Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-003169
EDN: RLVYAD

К 130-летию уединённой волны Кортевега – де Фриза и к 60-летию слова «солитон»

О. И. Канаков

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: ✉okanakov@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 17.03.2025, опубликована 31.03.2025

Для цитирования: *Канаков О. И.* К 130-летию уединённой волны Кортевега – де Фриза и к 60-летию слова «солитон» // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. 145–152. DOI: 10.18500/0869-6632-003169. EDN: RLVYAD

For citation: Kanakov OI. To the 130th anniversary of the solitary wave by Korteweg and de Vries, and the 60th anniversary of the word “soliton”. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(2):145–152. DOI: 10.18500/0869-6632-003169

1. Уравнение Кортевега – де Фриза и солитоны

В 2025 году исполняется 130 лет с публикации статьи Д. Кортевега и Г. де Фриза [1], в которой исследовалось знаменитое нелинейное уравнение в частных производных

$$u'_t + 6uu'_x + u'''_{xxx} = 0 \tag{1}$$

(далее — «уравнение КдФ»), описывающее волны на воде в предположении, что глубина воды много меньше длины волны, но много больше амплитуды, и известное сейчас под именами этих авторов (хотя в другой форме было записано ранее Ж. Буссинеском [2, с. 360]). В частности, в [1] было найдено решение, имеющее вид стационарной уединённой волны и воспроизводящее известную к тому времени зависимость скорости волны от амплитуды, ранее экспериментально установленную первооткрывателем уединённых волн на поверхности воды Дж. Скоттом Расселом [3, с. 423].

Тот факт, что уравнение КдФ воспроизводит и другие экспериментальные наблюдения Рассела — распад длинноволнового начального возмущения на цуг уединённых волн, а также взаимодействие таких волн между собой без изменения формы и скорости, — был установлен значительно позже при помощи численного моделирования в работе Н. Дж. Забуски (Забужского) и М.Д. Крускала [4], которой в этом году исполняется 60 лет. Вышеописанный характер взаимодействия уединённых волн, которое оказалось «упругим» несмотря на нелинейность уравнения, вызвал всплеск интереса исследователей как к уравнению КдФ, так и к этому классу решений. Термин «солитон», впервые введённый именно в работе [4], был скомбинирован из первых букв англоязычного термина «solitary wave» (уединённая волна) и окончания «*-он*», типичного для названий элементарных частиц и призванного подчеркнуть «корпускулярный» характер поведения таких решений[1].

В ознаменование этих двух годовщин — 130-летия солитонов в уравнении КдФ и 60-летия самого слова «солитон» — предлагаем освежить в памяти некоторые результаты из теории нелинейных волн, составляющие основу теории солитонов и вызванные к жизни работами, цитированными выше, не претендуя на полноту ни в плане математической строгости (не будем полностью формулировать условия теорем), ни в плане библиографии и истории науки (за подробностями отошлём к вводному обзору [5] и к монографиям [6, 7], хотя полностью осветить все варианты физической и математической постановки задач, связанных с солитонами, сейчас невозможно даже в объёме книги).

2. Метод обратной задачи рассеяния

К. С. Гарднер, Дж. М. Грин, М. Д. Крускал и Р. М. Миура в своих статьях 1967 и 1974 годов [8, 9] предложили оригинальный подход, модификации которого сейчас известны под названием «методы обратной задачи рассеяния», сводящий отыскание решения задачи Коши для нелинейного уравнения КдФ к решению только линейных задач.

Центральным элементом метода является специфическая замена переменных, для построения которой вводится в рассмотрение «вспомогательная линейная задача» — задача на собственные числа λ и собственные функции $\psi(x)$ стационарного уравнения Шрёдингера

$$L\psi = \lambda\psi, \tag{2a}$$

где

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x), \tag{2b}$$

куда в качестве потенциала $U(x)$ формально подставляется профиль искомого решения уравнения КдФ в некоторый фиксированный момент времени $U(x) = u(x,t)$, причём время t выступает в этой вспомогательной задаче исключительно в качестве параметра. Для дальнейшего важно, чтобы солитон был не положительным, а отрицательным — тогда в уравнении Шрёдингера он выступает как потенциальная яма; это позволяет рассматривать собственные состояния, локализованные в одной или нескольких ямах, наряду с задачей о рассеянии (то есть об отражении и пропускании) волн де Бройля, набегающих из бесконечности, на неоднородности потенциала, образованной этими ямами. Из этих соображений уравнение КдФ (1) переписывается путём замены u на $-u$:

