



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003140  
EDN: UNTBDB

## О дискретных аттракторах Лоренца различных типов

А. С. Гонченко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

E-mail: [agonchenko@mail.ru](mailto:agonchenko@mail.ru)

Поступила в редакцию 26.06.2024, принята к публикации 31.07.2024,  
опубликована онлайн 25.11.2024, опубликована 29.11.2024

**Аннотация.** Цель настоящей работы — развитие теории дискретных аттракторов лоренцевского типа в случае трехмерных отображений. При этом особое внимание будет уделено стандартным дискретным аттракторам Лоренца, а также дискретным аттракторам Лоренца с осевой симметрией (то есть с симметрией  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$ , характерной для потоков с аттракторами Лоренца). Основные *результаты* работы связаны с построением элементов классификации таких аттракторов. Для различных типов дискретных аттракторов Лоренца мы опишем их основные геометрические свойства и свойства динамики, а также представим основные феноменологические бифуркационные сценарии, в которых они возникают. В работе будут также рассмотрены конкретные примеры дискретных аттракторов Лоренца различных типов в трехмерных квадратичных отображениях, таких как трехмерные отображения Эно и квадратичные отображения с осевой симметрией и постоянным якобианом. Для последних будут построены их нормальные формы — универсальные отображения, к которым сводится любое отображение из данного класса с помощью линейных преобразований координат.

**Ключевые слова:** аттрактор Лоренца, бифуркация, трехмерное отображение Эно, глобальная симметрия, бифуркационный сценарий.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 23-71-30008). Работа также выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, Соглашение FSWR-2020-0036 (численные эксперименты в разделах 1.4, 2 и 3).

**Для цитирования:** Гонченко А. С. О дискретных аттракторах Лоренца различных типов // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 832–857. DOI: 10.18500/0869-6632-003140. EDN: UNTBDB

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## On discrete Lorenz attractors of various types

A. S. Gonchenko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>National Research University “Higher School of Economics”, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: [agonchenko@mail](mailto:agonchenko@mail)

Received 26.06.2024, accepted 31.07.2024, available online 25.11.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** The purpose of this work is to develop the theory of discrete attractors of Lorenz type in the case of three-dimensional maps. In this case, special attention will be paid to standard discrete Lorenz attractors, as well as discrete Lorenz attractors with axial symmetry (i.e. with symmetry  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$  characteristic of flows with the Lorenz attractors). The main results of the work are related to the construction of elements of classification of such attractors. For various types of discrete Lorenz attractors, we will describe their basic geometric and dynamical properties, and also present the main phenomenological bifurcation scenarios in which they arise. In the work we also consider specific examples of discrete Lorenz attractors of various types in three-dimensional quadratic maps such as three-dimensional Hénon maps and quadratic maps with axial symmetry and constant Jacobian. For the latter, their normal forms will be constructed — universal maps, to which any map from a given class can be reduced by means of linear coordinate transformations.

**Keywords:** Lorenz attractor, bifurcation, three-dimensional Hénon map, global symmetry, bifurcation scenario.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Russian Science Foundation (project 23-71-30008). The work was also supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Agreement FSWR-2020-0036 (numerical experiments in Sections 1.4, 2 and 3).

**For citation:** Gonchenko AS, On discrete Lorenz attractors of various types. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):832–857. DOI: 10.18500/0869-6632-003140

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

Аттрактор Лоренца, открытый в знаменитой работе Эдварда Лоренца [1] в 1963 году, является, наверное, самым известным из большого семейства странных аттракторов. Как это часто бывает с выдающимися открытиями, он стал известен математическому миру лишь спустя более чем 10 лет после того, как статья [1] была опубликована. Тема оказалась настолько актуальной и интересной, что уже в первых математических работах по аттрактору Лоренца, см., например, [2–5], была получена целая серия фундаментальных результатов об этом новом для того времени феномене динамики. При этом были изучены самые разные ее аспекты: были построены геометрические модели аттракторов Лоренца, в том числе знаменитая модель Афраймовича–Быкова–Шильникова [4, 5], были изучены бифуркационные сценарии их возникновения [6–8] и статистические свойства [9, 10], были найдены инварианты топологической эквивалентности, так называемые нидинг-инварианты [11, 12] и т. п. В целом с точки зрения теории динамических систем аттрактор Лоренца оказался необычайно интересным объектом, который не только внес значительный вклад в эту теорию, но и породил целый ряд новых задач и новых направлений. Так, например, возникла теория сингулярно-гиперболических аттракторов [13, 14], включающая аттракторы Лоренца как ее эталонный случай, а также далеко продвинутая теория псевдогиперболических аттракторов [15, 16], в которой аттракторы Лоренца являются самыми простыми ее представителями — системами без гомоклинических касаний.

И в этой связи к одним из наиболее интересных, на наш взгляд, результатов, полученных в последнее время в этом направлении, можно отнести открытие так называемых *дискретных гомоклинических аттракторов* [17–21]. Этим термином мы обозначаем, прежде всего, странные аттракторы многомерных диффеоморфизмов, которые содержат только одну седловую

неподвижную точку и целиком ее неустойчивое многообразие (вместе со всеми гомоклиническими траекториями). В настоящей работе мы будем рассматривать трехмерные диффеоморфизмы, которые в теории динамических систем имеют как вполне самостоятельный интерес, так и могут выступать в роли отображений Пуанкаре для четырехмерных потоков.

Насколько мы знаем, первые содержательные примеры дискретных гомоклинических аттракторов в случае трехмерных диффеоморфизмов были приведены в работе [17], в которой они были найдены в трехмерных отображениях вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + Bx + M_2y - z^2, \quad (1)$$

где  $M_1, M_2$  и  $B$  — параметры, при этом  $B$  — это якобиан отображения (1). На рис. 1 показаны фазовые портреты некоторых таких аттракторов.

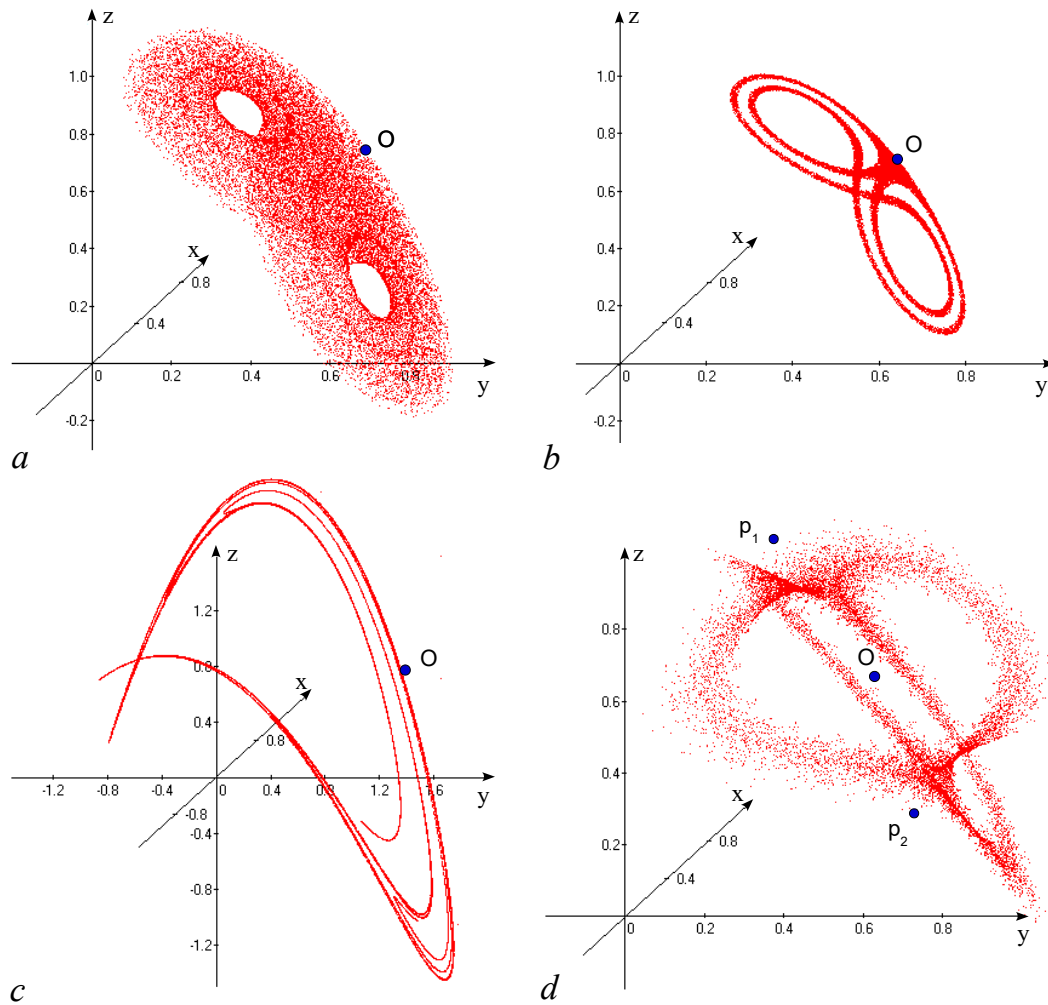


Рис. 1. Примеры гомоклинических аттракторов отображения (1) — по статье [17]. *a–b* — Дискретные аттракторы Лоренца при  $B = 0.7$ ;  $M_1 = 0$  и  $M_2 = 0.85$  (*a*),  $M_2 = 0.815$  (*b*). *c* — Аттрактор типа 2D-аттрактора Эно при  $B = 0.1$ ;  $M_1 = 1.4$ ;  $M_2 = 0.2$ . *d* — Гомоклинический аттрактор периода 2 (содержащий седловую орбиту  $(O_1, O_2)$  периода 2) при  $B = -0.95$ ,  $M_1 = 1.77$ ,  $M_2 = -0.925$  (цвет онлайн)

Fig. 1. Examples of homoclinic attractors for map (1) — by the paper [17]. *a–b* — Discrete Lorenz attractors at  $B = 0.7$ ;  $M_1 = 0$  and  $M_2 = 0.85$  (*a*),  $M_2 = 0.815$  (*b*). *c* — An attractor similar to a 2D Hénon-like attractor at  $B = 0.1$ ;  $M_1 = 1.4$ ;  $M_2 = 0.2$ . *d* — A period-2 homoclinic attractor (containing a saddle orbit  $(O_1, O_2)$  of period 2) at  $B = -0.95$ ,  $M_1 = 1.77$ ,  $M_2 = -0.925$  (color online)

Аттракторы, показанные на рис. 1, *a*, *b*, очень похожи на классические аттракторы Лоренца. Аттрактор на рис. 1, *c* также является дискретным гомоклиническим аттрактором, похожим на двумерный аттрактор Эно. Напомним, что классический аттрактор Эно [22] существует у стандартного двумерного отображения Эно

$$\bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + M_2 z - z^2 \quad (2)$$

при  $M_1 = 1.4$ ,  $M_2 = 0.3$ , у которого якобиан  $J = -M_2$  отрицателен, то есть соответствующее двумерное отображение является неориентируемым. Так как при  $B = 0$  трехмерное отображение (1) превращается в двумерное (2), то неудивительно, что у него при малых  $B > 0$ , когда оно ориентируемо, существует аттрактор, похожий на аттрактор Эно. С другой стороны, аттракторы, показанные на рис. 1, *a*, *b* и *d*, существенно трехмерные. Кроме того, аттрактор рис. 1, *d* является еще и неориентируемым — соответствующее трехмерное отображение имеет якобиан  $B = -0.95 < 0$ .

В настоящей работе мы будем рассматривать дискретные аттракторы лоренцевского типа. Условно говоря, известные на сегодня такие дискретные аттракторы можно разбить на 3 класса. Это (i) стандартные аттракторы Лоренца, (ii) аттракторы Лоренца с осевой симметрией, (iii) аттракторы других типов, например, с несколькими неподвижными точками. Что касается стандартных аттракторов Лоренца, то первые их примеры были найдены еще в работе [17], см. рис. 1, *a*, *b*, а основные элементы их качественной теории были построены в работах [18–20]. Аттракторы с осевой симметрией были открыты в нашей недавней работе [23]. Такие аттракторы, так же как и стандартные, содержат только одну неподвижную точку, но некоторые их типы (например, скрученные (twisted) аттракторы, см. раздел 3) весьма мало похожи на классические аттракторы Лоренца. Некоторые примеры дискретных аттракторов третьего класса были найдены в работах [24, 25], и они по своим геометрическим свойствам похожи на аттракторы Лоренца с несколькими состояниями равновесия. О последних вообще мало что известно, так что некоторые результаты работ [24, 25] о дискретных аттракторах можно рассматривать в качестве определенного продвижения и в теории аттракторов трехмерных потоков.

Содержание работы. В разделе 1 рассматриваются стандартные дискретные аттракторы Лоренца. В подразделе 1.1 приводится их геометрическое определение. В подразделе 1.2 обсуждаются гиперболические свойства дискретных аттракторов Лоренца. Здесь мы кратко напоминаем понятие пседогиперболического аттрактора по Тураеву–Шильникову, а также объясняем его особенности по отношению к дискретным аттракторам Лоренца. В подразделе 1.3 обсуждаются феноменологические сценарии возникновения дискретных аттракторов Лоренца в однопараметрических семействах отображений, а в подразделе 1.4 приводятся примеры таких сценариев для конкретных моделей (трехмерные отображения Эно и модель кельтского камня). Новый класс аттракторов — дискретные аттракторы Лоренца с осевой симметрией — рассматривается в разделе 2. В подразделе 2.1 выделяется универсальный класс осесимметричных квадратичных отображений с постоянным якобианом, для которых также строятся некоторые элементы их алгебраической теории. В подразделе 2.2 рассматриваются дискретные аттракторы классического типа, которые похожи на аттракторы, получаемые при дискретизации по времени потока с аттрактором Лоренца. В разделе 3 обсуждается вопрос о разнообразии дискретных аттракторов лоренцевского типа в случае отображений с осевой симметрией и приводятся некоторые новые типы таких аттракторов, имеющих, в частности, необычные гомоклинические структуры, о которых речь идет в подразделе 3.1.

