



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003117  
EDN: GAVURR

**Дискретные бегущие волны  
в релейной системе дифференциально-разностных уравнений,  
моделирующей полносвязную сеть синаптически связанных нейронов**

*И. Е. Преображенский, М. М. Преображенская* ✉

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия  
E-mail: preobrazenskii@gmail.com, ✉rita.preo@gmail.com

Поступила в редакцию 4.02.2024, принята к публикации 21.03.2024,  
опубликована онлайн 9.08.2024, опубликована 30.09.2024

**Аннотация.** Цель. Рассмотреть систему дифференциальных уравнений с запаздыванием, которая моделирует полносвязную цепь из  $m + 1$  нейрона с запаздывающей синаптической связью. Для этой полносвязной системы построить периодические решения в виде дискретных бегущих волн. Это означает, что все компоненты представлены одной и той же периодической функцией  $u(t)$  со сдвигом, кратным некоторому параметру  $\Delta$  (который предстоит найти). Методы. Для поиска описанных решений в настоящей работе осуществляется переход от системы к уравнению относительно неизвестной функции  $u(t)$ , содержащему  $m$  упорядоченных запаздываний, отличающихся с шагом  $\Delta$ . В нем выполняется экспоненциальная замена (характерная для уравнений вольтерровского типа) для того, чтобы получить релейное уравнение специального вида. Результаты. Для полученного уравнения найдена область параметров, в которой удастся построить периодическое решение с периодом  $T$ , зависящим от параметра  $\Delta$ . Для найденной формулы периода  $T = T(\Delta)$  удастся доказать разрешимость уравнения периодов, то есть доказать существование ненулевых параметров — целого  $p$  и вещественного  $\Delta$  — удовлетворяющих уравнению  $(m + 1)\Delta = pT(\Delta)$ . Построенная функция  $u(t)$  обладает bursting-эффектом. Это означает, что  $u(t)$  имеет на периоде  $n$  высоких всплесков, после которых следует промежуток с малыми значениями. Заключение. Существование подходящего параметра  $\Delta$  обеспечивает существование периодического решения в виде дискретной бегущей волны для исходной системы. За счет выбора перестановки обеспечивается сосуществование сразу  $(m + 1)!$  периодических решений.

**Ключевые слова:** дифференциально-разностные уравнения, полносвязная система, дискретные бегущие волны, bursting-эффект, периодические решения, моделирование нейронов.

**Благодарности.** Работа над разделами 1 и 4 выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>. Работа над разделами 2 и 3 выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

**Для цитирования:** Преображенский И. Е., Преображенская М. М. Дискретные бегущие волны в релейной системе дифференциально-разностных уравнений, моделирующей полносвязную сеть синаптически связанных нейронов // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 654–669. DOI: 10.18500/0869-6632-003117. EDN: GAVURR

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Discrete traveling waves in a relay system of differential-difference equations modeling a fully connected network of synaptically connected neurons

I. E. Preobrazhenskii, M. M. Preobrazhenskaia

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Russia

E-mail: preobrazenskii@gmail.com, rita.preo@gmail.com

Received 4.02.2024, accepted 21.03.2024, available online 9.08.2024, published 30.09.2024

**Abstract.** *Purpose.* Consider a system of differential equations with delay, which models a fully connected chain of  $m + 1$  neurons with delayed synaptic communication. For this fully connected system, construct periodic solutions in the form of discrete traveling waves. This means that all components are represented by the same periodic function  $u(t)$  with a shift that is a multiple of some parameter  $\Delta$  (to be found). *Methods.* To search for the described solutions, in this work we move from the original system to an equation for an unknown function  $u(t)$ , containing  $m$  ordered delays, differing with step  $\Delta$ . It performs an exponential substitution (typical of equations of the Volterra type) in order to obtain a relay equation of a special form. *Results.* For the resulting equation, a parameter range is found in which it is possible to construct a periodic solution with period  $T$  depending on the parameter  $\Delta$ . For the found period formula  $T = T(\Delta)$ , it is possible to prove the solvability of the period equation, that is, to prove the existence of non-zero parameters – integer  $p$  and real  $\Delta$  – satisfying the equation  $(m + 1)\Delta = pT(\Delta)$ . The constructed function  $u(t)$  has a bursting effect. This means that  $u(t)$  has a period of  $n$  high spikes, followed by a period of low values. *Conclusion.* The existence of a suitable parameter  $\Delta$  ensures the existence of a periodic solution in the form of a discrete traveling wave for the original system. Due to the choice of permutation, the coexistence of  $(m + 1)!$  periodic solutions is ensured.

**Keywords:** differential-difference equations, fully coupled system, discrete traveling waves, bursting effect, periodic solutions, neuron modeling.

**Acknowledgements.** The work on Sections 1 and 4 was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>. The work on Sections 2 and 3 was carried out within the framework of the implementation of the development program of the regional scientific and educational mathematical center (YarSU) with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement on the provision of subsidies from the federal budget No. 075-02-2024-1442).

**For citation:** Preobrazhenskii IE, Preobrazhenskaia MM. Discrete traveling waves in a relay system of differential-difference equations modeling a fully connected network of synaptically connected neurons. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(5):654–669. DOI: 10.18500/0869-6632-003117

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

В настоящей работе рассматривается модель полносвязной сети нейронов. В ее основе лежит уравнение [1–3]

$$\dot{u} = \lambda F(u(t - 1))u, \quad (1)$$

которое служит для описания поведения уединенного нейрона. Здесь  $u(t) > 0$  – нормированный мембранный потенциал нейрона,  $\lambda > 0$  характеризует скорость протекания электрических процессов,  $F$  – кусочно-постоянная функция,

$$F(u) = \begin{cases} -a, & u \in (0, 1], \\ 1, & u > 1, \end{cases}$$

$a = \text{const} > 0$ . Уравнение (1) является в некотором смысле предельной версией обобщенного уравнения Хатчинсона [4, 5]

$$\dot{u} = \lambda f(u(t - 1))u, \quad (2)$$

где  $f$  – гладкая функция,

$$u = u(t) > 0; \quad \lambda \gg 1; \quad f(0) = 1; \quad \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = -a \quad (a > 0); \quad f'(u), u f''(u) = O(u^{-2}), \quad u \rightarrow \infty.$$