$$u'_t - 6uu'_x + u'''_{xxx} = 0. \tag{3}$$

Как было показано в [8, 9], при условии $\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x)||x|^n dx < \infty$, $n \in \{0, 1, 2\}$, обеспечивающем достаточно быстрое приближение $U(x)$ к нулю на бесконечности (это означает, что «неоднородность» потенциала, то есть вся существенно ненулевая часть $U(x)$, достаточно хорошо локализована в пространстве), спектр собственных чисел задачи (2a,b) состоит из непрерывной

[1] Для большего сходства со словами «электрон», «нейтрон» и т. п. авторы вначале придумали термин «*solitron*», но слово оказалось занято — так называлась (и по сей день называется) фирма, выпускающая силовые полупроводниковые приборы [5].

части, занимающей всю положительную полуось $\lambda_k = k^2 > 0$, где $k \neq 0$ — действительные числа, и конечного (возможно, пустого) дискретного набора невырожденных (некратных) отрицательных собственных чисел $\lambda_n = -\kappa_n^2 < 0$. Таким образом, спектр собственных чисел полностью определяется его дискретной частью $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$, где N — количество собственных чисел, составляющих дискретную часть спектра.

Соответствующие собственные функции для дискретной части спектра действительны, локализованы в пространстве вблизи неоднородности потенциала и экспоненциально убывают на бесконечности: $\psi(x \to +\infty) = C_n e^{-\kappa_n x}$, где C_n — константы, обеспечивающие нормировку $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x)dx = 1$ (для определённости можно положить $C_n > 0$). Каждая собственная функция для непрерывной части спектра на бесконечностях (вдали от неоднородности потенциала) представляет собой суперпозицию бегущих гармонических волн с некоторым волновым числом k, проходящих через неоднородность и отражающихся от неё. Для определённости можно положить, что в положительной области $x \to +\infty$ присутствуют набегающая (из бесконечности) и отражённая волны, а в отрицательной области $x \to -\infty$ — только прошедшая волна. Тогда собственные функции однозначно определяются параметрами своих асимптотик: для дискретной части спектра — константами C_n, а для непрерывной части — коэффициентами отражения $b(k)$ (через них выражаются и коэффициенты прохождения).

Совокупность, состоящую из дискретной части спектра $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ и параметров асимптотик собственных функций C_n и $b(k)$, называют «данными рассеяния». Известны условия, при которых однозначно решается не только задача отыскания данных рассеяния по заданному потенциалу $U(x)$ («прямая задача рассеяния»), но и «обратная задача рассеяния», состоящая в отыскании потенциала по известным данным рассеяния. Основной этап решения обратной задачи состоит в решении линейного интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко. Таким образом устанавливается взаимно-однозначное соответствие между рассмотренным классом потенциалов $U(x)$ и данными рассеяния.

Именно это взаимно-однозначное соответствие и используется в качестве замены переменных в уравнении КдФ: вспомогательная линейная задача (2a,b) (с подстановкой $U(x) = u(x,t)$) увязывает искомое решение $u(x,t)$ в каждый конкретный момент времени с некоторыми данными рассеяния, а эволюция решения $u(x,t)$ во времени, таким образом, взаимно-однозначно увязывается с некоторой эволюцией данных рассеяния $\{\lambda_n(t)\}_{n=1}^N, C_n(t), b(k,t)$.

Разумеется, вышеописанная замена переменных не записывается в виде готовой формулы, поэтому эволюция в новых переменных не может быть найдена простой подстановкой в исходное уравнение. Тем не менее динамика данных рассеяния, в которую отображается уравнение КдФ (3), была найдена в [8, 9], причём, во-первых, спектр собственных чисел оказывается постоянным во времени:

$$\lambda_n(t) = -\kappa_n^2 = \mathrm{const}; \tag{4}$$

во-вторых, уравнения движения для параметров собственных функций оказываются линейными, и их решение имеет вид

$$C_n(t) = C_n(0)e^{4\kappa_n t}, \quad b(k,t) = b(k,0)e^{8ik^3 t}. \tag{5}$$

В частности, выясняется (путём решения обратной задачи рассеяния), что решение (5) при нулевом коэффициенте отражения $b(k,t) = b(k,0) = 0$ представляет собой в исходных переменных $u(x,t)$ комбинацию из N солитонов, распространяющихся со скоростями $c_n = -4\lambda_n$ ($n = 1, \ldots, N$; так, в случае единственного дискретного собственного числа $N = 1$ имеем один изолированный солитон и т. д.). В том числе это означает, что потенциальная яма (или их совокупность), имеющая форму солитона (или их совокупности) в уравнении КдФ, является с точки зрения уравнения Шрёдингера «безотражательным потенциалом» в том смысле, что набегающая на него волна де Бройля не претерпевает отражения.

