex. *J. Neurophysiol.* 1989;61(2):331–349. DOI: 10.1152/jn.1989.61.2.331.
6. Spaak E, Watanabe K, Funahashi S, Stokes MG. Stable and dynamic coding for working memory in primate prefrontal cortex. *J. Neurosci.* 2017;37(27):6503–6516. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.3364-16.2017.
7. Barak O, Tsodyks M. Working models of working memory. *Curr. Opin. Neurobiol.* 2014;25:20–24. DOI: 10.1016/j.conb.2013.10.008.
8. Goldman-Rakic PS. Cellular basis of working memory. *Neuron.* 1995;14(3):477–485. DOI: 10.1016/0896-6273(95)90304-6.
9. Bray N. Working memory: Persistence is key. *Nat. Rev. Neurosci.* 2017;18(7):385. DOI: 10.1038/nrn.2017.70.
10. Guo ZV, Inagaki HK, Daie K, Druckmann S, Gerfen CR, Svoboda K. Maintenance of persistent activity in a frontal thalamocortical loop. *Nature.* 2017;545(7653):181–186. DOI: 10.1038/nature22324.
11. Baddeley A. Working memory. *Curr. Biol.* 2010;20(4):R136–R140. DOI: 10.1016/j.cub.2009.12.014.
12. Diamond A. Executive functions. *Annu. Rev. Psychol.* 2013;64:135–168. DOI: 10.1146/annurev-psych-113011-143750.
13. Pasternak T, Greenlee MW. Working memory in primate sensory systems. *Nat. Rev. Neurosci.* 2005;6(2):97–107. DOI: 10.1038/nrn1603.
14. Afraimovich V, Gong X, Rabinovich M. Sequential memory: Binding dynamics. *Chaos.* 2015; 25(10):103118. DOI: 10.1063/1.4932563.
15. Kilpatrick ZP. Synaptic mechanisms of interference in working memory. *Sci. Rep.* 2018;8(1):7879. DOI: 10.1038/s41598-018-25958-9.

16. Nachstedt T. The Processing and Storage of Information in Neuronal Memory Systems Across Time Scales. Dissertation for the award of the degree «Doctor rerum naturalium». Göttingen: Georg-August-Universität Göttingen; 2017. 149 p.
17. Curtis CE, D'Esposito M. Persistent activity in the prefrontal cortex during working memory. *Trends Cogn. Sci.* 2003;7(9):415–423. DOI: 10.1016/S1364-6613(03)00197-9.
18. Riley MR, Constantinidis C. Role of prefrontal persistent activity in working memory. *Front. Syst. Neurosci.* 2016;9:181. DOI: 10.3389/fnsys.2015.00181.
19. Bolkan SS, Stujenske JM, Parnaudeau S, Spellman TJ, Rauffenbart C, Abbas AI, Harris AZ, Gordon JA, Kellendonk C. Thalamic projections sustain prefrontal activity during working memory maintenance. *Nat. Neurosci.* 2017;20(7):987–996. DOI: 10.1038/nn.4568.
20. Constantinidis C, Funahashi S, Lee D, Murray JD, Qi XL, Wang M, Arnsten AFT. Persistent spiking activity underlies working memory. *J. Neurosci.* 2018;38(32):7020–7028. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.2486-17.2018.
21. Rabinovich M, Huerta R, Laurent G. Transient dynamics for neural processing. *Science.* 2008;321(5885):48–50. DOI: 10.1126/science.1155564.
22. Mongillo G, Barak O, Tsodyks M. Synaptic theory of working memory. *Science.* 2008;319(5869):1543–1546. DOI: 10.1126/science.1150769.
23. Lundqvist M, Rose J, Herman P, Brincat SL, Buschman TJ, Miller EK. Gamma and beta bursts underlie working memory. *Neuron.* 2016;90(1):152–164. DOI: 10.1016/j.neuron.2016.02.028.
24. Lisman JE, Idiart MAP. Storage of 7 ± 2 short-term memories in oscillatory subcycles. *Science.* 1995;267(5203):1512–1515. DOI: 10.1126/science.7878473.
25. Rolls ET, Dempere-Marco L, Deco G. Holding multiple items in short term memory: A neural mechanism. *PLOS ONE.* 2013;8(4):e61078. DOI: 10.1371/journal.pone.0061078.
26. Dempere-Marco L, Melcher DP, Deco G. Effective visual working memory capacity: An emergent effect from the neural dynamics in an attractor network. *PLOS ONE.* 2012;7(8):e42719. DOI: 10.1371/journal.pone.0042719.
27. Miller EK, Lundqvist M, Bastos AM. Working memory 2.0. *Neuron.* 2018;100(2):463–475. DOI: 10.1016/j.neuron.2018.09.023.
28. Lundqvist M, Herman P, Miller EK. Working memory: Delay activity, yes! Persistent activity? Maybe not. *J. Neurosci.* 2018;38(32):7013–7019. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.2485-17.2018.
29. Jun JK, Miller P, Hernández A, Zainos A, Lemus L, Brody CD, Romo R. Heterogenous population coding of a short-term memory and decision task. *J. Neurosci.* 2010;30(3):916–929. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.2062-09.2010.
30. Hussar CR, Pasternak T. Memory-guided sensory comparisons in the prefrontal cortex: Contribution of putative pyramidal cells and interneurons. *J. Neurosci.* 2012;32(8):2747–2761. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.5135-11.2012.
31. Rabinovich MI, Simmons AN, Varona P. Dynamical bridge between brain and mind. *Trends Cogn. Sci.* 2015;19(8):453–461. DOI: 10.1016/j.tics.2015.06.005.
32. Wang Y, Markram H, Goodman PH, Berger TK, Ma J, Goldman-Rakic PS. Heterogeneity in the pyramidal network of the medial prefrontal cortex. *Nat. Neurosci.* 2006;9(4):534–542. DOI: 10.1038/nn1670.
33. Gordleeva SY, Tsybina YA, Krivonosov MI, Ivanchenko MV, Zaikin AA, Kazantsev VB, Gorban AN. Modeling working memory in a spiking neuron network accompanied by astrocytes. *Front. Cell. Neurosci.* 2021;15:631485. DOI: 10.3389/fncel.2021.631485.
34. Miller GA. The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychol. Rev.* 1956;63(2):81–97. DOI: 10.1037/h0043158.
35. Koyluoglu OO, Pertzov Y, Manohar S, Husain M, Fiete IR. Fundamental bound on the persistence and capacity of short-term memory stored as graded persistent activity. *eLife.* 2017;6:e22225. DOI: 10.7554/eLife.22225.

36. Cowan N, Elliott EM, Saults JS, Morey CC, Mattox S, Hismjatullina A, Conway ARA. On the capacity of attention: Its estimation and its role in working memory and cognitive aptitudes. *Cogn. Psychol.* 2005;51(1):42–100. DOI: 10.1016/j.cogpsych.2004.12.001.
37. Conway ARA, Cowan N, Bunting MF. The cocktail party phenomenon revisited: The importance of working memory capacity. *Psychon. Bull. Rev.* 2001;8(2):331–335. DOI: 10.3758/BF03196169.
38. Oberauer K. Access to information in working memory: Exploring the focus of attention. *J. Exp. Psychol. Learn. Mem. Cogn.* 2002;28(3):411–421. DOI: 10.1037/0278-7393.28.3.411.
39. Cowan N. The magical mystery four: How is working memory capacity limited, and why? *Curr. Dir. Psychol. Sci.* 2010;19(1):51–57. DOI: 10.1177/0963721409359277.
40. Cowan N. The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behav. Brain Sci.* 2001;24(1):87–114. DOI: 10.1017/S0140525X01003922.
41. Frost A, Moussaoui S, Kaur J, Aziz S, Fukuda K, Niemeier M. Is the n-back task a measure of unstructured working memory capacity? Towards understanding its connection to other working memory tasks. *Acta Psychol.* 2021;219:103398. DOI: 10.1016/j.actpsy.2021.103398.
42. Mi Y, Katkov M, Tsodyks M. Synaptic correlates of working memory capacity. *Neuron.* 2017;93(2):323–330. DOI: 10.1016/j.neuron.2016.12.004.
43. Hopfield JJ. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 1982;79(8):2554–2558. DOI: 10.1073/pnas.79.8.2554.
44. Song S, Sjöström PJ, Reigl M, Nelson S, Chklovskii DB. Highly nonrandom features of synaptic connectivity in local cortical circuits. *PLOS Biol.* 2005;3(3):e68. DOI: 10.1371/journal.pbio.0030068.
45. Dmitrichev AS, Kasatkin DV, Klinshov VV, Kirillov SY, Maslennikov OV, Shchapin DS, Nekorkin VI. Nonlinear dynamical models of neurons: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2018;26(4):5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
46. Tsodyks MV, Markram H. The neural code between neocortical pyramidal neurons depends on neurotransmitter release probability. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 1997;94(2):719–723. DOI: 10.1073/pnas.94.2.719.
47. Luck SJ, Vogel EK. The capacity of visual working memory for features and conjunctions. *Nature.* 1997;390(6657):279–281. DOI: 10.1038/36846.
48. Potkin SG, Turner JA, Brown GG, McCarthy G, Greve DN, Glover GH, Manoach DS, Belger A, Diaz M, Wible CG, Ford JM, Mathalon DH, Gollub R, Lauriello J, O’Leary D, van Erp TGM, Toga AW, Preda A, Lim KO, FBIRN. Working memory and DLPFC inefficiency in schizophrenia: The FBIRN study. *Schizophr. Bull.* 2009;35(1):19–31. DOI: 10.1093/schbul/sbn162.
49. Godwin D, Ji A, Kandala S, Mamah D. Functional connectivity of cognitive brain networks in schizophrenia during a working memory task. *Front. Psychiatry.* 2017;8:294. 10.3389/fpsy.2017.00294.