В работе [4] было доказано, что уравнение (2) допускает устойчивый релаксационный цикл  $u(t) = e^{\lambda(x_0(t) + O(1/\lambda))}$  при  $\lambda \rightarrow +\infty$ , где

$$x_0(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ -a(t - t_0), & t \in [1, t_0 + 1], \\ t - T_0, & t \in [t_0 + 1, T_0], \end{cases} \quad (3)$$

$$x_0(t + T_0) = x_0(t), \quad t_0 = (a + 1)/a, \quad T_0 = (a + 1)^2/a.$$

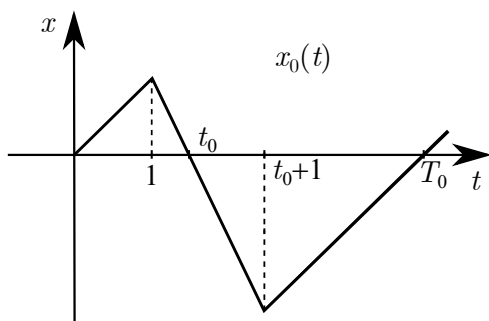


Рис. 1. Функция  $x_0(t)$

Fig. 1. The function  $x_0(t)$

Функция  $x_0(t)$  изображена на рис. 1.

Возвращаясь к уравнению (1), отметим, что оно обладает орбитально устойчивым  $T_0$ -периодическим решением  $u(t) = e^{\lambda x_0(t)}$ .

В настоящей работе нейроны, каждый из которых по отдельности моделируется уравнением (1), связываются в полносвязную систему с синаптическим односторонним взаимодействием. Способ моделирования синаптической связи базируется на идее быстрой пороговой модуляции, описанной, например, в [6-8]. Он выбран как некоторая предельная версия

связи, используемой, например, в работах [9, 10] при моделировании кольцевых цепочек нейронов. Для описания полной связи используется симметричная относительно перестановки своих аргументов функция

$$G(u_1, \dots, u_m) = \begin{cases} 0, & \text{если для } \forall i \ u_i < 1, \\ b, & \text{если } \exists k \ u_k > 1, \end{cases}$$

$b = \text{const} > 0$ . Синаптическая связь предполагается запаздывающей, поэтому каждый аргумент функции  $G$  обладает запаздыванием  $h > 0$ .

В качестве модели полносвязной цепочки нейронов с запаздывающей синаптической связью предлагается система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{u}_j = \left( \lambda F(u_j(t - 1)) + G(u_0(t - h), \dots, u_{j-1}(t - h), u_{j+1}(t - h), \dots, u_m(t - h)) \cdot \ln \frac{u_*}{u_j} \right) u_j, \quad (4)$$

$j = 0, 1, \dots, m$ . Здесь  $u_j(t) > 0$  — нормированные мембранные потенциалы нейронов,  $\lambda > 0$  характеризует скорость протекания электрических процессов,  $h > 0$  — запаздывание в цепи связи, слагаемые  $G(u_0(t - h), \dots, u_{j-1}(t - h), u_{j+1}(t - h), \dots, u_m(t - h)) \cdot \ln(u_*/u_j)u_j$  моделируют синаптическое взаимодействие с запаздыванием по времени. При описании  $j$ -го нейрона функция  $G$  умножается на логарифм  $\ln(u_*u_j)$ , который меняет знак при переходе значений функции  $u_j$  через пороговую величину  $u_* = \exp(c\lambda)$ ,  $c = \text{const} \in \mathbb{R}$ .

Подобные (4) системы уравнений, которые описывают сети нейронов и базируются на модели уединенного нейрона (1) или (2), рассматриваются в ряде работ [1, 2, 11]. В [11] для кольцевой цепочки нейронов с односторонним синаптическим взаимодействием строился так называемый импульсно-рефрактерный режим. Под ним понимается периодический режим, в котором чередуются компоненты, обладающие экспоненциально высокими всплесками, и компоненты с экспоненциально малыми значениями. В работах [1, 2] рассматривается взаимодействие двух нейронов. Доказаны результаты о мультистабильности сосуществующих периодических режимов с фиксированным суммарным количеством всплесков.

В отличие от вышеупомянутых работ в настоящей статье рассматривается полносвязная система, то есть считаем, что каждый нейрон связан с каждым. В работе [12] вводится полносвязная система нейроосцилляторов с электрической синаптической связью, каждый из осцилляторов описывается уравнением (2). Для случая кольцевой системы с однонаправленной связью доказываются результаты о буферности, а для полносвязной сети, где все связи равноправны и одинаковы, исследуется вопрос двукластерной синхронизации. В статье [13] также исследуется вопрос двукластерной синхронизации, однако на примере осцилляторов ван дер Поля. В работе [14] рассматривается полносвязная система нелинейных осцилляторов, изучаются динамические свойства решений химерного типа, возникающие при двукластерной синхронизации.

Раздел 1 посвящен постановке задачи. В нем описывается механизм поиска дискретных бегущих волн, переход к вспомогательному релейному уравнению с  $m$  запаздываниями, вводится для него множество начальных функций. В разделе 2 приводится основной результат в виде трех теорем. В разделах 3 и 4 доказываются сформулированные теоремы.

## 1. Постановка задачи

**1.1. Дискретные бегущие волны.** Мы интересуемся существованием периодического решения системы (4) в виде дискретной бегущей волны. Техника построения решений такого типа для полносвязной системы та же, что, например, в работе [15], и аналогична технике для кольцевой цепи генераторов (см. [16]): предполагаем, что все функции  $u_k$  представлены одной и той же периодической функцией  $u$  со сдвигами, кратными некоторому параметру  $\Delta$ :

$$u_k(t) = u(t + j_k\Delta), \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (5)$$

где  $j_0, j_1, \dots, j_m$  обозначают некоторую перестановку номеров  $0, 1, \dots, m$ , а параметр  $\Delta$  предстоит определить.