## 1. Стандартные дискретные аттракторы Лоренца

Первые примеры стандартных дискретных аттракторов Лоренца были приведены в работе [17] для трехмерных отображений Эно вида (1). В нашей работе [18] с Л. П. Шильниковым было показано, что такие аттракторы могут возникать в результате сравнительно простых

бифуркационных сценариев в однопараметрических семействах трехмерных отображений, и поэтому становится неудивительным, что они часто встречаются в различных моделях из приложений. В этом параграфе мы обсудим основные свойства стандартных дискретных аттракторов Лоренца и начнем с их геометрического определения.

**1.1. К определению дискретного аттрактора Лоренца.** Пусть аттрактор  $A$  трехмерного ориентируемого диффеоморфизма  $T$  обладает следующими свойствами.

(i)  $A$  — гомоклинический аттрактор, содержащий седловую неподвижную точку  $O$  с мультипликаторами  $\gamma, \lambda_1, \lambda_2$  такими, что  $\gamma < -1$ ,  $-1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1 < 1$  и  $|\lambda_2| < \lambda_1$ .

(ii) Пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — неустойчивые сепаратрисы точки  $O$ , то есть связные одномерные компоненты множества  $W^u(O) \setminus O$ . Тогда все точки пересечения сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с диском  $W_{loc}^s(O)$  принадлежат ровно одной половине диска, на которые его разделяет одномерное сильно устойчивое многообразие  $W^{ss}(O)$ .

(iii) У аттрактора  $A$  существует окрестность — открытая область  $D$ , имеющая форму шара с двумя дырками, в которых лежит седло-фокусная орбита  $(p_1, p_2)$  периода 2 с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. Пусть  $L_i \subset D$ ,  $i = 1, 2$ , — замкнутая кривая, которая состоит из двух отрезков: отрезок сепаратрисы  $\Gamma_i$  от точки  $O$  до точки  $h_i$  первого пересечения сепаратрисы  $\Gamma_i$  с  $W_{loc}^s(O)$  и простой дуги на  $W_{loc}^s(O)$ , соединяющей точки  $h_i$  и  $O$ , см. рис. 2. Предполагается, что кривая  $L_i$  гомотопически нестягиваема в  $D$ .

(iv) Седловая величина  $\sigma = |\lambda_1||\gamma|$  точки  $O$  больше 1.

(v) Аттрактор  $A$  является псевдогиперболическим.

Заметим, что область  $D$  является поглощающей областью аттрактора  $A$  в том случае, когда он не имеет лакун. Напомним, что в случае потокового аттрактора Лоренца (тривиальной) лакуной называется открытая область (дырка внутри аттрактора), содержащая седловой предельный цикл, устойчивое многообразие которого не пересекает аттрактор [5]. Соответственно, в случае дискретного аттрактора Лоренца лакуна содержит седловую замкнутую инвариантную кривую с тем же свойством. Отметим, для сравнения, что аттрактор рис. 1,  $a$  не имеет лакун (для него область  $D$  является поглощающей), тогда как аттрактор рис. 1,  $b$  содержит лакуну типа полнотория  $\tau_3$  (для него уже область  $D \setminus \tau_3$  является поглощающей).

Из этих условий первые три относятся больше к геометрии аттрактора  $A$ , который, благодаря условиям (ii)–(iii), будет похож на лоренцевский. Кроме того, условие  $\gamma < -1$  из (i) также гарантирует (внутреннюю) симметрию аттрактора в силу того, что сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  образуют симметричную конфигурацию:  $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$  и  $T(\Gamma_2) = \Gamma_1$ .

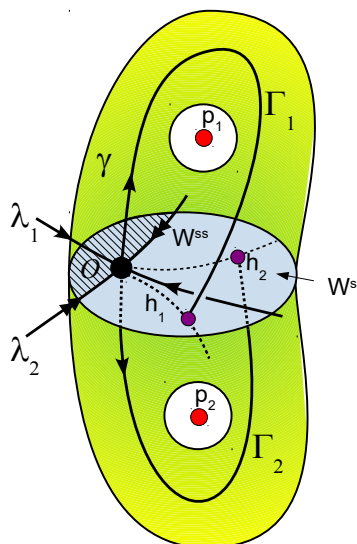


Рис. 2. К определению дискретного аттрактора Лоренца. Неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  точки  $O$  симметричны,  $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$  и  $T(\Gamma_2) = \Gamma_1$ , и пересекают диск  $W_{loc}^s(O) \cap D$  только в одной из его половин, на которые его разделяет одномерное сильно устойчивое многообразие  $W^{ss}(O)$  (цвет онлайн)

Fig. 2. Towards the definition of the discrete Lorenz attractor. The unstable separatrices  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  of the point  $O$  are symmetric,  $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$  and  $T(\Gamma_2) = \Gamma_1$ , and intersect a disk  $W_{loc}^s(O) \cap D$  only in one of its halves, into which the disk is divided by a one-dimensional strongly stable manifold  $W^{ss}(O)$  (color online)



**1.2. О гиперболических свойствах дискретных аттракторов Лоренца.** Условия (iv) и (v) являются условиями «слабой гиперболичности» аттрактора. При этом если условие (iv) не выполнено, то есть  $\sigma < 1$ , то аттрактор  $A$  является заведомо квазиаттрактором<sup>1</sup>, поскольку гомоклинические касания инвариантных многообразий точки  $O$  будут такими, что их бифуркации приводят к возникновению устойчивых периодических траекторий и даже их счетного множества [27, 28]. Если выполнено условие (iv), то указанные гомоклинические касания к точке  $O$  не будут порождать каких-либо устойчивых инвариантных множеств [29]. Однако это еще не гарантирует робастной хаотичности (здесь псевдогиперболичности) аттрактора.

Тем не менее условие (iv) имеет самостоятельный интерес, поскольку оно легко проверяется и является необходимым для выполнения условия (v). Поэтому аттрактор  $A$ , для которого выполнены условия (i)–(iv), будем называть *стандартным дискретным аттрактором Лоренца*. Такими аттракторами являются, например, аттракторы, показанные на рис. 1,  $a$ ,  $b$ . Однако, как показано в [30], аттрактор рис. 1,  $a$  не является псевдогиперболическим в отличие от аттрактора рис. 1,  $b$ . Но оба они являются, конечно, аттракторами лоренцевского типа.

Условия (i)–(iv) легко проверяются, чего нельзя сказать об условии (v), поскольку оно является глобальной характеристикой аттрактора и требует для его проверки специальных методов, см. [30, 31].

Понятие *псевдогиперболического аттрактора* было введено в работах Тураева и Шильникова [15, 16]. По сути оно является некоторым далеко идущим обобщением и ослаблением понятия гиперболического аттрактора. Напомним, что в случае гиперболического множества (аттрактора) требуется существование инвариантных относительно дифференциала  $DT$  отображения  $T$  линейных подпространств  $E^s$  и  $E^u$  с дополнительными размерностями такими, что  $DT$  экспоненциально сжимает и соответственно растягивает все векторы в  $E^s$  и  $E^u$ . В отличие от этого, в случае инвариантного псевдогиперболического множества (аттрактора) требуется непрерывное разложение на подпространства  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$  (сильно устойчивое и центрально неустойчивое) такие, что  $DT$  экспоненциально сжимает все векторы в  $E^{ss}$  и растягивает объемы в  $E^{cu}$ . При этом в  $E^{cu}$  могут существовать и сжатия вдоль некоторых направлений, но все они равномерно слабее, чем любое сжатие в  $E^{ss}$ . Заметим, что условия гиперболичности и псевдогиперболичности являются грубыми, то есть выполняются для всех близких систем. При этом для странных аттракторов они автоматически гарантируют существование положительного максимального показателя Ляпунова у любой траектории аттрактора. Например, для псевдогиперболического аттрактора это является следствием экспоненциального растяжения объемов в  $E^{cu}$ .

Заметим, что в случае псевдогиперболического аттрактора Лоренца трехмерного отображения  $\dim E^{ss} = 1$ ,  $\dim E^{cu} = 2$ . При этом сама неподвижная точка  $O$  также должна быть псевдогиперболической. Для нее  $E^{ss}$  — это собственное направление, отвечающее мультипликатору  $\lambda_2$ , а  $E^{cu}$  — это плоскость, натянутая на собственные вектора, отвечающие мультипликаторам  $\lambda_1$  и  $\gamma$ , и на которой будет иметь место растяжение площадей, если  $\sigma > 1$ .

**1.3. О феноменологических сценариях возникновения стандартных дискретных аттракторов Лоренца.** Одной из наиболее интересных особенностей дискретных гомоклинических аттракторов является то, что они могут возникать в однопараметрических семействах (трехмерных) отображений в результате довольно простых универсальных бифуркационных сценариев [18, 20, 21].<sup>2</sup> Это в полной мере относится и к стандартным дискретным аттракторам

<sup>1</sup>Термин «квазиаттрактор» был введен Афраймовичем и Шильниковым [26] для обозначения аттракторов, кажущихся странными на физическом уровне. Такие аттракторы либо сами, либо сколь угодно близко к ним содержат устойчивые периодические орбиты, которые, однако, не обнаруживаются в экспериментах, поскольку имеют чрезвычайно узкие области притяжения.

<sup>2</sup>Идея построения таких сценариев восходит к работе Шильникова [32], в которой он описал феноменологический сценарий возникновения спирального хаоса в случае трехмерных и многомерных потоков.

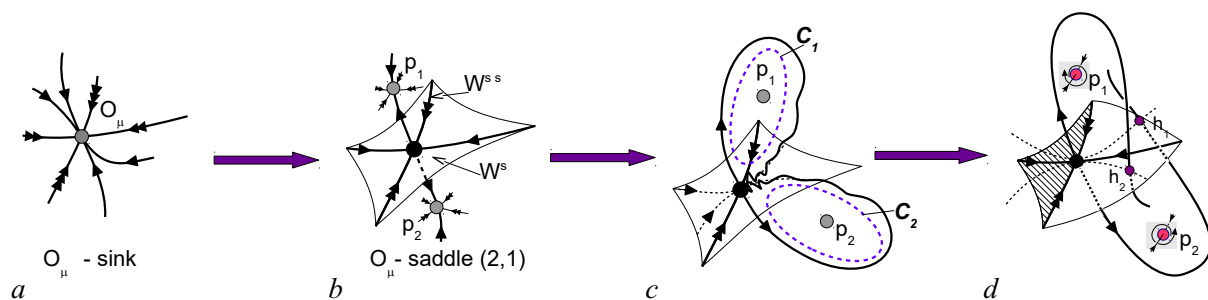


Рис. 3. Иллюстрация основных этапов феноменологического сценария возникновения стандартного дискретного аттрактора Лоренца: (a) — устойчивая неподвижная точка  $O_\mu \rightarrow$  (b) после бифуркации удвоения периода: точка  $O_\mu$  становится седлом типа (2,1), и аттрактором теперь является орбита  $(p_1, p_2)$  периода 2  $(p_1, p_2) \rightarrow$  (c) возникновение гомоклинической структуры (типа «восьмерка-бабочка») у точки  $O_\mu$  и формирование из нее замкнутой инвариантной кривой  $(C_1, C_2)$  периода 2, то есть  $T_\mu(C_1) = C_2$  и  $T_\mu(C_2) = C_1$  (эта кривая является седловой, если  $\sigma > 1$ )  $\rightarrow$  (d) дискретный аттрактор Лоренца становится единственным притягивающим инвариантным множеством, когда орбита  $(p_1, p_2)$  теряет устойчивость (в результате бифуркации Андронова–Хопфа) одним из двух типичных способов, см. опции [sc1] и [sc2] (цвет онлайн)

Fig. 3. Illustration of main stages of the phenomenological scenario of the emergence of standard discrete Lorenz attractor: (a) — a stable fixed point  $O_\mu \rightarrow$  (b) — after a period-doubling bifurcation: the point  $O_\mu$  becomes a saddle of type (2,1), and the attractor is now the orbit of period 2  $(p_1, p_2) \rightarrow$  (c) — the emergence of a homoclinic structure (of the “figure-eight-butterfly” type) at the point  $O_\mu$  and the formation of a closed invariant curve of period 2 from the butterfly, i.e.  $T_\mu(C_1) = C_2$  and  $T_\mu(C_2) = C_1$  (this curve is a saddle if  $\sigma > 1$ )  $\rightarrow$  (d) — the discrete Lorenz attractor becomes the only attracting invariant set when the orbit  $(p_1, p_2)$  loses stability (as a result of the Andronov–Hopf bifurcation) in one of two typical ways, see options [sc1] and [sc2] (color online)

Лоренца. Схематически основные этапы типичного такого сценария показаны на рис. 3 для случая однопараметрического семейства  $T_\mu$  трехмерных ориентируемых отображений.