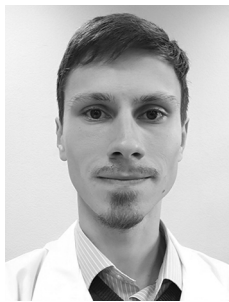
Ковалева Наталья Сергеевна — родилась в Нижнем Новгороде (1994). Окончила радиофизический факультет Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2018). Выпускник института аспирантуры и докторантуры по программе «Радиофизика» (2022). Область научных интересов — нелинейная динамика, нейродинамика, математическое моделирование.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: natazh29@yandex.ru
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1030307



Матросов Валерий Владимирович — родился в 1960 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н. И. Лобачевского по специальности «Прикладная математика» (1982). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н. И. Лобачевского (1984–1999), доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования (1999), профессор этой кафедры (2007), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования (с 2013), декан радиофизического факультета ННГУ им. Н. И. Лобачевского (с 2014). Имеет более 100 научных и методических работ, в том числе 3 монографии и 3 учебных пособия, изданных как в России, так и за рубежом. Под его руководством защищено 4 кандидатских диссертации. Член диссертационного совета Д 212.166.07 при ННГУ (радиофак); научно-методического совета исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». Почетный работник сферы образования РФ, награжден знаком НТОРЭС им. А. С. Попова «За заслуги в развитии радиоэлектроники и связи».

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: matrosov@rf.unn.ru
ORCID: 0000-0003-3146-111X
AuthorID (eLibrary.Ru): 24397



Мищенко Михаил Андреевич — родился в городе Горьком (1987). Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2010). Кандидат физико-математических наук (2013). Старший научный сотрудник и доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Область научных интересов — нейродинамика, нелинейная динамика и синхронизация. Опубликовал свыше 20 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: mischenko@neuro.nnov.ru
ORCID: 0000-0001-8801-7664
AuthorID (eLibrary.Ru): 655032



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(1)

Научная статья
УДК 621.373.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003025
EDN: AXLDTJ

Кольцевой генератор нейроподобной активности с перестраиваемой частотой

Н. М. Егоров^{1,2}, М. В. Сысоева^{1,2}✉, В. И. Пономаренко^{1,3},
М. В. Корнилов^{1,3}, И. В. Сысоев^{1,3}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия

³Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: egorov.n.m.omnis@gmail.com, ✉bobrichek@mail.ru,
ponomarenkovi@gmail.com, kornilovmv@gmail.com, ivssci@gmail.com

Поступила в редакцию 12.10.2022, принята к публикации 10.11.2022,
опубликована онлайн 16.12.2022, опубликована 31.01.2023

Аннотация. Целью работы является построение радиотехнического генератора нейроподобной активности с перестраиваемой различными способами частотой, соответствующего современным представлениям об устройстве гиппокампа и генерации в нём патологических эпилептических ритмов. **Методы.** В качестве элементов генератора выступают радиотехнические реализации полного нейрона ФитцХью–Нагумо и электронная реализация химического синапса в виде сигмоидной функции с запаздывающим аргументом. Моделирование проводилось в SPICE симуляторе. **Результаты.** Рассмотрены различные способы внесения запаздывания в связь: идеальная линия запаздывания, фазовый фильтр с реостатом, один перестраиваемый фильтр Бесселя и последовательность неперестраиваемых фильтров Бесселя. Для схемотехнической реализации оптимальным по сочетанию простоты и минимизации искажения сигнала признан подход с использованием фильтра Бесселя с реостатом. Построены зависимости частоты колебаний от числа элементов в кольце и времени запаздывания. Исследована бистабильность режимов генерации при некоторых значениях параметров. Рассмотрено влияние включения подавляющих элементов (интернейронов) в цепь. **Заключение.** Построенный кольцевой генератор моделирует экспериментально наблюдаемые свойства динамики основной частоты эпилептических разрядов при лимбической эпилепсии. Он способен воспроизвести возникновение колебаний в результате внешнего кратковременного воздействия, плавную и резкую перестройку частоты, сосуществование различных режимов при одних и тех же параметрах.

Ключевые слова: радиотехническая схема нейрона ФитцХью–Нагумо, нейронная сеть, системы с запаздыванием, сигмоидная связь.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 19-72-10030-П, <https://rscf.ru/project/19-72-10030/>.

Для цитирования: Егоров Н. М., Сысоева М. В., Пономаренко В. И., Корнилов М. В., Сысоев И. В. Кольцевой генератор нейроподобной активности с перестраиваемой частотой // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 1. С. 103–120. DOI: 10.18500/0869-6632-003025. EDN: AXLDTJ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Ring generator of neuron-like activity with tunable frequency

N. M. Egorov^{1,2}, M. V. Sysoeva^{1,2}✉, V. I. Ponomarenko^{1,3},
M. V. Kornilov^{1,3}, I. V. Sysoev^{1,3}

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia

³Saratov State University, Russia

E-mail: egorov.n.m.omnis@gmail.com, ✉bobrichkek@mail.ru, ponomarenkovi@gmail.com,
kornilovmv@gmail.com, ivssci@gmail.com

Received 12.10.2022, accepted 10.11.2022, available online 16.12.2022, published 31.01.2023

Abstract. The aim of the work is to build a radiophysical generator of neuron-like activity with a frequency tunable in various ways, corresponding to modern ideas about the structure of the hippocampus and the generation of pathological epileptic rhythms in it. **Methods.** The elements of the generator are radio engineering implementations of the complete FitzHugh–Nagumo neuron and the electronic implementation of a chemical synapse in the form of a sigmoid function with a delayed argument. The simulation was carried out in the SPICE simulator. **Results.** Various ways of introducing delay into the coupling are considered: an ideal delay line, a phase filter with a rheostat, one tunable Bessel filter, and a sequence of non-tunable Bessel filters. For circuit implementation, the approach using a Bessel filter with a rheostat is recognized as optimal as a compromise between simplicity and minimization of signal distortion. The dependences of the oscillation frequency on the number of elements in the ring and the delay time are constructed. The bistability of generation regimes is studied for certain values of the parameters. The effect of inclusion of inhibitory elements (interneurons) in the circuit is considered. **Conclusion.** The constructed ring generator models the experimentally observed properties of the dynamics of epileptic discharge fundamental frequency in limbic epilepsy. It is able to reproduce the occurrence of oscillations as a result of external short-term driving, smooth and sharp frequency tuning, the coexistence of different modes with the same parameters.

Keywords: FitzHugh–Nagumo neuron electronic circuit, neural network, time delayed systems, sigmoid coupling.

Acknowledgements. This study was supported by Russian Science Foundation, grant No. 19-72-10030-P, <https://rscf.ru/project/19-72-10030/>.

For citation: Egorov NM, Sysoeva MV, Ponomarenko VI, Kornilov MV, Sysoev IV. Ring generator of neuron-like activity with tunable frequency. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(1):103–120. DOI: 10.18500/0869-6632-003025

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Построение моделей, отражающих функционирование реальных нейронов и их групп, представляет как научный, так и практический технический интерес. Например, в робототехнике активно развивается концепция центрального генератора ритма [1, 2], необходимого для реализации характерных для живых организмов простых движений. При моделировании патологических режимов функционирования головного мозга, в частности, при моделировании эпилепсии, вопрос формирования основного ритма также имеет первостепенное значение. Нами предпринята попытка описать возникновение и эволюцию основной частоты колебаний в гиппокампе при лимбической эпилепсии с помощью кольца из небольшого числа радиофизических осцилляторов, построенного из физиологических соображений. По сравнению с чисто математическим моделированием такой подход позволяет приблизиться к биологическому эксперименту по ряду критериев: с точки зрения специфики измерений, с точки зрения нестационарности (тепловой нагрев) параметров схемы и их неидентичности.

При построении радиотехнических моделей нейронов основным подходом, как и ранее [3–5], является схмотехническое воспроизведение математических моделей. Из множества вариантов математических моделей биологических нейронов [6] была выбрана модель нейрона ФитцХью–Нагумо [7, 8], которая представляет собой безразмерный упрощённый вариант модели Ходжкина–Хаксли [9], воспроизводящий основные свойства волн возбуждения. Основная причина интереса исследователей к этой модели — простота реализации нелинейных функций, что даёт возможность

собрать электронную модель на простейших элементах [10] или относительно быстро реализовать ансамбль из 10 и более элементов [14].

Так, в работе [11] была разработана и реализована «в железе» радиотехническая схема упрощённого нейрона ФитцХью–Нагумо с одним бифуркационным параметром a — см. формулу (1). В [12] была построена имитационная модель, состоящая из 14 упрощённых нейронов ФитцХью–Нагумо, связанных простой линейной связью (1) — так же, как показано в оригинальной работе [11]. В [13] было продемонстрировано, что предложенная имитационная модель устойчиво воспроизводит необходимые режимы при вариации числа элементов сети (14, 28 и 56 нейронов в сети), структуры связей (различном числе положительных и отрицательных линейных связей) для ансамблей из одинакового числа элементов и начальной фазы внешнего воздействия. В итоге были реализованы восемь радиотехнических ансамблей, каждый по 14 упрощённых нейронов ФитцХью–Нагумо [14]. Радиотехнический эксперимент показал, что реализованные схемы способны демонстрировать искомое поведение — длительные квазирегулярные переходные процессы, воспроизводящие различные характеристики эпилептиформной активности, как это было ранее показано в математическом моделировании [15, 16].

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u}_i(t) &= u_i(t) - c_i u_i^3(t) - v_i(t) + \sum_{j \neq i} k_{ij} u_j, \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) + a_i,\end{aligned}\tag{1}$$

где u — безразмерная быстрая переменная, соответствующая трансмембранному потенциалу в размерной модели Ходжкина–Хаксли; v — безразмерная медленная переменная, аналогичная току восстановления; t — безразмерное время; ε — параметр инерционности; a — безразмерный параметр, который управляет собственной динамикой нейрона; c — константа интегрирования (в наших работах всегда $c = 1/3$); k — коэффициент связи.

В упрощённой модели ФитцХью–Нагумо невозможны тормозные связи: связь с любым знаком будет возбуждающей, просто в разной степени, поэтому $k < 0$ называли отрицательной связью, $k > 0$ — положительной. Поэтому в работе [17] была реализована схема полного нейрона ФитцХью–Нагумо, см. (2), с двумя бифуркационными параметрами a и b и радиотехническая схема химического синапса, математически представляющего собою сигмоидную функцию. Сочетание этих двух нововведений минимально необходимо, чтобы моделировать возбуждающие и тормозные связи.

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u}_i(t) &= u_i(t) - c_i u_i^3(t) - v_i(t) + \sum_{j \neq i} k_{ij} \frac{1 + \tanh(u_j(t))}{2}, \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) + a_i - b_i v_i(t),\end{aligned}\tag{2}$$

где b — ещё один безразмерный параметр, который управляет собственной динамикой нейрона; k — коэффициент связи, при этом связь реализована в виде смещённого гиперболического тангенса $(1 + \tanh(u))/2$, $k < 0$ соответствует тормозной связи, $k > 0$ — возбуждающей связи.