3. Представление Лакса

Замена переменных, используемая в методе обратной задачи рассеяния, крайне неочевидна и выглядит как изобретательный трюк, основанный на знаниях свойств уравнения Шрёдингера, так что остаётся непонятным, может ли описанный подход быть обобщен для применения к другим нелинейным моделям. Один из способов получения этой замены в рамках более общего подхода был предложен П. Лаксом в 1968 году [10].

Можно показать прямой подстановкой, что уравнение КдФ (3) эквивалентно операторному уравнению Лакса $L'_t = [B, L]$ или

$$L'_t + [L, B] = 0, \tag{6}$$

где L'_t — производная оператора L по времени, $[L, B] = LB - BL$ — коммутатор, оператор L определён согласно (2b) (тогда $L'_t = u'_t(x, t)$), а оператор B задан в виде

$$B = B_2 = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3u'_x. \tag{7}$$

Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что левая часть (6) тождественна оператору домножения на левую часть уравнения КдФ (3), то есть

$$(L'_t + [L, B])\psi = (u'_t - 6uu'_x + u'''_{xxx})\psi, \tag{8}$$

и является нулевым оператором тогда и только тогда, когда $u(x, t)$ является решением уравнения КдФ (3).

Представление (6) удобно тем, что свойство постоянства во времени дискретной части спектра оператора $L(t)$ (4) доказывается в общем виде для оператора $L(t)$, удовлетворяющего уравнению (6), при условии самосопряжённости оператора L и достаточно слабых требованиях к области определения и непрерывной дифференцируемости нужных операторов и функций [11, с. 58, теорема 3.1.1]. Сохранение во времени непрерывной части спектра должно быть обосновано дополнительно, либо также обеспечено уравнением (6), если дополнительно потребовать антисамосопряжённость оператора $B(t)$, существование (унитарного) оператора $U(t)$ как решения операторного уравнения $U'_t = BU$ и (непрерывную) дифференцируемость нужных операторов по времени [11, с. 60, теорема 3.2.1]. Кроме того, эволюция во времени для нормированных собственных функций ψ в случае антисамосопряжённого оператора B описывается линейным уравнением

$$\psi'_t = B\psi. \tag{9}$$

В частности, указанным условиям удовлетворяют операторы L (самосопряжённый) и B (антисамосопряжённый), определённые в (2b) и в (7), откуда следует постоянство спектра (4), а из (9) — эволюция асимптотических параметров собственных функций (5). Таким образом не только воспроизводится ключевой элемент метода обратной задачи рассеяния, состоящий в сведении нелинейного волнового уравнения КдФ к линейной динамике данных рассеяния, но и открывается путь к обобщению этого метода путём отыскания других нелинейных моделей, сводимых к линейным при помощи замены, основанной на некоторой вспомогательной задаче рассеяния.

Сохраняя вид оператора L (2b), можно поставить в общем виде задачу отыскания таких антисамосопряжённых операторов B, для которых левая часть уравнения Лакса (6) принимает вид оператора домножения на некоторую функцию $f(x, t)$:

$$(L'_t + [L, B])\psi = f(x, t)\psi, \tag{10}$$

где $f(x,t)$ получается некоторым преобразованием из $u(x,t)$, — аналогично (8), но теперь не обязательно $f(x,t)$ должна совпадать с левой частью уравнения КдФ. Решение задачи в такой постановке приводит к последовательности операторов B_1, B_2, B_3 и т. д. [10], [11, с. 65–66], каждый из которых, будучи подставлен в уравнение Лакса (6) вместе со шрёдингеровским оператором L (2b), порождает некоторое уравнение относительно $u(x,t)$.

