



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003012
EDN: OGSBSV

Критерии существования внутренних неподвижных точек дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры с однородными турнирами

Д. Б. Эшмаматова¹✉, М. А. Таджиева^{1,2}, Р. Н. Ганиходжаев^{1,2}

¹Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан

²Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: ✉24dil@mail.ru, mohbonut@mail.ru, rganikhodzhaev@gmail.com

Поступила в редакцию 27.05.2022, принята к публикации 4.07.2022,
опубликована онлайн 19.10.2022, опубликована 30.11.2022

Аннотация. Цель работы заключается в изучении динамики асимптотического поведения траекторий дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры с однородными турнирами, действующих в произвольном $(m - 1)$ -мерном симплексе. Известно, что динамическая система — это объект либо процесс, для которого однозначно определяется понятие состояния, как совокупность некоторых величин в данный момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течением времени. В вопросах популяционной генетики, биологии, экологии, эпидемиологии и экономики, в основном, используют системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающие эволюцию исследуемого процесса. Так как при исследовании жизненных явлений часто применяют уравнения Лотки–Вольтерры, основная цель работы состоит в изучении траекторий дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры с помощью элементов теории графов. **Методы.** В работе для квадратичных отображений Лотки–Вольтерры построены карты неподвижных точек, которые позволяют описать динамику рассматриваемых систем. **Результаты.** С помощью карт неподвижных точек дискретной динамической системы, в частном случае даны критерии существования неподвижных точек с нечетными ненулевыми координатами, и эти результаты о расположении неподвижных точек систем Лотки–Вольтерры соответственно обобщены на случай произвольного симплекса. Основными результатами являются теоремы 5–9, которые позволяют описывать динамику этих систем, возникающих в ряде генетических, эпидемиологических и экологических моделей. **Заключение.** Результаты, полученные в работе, дают подробное описание динамики траекторий отображений Лотки–Вольтерры с однородными турнирами. Карта неподвижных точек выделяет конкретную область в симплексе, наиболее важную и интересную для изучения динамики этих отображений. Полученные результаты применимы в задачах экологии, например, для описания и изучения круговорота биогенов.

Ключевые слова: квадратичное отображение Лотки–Вольтерры, симплекс, граф, турнир, однородный турнир, неподвижная точка, карта неподвижных точек, циклическая тройка, транзитивная тройка и кососимметрическая матрица.

Благодарности. Работа выполнена в рамках научного исследования ОТ-Ф4-31 «Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады на симплексах» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2017–2020 гг.).

Для цитирования: Эшмаматова Д. Б., Таджиева М. А., Ганиходжаев Р. Н. Критерии существования внутренних неподвижных точек дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры с однородными турнирами // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 702–716. DOI: 10.18500/0869-6632-003012. EDN: OGSBSV

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Criteria for internal fixed points existence of discrete dynamic Lotka–Volterra systems with homogeneous tournaments

D. B. Eshmamatova¹✉, M. A. Tadzhieva^{1,2}, R. N. Ganikhodzhaev^{1,2}

¹Tashkent State Transport University, Uzbekistan

²National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: ✉24dil@mail.ru, mohbonut@mail.ru, rganikhodzhaev@gmail.com

Received 27.05.2022, accepted 4.07.2022, available online 19.10.2022, published 30.11.2022

Abstract. Purpose of the work is to study the dynamics of the asymptotic behavior of trajectories of discrete Lotka–Volterra dynamical systems with homogeneous tournaments operating in an arbitrary $(m - 1)$ -dimensional simplex. It is known that a dynamic system is an object or a process for which the concept of a state is uniquely defined as a set of certain quantities at a given time, and a law describing the evolution of initial state over time is given. Mainly in questions of population genetics, biology, ecology, epidemiology and economics, systems of nonlinear differential equations describing the evolution of the process under study often arise. Since the Lotka–Volterra equations often arise in life phenomena, the main purpose of the work is to study the trajectories of discrete dynamical Lotka–Volterra systems using elements of graph theory. **Methods.** In the paper cards of fixed points are constructed for quadratic Lotka–Volterra mappings, that allow describing the dynamics of the systems under consideration. **Results.** Using cards of fixed points of a discrete dynamical system, criteria for the existence of fixed points with odd nonzero coordinates are given in a particular case, and these results on the location of fixed points of Lotka–Volterra systems are generalized accordingly in the case of an arbitrary simplex. The main results are theorems 5–9, which allow us to describe the dynamics of these systems arising in a number of genetic, epidemiological and ecological models. **Conclusion.** The results obtained in the paper give a detailed description of the dynamics of the trajectories of Lotka–Volterra maps with homogeneous tournaments. The map of fixed points highlights a specific area in the simplex that is most important and interesting for studying the dynamics of these maps. The results obtained are applicable in environmental problems, for example, to describe and study the cycle of biogens.

Keywords: quadratic Lotka–Volterra mapping, simplex, graph, tournament, homogeneous tournament, fixed point, fixed point map, cyclic triple, transitive triple and skew-symmetric matrix.

Acknowledgements. The work was performed in the framework of the scientific study OT-F4-31 “Noncommutative modules, Leibniz algebras and polynomial cascades on simplices” of the Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan (2017–2020).