В [18] было показано, что в двух аппаратно реализованных полных нейронах ФитцХью–Нагумо, связанных сигмоидными связями, возможны различные сценарии возникновения колебаний, в том числе седлоузловая бифуркация цикла, приводящая к появлению сильно нелинейных предельных циклов большой амплитуды. Были обнаружены долгоживущие переходные процессы вблизи этих бифуркаций, которые представляют особый интерес для моделирования некоторых метастабильных явлений в живых системах, таких как сон и эпилепсия [19].

Цель данной работы — усовершенствовать модель (2) путём добавления запаздывания в связь:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u}_i(t) &= u_i(t) - c_i u_i^3(t) - v_i(t) + \sum_{j \neq i} k_{ij} \frac{1 + \tanh(u_j(t - \tau))}{2}, \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) + a_i - b_i v_i(t),\end{aligned}\tag{3}$$

где τ — время запаздывания. Запаздывание естественным образом возникает в синапсе при передаче сигнала между аксоном и дендритом в результате конечности скорости ионного транспорта и может иметь значительное влияние на динамику сети [20].

1. Радиотехническая схема нейрона с химическим синапсом

На рис. 1 представлена принципиальная схема одного полного нейрона ФитцХью–Нагумо с синапсом. В отличие от математической модели (3), параметры радиотехнической схемы размерные. В частности, параметры времени могут быть вычислены как $E = R_{11}C_1$ и $T = R_7C_2$.

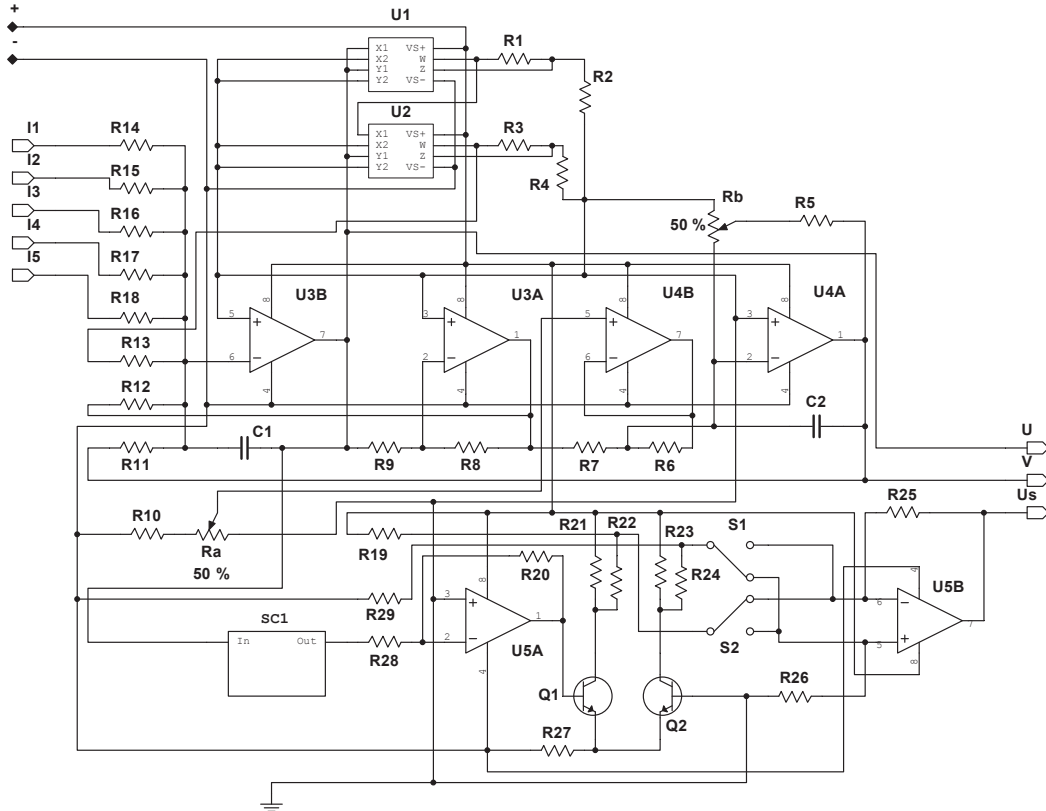


Рис. 1. Принципиальная схема полного нейрона ФитцХью–Нагумо с синапсом. Резисторы $R_1 = R_3 = 1 \text{ кОм}$, $R_2 = 9 \text{ кОм}$, $R_4 = 2.333 \text{ кОм}$, $R_5 = 51 \text{ кОм}$, переменный резистор $R_b = 4.7 \text{ МОм}$, $R_6 = R_7 = R_8 = R_9 = R_{11} = R_{12} = R_{13} = 100 \text{ кОм}$, $R_{10} = 5 \text{ кОм}$, переменный резистор $R_a = 1 \text{ кОм}$, сопротивление резисторов $R_{14} - R_{18}$ зависит от силы связи k , $C_1 = 1 \text{ нФ}$, $C_2 = 0.01 \text{ мкФ}$, U_1, U_2 — аналоговые умножители типа AD633, U_3, U_4 — операционные усилители типа AD822. $R_{19} = R_{29} = 300 \text{ кОм}$, $R_{20} = 0.51 \text{ кОм}$, $R_{21} = R_{23} = 1 \text{ кОм}$, $R_{22} = R_{24} = R_{28} = 10 \text{ кОм}$, $R_{25} = R_{26} = 5.1 \text{ кОм}$, $R_{27} = 2 \text{ кОм}$, Q_1, Q_2 — биполярные транзисторы типа 2N1711, U_5 — операционный усилитель типа NE5532AI. S_1 и S_2 — однополюсные двухпозиционные ключи. Они необходимы для того, чтобы иметь возможность выбирать возбуждающую или тормозящую связь. SC_1 — контур, моделирующий аналоговую задержку

Fig. 1. Circuit diagram of a single complete FitzHugh–Nagumo neuron with synapse. $R_1 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 9 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 2.333 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 51 \text{ k}\Omega$, potentiometer $R_b = 4.7 \text{ M}\Omega$, $R_6 = R_7 = R_8 = R_9 = R_{11} = R_{12} = R_{13} = 100 \text{ k}\Omega$, $R_{10} = 5 \text{ k}\Omega$, potentiometer $R_a = 1 \text{ k}\Omega$, $R_{14} - R_{18}$ depends on coupling strength k , $C_1 = 1 \text{ nF}$, $C_2 = 0.01 \text{ }\mu\text{F}$, U_1, U_2 are multipliers of the type AD633, and U_3, U_4 are amplifiers of the type AD822. $R_{19} = R_{29} = 300 \text{ k}\Omega$, $R_{20} = 0.51 \text{ k}\Omega$, $R_{21} = R_{23} = 1 \text{ k}\Omega$, $R_{22} = R_{24} = R_{28} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{25} = R_{26} = 5.1 \text{ k}\Omega$, $R_{27} = 2 \text{ k}\Omega$, Q_1, Q_2 are bipolar junction transistors of the type 2N1711, U_5 is an amplifier of the type NE5532AI. S_1 and S_2 are single-pole double-throw switches. They are necessary in order to be able to choose an exciting or inhibitory coupling. SC_1 is a subcircuit modeling analog delay

Пусть в схеме размерные значения математических безразмерных переменных u и v обозначаются как U и V . Параметр ε вычисляется как $\varepsilon = E/T$. Параметры $c = (R3 + R4)/R3$ и $b = R6/(R5 + R_b \cdot \frac{B}{100\%})$ (B – величина, выраженная в процентах на потенциометре R_b) являются коэффициентами масштабирования в U и V , соответственно. Коэффициент связи k рассчитывается как $k = R13/R_{IN}$, где R_{IN} – номинал на одном из входных резисторов от $R14$ до $R18$. Параметр a задаётся напряжением на “+” зажиме усилителя U3B. Общее падение напряжения на последовательно подключенных резисторе $R10 = 5$ кОм и потенциометре $R_a = 1$ кОм равно $U_a = 15$ В. Таким образом, весь диапазон падения напряжения на потенциометре составляет 2.5 В. Если потенциометр установлен на $A = 0\%$, на “+” зажиме усилителя U3B будет именно 2.5 В. Если потенциометр установлен на $A = 100\%$, это напряжение равно нулю. Итак, параметр a может быть рассчитан с использованием A , измеренного в процентах, указанных на потенциометре R_a , следующим образом: $a = 2.5(1 - \frac{A}{100\%})$.

Схема нейрона содержит два аналоговых умножителя U1 и U2 и два сдвоенных операционных усилителя U3 и U4. Элементы U4B и U3A являются интеграторами. Они позволяют получить U и V , соответственно. Элемент U4A – это инвертор, который позволяет получать $-U$. Элемент U3B является повторителем. Умножители U1 и U2 позволяют выполнить возведение U в куб в соответствии с формулой (3).

Схема химического синапса состоит из двух частей: контура, реализующего сигмоидную функцию (радиотехническая реализация гиперболического тангенса), и контура, моделирующего аналоговую задержку. Первый контур содержит сдвоенный операционный усилитель U5 и два биполярных транзистора Q1 и Q2. Инвертирующий усилитель U5A имеет коэффициент усиления 0.05, дифференциальный усилитель U5B имеет коэффициент усиления 0.5. Разница между возбуждающими и тормозными связями реализована переключателями S1 и S2. Контур, моделирующий аналоговую задержку, будет подробно рассмотрен в следующем разделе.

На рис. 2 хорошо видно, что между сигналом на входе нейрона и на выходе синапса наблюдается временное запаздывание. Это происходит потому, что схема нейрона содержит инерционные элементы (конденсаторы). Стоит заметить, что это запаздывание по времени, обусловленное инерционностью схемы, зависит от параметров модели, включая силу связи. Если измерить сдвиг по времени, который происходит при прохождении сигнала через схему нейрона, при параметрах, которые будут использоваться во всех описанных в статье экспериментах, то получается $\Delta t_{\text{neuron}} \approx 60$ мкс.

