

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Научная статья  
УДК 517.957, 537.611, 51-73

DOI: 10.18500/0869-6632-003011  
EDN: NAJQIF

## Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми притягивающими примесями

Е. Г. Екомасов<sup>1</sup>, К. Ю. Самсонов<sup>2</sup>✉, А. М. Гумеров<sup>1</sup>, Р. В. Кудрявцев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

<sup>2</sup>Тюменский государственный университет, Россия

E-mail: ekomasoveg@gmail.com, ✉k.y.samsonov@gmail.com,  
article@solitonlab.com, xc.89@mail.ru

Поступила в редакцию 27.04.2022, принята к публикации 3.07.2022,  
опубликована онлайн 5.10.2022, опубликована 30.11.2022

**Аннотация.** Цель исследования — с помощью аналитических и численных методов рассмотреть задачу о структуре и динамике связанных локализованных нелинейных волн в модели синус-Гордона с «примесями» (или пространственной неоднородностью периодического потенциала). **Методы.** С помощью аналитического метода коллективных переменных для случая произвольного числа одинаковых точечных примесей, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, получена система дифференциальных уравнений для амплитуд локализованных волн как функций от времени, приближенно описывающая поведение рассматриваемой колебательной системы. Для численного решения модифицированного уравнения синус-Гордона применён численный метод конечных разностей с явной схемой интегрирования. Частотный анализ колебаний локализованных волн, рассчитанных численно, выполнялся с помощью дискретного преобразования Фурье. **Результаты.** Для описания связанных колебаний нелинейных волн, локализованных на трёх одинаковых примесях, получена система дифференциальных уравнений для трёх гармонических осцилляторов со связью упругого типа. Решения этой системы уравнений для частот связанных колебаний хорошо аппроксимируют результаты прямого численного моделирования нелинейной системы. **Заключение.** Показано, что связанные колебания нелинейных волн, локализованных на трёх одинаковых примесях, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, представляют собой сумму трёх гармонических колебаний: синфазного, синфазно-антифазного и антифазного типа. Проведён анализ влияния параметров системы и начальных условий на частоту и вид связанных колебаний.

**Ключевые слова:** уравнение синус-Гордона, кинк, солитон, бризер, метод коллективных координат, примесь.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20–31–90048.

**Для цитирования:** Екомасов Е. Г., Самсонов К. Ю., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В. Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми притягивающими примесями // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011. EDN: NAJQIF

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three attracting impurities

E. G. Ekomasov<sup>1</sup>, K. Yu. Samsonov<sup>2</sup>✉, A. M. Gumerov<sup>1</sup>, R. V. Kudryavtsev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bashkir state university, Ufa, Russia

<sup>2</sup>University of Tyumen, Russia

E-mail: ekomasoveg@gmail.com, ✉k.y.samsonov@gmail.com, article@solitonlab.com, xc.89@mail.ru

Received 27.04.2022, accepted 3.07.2022, available online 5.10.2022, published 30.11.2022

**Abstract.** Purpose of this work is to use analytical and numerical methods to consider the problem of the structure and dynamics of coupled localized nonlinear waves in the sine-Gordon model with “impurities” (or spatial inhomogeneity of the periodic potential). *Methods.* Using the analytical method of collective coordinates for the case of the arbitrary number the same point impurities on the same distance each other, differential equation system was got for localized waves amplitudes as the functions on time. We used the finite difference method with explicit scheme for the numerical solution of the modified sine-Gordon equation. We used a discrete Fourier transform to perform a frequency analysis of the oscillations of localized waves calculate numerically. *Results.* We found of the differential equation system for three harmonic oscillators with the elastic connection for describe related oscillations of nonlinear waves localized on the three same impurity. The solutions obtained from this system of equations for the frequencies of related oscillation well approximate the results of direct numerical modeling of a nonlinear system. *Conclusion.* In the article shows that the related oscillation of nonlinear waves localized on three identical impurities located at the same distance from each other represent the sum of three harmonic oscillations: in-phase, in-phase-antiphase and antiphase type. The analysis of the influence of system parameters and initial conditions on the frequency and type of associated oscillations is carried out.

**Keywords:** sine-Gordon equation, kink, soliton, breather, the method of collective coordinates, impurity.

**Acknowledgements.** This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 20-31-90048.

**For citation:** Ekomasov EG, Samsonov KYu, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three attracting impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(6):749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Исследование нелинейных волновых процессов позволило сделать ряд фундаментальных открытий [1–3]. Были найдены решения нелинейных дифференциальных уравнений, которые описывают уединённые волны, сохраняющие свою форму и скорость во времени, в том числе при взаимодействии друг с другом — солитоны. Одним из интенсивно изучаемых нелинейных дифференциальных уравнений является уравнение синус-Гордона (УСГ) [2–5]. Данное уравнение описывает волновые процессы в самых разнообразных областях естествознания: геологии, молекулярной биологии, физике, космологии. Например, в физике конденсированного состояния оно применимо при описании динамики волн намагниченности в ферромагнитных кристаллах, движения дислокаций в кристаллах, процессов в джозефсоновских сверхпроводящих контактах, распространения волн зарядовой плотности в одномерных органических проводниках, распространения электромагнитных волн в сверхрешетке на основе графена, динамики ансамбля взаимодействующих дислокаций в линейном дефекте электроконвективной структуры жидкого кристалла [4–8]. Будучи нелинейным уравнением в частных производных, УСГ является полностью интегрируемым.

Найдены различные точные решения УСГ типа кинка, солитона, бризера и некоторые другие решения более сложного мультисолитонного типа [2–4, 9, 10]. Нахождение новых решений УСГ и исследование их свойств и взаимодействий является актуальной задачей теории нелинейных волн. Обычно для использования в реальных физических моделях требуется модификация УСГ, например, путем добавления дополнительных слагаемых. Эти слагаемые могут описывать

внешнюю силу, диссипацию, неоднородность параметров среды и др. Хотя получаемое в результате модифицированное уравнение синус-Гордона (МУСГ) уже не имеет точных аналитических решений, разработан и широко применяется ряд аналитических методов (например, теория возмущений для солитонов или метод коллективных координат [2, 5, 11]). С помощью данных методов исследован широкий спектр различных задач. Например, исследована задача динамики кинков, солитонов и бризеров под действием внешней силы различного вида (зависящей от времени и пространственных переменных) [12, 13].

Много работ посвящено изучению влияния пространственной модуляции периодического потенциала (или примеси) на динамику солитонов УСГ [5, 14–30]. Модель синус-Гордона с примесями применима для описания, например, случая многослойного ферромагнетика [31–34]. Пространственная модуляция периодического потенциала часто моделируется в виде дельта функции или в других специальных видах. Возбуждение локализованной на примеси волны (примесной моды) в результате рассеяния кинка приводит к значительному изменению его динамики [5, 19, 20, 24–28]. Структура и свойства локализованных нелинейных волн, возбужденных на одной и двух примесях, были проанализированы в работах [19, 21, 25, 28, 29]. Было показано, что притягивающая примесь может быть использована для возбуждения мультисолитонов УСГ. В случае, когда на двух примесях возбуждаются локализованные примесные волны (четырёхкинковые мультисолитоны), аналитически показано, что их колебания можно описать системой двух гармонических осцилляторов со связью упругого типа. Данная модель качественно описывает результаты численного моделирования (как для точечных, так и для протяженных примесей). Случай двух примесей дает большое разнообразие новых мультисолитонных решений и динамических эффектов по сравнению со случаем одной примеси. Можно ожидать еще большего разнообразия решений и эффектов при наличии трёх и более примесей в системе. В данной работе исследуется связанная динамика нелинейных локализованных волн на трёх одинаковых точечных примесях.

## 1. Основные уравнения и результаты аналитических расчетов

Рассмотрим безразмерное УСГ в модели с  $N$  одинаковыми точечными примесями, находящимися на расстоянии  $d$  друг от друга, следующего вида:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u - \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \delta(x - x_k) \sin u = 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_k = \varepsilon$ ,  $x_k = kd$  для всех  $k = 1..N$ . В уравнении (1)  $u = u(x, t)$ , пространственная модуляция периодического потенциала УСГ учитывается добавлением точечных примесей вида  $\varepsilon \delta(x)$ , где  $\varepsilon$  — константа,  $\delta(x)$  — дельта функция Дирака. Это уравнение, например, может описывать динамику волн намагниченности в мультислойном одноосном ферромагнетике [5, 32, 33, 35] с неоднородной по координате константой магнитной анизотропии. Тогда функция  $u = u(x, t)$  определяет двойной угол между вектором намагниченности в данной точке в данный момент времени и направлением вектора намагниченности в домене, координата  $x$  будет нормирована на  $\delta_0$ , где  $\delta_0$  — ширина статической блоховской доменной границы, а время  $t$  нормировано на  $\delta_0/c$ , где  $c$  — предельная уокеровская скорость стационарного движения [33, 35]. Наличие таких неоднородностей магнитной анизотропии оказывает существенное влияние на динамику доменных границ и может приводить к образованию различного рода локализованных магнитных неоднородностей [31–35].

Функция Лагранжа, соответствующая уравнению (1), имеет вид

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 + \cos u - 1 + \sum_{k=1}^N \delta(x - x_k) (\varepsilon_k - \varepsilon_k \cos u) \right] dx. \quad (2)$$

Вначале рассмотрим аналитическое решение уравнения (1), описывающее колебания амплитуды локализованных на примесях волн, используя метод коллективных переменных [2, 5]. Метод является вариационным, основан на выделении коллективных координат и построении усредненного лагранжиана [2, 5]. При использовании этого метода осуществляется переход от непрерывного поля  $u = u(x, t)$  к конечному набору функций  $f(t)$ , зависящих только от времени. При этом  $u$  аппроксимируется анзацем — суммой решений из локализованных волн, содержащих характеризующие состояние волн функции от времени, называемые коллективными переменными. Анзац будем брать в виде суммы  $N$  примесных мод:

$$u_a = \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N a_n(t) e^{\frac{-\varepsilon n |x - x_n|}{2}}, \quad (3)$$

где  $a_n(t)$  — амплитуды примесных мод в момент времени  $t$  на  $n$ -й примеси. В рамках рассматриваемого приближения амплитуды примесных мод и параметр  $\varepsilon$  будем считать достаточно малыми, так что  $u_a \ll 1$ . Анзац (3) далее подставляется в лагранжиан (2). В рамках нашего приближения нелинейный член лагранжиана (2) в виде  $\cos u$  можно разложить в ряд Тейлора до членов второго порядка. После взятия интегралов, аналогично исследованным ранее случаям с  $N = 1$  и  $N = 2$  [2, 5, 28, 34], получаем новую эффективную функцию Лагранжа, являющуюся функцией от коллективных переменных  $a_n(t)$ . Подстановкой эффективной функции Лагранжа в уравнения Лагранжа–Эйлера, после взятия производных, можно получить  $N$  дифференциальных уравнений для  $N$  коллективных переменных  $a_n(t)$  следующего вида:

$$\sum_{n=1}^N \left\{ [\ddot{a}_n + a_n] E_{ln+} + a_n \frac{\varepsilon}{2} \left[ \frac{\varepsilon}{2} E_{ln-} - \sum_{k=1}^N e_{nk} e_{lk} \right] \right\} = 0, \quad (4)$$

где

$$e_{nl} = e^{\frac{-\varepsilon |l-n|d}{2}} = e_d^{|l-n|}, \quad E_{ln\pm} = E_{nl\pm} = \left( \frac{1}{\varepsilon} \pm \frac{|l-n|d}{2} \right) e_d^{|l-n|} = E_{|l-n|\pm}, \quad l = 1..N. \quad (5)$$

Далее рассмотрим возможные решения уравнения (4) для случая  $N = 3$ . Из уравнения (4), взяв  $l = 1$ ,  $l = 2$  и  $l = 3$ , можно получить три дифференциальных уравнения для трёх коллективных переменных  $a_{1,2,3}(t)$  следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\ddot{a}_1 + a_1)}{\varepsilon} + (\ddot{a}_2 + a_2)E_{1+} + (\ddot{a}_3 + a_3)E_{2+} + \varepsilon/2[-a_1(1/2 + e_d^2 + e_d^4) + \\ \quad + a_2(\varepsilon E_{1-}/2 - 2e_d - e_d^3) + a_3(\varepsilon E_{2-}/2 - 3e_d^2)] = 0, \\ (\ddot{a}_1 + a_1)E_{1+} + (\ddot{a}_2 + a_2)/\varepsilon + (\ddot{a}_3 + a_3)E_{1+} + \varepsilon/2[a_1(\varepsilon E_{1-}/2 - 2e_d - e_d^3) - \\ \quad - a_2(1/2 + 2e_d^2) + a_3(\varepsilon E_{1-}/2 - e_d^3 - 2e_d)] = 0, \\ (\ddot{a}_1 + a_1)E_{2+} + (\ddot{a}_2 + a_2)E_{1+} + (\ddot{a}_3 + a_3)/\varepsilon + \varepsilon/2[a_1(\varepsilon E_{2-}/2 - 3e_d^2) + \\ \quad + a_2(\varepsilon E_{1-}/2 - e_d^3 - 2e_d) - a_3(1/2 + e_d^4 + e_d^2)] = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

где

$$e_d = e^{\frac{-\varepsilon d}{2}}, \quad E_{k\pm} = (1/\varepsilon \pm kd/2)e_d^k. \quad (7)$$

Приведём их к более удобному для решения виду, оставив в каждом из уравнений только одно ускорение  $\ddot{a}(t)$ . Для этого вычтем из умноженного на  $[1 - \varepsilon^2 E_{1+}^2]$  первого уравнения (6) умноженное на  $\varepsilon E_{1+}[1 - \varepsilon E_{2+}]$  второе уравнение (6). Затем в полученном уравнении вынесем и вставим выражение  $[\ddot{a}_3 + a_3]$ , полученное из третьего уравнения (6). Далее вынесем и избавимся

от выражения  $[\ddot{a}_2 + a_2]$ , а также перегруппируем слагаемые. Повторив аналогичные алгебраические преобразования для двух других уравнений (6), получим:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + a_1\omega_1^2 + a_2k_{12} + a_3k_{13} = 0, \\ \ddot{a}_2 + a_2\omega_2^2 + (a_1 + a_3)k_{21} = 0, \\ \ddot{a}_3 + a_3\omega_1^2 + a_1k_{13} + a_2k_{12} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3 d e_d^2 / 4}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2} \left[ 1 + e_d^2 + \frac{\varepsilon d (e_d^2 - 1) e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d) e_d^2} \right], \\ \omega_2^2 &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3 d (1 - e_d^2) e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2}, \\ k_{12} &= \frac{\varepsilon^2 [(1 + \varepsilon d) e_d^2 - 1] e_d / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2}, \\ k_{13} &= \frac{\varepsilon^2 e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2} \left[ \varepsilon d (1 + e_d^2) / 2 + e_d^2 - 1 + \frac{\varepsilon^2 d^2 (1 - e_d^2) e_d^2 / 4}{1 - (1 + \varepsilon d) e_d^2} \right], \\ k_{21} &= \frac{\varepsilon^2 (\varepsilon d e_d^2 / 2 - 1) (1 - e_d^2) e_d / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2}, \\ e_d &= e^{-\frac{\varepsilon d}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Случай невзаимодействующих примесных мод, соответствующий уже изученному ранее случаю одной примеси [5], получим, найдя пределы выражений (9) при  $d \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{d \rightarrow \infty} e_d = 0, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \omega_1^2 = \lim_{d \rightarrow \infty} \omega_2^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} k_{12} = \lim_{d \rightarrow \infty} k_{13} = \lim_{d \rightarrow \infty} k_{21} = 0. \quad (10)$$

Отметим, что в исследованном ранее случае двух примесей [21, 28] удалось получить приближённые линейные динамические уравнения для амплитуд примесных мод, которые являются уравнениями колебательной системы с двумя степенями свободы (двух связанных осцилляторов). Можно ожидать, что подобные линейные динамические уравнения можно получить и для случая произвольного числа примесей. Приближённые линейные динамические уравнения для амплитуд примесных мод в нашем случае являются уравнениями колебательной системы с тремя степенями свободы (или трёх связанных осцилляторов). Их решение представляет собой сумму трёх гармонических колебаний вида [36]:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\ a_2(t) &= \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\ a_3(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $a_{01}$ ,  $a_{02}$ ,  $a_{03}$  — константы, определяемые из начальных условий, а

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2}^2 &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + k_{13} \mp \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2}, \\ \eta_{21} &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - k_{13} - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2k_{12}}, \\ \eta_{12} &= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13} + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{4k_{12}}, \\ \Omega_3^2 &= \omega_1^2 - k_{13}. \end{aligned} \quad (12)$$

При  $d \rightarrow \infty$ , используя (9), имеем:

$$\Omega_{1,2,3}^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \eta_{21} = \sqrt{2}, \quad \eta_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (13)$$

Заметим, что первая из формул (13) описывает частоту примесной моды для одиночной примеси [5]. В рассматриваемом случае введением замены  $y_1 = a_1 + a_3$ ,  $y_2 = a_1 - a_3$  уравнения (8) приводятся к системе двух связанных осцилляторов относительно  $a_2$  и  $y_1$  (рассмотренного ранее [28, 34]) и несвязанного с ними осциллятора, описываемого функцией  $y_2$ . Поэтому решения полученной системы являются, в каком-то смысле, комбинацией рассмотренных ранее решений уравнений для системы с одиночной локальной неоднородностью и системы с двумя локальными неоднородностями. Так же можно перейти к нормальным или главным координатам [1, 36], каждая из которых колеблется с одной частотой:

$$\begin{cases} \frac{a_3(t) + a_1(t) - 2a_2(t)\eta_{12}}{2(1 - \eta_{12}\eta_{21})} = a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) = \phi_1, \\ \frac{2a_2(t) - (a_3(t) + a_1(t))\eta_{21}}{2(1 - \eta_{12}\eta_{21})} = a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) = \phi_2, \\ \frac{a_3(t) - a_1(t)}{2} = a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) = \phi_3. \end{cases} \quad (14)$$

На рис. 1 представлены зависимости  $\Omega_{1,2,3}$  от  $d$ , построенные по формулам (12) при значениях  $\varepsilon$ , равных 0.5 и 0.3333. При больших расстояниях между примесями все частоты стремятся к предельному значению (13). При уменьшении расстояния между примесями величина  $\Omega_1$  уменьшается. Причём, чем больше  $\varepsilon$ , тем быстрее это происходит и тем меньше становится  $\Omega_1$ . Частоты  $\Omega_{2,3}$  при уменьшении  $d$  увеличиваются, стремясь к бесконечности, причём  $\Omega_2$  увеличивается быстрее, и разница в её поведении при различных  $\varepsilon$  не очень заметна.  $\Omega_3$  увеличивается медленнее и её график находится между графиками  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , а зависимость от  $\varepsilon$  выражена сильнее, чем у  $\Omega_2$ .

Начальные фазы колебаний далее для простоты будем считать нулевыми  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ . Путем задания разных соотношений начальных амплитуд локализованных волн можно при данном наборе параметров  $\varepsilon$  и  $d$  получить разные типы колебаний. Рассмотрим для примера случай  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ . Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  от времени при возбуждении только одного гармонического колебания представлены на рис. 2. В этом случае все примесные моды

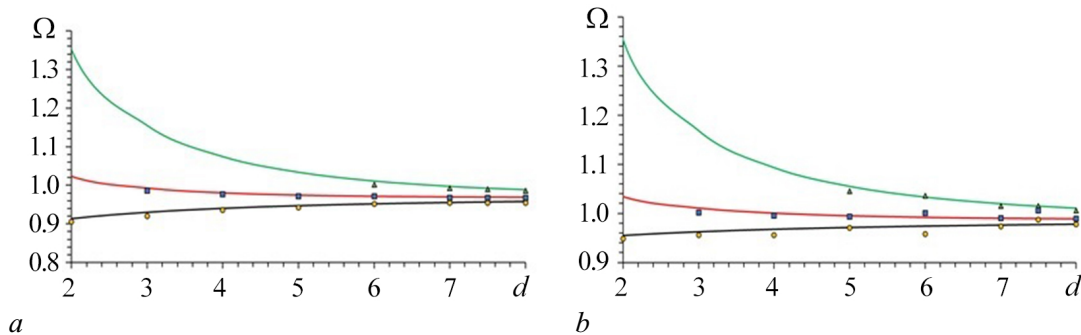


Рис. 1. Зависимости частот  $\Omega_{1,2,3}$  от  $d$  (нижняя, верхняя, средняя линии). Аналитическое решение (12) — сплошные линии, численное решение (1) — точки.  $\varepsilon = 0.5$  (a);  $\varepsilon = 0.3333$  (b)

Fig. 1. Dependences of the  $\Omega_{1,2,3}$  frequency on the  $d$  value (lower, upper, middle lines). The analytical solution (12) — solid lines, the numerical solution (1) — points.  $\varepsilon = 0.5$  (a);  $\varepsilon = 0.3333$  (b)

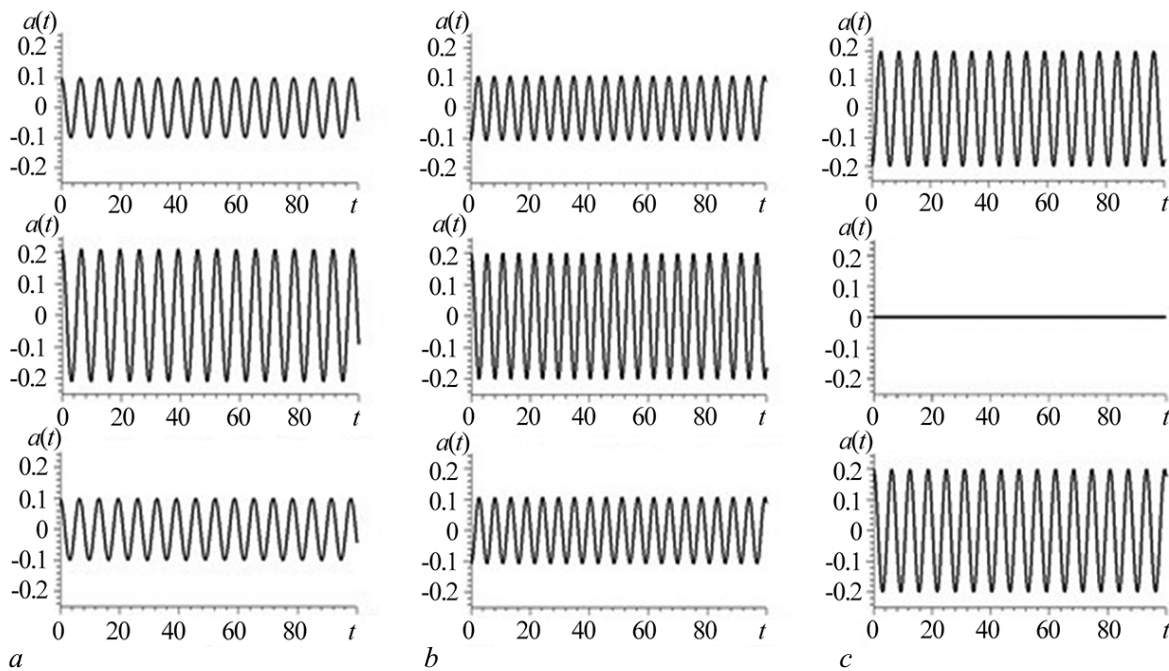


Рис. 2. Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  (верхний, средний, нижний графики) от времени при  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ .  $a_1(0) = 0.1$ ,  $a_2(0) = 0.2098$ ,  $a_3(0) = 0.1$  (a);  $a_1(0) = -0.1075$ ,  $a_2(0) = 0.2$ ,  $a_3(0) = -0.1075$  (b);  $a_1(0) = -0.2$ ,  $a_2(0) = 0$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (c)

Fig. 2. Dependences of the  $a_{1,2,3}$  amplitudes (upper, middle, lower figures) on time at  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ .  $a_1(0) = 0.1$ ,  $a_2(0) = 0.2098$ ,  $a_3(0) = 0.1$  (a);  $a_1(0) = -0.1075$ ,  $a_2(0) = 0.2$ ,  $a_3(0) = -0.1075$  (b);  $a_1(0) = -0.2$ ,  $a_2(0) = 0$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (c)

колеблются с одинаковой частотой. Первый тип колебаний является синфазным — все примесные моды колеблются в одинаковой фазе (рис. 2, a). Характерно, что частота  $\Omega_1$  этого типа колебаний при уменьшении параметра  $d$  уменьшается (см. рис. 1). Второй тип колебаний — синфазно-антифазный — первая и третья примесные моды колеблются в одинаковой фазе, а вторая между ними — в противоположной им (рис. 2, b). Его частота  $\Omega_2$  при уменьшении расстояния  $d$  увеличивается. Третий тип колебаний антифазный — первая и третья примесные моды колеблются в противоположных фазах, а вторая между ними не возбуждается (рис. 2, c). Его частота  $\Omega_3$  при уменьшении  $d$  увеличивается не так быстро, как  $\Omega_2$ . При этом амплитуды колебаний первой и третьей примесных мод во всех случаях одинаковы.

Далее, варьируя начальные условия, рассмотрим возможные более сложные случаи связанных колебаний примесных мод. Если  $a_{02} = 0$ , то выражения (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 a_1(t) &= 2a_{01} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_3)t + \theta_1 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_3)t + \theta_1 - \theta_3}{2}\right) - (a_{03} + a_{01}) \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\
 a_2(t) &= \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1), \\
 a_3(t) &= 2a_{01} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_3)t + \theta_1 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_3)t + \theta_1 - \theta_3}{2}\right) + (a_{03} - a_{01}) \cos(\Omega_3 t + \theta_3),
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

то есть колебания на первой и третьей примесях имеют вид биений с частотой биений, равной  $|\Omega_1 - \Omega_3|$ , и амплитудами, меняющимися от  $|a_{01} - a_{03}|$  до  $|a_{01} + a_{03}|$ , на второй примеси колебания гармонические. Считая начальные фазы по-прежнему нулевыми  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ , возьмём начальные условия, при которых амплитуда при биениях уменьшается до нуля. Например, при

$a_{02} = 0$  возьмём  $a_{03} = a_{01}$ , тогда начальные условия будут  $a_1(0) = a_{01} - a_{03} = 0$ ,  $a_2(0) = \eta_{21}a_{01} \approx 2.098a_{01}$ ,  $a_3(0) = a_{01} + a_{03} = 2a_{01}$ . Амплитуды будут меняться от  $|a_{01} - a_{03}| = 0$  до  $|a_{01} + a_{03}| = 2|a_{01}|$  на первой и третьей примесях, и  $|\eta_{21}a_{01}| \approx 2.098|a_{01}|$  на второй примеси (рис. 3, а).

Если  $a_{03} = 0$ , то выражения (11) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 a_1(t) = a_3(t) &= 2a_{01} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)t + \theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)t + \theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \\
 &\quad + (\eta_{12}a_{02} - a_{01}) \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\
 a_2(t) &= 2a_{02} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)t + \theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)t + \theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \\
 &\quad + (\eta_{21}a_{01} - a_{02}) \cos(\Omega_1 t + \theta_1),
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

то есть колебания имеют вид биений с частотой биений, равной  $|\Omega_1 - \Omega_2|$ , и амплитудами, меняющимися от  $|a_{01} - \eta_{12}a_{02}|$  до  $|a_{01} + \eta_{12}a_{02}|$  на первой и третьей примесях и от  $|a_{02} - \eta_{21}a_{01}|$  до  $|a_{02} + \eta_{21}a_{01}|$  на второй примеси. Например, при  $a_{03} = 0$  возьмём  $a_{01} = \eta_{12}a_{02}$ , тогда начальные условия будут  $a_1(0) = a_3(0) = a_{01} + \eta_{12}a_{02} = 2\eta_{12}a_{02} \approx -1.075a_{02}$ ,  $a_2(0) = a_{02} + \eta_{21}a_{01} = (1 + \eta_{21}\eta_{12})a_{02} \approx -0.1277a_{02}$ . Амплитуды будут меняться от  $|a_{01} - \eta_{12}a_{02}| = 0$  до  $|a_{01} + \eta_{12}a_{02}| = 2|\eta_{12}a_{02}| \approx 1.075|a_{02}|$  на первой и третьей примесях и от  $|a_{02} - \eta_{21}a_{01}| = |(1 - \eta_{21}\eta_{12})a_{02}| \approx 2.128|a_{02}|$  до  $|a_{02} + \eta_{21}a_{01}| = |(1 + \eta_{21}\eta_{12})a_{02}| \approx 0.1277|a_{02}|$  на второй примеси (рис. 3, б).

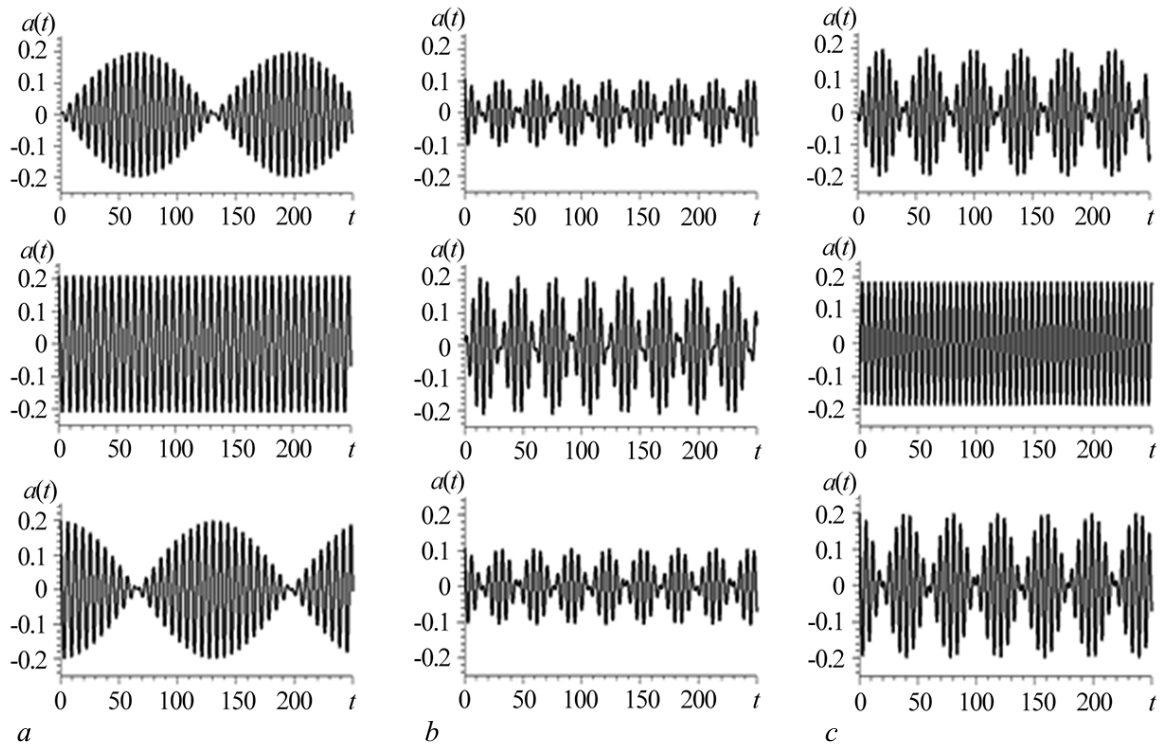


Рис. 3. Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  (верхний, средний, нижний графики) от времени при  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ . Значения амплитуд при  $t = 0$ :  $a_1(0) = 0$ ,  $a_2(0) = 0.2098$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (а);  $a_1(0) = 0.1075$ ,  $a_2(0) = 0.01277$ ,  $a_3(0) = 0.1075$  (б);  $a_1(0) = 0$ ,  $a_2(0) = -0.186$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (с)

Fig. 3. Dependences of the  $a_{1,2,3}$  amplitudes (upper, middle, lower figures) on time at  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ . Amplitude values at  $t = 0$ :  $a_1(0) = 0$ ,  $a_2(0) = 0.2098$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (a);  $a_1(0) = 0.1075$ ,  $a_2(0) = 0.01277$ ,  $a_3(0) = 0.1075$  (b);  $a_1(0) = 0$ ,  $a_2(0) = -0.186$ ,  $a_3(0) = 0.2$  (c)



Если  $a_{01} = 0$ , то выражение (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 a_1(t) &= (a_{03} + \eta_{12}a_{02}) \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - \\
 &\quad - 2a_{03} \cos\left(\frac{(\Omega_2 + \Omega_3)t + \theta_2 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_2 - \Omega_3)t + \theta_2 - \theta_3}{2}\right), \\
 a_2(t) &= a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\
 a_3(t) &= (\eta_{12}a_{02} - a_{03}) \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + \\
 &\quad + 2a_{03} \cos\left(\frac{(\Omega_2 + \Omega_3)t + \theta_2 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_2 - \Omega_3)t + \theta_2 - \theta_3}{2}\right),
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

то есть колебания на первой и третьей примесях имеют вид биений с частотой  $|\Omega_3 - \Omega_2|$  и амплитудами, меняющимися от  $|a_{03} - \eta_{12}a_{02}|$  до  $|a_{03} + \eta_{12}a_{02}|$ , на второй примеси колебания гармонические. Например, при  $a_{01} = 0$  возьмём  $a_{02} = a_{03}/\eta_{12}$ , тогда начальные условия будут  $a_1(0) = \eta_{12}a_{02} - a_{03} = 0$ ,  $a_2(0) = a_{02} = a_{03}/\eta_{12} \approx -1.860a_{03}$ ,  $a_3(0) = \eta_{12}a_{02} + a_{03} = 2a_{03}$ . Амплитуды будут меняться от  $|a_{03} - \eta_{12}a_{02}| = 0$  до  $|a_{03} + \eta_{12}a_{02}| = 2|a_{03}|$  на первой и третьей примесях, и  $|a_{02}| = |a_{03}/\eta_{12}| \approx 1.860|a_{03}|$  на второй примеси (рис. 3, с). Колебания в этих случаях аналогичны колебаниям на двух одинаковых примесях, рассмотренных ранее [28].

Рассмотрим далее случай связанных колебаний примесных мод при наличии всех трёх гармоник (рис. 4). Колебания второй примесной моды для рассмотренного случая  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$  сохраняют свой характер как на рис. 3, b, так как в них участвуют только две гармоники. Форма колебаний первой и третьей примесных мод из-за добавления третьей гармоники усложняется.

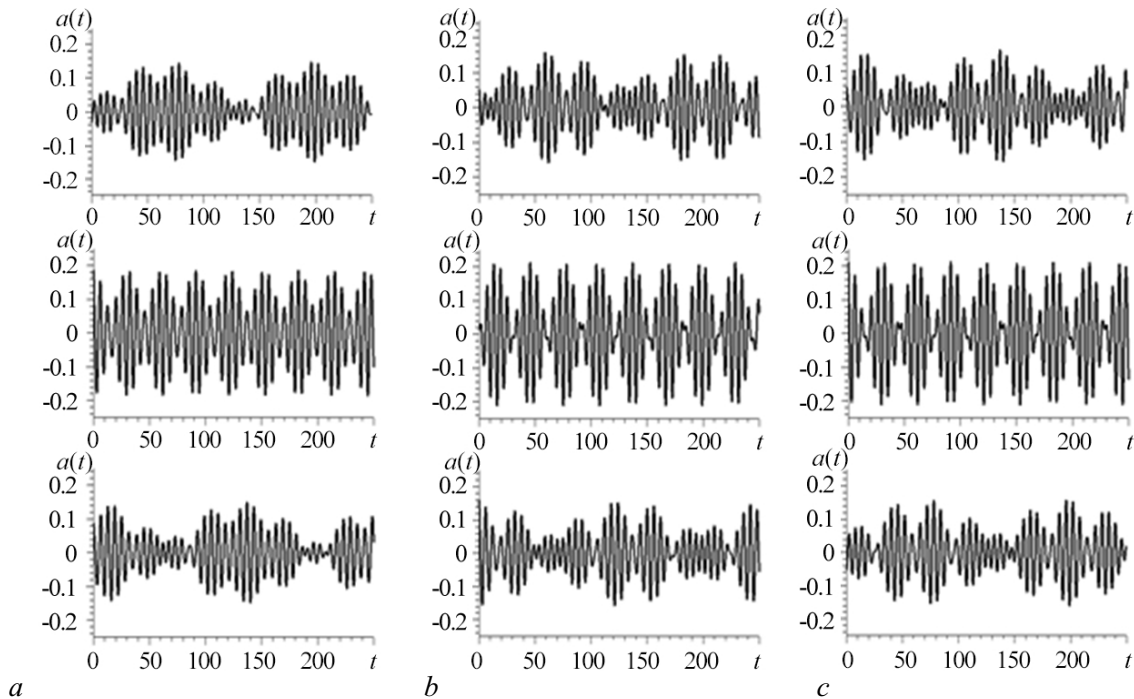


Рис. 4. Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  (верхний, средний, нижний графики) от времени при  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$  и значениях амплитуд при  $t = 0$ :  $a_1(0) = -0.03225$ ,  $a_2(0) = 0.18588$ ,  $a_3(0) = 0.08775$  (a);  $a_1(0) = 0.05375$ ,  $a_2(0) = 0.01277$ ,  $a_3(0) = 0.16125$  (b);  $a_1(0) = 0.05375$ ,  $a_2(0) = 0.21277$ ,  $a_3(0) = -0.05375$  (c)

Fig. 4. Dependences of the  $a_{1,2,3}$  amplitudes (upper, middle, lower figures) on time at  $\varepsilon = 0.3333$ ,  $d = 3$ . Amplitude values at  $t = 0$ :  $a_1(0) = -0.03225$ ,  $a_2(0) = 0.18588$ ,  $a_3(0) = 0.08775$  (a);  $a_1(0) = 0.05375$ ,  $a_2(0) = 0.01277$ ,  $a_3(0) = 0.16125$  (b);  $a_1(0) = 0.05375$ ,  $a_2(0) = 0.21277$ ,  $a_3(0) = -0.05375$  (c)

## 2. Результаты численных расчетов

Для того чтобы проанализировать, в каких пределах аналитическое решение, полученное с помощью теории возмущений, применимо для описания решений нелинейного дифференциального уравнения (1), необходимо его решить с помощью численных методов. На сегодняшний день разработано достаточно большое количество методов численного решения подобных уравнений [3, 4, 11, 25, 27]. Воспользуемся методом конечных разностей. Выберем трёхслойную явную схему решения, с аппроксимацией производных на пятиточечном шаблоне типа «крест», который применялся ранее для более простых модификаций УСГ (см., например, [19, 21]). Данная численная схема второго порядка аппроксимации по  $\Delta x$  и  $\tau$ , где  $\Delta x$  — шаг по координате,  $\tau$  — шаг по времени. Она обладает условной устойчивостью  $(\tau/\Delta x) \leq 1$ . В нашем случае схема является «одношаговой» [21, 27, 37], использует сравнительно небольшое количество обращений к памяти и обладает потенциалом для оптимизации вычислительного алгоритма.

Частотный анализ колебаний локализованных волн, которые рассчитываются численно, выполняется с помощью дискретного преобразования Фурье. Для его расчёта используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). Этот алгоритм обладает хорошей производительностью,

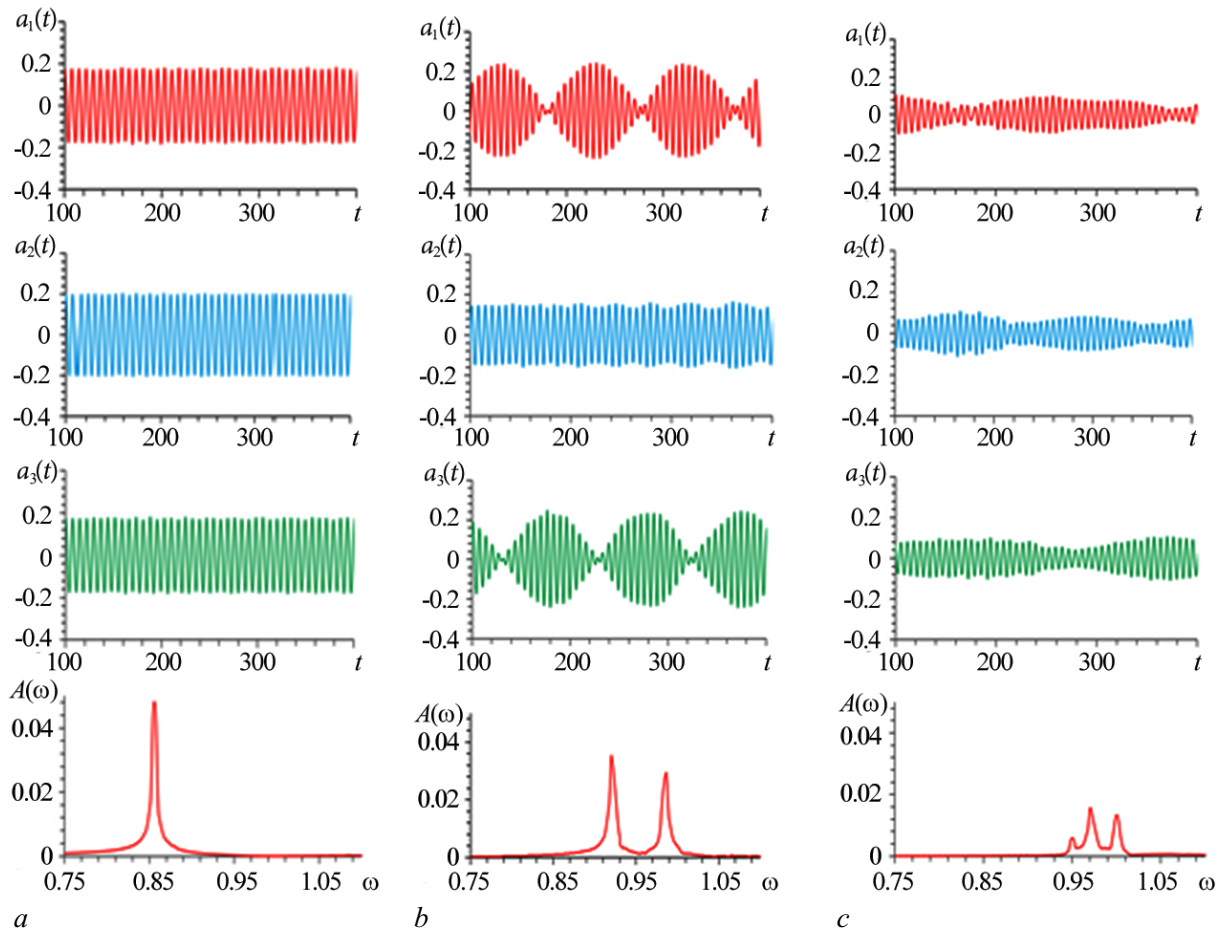


Рис. 5. Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  от времени для  $\varepsilon = 0.5$  при различных значениях параметра  $d$ , рассчитанные численно из уравнения (1), и соответствующие дискретные фурье-разложения  $A(\omega)$ .  $d = 1$  (a);  $d = 3$  (b);  $d = 6$  (c)

Fig. 5. Dependences of the  $a_{1,2,3}$  amplitudes on time for  $\varepsilon = 0.5$  at different the  $d$  values calculated numerically from the equation (1) and corresponding discrete Fourier expansion  $A(\omega)$ .  $d = 1$  (a);  $d = 3$  (b);  $d = 6$  (c)

однако наиболее оптимизированные реализации БПФ накладывают определенные ограничения на исходный ряд. Для подготовки данных исходная дискретная зависимость интерполируется кубическим сплайном с естественными граничными условиями, из которого строится новая дискретная зависимость на равномерной сетке с увеличенным количеством точек аппроксимации. Из новой дискретной зависимости рассчитывается частотный спектр с помощью БПФ. Для повышения точности определения частоты точки максимумов частотного спектра уточняются с помощью интерполяции сплайном Акимы.

Численный эксперимент выполняется следующим образом. В начальный момент времени на некотором расстоянии от примесей имеется кинк, движущийся с постоянной скоростью. При прохождении кинка через область точечных примесей на них возбуждаются локализованные волны бризерного типа. Амплитуда и вид локализованных волн зависят от начальной скорости кинка, параметров  $\varepsilon$  и  $d$ . Поскольку локализованные примесные волны возбуждаются в результате прохождения кинка, то его начальная скорость определяет их начальную разность фаз, как для случая аналитического решения. Вследствие этого не удастся возбудить весь спектр возможных связанных колебаний локализованных волн.

На рис. 5 и рис. 6 приведены зависимости амплитуды локализованных волн от времени в точке расположения примесей при  $\varepsilon = 0.3333$  и  $\varepsilon = 0.5$  для трёх различных случаев, соответствующих различным значениям параметра  $d$ , которые по характеру частотных спектров  $A(\omega)$  можно отнести к различным режимам колебаний. Из рисунков видно, что при малых

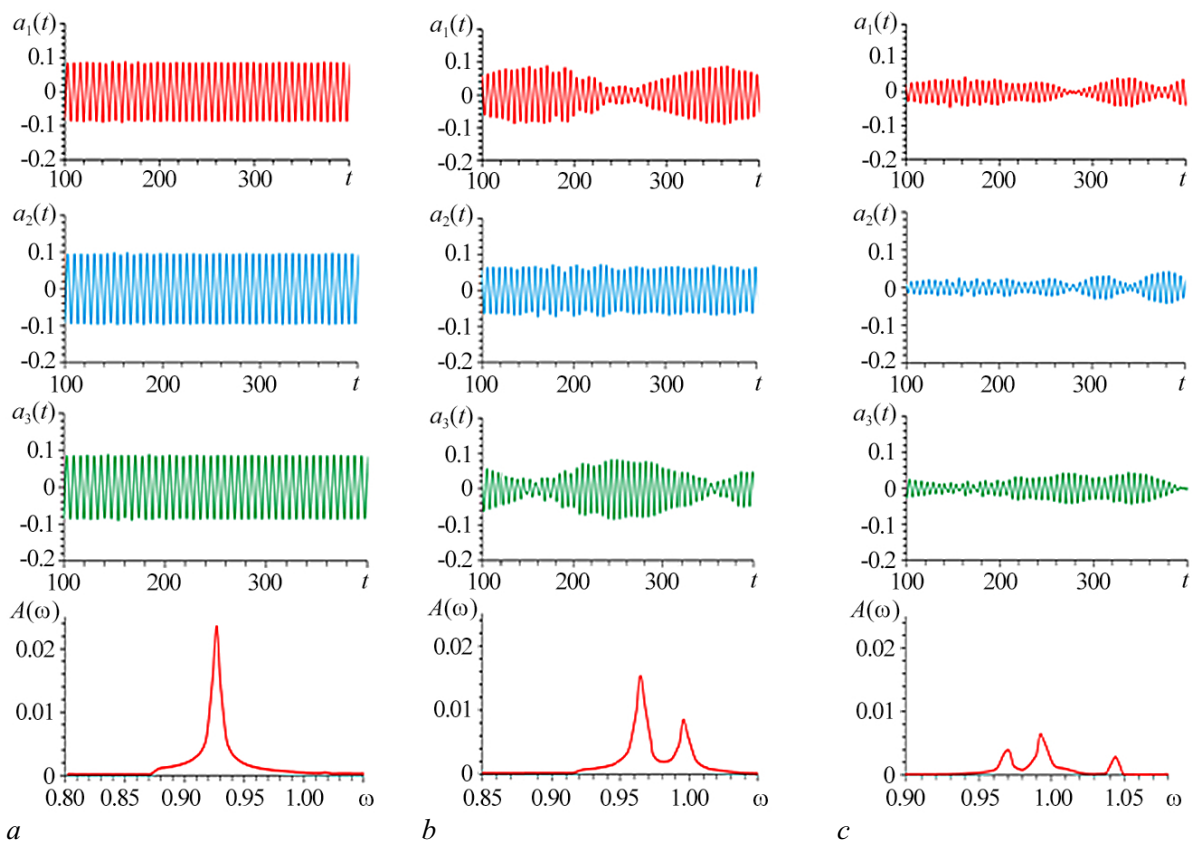


Рис. 6. Зависимости амплитуд  $a_{1,2,3}(t)$  от времени для  $\varepsilon = 0.3333$  при различных значениях параметра  $d$ , рассчитанные численно из уравнения (1), и соответствующие дискретные фурье-разложения  $A(\omega)$ .  $d = 1$  (a);  $d = 3$  (b);  $d = 6$  (c)

Fig. 6. Dependences of the  $a_{1,2,3}$  amplitudes on time for  $\varepsilon = 0.3333$  at different the  $d$  values calculated numerically from the equation (1) and corresponding discrete Fourier expansion  $A(\omega)$ .  $d = 1$  (a);  $d = 3$  (b);  $d = 6$  (c)

расстояниях между примесями связь между волнами очень сильная и при любых начальных условиях они через некоторый промежуток времени начинают колебаться синфазно на единой частоте. Отметим, что подобное поведение характерно и для случая двух точечных примесей [28]. Из рис. 5 и рис. 6 для случая небольшого и большого расстояния между примесями видно, что существуют связанные колебания локализованных волн бризерного типа с характерными сильными биениями. Проведем сравнение полученных с помощью фурье-разложения гармоник с полученными ранее аналитически частотами  $\Omega_{1,2,3}$ . На рис. 1 сплошными линиями отложены аналитически рассчитанные частоты  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , а точками — полученные численно частоты. Из рис. 1 видно, что наблюдается хорошее совпадение численных и аналитических результатов. Полученные численно значения гармоник для рассмотренных случаев с точностью до 1–2% совпадают с соответствующими значениями  $\Omega_{1,2,3}$ . Например, для  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  при  $\varepsilon = 0.3333$  и  $d = 4$  значения, полученные аналитически, равны 0.968 и 1.000, а полученные численно равны 0.956 и 0.996, соответственно. Значение  $\Omega_2$  при  $\varepsilon = 0.3333$  и  $d = 6$  для аналитического решения равно 1.034, для численного — 1.036. Из сравнения численных и аналитических результатов следует, что аналитические результаты, полученные с помощью уравнений для коллективных координат, остаются относительно достоверными и близки к результатам прямого численного расчета при  $d$  больше или равном единице,  $\varepsilon$  меньше единицы, и амплитудах примесных мод порядка 0.3 и меньше. Локализованные волны, содержащие частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$ , возбуждаются численно начиная с малых расстояний между примесями. Локализованные волны, содержащие частоту  $\Omega_2$ , возбуждаются численно только для больших расстояний между примесями (в данном случае начиная с  $d = 6$ ), когда сильно уменьшается «сила связи» между ними. Причем для случая локализованных волн с одной частотой возбуждается  $\Omega_1$ , для случая колебаний с двумя частотами —  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$ .

### Заключение

В статье для модели синус-Гордона с произвольным числом одинаковых точечных примесей, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, с помощью метода коллективных переменных получена система уравнений, описывающих колебания локализованных на примесях волн. Полученные дифференциальные уравнения для случая трёх примесей являются уравнениями колебательной системы с тремя степенями свободы или трёх связанных гармонических осцилляторов. Колебания системы представляют собой сумму трёх типов гармонических колебаний: синфазного, синфазно-антифазного и антифазного. Получены приближенные аналитические решения для частот, хорошо аппроксимирующие результаты прямого численного моделирования нелинейной системы. Показано, что при уменьшении расстояния между примесями частота синфазных колебаний уменьшается, частота синфазно-антифазных колебаний увеличивается, частота антифазных колебаний увеличивается не так быстро как синфазно-антифазных. При возбуждении двух частот возникают биения, колебания похожи на колебания в случае двух одинаковых примесей. При возбуждении трёх частот форма колебаний усложняется.

### Список литературы

1. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, Физматлит, 2000. 272 с.
2. Daixois T., Peyrard M. Physics of Solitons. New York: Cambridge University Press, 2010. 436 p.
3. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
4. Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P. G., Williams F. The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer, 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.

5. Браун О. М., Кившарь Ю. С. Модель Френкеля–Конторовой: Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008. 536 с.
6. Kryuchkov S. V., Kukhar E. I. Nonlinear electromagnetic waves in semi-Dirac nanostructures with superlattice // *Eur. Phys. J. B*. 2020. Vol. 93, no. 4. P. 62. DOI: 10.1140/epjb/e2020-100575-4.
7. Kiselev V. V., Raskovalov A. A., Batalov S. V. Nonlinear interaction of domain walls and breathers with a spin-wave field // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2019. Vol. 127. P. 217–225. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.06.013.
8. Делев В. А., Назаров В. Н., Скалдин О. А., Батыришин Э. С., Екомасов Е. Г. Сложная динамика каскада кинк-антикинкковых взаимодействий в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика // *Письма в ЖЭТФ*. 2019. Т. 110, № 9. С. 607–613. DOI: 10.1134/S0370274X19210070.
9. Kälbermann G. The sine-Gordon wobble // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2004. Vol. 37, no. 48. P. 11603–11612. DOI: 10.1088/0305-4470/37/48/006.
10. Ferreira L. A., Piette B., Zakrzewski W. J. Wobbles and other kink-breather solutions of the sine-Gordon model // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 77, no. 3. P. 036616. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.036613.
11. Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G. Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 90, no. 5. P. 052902. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.052902.
12. Kivshar Y. S., Pelinovsky D. E., Cretegnny T., Peyrard M. Internal modes of solitary waves // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80, no. 23. P. 5032–5035. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.5032.
13. Jagtap A. D., Vasudeva Murthy A. S. Higher order scheme for two-dimensional inhomogeneous sine-Gordon equation with impulsive forcing // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2018. Vol. 64. P. 178–197. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.04.012.
14. Gomide O. M. L., Guardia M., Seara T. M. Critical velocity in kink-defect interaction models: Rigorous results // *Journal of Differential Equations*. 2020. Vol. 269, no. 4. P. 3282–3346. DOI: 10.1016/j.jde.2020.02.030.
15. Javidan K. Analytical formulation for soliton-potential dynamics // *Phys. Rev. E*. 2008. Vol. 78, no. 4. P. 046607. DOI: 10.1103/PhysRevE.78.046607.
16. Piette B., Zakrzewski W. J. Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2007. Vol. 40, no. 22. P. 5995–6010. DOI: 10.1088/1751-8113/40/22/016.
17. Al-Alawi J. H., Zakrzewski W. J. Scattering of topological solitons on barriers and holes of deformed Sine–Gordon models // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2008. Vol. 41, no. 31. P. 315206. DOI: 10.1088/1751-8113/41/31/315206.
18. Baron H. E., Zakrzewski W. J. Collective coordinate approximation to the scattering of solitons in modified NLS and sine-Gordon models // *Journal of High Energy Physics*. 2016. Vol. 2016, no. 6. P. 185. DOI: 10.1007/JHEP06(2016)185.
19. Гумеров А. М., Екомасов Е. Г., Муртазин Р. Р., Назаров В. Н. Трансформация солитонов уравнения синус-Гордона в моделях с переменными коэффициентами и затуханием // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2015. Т. 55, № 4. С. 631–640. DOI: 10.7868/S0044466915040031.
20. Goodman R. H., Haberman R. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: the two-bounce resonance // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 195, no. 3–4. P. 303–323. DOI: 10.1016/j.physd.2004.04.002.
21. Гумеров А. М., Екомасов Е. Г., Закирьянов Ф. К., Кудрявцев Р. В. Структура и свойства четырехкинкковых мультисолитонов уравнения синус-Гордона // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014. Т. 54, № 3. С. 481–495. DOI: 10.7868/S0044466914030077.

22. *González J. A., Bellorín A., Guerrero L. E.* Internal modes of sine-Gordon solitons in the presence of spatiotemporal perturbations // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65, no. 6. P. 065601. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.065601.
23. *González J. A., Bellorín A., García-Ñustes M. A., Guerrero L. E., Jiménez S., Vázquez L.* Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations // *Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 381, no. 24. P. 1995–1998. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.042.
24. *Белова Т. И., Кудрявцев А. Е.* Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // *УФН.* 1997. Т. 167, № 4. С. 377–406. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199704b.0377.
25. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Murtazin R. R.* Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities // *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2016. Vol. 40, no. 17. P. 6178–6186. DOI: 10.1002/mma.3908.
26. *Екомасов Е. Г., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В.* О возможности наблюдения резонансного взаимодействия кинков уравнения синус-Гордона с локализованными волнами в реальных физических системах // *Письма в ЖЭТФ.* 2015. Т. 101, № 12. С. 935–939. DOI: 10.7868/S0370274X15120127.
27. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V.* Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping // *J. Comput. Appl. Math.* 2017. Vol. 312. P. 198–208. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.013.
28. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N.* Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // *Braz. J. Phys.* 2018. Vol. 48, no. 6. P. 576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
29. *Gumerov A. M., Ekomasov E. G., Kudryavtsev R. V., Fakhretdinov M. I.* Excitation of large-amplitude localized nonlinear waves by the interaction of kinks of the sine-Gordon equation with attracting impurity // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2019. Vol. 15, no. 1. P. 21–34. DOI: 10.20537/nd190103.
30. *Geng X., Shen J., Xue B.* A new nonlinear wave equation: Darboux transformation and soliton solutions // *Wave Motion.* 2018. Vol. 79. P. 44–56. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2018.02.009.
31. *Ekomasov E. G., Murtazin R. R., Bogomazova O. B., Gumerov A. M.* One-dimensional dynamics of domain walls in two-layer ferromagnet structure with different parameters of magnetic anisotropy and exchange // *J. Magn. Magn. Mater.* 2013. Vol. 339. P. 133–137. DOI: 10.1016/j.jmmm.2013.02.042.
32. *Екомасов Е. Г., Азаматов Ш. А., Муртазин Р. Р.* Изучение зарождения и эволюции магнитных неоднородностей типа солитонов и бризеров в магнетиках с локальными неоднородностями анизотропии // *Физика металлов и металловедение.* 2008. Т. 105, № 4. С. 341–349.
33. *Ekomasov E. G., Murtazin R. R., Nazarov V. N.* Excitation of magnetic inhomogeneities in three-layer ferromagnetic structure with different parameters of the magnetic anisotropy and exchange // *J. Magn. Magn. Mater.* 2015. Vol. 385. P. 217–221. DOI: 10.1016/j.jmmm.2015.03.019.
34. *Gumerov A. M., Ekomasov E. G., Kudryavtsev R. V.* One-dimensional dynamics of magnetic inhomogeneities in a three- and five-layer ferromagnetic structure with different values of the magnetic parameters // *Journal of Physics: Conference Series.* 2019. Vol. 1389. P. 012004. DOI: 10.1088/1742-6596/1389/1/012004.
35. *Шамсутдинов М. А., Назаров В. Н., Ломакина И. Ю., Харисов А. Т., Шамсутдинов Д. М.* Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. М.: Наука, 2009. 456 с.
36. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982. 304 с.
37. *Фалейчик Б. В.* Одношаговые методы численного решения задачи Коши. Минск: БГУ, 2010. 42 с.

## References

1. Ryskin NM, Trubetskov DI. Nonlinear Waves. Moscow: Nauka, Fizmatlit; 2000. 272 p. (in Russian).
2. Dauxois T, Peyrard M. Physics of Solitons. New York: Cambridge University Press; 2010. 436 p.
3. Dodd RK, Eilbeck JC, Gibbon JD, Morris HC. Solitons and Nonlinear Wave Equations. London: Academic Press; 1982. 630 p.
4. Cuevas-Maraver J, Kevrekidis PG, Williams F. The sine-Gordon Model and its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer; 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
5. Braun OM, Kivshar YS. The Frenkel–Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications. Berlin: Springer; 2004. 472 p. DOI: 10.1007/978-3-662-10331-9.
6. Kryuchkov SV, Kukhar EI. Nonlinear electromagnetic waves in semi-Dirac nanostructures with superlattice. Eur. Phys. J. B. 2020;93(4):62. DOI: 10.1140/epjb/e2020-100575-4.
7. Kiselev VV, Raskovalov AA, Batalov SV. Nonlinear interaction of domain walls and breathers with a spin-wave field. Chaos, Solitons and Fractals. 2019;127:217–225. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.06.013.
8. Delev VA, Nazarov VN, Scaldin OA, Batyrshin ES, Ekomasov EG. Complex dynamics of the cascade of kink–antikink interactions in a linear defect of the electroconvective structure of a nematic liquid crystal. JETP Lett. 2019;110(9):607–612. DOI: 10.1134/S0021364019210069.
9. Kälbermann G. The sine-Gordon wobble. Journal of Physics A: Mathematical and General. 2004;37(48):11603–11612. DOI: 10.1088/0305-4470/37/48/006.
10. Ferreira LA, Piette B, Zakrzewski WJ. Wobbles and other kink-breather solutions of the sine-Gordon model. Phys. Rev. E. 2008;77(3):036616. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.036613.
11. Saadatmand D, Dmitriev SV, Borisov DI, Kevrekidis PG. Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect. Phys. Rev. E. 2014;90(5):052902. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.052902.
12. Kivshar YS, Pelinovsky DE, Cretegnny T, Peyrard M. Internal modes of solitary waves. Phys. Rev. Lett. 1998;80(23):5032–5035. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.5032.
13. Jagtap AD, Vasudeva Murthy AS. Higher order scheme for two-dimensional inhomogeneous sine-Gordon equation with impulsive forcing. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018;64:178–197. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.04.012.
14. Gomide OML, Guardia M, Seara TM. Critical velocity in kink-defect interaction models: Rigorous results. Journal of Differential Equations. 2020;269(4):3282–3346. DOI: 10.1016/j.jde.2020.02.030.
15. Javidan K. Analytical formulation for soliton-potential dynamics. Phys. Rev. E. 2008;78(4):046607. DOI: 10.1103/PhysRevE.78.046607.
16. Piette B, Zakrzewski WJ. Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2007;40(22):5995–6010. DOI: 10.1088/1751-8113/40/22/016.
17. Al-Alawi JH, Zakrzewski WJ. Scattering of topological solitons on barriers and holes of deformed Sine–Gordon models. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2008;41(31):315206. DOI: 10.1088/1751-8113/41/31/315206.
18. Baron HE, Zakrzewski WJ. Collective coordinate approximation to the scattering of solitons in modified NLS and sine-Gordon models. Journal of High Energy Physics. 2016;2016(6):185. DOI: 10.1007/JHEP06(2016)185.
19. Gumerov AM, Ekomasov EG, Murtazin RR, Nazarov VN. Transformation of sine-Gordon solitons in models with variable coefficients and damping. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015;55(4):628–637. DOI: 10.1134/S096554251504003X.
20. Goodman RH, Haberman R. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: the two-bounce

- resonance. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004;195(3–4):303–323. DOI: 10.1016/j.physd.2004.04.002.
21. Gumerov AM, Ekomasov EG, Zakir'yanov FK, Kudryavtsev RV. Structure and properties of four-kink multisolitons of the sine-Gordon equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2014;54(3):491–504. DOI: 10.1134/S0965542514030075.
  22. González JA, Bellorín A, Guerrero LE. Internal modes of sine-Gordon solitons in the presence of spatiotemporal perturbations. *Phys. Rev. E*. 2002;65(6):065601. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.065601.
  23. González JA, Bellorín A, García-Ñustes MA, Guerrero LE, Jiménez S, Vázquez L. Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations. *Phys. Lett. A*. 2017;381(24):1995–1998. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.042.
  24. Belova TI, Kudryavtsev AE. Solitons and their interactions in classical field theory. *Phys. Usp.* 1997;40(4):359–386. DOI: 10.1070/PU1997v040n04ABEH000227.
  25. Ekomasov EG, Gumerov AM, Murtazin RR. Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2016;40(17):6178–6186. DOI: 10.1002/mma.3908.
  26. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. On the possibility of the observation of the resonance interaction between kinks of the sine-Gordon equation and localized waves in real physical systems. *JETP Lett.* 2015;101(12):835–839. DOI: 10.1134/S0021364015120061.
  27. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping. *J. Comput. Appl. Math.* 2017;312:198–208. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.013.
  28. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV, Dmitriev SV, Nazarov VN. Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities. *Braz. J. Phys.* 2018;48(6):576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
  29. Gumerov AM, Ekomasov EG, Kudryavtsev RV, Fakhretdinov MI. Excitation of large-amplitude localized nonlinear waves by the interaction of kinks of the sine-Gordon equation with attracting impurity. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2019;15(1):21–34. DOI: 10.20537/nd190103.
  30. Geng X, Shen J, Xue B. A new nonlinear wave equation: Darboux transformation and soliton solutions. *Wave Motion*. 2018;79:44–56. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2018.02.009.
  31. Ekomasov EG, Murtazin RR, Bogomazova OB, Gumerov AM. One-dimensional dynamics of domain walls in two-layer ferromagnet structure with different parameters of magnetic anisotropy and exchange. *J. Magn. Magn. Mater.* 2013;339:133–137. DOI: 10.1016/j.jmmm.2013.02.042.
  32. Ekomasov EG, Azamatov SA, Murtazin RR. Studying the nucleation and evolution of magnetic inhomogeneities of the soliton and breather type in magnetic materials with local inhomogeneities of anisotropy. *Phys. Metals Metallogr.* 2008;105(4):313–321. DOI: 10.1134/S0031918X08040017.
  33. Ekomasov EG, Murtazin RR, Nazarov VN. Excitation of magnetic inhomogeneities in three-layer ferromagnetic structure with different parameters of the magnetic anisotropy and exchange. *J. Magn. Magn. Mater.* 2015;385:217–221. DOI: 10.1016/j.jmmm.2015.03.019.
  34. Gumerov AM, Ekomasov EG, Kudryavtsev RV. One-dimensional dynamics of magnetic inhomogeneities in a three- and five-layer ferromagnetic structure with different values of the magnetic parameters. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1389:012004. DOI: 10.1088/1742-6596/1389/1/012004.
  35. Shamsutdinov MA, Nazarov VN, Lomakina IY, Kharisov AT, Shamsutdinov DM. *Ferro- and Antiferromagnetodynamics. Nonlinear Oscillations, Waves and Solitons*. Moscow: Nauka; 2009. 456 p. (in Russian).
  36. Magnus K. *Schwingungen: Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. Stuttgart: Teubner; 1961. 298 s. (in German).
  37. Faleychik BV. *One-Step Methods for the Numerical Solution of the Cauchy Problem*. Minsk: Belarusian State University Publishing; 2010. 42 p. (in Russian).



*Екомасов Евгений Григорьевич* — родился в с. Анучино Приморского края (1958). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (1980). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Физика магнитных явлений» (1991, МГУ) и доктора физико-математических наук специальности «Физика конденсированного состояния» (2005, ЧелГУ). Профессор кафедры теоретической физики Башкирского государственного университета. Награжден Нагрудным знаком «Почетный работник высшего образования РФ» (2011) и Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ (2008). Область исследовательских интересов — теоретическая и математическая физика, физика конденсированного состояния, спинтроника, вычислительная физика. Опубликовал более 200 научных и методических работ.



450076, Республика Башкортостан, Уфа, ул. Заки Валиди, 32  
Башкирский государственный университет  
E-mail: [ekomasoveg@gmail.com](mailto:ekomasoveg@gmail.com)  
ORCID: 0000-0002-6194-3358  
AuthorID (eLibrary.Ru): 29060

*Самсонов Кирилл Юрьевич* — родился в Тюмени (1994). Окончил физический факультет Тюменского государственного университета (2018, магистратура). В настоящее время аспирант Тюменского государственного университета. Область научных интересов: фильтрационно-емкостные свойства пласта, задача о двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей с учётом коагуляционных и суффозионных процессов, нелинейная динамика волн (солитонов) в магнитных средах и изучение их поведения при взаимодействии с «примесями».



Россия, 625003 Тюмень, ул. Володарского, 6  
Тюменский государственный университет  
E-mail: [k.y.samsonov@gmail.com](mailto:k.y.samsonov@gmail.com)  
ORCID: 0000-0002-3170-7872  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1137615

*Гумеров Азамат Маратович* — окончил физический факультет Башкирского государственного университета (2010, магистратура). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2014). Работает в БашГУ в должности инженера. Научные интересы — исследование динамики намагничённости в ферро- и антиферромагнетиках и свойствами нелинейных волн (солитонов) в магнитных средах; разработка эффективного программного обеспечения для моделирования, обработки и анализа результатов.



450076, Республика Башкортостан, Уфа, ул. Заки Валиди, 32  
Башкирский государственный университет  
E-mail: [article@solitonlab.com](mailto:article@solitonlab.com)  
ORCID: 0000-0002-5048-9356  
AuthorID (eLibrary.Ru): 678768

*Кудрявцев Роман Владимирович* — родился в Уфе (1989). Окончил магистратуру Физико-технического института Башкирского государственного университета (2014). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Теоретическая физика» (2018). Научная работа связана с исследованием динамики солитонов уравнения синус-Гордона. Имеет дипломы и грамоты за доклады на молодёжных конференциях. Был награжден стипендией Главы Республики Башкортостан (2015/2016, 2016/2017, 2017/2018).



450076, Республика Башкортостан, Уфа, ул. Заки Валиди, 32  
Башкирский государственный университет  
E-mail: [xc.89@mail.ru](mailto:xc.89@mail.ru)