For citation: Eshmamatova DB, Tadzhieva MA, Ganikhodzhaev RN. Criteria for internal fixed points existence of discrete dynamic Lotka–Volterra systems with homogeneous tournaments. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(6): 702–716. DOI: 10.18500/0869-6632-003012

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Динамическая система как математический объект служит моделью для различного рода природных систем. В вопросах экономики, популяционной генетики, в частности в эпидемиологии, эволюцию описывают системы нелинейных дифференциальных уравнений. В этих разделах природных явлений часто применяют уравнения Лотки–Вольтерры.

Рассмотрим отображение $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданное равенствами [1,2]

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m},$$

где $Vx = (x'_1, \dots, x'_m)$ и $A = (a_{ki})$ – кососимметрическая матрица. Это отображение при условии $|a_{ki}| \leq 1$ называется отображением Лотки–Вольтерры [3,4].

1. Методика

Пусть Y — конечное непустое множество, а M — некоторое множество неупорядоченных пар (x, y) , где $x, y \in Y$, причем $x \neq y$. Тогда пара (Y, M) называется графом.

Элементы Y называются вершинами, если же $(x, y) \in M$, то (x, y) называется ребром графа (Y, M) , вершины x и y в этом случае называются смежными.

Два графа (Y_1, M_1) и (Y_2, M_2) называются изоморфными, если существует биекция Y_1 на Y_2 , сохраняющая смежность вершин.

Граф — полный, если любые две различные вершины являются смежными. Если каждое ребро снабжено направлением, то граф называется ориентированным. Турнир — это полный ориентированный граф.

Классификации турниров с заданным числом вершин с точностью до изоморфизмов посвящены работы [5, 6]. Например, с точностью до изоморфизма существуют только два турнира с тремя вершинами (рис. 1).

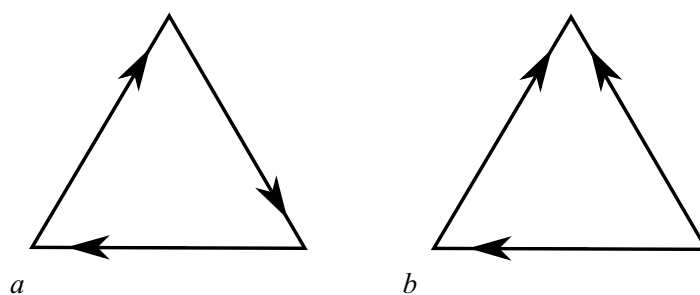


Рис. 1. Виды турниров при $m = 3$: a — циклическая тройка, b — транзитивная тройка

Fig. 1. Types of tournaments at $m = 3$: a — cyclic triple, b — transitive triple

Пусть x_1, x_2 — вершины турнира. Запись $x_1 \rightarrow x_2$ означает, что ребро, соединяющее x_1 и x_2 , направлено от x_1 к x_2 . Конечная последовательность вершин $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_p$ называется маршрутом, если $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Цикл — это замкнутый маршрут, то есть $x_p = x_1$.

Турнир называется сильным, если для любых вершин $x, y \in Y$ существует маршрут с началом x и концом y .

Известно [7], что турнир — сильный тогда и только тогда, когда в нем существует цикл длины $|Y|$ ($|Y|$ — количество элементов Y).

Турнир, не имеющий циклов, называется транзитивным. Естественным образом определяется понятие подтурнира. (В определениях мы следуем терминологии, принятой в работах [3, 8, 9].)

Определение 1. Турнир называется однородным, если любой его подтурнир является либо сильным, либо транзитивным.

Очевидно, при $|Y| \leq 3$ любой турнир однороден.

Известно [9], что при $|Y| = 4$ существуют четыре попарно неизоморфных турнира, вид которых представлен на рис. 2.

Следовательно, любой турнир, содержащий изоморфный подтурнир (либо c , либо d), не может быть однородным.

Теорема 1. Пусть $|Y| \geq 4$. Любой турнир с вершинами Y , не содержащий подтурниров, изоморфных c или d , однороден.

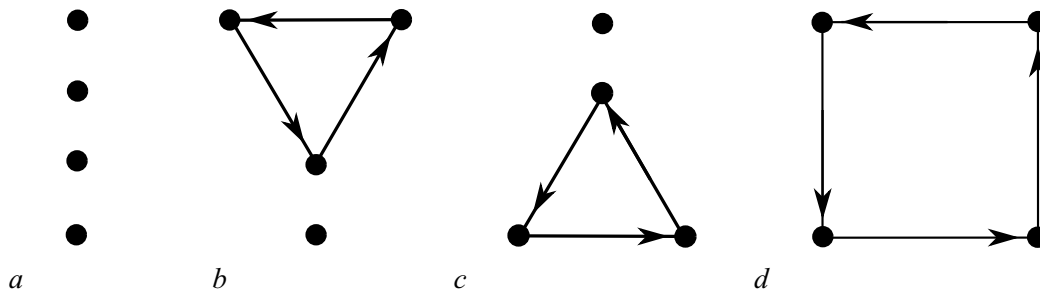


Рис. 2. Эта иллюстрация турниров приведена в [7]. Здесь во всех неуказанных ребрах направления идут сверху вниз: a – транзитивный турнир, b – сильный турнир, c и d являются не сильными, не транзитивными

Fig. 2. This illustration of the tournaments is given in [7]. Here, in all unspecified edges, the directions go from top to bottom: a – transitive tournament, b – strong tournament. c and d are not strong, not transitive

Доказательство. Если турнир не сильный, то в нем существует подтурнир, не являющийся ни сильным, ни транзитивным. В этом случае [6] вершины подтурнира можно разбить на два непересекающихся и непустых класса так, что все стрелки (ребра) направлены из одного класса в другой, причем хотя бы один из классов образует сильный подтурнир. Сильный подтурнир всегда содержит циклическую тройку. Тогда эта циклическая тройка вместе с любой вершиной из другого класса образует подтурнир с четырьмя вершинами, изоморфный либо c , либо d . \square

Пусть $I = \{1, 2, \dots, m\}$ и $\alpha \subset I$ – непустое подмножество I .