Даёт ли схема сигмоидной функции какой-то сдвиг по времени, визуально по рис. 2 сложно определить, в первую очередь потому, что форма сигнала сильно искажается. Чтобы понять, имеет ли место на рассматриваемых частотах инерционность в связях, с генератора гармонических сигналов на схему сигмоидной функции подавалось воздействие и измерялся отклик, а затем сравнивались фаза исходного воздействия и фаза частотной компоненты отклика на той же частоте. Эксперимент показал, что эти фазы идентичны вплоть до четвёртого знака. Это означает, что сама по себе нелинейная схема, реализующая гиперболический

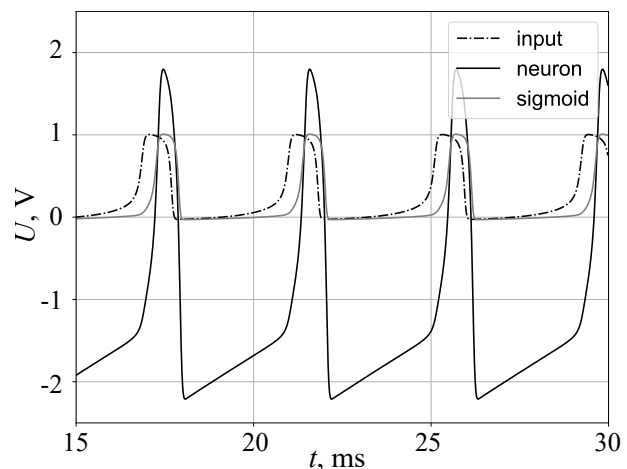


Рис. 2. Временные реализации сигнала на входе схемы, реализующей нейрон (штрихпунктирная чёрная линия), сигнала на выходе этого контура (сплошная чёрная линия) и сигнала на выходе контура, реализующего сигмоидную функцию (сплошная серая линия)

Fig. 2. Time series of a input signal at neuron circuit (dashed dotted line), of an output signal at neuron circuit (solid black line) and of an output signal at sigmoid coupling function circuit (solid gray line)

тангенс, не вносит никакой инерционности. Далее аналогичные измерения были проделаны уже при подаче на схему тангенса не синусоиды, а сигнала от нейрона, в результате было показано, что фаза на основной частоте генерации немного меняется, что соответствует временному сдвигу в $\Delta t_{\text{sigmoid}} = 14$ мкс, измеренной по максимумам в сигнале. Этот сдвиг, вероятно, обусловлен нелинейностью элемента и, как следствие, изменением соотношения между гармониками (перераспределением мощности), когда более высокие гармоники усиливаются за счёт более низких (происходит перекачка мощности); при этом фаза на высоких гармониках меняется под воздействием фазы слагаемых, происходящих из низкочастотных компонент при их умножении. Таким образом, можно считать, что вся или почти вся инерционность, присущая контуре, происходит из схемы самого нейрона.

2. Реализация аналоговой линии запаздывания

В данной работе для моделирования аналоговой задержки сравнивались четыре варианта, представленные на рис. 3.

Первый вариант (рис. 3, а) использовался как эталонный, это стандартный компонент DELAY из радиотехнического симулятора National Instruments Multisim, который моделирует

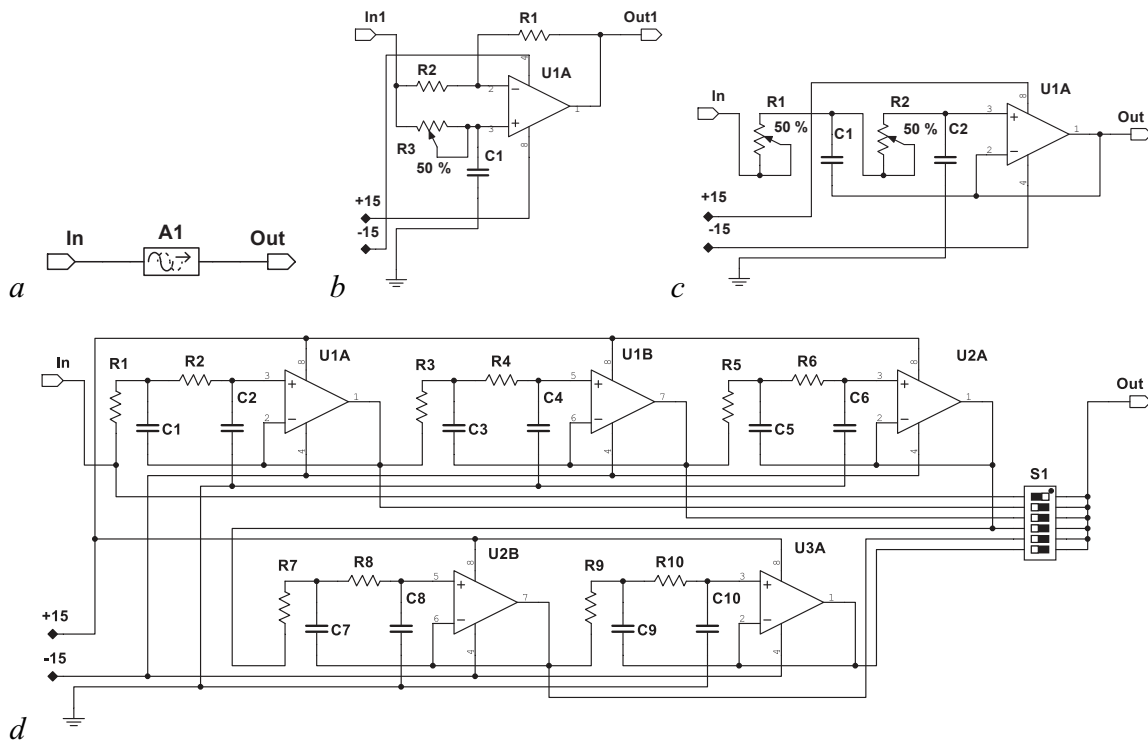


Рис. 3. Варианты реализации перестраиваемой аналоговой задержки (содержимое контура SC1 на рис. 1): а – идеальная программная задержка DELAY; б – фазовый фильтр с реостатом: $R1 = R2 = 5$ кОм, $R3 = 50$ кОм, $C1 = 0.01$ мкФ, U1A – операционный усилитель типа LM358AD; в – фильтр Бесселя с реостатами: $R1 = R2 = 50$ кОм, $C1 = 5.6$ нФ, $C2 = 3.9$ нФ, U1A – операционный усилитель типа LM358AD; д – последовательность из пяти фильтров Бесселя: $R1 - R10 = 50$ кОм, $C1 = C3 = C5 = C7 = C9 = 5.6$ нФ, $C2 = C4 = C6 = C8 = C10 = 3.9$ нФ, S1 – шестипозиционный переключатель; U1, U2, U3 – операционные усилители типа LM358AD

Fig. 3. Implementations of tunable analog delay circuit (subcircuit SC1 content on fig. 1): а – ideal software DELAY; б – all-pass filter with rheostat: $R1 = R2 = 5$ kΩ, $R3 = 50$ kΩ, $C1 = 0.01$ μF, U1A is an amplifier of the type LM358AD; в – Bessel filter with rheostats: $R1 = R2 = 50$ kΩ, $C1 = 5.6$ nF, $C2 = 3.9$ nF, U1A is an amplifier of the type LM358AD; д – sequence of five Bessel filters: $R1 - R10 = 50$ kΩ, $C1 = C3 = C5 = C7 = C9 = 5.6$ nF, $C2 = C4 = C6 = C8 = C10 = 3.9$ nF, S1 is a six-position switch; U1, U2, U3 are amplifiers of the type LM358AD

идеальную задержку (рис. 3, *a*). Этот компонент хранит все входные данные, охватывающие период времени, соответствующий времени задержки τ . Затем он выводит данные в соответствии с правилом FIFO: первый вошёл — первый вышел. Для вычисления значений, которые находятся между временными точками, используется линейная интерполяция. Входное и выходное напряжение привязаны к земле.

Второй вариант (рис. 3, *b*) представляет собой фазовый фильтр первого порядка, иногда называемый всепропускающим фильтром от английского all-pass filter. Этот фильтр пропускает все частоты сигнала с равным усилением, но добавляет линейный сдвиг фазы к каждой частотной составляющей, тем самым способствуя постоянной временной задержке [21]. Вместо одного из постоянных резисторов мы поставили переменный резистор, чтобы можно было динамически менять значение запаздывания. Такой метод реализации линии задержки в системе был предложен в [22]. Он выгодно отличается от обычных методов реализации искусственных линий запаздывания, состоящих из LC-звеньев, как например в [23].

Третий вариант (рис. 3, *c*) реализован с помощью фильтра Бесселя. Фильтры Бесселя предназначены для достижения максимальной полосы пропускания при сохранении постоянной групповой задержки. Как было первоначально введено [24], фильтр Бесселя представляет собой сеть с постоянной временной задержкой. Выбирая между фильтрами Баттерворта, Чебышева и Бесселя, было решено остановиться на последнем, так как в [25] было показано, что первые два фильтра имеют внезапное увеличение временной задержки вблизи частоты среза.

Четвёртый вариант (рис. 3, *d*) представляет собой последовательность фильтров Бесселя, каждый из которых содержит постоянные элементы и настроен на задержку $\tau = 0.1$ мс. Такой вариант построения линии запаздывания описан в [26].

Если сравнить временные реализации сигналов после прохождения всех четырёх вариантов реализации задержки (рис. 4), то можно видеть, что при прохождении фазового фильтра сигнал сильно искажается, а пять последовательных фильтров Бесселя, каждый дающий задержку в 0.1 мс, искажают сигнал меньше, чем один фильтр Бесселя, настроенный на задержку 0.5 мс. Так как в перспективе перед нами будет стоять задача аппаратной реализации данной схемы, то ввиду небольшого различия между временными рядами на выходе одного и пяти последовательных фильтров Бесселя, а также ввиду существенного удешевления схемы при использовании одного фильтра Бесселя с реостатом, было решено остановиться на этом варианте. Все дальнейшие расчёты проведены для схемы синапса, содержащей один перестраиваемый фильтр Бесселя.