Зафиксируем  $k$ . После подстановки (5) в  $k$ -е уравнение (4) и перенормировки времени  $t + j_k\Delta \mapsto t$  получим

$$\begin{aligned} \dot{u} = & \left( \lambda F(u(t-1)) + G(u(t + (j_0 - j_k)\Delta - h), \dots, u(t + (j_{k-1} - j_k)\Delta - h), \right. \\ & \left. u(t + (j_{k+1} - j_k)\Delta - h), \dots, u(t + (j_m - j_k)\Delta - h) \right) \cdot \ln \frac{u_*}{u} u. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что разности  $j_l - j_k$  ( $l = 0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m$ ) принимают все значения из упорядоченного множества  $\{-j_k, \dots, -1, 1, \dots, m - j_k\}$ . Обозначим период функции  $u(t)$  через  $T = T(\Delta)$ . С учетом симметричности функции  $G$  относительно перестановки своих аргументов уравнение (6) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & \left( \lambda F(u(t-1)) + G(u(t - \Delta - h), \dots, u(t - j_k\Delta - h), \right. \\ & \left. u(t + (m - j_k)\Delta - T - h), \dots, u(t + \Delta - T - h) \right) \cdot \ln \frac{u_*}{u} u. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку для каждого  $k = 0, 1, \dots, m$  должно получиться одно и то же уравнение относительно функции  $u(t)$ , естественным оказывается требование

$$u(t - (j_k + 1)\Delta - h) \equiv u(t + (m - j_k)\Delta - T - h),$$

то есть величина  $(j_k + 1)\Delta + (m - j_k)\Delta - T$  должна быть кратна  $T$ . Отсюда получаем, что для периодичности решения  $(u_0, u_1, \dots, u_m)$  системы (4) необходимо, чтобы параметр  $\Delta$  и период  $T = T(\Delta)$  функции  $u(t)$  удовлетворяли уравнению периодов

$$(m + 1)\Delta = pT(\Delta), \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (8)$$

При этом все уравнения системы (7) преобразуются в

$$\dot{u} = \left( \lambda F(u(t-1)) + G(u(t+m\Delta-h), \dots, u(t+\Delta-h)) \cdot \ln \frac{u_*}{u} \right) u. \quad (9)$$

Таким образом, задача поиска периодических решений системы (4) в виде дискретных бегущих волн (5) свелась к поиску периодической функции  $u(t)$ , удовлетворяющей (9), и параметра  $\Delta$  таких, что период  $T = T(\Delta)$  функции  $u(t)$  удовлетворяет уравнению периодов (5) при некотором целом  $p$ .

Отметим, что в случае существования указанной функции  $u(t)$  и параметра  $\Delta$  за счет выбора перестановки обеспечивается сосуществование сразу  $(m+1)!$  периодических решений системы (4).

**1.2. Релейное уравнение с  $m$  запаздываниями.** Вместо уравнения (9) рассмотрим уравнение

$$\dot{u} = \left( \lambda F(u(t-1)) + G(u(t-h_1), \dots, u(t-h_m)) \cdot \ln \frac{u_*}{u} \right) u \quad (10)$$

с упорядоченными запаздываниями

$$h_1 < h_2 < \dots < h_m, \quad h_{s+1} = h_s + |\Delta|, \quad s = 1, \dots, m-1. \quad (11)$$

**1.3. Переход к логарифмической шкале.** Сделаем в (10) экспоненциальную замену переменных:  $u = e^{\lambda x}$ , предполагая, что  $c = \text{const}$  такая, что  $u_* = e^{\lambda c}$ :

$$\dot{x} = F(e^{\lambda x(t-1)}) + (c-x) G(e^{\lambda x(t-h_1)}, \dots, e^{\lambda x(t-h_m)}).$$

Введем обозначения функций с экспоненциальными аргументами

$$R(x) = F(e^{\lambda x}) = \begin{cases} -a, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$$H(x_1, \dots, x_m) = G(e^{\lambda x_1}, \dots, e^{\lambda x_m}) = \begin{cases} 0, & \text{если для } \forall i \ x_i < 0, \\ b, & \text{если } \exists k \ x_k > 0. \end{cases}$$

Таким образом, новая неизвестная функция  $x(t)$  должна удовлетворять уравнению

$$\dot{x} = R(x(t-1)) + (c-x)H(x(t-h_1), \dots, x(t-h_m)). \quad (12)$$

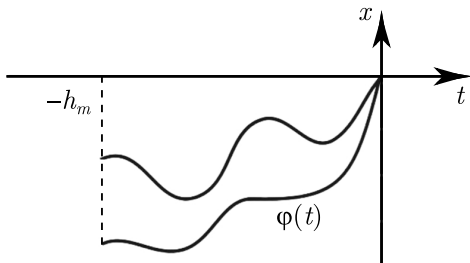


Рис. 2. Представители множества начальных функций  
Fig. 2. Representatives of the set of initial functions

**1.4. Начальное множество функций.**

В качестве множества начальных функций для уравнения (12) выберем следующее:

$$S = \{ \varphi \in C[-h_m, 0] : \varphi(t) < 0 \text{ при } t \in [-h_m, 0), \varphi(0) = 0 \}. \quad (13)$$

Это отрицательные функции на промежутке длины наибольшего запаздывания  $h_m$ , принимающие в нуле значение ноль (см. схематичный рис. 2).

## 2. Результат

**2.1. Решение релейного уравнения относительно переменной  $x$ .** Введем обозначение

$$y_0(\tilde{x}, t) = \begin{cases} \left(\tilde{x} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt} + \frac{1}{b} + c, & t \in [0, t_0], \\ t - t_0 + y_0(\tilde{x}, t_0) & t \in [t_0, T_0], \end{cases} \quad y_0(\tilde{x}, t + T_0) = y_0(y_0(\tilde{x}, T_0), t). \quad (14)$$

Эта функция изображена на рис. 3. Она состоит из непрерывно «склеенных» чередующихся частей экспоненты и линейных функций с угловым коэффициентом 1. Величина  $\tilde{x}$  обозначает значение функции  $y_0$  при  $t = 0$ . Ниже, в лемме 2, будет доказано, что условие

$$c < -a - \frac{1}{b} - \frac{a+1}{1-e^{-bt_0}} \quad (15)$$

гарантирует, что  $y_0((k+1)T_0) < y_0(kT_0)$ .

Введем также величины

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} &= x_0(h_1), \\ x_0^{(s+1)} &= h_{s+1} - h_s - t_0 - (n-1)T_0 + \\ &+ y_0(x_0^{(s)}, t_0 + (n-1)T_0), \quad s = 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Зафиксируем натуральное число  $n$ . Пусть

- 1) параметры  $a > 0$ ,  $b > 0$  и  $c$  удовлетворяют ограничению (15);
- 2) запаздывания  $h_s$  удовлетворяют неравенствам

$$(n-1)T_0 + t_0 + 1 < h_1 < nT_0, \quad (16)$$

$$h_{s+1} - h_s > t_0 + (n-1)T_0, \quad s = 1, \dots, m-1; \quad (17)$$

$$h_{s+1} - h_s < nT_0 + a(1 - e^{-nbt_0}), \quad s = 1, \dots, m-1. \quad (18)$$

Тогда уравнение (12) с любой начальной функцией из множества (13) имеет  $T$ -периодическое решение

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [0, h_1] \\ y_0(x_0^{(s)}, t - h_s), & t \in [h_s, h_s + t_0 + (n-1)T_0], \\ & s = 1, \dots, m, \\ t - h_s - t_0 - (n-1)T_0 + y_0(x_0^{(s)}, t_0 + (n-1)T_0), & t \in [h_s + t_0 + (n-1)T_0, h_{s+1}], \\ & s = 1, \dots, m-1, \\ t - h_m - t_0 - (n-1)T_0 + y_0(x_0^{(m)}, t_0 + (n-1)T_0), & t \in [h_m + t_0 + (n-1)T_0, T], \end{cases} \quad (19)$$

$$T = h_m + t_0 + (n-1)T_0 - \left(x_{n-1}^{(m)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} - \frac{1}{b} - c. \quad (20)$$

Величины  $x_0^{(s)}$  обозначают значения решения  $x(t)$  в точках  $h_s$ . Схематичный график функции  $x(t)$  изображен на рис. 4.

