

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(3)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003105
EDN: OXPRAL

Схема повышенного порядка точности для моделирования динамики хищника и жертвы на неоднородном ареале

Б. Х. Нгуен[✉], В. Г. Цибулин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: ✉kng@sfedu.ru, vgcibulin@sfedu.ru

Поступила в редакцию 26.01.2024, принята к публикации 14.02.2024,

опубликована онлайн 5.04.2024, опубликована 31.05.2024

Аннотация. Цель настоящей работы — построение компактной схемы метода конечных разностей для моделирования динамики хищника и жертвы на основе уравнений реакции–диффузии–адвекции с переменными коэффициентами. **Методы.** Для дискретизации пространственно-неоднородной задачи с нелинейными членами таксисного и локального взаимодействия применяется интегро-интерполяционный метод. Плотности видов определяются на основной сетке, а их потоки вычисляются в узлах смещенной сетки. Интегрирование по времени проводится методом Рунге–Кутты высокого порядка. **Результаты.** Для случая одномерного кольцевого ареала на трехточечном шаблоне построена разностная схема, позволяющая повысить порядок точности по сравнению со стандартной схемой второго порядка аппроксимации. Представлены результаты вычислительного эксперимента и проведено сравнение схем для стационарных и нестационарных решений. На основе процесса Эйткена для последовательностей пространственных сеток реализованы вычисления эффективного порядка точности. Рассчитанные значения для предложенной схемы были больше стандартных двух: для диффузионной задачи получались значения не меньше четырех, уменьшение до трех было отмечено при учете направленной миграции. Эти выводы были подтверждены и при расчете нестационарных режимов колебаний. **Заключение.** Полученные результаты демонстрируют эффективность построенной схемы расчета динамики системы хищника и жертвы на неоднородном ареале обитания.

Ключевые слова: компактные схемы, неоднородный ареал, системы хищника и жертвы.

Благодарности. Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке РФФИ, грант № 23-21-00221.

Для цитирования: Нгуен Б. Х., Цибулин В. Г. Схема повышенного порядка точности для моделирования динамики хищника и жертвы на неоднородном ареале // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. 294–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003105. EDN: OXPRAL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

High order accuracy scheme for modeling the dynamics of predator and prey in heterogeneous environment

B. H. Nguyen✉, V. G. Tsybulin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: ✉kng@sfedu.ru, vgcibulin@sfedu.ru

Received 26.01.2024, accepted 14.02.2024, available online 5.04.2024, published 31.05.2024

Abstract. The aim of this work is to develop a compact finite-difference approach for modeling the dynamics of predator and prey based on reaction-diffusion-advection equations with variable coefficients. *Methods.* To discretize a spatially inhomogeneous problem with nonlinear terms of taxis and local interaction, the balance method is used. Species densities are determined on the main grid whereas fluxes are computed at the nodes of the staggered grid. Integration over time is carried out using the high-order Runge-Kutta method. *Results.* For the case of one-dimensional annular interval, the finite-difference scheme on the three-point stencil has been constructed that makes it possible to increase the order of accuracy compared to the standard second-order approximation scheme. The results of computational experiment are presented and comparison of schemes for stationary and non-stationary solutions is carried out. We conduct the calculation of accuracy order basing on the Aitken process for sequences of spatial grids. The calculated values of the effective order accuracy for the proposed scheme were greater than the standard two: for the diffusion problem, values of at least four were obtained. Decrease was obtained when directional migration was taken into account. This conclusion was also confirmed for non-stationary oscillatory regimes. *Conclusion.* The results demonstrate the effectiveness of the derived scheme for dynamics of predator and prey system in a heterogeneous environment.

Keywords: compact schemes, heterogeneous environment, predator and prey systems.

Acknowledgements. The work was carried out at the Southern Federal University with the support of the Russian Science Foundation, grant No. 23-21-00221.

For citation: Nguyen BH, Tsybulin VG. High order accuracy scheme for modeling the dynamics of predator and prey in heterogeneous environment. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(3):294–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003105

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Компактные схемы позволяют повысить порядок разностных аппроксимаций и обеспечить желаемую точность с минимальными вычислительными затратами [1, 2]. Их развитие и применение в задачах акустики, гидро- и аэродинамики описано в статьях, обзоры которых приведены в [3–7]. Для линейных задач порядок аппроксимации устанавливается подстановкой точного решения в разностные аналоги уравнений и прямым разложением в ряд Тейлора [8]. В случае нелинейных задач применяются вычислительные процедуры на сгущающихся сетках типа Ричардсона, Рунге, Эйткена [9]. Существуют подходы, основанные на разностных аппроксимациях по пространству и по времени, а также варианты метода прямых, в которых разностная аппроксимация проводится по пространственным переменным, а по времени используются методы типа Рунге–Кутты. Высокие порядки интеграторов по времени [10] позволяют сосредоточиться только на аппроксимациях по пространственным координатам.