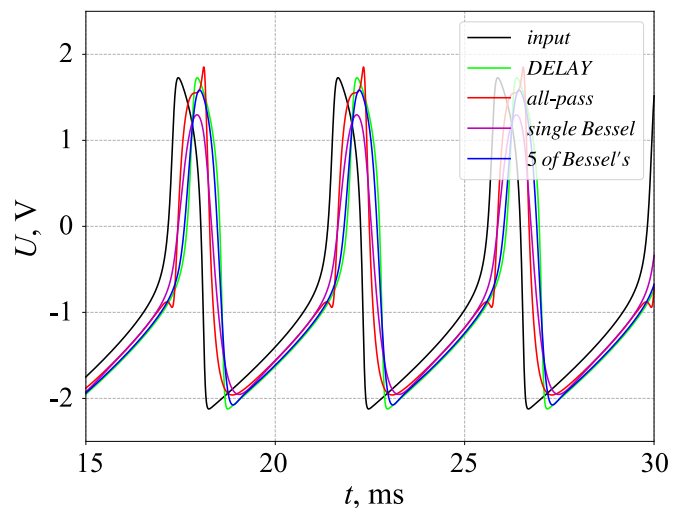


Рис. 4. Сравнение различных вариантов реализации задержки $\tau = 0.5$ мс. Чёрная линия — сигнал на входе контура, моделирующего задержку; зелёная линия — сигнал после прохождения идеальной программной задержки; красная линия — сигнал после прохождения фазового фильтра; розовая линия — сигнал после прохождения фильтра Бесселя; синяя линия — сигнал после прохождения последовательности пяти фильтров Бесселя, каждый из которых даёт задержку $\tau = 0.1$ мс (цвет онлайн)

Fig. 4. Comparison of various implementations of the delay $\tau = 0.5$ ms. Black line corresponds to a signal at the input of the loop simulating the delay; green line corresponds to a signal after passing the ideal digital delay; red line corresponds to a signal after passing the phase filter; pink line corresponds to a signal after passing the Bessel filter; blue line corresponds to a signal after passing the sequence of five Bessel filters, with each of which providing a delay of $\tau = 0.1$ ms (color online)

3. Схема кольцевого генератора

Для достижения цели — получения кольцевого генератора нейроподобной активности с перестраиваемой частотой — была разработана структурная схема (рис. 5). Один элемент этой схемы («квадратик») содержит внутри себя схему нейрона с химическим синапсом.

В гиппокампе человека и животных существуют два типа нейронов: возбуждающие пирамидные нейроны и тормозные интернейроны. Интернейроны подразделяются на основе их колокализации с белками, например, парвальбуминовые или холецистокининовые, они иннервируют разные части пирамидных нейронов [27]. Информацию гиппокамп получает из энторинальной коры. Основная информация идёт по перфорирующему тракту из второго слоя энторинальной коры в гранулярные клетки (маленькие возбуждающие нейроны) зубчатой фасции, а затем по мшистым волокнам информация передаётся на пирамиды и интернейроны поля СА3 гиппокампа, потом с пирамид поля СА3 уходит на пирамиды и интернейроны поля СА2 и СА1 (подробнее см. в [28]). Также существует прямой возбуждающий тракт из II слоя энторинальной коры в пирамиды и интернейроны областей СА3 и СА2 гиппокампа и из III слоя энторинальной коры в пирамиды и интернейроны СА1, но по этим трактам передаётся меньше информации, чем через зубчатую фасцию. Ещё стоит отметить, что связи между пирамидами поля СА1 гораздо слабее, чем между пирамидами слоёв СА2 и СА3. Интернейронов в гиппокампе всего 10%. Тем не менее, учёт тормозных интернейронов и в математических, и в радиотехнических моделях очень важен, так как показано, что при таких заболеваниях как шизофрения, болезнь Альцгеймера, эпилепсия височной доли общий объём гиппокампа уменьшается именно за счёт уменьшения интернейронов, а не пирамидных клеток.

Итак, в данной работе в очень упрощённом виде воспроизводится функционирование поля СА1 гиппокампа после получения возбуждающего сигнала из третьего слоя энторинальной коры и при увеличении количества связей внутри гиппокампа. Внешний вход (пирамидный нейрон энторинальной коры) находится в колебательном режиме с параметрами $a_{EntC} = 0.875$ и $b_{EntC} = 0.08$. Гиппокампальные нейроны находятся в подпороговом режиме с параметрами $a_{Hp} = 1.225$ и $b_{Hp} = 0.08$. Сила взаимодействия внутри гиппокампа и сила внешнего воздействия брались одинаковыми $k_{Hp} = k_{EntC} = 0.6$.

Рассматривались два сценария: первый, когда генерирующее кольцо составлено только из возбуждающих нейронов — пирамид, и второй, когда внутри кольца в разных местах могут оказаться два интернейрона, в том числе два подряд. Предварительные эксперименты показали, что если все нейроны возбуждающие, то при максимальной задержке 0.5 мс необходимо минимум

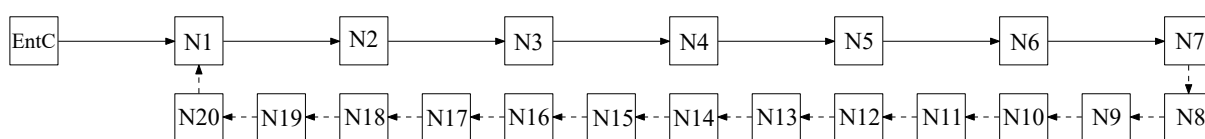


Рис. 5. Структурная схема кольцевого генератора нейроподобной активности с перестраиваемой частотой. EntC — внешний возбуждающий вход (от пирамидного нейрона энторинальной коры $a_{EntC} = 0.875$, $b_{EntC} = 0.08$, $k_{EntC} = 0.6$); N1–N20 — основные нейроны кольца (гиппокампальные нейроны: возбуждающие пирамидные нейроны или тормозные интернейроны ($a_{Hp} = 1.225$, $b_{Hp} = 0.08$, $k_{Hp} = 0.6$ при воздействии с пирамидного нейрона или $k_{Hp} = -0.6$ при воздействии с интернейрона))

Fig. 5. Block diagram of a ring generator of neuron-like activity with tunable frequency. EntC — external excitatory input (from the pyramidal neuron of the entorhinal cortex $a_{EntC} = 0.875$, $b_{EntC} = 0.08$, $k_{EntC} = 0.6$); N1–N20 — the main neurons of the ring (hippocampal neurons: excitatory pyramidal neurons or inhibitory interneurons ($a_{Hp} = 1.225$, $b_{Hp} = 0.08$, $k_{Hp} = 0.6$ driven by a pyramidal neuron or $k_{Hp} = -0.6$ when exposed from an interneuron))

семь нейронов, чтобы в кольце начались колебания. Это минимальное число нейронов, которое мы рассматривали. Поэтому на рис. 5 связи между нейронами N1–N7 изображены сплошными линиями, поскольку это основные нейроны, всегда присутствовавшие в сети, а остальные линии штриховые — эти нейроны дополнительные и присутствовали не во всех экспериментах.

4. Зависимость частоты колебаний сети от внутренних параметров сети

Используемые в данной работе параметры нейронов кольца соответствуют подпороговому неколебательному режиму для каждого отдельного нейрона. Когда нейроны замыкаются в кольцо, между ними возникает связь с задержкой по времени, соответствующей в реальном биологическом нейроне задержке в химическом синапсе, обусловленной конечными временами, необходимыми для ионного транспорта через синапс. Затем на один из нейронов кольца подаётся кратковременное воздействие с характерным периодом колебаний $T_{\text{EntC}} = 4.129$ мс или частотой колебаний примерно $f_{\text{EntC}} = 242$ Гц, время внешнего воздействия $w = 5 T_{\text{EntC}}$. Такая частота внешнего воздействия соответствует минимально возможной частоте автоколебаний нейрона, в следующем разделе также будут рассмотрены частоты выше. После подачи внешнего воздействия каждый отдельный узел сети начинает генерировать периодические нелинейные колебания. Эти колебания являются результатом сетевой организации, их появление и частота определяются числом узлов в кольце, временем запаздывания в связи и собственными инерционными свойствами отдельных нейронов, как это было показано в математической модели [29].

На рис. 6 показана зависимость основной частоты f колебаний нейронов в цепи от количества элементов в кольце D и от времени запаздывания τ . Если колебания в кольце не запускаются, то такой вариант показан белым цветом. Цветные прямоугольники соответствуют разным значениям основной частоты колебаний в кольце в случае запуска колебаний. Для расчёта основной частоты по временным рядам оценивался период T_1 колебаний нейрона N1 и частота получалась как $1/T_1$. Остальные нейроны кольца генерируют аналогичную активность, равномерно сдвинутую по фазе так, что суммарный сдвиг на всём кольце равен 2π . Стоит подчеркнуть, что по оси

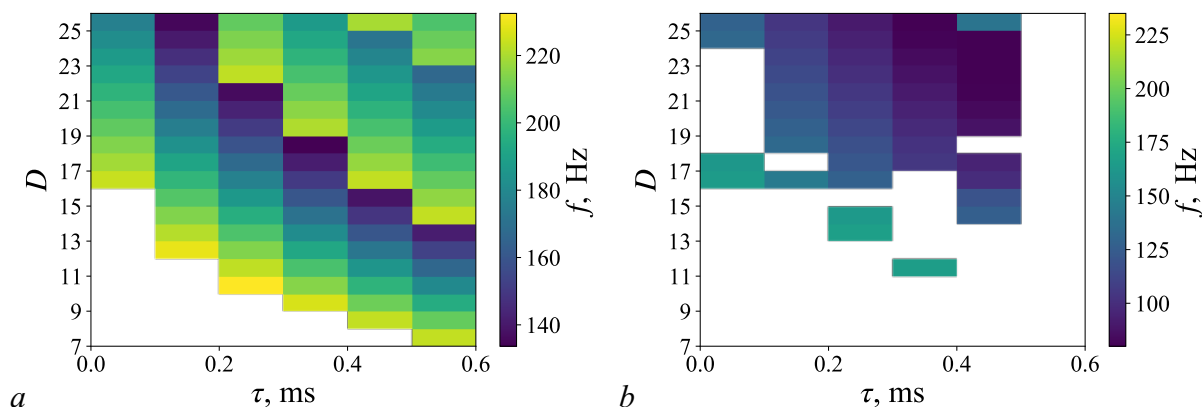


Рис. 6. Зависимости основной частоты колебаний в цепи от количества элементов в кольце D и от времени запаздывания τ . Частота внешнего воздействия $f_{\text{EntC}} = 242$ Гц. Цветом обозначена частота колебаний, возникающих в кольце. Белый цвет соответствует отсутствию колебаний. a — Кольцо состоит только из возбуждающих пирамидных нейронов, b — в кольцо включены два тормозных интернейрона (N6 и N16) (цвет онлайн)

Fig. 6. Dependencies of the main oscillation frequency f in the circuit on the number of elements in the ring D and on the delay time τ . Frequency of external driving is $f_{\text{EntC}} = 242$ Hz. The color indicates the oscillation frequency occurring in the ring. The white color corresponds to the absence of oscillations in the ring. Subplot a corresponds to all excitatory neurons in the circuit, subplot b corresponds a case when two inhibitory neurons (N6 and N16) are included to the circuit (color online)

абсцисс отложена задержка τ , возникающая в отдельном контуре, моделирующем аналоговую линию задержки. Запаздывание, возникающее в схеме нейрона вследствие инерционности цепи при построении графика не учитывалось. На рис. 6 можно видеть, что даже при нулевой задержке τ , если количество узлов в кольце достаточно велико, возникают колебания. Причина этого кроется в инерционных свойствах отдельного нейрона — наличии сдвига по времени для сигнала, прошедшего через схему нейрона.