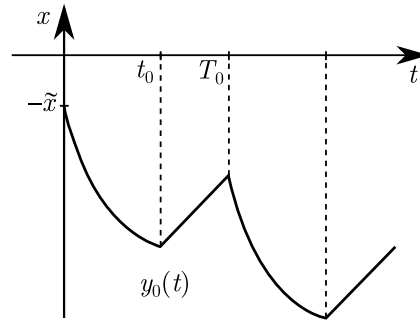


Рис. 3. Функция  $y_0(t)$

Fig. 3. The function  $y_0(t)$

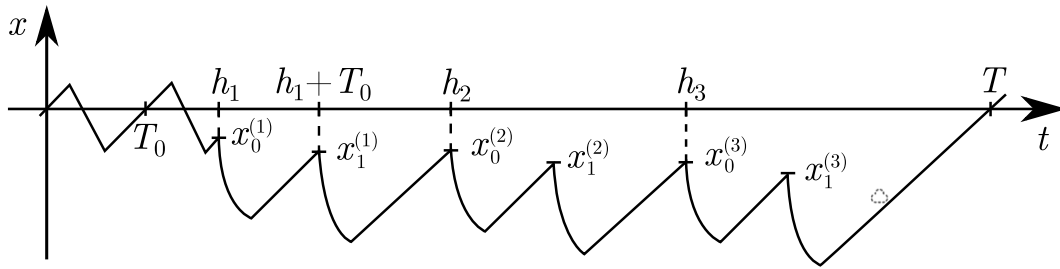


Рис. 4. Функция  $x(t)$  при  $n = 2, m = 3$

Fig. 4. The function  $x(t)$  for  $n = 2, m = 3$

Подробное доказательство теоремы 1 изложено в разделе 3. Ограничимся здесь описанием смысла приведенных в теореме условий на параметры.

Двойное неравенство (16) означает, что момент времени  $t = h_1$  попадает на  $n$ -й период функции  $x_0(t)$ , причем на отрезок, где  $x_0(t)$  возрастает и отрицательна (см. рис. 1).

Ограничение (17) означает, что длины отрезков  $[h_s, h_{s+1}]$  больше длины промежутка, на котором решение  $x(t)$  совпадает с функцией  $x_0(t)$  и меняет знак (до последней точки положительности на периоде).

Неравенства (18) обеспечивают отрицательность величин  $x_0^{(s)}$  при  $s = 1, \dots, m$ . Это будет доказано в лемме 6.

**2.2. Разрешимость уравнения периодов.** Для периода  $T$ , описанного формулой (20), удастся доказать утверждение о разрешимости уравнения периодов (8).

**Теорема 2.** *Зафиксируем натуральные числа  $m \geq 2$  и  $n$ . Пусть*

- 1) *параметры  $a > 0, b > 0$ ;*
- 2) *значение  $c$  удовлетворяет ограничениям (15) и*

$$c > -2a - \frac{1}{b} - \frac{a+1}{1-e^{-bt_0}}; \quad (21)$$

- 3) *запаздывания  $h_s$  удовлетворяют (16) и (11).*

*Тогда существуют  $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , удовлетворяющие уравнению (8), причем*

$$t_0 + (n-1)T_0 < |\Delta| < nT_0 + a(1-e^{-nbt_0}). \quad (22)$$

Неравенство (22) означает, что для  $h_{s+1} - h_s = |\Delta|$  выполнены условия (17) и (18) теоремы 1. Доказательство теоремы приведено в пункте 4.

**2.3. Периодическое решение исходной системы.** Наличие подходящего параметра  $\Delta$  обеспечивает существование периодического решения исходной системы в виде дискретной бегущей волны. Таким образом, из теорем 1 и 2 вытекает следующий результат.

**Теорема 3.** *Пусть*

- 1)  *$n$  – фиксированное натуральное число,*
- 2) *параметры  $a, b, c, h_s$  ( $s = 1, \dots, m$ ) удовлетворяют условиям теоремы 1,*
- 3)  *$\lambda > 0$ ,*

4)  $\Delta \neq 0$  удовлетворяет уравнению периодов (8) при некотором целом  $p \neq 0$ , тогда существует  $h$  такое, что система (4) имеет  $(m + 1)!$  сосуществующих решений вида

$$u_k = e^{\lambda x(t+j_k\Delta)}, \quad (23)$$

где  $x(t)$  описывается формулой (19),  $j_0, j_1, \dots, j_m$  представляют собой некоторую перестановку номеров  $0, 1, \dots, m$ . При этом каждая компонента обладает на периоде  $n$  «высокоамплитудными» (порядка  $e^\lambda$ ) всплесками, после которых следует промежуток с «малыми» (порядка  $e^{-\lambda}$ ) значениями функции  $u_k(t)$ . Величина  $(m + 1)\Delta$  кратна периоду этого решения.

Поведение компонент решения, описанное в теореме, естественно называть bursting-эффектом (см. рис. 5).

С учетом (5) и сделанной экспоненциальной замены  $u = e^{\lambda x}$  справедливость теоремы 3 следует из теоремы 1 и теоремы 2. Отметим способ выбора параметра  $h$ . Если  $h_1 > \Delta$ , то  $h = h_1 - \Delta$ . Если  $h_1 < \Delta$ , то можно взять  $h = \Delta - h_1$ .