При исследовании моделей популяционной динамики, основанных на уравнениях реакции–диффузии–адвекции, требуется вычислять и анализировать стационарные решения, а также колебательные режимы, особенно для систем, описывающих взаимодействие хищников и жертв [11–14]. Применение схем повышенного порядка точности для проблем математической биологии встречается достаточно редко. В [3] компактная разностная схема высокого порядка

реализована для решения одномерной по пространству задачи реакции–адвекции–диффузии, а в [4] предложена аппроксимация трехмерного уравнения конвекции–диффузии для случая неравномерной сетки. В [5] использовались конечно-разностные аппроксимации по временной и пространственной координатам для уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера. Для решения уравнений реакции-диффузии с переменными коэффициентами и нелинейным источником членом в [6] разработана компактная конечно-разностная схема четвертого порядка. В [7] рассмотрена модель хемотаксиса для системы с кросс-диффузией и логистическим источником.

В данной работе для решения нелинейных уравнений системы хищника и жертвы используется метод прямых аналогично схеме со смещенными сетками, разработанной в [15, 16]. Плотности видов определяются на основной сетке, а их потоки вычисляются в узлах смещенной сетки. Дискретизация задачи для кольцевого ареала проводится на трехточечном шаблоне. Для интегрирования по времени применяется метод Рунге–Кутты высокого порядка.

1. Математическая модель хищника и жертвы на неоднородном ареале

Для описания пространственно-временного взаимодействия хищника и жертвы используются уравнения реакции–диффузии–адвекции [11, 13]. В случае одномерного ареала математическая модель может быть записана в виде системы уравнений относительно плотностей жертвы $u(x, t)$ и хищника $v(x, t)$ [15, 16]

$$\dot{u} = -q'_1 + F_1, \quad q_1 = -k_1 u' + u\varphi'_1, \quad (1)$$

$$\dot{v} = -q'_2 + F_2, \quad q_2 = -k_2 v' + v\varphi'_2, \quad (2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени t , а штрихом — производная по x . Члены F_i ($i = 1, 2$) описывают локальное взаимодействие видов на основе функционального отклика Холлинга второго рода, модели роста гиперболического типа для жертвы и линейного закона убьели хищника [17]

$$F_1(u, v) = u \left[u \left(1 - \frac{u}{p} \right) - \frac{v}{1 + Cu} \right], \quad F_2(u, v) = v \left[-\lambda + \frac{Bu}{1 + Cu} \right]. \quad (3)$$

Здесь $p = p(x)$ — ресурс, λ — коэффициент смертности, B — прирост хищника в результате контакта с жертвой, а C позволяет учесть инертность хищника при поиске, поглощении и переработке жертвы.

В выражениях для потоков q_i (формулы (1)–(2)) первое слагаемое характеризует диффузию, а второе отвечает за направленную миграцию (таксис) [13, 16]. Функция φ_1 включает таксис жертвы на неравномерно распределенный вдоль ареала ресурс $p(x)$, миграцию от особей своего вида ($-\beta_{11}u$) и от хищника ($-\beta_{12}v$). Функция φ_2 описывает таксис хищника на жертву ($\beta_{21}u$) и таксис ($-\beta_{22}v$) от сгущения хищников [16]:

$$\varphi_1 = \alpha p - \beta_{11}u - \beta_{12}v, \quad \varphi_2 = \beta_{21}u - \beta_{22}v. \quad (4)$$

Коэффициенты диффузии k_i и направленной миграции α, β_{ij} ($i, j = 1, 2$) являются неотрицательными величинами.

Система (1)–(4) дополняется условиями периодичности при $x = 0$ ($x = a$):

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(a, t), & q_1(0, t) &= q_1(a, t), \\ v(0, t) &= v(a, t), & q_2(0, t) &= q_2(a, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Начальные условия задаются для плотностей видов

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x). \quad (6)$$

2. Разностная схема повышенного порядка точности

В работах [15, 16] описана конечно-разностная схема решения задач динамики популяций на основе метода конечных разностей с использованием смещенных сеток для вычисления потоков. Для дискретизации уравнений (1)–(6) по пространственной координате на отрезке $[0, a]$ вводим равномерную сетку $x_r = rh$, $r = 0, \dots, n$, $h = a/n$, в узлах которой вычисляются плотности видов u , v и члены локального взаимодействия F_i , $i = 1, 2$. Для вычисления потоков используем смещенную сетку $x_{r-\frac{1}{2}} = rh - h/2$, $r = 1, \dots, n$. Далее определяем операторы разностной производной и вычисления среднего

$$(dy)_r = \frac{y_{r+\frac{1}{2}} - y_{r-\frac{1}{2}}}{h}, \quad (\delta y)_r = \frac{y_{r+\frac{1}{2}} + y_{r-\frac{1}{2}}}{2}, \quad (7)$$

$$(dy)_{r-\frac{1}{2}} = \frac{y_r - y_{r-1}}{h}, \quad (\delta y)_{r-\frac{1}{2}} = \frac{y_r + y_{r-1}}{2}. \quad (8)$$