Рис. 6, *a* построен для случая, когда все нейроны в кольце возбуждающие. Видно, что чем больше запаздывание в связи, тем меньшее количество нейронов необходимо для того, чтобы во всём кольце начались колебания. При максимальном исследованном нами запаздывании $\tau = 0.5$ мс достаточно 7 пирамидных нейронов, чтобы сеть начала колебаться. Если зафиксировать время запаздывания τ и постепенно увеличивать количество нейронов в сети D или же, наоборот, зафиксировать количество нейронов в сети D и постепенно увеличивать время запаздывания τ , что менее физиологично, можно видеть, что вначале возникают колебания на частоте около 230 Гц, и далее, по мере увеличения количества нейронов, частота падает вплоть до примерно 140 Гц. Потом при добавлении ещё одного нейрона происходит резкий скачок и основная частота колебаний вновь становится около 225 Гц, что соответствует удвоенной частоте для данного числа элементов: по сети движутся одновременно два импульса, находящиеся в противофазе, на расстоянии в половину элементов друг от друга. Такой режим, вероятно, оказывается возможен и устойчив, поскольку время рефрактерности становится меньше половины периода и нейроны успевают «восстановиться» не за целый период, а за половину. Косвенным подтверждением такого объяснения служит то, что, например, при задержке $\tau = 0.5$ мс колебания на основной частоте начинаются при количестве нейронов $D = 7$, а колебания с удвоенной частотой — при $D = 14$. Далее по мере увеличения D частота вновь начинает падать. И, к примеру, для $\tau = 0.5$ мс при $D = 21$ частота достигает минимума $f = 174$ Гц, и затем при $D = 22$ частота резко возрастает до $f = 219$ Гц — генератор переходит в режим утроенной частоты. Таким образом, предпочтительным всегда оказывается режим с максимально возможным числом одновременно бегущих импульсов, а «вилка» между минимальной и максимальной частотами с увеличением числа одновременно сосуществующих импульсов уменьшается.

Рис. 6, *b* построен для случая, когда в кольцо добавлены два интернейрона (N6 и N16). Здесь уже плавных зависимостей f от τ и D не наблюдается. Во-первых, далеко не при каждой комбинации (τ , D) сеть начинала колебаться после окончания воздействия. Во-вторых, максимальную частоту колебаний 165 Гц удалось получить вообще при нулевой задержке. В-третьих, при максимальном исследованном времени запаздывания $\tau = 0.5$ мс колебания не запустились ни при каком D . Тем не менее сама по себе возможность генерации даже при наличии в кольце двух интернейронов (их количество в гиппокампе примерно в 10 раз меньше, чем пирамид) показывает принципиальную структурную устойчивость предложенной схемы.

5. Зависимость частоты колебаний сети от параметров внешнего воздействия

Для большей общности было рассмотрено поведение кольцевого генератора при изменении параметров внешнего воздействия: частоты f_{EntC} , длительности w и начальной фазы φ . Как показали эксперименты, диаграммы, подобные рис. 6, построенные при различной длительности и начальной фазе воздействия, не отличаются друг от друга, а вот частота внешнего воздействия существенно меняет картину. Чем выше частота внешнего воздействия, тем сложнее запуститься колебаниям в кольце (нужны большие τ и D). Это связано с тем, что частота воздействия становится всё выше собственной частоты колебаний нейронов кольца, и им всё сложнее синхронизоваться:

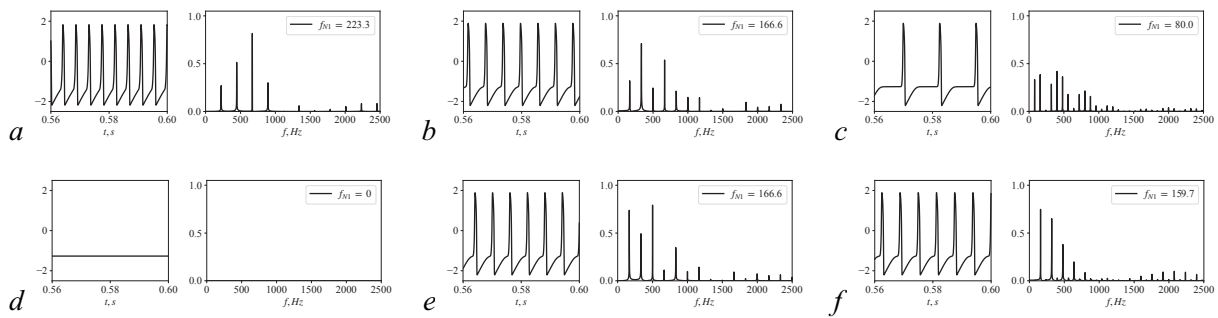


Рис. 7. Временные реализации и амплитудные спектры нейрона N1 при частоте внешнего воздействия: $f_{\text{EntC}} = 250.7$ Гц (сверху) и $f_{\text{EntC}} = 344.1$ Гц (снизу). Количество нейронов в кольце: $D = 7$ (a и d); $D = 11$ (b и e); $D = 23$ (c и f)

Fig. 7. Time series and amplitude spectra of the N1 neuron for two sets of parameters: $f_{\text{EntC}} = 250.7$ Hz (upper subplots) and $f_{\text{EntC}} = 344.1$ Hz (lower subplots). The number of neurons in the ring is different for different subplots: $D = 7$ (for a and d), $D = 11$ (for b and e), $D = 23$ (for c and f)

нейроны «устают» и из-за рефрактерности не отвечают. Тот же принцип лежит в основе методов борьбы с эпилептическими приступами с помощью высокочастотной стимуляции [30, 31].

Для нас большой интерес представляет тот факт, что незначительно меняя частоту воздействия, но при этом не меняя внутренних параметров кольца, можно выводить генератор в различные колебательные режимы. На рис. 7 показаны временные ряды и амплитудные спектры, снятые с нейрона N1, при различных частотах внешнего воздействия. Видно, что, например, кольцо из 7 нейронов при частоте внешнего воздействия $f_{\text{EntC}} = 250.7$ Гц запускается с частотой $f_{N1} = 223.3$ Гц, а при $f_{\text{EntC}} = 344.1$ Гц — вообще не запускается (рис. 7, a, d). Кольцо из 11 нейронов при обеих рассмотренных частотах воздействия ведёт себя одинаково (рис. 7, b, e). А вот в кольце из 23 нейронов при $f_{\text{EntC}} = 250.7$ Гц реализуются колебания на частоте 80.0 Гц (рис. 7, c), тогда как при большей частоте воздействия колебания в кольце происходят на удвоенной частоте 159.7 Гц.

Заключение

Вопрос о том, каким образом в мозге формируются основные колебательные ритмы, ответственные как за нормальную, так и за патологическую активность, много раз поднимался и обсуждался [32–34]. Существующие попытки создания общей теории пока носят описательный характер [35]. Большое внимание привлекают вопросы синхронизации различных структур мозга [36], в том числе в приложении к эпилепсии и другим патологическим состояниям [37]. При этом вопрос о генерации основной частоты для большинства процессов принципиально не решён. Для фокальных эпилепсий предполагается, что ритмоводителем является очень маленький нейронный ансамбль [38] — микроконтур. При этом мы знаем, что частота генерации может перестраиваться в широких пределах, как плавно, так и скачками, очень индивидуально для каждого пациента или животного [39].

В данной работе нам удалось создать схему радиотехнического кольцевого генератора, построенного по принципам организации лимбической системы млекопитающих, состоящего всего из нескольких модельных радиотехнических нейронов и радиотехнических синапсов в виде фильтров, реализующих запаздывание. Ключевая особенность генератора в том, что его частоту можно перестраивать тремя способами: за счёт изменения времени запаздывания (доступна плавная перестройка в широком диапазоне), за счёт изменения числа элементов в сети

(перестройка будет осуществляться скачком), за счёт различной частоты внешнего воздействия (в условиях мультистабильности могут реализоваться сосуществующие режимы с кратными частотами). Полученный генератор моделирует возможные механизмы формирования основной частоты патологической активности в гиппокампе при фокальной лимбической эпилепсии. Важно, что с биологической точки зрения схема оказалась структурно стабильна: включение в кольцо одного и даже двух интернейронов, подавляющих активность следующего нейрона, вместо возбуждающих пирамид уменьшает область генерации в пространстве параметров (D, τ) — число нейронов, время запаздывания — но не ликвидирует её полностью. Это существенно повышает биологическую релевантность модели, поскольку значительно увеличивает вероятность образования такой кольцевой структуры на практике. При этом реализуются более низкочастотные режимы, что дополнительно увеличивает разнообразие типов колебательной активности, присущих генератору.

Основная цель работы состояла именно в моделировании биологического объекта — ритмоводителя лимбической эпилепсии. Тем не менее построенный генератор, вероятно, может быть использован независимо как источник разночастотных периодических импульсных сигналов.