Так, оператор $B_1 = \partial/\partial x$ обращает уравнение Лакса в линейное уравнение

$$u'_t - u'_x = 0, \tag{11}$$

решениями которого являются стационарные волны. Оператор B_2 совпадает (с точностью до эквивалентных переобозначений) с введённым в (7) и порождает, соответственно, уравнение КдФ (3). Следующие члены этой операторной последовательности порождают новые нелинейные волновые модели, решения которых по построению обеспечивают постоянство спектра (4) и линейную эволюцию собственных функций (9) оператора Шрёдингера L, а значит, допускают анализ методом обратной задачи рассеяния на основе уравнения Шрёдингера и являются полностью интегрируемыми. Эту последовательность интегрируемых волновых моделей называют «иерархия КдФ».

4. Законы сохранения и представление Гамильтона

Из стационарного уравнения Шрёдингера (2a), где оператор L по-прежнему задан в виде (2b), и закона эволюции собственных функций в представдении Лакса (9) в общем виде, не конкретизируя вид антисамосопряжённого оператора B, можно получить последовательность законов сохранения, каждый из которых имеет форму пространственного интеграла от некоторой «плотности», выражаемой в каждой точке через решение $u(x,t)$ и его производные:

$$Q_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\int \rho_{2n+1}dx = \mathrm{const}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{12}$$

где

$$\rho_1 = -u, \quad \rho_2 = \frac{\partial}{\partial x}\rho_1, \quad \rho_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x}\rho_k + \sum_{m=1}^{k-1}\rho_m\rho_{k-m} \tag{13}$$

(интегралы здесь и далее берутся от $-\infty$ до $+\infty$). В частности, после упрощения интегралов имеем

$$Q_0 = \int \frac{u}{2}dx, \quad Q_1 = \int \frac{u^2}{2}dx, \quad Q_2 = \int\left(\frac{{u'_x}^2}{2} + u^3\right)dx. \tag{14}$$

Вывод этих выражений в применении к уравнению КдФ был описан в [12, § 3]. В силу независимости вывода от конкретного вида оператора B (что отмечено, например, в [13, раздел 3]), все эти законы сохранения справедливы для каждого из уравнений в иерархии КдФ.

Более того, выясняется, что (любое) n-е уравнение из иерархии КдФ само по себе может быть получено из соответствующего интеграла Q_n как гамильтоновская система, имеющая в качестве гамильтониана интеграл Q_n:

$$u'_t = \{u, Q_n\} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta Q_n}{\delta u}, \tag{15}$$

в которой скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ задаётся в виде скобки Гарднера

$$\{F, G\} = \int \frac{\delta F}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta G}{\delta u}dx, \tag{16}$$

где $\delta/\delta u$ означает производную Фреше. Для исходного уравнения КдФ (3), соответствующего случаю $n = 2$, это было доказано В. Е. Захаровым и Л. Д. Фаддеевым в 1971 году [12], причём было также показано, что замена переменных, используемая в методе обратной задачи рассеяния (см. разд. 2), приобретает в этих обозначениях смысл перехода к переменным «действие-угол» [14, § 50].

Итак, представление Лакса (6) позволяет нам найти последовательность операторов B_1, $B_2 \ldots$, каждый из которых приводит (по построению) к некоторой полностью интегрируемой модели, порождая таким образом иерархию уравнений КдФ. С другой стороны, мы получаем последовательность интегралов движения Q_0, Q_1, $Q_2 \ldots$, каждый из которых автоматически является таковым для каждой модели в иерархии. Эти две линии рассуждений сами по себе выглядят как «ортогональные», поэтому утверждение, что каждая из моделей в иерархии КдФ (или, другими словами, каждый из операторов B_n) находится в прямой взаимосвязи с соответствующим конкретным интегралом Q_n посредством гамильтоновской динамики[2], звучит в этом контексте как новое и неожиданное, и при этом замыкает «логический треугольник». Сам факт наличия такого «треугольника» наводит на мысль, что все три его «стороны» должны следовать из какого-то единого подхода. В самом деле, оказывается (см., например, [15]), что как операторы B_n, так и гамильтонианы Q_n выражаются через «полуцелые степени» $L^{(2n-1)/2}$ оператора L (где квадратный корень из дифференциального оператора определяется с помощью аппарата псевдодифференциальных операторов в виде ряда Лорана по оператору дифференцирования $\partial/\partial x$, содержащего положительные и отрицательные степени $\partial/\partial x$), при этом все получаемые гамильтоновские фазовые потоки по построению являются по отношению друг к другу инвариантными преобразованиями (то есть все гамильтонианы имеют нулевую скобку Пуассона между собой), а значит, каждый из гамильтонианов автоматически является интегралом движения для любого другого из этого семейства [14, § 40].