Применим подход [1, 8] для аппроксимации уравнений (1)–(4). Используем интегро-интерполяционный метод (метод баланса) [8] и формулу Симпсона. Проинтегрируем (1) по отрезку $[x_{r-\frac{1}{2}}, x_{r+\frac{1}{2}}]$, в узлах смещенной сетки $x_{r-\frac{1}{2}}$ заменяем производную по времени и F_1 полусуммой значений в соседних узлах основной сетки. В результате имеем

$$0 = \int_{x_{r-\frac{1}{2}}}^{x_{r+\frac{1}{2}}} (-q'_1 - \dot{u} + F_1) dx \approx -q_1(x_{r+\frac{1}{2}}) + q_1(x_{r-\frac{1}{2}}) + (x_{r+\frac{1}{2}} - x_{r-\frac{1}{2}}) [-\Psi \dot{u} + \Psi F_1]_r, \quad (9)$$

где сеточный оператор Ψ определяется следующей формулой:

$$\Psi y_r = \frac{1}{12} (y_{r-1} + 10y_r + y_{r+1}).$$

Тогда из (9) получаем

$$\Psi \dot{u}_r = -dq_{1,r} + \Psi F_{1,r}, \quad F_{1,r} = F_1(u_r, v_r), \quad r = 1, \dots, n. \quad (10)$$

С использованием второй разностной производной

$$\Lambda y_r = \frac{y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1}}{h^2}, \quad r = 1, \dots, n, \quad (11)$$

уравнение (10) переписывается следующим образом:

$$\left(1 + \frac{h^2}{12} \Lambda\right) \dot{u}_r = -dq_{1,r} + \left(1 + \frac{h^2}{12} \Lambda\right) F_{1,r}, \quad (12)$$

и $F_{1,r}$ вычисляется по формуле:

$$F_{1,r} = u_r \left[u_r \left(1 - \frac{u_r}{P_r}\right) - \frac{v_r}{1 + C u_r} \right], \quad P_r = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{r-\frac{1}{2}}}^{x_{r+\frac{1}{2}}} \frac{dx}{p(x)} \right]^{-1}. \quad (13)$$

В результате интегрирования второго уравнения (1) по отрезку $[x_{r-1}, x_r]$ для потока q_i получаем

$$q_{1,r-\frac{1}{2}} = (-k_1 du + \delta u d\varphi_1)_{r-\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

С учетом (4), (7) и (8) имеем

$$q_{1,r-\frac{1}{2}} = [-k_1 du + \alpha dp \delta u - \beta_{11} du \delta u - \beta_{12} dv \delta u]_{r-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Аналогично из (2) выводятся уравнения для плотности хищника v

$$\left(1 + \frac{h^2}{12} \Lambda\right) \dot{v}_r = -dq_{2,r} + \left(1 + \frac{h^2}{12} \Lambda\right) F_{2,r}, \quad F_{2,r} = v_r \left[-\lambda_r + \frac{Bu_r}{1 + Cu_r}\right], \quad (16)$$

и выражение для потока q_2 в узлах смещенной сетки дается формулой

$$q_{2,r-\frac{1}{2}} = [-k_2 dv + \beta_{21} dv \delta u - \beta_{22} dv \delta v]_{r-\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

В результате дискретизации по пространственной переменной получается система уравнений с неизвестными $u_r(t)$, $v_r(t)$, $r = 1, \dots, n$, соответствующими плотностям распределений популяции u , v в узлах x_r . Система (12), (13), (16), $r = 1, \dots, n$ и (15), (17), $r = 1, \dots, n$ может быть записана в векторном виде

$$\dot{U} = -M^{-1}D_1 + G_1, \quad \dot{V} = -M^{-1}D_2 + G_2, \quad (18)$$

здесь

$$U = (u_1, \dots, u_n), \quad V = (v_1, \dots, v_n), \\ D_i = [dq_{i,1}, \dots, dq_{i,n}], \quad G_i = [F_{i,1}, \dots, F_{i,n}], \quad i = 1, 2,$$

причем в силу условий периодичности $u_0 \equiv u_n$, $u_{n+1} \equiv u_1$, $v_0 \equiv v_n$, $v_{n+1} \equiv v_1$, $q_{i,n+\frac{1}{2}} \equiv q_{i,\frac{1}{2}}$. Матрица M размера n^2 имеет вид

$$M = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 10 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 10 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 10 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 10 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Построенная конечномерная модель может быть записана в виде

$$\dot{W} = \Phi(W), \quad W(0) = W_0, \quad (20)$$

здесь $W = (U, V)$ — вектор значений переменных в узлах сетки. Начальные данные для системы (20) следуют из (6):

$$W_0 = (U_0, V_0) = (u_1^0, \dots, u_n^0, v_1^0, \dots, v_n^0). \quad (21)$$

Для интегрирования системы (20) по времени используется метод Рунге–Кутты высокого порядка (интегратор по времени ode89 из MATLAB). Дискретизация второго порядка точности по пространственной дискретизации получается из (18) при замене M на единичную матрицу:

$$\dot{U} = -D_1 + G_1, \quad \dot{V} = -D_2 + G_2. \quad (22)$$

3. Результаты вычислительных экспериментов

Для оценки точности схем (18) и (22) проведены вычисления стационарных и колебательных режимов системы (1)–(6) при фиксированных значениях следующих параметров: $k_1 = 0.02$, $k_2 = 0.01$, $B = 4$, $\beta_{12} = \beta_{11} = \beta_{22} = 0$. Варьировались число узлов по ареалу n , параметр смертности λ , величина C , миграционные коэффициенты α и β_{21} . Распределение ресурса задавалось на интервале $[0, 1]$ в виде