Определение 2. Два подтурнира турнира с вершинами из $\alpha \subset I$ и $\beta \subset I$ называются смежными, если $|\alpha| = |\beta|$, причем пересечение этих подтурниров имеет количество вершин, равное $|\alpha| - 1$.

Пусть $e_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \dots, \delta_{mk})$, $k = 1, \dots, m$, где δ_{ij} – символ Кронекера, есть стандартный базис в \mathbb{R}^m . Тогда

$$S^{m-1} = \text{co}\{e_1, \dots, e_m\} = \{x = (x_1, \dots, x_m) : \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0\}$$

называется симплексом. Ясно, что S^{m-1} – выпуклый компакт размерности $m - 1$.

Для любого непустого $\alpha \subset I$ положим

$$\Gamma_\alpha = \text{co}\{e_i : i \in \alpha\}.$$

Γ_α называется $(|\alpha| - 1)$ -мерной гранью симплекса S^{m-1} . Очевидно, любая грань S^{m-1} также является симплексом.

Понятие смежности для граней S^{m-1} определим так же, как для подтурниров турнира. Две грани, имеющие равные размерности, считаются смежными, если их пересечение имеет размерность на 1 меньше, чем исходные. Например, два ребра смежны только лишь тогда, когда у них есть общая вершина.

Пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, m$ – вещественная кососимметрическая матрица, действующая в \mathbb{R}^m . Тогда Ax и x ортогональны, то есть $(Ax, x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$. Легко доказать, что верно и обратное утверждение. Если $(Ax, x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$, то матрица A кососимметрична.

Для $\alpha \subset I$ положим $A_\alpha = (a_{ij})$, где $i, j \in \alpha$. В этом случае A_α называется главной подматрицей матрицы. Ясно, что A_α также кососимметрична. Пусть $|A_\alpha|$ – определитель матрицы A . Очевидно, $|A_\alpha| = 0$, если $|\alpha|$ – нечетно, и $|A_\alpha| \geq 0$, если $|\alpha|$ – четно.

Если $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$ – точки из \mathbb{R}^m , то $x \geq y$ означает, что $x_i \geq y_i$ для всех $i = \overline{1, m}$.

Пример 2. Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $P = Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Пример 3. Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $P = (0, \lambda, 1 - \lambda)$, где $0 \leq \lambda \leq 1$ и $Q = (1, 0, 0)$.

Пример 4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0.5 & -1 \\ 1 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ -1 & 1 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$,

тогда $P = Q = (0.2\lambda; 0.15\lambda + 0.25; 0.5 - 0.1\lambda; 0.25 - 0.25\lambda)$, где $0 \leq \lambda \leq 1$.

Определение 3. $A = (a_{ki})$ называется кососимметрической матрицей общего положения, если $|A_\alpha| > 0$ для всех $\alpha \subset I$ таких, что $|\alpha|$ — четное число.

Легко заметить, что в примерах 3 и 4 матрица A не является матрицей общего положения.

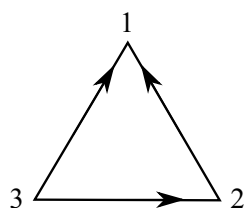
Теорема 3. Множество всех кососимметрических матриц общего положения открыто и всюду плотно в множестве всех кососимметрических матриц.

Доказательство. Теорема доказана в работе [1]. □

В частности, если $|\alpha| = 2$, $\alpha = \{k, i\}$, то $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & a_{ki} \\ -a_{ki} & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому $|A_\alpha| > 0$ означает, что $a_{ki} \neq 0$ при всех $k \neq i$, что позволяет построить турнир, соответствующий матрице A .

Понятие турнира можем ввести наряду с кососимметрической матрицей, соответствующей отображению Лотки–Вольтерры [1, 4]. Элементы множества $I = \{1, \dots, m\}$ отметим в виде точек и соединим точку k с точкой i стрелкой, направленной из k в i , если $a_{ki} < 0$, и наоборот, если $a_{ki} > 0$. Полученный ориентированный граф назовём турниром [3, 8, 9].

Например, кососимметрической матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ соответствует турнир



Ясно, что в этом примере A — матрица общего положения, а турнир является транзитивной тройкой.

Теорема 4. Если A — кососимметрическая матрица общего положения, то множества P и Q состоят из единственной точки.

Доказательство. Пусть P имеет более чем одну точку, следовательно, P — бесконечное множество. Поскольку число граней S^{m-1} конечно, то некоторая грань Γ_α имеет не менее двух точек из P , причем эти точки внутренние для Γ_α .

а) Пусть эти точки принадлежат внутренности S^{m-1} , то есть у них все координаты положительны. Так как

$$Ax \geq 0 \text{ и } (Ax, x) = 0,$$

то $Ax = 0$, поскольку все $x_i > 0$, $i = \overline{1, m}$.