Таким образом, вся вышеописанная картина порождается оператором L. Выше рассматривался единственный его вариант — оператор Шрёдингера (2b). Обобщения подхода Лакса, в которых оператор L задаётся другими способами (вместе с некоторыми дополнительными обобщениями теории), позволили единообразно описать другие интегрируемые модели, в числе которых нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение «синус-Гордона», цепочечная модель Тоды — все они допускают и гамильтоновское описание [16].

Заключение

Обе работы [1] и [4] не были первыми в своих ключевых результатах: «уравнение Кортевега–де Фриса» (как мы его сейчас называем) было ранее записано в другой форме Буссинеском, а «корпускулярный» характер взаимодействия солитонов, который побудил Забужского и Крускала к изобретению термина «солитон» и оказался большим сюрпризом для их современников, был описан ещё в XIX веке Дж. Скоттом Расселом по итогам его впечатляющей программы экспериментальных исследований гидродинамических явлений, связанных с движением судов в каналах. Тем не менее статья Кортевега и де Фриса послужила одной из предпосылок для работы Забужского и Крускала, которая, в свою очередь, запустила настоящую лавину исследований по математике и физике солитонов самой разной природы. К сожалению, Расселу, несмотря на его усилия, не удалось вызвать сопоставимого интереса у своих современников: ни физика, ни математика, ни вычислительная техника тогда не были к этому готовы.

[2]Интеграл Q_0, у которого, казалось бы, не нашлось «собрата» в иерархии КдФ, приводит к тривиальному уравнению $u'_t = 0$.

Зато теперь объём теоретических и экспериментальных результатов, так или иначе связанных с солитонами, достиг таких объёмов, что даже перечислить основные направления этих исследований было бы невозможно в рамках краткой заметки. Такой задачи мы и не ставили, а лишь кратко сформулировали некоторые из результатов в теории солитонов и постарались отследить логические взаимосвязи между ними. Вряд ли исследователь, чьи основные научные интересы связаны с солитонами, найдёт что-то новое для себя в этой заметке; в то же время надеемся, что для читателя, приступающего к изучению этой тематики, мы подсветили некоторые ориентиры в море лежащей перед ним информации.

Список литературы

1. *Korteweg D. J., de Vries G.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1895. Vol. 39, no. 240. P. 422–443. DOI: 10.1080/14786449508620739.
2. *Boussinesq J.* Essai sur la théorie des eaux courantes. Paris: Imprimerie Nationale, 1877. 680 p. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56673076.
3. *Scott Russell J.* Report of the Committee on Waves: Appointed by the British Association at Bristol in 1836 [And Consisting of Sir John Robison and John Scott Russell]. London: R. and J. E. Taylor, 1838. 80 p. https://books.google.ru/books?id=ahEMAAAAYAAJ.
4. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of “Solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Physical Review Letters. 1965. Vol. 15, no. 6. P. 240–243. DOI: 10.1103/PhysRevLett.15.240.
5. *Marin F.* Solitons: Historical and physical introduction // Encyclopedia of Complexity and Systems Science / ed. by R. A. Meyers. Berlin, Heidelberg: Springer, 2017. P. 1–20. DOI: 10.1007/978-3-642-27737-5_506-2.
6. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи / пер. с англ. А. В. Михайлова; под ред. [и с предисл.] В. Е. Захарова. Москва: Мир, 1987. 478 с.
7. *Додд Р. Эйлбек Д. Гиббон Д. Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения / пер. с англ. В. П. Гурария, В. И. Мацаева; под ред. А. Б. Шабата. Москва: Мир, 1988. 694 с.
8. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg-deVries equation // Physical Review Letters. 1967. Vol. 19, no. 19. P. 1095–1097. DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1095.
9. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Korteweg – de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1974. Vol. 27, no. 1. P. 97–133. DOI: 10.1002/cpa.3160270108.
10. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1968. Vol. 21, no. 5. P. 467–490. DOI: 10.1002/cpa.3160210503.
11. *Eckhaus W., van Harten A.* Chapter 3. Isospectral Potentials: The Lax Approach // The Inverse Scattering Transformation and The Theory of Solitons: An Introduction. North-Holland Mathematics Studies, vol. 50. Elsevier, 1981. P. 53–73. DOI: 10.1016/S0304-0208(08)70593-0.
12. *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.* Уравнение Кортевега – де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // Функциональный анализ и его приложения. 1971. Т. 5, № 4. С. 18–27. MathNet: faa2612.
13. *Krishnaswami G. S., Vishnu T. R.* The Idea of a Lax Pair — Part II: Continuum Wave Equations // Resonance. 2021. Vol. 26, no. 2. P. 257–274. DOI: 10.1007/s12045-021-1124-1.
14. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики: учебное пособие. Изд. 5-е, стереотипное. Москва: УРСС, 2003. 416 с.