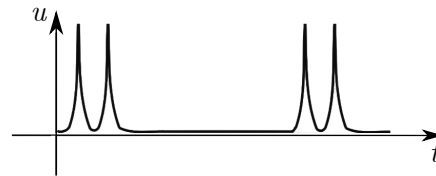


Рис. 5. Функция  $u(t)$  с bursting-эффектом, содержащая  $n=2$  всплеска на периоде

Fig. 5. A function  $u(t)$  with a bursting effect, containing  $n = 2$  bursts per period

### 3. Доказательство теоремы 1

На промежутке  $[0, h_1]$  функция  $H(x(t - h_1), \dots, x(t - h_m))$  равна 0, следовательно, на текущем отрезке  $x(t)$  отыскивается из начальной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = R(x(t - 1)), \\ x(t)|_{t \in [-h_m, 0]} = \varphi(t). \end{cases} \quad (24)$$

Решение задачи (24) — периодическая функция  $x_0(t)$ , описанная формулами (3). Эта функция изображена на рис. 1. Она обращается в ноль в точках

$$kT_0, t_0 + kT_0, k = 0, 1, \dots \quad (25)$$

и терпит излом в точках

$$1 + kT_0, t_0 + 1 + kT_0, k = 0, 1, \dots \quad (26)$$

По условию теоремы 1 величина  $h_1$  попадает на  $n$ -й период функции  $x_0(t)$ . Более точно: ограничение (16) гарантирует, что  $h_1$  попадает на отрезок периода функции  $x_0(t)$ , где она возрастает и отрицательна.

Уравнение (12) на промежутке  $[h_1, h_2]$  принимает вид

$$\dot{x} = 1 + (c - x)H(x_0(t - h_1), \varphi(t - h_2), \dots, \varphi(t - h_m)).$$

Первый аргумент функции  $H$  меняет знак, а аргументы со 2-го по  $m$ -й отрицательны. Значит, значение функции  $H$  здесь определяется знаком ее первого аргумента  $x_0(t - h_1)$ . На отрезках  $[h_1 + kT_0, h_1 + t_0 + kT_0]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  функция  $x_0(t - h_1)$  положительна, а на отрезках  $[h_1 + t_0 + kT_0, h_1 + t_0 + (k + 1)T_0]$  отрицательна. Обозначим значение функции  $x$  в точках  $h_1 + kT_0$  через  $x_k^{(1)}$ , эти величины предстоит определить. Таким образом, в зависимости от знака  $x_0(t - h_1)$  на отрезке  $[h_1, h_1 + t_0 + (n - 1)T_0]$  получаем одну из двух возможных задач Коши.



1. При  $t \in [h_1 + kT_0, h_1 + t_0 + kT_0]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + (c - x)b, \\ x|_{t=h_1+kT_0} = x_k^{(1)}, \end{cases} \quad (27)$$

откуда

$$x(t) = \left( x_k^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-b(t-h_1-kT_0)} + \frac{1}{b} + c. \quad (28)$$

2. При  $t \in [h_1 + t_0 + kT_0, h_1 + (k + 1)T_0]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 2$ ,

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ x|_{h_1+t_0+kT_0} = \left( x_k^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \end{cases} \quad (29)$$

Здесь начальное значение определяется формулой (28). Решение задачи Коши (29) имеет вид

$$x(t) = t - h_1 - t_0 - kT_0 + \left( x_k^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c \quad (30)$$

Тем самым доказано, что на отрезке  $[h, h_1 + t_0 + kT_0]$  решение  $x(t)$  уравнения (12) совпадает с функцией  $y_0(x_0^{(1)}, t - h_1)$ , описанной формулой (14),  $x_0^{(1)} = x_0(h_1)$ . При этом

$$x_k^{(1)} = y_0(x_0^{(1)}, kT_0).$$

Далее докажем две леммы, описывающие поведение последовательности  $x_k^{(1)}$ .

**Лемма 1.** Последовательность  $x_k^{(1)}$  задается формулой

$$x_k^{(1)} = (a + 1) \frac{1 - e^{-kbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left( x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-kbt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (31)$$

**Доказательство.** Учитывая рекуррентную форму  $y_0$  и то, что  $T_0 - t_0 = a + 1$ , получаем рекуррентную последовательность для  $x_k^{(1)}$ :

$$x_{k+1}^{(1)} = a + 1 + \left( x_k^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (32)$$

Отсюда, суммируя соответствующую геометрическую прогрессию, накапливающуюся в коэффициенте при  $(a + 1)$ , найдем явную формулу для вычисления  $x_k^{(1)}$ :

$$x_k^{(1)} = (a + 1) \frac{1 - e^{-kbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left( x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c \right) e^{-kbt_0} + \frac{1}{b} + c.$$

Лемма 1 доказана.

Докажем лемму о монотонности последовательности  $x_k^{(1)}$ .

**Лемма 2.** Пусть параметры  $a, b, c$  удовлетворяют неравенству (15). Тогда последовательность  $x_k^{(1)}$ , описанная формулой (31), убывает.

**Доказательство.** Докажем, что

$$x_{k+1}^{(1)} < x_k^{(1)}.$$

Это неравенство, с учетом (31), эквивалентно следующему неравенству:

$$(a+1) \frac{1 - e^{-(k+1)bt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-(k+1)bt_0} < (a+1) \frac{1 - e^{-kbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-kbt_0},$$

откуда следует

$$c < x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - \frac{a+1}{1 - e^{-bt_0}}.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку  $x_0^{(1)} = x_0(h_1) > x_0(t_0 + 1 + (n-1)T_0) = -a$ , и по условию (15) выполняется.

В рамках предположения (16) справедливо  $x_0^{(1)} = x_0(h_1) = h_1 - nT_0 < 0$ , поэтому лемма 2 и убывание экспоненты в составе функции  $y_0$  обеспечивают отрицательность решения на промежутке  $[h_1, h_1 + t_0 + (n-1)T_0]$ .

Следующий промежуток построения начинается в точке  $h_1 + t_0 + (n-1)T_0$  и продлится либо до точки  $h_2$ , либо до очередного корня, увеличенного на 1. Здесь задача принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ x|_{t=h_1+t_0+(n-1)T_0} = \left(x_{n-1}^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c, \end{cases}$$

откуда

$$x(t) = t - h_1 - t_0 - (n-1)T_0 + \left(x_{n-1}^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (33)$$

Подставляя  $h_2$  в формулу (33), используя (31), неравенства (18), (15) и отрицательность  $x_0^{(1)}$ , убеждаемся, что  $x(h_2) < 0$ . Это означает, что  $h_2$  меньше следующего корня функции  $x(t)$ . Таким образом, текущий промежуток построения — это  $[h_1 + t_0 + (n-1)T_0, h_2]$ , и на нем справедлива формула (33).

Далее решение строится аналогично тому, как это было сделано на промежутке  $[h_1, h_2]$ .

**Лемма 3.** При  $t \in [h_s, h_s + t_0 + (n-1)T_0]$ ,  $s = 1, \dots, m$  функция  $H$  имеет один аргумент с чередующимся знаком (это  $x(t - h_s)$ ), а остальные аргументы отрицательны. На отрезках  $[h_s + t_0 + (n-1)T_0, h_{s+1}]$ ,  $s = 1, \dots, m-1$  все аргументы функции  $H$  отрицательны.

**Доказательство** леммы проводится методом математической индукции и включает в себя несколько лемм о поведении величин  $x_k^{(s)}$ .

На каждом из промежутков  $[h_s, h_s + t_0 + (n-1)T_0]$  при решении уравнения возникают задачи Коши, аналогичные задачам (27) и (29).

1. При  $t \in [h_s + kT_0, h_s + t_0 + kT_0]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $s = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + (c-x)b, \\ x|_{t=h_s+kT_0} = x_k^{(s)}. \end{cases} \quad (34)$$

Последовательность  $x_k^{(s)}$  равна значениям функции  $x(t)$  в точках  $h_s + kT_0$ . Они будут описаны рекуррентными соотношениями ниже. Из (34) находим

$$x(t) = \left(x_k^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-b(t-h_s-kT_0)} + \frac{1}{b} + c. \quad (35)$$

Подставляя  $t = h_s + t_0 + kT_0$  в (35), получаем начальное значение для следующей по номеру задачи Коши.

2. При  $t \in [h_s + t_0 + kT_0, h_s + (k + 1)T_0]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 2$ ,  $s = 1, \dots, m$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ x|_{h_s+t_0+kT_0} = \left(x_k^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c, \end{cases}$$

откуда

$$x(t) = t - h_s - t_0 - kT_0 + \left(x_k^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (36)$$

3. При  $t \in [h_s + t_0 + (n - 1)T_0, h_{s+1}]$ ,  $s = 1, \dots, m - 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ x|_{h_s+t_0+(n-1)T_0} = \left(x_{n-1}^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c, \end{cases}$$

откуда

$$x(t) = t - h_s - t_0 - (n - 1)T_0 + \left(x_{n-1}^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (37)$$

Для завершения доказательства сформулируем еще 3 леммы.

**Лемма 4.** Последовательности  $x_k^{(s)}$  при  $s = 1, \dots, m$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$  задаются формулами

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} = x_0(h_1), \quad x_k^{(s+1)} = (|\Delta| - nT_0) \frac{1 - e^{-snbt_0}}{1 - e^{-nbt_0}} e^{-kbt_0} + (a + 1) \frac{1 - e^{-(sn+k)bt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \\ + \left(x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-(sn+k)bt_0} + \frac{1}{b} + c. \end{aligned} \quad (38)$$

**Доказательство.** Аналогично тому, как была получена формула (31), найдем

$$x_k^{(s)} = (a + 1) \frac{1 - e^{-kbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-kbt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (39)$$

Формула (37) при  $t = h_{s+1}$  дает значение для величины  $x_0^{(s+1)}$ :

$$x_0^{(s+1)} = h_{s+1} - h_s - t_0 - (n - 1)T_0 + \left(x_{n-1}^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c, \quad (40)$$

Подставляя в (40) формулу (39) при  $k = n - 1$  и учитывая равенство  $T_0 - t_0 = a + 1$ , получаем рекуррентную зависимость  $x_0^{(s+1)}$  от  $x_0^{(s)}$ :

$$x_0^{(s+1)} = h_{s+1} - h_s - nT_0 + (a + 1) \frac{1 - e^{-nbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(s)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-nbt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (41)$$

Отсюда, суммируя геометрическую прогрессию и учитывая, что  $h_{s+1} - h_s = |\Delta|$ , получаем

$$x_0^{(s+1)} = (|\Delta| - nT_0) \frac{1 - e^{-snbt_0}}{1 - e^{-nbt_0}} + (a + 1) \frac{1 - e^{-snbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + \left(x_0^{(1)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-snbt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (42)$$

Из формул (39) и (42) следует (38).

**Лемма 5.** Пусть параметры  $a, b, c$  удовлетворяют неравенству (15). Тогда последовательности  $x_k^{(s)}$ ,  $s = 1, \dots, m$ , описанные формулами (38), убывают по  $k$  при фиксированном  $s$ .

Эта лемма доказывается аналогично лемме 2.

Следующая лемма гарантирует отрицательность значений функции  $x$  в точках  $h_s$ .

**Лемма 6.** Пусть параметры  $a, b, c, h_s$  ( $s = 1, \dots, m$ ) удовлетворяют условиям (18) и (15), тогда величины  $x_0^{(s)} < 0$  при  $s = 1, \dots, m$ .

**Доказательство.** Докажем утверждение методом математической индукции. Из условия (16) следует, что  $x_0^{(1)} = x_0(h_1) = h_1 - nT_0 < 0$ . Это означает выполнение базы индукции. Предположим, что  $x_0^{(s)} < 0$ , тогда, применяя к (41) неравенства (18) и  $c + \frac{1}{b} < -a - \frac{a+1}{1-e^{-bt_0}}$ , которое следует из (15), получим

$$x_0^{(s+1)} = h_{s+1} - h_s - nT_0 + (a+1) \frac{1 - e^{-nbt_0}}{1 - e^{-bt_0}} + x_0^{(s)} e^{-nbt_0} + \left(\frac{1}{b} + c\right) (1 - e^{-nbt_0}) < x_0^{(s)} e^{-nbt_0} < 0.$$

Лемма 6 доказана.

Леммы 2 и 6 гарантируют отрицательность значений решения  $x(t)$  при  $t \in [h_s, h_{s+1}]$ , тем самым обосновывается индукционный переход доказательства леммы 3.

На заключительном этапе построения решения получим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ x|_{t=h_m+t_0+(n-1)T_0} = \left(x_{n-1}^{(m)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c, \end{cases}$$

откуда

$$x(t) = t - h_m - t_0 - (n-1)T_0 + \left(x_{n-1}^{(m)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} + \frac{1}{b} + c. \quad (43)$$

Правая часть уравнения (12) оказывается равна 1, поскольку все аргументы  $H$  отрицательны после  $t = h_m + t_0 + (n-1)T_0$ . Эта ситуация сохранится на отрезке  $[h_m + t_0 + (n-1)T_0, T]$ , где через  $T$  обозначен первый ноль функции  $x(t)$ , больший  $(n-1)T_0 + t_0$  (положительный корень с номером  $2n$ ). Из формулы (43) следует (20).

**Лемма 7.** Пусть  $x(t)$  — построенное на отрезке  $[0, T]$  решение уравнения (12), описанное формулами (3) при  $t \in [0, h_1]$ , (35), (36) и (37) при  $t \in [h_1, h_m + t_0 + (n-1)T_0]$ , (43) при  $t \in [h_m + t_0 + (n-1)T_0, T]$ . Тогда функция  $x(t+T)$  при  $t \in [-h_m, 0]$  принадлежит множеству (13).

**Доказательство.** Докажем, что промежуток  $((n-1)T_0 + t_0, T)$ , на котором  $x(t) < 0$ , имеет длину больше  $h_m$ . Действительно,

$$T - (n-1)T_0 - t_0 = h_m - \underbrace{\left(x_{n-1}^{(m)} - \frac{1}{b} - c\right) e^{-bt_0} - \frac{1}{b} - c}_{=-x(h_s) > 0} > h_s.$$

Тогда промежуток  $[T - h_m, T)$  вложен в  $((n-1)T_0 + t_0, T)$ , причем  $x(T) = 0$ .

Лемма 7 обеспечивает  $T$ -периодичность построенного решения  $x(t)$ .

Теорема 1 полностью доказана.

#### 4. Доказательство теоремы 2

Отметим, что в уравнении периодов (8), в силу положительности  $T$  и  $m + 1$ , величины  $\Delta$  и  $p$  имеют одинаковый знак, поэтому можно записать

$$T = \frac{(m + 1)|\Delta|}{|p|}. \quad (44)$$

Приведем явную формулу для вычисления периода  $T$ . Подставляя (38) в (20), а также учитывая, что  $h_m = h_1 + (m - 1)|\Delta|$  и  $x_0^{(1)} = h_1 - nT_0$ , получаем

$$T = |\Delta| \left( m - \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}} \right) + h_1(1 - e^{-mnb t_0}) + nT_0 \frac{1 - e^{-(m+1)nb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}} - (a + 1) \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} - \frac{1}{b} - c. \quad (45)$$

Из (44) и (45) следует

$$\begin{aligned} \left( \frac{m + 1}{|p|} - m + \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}} \right) |\Delta| &= \\ &= h_1(1 - e^{-mnb t_0}) + nT_0 \frac{1 - e^{-(m+1)nb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}} - (a + 1) \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} - \frac{1}{b} - c. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь коэффициент при  $|\Delta|$  положителен, так как  $\frac{m+1}{|p|} > m$  и экспонента с отрицательным показателем меньше 1. Правая часть положительна в силу неравенства (15), из которого следует

$$-(a + 1) \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} - \frac{1}{b} - c > -(a + 1) \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} + a + \frac{a + 1}{1 - e^{-bt_0}} = \frac{(a + 1)e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} + a > 0.$$

Таким образом, мы убедились в корректности нахождения  $\Delta$  из уравнения (46) и можем записать

$$|\Delta| = \frac{h_1(1 - e^{-mnb t_0}) + nT_0 \frac{1 - e^{-(m+1)nb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}} - (a + 1) \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-bt_0}} - \frac{1}{b} - c}{\frac{m + 1}{|p|} - m + \frac{1 - e^{-mnb t_0}}{1 - e^{-nb t_0}}}.$$

Теперь остается проверить справедливость ограничений (22). Допустим,  $|p| = 1$ , тогда  $\frac{m+1}{|p|} - m = 1$ . Применяя неравенства (15), (21) и (16), получим требуемое.

Теорема 2 доказана.

#### Заключение

Нами введена система (4), моделирующая полносвязную цепочку  $m + 1$  нейронов с синаптической запаздывающей связью. Для нее доказана теорема 3 о существовании  $(m + 1)!$  периодических решений в виде дискретных бегущих волн с bursting-эффектом. С этой целью для вспомогательного уравнения (12) с  $m$  упорядоченными запаздываниями  $h_1, \dots, h_m$  доказана теорема 1 о существовании специального периодического режима. После чего доказана теорема 2 о разрешимости уравнения периодов.

Отметим, что ограничение (16) в теореме 1 носит искусственный характер. Величина  $h_1$  попадает на некоторый период функции  $x_0(t)$ , номер которого обозначен через  $n$ . При этом возможны четыре случая взаимного расположения точек (25), (26) и  $h_1$ :

- (I)  $(n-1)T_0 < h_1 < (n-1)T_0 + 1$ ;
- (II)  $(n-1)T_0 + 1 < h_1 < (n-1)T_0 + t_0$ ;
- (III)  $(n-1)T_0 + t_0 < h_1 < (n-1)T_0 + t_0 + 1$ ;
- (IV)  $(n-1)T_0 + t_0 + 1 < h_1 < nT_0$ .

Для определенности нами подробно рассмотрен случай (IV), для которого доказана теорема 1. В остальных случаях можно доказать аналогичные утверждения, в которых форма решения немного отличается от (19), но сохраняется общая идея чередования промежутков с положительными и отрицательными значениями, что обеспечивает наличие bursting-эффекта у функции  $u(t)$ . Таким образом, bursting-эффект может сохраняться при изменении  $h_1$  в более широком диапазоне.

### Список литературы

1. Glyzin S. D., Preobrazhenskaia M. M. Multistability and bursting in a pair of delay coupled oscillators with a relay nonlinearity // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52, no. 18. P. 109–114. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.215.
2. Glyzin S. D., Preobrazhenskaia M. M. Two delay-coupled neurons with a relay nonlinearity. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V., Tiumentsev Y. (eds) Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research III. NEUROINFORMATICS 2019, Moscow, 7–11 October 2019. Studies in Computational Intelligence, vol. 856. Cham: Springer, 2020. P. 181–189. DOI: 10.1007/978-3-030-30425-6\_21.
3. Preobrazhenskaia M. M. Three unidirectionally synaptically coupled bursting neurons. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V., Tiumentsev Y., Klimov V. V. (eds) Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research V. NEUROINFORMATICS 2021, 18–22 октября 2021. Studies in Computational Intelligence, vol. 1008. Cham: Springer, 2022. P. 135–141. DOI: 10.1007/978-3-030-91581-0\_18.
4. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Об одной модификации уравнения Хатчинсона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 12. С. 2099–2112. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
5. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // УМН. 2015. Т. 70, № 3(423). С. 3–76. DOI: 10.4213/rm9659.
6. Somers D., Kopell N. Rapid synchronization through fast threshold modulation // Biol. Cybern. 1993. Vol. 68. P. 393–407. DOI: 10.1007/BF00198772.
7. Somers D., Kopell N. Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions // J. Math. Biol. 1995. Vol. 33. P. 261–280. DOI: 10.1007/BF00169564.
8. Terman D. An introduction to dynamical systems and neuronal dynamics // In: Tutorials in Mathematical Biosciences I: Mathematical Neuroscience. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. P. 21–68. DOI: 10.1007/978-3-540-31544-5\_2.
9. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 10. С. 1227–1244. DOI: 10.1134/S0374064113100014.
10. Преображенская М. М. Релаксационные циклы в модели синаптически взаимодействующих осцилляторов // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 2. С. 186–204. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-186-204.

11. Преображенская М. М. Импульсно-рефрактерный режим в кольцевой цепи синаптически связанных осцилляторов нейронного типа // Модел. и анализ информ. систем. 2017. Т. 24, № 5. С. 550–566. DOI: 10.18255/1818-1015-2017-5-550-566.
12. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Об одном способе математического моделирования электрических синапсов // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 7. С. 867–881. DOI: 10.31857/S0374064122070019.
13. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Периодические режимы двухкластерной синхронизации в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // ТМФ. 2022. Т. 212, № 2. С. 213–233. DOI: 10.4213/tmf10191.
14. Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Охота на химер в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 2. С. 152–175. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175.
15. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Бегущие волны в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 61, № 1. С. 71–89. DOI: 10.31857/S0044466922010070.
16. Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в кольцевых генных сетях // ТМФ. 2016. Т. 187, № 3. С. 560–579. DOI: 10.4213/tmf9052.

## References

1. Glyzin SD, Preobrazhenskaia MM. Multistability and bursting in a pair of delay coupled oscillators with a relay nonlinearity. IFAC-PapersOnLine. 2019;52(18):109–114. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.215.
2. Glyzin SD, Preobrazhenskaia MM. Two delay-coupled neurons with a relay nonlinearity. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V., Tiumentsev Y. (eds) Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research III. NEUROINFORMATICS 2019, Moscow, 7–11 October 2019. Studies in Computational Intelligence, vol. 856. Cham: Springer; 2020. P. 181–189. DOI: 10.1007/978-3-030-30425-6\_21.
3. Preobrazhenskaia M. M. Three unidirectionally synaptically coupled bursting neurons. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V., Tiumentsev Y., Klimov V. V. (eds) Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research V. NEUROINFORMATICS 2021, 18–22 October 2021. Studies in Computational Intelligence, vol. 1008. Cham: Springer; 2022. P. 135–141. DOI: 10.1007/978-3-030-91581-0\_18.
4. Kolesov AYu, Mishchenko EF, Rozov NKh. A modification of Hutchinson's equation. Comput. Math. Math. Phys. 2010;50(12):1990–2002. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
5. Glyzin SD, Kolesov AYu, Rozov NKh. Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons. Russian Mathematical Surveys. 2015;70(3):383–452. DOI: 10.1070/RM2015v070n03ABEH004951.
6. Somers D, Kopell N. Rapid synchronization through fast threshold modulation. Biol. Cybern. 1993;68:393–407. DOI: 10.1007/BF00198772.
7. Somers D, Kopell N. Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions. J. Math. Biol. 1995;33:261–280. DOI: 10.1007/BF00169564.
8. Terman D. An introduction to dynamical systems and neuronal dynamics. In: Tutorials in Mathematical Biosciences I: Mathematical Neuroscience. Berlin, Heidelberg: Springer; 2005. P. 21–68. DOI: 10.1007/978-3-540-31544-5\_2.
9. Glyzin SD, Kolesov AYu, Rozov NKh. On a method for mathematical modeling of chemical synapses. Differential Equations. 2013;49(10):1193–1210. DOI: 10.1134/S0012266113100017.

10. Preobrazhenskaia MM. Relaxation cycles in a model of synaptically interacting oscillators. MAIS. 2017;24(2):186–204. (in Russian) DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-186-204.
11. Preobrazhenskaia MM. The impulse-refractive mode in a neural network with ring synaptic interaction. Automatic Control and Computer Sciences. 2018;52(7):777–789. DOI: 10.3103/S0146411618070210.
12. Glyzin SD, Kolesov AYu. On a method of mathematical modeling of electrical synapses. Differential Equations. 2022;58(7):853–868. DOI: 10.1134/S0012266122070011.
13. Glyzin SD, Kolesov AYu. Periodic two-cluster synchronization modes in fully coupled networks of nonlinear oscillators. Theoret. and Math. Phys. 2022;212(2):1073–1091. DOI: 10.1134/S0040577922080049.
14. Glyzin DS, Glyzin SD, Kolesov AYu. Hunt for chimeras in fully coupled networks of nonlinear oscillators. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(2):152–175. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-2-152-175.
15. Glyzin SD, Kolesov AYu. Traveling waves in fully coupled networks of linear oscillators. Comput. Math. Math. Phys. 2022;62(1):66–83. DOI: 10.1134/S0965542522010079.
16. Glyzin SD, Kolesov AYu, Rozov NKh. Buffering in cyclic gene networks. Theoret. and Math. Phys. 2016;187(3):935–951. DOI: 10.1134/S0040577916060106.



*Преображенский Игорь Евгеньевич* — родился в Ярославле (1984). Окончил математический факультет Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова по направлению «Прикладная математика» (2007). Работает на кафедре дифференциальных уравнений ЯрГУ им. П. Г. Демидова в должности старшего преподавателя, а также в Центре интегрируемых систем в должности научного сотрудника. Научные интересы — функциональный анализ, нейронаука.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14  
 Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова  
 E-mail: preobrazenskii@gmail.com  
 ORCID: 0009-0007-0631-8158  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 751131



*Преображенская Маргарита Михайловна* — родилась в Переславле-Залесском (1991). Окончила с отличием математический факультет Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова по направлению «Прикладная математика» (2013). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2018, ННГУ им. Н. И. Лобачевского). Работает на кафедре математического анализа ЯрГУ им. П. Г. Демидова в должности доцента, а также в Центре интегрируемых систем в должности научного сотрудника. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, интегрируемые системы. Опубликовала множество научных статей по указанным направлениям.

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14  
 Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова  
 E-mail: rita.preo@gmail.com  
 ORCID: 0000-0002-7032-1155  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 974850