Аналогично $Ay = 0$, где $y \in P$, и все координаты y положительны. Ясно, что две различные точки из симплекса линейно независимы. Поэтому $\dim \text{Ker} A \geq 2$. Так как A — матрица общего положения, то $\dim \text{Ker} A \leq 1$. Получаем противоречие.

б) Если P содержится в некоторой грани Γ_α , то вместо A рассмотрим A_α . Ясно, что A_α — также кососимметрическая матрица общего положения размерности $|\alpha| \times |\alpha|$. Если $x \in \Gamma_\alpha$, то x_α та же точка x , но только лишь с координатами из α . Тогда из $Ax \geq 0$ следует $A_\alpha x_\alpha \geq 0$ при условии, что $x \in \Gamma_\alpha$. Следовательно, случай б) сводится к случаю а). \square

2. Результаты

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная кососимметрическая матрица с условием $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$. Рассмотрим отображение $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданное равенствами

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где $Vx = (x'_1, \dots, x'_m)$.

Известно [1], что для $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ необходимо и достаточно, чтобы $|a_{ki}| \leq 1$ при всех $k, i = 1, \dots, m$, причем V является гомеоморфизмом S^{m-1} на себя. Так как из $x_k = 0$ следует, что $x'_k = 0$, то любая грань Γ_α симплекса S^{m-1} инвариантна, то есть $V(\Gamma_\alpha) = \Gamma_\alpha$, в частности, все вершины S^{m-1} — неподвижные точки.

Отображение (3) при $|a_{ki}| \leq 1$ называется отображением Лотки–Вольтерры. Далее рассматриваем $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ только лишь как отображение, переводящее распределение вероятностей системы из m видов также в распределение вероятностей. Поскольку $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$, построим турнир T , соответствующий матрице A .

Теорема 5. Если грань Γ_α симплекса S^{m-1} имеет внутреннюю (относительно грани) неподвижную точку, то подтурнир турнира T с вершинами из α является сильным.

Доказательство. Так как все грани S^{m-1} инвариантны относительно V , то можно считать, что $\Gamma_\alpha = S^{m-1}$, то есть $\alpha = I = \{1, \dots, m\}$. Допустим, что T — не сильный турнир. Тогда [1, 3] множество I можно разбить на два непустых класса так, что ребро, соединяющее две вершины из различных классов, всегда направлено из первого класса во второй.

Пусть $I_1 = \{1, 2, \dots, t\}$ и $I_2 = \{t+1, t+2, \dots, m\}$, тогда $a_{ij} < 0$ при всех $i \in I_1$ и $j \in I_2$.

Согласно (3) выпишем первые t координат:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \left(1 + \sum_{i=1}^t a_{1i} x_i + \sum_{i=t+1}^m a_{1i} x_i \right), \\ x'_2 = x_2 \left(1 + \sum_{i=1}^t a_{2i} x_i + \sum_{i=t+1}^m a_{2i} x_i \right), \\ \dots, \\ x'_t = x_t \left(1 + \sum_{i=1}^t a_{ti} x_i + \sum_{i=t+1}^m a_{ti} x_i \right). \end{cases} \quad (4)$$

Суммируя эти равенства, получим

$$\sum_{j=1}^t x'_j = \sum_{j=1}^t x_j + \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^t a_{ji} x_j x_i + \sum_{j=t+1}^m a_{ji} x_i x_j, \quad (5)$$

где второе слагаемое в правой части равно нулю, так как подматрица матрицы A , соответствующая I_1 , кососимметрична. Для всех внутренних точек $x_i > 0$, поэтому

$$\sum_{j=t+1}^m a_{ji} x_i x_j < 0.$$

Следовательно, из (5) получаем

$$\sum_{j=1}^t x'_j < \sum_{j=1}^t x_j \quad (6)$$

для всех внутренних точек симплекса S^{m-1} . Тогда $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ не может иметь внутренних неподвижных точек. Получаем противоречие. \square

Следствие 2. Если подтурнир T_α , соответствующий грани Γ_α , транзитивен, то V на Γ_α не имеет неподвижных точек кроме вершин этой грани.

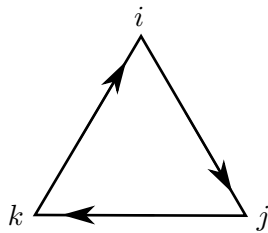
Теорема 6. Для существования неподвижной точки V с тремя положительными координатами, скажем x_i, x_j, x_k , необходимо и достаточно, чтобы подтурнир T с вершинами i, j и k был изоморфен циклической тройке.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 5. Для доказательства достаточности возьмём сужение V на грань Γ_α

$$x'_i = x_i(1 - a_{ij}x_j + a_{ik}x_k),$$

$$x'_j = x_j(1 + a_{ij}x_j - a_{jk}x_k),$$

$$x'_k = x_k(1 - a_{ik}x_i + a_{jk}x_j),$$



где $\alpha = \{i, j, k\}$, причем a_{ij}, a_{ik}, a_{jk} положительны.