Список литературы

1. *Lodi M., Shilnikov A. L., Storace M.* Design principles for central pattern generators with preset rhythms // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2020. Vol. 31, no. 9. P. 3658–3669. DOI: 10.1109/TNNLS.2019.2945637.
2. *Kurkin S. A., Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Astakhov S. V., Hramov A. E.* Central pattern generator based on self-sustained oscillator coupled to a chain of oscillatory circuits // *Chaos*. 2022. Vol. 32, no. 3. P. 033117. DOI: 10.1063/5.0077789.
3. *Mahowald M., Douglas R.* A silicon neuron // *Nature*. 1991. Vol. 354, no. 6354. P. 515–518. DOI: 10.1038/354515a0.
4. *Rasche C., Douglas R.* An improved silicon neuron // *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*. 2000. Vol. 23, no. 3. P. 227–236. DOI: 10.1023/A:1008357931826.
5. *van Schaik A.* Building blocks for electronic spiking neural networks // *Neural Networks*. 2001. Vol. 14, no. 6–7. P. 617–628. DOI: 10.1016/S0893-6080(01)00067-3.
6. *Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щатин Д. С., Некоркин В. И.* Нелинейные динамические модели нейронов: обзор // *Известия вузов. ПНД*. 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
7. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical Journal*. 1961. Vol. 1, no. 6. P. 445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
8. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proceedings of the IRE*. 1962. Vol. 50, no. 10. P. 2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.
9. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *The Journal of Physiology*. 1952. Vol. 117, no. 4. P. 500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
10. *Binczak S., Jacquir S., Bilbault J.-M., Kazantsev V. B., Nekorkin V. I.* Experimental study of electrical FitzHugh–Nagumo neurons with modified excitability // *Neural Networks*. 2006. Vol. 19, no. 5. P. 684–693. DOI: 10.1016/j.neunet.2005.07.011.
11. *Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Hramov A. E.* Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators // *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 98, no. 1. P. 735–748. DOI: 10.1007/s11071-019-05224-x.
12. *Егоров Н. М., Пономаренко В. И., Сысоев И. В., Сысоева М. В.* Имитационное моделирование эпилептиформной активности сетью нейроподобных радиотехнических осцилляторов // *Журнал технической физики*. 2021. Т. 91, № 3. С. 519–528. DOI: 10.21883/JTF.2021.03.50532.237-20.

13. *Egorov N. M., Ponomarenko V. I., Mельникова С. Н., Сысоев И. В., Сысоева М. В.* Общность механизмов возникновения безаттракторных колебательных режимов в радиотехнических моделях таламокортикальной сети мозга // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 6. С. 927–942. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-927-942.
14. *Egorov N. M., Kulminskiy D. D., Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Sysoeva M. V.* Transient dynamics in electronic neuron-like circuits in application to modeling epileptic seizures // Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 108, no. 4. P. 4231–4242. DOI: 10.1007/s11071-022-07379-6.
15. *Капустников А. А., Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Моделирование пик-волновых разрядов в мозге малыми сетями нейроосцилляторов // Математическая биология и биоинформатика. 2020. Т. 15, № 2. С. 138–147. DOI: 10.17537/2020.15.138.
16. *Капустников А. А., Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Transient dynamics in a class of mathematical models of epileptic seizures // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2022. Vol. 109. P. 106284. DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.106284.
17. *Egorov N. M., Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Sysoeva M. V.* Epileptiform activity generation by an ensemble of complete electronic FitzHugh–Nagumo oscillators connected by a sigmoid couplings // In: Proceedings of SPIE. Vol. 12194. Computational Biophysics and Nanobiophotonics. Bellingham: SPIE, 2022. P. 1219403. DOI: 10.1117/12.2623993.
18. *Egorov N. M., Sysoev I. V., Ponomarenko V. I., Sysoeva M. V.* Complex regimes in electronic neuron-like oscillators with sigmoid coupling // Chaos, Solitons & Fractals. 2022. Vol. 160. P. 112171. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112171.
19. *Rabinovich M. I., Zaks M. A., Varona P.* Sequential dynamics of complex networks in mind: Consciousness and creativity // Physics Reports. 2020. Vol. 883. P. 1–32. DOI: 10.1016/j.physrep.2020.08.003.
20. *Wang Q., Perc M., Duan Z., Chen G.* Impact of delays and rewiring on the dynamics of small-world neuronal networks with two types of coupling // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2010. Vol. 389, no. 16. P. 3299–3306. DOI: 10.1016/j.physa.2010.03.031.
21. *Winder S.* Analog and Digital Filter Design. 2nd edition. USA: Elsevier, 2002. 458 p. DOI: 10.1016/B978-0-7506-7547-5.X5000-3.
22. *Banerjee T., Biswas D., Sarkar B. C.* Anticipatory, complete and lag synchronization of chaos and hyperchaos in a nonlinear delay-coupled time-delayed system // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 72, no. 1–2. P. 321–332. DOI: 10.1007/s11071-012-0716-4.
23. *Srinivasan K., Raja Mohamed I., Murali K., Lakshmanan M., Sinha S.* Design of time delayed chaotic circuit with threshold controller // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2011. Vol. 21, no. 3. P. 725–735. DOI: 10.1142/S0218127411028751.
24. *Karki J.* Active Low-Pass Filter Design. Texas: Texas Instruments, 2000. 24 p.
25. *Cao P., Fan H., Wang D., Shu H., Yang B., Han Y., Dong J.* Compensation circuit design for tuned half-wavelength transmission lines based on Bessel filter // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. 2022. Vol. 134. P. 107335. DOI: 10.1016/j.ijepes.2021.107335.
26. *Buscarino A., Fortuna L., Frasca M., Sciuto G.* Design of time-delay chaotic electronic circuits // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2011. Vol. 58, no. 8. P. 1888–1896. DOI: 10.1109/TCSI.2011.2107190.
27. *Rudy B., Fishell G., Lee S., Hjerling-Leffler J.* Three groups of interneurons account for nearly 100% of neocortical GABAergic neurons // Developmental Neurobiology. 2011. Vol. 71, no. 1. P. 45–61. DOI: 10.1002/dneu.20853.
28. *Vinogradova O. S.* Hippocampus as comparator: Role of the two input and two output systems of the hippocampus in selection and registration of information // Hippocampus. 2001. Vol. 11, no. 5. P. 578–598. DOI: 10.1002/hipo.1073.
29. *Sysoev I. V., Kornilov M. V., Makarova N. A., Sysoeva M. V., Vinogradova L. V.* Modeling limbic

- seizure initiation with an ensemble of delay coupled neurooscillator // In: Lacarbonara W., Balachandran B., Leamy M. J., Ma J., Tenreiro Machado J. A., Stepan G. (eds) *Advances in Nonlinear Dynamics. NODYCON Conference Proceedings Series*. Cham: Springer, 2022. P. 73–81. DOI: 10.1007/978-3-030-81170-9_7.
30. Nelson T. S., Suhr C. L., Freestone D. R., Lai A., Halliday A. J., McLean K. J., Burkitt A. N., Cook M. J. Closed-loop seizure control with very high frequency electrical stimulation at seizure onset in the GAERS model of absence epilepsy // *International Journal of Neural Systems*. 2011. Vol. 21, no. 2. P. 163–173. DOI: 10.1142/S0129065711002717.
 31. van Heukelum S., Kelderhuis J., Janssen P., van Luijckelaar G., Lüttjohann A. Timing of high-frequency cortical stimulation in a genetic absence model // *Neuroscience*. 2016. Vol. 324. P. 191–201. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2016.02.070.
 32. Lopes da Silva F. Neural mechanisms underlying brain waves: from neural membranes to networks // *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*. 1991. Vol. 79, no. 2. P. 81–93. DOI: 10.1016/0013-4694(91)90044-5.
 33. Schnitzler A., Gross J. Normal and pathological oscillatory communication in the brain // *Nature Reviews Neuroscience*. 2005. Vol. 6, no. 4. P. 285–296. DOI: 10.1038/nrn1650.
 34. Benca R., Duncan M. J., Frank E., McClung C., Nelson R. J., Vicentic A. Biological rhythms, higher brain function, and behavior: Gaps, opportunities, and challenges // *Brain Research Reviews*. 2009. Vol. 62, no. 1. P. 57–70. DOI: 10.1016/j.brainresrev.2009.09.005.
 35. Buzsáki G. *Rhythms of the Brain*. Oxford: Oxford University Press, 2006. 448 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195301069.001.0001.
 36. Rudrauf D., Douiri A., Kovach C., Lachaux J.-P., Cosmelli D., Chavez M., Adam C., Renault B., Martinerie J., Le Van Quyen M. Frequency flows and the time-frequency dynamics of multivariate phase synchronization in brain signals // *NeuroImage*. 2006. Vol. 31, no. 1. P. 209–227. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2005.11.021.
 37. Good L. B., Sabesan S., Marsh S. T., Tsakalis K., Treiman D., Iasemidis L. Control of synchronization of brain dynamics leads to control of epileptic seizures in rodents // *International Journal of Neural Systems*. 2009. Vol. 19, no. 3. P. 173–196. DOI: 10.1142/S0129065709001951.
 38. Paz J. T., Huguenard J. R. Microcircuits and their interactions in epilepsy: is the focus out of focus? // *Nature Neuroscience*. 2015. Vol. 18, no. 3. P. 351–359. DOI: 10.1038/nn.3950.
 39. Сысоева М. В., Виноградова Л. В., Перескис М., ван Рейн К. М., Сысоев И. В. Выявление изменений направленных межструктурных связей при лимбических судорогах, вызванных введением антагониста эндоканнабиноидных рецепторов, методом нелинейной причинности по Грейнджеру // *Журнал высшей нервной деятельности имени И. П. Павлова*. 2019. Т. 69, № 6. С. 752–767. DOI: 10.1134/S0044467719060121.

References

1. Lodi M, Shilnikov AL, Storace M. Design principles for central pattern generators with preset rhythms. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2020;31(9):3658–3669. DOI: 10.1109/TNNLS.2019.2945637.
2. Kurkin SA, Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Astakhov SV, Hramov AE. Central pattern generator based on self-sustained oscillator coupled to a chain of oscillatory circuits. *Chaos*. 2022;32(3):033117. DOI: 10.1063/5.0077789.
3. Mahowald M, Douglas R. A silicon neuron. *Nature*. 1991;354(6354):515–518. DOI: 10.1038/354515a0.
4. Rasche C, Douglas R. An improved silicon neuron. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*. 2000;23(3):227–236. DOI: 10.1023/A:1008357931826.