15. *Zabrodin A.* Lectures on nonlinear integrable equations and their solutions. Preprint arXiv: 1812.11830. DOI: 10.48550/arXiv.1812.11830.
16. *Faddeev L. D.* A Hamiltonian interpretation of the inverse scattering method // Solitons. Topics in Current Physics, vol. 17 / ed. by R. K. Bullough, P. J. Caudrey. Berlin, Heidelberg: Springer, 1980. P. 339–354. DOI: 10.1007/978-3-642-81448-8_11.

References

1. Korteweg DJ, De Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1895;39(240):422–443. DOI: 10.1080/14786449508620739.
2. Boussinesq J. Essai sur la théorie des eaux courantes. Paris: Imprimerie Nationale; 1877. 680 p. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56673076.
3. Scott Russell J. Report of the Committee on Waves: Appointed by the British Association at Bristol in 1836 [and Consisting of Sir John Robison and John Scott Russell]. London: R. and J. E. Taylor; 1838. 80 p. https://books.google.ru/books?id=ahEMAAAAYAAJ.
4. Zabusky NJ, Kruskal MD. Interaction of “Solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Physical Review Letters. 1965;15(6):240–243. DOI: 10.1103/PhysRevLett.15.240.
5. Marin F. Solitons: Historical and physical introduction. In: RA. Meyers (ed.). Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Berlin, Heidelberg: Springer; 2017. P. 1–20. DOI: 10.1007/978-3-642-27737-5_506-2.
6. Ablowitz MJ, Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM; 1981. 424 p. DOI: 10.1137/1.9781611970883.
7. Dodd RK, Eilbeck CJ, Gibbon JD, Morris HC. Solitons and Nonlinear Wave Equations. New York: Academic Press; 1982. 630 p.
8. Gardner CS, Greene JM, Kruskal MD, Miura RM. Method for solving the Korteweg-deVries equation. Physical Review Letters. 1967;19(19):1095–1097. DOI: 10.1103/PhysRevLett.19.1095.
9. Gardner CS, Greene JM, Kruskal MD, Miura RM. Korteweg – de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1974;27(1): 97–133. DOI: 10.1002/cpa.3160270108.
10. Lax PD. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1968;21(5):467–490. DOI: 10.1002/cpa3160210503.
11. Eckhaus W, van Harten A. Chapter 3. Isospectral Potentials: The Lax Approach. In: The Inverse Scattering Transformation and The Theory of Solitons: An Introduction. North-Holland Mathematics Studies, vol. 50. Elsevier; 1981. P. 53–73. DOI: 10.1016/S0304-0208(08)70593-0.
12. Zakharov VE, Faddeev LD. Korteweg-de Vries equation: A completely integrable Hamiltonian system. Functional Analysis and Its Applications. 1972;5(4):280–287. MathNet: faa2612.
13. Krishnaswami GS, Vishnu TR. The Idea of a Lax Pair — Part II: Continuum Wave Equations. Resonance. 2021;26(2):257–274. DOI: 10.1007/s12045-021-1124-1.
14. Arnold VI. Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Springer; 1989. 536 p.
15. Zabrodin A. Lectures on nonlinear integrable equations and their solutions. Preprint arXiv: 1812.11830. DOI: 10.48550/arXiv.1812.11830.
16. Faddeev LD. A Hamiltonian interpretation of the inverse scattering method. In: RK. Bullough, PJ. Caudrey (eds.). Solitons. Topics in Current Physics, vol. 17. Berlin, Heidelberg: Springer; 1980. P. 339–354. DOI: 10.1007/978-3-642-81448-8_11.