Тогда отображение V на Γ_α имеет единственную внутреннюю неподвижную точку с координатами

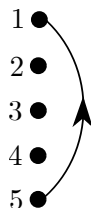
$$\left(\frac{a_{jk}}{a_{ij} + a_{ik} + a_{jk}}, \frac{a_{ik}}{a_{ij} + a_{ik} + a_{jk}}, \frac{a_{ij}}{a_{ij} + a_{ik} + a_{jk}} \right).$$

\square

Пусть $|Y| = 5$, тогда динамическая система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 + a_{15}x_5), \\ x_2' = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5), \\ x_3' = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5), \\ x_4' = x_4(1 + a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 - a_{45}x_5), \\ x_5' = x_5(1 - a_{15}x_1 + a_{25}x_2 + a_{35}x_3 + a_{45}x_4). \end{cases}$$

Соответствующий турнир имеет вид:



Здесь существует три сильных подтурнира с тремя вершинами — это $\overline{125}$, $\overline{135}$ и $\overline{145}$. Все эти подтурниры — сильные и смежные, так как пересечение любого из двух — одномерное ребро.

Рассмотрим для граней $\alpha = \{1, 2, 5\}$ и $\beta = \{1, 3, 5\}$, $\gamma = \alpha \cup \beta = \{1, 2, 3, 5\}$ сужение матрицы A :

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & a_{15} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{35} \\ -a_{15} & a_{25} & a_{35} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель матрицы, получим $|A_\gamma| = (a_{13}a_{25} - a_{12}a_{35} + a_{15}a_{23})^2$, выражения в скобке обозначим через $\Delta_1 = a_{13}a_{25} - a_{12}a_{35} + a_{15}a_{23}$.

Отображение, соответствующее вышеприведенной матрице A_γ имеет вид (сужение отображения на грань Γ_γ):

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + a_{15}x_5), \\ x_2' = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{25}x_5), \\ x_3' = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{35}x_5), \\ x_5' = x_5(1 - a_{15}x_1 + a_{25}x_2 + a_{35}x_3). \end{cases}$$

На этой грани Γ_γ существуют неподвижные точки с координатами

$$x_\alpha = \left(\frac{a_{25}}{a_{12} + a_{25} + a_{15}}; \frac{a_{15}}{a_{12} + a_{25} + a_{15}}; 0; \frac{a_{12}}{a_{12} + a_{25} + a_{15}} \right),$$

$$x_\beta = \left(\frac{a_{35}}{a_{13} + a_{35} + a_{15}}; 0; \frac{a_{15}}{a_{13} + a_{35} + a_{15}}; \frac{a_{13}}{a_{13} + a_{35} + a_{15}} \right).$$

Для того чтобы найти множества P и Q , находим $A_\gamma x_\alpha$ и $A_\gamma x_\beta$:

$$A_\gamma x_\alpha = \frac{1}{a_{12} + a_{25} + a_{15}} \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & a_{15} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{35} \\ -a_{15} & a_{25} & a_{35} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{25} \\ a_{15} \\ 0 \\ a_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12} + a_{15} + a_{25}} (0; 0; \Delta_1; 0),$$

$$A_\gamma x_\beta = \frac{1}{a_{13} + a_{15} + a_{35}} (0; -\Delta_1; 0; 0).$$

Здесь A_γ — матрица общего положения, так как $\Delta_1 \neq 0$.

Если $\Delta_1 > 0$ тогда $A_\gamma x_\alpha \geq 0$ и $A_\gamma x_\beta \leq 0$, значит неподвижные точки x_α и x_β составляют пару (P, Q) на грани Γ_γ . Это означает, что направление ставится от точки $P = x_\alpha$ к точке $Q = x_\beta$. Если же $\Delta_1 < 0$, тогда получаем обратное.

Теперь перейдем к другим смежным граням. Пусть $\alpha = \{1, 2, 5\}$ и $\beta = \{1, 4, 5\}$, тогда $\gamma = \alpha \cup \beta = \{1, 2, 4, 5\}$. Здесь сужение матрицы A на Γ_γ имеет вид:

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & 0 & -a_{24} & -a_{25} \\ a_{14} & a_{24} & 0 & -a_{45} \\ -a_{15} & a_{25} & a_{45} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим также $|A_\gamma| = (a_{14}a_{25} - a_{12}a_{45} + a_{15}a_{24})^2$ и $\Delta_2 = a_{14}a_{25} - a_{12}a_{45} + a_{15}a_{24}$.

Сужение отображения на этой грани $\Gamma_\gamma = \Gamma_{1245}$ имеет две неподвижные точки $x_\alpha = x_{125}$ и $x_\beta = x_{145}$.

Для каждой из этих точек определяем их характер, для этого находим

$$A_\gamma x_\alpha = \frac{1}{a_{12} + a_{15} + a_{25}} (0; 0; \Delta_2; 0),$$

$$A_\gamma x_\beta = \frac{1}{a_{14} + a_{15} + a_{45}} (0; -\Delta_2; 0; 0).$$

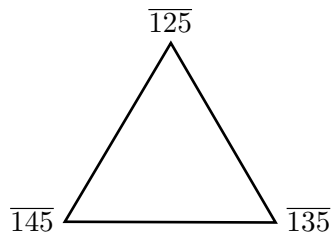
Если $\Delta_2 > 0$, тогда $P = x_\alpha$ и $Q = x_\beta$, и, наоборот, если $\Delta_2 < 0$, тогда $P = x_\beta$ и $Q = x_\alpha$. Перейдем к последнему, пусть $\alpha = \{1, 3, 5\}$, $\beta = \{1, 4, 5\}$, тогда $\gamma = \alpha \cup \beta = \{1, 3, 4, 5\}$. Сделав те же вычисления, получим

$$A_\gamma x_\alpha = \frac{1}{a_{13} + a_{15} + a_{35}} (0; 0; \Delta_3; 0),$$

$$A_\gamma x_\beta = \frac{1}{a_{14} + a_{15} + a_{45}} (0; -\Delta_3; 0; 0).$$

Здесь $\Delta_3 = a_{14}a_{35} - a_{13}a_{45} + a_{15}a_{34}$ — определитель сужения матрицы A_γ . Если $\Delta_3 > 0$, тогда $P = x_\alpha$, $Q = x_\beta$ и обратное, если $\Delta_3 < 0$, тогда $P = x_\beta$, $Q = x_\alpha$.