Этот сценарий начинается с тех значений  $\mu$ , при которых отображение  $T_\mu$  имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку (сток)  $O_\mu$ . Далее, при некотором  $\mu$  точка  $O_\mu$  теряет устойчивость в результате мягкой (суперкритической) бифуркации удвоения периода:  $O_\mu$  становится седлом типа (2,1) и рождается устойчивая орбита  $(p_1, p_2)$  периода 2, которая становится аттрактором. При изменении параметра эта орбита теряет устойчивость, как мы предполагаем, одним из двух следующих типичных способов:

- [sc1] орбита  $(p_1, p_2)$  теряет устойчивость в результате жесткой (субкритической) бифуркации Андронова–Хопфа: седловая инвариантная кривая  $(C_1, C_2)$  влипает в орбиту  $(p_1, p_2)$  и последняя становится седло-фокусной;
- [sc2] устойчивая орбита  $(p_1, p_2)$  претерпевает мягкую (суперкритическую) бифуркацию Андронова–Хопфа, после которой сама орбита становится седло-фокусной и рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая  $(S_1, S_2)$  периода 2, а затем устойчивая кривая  $(S_1, S_2)$  сливается с седловой кривой  $(C_1, C_2)$  и обе исчезают.

Заметим, что инвариантная кривая периода 2  $(C_1, C_2)$  формируется из гомоклинической конфигурации «бабочка» неустойчивых сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  точки  $O_\mu$  в тот момент, когда инвариантные многообразия точки  $O_\mu$  начинают пересекаться, см. рис. 3, с. Кроме того, что важно, инвариантная кривая  $(C_1, C_2)$  будет седловой при  $\sigma > 1$ .<sup>3</sup>

<sup>3</sup>При  $\sigma < 1$  гомоклиническая бабочка тоже возникает, но из нее может формироваться либо устойчивая инвариантная кривая периода 2, либо симметричная двойной длины устойчивая «восьмерочная» инвариантная кривая. При этом дальнейшее развитие аттрактора может пойти по пути разрушения этих инвариантных кривых и образования квазиаттрактора типа «тор-хаос» по Афраймовичу–Шильникову [26]. По этой причине условие  $\sigma > 1$  является весьма важным для реализации сценариев с аттракторами лоренцевского типа.

**1.4. Примеры сценариев в трехмерных отображениях.** Тот факт, что стандартные дискретные аттракторы Лоренца могут возникать в результате простых и реалистичных бифуркационных сценариев, показывает, что они должны обнаруживаться в различных моделях из приложений. Насколько нам известно, первой такой прикладной моделью была неголономная модель кельтского камня [33].

В качестве первого примера рассмотрим бифуркационные сценарии с дискретным аттрактором Лоренца, наблюдаемые в трехмерном отображении Эно вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = Bx + Cy + Az - z^2, \quad (3)$$

где  $A, B$  и  $C$  — параметры. Это отображение получается из отображения (1), если одну из его неподвижных точек сдвинуть в начало координат. Картинки численно найденных аттракторов отображения (3) с  $B = 0.7$  показаны на рис. 4, на котором также показан фрагмент карты показателей Ляпунова на некоторой области значений параметров  $A$  и  $C$ .

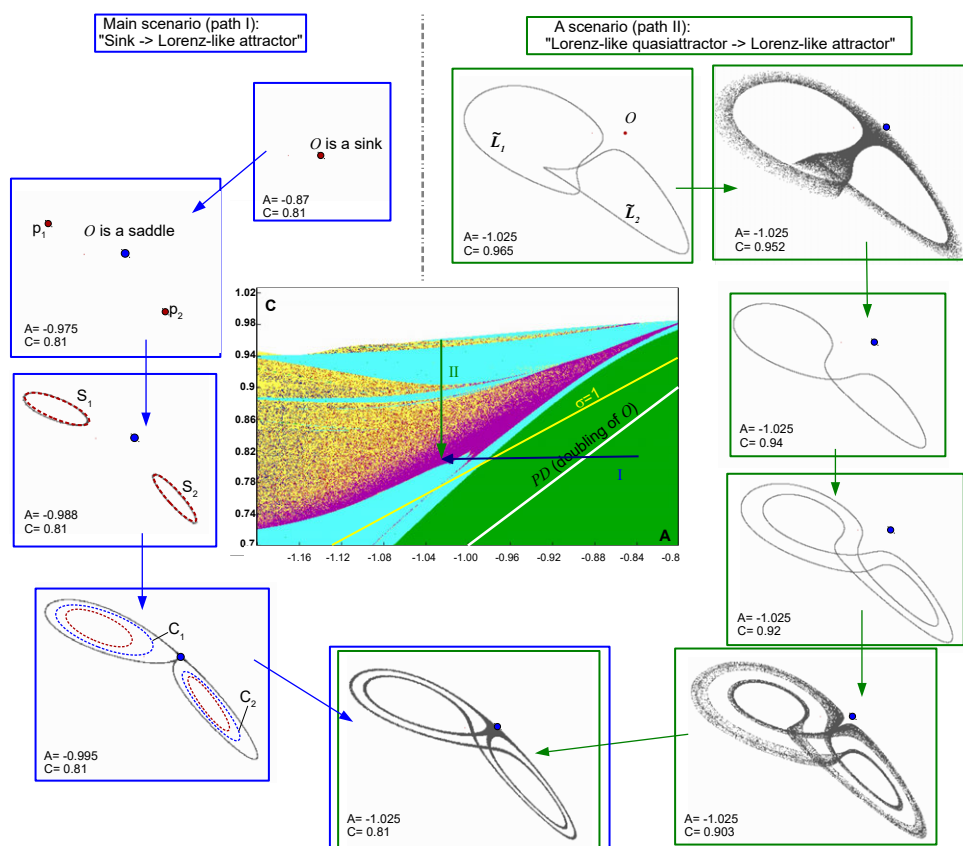


Рис. 4. Картинки численно найденных аттракторов отображения (3) с  $B = 0.7$  при варьировании параметров  $A$  и  $C$  вдоль путей I и II с одной и той же конечной точкой  $A = -1.025$ ;  $C = 0.81$ ). Путь I ( $-1.025 \leq A \leq -0.87$ ;  $C = 0.81$ ) — это фактически иллюстрация к описанному в подразделе 1.3 основному сценарию возникновения стандартного дискретного аттрактора (с опцией [sc2]). На пути II ( $A = -1.025$ ;  $0.81 \leq C \leq 0.952$ ) проиллюстрирован несколько необычный сценарий с началом вблизи лоренцевского квазиаттрактора (показанного при  $A = -1.025$ ;  $C = 0.952$ ) (цвет онлайн)

Fig. 4. Pictures of numerically found attractors of map (3) with  $B = 0.7$  with varying parameters along paths I and II with the same end point  $A = -1.025$ ;  $C = 0.81$ . Path I ( $-1.025 \leq A \leq -0.87$ ;  $C = 0.81$ ) is actually an illustration of the basic scenario of the emergence of standard discrete attractor (with the [sc2] option) described in subsection 1.3. Path II ( $A = -1.025$ ;  $0.81 \leq C \leq 0.952$ ) illustrates a somewhat unusual scenario with the beginning near the Lorenz quasi-attractor (shown at  $A = -1.025$ ;  $C = 0.952$ ) (color online)



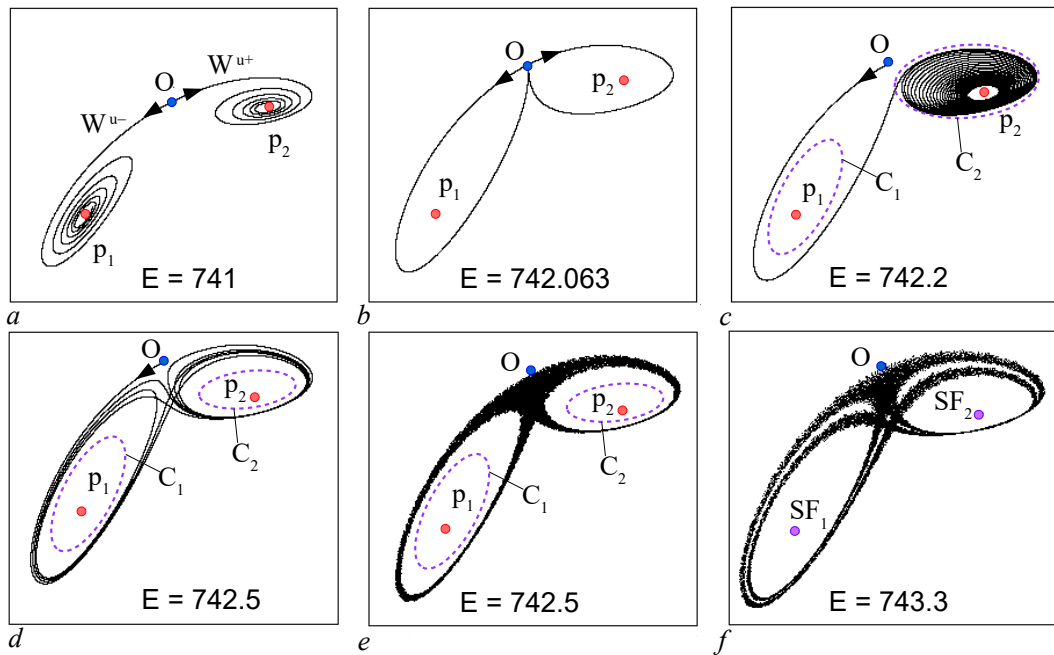


Рис. 5. Пример сценария в модели кельтского камня из [35] при варьировании одного из параметров (энергии  $E$  камня) (цвет онлайн)

Fig. 5. An example of a scenario in the Celtic stone model from [35] when varying one of parameters (the stone energy  $E$ ) (color online)

Здесь мы проследили два маршрута, отмеченные стрелками I и II на диаграмме показателей Ляпунова на плоскости параметров  $(A, C)$ , см. рис. 4. Цвета на этой диаграмме соответствуют следующим устойчивым режимам: зеленый — устойчивая периодическая траектория; бирюзовый — квазипериодическая (замкнутая инвариантная кривая); желтый и пурпурный — странный аттрактор. Желтый цвет отвечает странному аттрактору (квазиаттрактору), отделенному от неподвижной точки  $O$ , а пурпурный — стандартному дискретному аттрактору Лоренца. При этом области с вкраплениями желтых и пурпурных пикселей отвечают, по-видимому, квазиаттракторам лоренцевского типа, а сплошной пурпурный цвет указывает на область существования псевдогиперболического дискретного аттрактора Лоренца [17, 24].

На рис. 4 финальный аттрактор (при  $A = -1.025, C = 0.81$ ) является псевдогиперболическим, однако аттрактор лоренцевского типа в начале сценария II (при  $A = -1.025, C = 0.952$ ) заведомо является квазиаттрактором. При этом он такой, что в нем при варьировании параметров легко обнаруживаются хорошо заметные окна устойчивости, два из которых отмечены. При соответствующих значениях параметров аттрактором в них является либо замкнутая инвариантная кривая периода 2 (при  $A = -1.025, C = 0.965$ ), либо восьмерочная инвариантная кривая (при  $A = -1.025, C = 0.94$ ). Последняя в сценарии II играет важную роль, так как порождает каскад бифуркаций, в том числе бифуркаций удвоения инвариантных кривых<sup>4</sup>, ведущих к формированию псевдогиперболического дискретного аттрактора Лоренца.

Приведем еще один пример сценария, см. рис. 5, наблюдаемый в модели кельтского камня [35], в котором реализуется опция [sc1]: орбита  $(p_1, p_2)$  теряет устойчивость в результате

<sup>4</sup>Более подробно о бифуркациях удвоения инвариантных кривых см. в нашей статье [34]. В частности, там было показано, что такие бифуркации могут быть двух видов: типа «удвоение компонент» и «удвоение длины». В частности, с восьмерочной инвариантной кривой, рис. 4 (при  $A = -1.025, C = 0.94$ ), происходит бифуркация удвоения компонент: она становится седловой, а в ее окрестности рождаются две устойчивые инвариантные кривые примерно той же длины, рис. 4 при  $A = -1.025, C = 0.92$ .

жесткой (субкритической) бифуркации Андронова–Хопфа, когда седловая инвариантная кривая  $(C_1, C_2)$  влипает в орбиту  $(p_1, p_2)$ , которая становится седло-фокусной, и дискретный аттрактор Лоренца становится единственным аттрактором в модели<sup>5</sup>.

Интересно, что в указанной модели кельтского камня можно также проследить перестройки в асимптотическом поведении сепаратрис неподвижной точки  $O$  при переходе через очень узкую зону образования гомоклинической бабочки, рис. 5,  $a-c$ . В случае отображения (1) такую перестройку, даже если она существует, весьма трудно уловить.

## 2. Дискретные аттракторы Лоренца с осевой симметрией

Основные результаты этой статьи относятся к исследованию тех свойств дискретных аттракторов Лоренца, которые делают их похожими на аттракторы трехмерных потоков. Однако между ними существуют принципиальные различия. Прежде всего, это касается особенностей их гомоклинических структур. Аттрактор Лоренца является сингулярно-гиперболическим и не имеет гомоклинических касаний. Дискретный аттрактор Лоренца допускает гомоклинические касания и, соответственно, то отображение, в котором он существует, принадлежит области Ньюхауса [36, 37], то есть открытой области в пространстве динамических систем, в которой плотны системы с гомоклиническими касаниями. Бифуркации аттрактора Лоренца теоретически могут быть изучены полностью, поскольку у него существует ровно один непрерывный инвариант топологической эквивалентности, так называемый нидинг-инвариант [12], который полностью характеризует структуру аттрактора. У отображений с дискретными аттракторами Лоренца таких инвариантов, включая так называемые  $\Omega$ -модули [38, 39], бесконечно много, и поэтому здесь полный бифуркационный анализ невозможен [29, 39, 40].

Есть и еще очевидные различия уже в их геометрических структурах. Так, у аттрактора Лоренца неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  седлового равновесия  $O$  являются инвариантными множествами — это две разные *траектории* потока, а в дырках аттрактора лежат состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$ . У стандартного дискретного аттрактора Лоренца неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — множества, состоящие из *континуума траекторий*, которые полуинвариантны в том смысле, что  $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$  и  $T(\Gamma_2) = \Gamma_1$ , и точки с одной сепаратрисы последовательно прыгают на другую и обратно при итерациях отображения, и, кроме того, в дырках стандартного дискретного аттрактора Лоренца лежит орбита  $(p_1, p_2)$  периода 2.

В связи с этим можно рассмотреть вопрос о существовании у трехмерных отображений таких дискретных аттракторов Лоренца, у которых сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  инвариантны по отдельности, то есть  $T(\Gamma_1) = \Gamma_1$  и  $T(\Gamma_2) = \Gamma_2$ , а в его дырках лежат неподвижные точки. Как показано в работе Шильникова и Тураева [29], подобные аттракторы существуют у трехмерных отображений Пуанкаре в случае периодически возмущенных систем с аттракторами Лоренца. Однако конкретных простых примеров таких отображений до недавнего времени не было известно. В связи с этим в работе [23] была рассмотрена задача, связанная с построением трехмерных отображений, которые были бы одновременно максимально простыми и максимально похожими по динамике и бифуркациям на трехмерные системы лоренцевского типа. Прежде всего, такое отображение  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = F(x, y, z)$  должно быть симметричным с *осевой симметрией*  $\{x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z\}$  такой же, как у модели Лоренца, а также должно иметь *постоянный якобиан*  $J$  — аналог того, что система Лоренца имеет постоянную дивергенцию.

<sup>5</sup>Эта бифуркация аналогична бифуркации жесткой потери устойчивости двух симметричных друг другу равновесий в модели Лоренца, после которой мультистабильность исчезает и аттрактор Лоренца становится единственным аттрактором системы.

В результате в работе [23] был выделен достаточно интересный класс осесимметричных трехмерных отображений с постоянным якобианом. Основным интерес здесь представляют простейшие такие отображения — квадратичные, основные элементы теории мы обсудим в следующем параграфе.

**2.1. О трехмерных осесимметричных квадратичных отображениях с постоянным якобианом.** Напомним некоторые определения.

Рассмотрим отображение  $T : R^3 \rightarrow R^3$  общего вида

$$T : \bar{x} = Q_1(x, y, z), \bar{y} = Q_2(x, y, z), \bar{z} = Q_3(x, y, z).$$

Отображение  $T$  обладает осевой симметрией

$$S : x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z, \quad (4)$$

если  $Q_{1,2}(x, y, z) \equiv -Q_{1,2}(-x, -y, z)$ ,  $Q_3(x, y, z) \equiv Q_3(-x, -y, z)$  для всех  $(x, y, z) \in R^3$ . Отображение  $T$  называется распадающимся, если оно может быть представлено в виде прямой суммы отображений меньшей размерности (как, например, отображение  $\bar{x} = x, \bar{y} = y + x, \bar{z} = M + z + y^2$ , в котором координата  $x$  отделяется).

Следующая лемма показывает, какой универсальный вид имеют квадратичные осесимметричные трехмерные отображения с постоянным якобианом.

**Лемма 1.** Пусть  $T : R^3 \rightarrow R^3$  — квадратичное отображение с осевой симметрией и постоянным якобианом. Тогда либо с помощью некоторой линейной замены координат отображение  $T$  может быть приведено к виду

$$T : \bar{x} = y, \bar{y} = v_1x + v_2y + yz, \bar{z} = M + v_3z + \alpha y^2, \quad (5)$$

где  $\alpha = \pm 1$  и  $v_1, v_2, v_3, M$  — параметры (при этом  $M \equiv 0$  при  $v_3 \neq 1$ ), либо  $T$  является распадающимся отображением.

**Доказательство.** Линейное осесимметричное 3D-отображение имеет вид

$$\bar{x} = ax + by, \bar{y} = cx + dy, \bar{z} = M + ez, \quad (6)$$

где  $a, \dots, e$  и  $M$  — некоторые коэффициенты. Предположим, что выполнено условие

$$|b| + |c| \neq 0. \quad (7)$$

Тогда отображение (6) может быть приведено к виду

$$\bar{x} = y, \bar{y} = v_1x + v_2y, \bar{z} = M + v_3z. \quad (8)$$

Для этого, например, если  $b \neq 0$ , введем новую координату  $y_{new} = ax + by$  и положим  $v_1 = bc - ad$ ,  $v_2 = a + d$ ,  $v_3 = e$  (при  $b = 0, c \neq 0$  поменяем  $x$  и  $y$  местами и сделаем то же самое).

Теперь для отображения (8) рассмотрим его осесимметричное квадратичное расширение

$$T_2 : \begin{cases} \bar{x} = y + a_1xz + a_2yz, \\ \bar{y} = v_1x + v_2y + a_3xz + a_4yz, \\ \bar{z} = M + v_3z + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + b_4z^2 \end{cases} \quad (9)$$

и найдем условия, при которых это отображение имеет постоянный якобиан.

Для этого вычислим сначала его якобиан при  $x = y = 0$ . Получим

$$J(T_2)_{x=y=0} = \det \begin{pmatrix} a_1 z & 1 + a_2 z & 0 \\ v_1 + a_3 z & v_2 + a_4 z & 0 \\ 0 & 0 & v_3 + 2b_4 z \end{pmatrix},$$

и, таким образом,

$$J(T_2)_{x=y=0} = (v_3 + 2b_4 z) [-v_1 + z(v_2 a_1 - a_3 - v_1 a_2) + z^2(a_1 a_4 - a_2 a_3)].$$

Из условия  $J = \text{const}$  получаем, что  $b_4 = 0$ ,  $a_1 a_4 - a_2 a_3 = 0$ , а также  $v_2 a_1 - a_3 - v_1 a_2 \equiv 0$  для всех  $v_1$  и  $v_2$ . Тогда получаем, что  $a_1 = a_2 = a_3 = b_4 = 0$  и, таким образом, отображение  $T_2$  принимает вид

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = v_1 x + v_2 y + a_4 y z, \quad \bar{z} = M + v_3 z + b_1 x^2 + b_2 x y + b_3 y^2, \quad (10)$$

Это отображение имеет якобиан  $J = -v_1 v_3 + a_4 y(2b_1 x + b_2 y)$ . Он будет константой, если  $a_4 = 0$  или  $b_1 = b_2 = 0$ . Если  $a_4 = 0$ , то координаты  $x$  и  $y$  отделяются в (10). Поэтому предполагаем, что  $b_1 = b_2 = 0$  и, следовательно, отображение  $T_2$  принимает вид

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = v_1 x + v_2 y + a_4 y z, \quad \bar{z} = M + v_3 z + b_3 y^2, \quad (11)$$

в котором мы предполагаем, что  $a_4 b_3 \neq 0$  (при  $a_4 = 0$  отделяются  $x$  и  $y$ , а при  $b_3 = 0$  отделяется  $z$ ).

Введем новые координаты  $x = \beta X, y = \beta Y, z = \gamma Z$ , где  $\beta$  и  $\gamma$  некоторые коэффициенты. Тогда отображение (11) переписывается как

$$\bar{X} = Y, \quad \bar{Y} = v_1 X + v_2 Y + a_4 \gamma Y Z, \quad \bar{Z} = \frac{M}{\gamma} + v_3 Z + b_3 \frac{\beta^2}{\gamma} Y^2. \quad (12)$$

Положим  $a_4 \gamma = 1$ . Тогда  $b_3 \beta^2 \gamma^{-1} = a_4 b_3 \beta^2$ . Положим  $\beta^2 = |a_4 b_3|^{-1}$ , тогда  $a_4 b_3 \beta^2 = \alpha = \text{sign}(a_4 b_3)$ . Это дает нам искомую формулу (5) для отображения  $T_2$ .

Осталось рассмотреть случай, когда условие (7) не выполняется, то есть когда  $b = c = 0$  и исходное отображение  $T_2$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= ax + a_1 x z + a_2 y z, & \bar{y} &= dy + a_3 x z + a_4 y z, \\ \bar{z} &= M + ez + b_1 x^2 + b_2 x y + b_3 y^2 + b_4 z^2, \end{aligned} \quad (13)$$

а его якобиан при  $x = y = 0$  будет таким:

$$J_{x=y=0} = (e + 2b_4 z) (ad + (a_1 d + a_4 a)z + (a_1 a_4 - a_2 a_3)z^2).$$

Из условия  $J = \text{const}$  сразу получаем, что  $b_4 = 0$ ,  $a_1 a_4 - a_2 a_3 = 0$ , а также  $a_1 d + a_4 a = 0$  для произвольных  $a$  и  $d$ . Это дает, что  $a_1 = a_4 = 0$  и  $a_2 a_3 = 0$ . Если  $a_2 = 0$ , то, так как  $a_1 = 0$ , уравнение для  $\bar{x}$  принимает вид  $\bar{x} = ax$ , то есть координата  $x$  отделяется. Аналогично при  $a_3 = 0$  отделяется координата  $y$ .  $\square$

Таким образом, в силу леммы 1, по существу наибольший интерес представляют два таких отображения

$$T_- : \bar{x} = y, \quad \bar{y} = v_1 x + v_2 y + y z, \quad \bar{z} = v_3 z - y^2, \quad (14)$$

и

$$T_+ : \bar{x} = y, \quad \bar{y} = v_1 x + v_2 y + y z, \quad \bar{z} = v_3 z + y^2, \quad (15)$$

в которых, в отличие от (5), мы исключили параметр  $M$ . В силу леммы 1 это всегда можно сделать, кроме вырожденного случая  $v_3 = 1$  (когда симметричная неподвижная точка отображения (5) убегает при  $M \neq 0$  на бесконечность). Поэтому отображения (14) и (15) можно рассматривать в качестве универсальных осесимметричных квадратичных отображений с постоянным якобианом.

Отметим, что отображения  $T_-$  и  $T_+$ , конечно, разные, но между ними существует необычная «дуальная» связь, которую отражает следующая лемма.

**Лемма 2.** *Отображение  $T_\alpha^2$  инвариантно относительно следующей замены координат и параметров*

$$y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow -z, \quad v_2 \rightarrow -v_2, \quad \alpha \rightarrow -\alpha. \quad (16)$$

**Доказательство.** Рассмотрим отображение  $T_\alpha$  в форме (5). Его вторая итерация, отображение  $T_\alpha^2$ , может быть представлена как

$$\begin{aligned} \bar{x} &= v_1 x + v_2 y + yz, \\ \bar{y} &= v_1 y + v_2 \bar{x} + \bar{x}(v_3 z + \alpha y^2), \\ \bar{z} &= v_3(v_3 z + \alpha y^2) + \alpha \bar{x}^2. \end{aligned}$$

Тогда легко видно, что преобразование координат и параметров (16) не меняет вида этого отображения.  $\square$

## 2.2. Дискретные аттракторы Лоренца классического типа в случае отображения $T_-$ .

Лемма (2) показывает, что квадраты отображений  $T_-$  и  $T_+$  демонстрируют совершенно одинаковую динамику, если заменить  $v_2$  на  $-v_2$ . Однако динамика и бифуркации самих отображений  $T_-$  и  $T_+$  при этом являются разными, что показывают их бифуркационные диаграммы рис. 6, которые, в силу леммы (2), симметричны относительно замены  $v_2$  на  $-v_2$ .

Мы будем предполагать везде ниже, что  $0 < v_3 < 1$ . Тогда симметричная неподвижная точка  $O(0, 0, 0)$  отображения  $T_\alpha$  (одновременно для  $T_-$  и  $T_+$ ) будет асимптотически устойчивой при  $(v_1, v_2) \in \Delta_s$ , где

$$\Delta_s = \{(v_1, v_2) \mid v_1 - 1 < v_2 < 1 - v_1, \quad -1 < v_1 < 1\}.$$

Границами треугольника устойчивости  $\Delta_s$  на плоскости  $(v_1, v_2)$  являются три бифуркационные кривые

$$L_{+1} : v_2 = 1 - v_1, \quad -1 < v_1 < 1,$$

$$L_{-1} : v_2 = v_1 - 1, \quad -1 < v_1 < 1,$$

$$L_\varphi : v_1 = -1, \quad -2 < v_2 < 2$$

такие, что у точки  $O$  появляется мультипликатор  $\lambda = +1$  при  $(v_1, v_2) \in L_{+1}$ , мультипликатор  $\lambda = -1$  при  $(v_1, v_2) \in L_{-1}$  и мультипликаторы  $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$  при  $(v_1, v_2) \in L_\varphi$  (третий мультипликатор — это всегда  $\lambda_3 = v_3$ ).

Эти бифуркационные кривые отвечают бифуркациям точки  $O$ , которые будут разными для отображений  $T_-$  и  $T_+$  (кроме разве что бифуркаций через  $L_\varphi$ , которые здесь бесконечно вырожденные и неинтересные).

- Бифуркация на  $L_{+1}$  — это невырожденная симметричная бифуркация «вилка» (pitch-fork), которая является мягкой (суперкритической) для  $T_-$  и жесткой (субкритической) для  $T_+$ . Здесь точка  $O$  при выходе из  $\Delta_s$  теряет устойчивость следующим образом: в случае отображения  $T_-$  она становится седловой и рождается пара симметричных друг другу устойчивых неподвижных точек  $O_1$  и  $O_2$ ; в случае отображения  $T_+$  в устойчивую точку  $O$  влипают пара симметричных седловых неподвижных точек, она становится седловой, и никаких аттракторов здесь уже нет.



- Бифуркация на  $L_{-1}$  — это невырожденная симметричная бифуркация удвоения периода (period-doubling), которая является жесткой для  $T_-$  и мягкой для  $T_+$ . Здесь точка  $O$  при выходе из  $\Delta_s$  теряет устойчивость следующим образом: в случае отображения  $T_-$  в устойчивую точку  $O$  влипают седловая орбита периода 2, точка  $O$  становится седловой, и никаких аттракторов здесь нет; в случае отображения  $T_+$  точка  $O$  становится седловой и рождается устойчивая орбита  $p_1, p_2$  периода 2.
- Заметим, что, в силу леммы 2, бифуркация на  $L_{+1}$  для отображения  $T_-^2$  и бифуркация на  $L_{-1}$  для  $T_+^2$  будет абсолютно одной и той же — это мягкая бифуркация «вилка». Одинаковыми также будут бифуркации на  $L_{-1}$  для  $T_-^2$  и на  $L_{+1}$  для  $T_+^2$  — в обоих случаях это жесткая бифуркация «вилка».

Как видно из рис. 6, развитие хаотической динамики в отображениях  $T_-$  и  $T_+$  происходит по-разному. В частности, в случае отображения  $T_-$  первой бифуркацией потери устойчивости точки  $O$  является бифуркация «вилки», а в случае отображения  $T_+$  — бифуркация удвоения периода.

В случае отображения  $T_-$  точка  $O$  является аттрактором при  $(v_1, v_2) \in \Delta_s$ . При выходе из  $\Delta_s$  через границу  $L_{+1}$  точка  $O$  мягко теряет устойчивость в результате симметричной бифуркации вилки:  $O$  становится седлом и рождается пара симметричных друг другу устойчивых неподвижных точек  $O_1$  и  $O_2$ . При этом у седла  $O$  его неустойчивое многообразие  $W^u(O)$  одномерно и состоит из двух инвариантных сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  таких, что  $\Gamma_1$  стремится к  $O_1$ , а  $\Gamma_2$  к  $O_2$ . При дальнейшем изменении параметров точки  $O_1$  и  $O_2$  одновременно и симметрично претерпевают суперкритическую (мягкую) бифуркацию Андронова–Хопфа на кривой [23]

$$AH_{12}^- : v_2 = 1 - v_1 + \frac{1}{2}(1 + v_1)(1 + v_1 v_3).$$

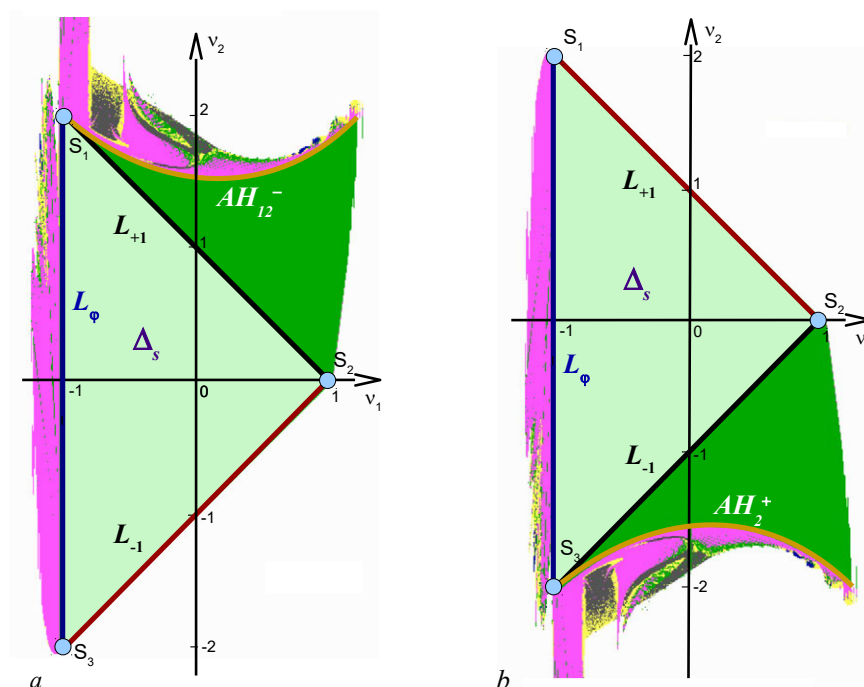


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы на плоскости параметров  $v_1$  и  $v_2$  при фиксированном  $0 < v_3 < 1$  в случаях:  $a$  — отображения  $T_-$ ;  $b$  — отображения  $T_+$ . Здесь также показаны наиболее интересные фрагменты диаграмм показателей Ляпунова при  $v_3 = 0.8$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Bifurcation diagrams on the  $(v_1, v_2)$ -parameter plane for fixed  $0 < v_3 < 1$  in the cases:  $a$  — the map  $T_-$ ;  $b$  — the map  $T_+$ . The most interesting fragments of the diagrams of Lyapunov exponents for  $v_3 = 0.8$  are also shown (color online)

В результате точки  $O_1$  и  $O_2$  становятся седло-фокусами с двумерными неустойчивыми многообразиями, и в их окрестностях рождаются две симметричные друг другу устойчивые инвариантные кривые  $S_1$  и  $S_2$ , при этом сепаратриса  $\Gamma_1$  накручивается на кривую  $S_1$ , а  $\Gamma_2$  — на  $S_2$ . Таким образом, создается вполне подходящая конфигурация траекторий, чтобы в дальнейшем (после потери устойчивости кривых  $S_1$  и  $S_2$ , появления гомоклиник к  $O$  и т. п.) сформировался дискретный аттрактор Лоренца. Однако этот аттрактор должен отличаться от стандартного (см. параграф 1), так как он будет содержать неподвижную точку  $O$ , у которой неустойчивый мультипликатор положительный, а сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  точки  $O$  инвариантны:  $T_-(\Gamma_i) = \Gamma_i$ . Кроме того, в дырках аттрактора будут лежать неподвижные точки — седла-фокусы  $O_1$  и  $O_2$ .

На рис. 7, *a–d* мы иллюстрируем, пожалуй, самый простой вариант сценария в отображении  $T_-$ , приводящий к дискретному аттрактору Лоренца «классического» типа. Здесь мы полагаем  $v_3 = 0.95$ ,  $v_1 = -0.85$  (то есть  $J = -v_1 v_3 = 0.8075$ ) и рассматриваем путь  $v_1 = -0.85$  на плоскости параметров  $(v_1, v_2)$  при изменении  $v_2$ .

Сначала, при  $-1.85 < v_2 < 1.85$ , точка  $O$  устойчива, она претерпевает бифуркацию «вилки» при  $v_2 = 1.85$  и рождаются две симметричные друг другу неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$ . Эти точки устойчивы при  $1.85 < v_2 < v_2^{AH} = 1.8644375$ ; при  $v_2 > v_2^{AH}$  они теряют устойчивость и рождается пара устойчивых замкнутых инвариантных кривых  $S_1$  и  $S_2$ , снова симметричных друг другу, рис. 7, *a*. При этом сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  точки  $O$  наматываются на кривые  $S_1$  и  $S_2$  соответственно, рис. 7, *a*. С ростом  $v_2$  сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  перестраиваются и выходят из области притяжения кривых  $S_1$  и  $S_2$ , в результате чего возникает мультистабильность, рис. 7, *b*, поскольку дискретный аттрактор Лоренца сосуществует с аттракторами  $S_1$  и  $S_2$ . Затем инвариантные кривые

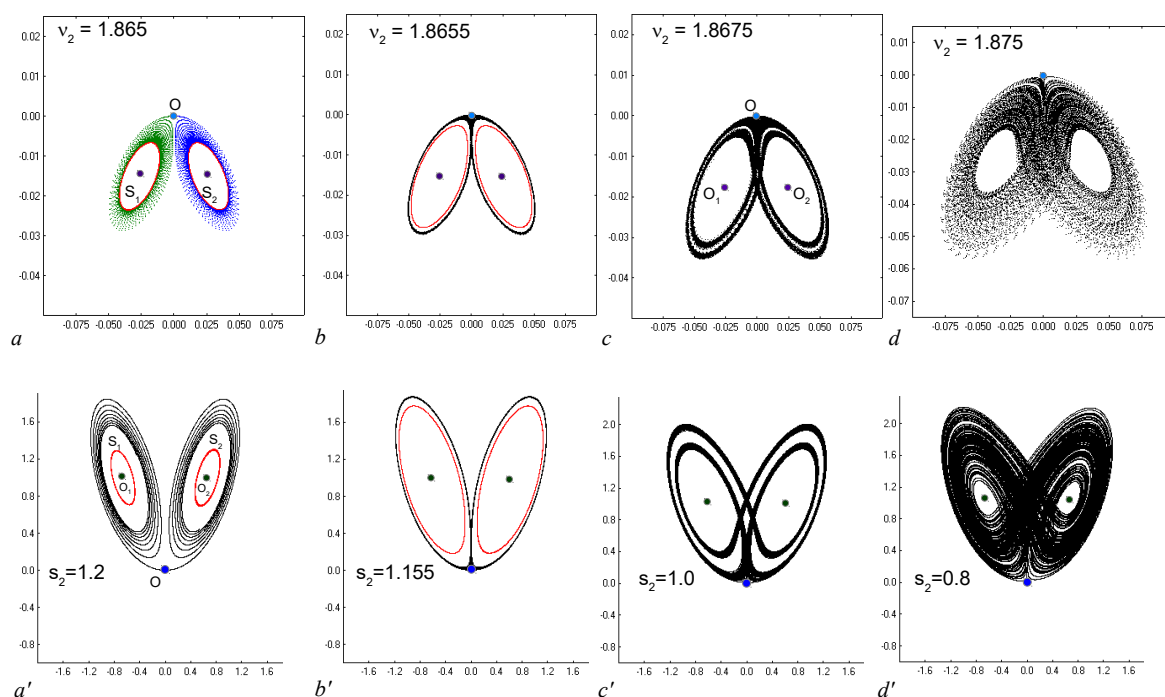


Рис. 7. Верхний ряд: иллюстрация основных этапов формирования дискретного аттрактора Лоренца в отображении  $T_-$  при фиксированных  $v_3 = 0.95$ ,  $v_1 = -0.85$  и при варьировании  $v_2$ . Нижний ряд: иллюстрация основных этапов формирования аттрактора Лоренца в модели Шимицу–Мориока (17) при  $s_2 = 0.45$  и варьировании  $s_1$  (цвет онлайн)

Fig. 7. Top row: illustration of main stages of the formation of discrete Lorenz attractor in map  $T_-$  with fixed  $v_3 = 0.95$ ,  $v_1 = -0.85$  and with varying  $v_2$ . Bottom row: illustration of main stages of the formation of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model (17) at  $s_2 = 0.45$  and varying  $s_1$  (color online)

$S_1$  и  $S_2$  сливаются с некоторыми седловыми инвариантными кривыми и обе исчезают, после чего единственным аттрактором отображения становится дискретный аттрактор Лоренца, рис. 7, с–d.

Мы будем называть такой аттрактор *дискретным аттрактором Лоренца классического типа*. Эти аттракторы очень похожи на классические аттракторы Лоренца, а еще больше — на их дискретизацию по времени. Для сравнения на рис. 7, а'–d' (нижний ряд) показана иллюстрация сценария с аттрактором Лоренца в модели Шимицу–Мориока [41]

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - s_1 y - xz, \quad \dot{z} = -s_2 z + x^2 \quad (17)$$

при  $s_2 = 0.45$  и варьировании  $s_1$ . Здесь видно почти полное совпадение с рис. 7, а–d.

**Замечание 1.** В силу леммы 2 об идентичности динамики отображений  $T_-^2$  и  $T_+^2$  при замене  $v_2 \rightarrow -v_2$  развитие хаоса для отображения  $T_+$  при фиксированных  $v_3 = 0.95$ ,  $v_1 = -0.85$  и при варьировании  $v_2$  будет похожим (если  $v_2$  поменять на  $-v_2$ ), но начинается с потери устойчивости точки  $O$  в результате бифуркации удвоения периода и последующей бифуркации Андронова–Хопфа устойчивой орбиты  $(p_1, p_2)$  периода 2. В конце сценария получится симметричный стандартный дискретный аттрактор Лоренца.<sup>6</sup>

Всюду ниже для определенности мы будем рассматривать только отображение  $T_-$ .

**2.3. О вложении отображения  $T_-$  в поток Шимицу–Мориока.** Нужно отметить, что система Шимицу–Мориока (17) играет важную роль в математической теории аттракторов Лоренца. Дело в том, что она служит локальной потоковой нормальной формой для ряда бифуркаций состояний равновесия с тремя нулевыми собственными значениями [42]. Поскольку в самой системе (17) существует аттрактор Лоренца для определенных областей значений параметров [43], это дает возможность получить эффективно проверяемые критерии рождения аттрактора Лоренца в результате локальных бифуркаций [17, 19].

Это в полной мере относится и к отображению  $T_-$ . В частности, ниже в разделе 2.3 мы покажем, что для значений параметров, близких к  $v_1 = -1$ ,  $v_2 = 2$ ,  $v_3 = 1$ , когда неподвижная точка  $O$  имеет триплет  $(+1, +1, +1)$  мультипликаторов, отображение  $T_-$  может быть аппроксимировано с любой точностью отображением сдвига по траекториям системы Шимицу–Мориока. Из этого следует, по теореме Тураева–Шильникова [16], что отображение  $T_-$  для близких значений параметров будет иметь цепно-транзитивный и псевдогиперболический дискретный аттрактор Лоренца (классического типа).

**Лемма 3.** В пространстве параметров  $(v_1, v_2, v_3)$  существует окрестность в области  $(v_1 < -1, v_2 < 2, v_3 < 1)$ , примыкающая к точке  $M(v_1 = -1, v_2 = 2, v_3 = 1)$ , в которой отображение  $T_-$  вблизи неподвижной точки  $O(0, 0, 0)$  может быть вложено в поток Шимицу–Мориока (17) с тем большей точностью, чем ближе значение параметров к точке  $M$ .

**Доказательство.** Перепишем отображение  $T_-$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x} - x &= y - x, \\ \bar{y} - y &= v_1 x + v_2 y - y + yz, \\ \bar{z} - z &= v_3 z - z - y^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Положим, что

$$v_1 = -1 + \varepsilon_1, \quad v_2 = 2 + \varepsilon_2, \quad v_3 = 1 - \varepsilon_3$$

<sup>6</sup>При этом фазовые картинки по сравнению с рис. 7 будут перевернутыми по оси  $z$ , точки  $O_1$  и  $O_2$  будут точками орбиты периода 2 и т. п., см. [23].

и  $\varepsilon_i$  малы. Заметим, что при  $\varepsilon_i = 0, i = 1, 2, 3$  точка  $O(0, 0, 0)$  имеет тройной мультипликатор  $+1$ . Тогда вблизи этой точки для малых  $\varepsilon_i$  можно написать такую потоковую аппроксимацию отображения (18):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x, \\ \dot{y} &= (-1 + \varepsilon_1)x + (1 + \varepsilon_2)y + yz, \\ \dot{z} &= -\varepsilon_3z - y^2.\end{aligned}\tag{19}$$

Введем новую координату  $y_{new} = y - x$ . Когда система (19) переписывается как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)x + \varepsilon_2y + (x + y)z, \\ \dot{z} &= -\varepsilon_3z - (x + y)^2.\end{aligned}\tag{20}$$

Введем новое «быстрое» время  $t \rightarrow \varepsilon t$  с малым  $\varepsilon > 0$ . Тогда система (20) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{\varepsilon}y, \\ \dot{y} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon}x + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}y + \frac{1}{\varepsilon}(x + y)z, \\ \dot{z} &= -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon}z - \frac{1}{\varepsilon}(x + y)^2.\end{aligned}\tag{21}$$

Снова введем новую координату  $y_{new} = \frac{1}{\varepsilon}y$ . Тогда система (21) переписывается как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon^2}x + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}y + \frac{1}{\varepsilon^2}(x + \varepsilon y)z, \\ \dot{z} &= -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon}z - \frac{1}{\varepsilon}(x + \varepsilon y)^2.\end{aligned}\tag{22}$$

Теперь отнормируем координаты следующим образом:

$$x = \beta X, \quad y = \beta Y, \quad z = \gamma Z$$

и положим

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon^2} = 1, \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} = -s_1, \quad \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} = s_2.$$

Выберем  $s_1$  и  $s_2$  в качестве новых параметров. Тогда система (22) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y, \\ \dot{Y} &= X - s_1Y + \frac{\gamma}{\varepsilon^2}(X + \varepsilon Y)Z, \\ \dot{Z} &= -s_2Z - \frac{\beta^2}{\gamma\varepsilon}(X + \varepsilon Y)^2.\end{aligned}\tag{23}$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно мало, мы возьмем малые нормирующие коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  такими, что

$$\frac{\gamma}{\varepsilon^2} = 1, \quad \frac{\beta^2}{\varepsilon^3} = 1,$$

и удалим члены  $\varepsilon Y$  из (23). Тогда получим такую систему

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y, \\ \dot{Y} &= X - s_1Y + XZ, \\ \dot{Z} &= -s_2Z - X^2.\end{aligned}\tag{24}$$

Если теперь сделать замену  $Z \rightarrow -Z$ , то получим в точности систему Шимицу–Мориока (17).  $\square$

### 3. Разнообразие дискретных аттракторов лоренцевского типа в случае отображения $T_-$

В разделе 2 мы дали положительный ответ на вопрос о том, имеет ли отображение  $T_-$  аттракторы, которые с большой точностью имитируют аттракторы, полученные в результате дискретизации по времени аттракторов Лоренца трехмерных потоков. Однако отображение  $T_-$ , так же как и  $T_+$ , может быть неориентируемым (когда  $J = -v_1 v_3 < 0$ ), и тогда, как показано в [23], аттракторы лоренцевского типа здесь всегда весьма необычны: их неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  и линия симметрии (ось  $z$ ) будут переплетены неустранимым образом.

В этом параграфе мы продолжим эти исследования и рассмотрим вопрос о существовании дискретных аттракторов Лоренца отображения  $T_-$  как в ориентируемом, так и в неориентируемом случаях, которые вообще не имеют аналогов среди трехмерных потоков. Для этого мы положим, для примера,  $v_3 = 0,8$  и построим на плоскости параметров  $v_1$  и  $v_2$  так называемую диаграмму Ляпунова, наиболее интересный фрагмент которой (на области  $Q : (-1 < v_1 < 0.2; 1.4 < v_2 < 2.3)$ ) показан на рис. 8.

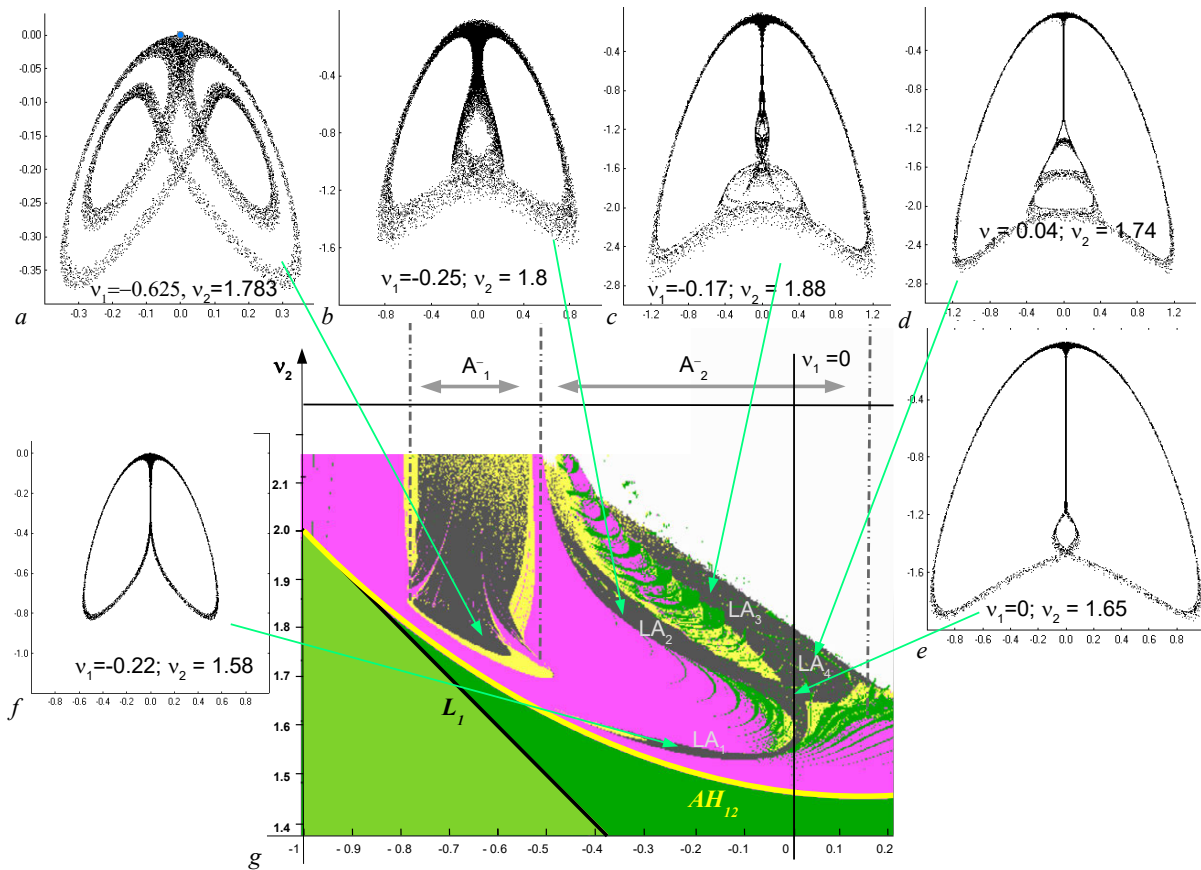


Рис. 8. Диаграмма Ляпунова для отображения  $T_-$  на плоскости параметров  $v_1$  и  $v_2$  при  $v_3 = 0.8$ .  $a-f$  — Фазовые портреты дискретных аттракторов лоренцевского типа при различных значениях параметров  $v_1$  и  $v_2$ . Аттракторы на рис.  $a, b, c$  и  $f$  ориентируемы ( $J = -v_1 v_3 > 0$ ), аттрактор рис.  $d$  неориентируемый ( $J < 0$ ), а на рис.  $e$  показан аттрактор для 3D эндоморфизма ( $J = 0$ ) (цвет онлайн)

Fig. 8. Lyapunov diagram for map  $T_-$  on the  $(v_1, v_2)$ -parameter plane for  $v_3 = 0.8$ .  $a-f$  — Phase portraits of discrete Lorenz-like attractors for different values of parameters  $v_1$  and  $v_2$ . Attractors in Fig.  $a, b, c$  and  $f$  are orientable ( $J = -v_1 v_3 > 0$ ), the attractor in Fig.  $d$  is non-orientable ( $J < 0$ ), and Fig.  $e$  shows the attractor for 3D-endomorphism ( $J = 0$ ) (color online)

О самой диаграмме Ляпунова. Это своеобразная карта-схема на  $Q$ , состоящая из областей разного цвета, характеризующих спектр  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$  показателей Ляпунова на аттракторе. Однако схема на рис. 8 не совсем обычная. При ее построении, следуя [21], мы преследовали основную цель найти гомоклинические странные аттракторы (содержащие неподвижную точку  $O$ ), среди которых должны быть лоренцевские аттракторы. Соответственно, цвета на карте отвечают аттракторам следующих типов:

- почти все орбиты убегают на бесконечность (нет аттракторов) — белый цвет;
- точка  $O$  устойчива — светло-зеленый цвет;
- периодическая орбита ( $\Lambda_1 < 0$ ) — зеленый цвет;
- замкнутая инвариантная орбита (квазипериодический режим,  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$ ) — розовый цвет;
- странный гомоклинический аттрактор, содержащий точку  $O$  ( $\Lambda_1 > 0$  и расстояние  $d$  от точек аттрактора до  $O$  не больше 0.001) — темно-серый цвет;
- странный аттрактор с  $\Lambda_1 > 0$  и  $d > 0.001$  — желтый цвет.

Первое, что обращает на себя внимание при взгляде на диаграмму рис. 8, это существование двух разделенных темно-серых зон  $A_1^-$  и  $A_2^-$ . Для значений параметров из зоны  $A_1^-$  якобиан  $J$  отображения  $T_-$  близок к 1, тогда как для достаточно большой зоны  $A_2^-$  якобиан  $J$  принимает сравнительно небольшие положительные, отрицательные и даже нулевые значения.

Заметим, что темно-серая область в зоне  $A_1^-$  отвечает симметричным дискретным аттракторам Лоренца, таким как на рис. 7,  $d$ . Аттракторы из зоны  $A_2^-$ , примеры которых показаны на рис. 8,  $b-e$ , существенно другие. Это лоренцевские аттракторы новых типов, имеющие необычную гомоклиническую структуру (их сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  переплетаются). Более детальный их анализ мы проводим в разделе 3.1.

Заметим, что аттрактор на рис. 8,  $d$  является неориентируемым аттрактором лоренцевского типа. Возможность существования таких аттракторов у отображений общего типа была установлена в работе [21], однако их хороших примеров не было. Такие примеры в случае осесимметричных отображений  $T_\alpha$  были найдены в [23]. Сейчас мы можем проследить, как такие аттракторы могут появляться в трехмерных неориентируемых отображениях с осевой симметрией.

В качестве примера рассмотрим сценарий их появления в отображении  $T_-$  при  $v_3 = 0.8$ ,  $v_1 = 0.1$  (здесь  $J = -0.08$ ) и изменении  $v_2$ . Основные этапы сценария при увеличении  $v_2$  показаны на рис. 9. При  $v_2 = 0.9$  неподвижная точка  $O$  претерпевает бифуркацию «вилка», при которой рождаются две симметричные неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$ . При  $v_2 = 1.494$  происходит

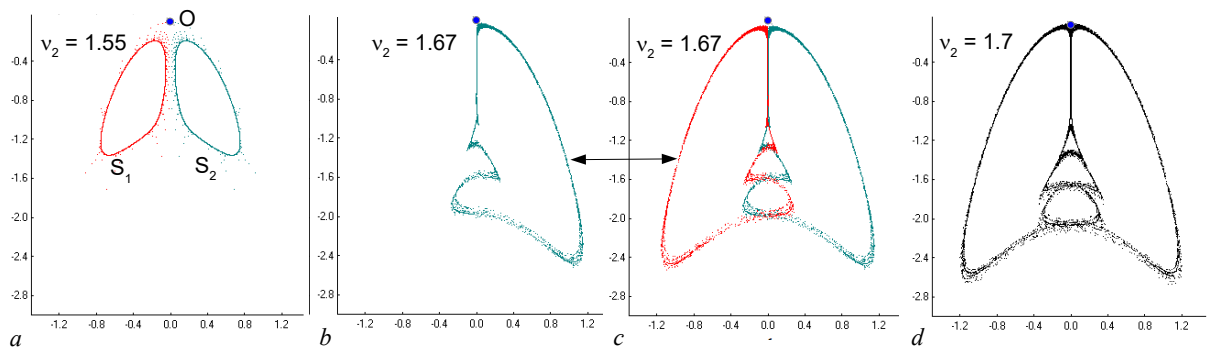


Рис. 9. Иллюстрация основных этапов формирования симметричного неориентируемого дискретного аттрактора Лоренца в отображении  $T_-$  при фиксированных  $v_3 = 0.8$ ,  $v_1 = 0.1$  и изменении  $v_2$  (цвет онлайн)

Fig. 9. Illustration of main stages of the formation of a symmetric non-orientable discrete Lorenz attractor in the map  $T_-$  for fixed  $v_3 = 0.8$ ,  $v_1 = 0.1$  and varying  $v_2$  (color online)



бифуркация Андронова–Хопфа с точками  $O_1$  и  $O_2$  и рождаются две устойчивые замкнутые инвариантные кривые, рис. 9, *a*. Затем с ростом  $v_2$  эти кривые теряют гладкость, становятся резонансными и разрушаются, рис. 9, *b–c*. В результате появляются два симметричных квазиаттрактора типа «тор–хаос», рис. 9, *c*. Затем эти аттракторы объединяются в один аттрактор лоренцевского типа, рис. 9, *d*. В момент «слияния» аттрактор, очевидно, является квазиаттрактором, но нет причин оставаться таким всегда. В частности, в [23] численно показано, что аттрактор рис. 9, *d* является симметричным неориентируемым псевдогиперболическим дискретным аттрактором Лоренца.

Можно также проследить, как возникают и развиваются ориентируемые аттракторы лоренцевского типа из зоны  $A_2^-$  в случае отображения  $T_-$ . В качестве примера рассмотрим путь  $v_1 = -0.2$  (здесь  $J = 0.16$ ) на диаграмме Ляпунова рис. 8. Иллюстрация основных этапов формирования ориентируемых дискретных аттракторов  $LA_1$ ,  $LA_2$  и  $LA_3$  (существующих для значений параметров из трех соответствующих ветвей темно-серой области в зоне  $A_2^-$ ) показана на рис. 10.

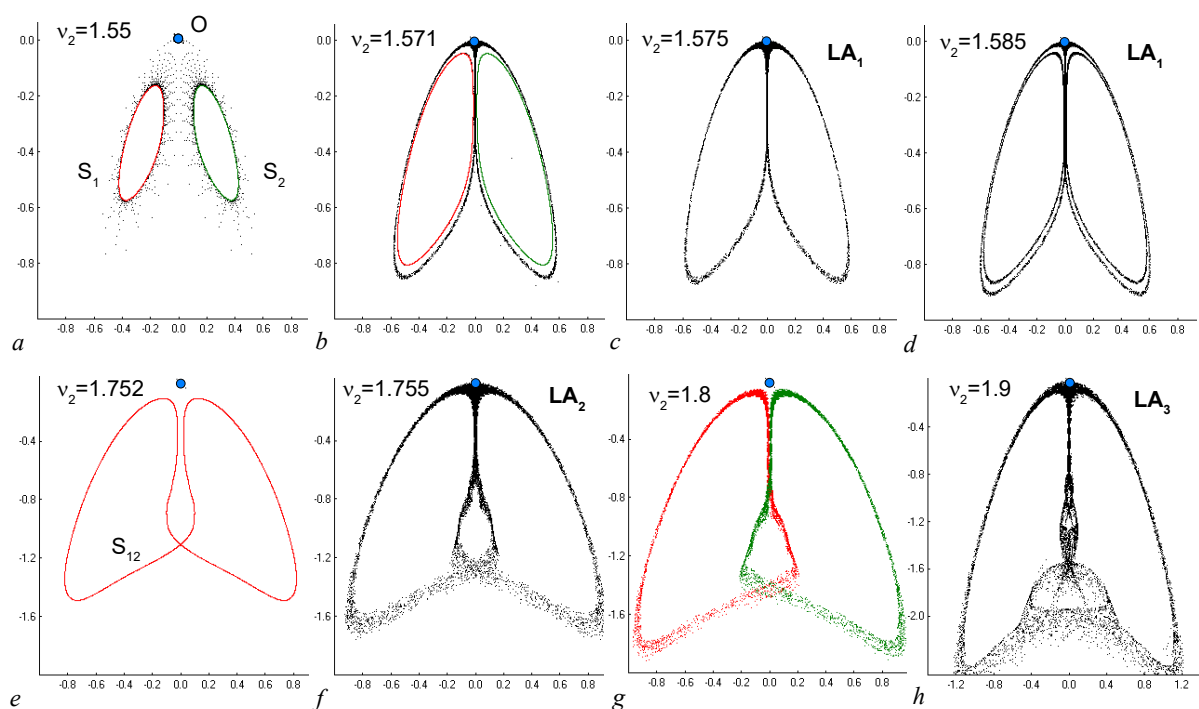


Рис. 10. Иллюстрация основных этапов формирования ориентируемых дискретных аттракторов лоренцевского типа  $LA_1$ ,  $LA_2$  и  $LA_3$  в отображении  $T_-$  при фиксированных  $v_3 = 0.8$ ,  $v_1 = -0.2$  и изменении  $v_2$ . *a* – Аттракторы – инвариантные кривые  $S_1$  и  $S_2$ . *b* – Аттракторы  $S_1$  и  $S_2$  сосуществуют с лоренцевским аттрактором  $LA_1$ . *c–d* –  $LA_1$  – единственный аттрактор. *e* – Окно устойчивости: аттрактором является симметричная инвариантная кривая  $S_{12}$ . *f* –  $LA_2$ -аттрактор: проявляется при разрушении кривой  $S_{12}$  (по Афраймовичу–Шильникову [26]) и затем формируется как псевдогиперболический лоренцевский аттрактор. *g* –  $LA_2$ -аттрактор разрушается и образуются два симметричных друг другу квазиаттрактора «тор–хаос». *h* – Эти квазиаттракторы объединяются в один лоренцевский аттрактор  $LA_3$  (цвет онлайн)

Fig. 10. Illustration of main stages of formation of orientable discrete Lorenz-like attractors  $LA_1$ ,  $LA_2$  and  $LA_3$  in the map  $T_-$  for fixed  $v_3 = 0.8$ ,  $v_1 = -0.2$  and varying  $v_2$ . *a* – Attractors are invariant curves. *b* – Attractors  $S_1$  and  $S_2$  coexist with the Lorenz attractor  $LA_1$ . *c–d* –  $LA_1$  is the only attractor. *e* – A stability window: the attractor is the symmetric invariant curve  $S_{12}$ . *f* – the  $LA_2$ -attractor: it appears when the curve  $S_{12}$  is destroyed (according to Afraimovich–Shilnikov [26]) and then it is formed as a pseudo-hyperbolic Lorenz-like attractor. *g* –  $LA_2$ -attractor is destroyed and two symmetric quasiattractors «torus-chaos» are formed. *h* – These quasiattractors are combined into one Lorenz-like attractor  $LA_3$  (color online)

**3.1. О гомоклинических структурах 3D-отображений с осевой симметрией.** Как известно, одними из основных бифуркаций, участвующих в формировании дискретных аттракторов Лоренца, являются глобальные бифуркации образования дискретных гомоклинических «восьмерок-бабочек» точки  $O$ . Как показано в работе [23], соответствующие гомоклинические структуры в случае разных дискретных аттракторов Лоренца, например, таких как на рис. 8, будут также разными. Простейшие качественные картинки гомоклинических «восьмерок-бабочек» для разных случаев показаны на рис. 11.

Здесь под гомоклинической «восьмеркой-бабочкой» для отображения с осевой симметрией будем понимать прежде всего конфигурацию, образованную неустойчивыми сепаратрисами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  точки  $O$  по отношению к  $W^s(O)$  и инвариантной оси  $z$ , линией осевой симметрии, целиком лежащей на  $W^s(O)$ . Для диффеоморфизмов с осевой симметрией такие конфигурации являются топологическими инвариантами, так как сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не могут пересекать ось  $z$ .

Гомоклинические структуры для стандартных симметричных аттракторов Лоренца, таких как на рис. 8, *a*, выглядят вполне обычно: на рис. 11, *a* схематически показано, как сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  могут пересекаться с двумерной площадкой  $\Pi_s \subset W_{loc}^s(O)$  в этом случае. Здесь показано два начальных отрезка сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , каждый из которых имеет четыре точки пересечения с  $\Pi_s$ . Эти 8 гомоклинических точек разделены на четыре пары точек:  $\{h_1^1, T(h_1^1)\}$ ,  $\{h_2^1, T(h_2^1)\}$ ,  $\{h_1^2, T(h_1^2)\}$  и  $\{h_2^2, T(h_2^2)\}$ , принадлежащих разным однообходным гомоклиническим орбитам. В случае отображения  $T_-$  две такие орбиты лежат на  $\Gamma_1$  и еще две на  $\Gamma_2$ , рис. 11, *a*. Как видно, в этом случае сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  обязательно симметричны друг другу, а также пересекают площадку  $\Pi_s$  в разных ее половинах, на которые  $\Pi_s$  разделена осью  $z$ .

Отметим также, что на сепаратрисе  $\Gamma_1$  (симметрично на  $\Gamma_2$ ) между двумя ее последовательными точками одной гомоклинической орбиты, например, точками  $h_1^1$  и  $T(h_1^1)$ , обязательно лежит точка  $h_2^1$  другой гомоклинической орбиты. В случае рис. 11, *a* эта точка лежит в той же половине  $\Pi_s$ , что и точки  $h_1^1$  и  $T(h_1^1)$ . Однако можно представить ситуацию, когда точка  $h_2^1$  лежит в другой половине  $\Pi_s$ . Тогда мы получим довольно необычную гомоклиническую структуру, показанную на рис. 11, *b*. В этом случае кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не просто завязываются между собой, но еще каждая из них обвивается вокруг оси  $z$ . Гомоклинические конфигурации такого типа характерны для симметрично ориентируемых лоренцевских аттракторов, таких как аттракторы  $LA_2$  и  $LA_3$  (рис. 10). Поэтому мы будем называть такие осесимметричные аттракторы *скрученными дискретными аттракторами Лоренца*.

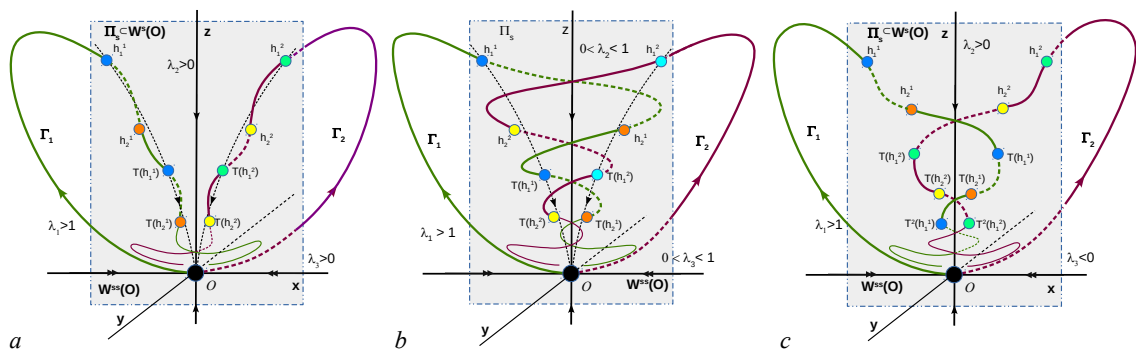


Рис. 11. Иллюстрации симметричных гомоклинических «восьмерок-бабочек» лоренцевского типа в случае, когда точка  $O$  имеет мультипликаторы  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такие, что  $\lambda_1 > 1$ ,  $|\lambda_{2,3}| < 1$ ,  $0 < \lambda_2 < 1$  и  $|\lambda_3| < |\lambda_2| < \lambda_2 < 1$  (как у  $T_-$ ). На рис. *a–b* показаны простейшие типы гомоклинических «восьмерок-бабочек» в ориентируемом случае ( $0 < \lambda_3 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ ), а на рис. *c* — в неориентируемом случае ( $-1 < \lambda_3 < 0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ ) (цвет онлайн)

Fig. 11. Illustrations of symmetric homoclinic “figure-eight butterflies” of Lorenz type in the case when a point has multipliers  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  such that  $\lambda_1 > 1$ ,  $|\lambda_{2,3}| < 1$ ,  $0 < \lambda_2 < 1$  and  $|\lambda_3| < |\lambda_2| < \lambda_2 < 1$  (as for map  $T_-$ ). Figures *a–b* show the simplest types of homoclinic “figure-eight butterflies” for the orientable case ( $0 < \lambda_3 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ ), and Figure *c* — for the non-orientable case ( $-1 < \lambda_3 < 0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ ) (color online)

В неориентируемом случае поведение сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  всегда выглядит несколько необычно. Мы проиллюстрируем это с помощью рис. 11 для случая, когда точка  $O$  имеет мультипликаторы  $\lambda_1 > 1$ ,  $0 < \lambda_2 < 1$ ,  $-1 < \lambda_3 < 0$  и  $|\lambda_3| < |\lambda_2|$ , как для отображения  $T_-$  при  $v_1 > 0$ . Очевидно, здесь гомоклинические точки  $h_1^1$  и  $T(h_1^1)$  на  $\Gamma_1$  лежат в разных половинах  $\Pi_s$ , поскольку  $\lambda_3 < 0$ . Тогда конфигурация сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  может получиться такой, как на рис. 11, с (в частности, как показано в [23], такая конфигурация имеет место в случае неориентируемого аттрактора рис. 8). В этом случае сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  оказываются не завязанными друг с другом в отличие от ориентируемого случая. Однако три инвариантные кривые  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и ось  $z$  вместе оказываются топологически переплетенными неустранимым образом.

## Список литературы

1. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, no. 2. P. 130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2
2. Guckenheimer J. A strange, strange attractor // In: The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications. Applied Mathematical Sciences, vol. 19. New York: Springer, 1976. P. 368–381. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6\_25.
3. Williams R. F. The structure of Lorenz attractor // Lecture Notes in Math. 1977. Vol. 615. P. 94–112.
4. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // Докл. АН СССР. 1977. Vol. 234, no. 2. P. 336–339.
5. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Труды ММО. 1982. Т. 44. P. 150–212.
6. Kaplan J. L., Yorke J. A. Predturbulence: A regime observed in a fluid flow model of Lorenz // Comm. Math. Phys. 1979. Vol. 67, no. 2. P. 93–108. DOI: 10.1007/BF01221359.
7. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца // В кн.: Марсден Ж., МакКракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. P. 317–336.
8. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и квазигиперболические аттракторы // Успехи Мат. Наук. 1981. Т. 36, № 4. С. 240.
9. Бунимович Л. А., Синай Я. Г. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца // Нелинейные Волны. М.: Наука, 1979. С. 212–260.
10. Bunimovich L. Statistical properties of Lorenz attractors // In: G.I. Barenblatt (ed.) Nonlinear Dynamics and Turbulence. Boston: Pitman, 1983. P. 1–22.
11. Rand D. The topological classification of Lorenz attractor // Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc. 1978. Vol. 83, no. 3. P. 451–460.
12. Малкин М. И. О топологической сопряженности разрывных отображений интервала // УМЖ. 1980. Т. 32, № 5. С. 610–616.
13. Morales C. A., Pacifico M. J., Pujals E. R. On C1 robust singular transitive sets for three-dimensional flows // C. R. Acad. Sci. Ser. I Math. 1998. Vol. 326. P. 81–86.
14. Сатаев Е. А. Некоторые свойства сингулярных гиперболических аттракторов // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 1. С. 35–76.
15. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Мат. сб. 1998. Т. 189. С. 291–314.
16. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // Доклады РАН. 2008. Т. 776 № 16. С. 17–21.
17. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, no. 11. P. 3493–3508. DOI: 10.1142/S0218127405014180.
18. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса в трехмерных отображениях // Нелинейная Динамика. 2012. Т. 8. С. 3–28.

19. *Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Ovsyannikov I. I., Turaev D. V.* Examples of Lorenz-like Attractors in Henon-like Maps // *Math. Model. Nat. Phenom.* 2013. Vol. 8, no. 5. P. 48–70. DOI: 10.1051/mmnp/20138504.
20. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D.* Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps // *Int. J. Bif. and Chaos.* 2014. Vol. 24, no. 8. P. 25.
21. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V.* Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps // *Physica D.* 2016. Vol. 337(4). P. 43–57. DOI: 10.1016/j.physd.2016.07.006.
22. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // In: Hunt BR, Li TY, Kennedy JA, Nusse HE. (eds) *The Theory of Chaotic Attractors.* New York: Springer, 1976. P. 94–102. DOI: 10.1007/978-0-387-21830-4\_8.
23. *Gonchenko S., Gonchenko A.* On discrete Lorenz-like attractors in three-dimensional maps with axial symmetry // *Chaos.* 2023. Vol. 33, no. 12. P. 123104. DOI: 10.1063/5.0172243
24. *Gonchenko S., Gonchenko A., Kazakov A., and Samylyna E.* On discrete Lorenz-like attractors // *Chaos.* 2021. Vol. 31, no. 2. P. 023117. DOI: 10.1063/5.0037621.
25. *Gonchenko S., Karatetskaia E., Kazakov A., Kruglov V.* Conjoined Lorenz twins — a new pseudohyperbolic attractor in three-dimensional maps and flows // *Chaos.* 2022. Vol. 32, iss. 12. P. 121107. DOI: 10.1063/5.0123426.
26. *Aframovich V.S., Shilnikov L. P.* Strange attractors and quasiattractors // In: G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph (eds) *Nonlinear Dynamics and Turbulence.* Boston: Pitmen, 1983. P. 1–34.
27. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *Докл. Рос. Акад. Наук.* 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.
28. *Gonchenko S., Shilnikov L., Turaev D.* Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits // *Chaos.* 1996. Vol. 6, no. 1. P. 15–31.
29. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions // *Nonlinearity.* 2008. Vol. 21, no. 5. P. 923–972. DOI: 10.1088/0951-7715/21/5/003.
30. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Kozlov A. D.* Elements of contemporary theory of dynamical chaos: A tutorial. Part I. Pseudohyperbolic attractors // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2018. Vol. 28, no. 11. P. 1830036. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127418300367>.
31. *Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D.* Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system // *Nonlinearity.* 2021. Vol. 34, no. 4. P. 2018–2047. DOI: 10.18500/0869-6632-00314010.48550/arXiv.1809.07250.
32. *Шильников Л. П.* Теория бифуркаций и турбулентность // В кн.: *Методы качественной теории дифференциальных уравнений.* Горький, 1986. С. 150–163.
33. *Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Kazakov A. O.* Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2013. Vol. 15, no. 5. P. 521–538. DOI: 10.1134/S1560354713050055.
34. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Turaev D.* Doubling of invariant curves and chaos in three-dimensional diffeomorphisms // *Chaos.* 2021. Vol. 31, no 11. P. 113130. DOI: 10.1063/5.0068692.
35. *Гонченко А. С., Самылина Е. А.* Об области существования дискретного аттрактора Лоренца в неголомомной модели кельтского камня // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2019. Т. 62, № 5. С. 412–428.
36. *Newhouse S. E.* The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms // *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* 1979. Vol. 50. P. 101–151. DOI: 10.1007/BF02684771.
37. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О существовании областей Ньюхауса в окрестности систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // *Докл. Рос. Акад. Наук.* 1993. Т. 329. С. 404–407.

38. Гонченко С. В., Шильников Л. П. Об инвариантах  $\Omega$ -сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией // Укр. мат. журнал. 1990. Т. 42, № 2. С. 153-159.
39. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса // Итоги науки и техники, сер. Современная математика и ее приложения; тематические обзоры. Т. 67. 1999. Р. 69-128.
40. Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V. On models with non-rough Poincare homoclinic curves // Physica D. 1993. Vol. 62, no. 1-4. P. 1-14. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90268-6.
41. Shimizu T., Morioka N. On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model // Phys. Lett. A. 1980. Vol. 76. P. 201-204. DOI: 10.1016/0375-9601(80)90466-1.
42. Shilnikov A. L., Shilnikov L. P., Turaev D. V. Normal forms and Lorenz attractors // Int. J. of Bifurcation and chaos. 1993. Vol. 3. P. 1123-1139.
43. Shilnikov A. L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka model // Physica D. 1993. Vol. 62. P. 338-346. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90292-9.

## References

1. Lorenz EN. Deterministic nonperiodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences. 1963;20(2): 130-141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2.
2. Guckenheimer J. A strange, strange attractor. In: The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications. Applied Mathematical Sciences, vol. 19. New York: Springer, 1976. P. 368-381. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6\_25.
3. Williams RF. The structure of Lorenz attractor. Lecture Notes in Math. 1977;615:94-112.
4. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. The origin and structure of the Lorenz attractor. Sov. Phys. Dokl. 1977;22:253-255.
5. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type. Trans. Mosc. Math. Soc. 1982;44:153-216.
6. Kaplan JL, Yorke JA. Predturbulence: a regime observed in a fluid flow model of Lorenz. Comm. Math. Phys. 1979;67(2):93-108. DOI: 10.1007/BF01221359.
7. Shilnikov LP. Bifurcation theory and the Lorenz model. In: Marsden JE, McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer; 1976. P. 317-336.
8. Shilnikov LP. Bifurcation theory and quasihyperbolic attractors. Usp. Mat. Nauk. 1981;36(4):240.
9. Bunimovich LA, Sinai YaG. Stochasticity of attractor in Lorenz model. Nonlinear Waves. Moscow: Nauka; 1979. P. 212-260.
10. Bunimovich L. Statistical properties of Lorenz attractors. Nonlinear Dynamics and Turbulence / G.I. Barenblatt (ed.) – Boston etc.: Pitman. 1983: 1-22.
11. Rand D. The topological classification of Lorenz attractor. Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc. 1978;83(3):451-460.
12. Malkin MI. On topological conjugacy of discontinuous maps of interval. Ukrainian Math. J. 1980;32(5):610-616.
13. Morales CA, Pacifico MJ, Pujals ER. On  $C^1$  robust singular transitive sets for three-dimensional flows. C. R. Acad. Sci. Ser. I Math. 1998;326:81-86.
14. Sataev EA. Some properties of singular hyperbolic attractors. Sb. Math. 2009;200(1):35-76.
15. Turaev DV, Shilnikov LP. An example of a wild strange attractor. Sb. Math. 1998;189:291-314.
16. Turaev DV, Shilnikov LP. Pseudo-hyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-like attractors. Doklady Mathematics. 2008; 77(1): 17-21.
17. Gonchenko S, Ovsyannikov I, Simo C, Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors. Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2005; 15(11): 3493-3508
18. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Shilnikov LP. Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps. Rus. J. Nonlinear Dynamics. 2012;8:3-28 (in Russian).

19. Gonchenko SV, Gonchenko AS, Ovsyannikov II, Turaev DV. Examples of Lorenz-like Attractors in Henon-like Maps. *Math. Model. Nat. Phenom.* 2013;8(5):48–70. DOI: 10.1051/mmnp/20138504.
20. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev D. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps. *Int. J. Bif. and Chaos.* 2014;24(8):25.
21. Gonchenko A, Gonchenko S. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps. *Physica D.* 2016;337:43–57.
22. Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. In: Hunt BR, Li TY, Kennedy JA, Nusse HE. (eds) *The Theory of Chaotic Attractors*. New York: Springer, 1976. P. 94–102. DOI: 10.1007/978-0-387-21830-4\_8.
23. Gonchenko S, Gonchenko A. On discrete Lorenz-like attractors in three-dimensional maps with axial symmetry. *Chaos.* 2023;33(12):123104. DOI: 10.1063/5.0172243
24. Gonchenko S, Gonchenko A, Kazakov A, Samylina E. On discrete Lorenz-like attractors. *Chaos.* 2021;31(2):023117. DOI: 10.1063/5.0037621.
25. Gonchenko S, Karatetskaia E, Kazakov A, Kruglov V. Conjoined Lorenz twins - a new pseudohyperbolic attractor in three-dimensional maps and flows. *Chaos.* 2022;32(12):121107. DOI: 10.1063/5.0123426.
26. Aframovich VS, Shilnikov LP. Strange attractors and quasiattractors. In: GI Barenblatt, G Iooss, DD Joseph (eds) *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Boston: Pitmen; 1983. P. 1–34.
27. Gonchenko S, Turaev D, Shilnikov L. Dynamical phenomena in multidimensional systems with nontransversal Poincaré homoclinic orbits. *Rus. Math. Docl.* 1993;330(2):144–147.
28. Gonchenko S, Shilnikov L, Turaev D. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits. *Chaos.* 1996;6(1):15–31.
29. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Turaev DV. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions. *Nonlinearity.* 2008;21(5):923–972. DOI: 10.1088/0951-7715/21/5/003.
30. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Kozlov AD. Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I. Pseudohyperbolic Attractors. *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2018;28(11):1830036. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127418300367>.
31. Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system. *Nonlinearity.* 2021;34(4):2018–2047.
32. Shilnikov LP. Bifurcation theory and turbulence. *Selecta Mathematica Sovietica.* 1991;10(1):43–53.
33. Gonchenko SV, Gonchenko AS, Kazakov AO. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2013;18(5):521–538. DOI: 10.1134/S1560354713050055.
34. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Turaev D. Doubling of invariant curves and chaos in three-dimensional diffeomorphisms. *Chaos.* 2021;31(11):113130. DOI: 10.1063/5.0068692.
35. Gonchenko A, Samylina E. On the region of existence of a discrete Lorenz attractor in the nonholonomic model of a Celtic stone. *Radiophys. Quantum Electron.* 2019;62(5):369–384. DOI: 10.1007/s11141-019-09984-9
36. Newhouse SE. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* 1979;50:101–151.
37. Gonchenko SV, Turaev DV, and Shilnikov LP. On the existence of Newhouse regions in a neighborhood of systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve (the multidimensional case). *Doklady Akademii Nauk.* 1993;329:404–407.
38. Gonchenko SV, Shilnikov LP. Invariants of  $\Omega$ -conjugacy of diffeomorphisms with a nongeneric homoclinic trajectory. *Ukr. Math. J.* 1990;42:134–140.
39. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. Homoclinic tangencies of an arbitrary order in Newhouse domains. *J. Math. Sci.* 2001;105:1738–1778.



40. Gonchenko SV, Shil'nikov LP, Turaev DV. On models with non-rough Poincare homoclinic curves. *Physica D*. 1993;62(1–4):1–14. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90268-6.
41. Shimizu T, Morioka N. On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model. *Phys. Lett. A*. 1980;76:201–204. DOI: 10.1016/0375-9601(80)90466-1.
42. Shilnikov AL, Shilnikov LP, Turaev DV. Normal forms and Lorenz attractors. *Int. J. of Bifurcation and chaos*. 1993;3:1123–1139.
43. Shilnikov AL. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka model. *Physica D*. 1993;62:338–346.



*Гонченко Александр Сергеевич* – родился в 1987 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2010) и аспирантуру ННГУ (2012). Кандидат физико-математических наук (2013, ННГУ). Работает в ННГУ старшим научным сотрудником лаборатории динамических и управляемых систем и в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» старшим научным сотрудником в международной лаборатории динамических систем и приложений. Опубликовал около 25 научных статей по исследованию динамического хаоса в различных динамических системах.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский университет им. Н. И. Лобачевского  
 Россия, 603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 НИУ «Высшая школа экономики»  
 E-mail: [agonchenko@mail.ru](mailto:agonchenko@mail.ru)  
 ORCID: 0000-0003-0505-9725