$$p(x) = 1 - 0.2 \sin 2\pi x + 0.2 \sin 4\pi x. \quad (23)$$

Эксперимент проводился на сетках n_i , $n_{i+1} = 2n_i$, $n_{i+2} = 4n_i$, и W_i есть численное решение на сетке n_i . Эффективный порядок точности η на основе процесса Эйткена ($h_i = 1/n_i$) вычислялся по формуле

$$\eta_i = \log_2 \frac{S_i}{S_{i+1}}, \quad S_i = \|W_i - W_{i-1}\|,$$

где S_i — нормы разницы между численными решениями W на сетках n_i и n_{i-1} .

В Таблице и на рис. 1, 2 приведены результаты расчетов на установление стационарных решений сосуществующих хищника и жертвы при $\lambda = 1.1$, $C = 2.5$ для ряда значений миграционных параметров α и β_{21} . На рис. 1 представлено изменение во времени пространственных распределений при $\alpha = 0.005$, $\beta_{21} = 0.01$. Для трех наборов миграционных параметров α и β_{21} на рис. 2 даны стационарные распределения (a) и вычисленные значения эффективного порядка точности в различные моменты времени (b). Видно, что в зависимости от значений параметров реализуются различающиеся распределения хищника и жертвы. В Таблице столбец *PC2* соответствует расчету порядка η по стандартной схеме второго порядка точности, а *PC4* — вычислениям по схеме повышенного порядка точности. При $\alpha = 0.001$, $\beta_{21} = 0.005$ значение η почти равно четырем. Отметим, что с увеличением миграционных параметров величина η снижается.

Таблица. Эффективный порядок стандартной схемы (PC2) и схемы повышенного порядка точности (PC4); $\lambda = 1.1$, $C = 2.5$, $n_1 = 10$, $n_2 = 20$, $n_3 = 40$ (процесс Эйткена)

Table. Efficient order of standard scheme (PC2) and high order scheme (PC4); $\lambda = 1.1$, $C = 2.5$, $n_1 = 10$, $n_2 = 20$, $n_3 = 40$ (Aitken process)

α	β_{21}	PC2	PC4
0.001	0.005	2.054	3.9745
0.005	0.005	2.0588	3.209
0.005	0.01	2.0589	2.9398

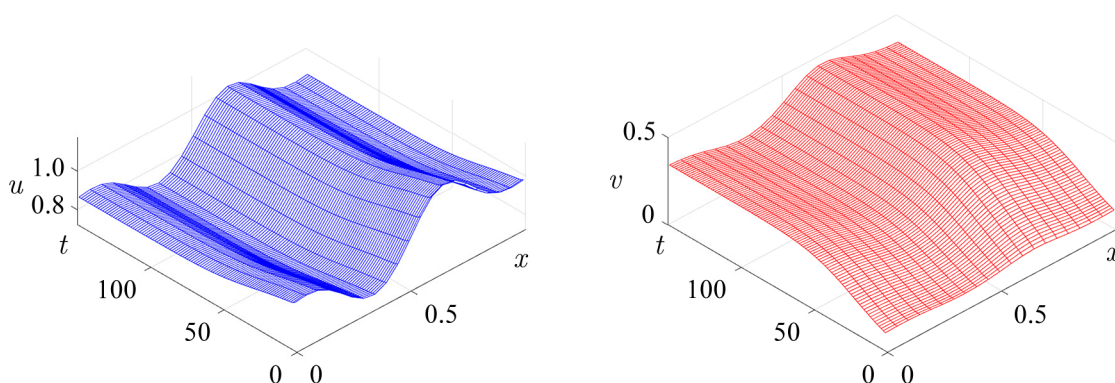


Рис. 1. Пространственно-временное распределение жертвы u (слева) и хищника v (справа) для $\alpha = 0.005$, $\beta_{21} = 0.01$, $\lambda = 1.1$, $C = 2.5$, $n = 20$

Fig. 1. Spatial-temporal distribution of prey u (left) and predator v (right) for $\alpha = 0.005$, $\beta_{21} = 0.01$, $\lambda = 1.1$, $C = 2.5$, $n = 20$

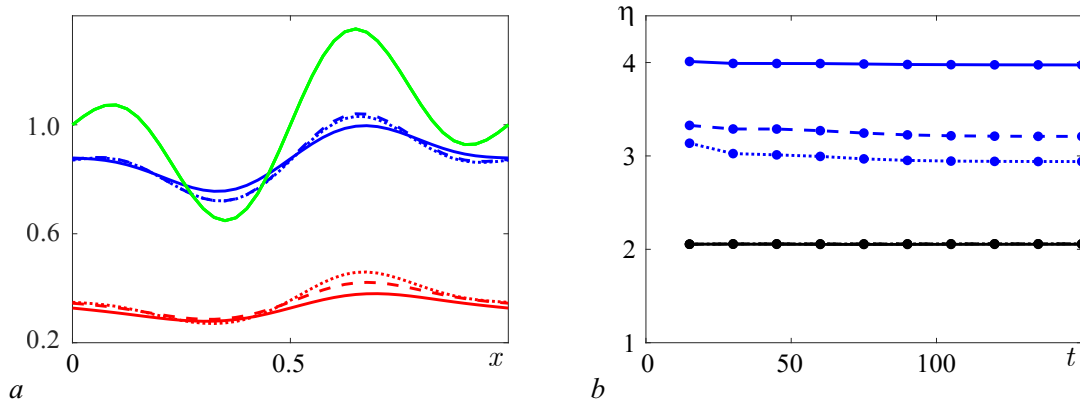


Рис. 2. a – Стационарные распределения жертвы $u(x)$ (синие кривые), хищника $v(x)$ (красные), ресурса $p(x)$ (зеленая); b – значения порядка точности в различные моменты времени для $PC2$ (черные), $PC4$ (синие): $\alpha = 0.001$, $\beta_{21} = 0.005$ (сплошные кривые), $\alpha = 0.005$, $\beta_{21} = 0.005$ (пунктир) и $\alpha = 0.005$, $\beta_{21} = 0.01$ (точки); $\lambda = 1.1$, $C = 2.5$ (цвет онлайн)

Fig. 2. a – Stationary distributions of prey $u(x)$ (blue curves), predator $v(x)$ (red), resource $p(x)$ (green); b – order of accuracy values at various times for $PC2$ (black), $PC4$ (blue): $\alpha = 0.001$, $\beta_{21} = 0.005$ (solid curves), $\alpha = 0.005$, $\beta_{21} = 0.005$ (dashed line) and $\alpha = 0.005$, $\beta_{21} = 0.01$ (dots); $\lambda = 1.1$, $C = 2.5$ (color online)

При уменьшении коэффициента смертности ($\lambda = 0.95$) стационарное решение сосуществующих хищника и жертвы становится неустойчивым и возникают периодические колебания видов (см. рис. 3), то есть на ареале реализуются бегущие волны плотностей популяций. На рис. 4–7 приведены результаты расчетов колебательных режимов и вычисления эффективных порядков точности на сетках $n = 12, 24, 48$ при $\lambda = 0.95$. На рис. 4, 5 представлены вычисления нормы S и порядка точности η в различные моменты времени для трех значений α в случае отсутствия таксиса ($\beta_{21} = 0$). Видно, что норма разности для $n = 12, 24$ в случае предложенной схемы всегда меньше нормы разности для схемы второго порядка точности при $n = 24, 48$, а сравнимые результаты получаются только при использовании сеток $n = 48, 96$. Для схемы второго порядка точности на большом временном промежутке $[0 \dots 1000]$ величина S увеличивается, и видны

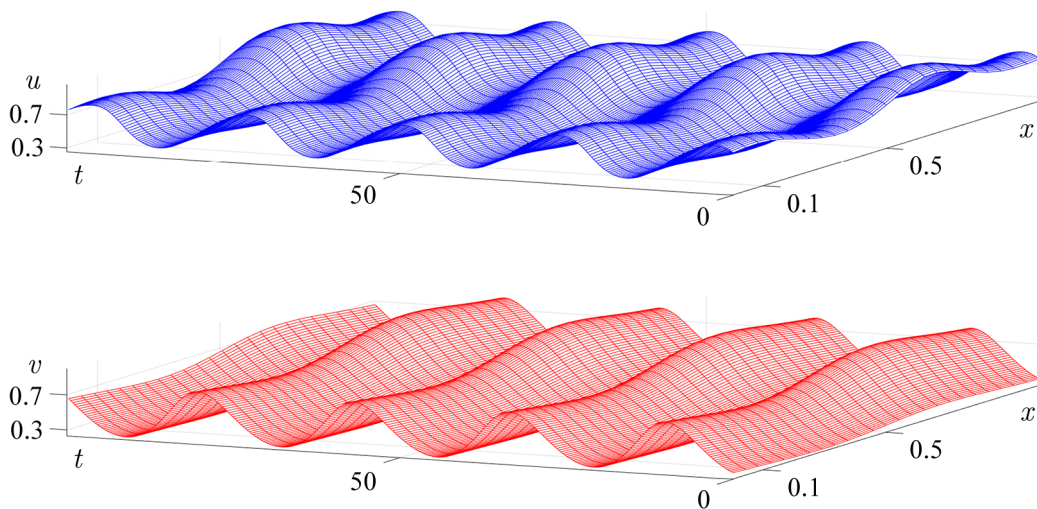


Рис. 3. Пространственно-временное распределение u (наверху) и v (внизу) для $C = 2.5$, $\alpha = 0.01$, $\beta_{21} = 0$, $\lambda = 0.95$, $n = 24$

Fig. 3. Spatial-temporal distribution of u (top) and v (bottom) for $C = 2.5$, $\alpha = 0.01$, $\beta_{21} = 0$, $\lambda = 0.95$, $n = 24$

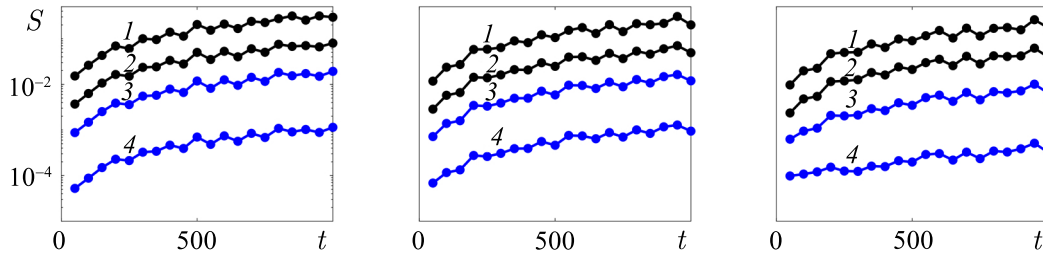


Рис. 4. Графики изменения во времени вычисляемых норм S_i для $\alpha = 0.001$ (слева), $\alpha = 0.005$ (центр), $\alpha = 0.01$ (справа): схема повышенной точности (синий цвет), схема второго порядка точности (черный), $n_i = 24$ (кривые 1 и 3), $n_i = 48$ (2 и 4); $\beta_{21} = 0$, $\lambda = 0.95$, $C = 2.5$ (цвет онлайн)

Fig. 4 Graphs of changes S_i over time for $\alpha = 0.001$ (left), $\alpha = 0.005$ (center), $\alpha = 0.01$ (right): high-order accuracy scheme (blue color), second order accuracy scheme (black), $n_i = 24$ (curves 1 and 3), $n_i = 48$ (2 and 4); $\beta_{21} = 0$, $\lambda = 0.95$, $C = 2.5$ (color online)

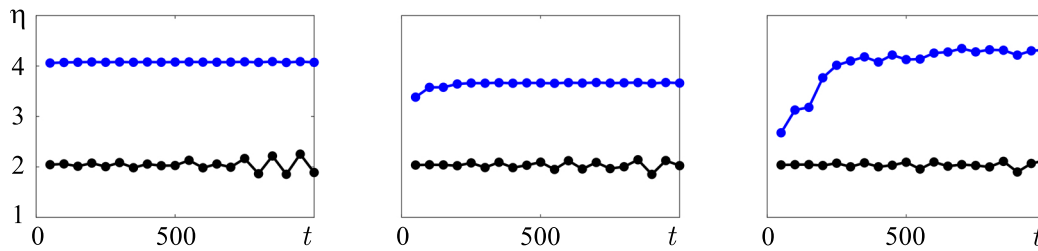


Рис. 5. Графики изменения во времени вычисляемого порядка точности η для $\alpha = 0.001$ (слева), $\alpha = 0.005$ (центр), $\alpha = 0.01$ (справа): схема повышенной точности (синий цвет), схема второго порядка точности (черный); $\beta_{21} = 0$, $\lambda = 0.95$, $C = 2.5$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Graphs of changes η over time for $\alpha = 0.001$ (left), $\alpha = 0.005$ (center), $\alpha = 0.01$ (right): high-order accuracy scheme (blue color), second order accuracy scheme (black); $\beta_{21} = 0$, $\lambda = 0.95$, $C = 2.5$ (color online)

осцилляции рассчитываемого порядка точности. Это является результатом накапливающейся ошибки при расчете цикла на грубой сетке. Можно также отметить, что для схемы высокого порядка при увеличении миграционного параметра α требуется некоторое время для установления η . Для задачи с учетом таксиса ($\beta_{21} = 0.005, 0.01$) результаты вычисления порядка точности приведены на рис. 6. При увеличении β_{21} в два раза величина порядка точности меняется незначительно.

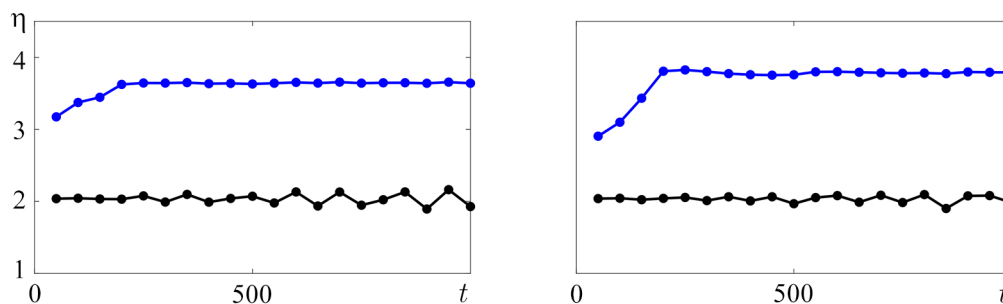


Рис. 6. Изменение во времени порядка точности η для $\beta_{21} = 0.005$ (слева), $\beta_{21} = 0.01$ (справа): схема повышенной точности (синий цвет), схема второго порядка точности (черный); $\alpha = 0.005$, $\lambda = 0.95$, $C = 2.5$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Change in time of the order accuracy η for $\beta_{21} = 0.005$ (left), $\beta_{21} = 0.01$ (right): high-order accuracy scheme (blue), second order accuracy scheme (black); $\alpha = 0.005$, $\lambda = 0.95$, $C = 2.5$ (color online)

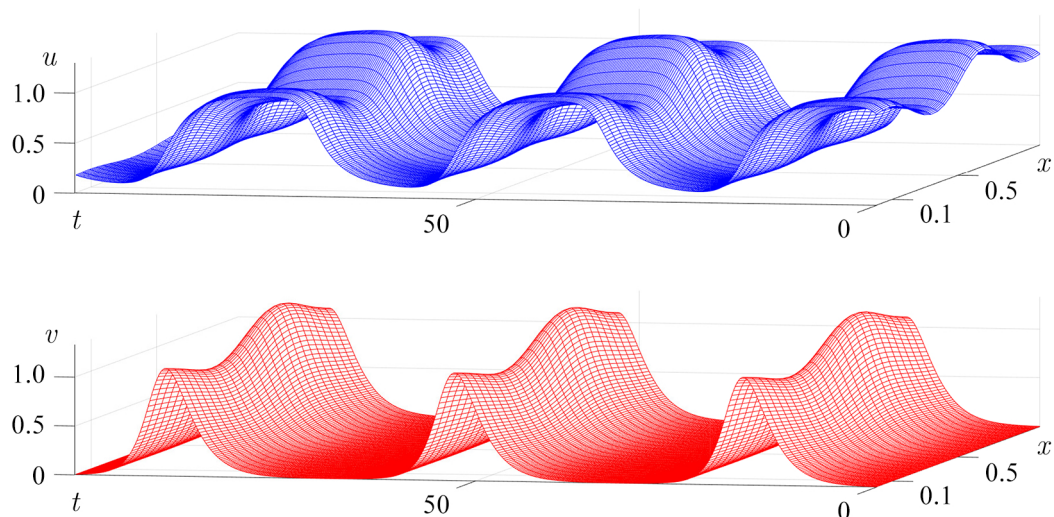


Рис. 7. Пространственно-временное распределение u (наверху) и v (внизу) для $C = 2$, $\alpha = 0.01$, $\beta_{21} = 0$, $\lambda = 0.95$, $n = 24$

Fig. 7. Spatial-temporal distribution of u (top) and v (bottom) for $C = 2$, $\alpha = 0.01$, $\beta_{21} = 0$, $\lambda = 0.95$, $n = 24$

Влияние параметра C на характер периодических колебаний иллюстрируют рис. 3 и 7. Видно, что для близких значений параметра инертности хищника $C = 2, 2.5$ реализуются колебательные режимы с разными амплитудами и периодами. Схема повышенного порядка точности позволяет на достаточно грубых сетках ($n = 24$) производить расчеты релаксационных колебаний, когда значительные периоды времени хищник практически отсутствует (см. рис. 7).

Заключение

В работе предложена простая для реализации компактная численная схема решения системы уравнений параболического типа с нелинейными адвективными и источниковыми членами. Рассмотрена задача о динамике популяций хищника и жертвы на неоднородном кольцевом ареале. Представлены результаты расчетов стационарных распределений видов и колебательных режимов. Рассчитанные значения эффективного порядка точности показали преимущества предложенной схемы по сравнению с классической аппроксимацией второго порядка при расчете стационарных и нестационарных решений. Схема повышенного порядка точности позволяет использовать сетки меньшего размера, что дает выигрыш при вычислении стационарных распределений методом установления и при расчетах нестационарных процессов типа бегущих волн. Это особенно важно при анализе задач популяционной динамики с сильно неоднородными распределениями ресурса на ареале и в случае нескольких пространственных переменных.

Список литературы

1. Толстых А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990. 232 с.
2. Толстых А. И. Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2015. 350 с.
3. Zhang L., Ge Y. Numerical solution of nonlinear advection diffusion reaction equation using high-order compact difference method // Applied Numerical Mathematics. 2021. Vol. 166. P. 127–145. DOI: 10.1016/j.apnum.2021.04.004.

4. *Deka D., Sen S.* Compact higher order discretization of 3D generalized convection diffusion equation with variable coefficients in nonuniform grids // *Applied Mathematics and Computation*. 2022. Vol. 413, no. 5. P. 126652. DOI: 10.1016/j.amc.2021.126652.
5. *Матус П. П., Утебаев Б. Д.* Компактные и монотонные разностные схемы для обобщенного уравнения Фишера // *Дифференциальные уравнения*. 2022. Т. 58, № 7. С. 947–961. DOI: 10.31857/S037406412207007X.
6. *He M., Liao W.* A compact ADI finite difference method for 2D reaction–diffusion equations with variable diffusion coefficients // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2024. Vol. 436. P. 115400. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115400.
7. *Xu P., Ge Y., Zhang L.* High-order finite difference approximation of the Keller-Segel model with additional self-and cross-diffusion terms and a logistic source // *Networks & Heterogeneous Media*. 2022. Vol. 18, no. 4. P. 1471–1492. DOI: 10.3934/nhm.2023065.
8. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
9. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
10. *Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
11. *Мюррей Дж.* Математическая биология. Т. 2 Пространственные модели и их приложения в биомедицине. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. 1104 с.
12. *Rubin A., Riznichenko G.* Mathematical biophysics. New York: Springer, 2014. 273 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-8702-9.
13. *Cantrell R. S., Cosner C.* Spatial Ecology Via Reaction–Diffusion Equations. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 2003. 428 p. DOI: 10.1002/0470871296.
14. *Malchow H., Petrovskii S. V., Venturino E.* Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation. New York: Chapman and Hall, 2008. 469 p.
15. *Budyansky A. V., Frischmuth K., Tsybulin V. G.* Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat // *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B*. 2019. Vol. 24, no. 2. P. 547–561. DOI: 10.3934/dcdsb.2018196.
16. *Будянский А. В., Цибулин В. Г.* Моделирование многофакторного таксиса в системе «хищник–жертва» // *Биофизика*. 2019. Т. 64, № 2, С. 343–349. DOI: 10.1134/S0006302919020133.
17. *Цибулин В. Г., Ха Т. Д., Зеленчук П. А.* Нелинейная динамика системы хищник-жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2021. Т. 29, № 5. С. 751–764. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764.

References

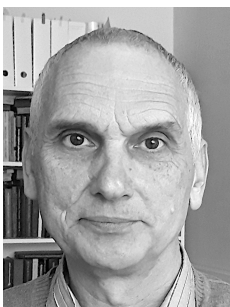
1. Tolstykh AI. Compact Difference Schemes and Their Application in Aerohydrodynamics. Moscow: Nauka; 1990. 232 p. (in Russian).
2. Tolstykh AI. Compact and High-precision Multi-operator Approximations for Partial Differential Equations. Moscow: Nauka; 2015. 350 p. (in Russian).
3. Zhang L, Ge Y. Numerical solution of nonlinear advection diffusion reaction equation using high-order compact difference method. *Applied Numerical Mathematics*. 2021;166:127–145. DOI: 10.1016/j.apnum.2021.04.004.
4. Deka D, Sen S. Compact higher order discretization of 3D generalized convection diffusion equation with variable coefficients in nonuniform grids. *Applied Mathematics and Computation*. 2022;413:126652. DOI: 10.1016/j.amc.2021.126652.
5. Matus PP, Utebaev BD. Compact and monotone difference schemes for the generalized Fisher equation. *Differential Equations*. 2022;58(7):937–951.
6. He M, Liao W. A compact ADI finite difference method for 2D reaction–diffusion equations with

- variable diffusion coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2024;436: 115400. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115400.
7. Xu P, Ge Y, Zhang L. High-order finite difference approximation of the Keller-Segel model with additional self-and cross-diffusion terms and a logistic source. *Networks & Heterogeneous Media*. 2023;18(4):1471–1492. DOI: 10.3934/nhm.2023065.
 8. Samarskii AA. *Theory of Difference Schemes*. Nauka; 1989. 616 p. (in Russian).
 9. Kalitkin NN. *Numerical Methods*. St. Petersburg: BKhVPeterburg; 2011. 592 p. (in Russian).
 10. Hairer E, Norsett SP, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff problems*. Berlin: Springer; 1993. 528 p. DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1.
 11. Murray JD. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. New York: Springer-Verlag; 2003. 814 p. DOI: 10.1007/b98869.
 12. Rubin A, Rznichenko G. *Mathematical Biophysics*. New York: Springer; 2014. 273 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-8702-9.
 13. Cantrell RS, Cosner C. *Spatial Ecology Via Reaction–Diffusion Equations*. Chichester: John Wiley and Sons Ltd; 2003. 428 p. DOI: 10.1002/0470871296.
 14. Malchow H, Petrovskii SV, Venturino E. *Spatio-temporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation*. New York: Chapman and Hall/CRC; 2008. 469 p.
 15. Budyansky AV, Frischmuth K, Tsybulin VG. Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat. *Discrete & Continuous Dynamical Systems – B*. 2019;24(2):547–561. DOI: 10.3934/dcdsb.2018196.
 16. Budyansky AV, Tsybulin VG. Modeling of multifactor taxis in a predator–prey system. *Biophysics*. 2019;64(2):256–260. DOI: 10.1134/S0006350919020040.
 17. Tsybulin VG, Ha TD, Zelenchuk PA. Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interaction of species. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2021;29(5):751–764. (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764.



Нгуен Хоанг Бьу — родился в Куангнам, Вьетнам (1996), окончил Санкт-Петербургский военно-морской институт (2021). Учится в аспирантуре Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
 Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ
 E-mail: kng@sfnu.ru
 ORCID: 0009-0001-1644-5800



Цибулин Вячеслав Георгиевич — родился в Ростове-на-Дону (1956), окончил механико-математический факультет Ростовского государственного университета (1978). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1990) и доктора (2011) физико-математических наук. Заведующий кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета. Занимается вычислительной гидродинамикой, задачами конвекции, популяционной динамики и др. В соавторстве с В. Н. Говорухиным написал книги «Введение в Maple», «Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB и LaTeX».

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
 Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ
 E-mail: vgcibulin@sfnu.ru
 ORCID: 0000-0003-4812-278X
 AuthorID (eLibrary.Ru): 4304