В итоге для полного исследования картины траекторий внутренних точек симплекса мы получили подтурнир, который назовем картой неподвижных точек. Здесь карта неподвижных точек имеет вид,



в котором направления на ребрах определяются знаками Δ_i , $i = 1, 2, 3$.

Здесь мы получим всего $2^3 = 8$ случаев карт неподвижных точек (рис. 3), среди которых есть изоморфные [6].

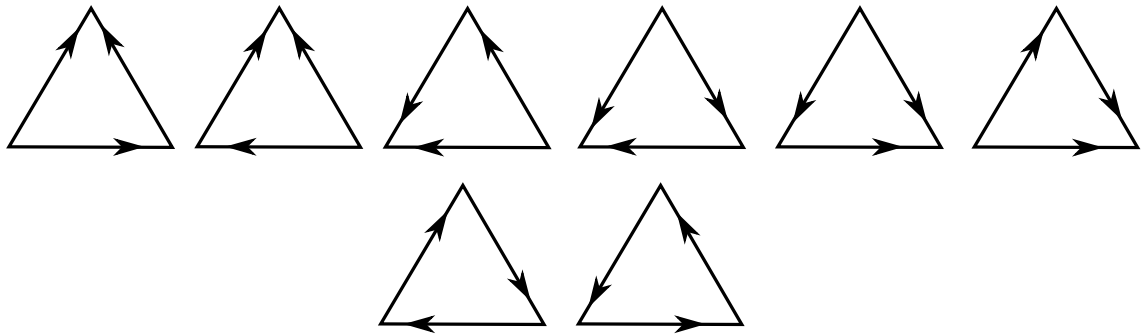
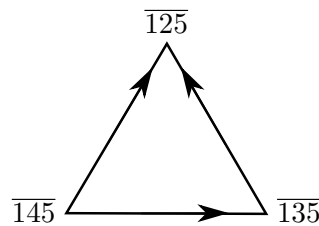


Рис. 3. Все виды карт при $m = 3$

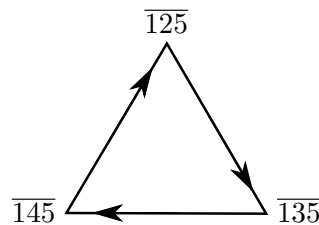
Fig. 3. All types of cards at $m = 3$

Из рисунка мы видим, что первые 6 случаев изоморфны; эти тройки называются транзитивными. Для этих шести случаев остановимся на следующем виде:



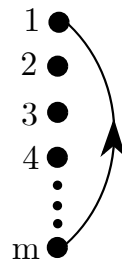
Лемма 1. Если Δ_i ($i = 1, 2, 3$) имеют разные знаки, тогда в карте неподвижных точек образуется транзитивная тройка, и симплекс S^4 не имеет внутренних неподвижных точек.

Перейдем к последним двум случаям из рис. 3. Эти два случая изоморфны, поэтому мы остановимся на любом из них, например,



Лемма 2. Если знаки всех Δ_i ($i = 1, 2, 3$) совпадают, тогда в карте образуется гамильтонов цикл (сильная тройка), и в симплексе S^4 существует внутренняя неподвижная точка.

Обобщим полученное в предыдущем разделе на $|Y| = m$. Соответствующий турнир, согласно [7], имеет вид



Далее, в кососимметрической матрице A общего положения выпишем только лишь положительные $a_{ij} (i \neq j)$, а знаки перед ними расставим в соответствии с турниром T_m .

Например, изучаемому турниру T_m соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1m-1} & a_{1m} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2m-1} & -a_{2m} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & -a_{3m-1} & -a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \dots & a_{m-1m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, отображение V , построенное по T_m , имеет m неподвижных точек с одной и $(m - 2)$ неподвижных точек с тремя ненулевыми координатами при любых a_{ij} . Существование неподвижных точек с 5, 7, 9 и т. д. ненулевыми координатами, принадлежащими S^{m-1} , зависит от некоторых неравенств от коэффициентов кососимметрической матрицы.

Для выяснения рассмотрим два сильных подтурнира T_m с тремя вершинами, например, $\alpha = \{1, 2, m\}$ и $\beta = \{1, 3, m\}$. Как отмечено выше, они смежные.

Пусть $\gamma = \alpha \cup \beta = \{1, 2, 3, m\}$, тогда сужение V_γ на Γ_γ имеет вид

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + a_{1m}x_m), \\ x'_2 = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{2m}x_m), \\ x'_3 = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{3m}x_m), \\ x'_m = x_m(1 - a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + a_{3m}x_3). \end{cases}$$

Тогда на Γ_γ имеем две неподвижные точки:

$$x_\alpha = \left(\frac{a_{2m}}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}}, \frac{a_{1m}}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}}, 0, \frac{a_{12}}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}} \right),$$

$$x_\beta = \left(\frac{a_{3m}}{a_{13} + a_{3m} + a_{1m}}, 0, \frac{a_{1m}}{a_{13} + a_{3m} + a_{1m}}, \frac{a_{13}}{a_{13} + a_{3m} + a_{1m}} \right)$$

с носителями α и β , соответственно.

Для $A_\gamma x_\alpha$ и $A_\gamma x_\beta$ имеем

$$A_\gamma x_\alpha = \frac{1}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}} \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & a_{1m} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{2m} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{3m} \\ -a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2m} \\ a_{1m} \\ 0 \\ a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{12} + a_{2m} + a_{1m}} (0, 0, a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m}, 0),$$

$$A_\gamma x_\beta = \frac{1}{a_{13} + a_{1m} + a_{3m}} (0, a_{12}a_{3m} - a_{23}a_{1m} - a_{2m}a_{13}, 0, 0).$$

Вычисляя $|A_\gamma|$, находим, что

$$|A_\gamma| = (a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m})^2. \quad (7)$$

Поскольку A — матрица общего положения, то

$$a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m} \neq 0.$$

Таким образом, если $a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m} > 0$, тогда $A_\gamma x_\alpha \geq 0$ и $A_\gamma x_\beta \leq 0$. Следовательно, x_α является P точкой, а x_β — Q точкой на грани Γ_γ .

Если $a_{13}a_{2m} + a_{23}a_{1m} - a_{12}a_{3m} < 0$, то x_α и x_β меняются местами. Сформулируем эти рассуждения в виде теоремы.

Теорема 7. Любые две циклические тройки в T_m смежны, причем из определяемых неподвижных точек одна — P точка, а другая — Q точка для грани, содержащей их.

Доказательство. Теорему можно доказать, основываясь на приведенных выше рассуждениях. \square

На основании теоремы 7 все циклические тройки T_m представим в виде точек и соединим \overline{im} с \overline{jm} стрелкой, идущей из P точки в Q точку. Таким образом, получим новый турнир из $m - 1$ точки, который обозначим через G_{m-1} и назовем картой неподвижных точек.

Как мы показали выше, карт неподвижных точек всего $2^3 = 8$ возможных случаев, среди которых мы рассмотрели два неизоморфных [3], причем стрелки расставляются в соответствии с теоремой 7.

Теорема 8. Если G_{m-1} — транзитивный турнир, то отображение V не имеет в симплексе S^{m-1} неподвижных точек с пятью и более ненулевыми координатами.

Доказательство. Если S^{m-1} имеет внутреннюю неподвижную точку ($(m - 1)$ — нечетно) отображения V , скажем, x , то непременно $Ax = 0$, то есть x одновременно является и P , и Q точкой. Пусть x — неподвижная точка с пятью ненулевыми координатами и принадлежит грани Γ_γ , где $|\gamma| = 5$. Ей соответствует сильный подтурнир T_γ (теорема 5). Сильный подтурнир T_m с пятью вершинами имеет только вершины $1, i, j, k, m$, то есть $\gamma = \{1, i, j, k, m\}$ где $1 < i, j, k < m$ и i, j, k — различны.

Следовательно, в нем имеется три подтурнира \overline{im} , \overline{jm} и \overline{km} . Так как G_{m-1} транзитивен, то именно один из них является P точкой для грани Γ_γ . Так как для каждой грани P точка единственна, поскольку A — матрица общего положения, то последнее противоречит тому, что неподвижная точка с пятью ненулевыми координатами — P точка для Γ_γ . \square

Теорема 9. Если в G_{m-1} существует циклическая тройка, то существует неподвижная точка с пятью ненулевыми координатами.

Доказательство. Пусть \overline{im} , \overline{jm} и \overline{km} образуют циклическую тройку в G_{m-1} и $\gamma = \{1, i, j, k, m\}$. Тогда неподвижные точки, определяемые \overline{im} , \overline{jm} и \overline{km} , не могут быть P точками для Γ_γ . Следовательно, грань Γ_γ обязана иметь внутреннюю неподвижную точку. \square

Следствие 3. Число неподвижных точек отображения V с пятью ненулевыми координатами равно числу циклических троек в карте G_{m-1} .

Заключение

Известно, что динамические системы берут свое начало в механике с работ Анри Пуанкаре, в которых утверждается, что некоторые системы после некоторого конечного времени вернуться в состояние, очень близкое к исходному [10]. В 1988 году А. Ляпунов разработал методы, позволяющие определить устойчивость обыкновенных дифференциальных уравнений. Во многих отраслях науки, например естественных и инженерных дисциплинах, правило эволюции динамических систем описывается либо дифференциальным, либо разностным уравнением.

В этих системах, учитывая расположение начальной точки, можно определить состояние в будущем — это и есть совокупность точек, известных как траектория или же орбита, поэтому нас и интересует нахождение равновесных состояний системы.

Квадратичные отображения симплекса можно применить для задач популяционной генетики, эпидемиологии, экологии, экономики. В работе исследовалось асимптотическое поведение траекторий квадратичных отображений Лотки–Вольтерры, действующих в $(m - 1)$ -мерном симплексе с однородными турнирами. Эти системы с однородными турнирами описывают процесс экологического круговорота, в частности, рассматриваемая модель позволяет более адекватно описать процесс круговорота биогенов [11]. Наряду с дискретными динамическими системами в работе рассматривались элементы теории графов, то есть эти системы связались с такими понятиями, как турниры. Введено понятие карты неподвижных точек. По состоянию характера карт неподвижных точек определены критерии существования таких неподвижных точек, с помощью которых описывается течение траекторий, позволяющих описать эволюцию биосферы [11].

Список литературы

1. Ганиходжаев Р. Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры // Математический сборник. 1992. Т. 183, № 8. С. 119–140.
2. Шахиди Ф. А. О бистохастических операторах, определенных в конечномерном симплексе // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 463–468.
3. Ганиходжаев Р. Н., Таджиева М. А., Эшмаматова Д. Б. Динамические свойства квадратичных гомеоморфизмов конечномерного симплекса // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». 2018. Т. 144. С. 104–108.
4. Eshmamatova D., Ganikhodzhaev R. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in a simplex S^{m-1} // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365, no. 1. P. 060009. DOI: 10.1063/5.0057303.
5. Harary F. Graph Theory. Boston: Addison-Wesley, 1969. 274 p.
6. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. Монография. М.: Мир, 1977. 324 с.
7. Moon J. W. Topics on Tournaments. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968. 112 p.
8. Ганиходжаев Р. Н. Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем // Математические заметки. 1994. Т. 56, № 5. С. 40–49.
9. Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б. Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий // Владикавказский математический журнал. 2006. Т. 8, № 2. С. 12–28.
10. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 745 с.
11. Небел Б. Наука об окружающей среде. Как устроен мир. В 2-х томах. М.: Мир, 1993.

References

1. Ganikhodzhaev RN. Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions, and tournaments. Sbornik: Mathematics. 1993;76(2):489–506. DOI: 10.1070/SM1993v076n02ABEH003423.
2. Shahidi FA. Doubly stochastic operators on a finite-dimensional simplex. Siberian Mathematical Journal. 2009;50(2):368–372. DOI: 10.1007/s11202-009-0042-3.
3. Ganikhodzhaev RN, Tadzhieva MA, Eshmamatova DB. Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex. Journal of Mathematical Sciences. 2020;245(3):398–402. DOI: 10.1007/s10958-020-04702-7.
4. Eshmamatova D, Ganikhodzhaev R. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in a simplex S^{m-1} . AIP Conference Proceedings. 2021;2365(1):060009. DOI: 10.1063/5.0057303.
5. Harary F. Graph Theory. Boston: Addison-Wesley; 1969. 274 p.
6. Harary F, Palmer EM. Graphical Enumeration. Amsterdam: Elsevier; 1973. 286 p.
7. Moon JW. Topics on Tournaments. New York: Holt, Rinehart and Winston; 1968. 112 p.

8. Ganikhodzhaev RN. Map of fixed points and Lyapunov functions for one class of discrete dynamical systems. *Mathematical Notes*. 1994;56(5):1125–1131. DOI: 10.1007/BF02274660.
9. Ganikhodzhaev RN, Eshmamatova DB. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories. *Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2006;8(2):12–28 (in Russian).
10. Poincaré H. *New Methods of Celestial Mechanics*. Berlin: Springer; 1993. 1077 p.
11. Nebel BJ. *Environmental Science: The Way the World Works*. Hoboken, New Jersey: Prentice Hall Professional; 1993. 630 p.



Эшматовна Дилфуза Бахрамовна — родилась в Самарканде (1974). Окончила с отличием механико-математический факультет Ташкентского государственного университета по направлению «Дифференциальные уравнения» (1996). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Математический анализ». С 2003 по 2020 год работала в Ташкентском институте инженеров железнодорожного транспорта старшим преподавателем, доцентом и заведующей кафедрой «Высшая математика». С 2020 года работает на кафедре «Высшая математика» Ташкентского государственного транспортного университета в должности заведующего. Научные интересы — динамические системы, теория графов, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика, эпидемиология и вопросы, касающиеся экологии. Опубликовала свыше 30 научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100167 Ташкент, Мирабадский район
Ташкентский государственный транспортный университет
E-mail: 24dil@mail.ru
ORCID: 0000-0002-1096-2751



Таджиева Мохбону Акром кизи — родилась в Ташкенте (1990). Окончила с отличием факультет математики Национального университета Узбекистана (НУУз) имени Мирзо Улугбека по направлению «Математический анализ» (2013). Защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Математический анализ» (2022, НУУз). С 2022 года работает на кафедре «Высшая математика» Ташкентского государственного транспортного университета в должности старшего преподавателя. Научные интересы — динамические системы, теория графов, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика, эпидемиология и вопросы, касающиеся экологии. Опубликовала свыше 10 научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100167 Ташкент, Мирабадский район
Ташкентский государственный транспортный университет
E-mail: mohbonut@mail.ru
ORCID: 0000-0001-9232-3365



Ганиходжаев Расул Набиевич — родился в Ташкенте (1945). Окончил факультет математики Ташкентского государственного университета по направлению «Функциональный анализ» (1971). Защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности «Математический анализ» (1997, ТашГУ). Профессор кафедры «Алгебра и функциональный анализ» Национального университета Узбекистана. Научные интересы — динамические системы, теория графов, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика, эпидемиология и вопросы, касающиеся экологии. Опубликовал свыше 50 научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100167 Ташкент, Алмазарский район
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
E-mail: rganikhodzhaev@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6551-5257