5. van Schaik A. Building blocks for electronic spiking neural networks. *Neural Networks*. 2001; 14(6–7):617–628. DOI: 10.1016/S0893-6080(01)00067-3.
6. Dmitrichev AS, Kasatkin DV, Klinshov VV, Kirillov SY, Maslennikov OV, Shchapin DS, Nekorkin VI. Nonlinear dynamical models of neurons: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(4):5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
7. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*. 1961;1(6):445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
8. Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*. 1962;50(10):2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.
9. Hodgkin AL, Huxley AF. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of Physiology*. 1952;117(4):500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
10. Binczak S, Jacquir S, Bilbault JM, Kazantsev VB, Nekorkin VI. Experimental study of electrical FitzHugh–Nagumo neurons with modified excitability. *Neural Networks*. 2006;19(5):684–693. DOI: 10.1016/j.neunet.2005.07.011.
11. Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Hramov AE. Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators. *Nonlinear Dynamics*. 2019;98(1):735–748. DOI: 10.1007/s11071-019-05224-x.
12. Egorov NM, Ponomarenko VI, Sysoev IV, Sysoeva MV. Simulation of epileptiform activity using network of neuron-like radio technical oscillators. *Technical Physics*. 2021;66(3):505–514. DOI: 10.1134/S1063784221030063.
13. Egorov NM, Ponomarenko VI, Melnikova SN, Sysoev IV, Sysoeva MV. Common mechanisms of attractorless oscillatory regimes in radioengineering models of brain thalamocortical network. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(6):927–942 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-6-927-942.
14. Egorov NM, Kulminskiy DD, Sysoev IV, Ponomarenko VI, Sysoeva MV. Transient dynamics in electronic neuron-like circuits in application to modeling epileptic seizures. *Nonlinear Dynamics*. 2022;108(4):4231–4242. DOI: 10.1007/s11071-022-07379-6.
15. Kapustnikov AA, Sysoeva MV, Sysoev IV. The modeling of spike-wave discharges in brain with small oscillatory neural networks. *Mathematical Biology and Bioinformatics*. 2020;15(2):138–147 (in Russian). DOI: 10.17537/2020.15.138.
16. Kapustnikov AA, Sysoeva MV, Sysoev IV. Transient dynamics in a class of mathematical models of epileptic seizures. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2022;109:106284. DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.106284.
17. Egorov NM, Sysoev IV, Ponomarenko VI, Sysoeva MV. Epileptiform activity generation by an ensemble of complete electronic FitzHugh–Nagumo oscillators connected by a sigmoid couplings. In: *Proceedings of SPIE*. Vol. 12194. *Computational Biophysics and Nanobiophotonics*. Bellingham: SPIE; 2022. P. 1219403. DOI: 10.1117/12.2623993.
18. Egorov NM, Sysoev IV, Ponomarenko VI, Sysoeva MV. Complex regimes in electronic neuron-like oscillators with sigmoid coupling. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2022;160:112171. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112171.
19. Rabinovich MI, Zaks MA, Varona P. Sequential dynamics of complex networks in mind: Consciousness and creativity. *Physics Reports*. 2020;883:1–32. DOI: 10.1016/j.physrep.2020.08.003.
20. Wang Q, Perc M, Duan Z, Chen G. Impact of delays and rewiring on the dynamics of small-world neuronal networks with two types of coupling. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2010;389(16):3299–3306. DOI: 10.1016/j.physa.2010.03.031.
21. Winder S. *Analog and Digital Filter Design*. 2nd edition. USA: Elsevier; 2002. 458 p. DOI: 10.1016/B978-0-7506-7547-5.X5000-3.

22. Banerjee T, Biswas D, Sarkar BC. Anticipatory, complete and lag synchronization of chaos and hyperchaos in a nonlinear delay-coupled time-delayed system. *Nonlinear Dynamics*. 2013; 72(1–2):321–332. DOI: 10.1007/s11071-012-0716-4.
23. Srinivasan K, Raja Mohamed I, Murali K, Lakshmanan M, Sinha S. Design of time delayed chaotic circuit with threshold controller. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011;21(3): 725–735. DOI: 10.1142/S0218127411028751.
24. Karki J. *Active Low-Pass Filter Design*. Texas: Texas Instruments; 2000. 24 p.
25. Cao P, Fan H, Wang D, Shu H, Yang B, Han Y, Dong J. Compensation circuit design for tuned half-wavelength transmission lines based on Bessel filter. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*. 2022;134:107335. DOI: 10.1016/j.ijepes.2021.107335.
26. Buscarino A, Fortuna L, Frasca M, Sciuto G. Design of time-delay chaotic electronic circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*. 2011;58(8):1888–1896. DOI: 10.1109/TCSI.2011.2107190.
27. Rudy B, Fishell G, Lee S, Hjerling-Leffler J. Three groups of interneurons account for nearly 100% of neocortical GABAergic neurons. *Developmental Neurobiology*. 2011;71(1):45–61. DOI: 10.1002/dneu.20853.
28. Vinogradova OS. Hippocampus as comparator: Role of the two input and two output systems of the hippocampus in selection and registration of information. *Hippocampus*. 2001;11(5):578–598. DOI: 10.1002/hipo.1073.
29. Sysoev IV, Kornilov MV, Makarova NA, Sysoeva MV, Vinogradova LV. Modeling limbic seizure initiation with an ensemble of delay coupled neurooscillator. In: Lacarbonara W, Balachandran B, Leamy MJ, Ma J, Tenreiro Machado JA, Stepan G, editors. *Advances in Nonlinear Dynamics*. NODYCON Conference Proceedings Series. Cham: Springer; 2022. P. 73–81. DOI: 10.1007/978-3-030-81170-9_7.
30. Nelson TS, Suhr CL, Freestone DR, Lai A, Halliday AJ, McLean KJ, Burkitt AN, Cook MJ. Closed-loop seizure control with very high frequency electrical stimulation at seizure onset in the GAERS model of absence epilepsy. *International Journal of Neural Systems*. 2011;21(2):163–173. DOI: 10.1142/S0129065711002717.
31. van Heukelum S, Kelderhuis J, Janssen P, van Luijtelaaar G, Lüttjohann A. Timing of high-frequency cortical stimulation in a genetic absence model. *Neuroscience*. 2016;324:191–201. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2016.02.070.
32. Lopes da Silva F. Neural mechanisms underlying brain waves: from neural membranes to networks. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*. 1991;79(2):81–93. DOI: 10.1016/0013-4694(91)90044-5.
33. Schnitzler A, Gross J. Normal and pathological oscillatory communication in the brain. *Nature Reviews Neuroscience*. 2005;6(4):285–296. DOI: 10.1038/nrn1650.
34. Benca R, Duncan MJ, Frank E, McClung C, Nelson RJ, Vicentic A. Biological rhythms, higher brain function, and behavior: Gaps, opportunities, and challenges. *Brain Research Reviews*. 2009;62(1):57–70. DOI: 10.1016/j.brainresrev.2009.09.005.
35. Buzsáki G. *Rhythms of the Brain*. Oxford: Oxford University Press; 2006. 448 p. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195301069.001.0001.
36. Rudrauf D, Douiri A, Kovach C, Lachaux JP, Cosmelli D, Chavez M, Adam C, Renault B, Martinerie J, Le Van Quyen M. Frequency flows and the time-frequency dynamics of multivariate phase synchronization in brain signals. *NeuroImage*. 2006;31(1):209–227. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2005.11.021.
37. Good LB, Sabesan S, Marsh ST, Tsakalis K, Treiman D, Iasemidis L. Control of synchronization of brain dynamics leads to control of epileptic seizures in rodents. *International Journal of Neural Systems*. 2009;19(3):173–196. DOI: 10.1142/S0129065709001951.

38. Paz JT, Huguenard JR. Microcircuits and their interactions in epilepsy: is the focus out of focus? *Nature Neuroscience*. 2015;18(3):351–359. DOI: 10.1038/nn.3950.
39. Sysoeva MV, Vinogradova LV, Perescis M, van Rijn CM, Sysoev IV. Revealing changes in directed interstructural couplings at limbic seizures, induced by injection of cb1 receptor antagonist using nonlinear granger causality method. *I.P. Pavlov Journal of Higher Nervous Activity*. 2019;69(6):752–767 (in Russian). DOI: 10.1134/S0044467719060121.

Егоров Никита Михайлович — родился в Саратове (1998). Окончил гимназию № 31 и бакалавриат Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. по направлению «Радиотехника» (2021). Учится в магистратуре по направлению «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» на кафедре «Радиоэлектроника и телекоммуникации» СГТУ. Инженер-исследователь лаборатории радиотехнических устройств и видеотехники СГТУ имени Гагарина Ю. А., инженер СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — разработка электронных схем — моделей биологических объектов. Автор 7 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
 им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
 E-mail: egorov.n.m.omnis@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-3871-3992
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1095234

Сысоева Марина Вячеславовна — родилась в Саратове (1987). Окончила с отличием факультет нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета по направлению «Биомедицинская инженерия» (2011). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальностям «Биофизика» и «Радиофизика» (2015, СГУ). Доцент кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации» и старший научный сотрудник лаборатории радиотехнических устройств и видеотехники СГТУ имени Гагарина Ю. А., старший научный сотрудник СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, радиотехническое моделирование. Автор 39 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
 им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
 E-mail: bobrichkek@mail.ru
 ORCID: 0000-0003-4228-9124
 AuthorID (eLibrary.Ru): 651344

Пономаренко Владимир Иванович — родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ имени Н. Г. Чернышевского. Область научных интересов: нелинейная динамика, системы с запаздыванием, синхронизация, моделирование биологических систем. Автор 189 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
 им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: ponomarenkovi@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-1579-6465
 AuthorID (eLibrary.Ru): 39986



Корнилов Максим Вячеславович — родился в Саратове (1988). Окончил Лицей математики и информатики (2005), механико-математический факультет (2009, бакалавр математики) и факультет нано- и биомедицинских технологий (2011, магистр техники и технологии) Саратовского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2015, СГУ). Доцент кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ имени Н. Г. Чернышевского, старший научный сотрудник СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — анализ временных рядов, математическое моделирование биологических процессов, автоматическое распознавание изображений, компьютерное зрение. Автор 8 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: kornilovmv@gmail.com
ORCID: 0000-0003-1634-9007
AuthorID (eLibrary.Ru): 681980



Сысоев Илья Вячеславович — родился в Саратове (1983). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по специальности «Физика» (СГУ, 2004). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007) и доктора физико-математических наук (2019) по специальности «Радиофизика». Профессор кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ имени Н. Г. Чернышевского, ведущий научный сотрудник СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Зам. главного редактора журнала «Известия вузов. ПНД». Научные интересы — исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор 80 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ivssci@gmail.com
ORCID: 0000-0002-9203-5504
AuthorID (eLibrary.Ru): 128457

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

A. N. Chumachenko, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

S. Boccaletti, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

A. M. Bykov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

V. A. Vakorin, Ph.D., Simon Fraser University (Vancouver, Canada)

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

N. S. Ginzburg, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

A. V. Kraskov, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

N. V. Kuznetsov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

G. van Luijelaar, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

A. Lüttjohann, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

I. I. Mokhov, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

A. B. Neiman, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

V. I. Nekorkin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Pkovsky, Dr. rer. Nat. habil., Professor, University of Potsdam (Potsdam, Germany)

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

V. V. Tuchin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

V. A. Cherepenin, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Трикладная нелинейная динамика



12
1993

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >