

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(4)

Научная статья  
УДК 519.6

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-456-479  
EDN: CUJNTJ

### Нелинейная модель смены поколений элиты

А. В. Колесников<sup>1</sup>, Г. Г. Малинецкий<sup>2</sup>, А. В. Подлазов<sup>2</sup>, С. Н. Сиренко<sup>3</sup>✉

<sup>1</sup>Институт философии НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

<sup>2</sup>Институт прикладной математики РАН им. М. В. Келдыша, Москва, Россия

<sup>3</sup>Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск, Республика Беларусь

E-mail: kollesnikov@philosophy.by, gmalin@keldysh.ru, tiger@keldysh.ru, ✉sirenka@bspu.by

Поступила в редакцию 27.12.2021, принята к публикации 13.05.2022,

опубликована 1.08.2022

**Аннотация.** Целью представленной работы являлось построение лаконичной математической модели конкурентной динамики альтернативных типов социальной активности. Модель была разработана в форме дискретного двумерного нелинейного отображения. Предложенное отображение является новым и ранее не исследовалось ни в области математической социальной динамики (социофизики), ни в разделе дискретных моделей нелинейной динамики. **Методы.** Используемый нами подход корреспондируется с представлениями теории о социальном времени, выдвинутой Ф. Броделем. Нелинейное двумерное отображение парадоксальным образом, учитывая общие социально-экономические представления о связи между поколениями, как оказалось, имеет гамильтонову структуру. Анализ показал, что и формально, и по качественному поведению оно близко к стандартной модели, описывающей ротатор под действием ударов. Установлено, что в зависимости не только от параметров задачи, но и от начальных условий в данном случае одновременно возможны и периодическая, и квазипериодическая, и хаотическая динамика. В рамках модели это означает большое разнообразие в отношениях между поколениями. Таким образом данные в системе не будут подвержены «забыванию». Продемонстрировано влияние на динамику модели «диссипативных добавок», описывающих деградацию элиты, стремление общества к «устранению лучших». Динамика системы и её зависимость от параметров становятся гораздо проще, тем не менее, цикличность и мультистабильность в ней не исчезают. В этом приближении история оказывается «локальной» — детали и особенность поведения общества будут «забыты» через несколько поколений. Исследование построенной модели открывает большие перспективы для анализа различных типов циклических процессов в математической истории и социальной динамике.

**Ключевые слова:** моделирование социальных процессов, математическая история, социальная динамика, двумерные отображения, гамильтонова динамика, конфликт поколений, динамический хаос, космический человек, чувствительность по отношению к параметрам и начальным данным, историческое время.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-511-00003), ГПНИ «Общество и гуманитарная безопасность белорусского государства», подпрограмма «Образование», тема НИР «Разработать стратегические направления и механизмы модернизации педагогического образования в целях устойчивого развития» (2021–2025 гг.), номер ГР 20211397.

**Для цитирования:** Колесников А. В., Малинецкий Г. Г., Подлазов А. В., Сиренко С. Н. Нелинейная модель смены поколений элиты // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 456–479. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-456-479. EDN: CUJNTJ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Nonlinear elite generation change model

*A. V. Kolesnikov*<sup>1</sup>, *G. G. Malinetskiy*<sup>2</sup>, *A. V. Podlazov*<sup>2</sup>, *S. N. Sirenko*<sup>3</sup>✉

<sup>1</sup>Institute of Philosophy of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

<sup>2</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Maksim Tank Belarusian State Pedagogical University, Minsk, Republic of Belarus

E-mail: kolesnikov@philosophy.by, gmalin@keldysh.ru, tiger@keldysh.ru, ✉sirenka@bspu.by

Received 27.12.2021, accepted 13.05.2022, published 1.08.2022

**Abstract.** The *purpose* of the presented article was to build a concise conceptual mathematical model of the competitive dynamics of alternative types of social activity. The model was developed in the form of a discrete two-dimensional non-linear mapping. The proposed mapping is new and has not been previously studied either in the field of mathematical social dynamics (sociophysics), or in the section of discrete models of nonlinear dynamics. The approach we used corresponds to the ideas of the theory of social time put forward by F. Braudel. Nonlinear two-dimensional mapping, in a paradoxical way, given the general socio-economic ideas about the relationship between generations, as it turned out, has a Hamiltonian structure. The analysis showed that both formally and in terms of qualitative behavior it is close to the standard model describing a rotator under the action of impacts. It was found that, depending not only on the parameters of the problem, but also on the initial conditions, in this case, periodic, quasiperiodic, and chaotic dynamics are simultaneously possible. Within the framework of the model, this means a great variety of intergenerational relationships. Thus, the data in the system will not be “forgotten”. The influence on the dynamics of the model of “dissipative additions” describing the degradation of the elite, the desire of society to “eliminate the best” is demonstrated. The dynamics of the system and its dependence on parameters become much simpler; nevertheless, cyclicity and multistability do not disappear in it. In this approximation, history turns out to be “local” — the details and peculiarities of society’s behavior will be “forgotten” after several generations. The study of the constructed model opens up great prospects for the analysis of various types of cyclical processes in mathematical history.

**Keywords:** modeling of social processes, mathematical social dynamics, two-dimensional maps, Hamiltonian dynamics, generational conflict, dynamic chaos, space man, sensitivity to parameters and initial data, historical time.

**Acknowledgements.** The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 20-511-00003), the State Scientific Research Program “Society and the Humanitarian security of the Belarusian state”, subprogram “Education”, research topic “Develop strategic directions and mechanisms for the modernization of teacher education for sustainable development” (2021–2025), No. SR 20211397.

**For citation:** Kolesnikov AV, Malinetskiy GG, Podlazov AV, Sirenko SN. Nonlinear elite generation change model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(4):456–479. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-456-479

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Трудные времена создают сильных людей.  
Сильные люди создают хорошие времена.  
Хорошие времена создают слабых людей.  
И слабые люди создают трудные времена.

*Г. М. Хонер. «Те, кто остаются»*

Динамическое поведение социальных систем формируется под влиянием конкурентных взаимодействий носителей различных собственных целей и ценностных ориентиров. При этом цели социальных групп могут быть противоположны, но межгрупповые отношения взаимозависимы. Возникает ситуация, когда реализация интересов одной группы социальных агентов создаёт условия для активизации их контрагентов, а те, в свою очередь, по мере реализации собственных целей вновь начинают нуждаться в активности агентов первого типа. Это приводит к возникновению циклов и более сложным типам динамического поведения. Цель настоящей работы состоит в построении по возможности максимально простой и лаконичной математической модели такого типа конкурентных взаимоотношений и последующего исследования её динамического поведения.

В своё время представитель школы «Анналов» Фернан Бродель выдвинул идею количественного описания исторических процессов. Он показал, что есть «медленные переменные», мало меняющиеся от эпохи к эпохе. Кроме того, он выделил три масштаба времени в истории.

Первый уровень — это географическое время, «долгое время», связанное с изменениями, тенденциями, повторениями и циклами в окружающей среде.

Второй уровень — долгосрочная социальная, культурная и экономическая история.

Третий уровень — это уровень событий, связанный с политикой, реформами, быстрыми изменениями. Именно на него люди обычно и обращают внимание [1].

Развитие нелинейной динамики и широкое использование компьютеров позволило сделать следующий шаг, связанный с математическим моделированием исторических событий. В 1990-х гг. была выдвинута исследовательская программа, связанная с построением *математической истории* [2]. В рамках этой программы предполагалось математическое описание разновременной социальной динамики исторических процессов на основе идей теории самоорганизации и выделения параметров порядка, отражающих наиболее важные причинно-следственные связи [2]. Реализация этой программы привела к построению математических моделей, многие из которых описывают колебательные, циклические процессы [3, 4].

В целом использование математических и компьютерных моделей как инструмента исследования и познания механизмов, формирующих динамику социума, представляется перспективным средством понимания философии социальных процессов, прогнозирования их течения и, самое главное, проектирования будущего прогрессивного общественного развития. Несмотря на определённое продвижение в сфере моделирования социальных процессов и динамики развития общества, происходящие в социальных системах внезапные кризисы и циклы, содержащие внутри себя периоды подъёма и спада, бурного развития и регресса трудно поддаются математическому описанию и тем более прогнозированию. Разработанная нами и представленная в статье модель социальной динамики является достаточно лаконичной, но при этом может быть использована для понимания и в некотором смысле объяснения происходящих в прошлом и настоящем событий социогенеза.

По-видимому, стремление выделить периодически повторяющиеся состояния исследуемых систем характерно для многих развивающихся дисциплин. Например, в рамках исследований рыночной экономики выделяют циклы Китчина (3–4 года), Жюгляра (7–11 лет), Кондратьева (40–50 лет). Наличие циклической повторяемости позволяет делать прогнозы. Войны, революции, кризисы в соответствии с представлениями ряда исследователей определяются кондратьевскими циклами. Например, прогноз о мировом экономическом кризисе 2008–2009 гг. был представлен за пять лет до его наступления [5].

Другой пример ритмов и циклов даёт анализ активности Солнца, в котором выделяют цикл Швабе (11 лет), цикл Хейла (22 года), цикл Гляйсберга (70–100 лет). Первоначально идея влияния циклов солнечной активности на исторические события высказывалась А. Л. Чижевским. Тем не менее циклическое поведение во многих случаях является только удачным приближением. Более подробный анализ позволяет выделить гораздо более сложную хаотическую динамику [6].

Возникновение колебательных процессов в сложных системах является одной из важных форм самоорганизации. В таких системах могут сформироваться параметры порядка, определяющие их поведение, и объекты, динамика которых может определяться достаточно простыми дифференциальными уравнениями.

Предлагаемая нами модель допускает широкую интерпретацию в рамках рассмотрения конкурентных взаимодействий альтернатив в социальной динамике. В данной статье мы будем рассматривать социально-культурную и технологическую активность разных поколений. В настоящее время в социологии популярна теория, разработанная У. Штраусом и Н. Хоувом, описывающая повторяющиеся в ряду поколений модели поведения. Эта теория, ставшая известной после 1991 г., рассматривает поколения в англо-американской истории с 1433 г. по настоящее время [7, 8].

Ее авторы определяют поколение как совокупность всех людей, рожденных в промежуток времени, составляющий примерно 20 лет, что соответствует одной фазе жизни — детство, молодость, средний возраст, старость. Именно личности одного типа наиболее популярны в разные эпохи (поколенческие архетипы). Это Пророк, Странник, Герой, Художник.

Конструктивность этого подхода проявляется в том, что он стал популярен не только среди историков и социологов, но и среди маркетологов, специалистов по рекламе, кадровиков, «хедхантеров». Обычно они рассматривают поколения нашей страны, выделяя величайшее поколение (1903–1923), молчаливое поколение (1924–1943), беби-бумеры (1944–1963), поколение X (1964–1984), поколение Y (1985–2003), поколение Z (2004–2024).

Обратим внимание и на простую социологическую закономерность — если хочешь знать настроение и перспективы общества, загляни на 20 лет назад и увидишь примерно то же. Народная мудрость говорит, что внуки гораздо лучше понимают и больше берут от бабушек и дедушек, чем от родителей.

Упомянутые теории поколений и слишком сложны, и слишком просты. Сложны, потому что приходится учитывать богатый, противоречивый исторический контекст, во многом зависящий от взглядов исследователя. Кроме того, сущностям, рассматриваемым в теории, трудно сопоставить количественные характеристики. При этом достаточно очевидно, что динамика общества очень существенно зависит от начальных данных — от состояния и ресурсов, которыми оно располагает.

Некоторые фундаментальные основания механизма эволюции этносов раскрывает теория этногенеза Л. Н. Гумилева [9]. В рамках этой теории принципиальную роль играет доля пассионариев в обществе. Таким термином он называет активных, энергичных людей, которые готовы многое отдать вплоть до своей жизни за воплощение своих смыслов, ценностей, идеалов, проектов. Наряду с ними в обществе есть субпассионарии, для которых личное гораздо важнее общественного и которые с удовольствием ведут паразитический образ жизни, если для этого есть возможность. Среднюю позицию занимают люди, гармонично сочетающие личные и общественные интересы (гармоники).

Многочисленные исторические траектории этносов показывают традиционную судьбу этих социальных структур, которые развиваются в течение 1000–1200 лет. Пассионарии, считающие, что мир плох и его следует изменить, дают начало новому этносу. Доля этих людей растет, их императивы определяют состояние общества. На этом этапе открываются неожиданные горизонты, создаются и активно используются новые технологии. Чтобы удержать завоеванное и эффективно управлять им, становятся нужны гармонично развитые люди. После надлома бал начинают править субпассионарии, этнос идет к закату [9]. Можно сказать, что описанная Л. Н. Гумилевым динамика этногенеза имеет дело с одной ведущей, медленной переменной, которую он назвал пассионарным напряжением общества. Примерно такую же картину дает теория цивилизаций Арнольда Тойнби.

Однако естественно предположить, что на быстрых временах 20–100 лет мы тоже будем видеть колебания доли пассионариев в обществе. Наличие этих быстрых колебаний согласуется с теорией Н. Д. Кондратьева. На разных фазах экономической волны, занимающей 40–50 лет, востребованы оказываются люди с разными социально-психологическими характеристиками. Это подтверждают и наблюдения классика экономической мысли Й. Шумпетера, видевшего в инновациях важнейший фактор производства [10]. Он выяснил, что в развитии, в продвижении новых технологий, в смене существующей системы заинтересованы не более 10% предпринимателей. Именно их стратегия близка к пассионарному образу действий. В то же время 90% готовы вкладывать усилия в обеспечение стабильности, сохранившихся взаимосвязей, отказываясь от нового. Их образ действий естественно сопоставить с тем, который характерен для гармоников и субпассионариев. И эти доли существенно меняются в зависимости от фазы развития экономики.

Следует обратить внимание на принципиальное отличие рассматриваемого подхода от моделей социальной динамики и математической истории, описанных ранее [3, 4]. В этих моделях

важнейшими параметрами являются экономические и демографические, а также объем ресурса, потребляемого правящим слоем. В ряде случаев этим модели позволяют описать неустойчивости, имевшие место в исторической динамике. Как правило они относятся к «медленным переменным». В нашем случае речь идет, скорее, о «быстрых переменных» и о различии вклада в общественное развитие различных поколений, по существу о социальной философии.

## 1. Построение модели

Понять — значит упростить.

*Стругацкие*, «Волны гасят ветер» (1984)

Следуя работам [11–13], а также следуя духу философии русского космизма упростим ситуацию. Пассионариев, создающих новые возможности, открывающих и осваивающих новое, предлагающих оригинальные жизнеспасающие технологии, назовем *космическими людьми*. Именно благодаря их деятельности человечество расширяло свой ареал обитания и стало технологической цивилизацией, что принципиально выделило наш вид в ходе эволюции. Ему можно противопоставить *молекулярного человека*, стремящегося использовать уже имеющиеся возможности и не желающего выходить за их рамки. По сути, мы упрощаем гумилевскую схему, не рассматривая «гармоников» и выделяя только два типа людей в обществе.

Введем понятие совокупного ресурса, включающего материальные и нематериальные ресурсы, произведенные социальной системой,  $R_n$ , который отражает изменение того, что производит и потребляет социальная система за время смены поколений (примерно 20 лет) в момент времени  $n$ . Под  $n$  будем понимать «номер» поколения. При этом речь идет не только об экономике и материальных ресурсах, но также о промышленных и гуманитарных технологиях.

Этот момент очень важен. Мы будем иметь дело не с непрерывным временем  $0 \leq t < \infty$  и дифференциальными уравнениями, а с дискретным временем  $n = 1, 2, 3, \dots$  и моделями вида

$$\vec{z}_{n+1} = \vec{G}(\vec{z}_n, \vec{\lambda}).$$

Будем считать, что функция  $\vec{G}$  непрерывна и однозначна. Это позволяет говорить о непрерывной зависимости от начальных данных, существовании и единственности, характерных для дифференциальных уравнений. У перехода от непрерывного к дискретному времени есть две причины. Нас будут интересовать качественные особенности исторической динамики, а не детальное описание того или иного поколения. Кроме того, дискретное отображение можно рассматривать как систему, описывающую динамику на сечении Пуанкаре. Это позволяет избавиться от ошибок, вносимых при численном интегрировании дифференциальных уравнений, которые могли бы описывать ту же самую ситуацию. С другой стороны, это упрощает картину — предельному циклу дифференциального уравнения соответствует несколько точек в отображении, квазипериодическому движению (инвариантному тору) — линия и т. д.

Заметим, что величины такого сорта традиционно вводятся в исторической и мировой динамике [14]. В самом деле, в модели Форрестера рассматриваются такие величины как мировые ресурсы, глобальный продукт, уровень загрязнения, качество жизни. В исторической динамике во многих моделях фигурирует доля продукта, присваиваемого элитой, и такие величины как пассионарность или асабия.

Пусть доля пассионарного («космического») населения в популяции в момент времени  $n$  составляет  $q_n$ . Это позволяет выписать простое рекуррентное соотношение

$$R_{n+1} = k_l q_n R_n + k_{ml} (1 - q_n) R_n, \quad R_0 = 1, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad (1)$$

где  $k_l > 1$ ,  $k_{ml} < 1$  — коэффициенты воспроизводства совокупного ресурса представителями разных частей общества. Совокупный ресурс в момент времени  $n + 1$  (или в следующем цикле воспроизводства) складывается из ресурса, воспроизведённого пассионариями и молекулярными потребителями. Мы рассматриваем простейшее линейное соотношение между частями ресурса, производимыми различными частями общества. По своей природе пассионарный социотип ориентирован на приращение совокупного ресурса системы. Поэтому коэффициент воспроизводства  $k_l$  больше единицы. Если  $k_l = k_{ml}$ , то мы имеем сходящуюся геометрическую прогрессию со знаменателем  $k_{ml}$ , так что  $R_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Общество погибает.

Пассионарии, как показывают историки, составляют большую нагрузку для социума, — они не дают обществу жить спокойно, предлагая большие проекты, завоевания или масштабные реформы. Крестовые походы, освоение Америки дают наглядные примеры «отправки» большого количества пассионариев на дальние рубежи.

При падении обеспеченности общества потребность в пассионариях растёт, в «сытые» периоды она падает. Это позволяет дополнить уравнение (1) соотношением для динамики доли пассионариев и получить систему (2)

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= k_l q_n R_n + k_{ml} (1 - q_n) R_n, \quad R_0 = 1, \quad 0 \leq q \leq 1, \\ q_{n+1} &= q_n^{R_{n+1}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Свойства степенной кривой на участке  $[0; 1]$  (а именно на этом участке имеет смысл доля  $q$ ) таковы, что при высоких значениях показателя степени  $R$  значения  $q$  будут приближаться к нулю. При низких значениях  $R$ , значения  $q$  будут близки к единице. Это вполне согласуется с высказыванием шейха Рашида ибн Саид Аль Мактума: «Мой дед ездил на верблюде, мой отец ездил на верблюде, я на Мерседесе, сын на Ленд Ровере и мой внук водит Ленд Ровер, но правнук будет ездить на верблюде», который метафорично описывает циклические процессы в обществе.

Принципиальным является то, что в уравнении  $q_{n+1} = q_n^{R_{n+1}}$  системы (2) есть опережение. В качестве показателя степени используется  $R_{n+1}$ , а не  $R_n$ . Это отражает тот факт, что «социальный заказ» на долю пассионариев формируется в конце текущего цикла воспроизводства, исходя из того объема ресурса, который был произведен, когда доля пассионариев составляла  $q_n$ . Похожая логика применяется при моделировании инновационного развития экономики. Оказывается, что ключевые инновации данного технологического цикла были разработаны в ходе развития предыдущего, однако в нем еще не были востребованы. Иными словами, исследователи и инженеры предыдущего цикла опередили свое время, что будет использоваться лишь через десятилетия.

Кроме того, если во втором уравнении системы (2) исключить опережение, модель демонстрирует тривиальную динамику с  $q_n$ ,  $R_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Разработанная нами математическая модель социальной конкуренции представляет собой двумерное дискретное отображение, содержащее нелинейность. Отображение (2) не рассматривалось ранее в разделе нелинейной динамики, изучающем дискретные модели. Оно исследуется впервые.

Мы не рассматриваем управления в нашей модели. Тем не менее, вывод из соотношения (2) достаточно очевиден. Для общества очень существенно планирование и прогноз на время цикла поколения (20 лет). Важно представлять, сколько «пассионариев» понадобится для предстоящих перемен [13]. Исходя из этого, принципиальное значение имеет опережающее образование — постановка перед школьниками и студентами задач не сегодняшнего, а завтрашнего дня [15]. Очень полезно рассказывать им о том, что им предстоит освоить в будущем, и формулировать проблемы, которые сегодня решает страна или человечество. Исследования психологов показывают, что очень полезно задавать вопросы тем, кто учится, даже если мы не даем на них ответов.

## 2. Исследование модели

Мой дед ездил на верблюде, мой отец ездил на верблюде, я на Мерседесе, сын на Ленд Ровере, и мой внук водит Ленд Ровер, но правнук будет ездить на верблюде.

*Рашид ибн Саид Аль Мактуси*

Перепишем отображение (2) в виде

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n(aq_n + b), \\ q_{n+1} &= q_n^{R_{n+1}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a = k_l - k_{ml} > 0$  и  $b = k_{ml}$ .

Введем новые переменные

$$x_n = \ln R_n, \quad y_n = \ln(-\ln q_n). \quad (4)$$

В этих переменных отображение запишется следующим образом

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + f(y_n), \\ y_{n+1} &= x_{n+1} + y_n, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $f(y) = \ln(ae^{-e^y} + b)$ . Вид функции  $f$  для нескольких значений параметров представлен на рис. 1. Видно, что эти графики функций соединяют два участка, близкие к постоянным  $f(y) \rightarrow \ln b$  при  $y \rightarrow \infty$  и  $f(y) \rightarrow \ln(a+b)$  при  $y \rightarrow -\infty$ .

Обратим внимание на частный случай при  $y \rightarrow \infty$ ,  $f(y) \rightarrow \text{const}$ . Видим, что если  $f(y) = c$ , то  $\{x_n\}$  образуют арифметическую прогрессию  $x_n = x_0 + cn$ , а  $y_n = y_0 + nx_0 + cn(n+1)/2 \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

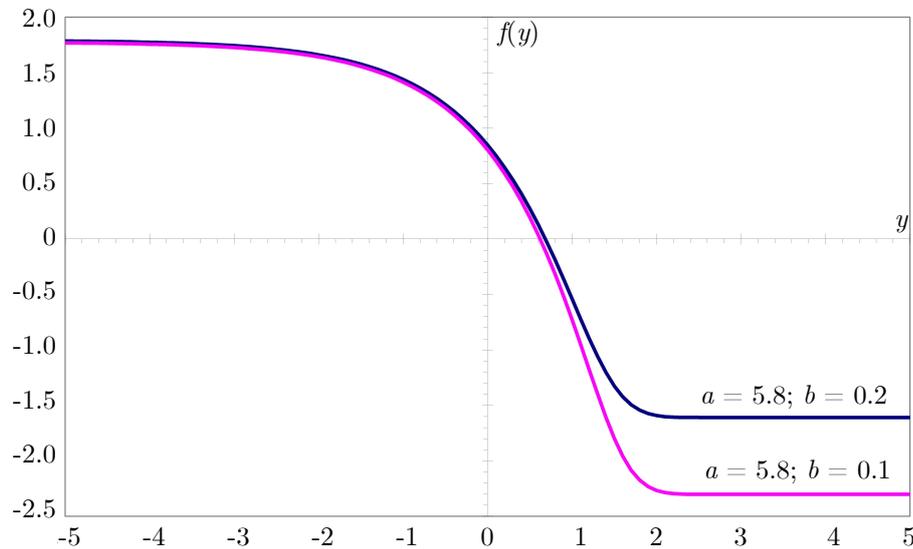


Рис. 1. Вид функции отображения. Функция  $f(y)$  является монотонно убывающей между двумя асимптотическими пределами

Fig. 1. View of the mapping function. The function  $f(y)$  is monotonically decreasing between two asymptotic limits

Из второго равенства в (5) следует

$$y_n = y_0 + S_n, \quad \text{где } S_n = \sum_{k=1}^n x_k. \quad (6)$$

Следовательно

$$x_{n+1} = x_n + f(y_0 + S_n). \quad (7)$$

Это равенство очень интересно — оно показывает, что логарифм ресурса в данный момент определяется функцией от суммы логарифмов ресурса взятых с одинаковым весом. Оказывается, что всё существенно, что система ничего не «забывает».

Заметим, что если всё общество пассионарно ( $q_n = 1$ ), то последовательность  $\{R_n\}$  определяет геометрическую прогрессию со знаменателем  $a + b$ . Ресурс, получаемый обществом, со временем неограниченно нарастает.

Очень интересным является то, что отображение (7) очень близко к тому, которое является классическим в нелинейной динамике. В этой области рассматривают стандартные отображения, описывающие ротатор под действием периодических ударов, с гамильтонианом в переменных действие – угол

$$H = \frac{1}{2}I^2 - K \cos \Theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t/T - n).$$

Эта модель приводит к отображению

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + K \sin x_n \pmod{2\pi}, \\ x_{n+1} &= x_n + p_{n+1} \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Его также называют стандартным отображением или отображением Чирикова–Тейлора. Это отображение возникает в теории плазмы. Оно широко используется при анализе хаоса в гамильтоновых системах. В нем есть траектории, описывающие хаотическую динамику, принадлежащую так называемому *стохастическому морю*. Они соседствуют с квазипериодическими траекториями на так называемых *островках* [16].

В классе периодических с периодом  $2\pi$  функций мы имеем отображение

$$p_{n+1} = p_n + K \sin \left( x_0 + \sum_{k=1}^n p_k \right). \quad (8)$$

Как видим, мы имеем одинаковую функциональную зависимость уравнений (7) и (8). Более того, если мы рассмотрим уравнение для нелинейного осциллятора, решаемое по полунеевной схеме Эйлера, то мы получим аналог соотношения (7).

Несмотря на сложную динамику гамильтоновы системы с возмущением детально рассматривались. В самом деле, движение планет Солнечной системы можно рассматривать как квазипериодическое по  $2p$ -мерному тору в пространстве  $(\Theta_1, \dot{\Theta}_1, \dots, \Theta_p, \dot{\Theta}_p)$ , где  $\Theta_i$  характеризует угловую координату  $i$ -й планеты,  $p$  — число планет. Возникает вопрос, волновавший ещё Ньютона, — насколько устойчива Солнечная система, сохранится ли квазипериодическое решение данной гамильтоновой системы при малых возмущениях. После трех веков усилий выдающихся математиков в теории Колмогорова–Арнольда–Мозера было установлено, что при достаточно малых возмущениях в окрестности данного инвариантного (относительно рассматриваемой динамической системы) тора (квазипериодического движения) существует близкий к нему инвариантный тор [19]. Следует отметить, что при отсутствии возмущения в классической задаче есть интегрируемый предел. В нашей задаче его нет. Тем не менее аналогия представляется достаточно

очевидной — мы так же имеем набор стохастических слоев и упорядоченных островков в фазовом пространстве.

Эти результаты получены с помощью теории возмущений, однако возможности этого подхода достаточно ограничены — во многих интересных случаях возмущения не являются малыми: «Такую сложность, равно как разнообразие видов траекторий, нельзя получить любым известным методом теории возмущений. Узкие зоны с хаотическими траекториями называются стохастическими слоями. Внутри этих стохастических слоев есть островки с вложенными кривыми, субостровки и ещё меньшие стохастические слои» [18, с. 28]. Поэтому основным инструментом анализа таких систем остается компьютерный эксперимент.

В силу сходства отображений (7) и (8) и для изучаемой модели, и для рассматриваемой системы можно ожидать наличие достаточно сложной динамики. Поэтому стоит сформулировать рассматриваемые вопросы.

Описывает ли модель (3) смену поколений и циклы воспроизводства совокупного ресурса? Действительно ли мы имеем простейшую циклическую динамику с небольшой периодичностью? Всегда ли мы имеем дело с периодическим процессом либо возможна хаотическая динамика? Всегда ли модель описывает ограниченные траектории? Как ведут себя данные процессы при наличии диссипативных эффектов?

### 3. Диссипативная версия модели

Отсутствие лучших (по крайней мере их дефицит) имело глубокое отрицательное влияние на отечественную историю, окончательно воспрепятствовав нашему превращению в более или менее нормальную страну.

*Х. Ортего-и-Гассет*

В основе теории самоорганизации лежит анализ диссипативных процессов, которые позволяют рассматривать асимптотику и набор аттракторов. Детали начальных данных при этом «забываются». С этой точки зрения, учет диссипативных процессов не усложняет, а упрощает изучаемое явление. Рассмотрим, что в нашем случае дал бы учет процессов диссипации, учитывающих, что зачастую общество стремится уменьшить число пассионарных «космических людей». Это согласуется с описанием ряда эпох историками. Учет этого дает вместо (3) двумерное отображение

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n(aq_n + b), \\ q_{n+1} &= q_n^{R_{n+1}}(1 - \alpha). \end{aligned} \tag{9}$$

Величина  $\alpha \ll 1$  характеризует долю «космических людей», которую общество «отсеивает» в следующем поколении. Характерный вид фазовой плоскости представлен на рис. 2. Видно, что здесь имеют место циклы с различными периодами.

Мы видим две принципиальные черты.

Первая — *мультистабильность*. В зависимости от начальных данных  $(x_0, y_0)$  установившиеся при  $n \rightarrow \infty$  режимы принципиально меняются.

В данной области параметров есть большая область, в которой  $R_n \rightarrow R^*$ ,  $q_n \rightarrow q^*$  при  $n \rightarrow \infty$ . Другими словами, возникает стационарное состояние, в котором не меняется ни количество создаваемого продукта, ни доля пассионариев в обществе. Это схоже с представлением о стабильном «внутреннем государстве», выдвигаемом рядом социологов и политологов. По их представлениям именно это государство и определяет ключевые решения, принимаемые в обществе.

Однако вдали от этого состояния мы наблюдали циклы длиной  $l$ :  $(R_{n+l}, q_{n+l}) \rightarrow (R_l^*, q_l^*)$ . Другими словами, система возвращается в исходное состояние через  $l$  поколений. При этом само значение  $l$  при разных значениях  $a$  и  $b$  может быть различным. Это циклическая динамика — именно та закономерность, для объяснения которой и предлагалась модель.

На рис. 2 элементы каждого цикла соединены прямыми, чтобы их можно было отличить друг от друга. Видно, что здесь есть и неподвижная точка, и цикл-5, и цикл-8, и цикл-11. Это показывает, что в одном и том же обществе могут существовать «поколенческие циклы» разной длины. Появляются возможности изменить ритм воспроизводства элиты, а с ним и состояние общества на «средних» (в терминологии Броделя) временах. Значительный кризис, связанный с отстранением или репрессиями в отношении части элиты, или существенное ухудшение материального положения могут изменить историческую траекторию («...пришли не те люди»).

Кроме того, следует отметить, что наивный подход к исторической динамике (например, «омолодить элиту»), стремление сделать «как лучше» без понимания областей притяжения разных аттракторов может не улучшить, а ухудшить положение дел. Дело в том, что области притяжения различных циклов оказываются сложным образом переплетены, поскольку мы имеем дело не с дифференциальными уравнениями, а с отображением, способным совершать «прыжки» по фазовой плоскости.

Поясним сказанное. В силу непрерывности отображения отрезок переходит в отрезок. Однако множество точек, сходящихся к данному аттрактору, может иметь сложную структуру. Классический пример — отображение  $x_{n+1} = 1 - 2|x_n|$ , в котором каждое рациональное  $x_0$  приводит к циклу, каждое иррациональное — к хаотической траектории. А в отображении  $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$  около каждого «хаоса» есть устойчивый цикл. В данном случае мы обнаружили чувствительность по отношению к параметрам — малые изменения начальных данных приводили к выходу на циклы разных периодов. К сожалению, просто отобразить эту удивительную динамику в черно-белом варианте не представляется возможным. Поэтому исследование вопроса о детальном устройстве областей притяжения циклов в данной работе не проводится.

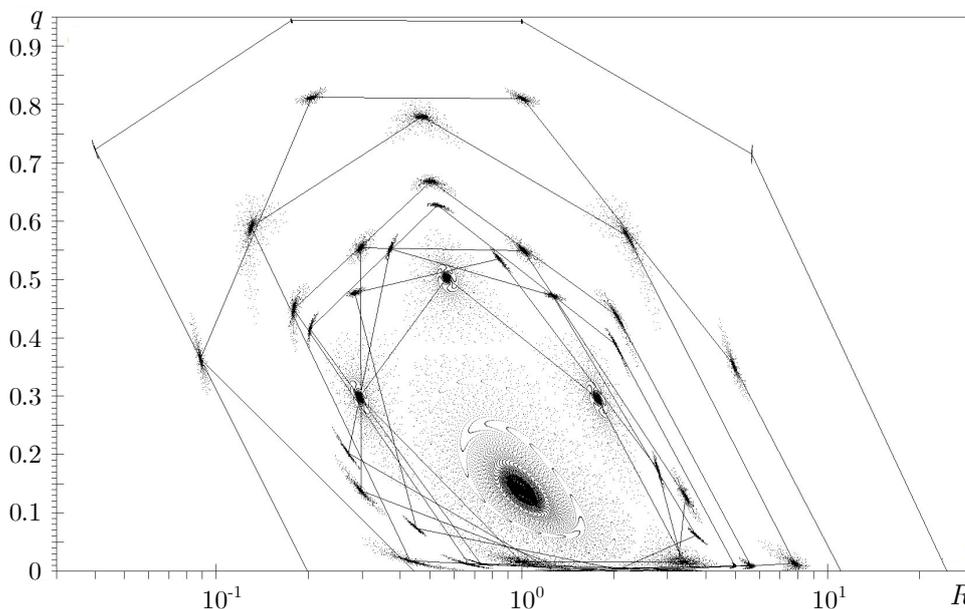


Рис. 2. Циклы диссипативной системы (9) в координатах  $(R, q)$  при  $a = 5.8$ ,  $b = 0.2$  и  $\alpha = 10^{-3}$ . Некоторое количество точек, попадающих в область притяжения каждого цикла, показано вблизи каждой его точки. При различных начальных данных происходит переход на разные циклы, что позволяет говорить о мультистабильности в системе

Fig. 2. Cycles of a dissipative system and their mapping areas

#### 4. Детальное исследование модели

Общество не консервативно, когда оно не видит, что сохранять. Дайте ему что-то положительное и увидите, что оно будет консервативно.

*Ф. М. Достоевский*

Исследуемая динамика оказывается достаточно сложной, поэтому естественно обратиться к простейшим математическим моделям, демонстрирующим схожую динамику. По сути, это является главным способом понять исследуемое поведение.

Результаты расчетов дают сложную картину, повторяющую себя на все меньших масштабах. Поэтому стоит обратить внимание на две простые модели, дающие понимание и логику изучения построенной модели. Сложная динамика обеспечивается взаимодействием двух достаточно простых эффектов.

Первый связан с пересечением сепаратрис и стохастическим слоем. Рассмотрим простейший физический маятник с малым периодическим по времени возмущением. Его фазовое пространство  $(\varphi, \dot{\varphi})$ . Особые точки  $(0,0)$ ,  $(0,\pi)$ ,  $(0,-\pi)$ . Если отождествить точки  $\varphi$  и  $\varphi + 2\pi$ , то фазовое пространство будет цилиндром  $(-\pi \leq \varphi \leq \pi, -\infty \leq \dot{\varphi} \leq \infty)$ . Когда энергия  $E = (1/2)\dot{\varphi}^2 - \omega_0^2 \cos \varphi$  мала, то система совершает малые колебания. Когда она очень велика, то маятник «прокручивается», вращаясь в одну или другую сторону в зависимости от направления начальной скорости. Вблизи начала координат угол  $\varphi$  возвращается за период в исходную точку. Когда энергия велика, то  $\varphi$  за период увеличивается (или уменьшается) на  $2\pi$ . Непрерывным переход от первого типа поведения ко второму быть не может. Переход этот связан с сепаратрисой, ведущей при некотором значении энергии  $E_{\text{crit}}$  от одного седла  $(-\pi, 0)$  к другому  $(\pi, 0)$ . Движение по этой траектории (сепаратрисе) занимает бесконечно долгое время. Как бы ни были малы возмущения за это время, они могут очень существенно воздействовать на систему. Роль этих возмущений состоит в том, чтобы часть «колебательных» траекторий (в которых  $\varphi$  за период не меняется) сделать «пролетными» (в которых  $\varphi$  за период меняется на  $2\pi$  или на  $-2\pi$ ). И, напротив, небольшая часть «пролетных» траекторий может стать «колебательными». Чем меньше величина возмущения  $\varepsilon$ , тем уже слой в фазовом пространстве, в котором это происходит.

Например, такая динамика наблюдается в системе с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega_0^2 \cos \varphi + \varepsilon \omega_0^2 (\omega t).$$

Сечение Пуанкаре можно брать, рассматривая траекторию за период  $= 2\pi/\nu$ . Это возбуждение, зависящее и от времени, и от угла  $\varphi$  и создает неопределенность. Известный физик Д. С. Чернавский сравнивал такие системы с «китайским бильярдом», в котором, как при игре в рулетку, малые изменения начальной скорости шарика могут изменить лунку, в которую он попадет [20].

Второй эффект связан с огромным множеством «островков» и сложной зависимостью от параметров задачи, при которой малое изменение параметров может качественно изменить наблюдаемую картину. Вместе с тем, в основе этого лежит реализация множества резонансов и хорошо известное в теории колебаний явление — захват частоты. Это явление возникает при автоколебательной системе с периодическим внешним сигналом с заданными частотой и амплитудой. Простейшей системой, иллюстрирующей происходящее, является отображение окружности

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \alpha + \varepsilon \sin(2\pi\varphi_n).$$

При  $\varepsilon = 0$  это отображение является поворотом угла  $\alpha$ . Для этого отображения можно рассматривать число вращения  $\rho(\alpha, \varepsilon)$ , показывающее, на какую величину в среднем за итерацию

меняется угол  $\varphi$ . Множество точек, в которых эта функция принимает рациональные значения  $\rho(\alpha, \varepsilon) = p/q$ , называют языками Арнольда.

При  $\varepsilon = 0$  мы имеем периодические орбиты, начинающиеся в рациональных точках  $\varphi_0 = p/q$  и множество квазипериодических орбит, начинающихся при других начальных данных.

При  $\varepsilon > 0$  около каждого значения  $p/q$  начинает расти «язык», который тем шире, чем больше  $\varepsilon$ . При этом внутри языка мы имеем вращение не с частотами  $\alpha$  (которое было при  $\varepsilon = 0$ ), а с частотой  $p/q$ , которая «захватывает» частоты в своей скорости.

При этом структура пространства параметров оказывается очень сложной.

Если  $\alpha$  — «хорошее» иррациональное число

$$\left| \alpha - \frac{m}{s} \right| > \frac{k(t)}{s^{2.5}}, \quad k(t) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

то инвариантный тор устойчив при достаточно малом  $\varepsilon$ .

Иначе частота оказывается «захвачена». Интервал вблизи  $\alpha$ , где это происходит, оценивают в  $k(\varepsilon)/s^{2.5}$ . Общая длина этих интервалов

$$L < \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k(\varepsilon)}{s^{2.5}} = k(\varepsilon) \sum_{s=1}^{\infty} s^{-1.5}.$$

При этом число вращения как функция параметра  $\alpha$  является своеобразной канторовой лестницей. В отличие от обычной лестницы Кантора каждая «ступенька» соответствует своему  $p/q$  (где и захватывается частота), но между ними есть интервал, соответствующий иррациональным  $p/q$  и инвариантным торами. При этом мера Лебега и тех, и других положительна. Другими словами, «бросив наугад» начальные данные  $\varphi_0$  мы с ненулевой вероятностью попадем в цикл и с ненулевой — в хаос [21, 22].

Линеаризуем отображение (5) вблизи произвольной точки  $(x, y)$

$$\begin{aligned} \Delta x_{n+1} &= \Delta x_n + p \Delta y_n, \\ \Delta y_{n+1} &= \Delta x_n + (1 + p) \Delta y_n, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$p = f'(y) = -\frac{e^y}{1 + \frac{b}{a} e^{e^y}} < 0. \tag{11}$$

Собственные числа матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & 1 + p \end{vmatrix} \tag{12}$$

находятся как корни квадратного уравнения  $\lambda^2 - (p+2)\lambda + 1 = 0$ . Его дискриминант  $D = p^2 + 4p < 0$  при  $-4 < p < 0$ . При этом корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  получаются комплексно-сопряженными, а поскольку по теореме Виета их произведение  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , то  $|\lambda_{1,2}| = 1$ , то есть отображение лишь вращает точки вокруг произвольно выбранной точки разложения, не приближая их к ней и не удаляя от нее. Иначе говоря, система является консервативной. Ни действительная  $p/2 + 1$ , ни мнимая  $\pm \sqrt{-(p/2)^2 - p}$  части корней по модулю не превосходят 1, то есть они равны косинусу и синусу угла поворота. Случай  $D > 0$  для рассматриваемой функции  $f$  не представляет интереса, поскольку можно показать, что необходимые значения  $p < -4$  достижимы только при фантастических соотношениях параметров  $a/b > 4e^5 \approx 594$ .

Определитель матрицы (12) всегда равен 1. Это означает, что система является консервативной, площадь фазового пространства сохраняется, детали начальных данных не забываются. Мы имеем свойство, часто называемое в синергетике *чувствительностью по отношению к параметрам* [17].

В силу сложности моделей вида (6) и (7), естественно начать с анализа их простейшего, линейного варианта. Пользуясь линейностью, будем искать решение в комплексном виде

$$x_n = e^{i(n\omega + \varphi)}, \quad (13)$$

чтобы в конце учесть лишь действительную часть этой записи  $x_n = \cos(n\omega + \varphi)$ . Для значений (13) легко вычисляется как приращение

$$x_n - x_{n-1} = e^{i(n\omega + \varphi)} (1 - e^{-i\omega}),$$

так и сумма

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k = e^{i\varphi} \frac{e^{in\omega} - 1}{e^{i\omega} - 1}.$$

Эти два выражения, очевидно, связаны линейным соотношением

$$x_n = x_{n-1} + AS_{n-1} + B, \quad (14)$$

в котором свободный член  $B$  тоже является комплексным, то есть и от него тоже надо будет сохранить лишь действительную часть. Подставим приращение и сумму в это соотношение

$$e^{i(n\omega + \varphi)} (1 - e^{-i\omega}) = Ae^{i\varphi} \frac{e^{in\omega} - 1}{e^{i\omega} - 1} + B$$

и, соответственно приравняв коэффициенты при членах, зависящих и не зависящих от  $n$ , находим параметры

$$A = (1 - e^{-i\omega}) (e^{i\omega} - 1) = 2(\cos \omega - 1) \leq 0,$$

$$B = \frac{Ae^{i\varphi}}{e^{i\omega} - 1} = e^{i\varphi} (1 - e^{-i\omega}) \Big|_{Re} = \cos \varphi - \cos(\varphi - \omega).$$

Таким образом, при конкретных значениях  $A$  и  $B$  мы имеем отображение вида (14). Для него множество образов любой точки образует эллипс в координатах  $(x, y)$  при иррациональном отношении  $\omega/\pi$ .

Обратимся теперь к фазовым портретам (рис. 3 для отображения (3) и рис. 4–7 для отображения (5)). В них видна большая структура, в которой траектории точек близки к эллиптическим.

Если бы мы имели динамическую систему, для которой изучаемое отображение было бы сечением Пуанкаре, то этот тип упорядоченности внутри регулярных островов соответствовал бы инвариантным торам. В приложении к смене элит это означает, что смена типа элиты «отличающейся и по числу пассионариев, и по объему производимого продукта», о которой говорит теория элит, не происходит.

Однако при других начальных данных  $(R, q)$  ситуация оказывается принципиально иной, именно той, о которой говорит теория элит. В этом случае около « $l$ -циклов» в диссипативной системе возникают « $l$ -торы». Каждый из этих  $l$ -островков может быть сопоставлен своему типу элиты. В следующем поколении происходит переход к другому типу. При соответствующих значениях параметров модель описывает именно эту картину, для описания которой она и создавалась. Следует отметить, что, меняя параметры, мы можем изменить число «островков», определяющих динамику элиты. Кроме того, мы не рассматриваем задачи управления. Однако результаты расчета показывают, что, сократив число «пассионариев» или продукт общества (а в некоторых случаях и увеличив его), можно изменить временную динамику эволюции элит, имея в виду либо стабильность, либо разнообразие, позволяющее более эффективно учитывать происходящие перемены.

Однако консервативная модель существенно богаче диссипативной. В ней есть ещё две важные особенности. Первая связана с тем, что в ней существуют непериодические, хаотические траектории, тогда как в диссипативной модели хаоса авторам обнаружить не удалось. Пример показан на рис. 3 для  $a = 5.8$ ,  $b = 0.2$ .

Следует отметить, что в рассматриваемой модели смены элит есть несколько непересекающихся «областей хаоса», расположенных в разных частях фазового пространства, которые могут существенно отличаться своими характеристиками.

Замечательной чертой наблюдаемого стохастического моря является его фрактальный характер. На рис. 3 видно, что оно оказывается пронизано островками упорядоченности все меньшего размера и большего периода. В рамках модели это означает, что в зависимости от начальных данных есть более и менее вероятные варианты квазипериодической элитной динамики.

Динамика и представление об островах становятся гораздо яснее в координатах  $(x, y)$  (рис. 4). Здесь видно наличие системы островов, характеризующих разные циклы смены элит. Очень важным параметром является величина  $a$ , характеризующая активность пассионарного класса.

Фазовые траектории для разных значений  $a$  представлены на рис. 4–7. Чем выше эта активность, тем больше область простейшего (близкого к тому, которое есть в линейной системе) режима смены элит. Чем меньше  $a$ , тем сложнее и длиннее циклы смены элит.

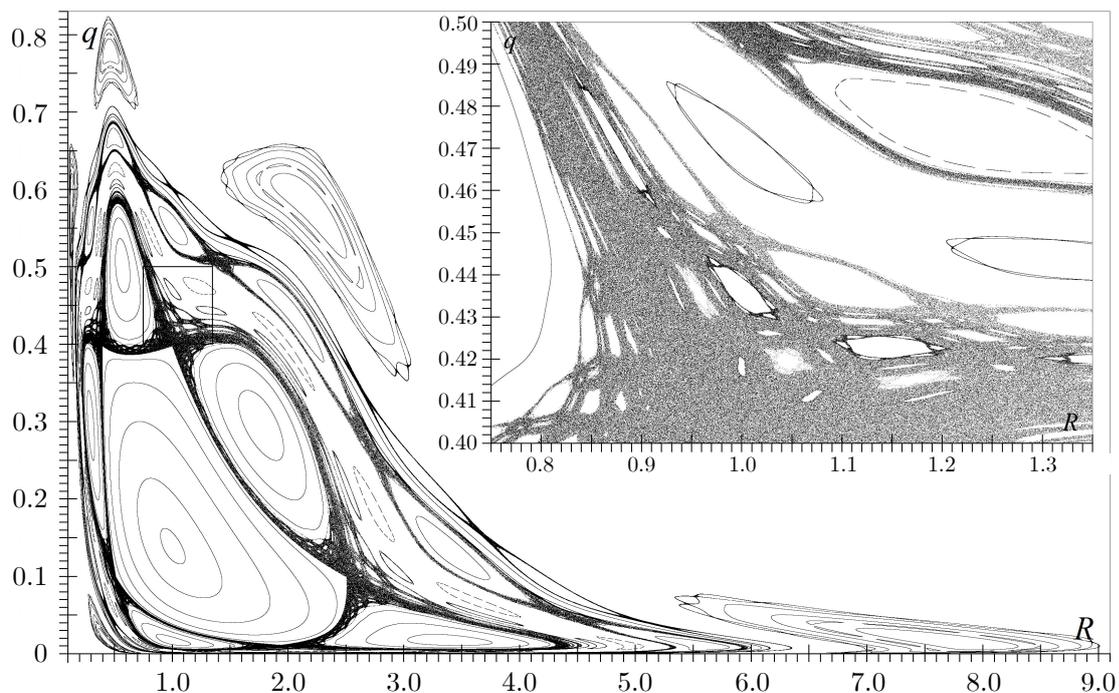


Рис. 3. Траектории различных начальных точек отображения (3) при  $a = 5.8$ ,  $b = 0.2$  в координатах  $(R, q)$ . Одни начальные данные рождают квазипериодическое движение вокруг неподвижных точек (ему соответствуют замкнутые линии), другие — квазипериодическое движение вокруг циклов (ему соответствуют наборы замкнутых линий), а третьи — хаотическое движение (ему соответствуют шлейфы точек). На врезке увеличен выделенный фрагмент хаотической области (при этом число итераций увеличено с 500 тыс. до 5 млн). Обратим внимание, что находящиеся рядом с ним траектории оказались при увеличении не замкнутыми линиями, а тоже хаотическими областями, что следует из самопересечения

Fig. 3. Trajectories of different initial points of mapping (3) for  $a = 5.8$ ,  $b = 0.2$  in coordinates  $(R, q)$ . sets of closed lines), and the third — chaotic movement (it corresponds to trails of points). The inset shows a zoomed-in fragment of a chaotic region. Note that the trajectories next to it turned out to be not closed lines when magnified, but also chaotic regions, which follows from self-intersection

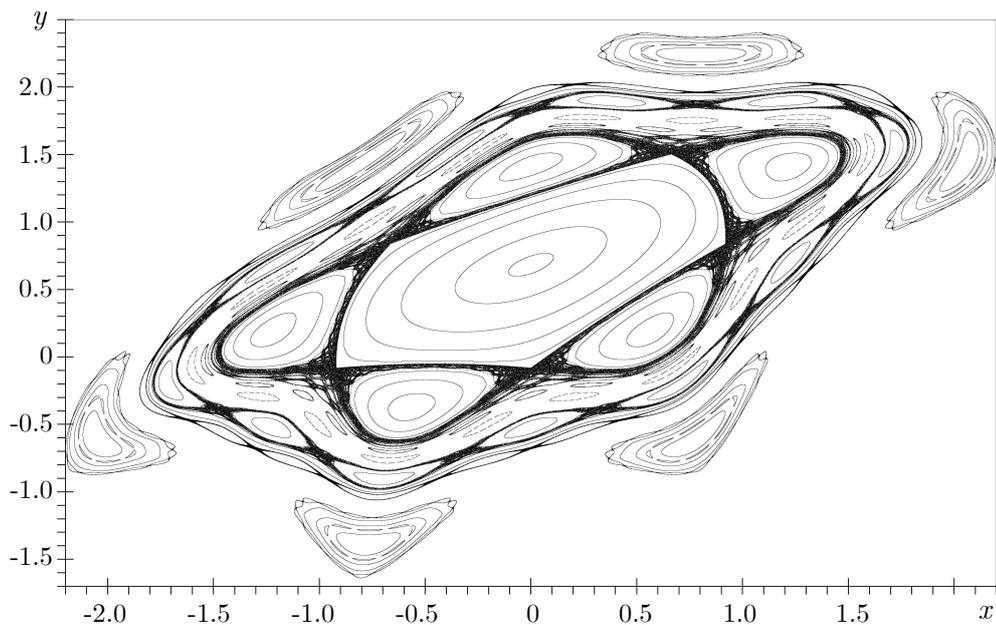


Рис. 4. Траектории с рис. 3 в координатах  $(x, y)$ . Обратим внимание на наличие основной большой области, где не происходит эволюции поколений, на большой цикл порядка 5, где такие перемены происходят, а также на многообразие малых циклов самых разных порядков

Fig. 4. Trajectories from fig. 3 in coordinates  $(x, y)$ . Let us pay attention to the presence of the main large area where there is no evolution of generations, to the large cycle of order 5, where such changes occur, as well as to the variety of small cycles of various orders

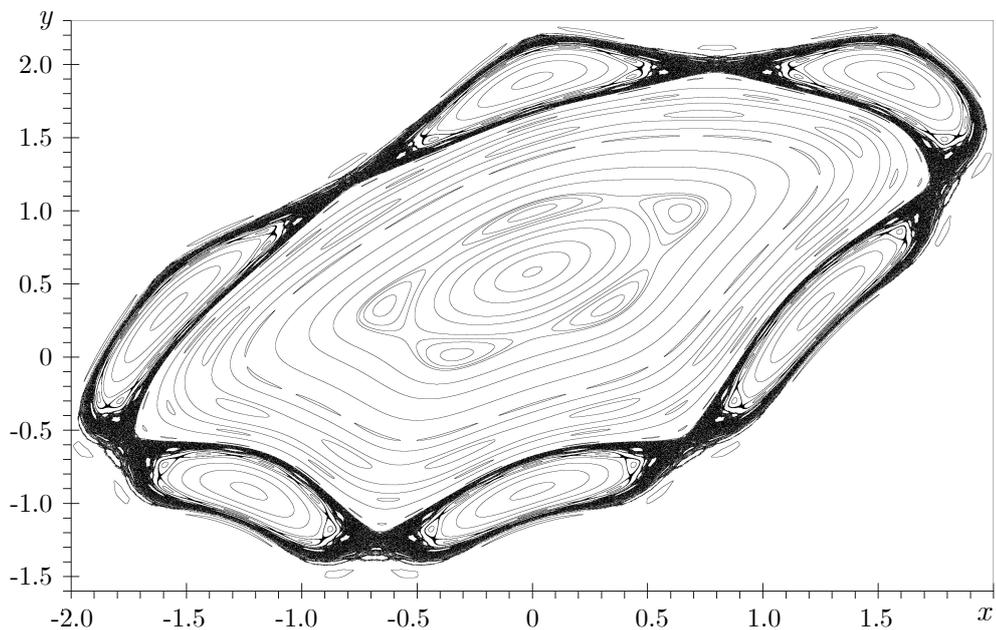


Рис. 5. Траектории различных начальных точек отображения (3) в координатах  $(x, y)$  для  $a = 4.8$ ,  $b = 0.2$ . Этот случай отображает ситуацию, в которой активность пассивного слоя снижена. Размер областей циклов изменился, но в целом структура осталась той же

Fig. 5. Trajectories of different starting points of the mapping (3), for  $a = 4.8$ ,  $b = 0.2$ . This case reflects a situation in which the activity of the passive layer is reduced. The size of the loop areas has changed, but the overall structure remains the same

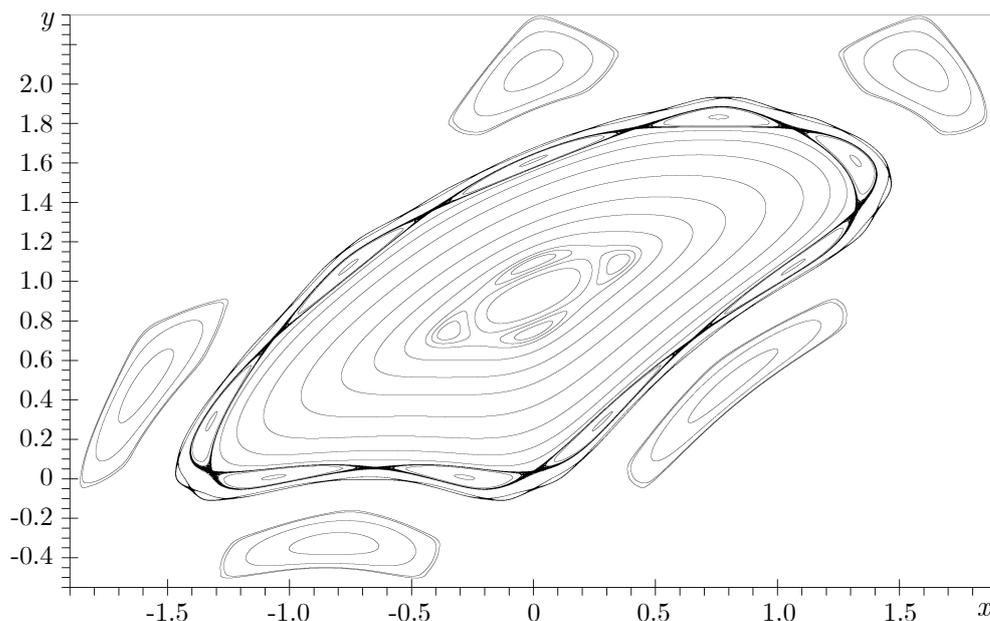


Рис. 6. Траектории различных начальных точек отображения (3) в координатах  $(x, y)$  для  $a = 10, b = 0.2$ , что соответствует высокой активности пассионарного класса. Области, в которых возможны квазипериодические циклы смены элит или квазипериодический режим, занимают много меньше места в фазовом пространстве

Fig. 6. Trajectories of different starting points of the mapping (3), for  $a = 10, b = 0.2$ , which corresponds to the high activity of the passionate class. Areas in which quasi-periodic cycles of elite change or a quasi-periodic regime are possible occupy much less space in the phase space

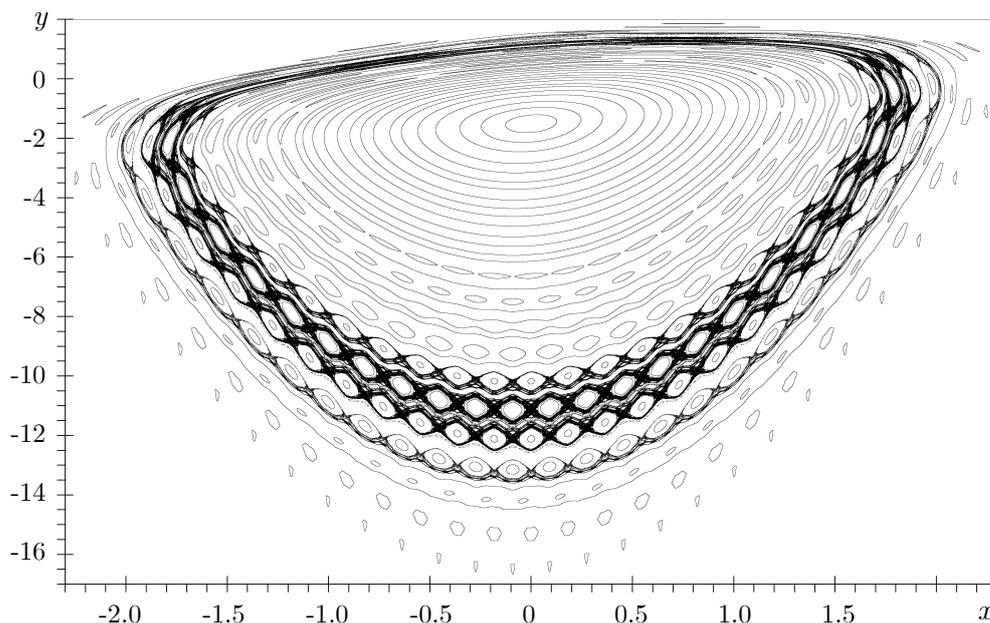


Рис. 7. Траектории различных начальных точек отображения (3) в координатах  $(x, y)$  для  $a = 1, b = 0.2$ , что соответствует низкой активности креативного класса. Виден качественный эффект — наличие большого количества траекторий, соответствующих большим циклам, а также — изменение величины  $q$  практически от 0 до 1

Fig. 7. Trajectories of different starting points of the mapping (3), for  $a = 1, b = 0.2$ , which corresponds to a low activity of the creative class. A qualitative effect is seen — the presence of a large number of trajectories corresponding to large cycles, as well as — a change in the value of  $q$  practically from 0 to 1

Вторая интересная особенность связана с наличием у модели области, где ее поведение неустойчиво (рис. 8).

Пусть, например,  $R \gg 1$  и  $q \ll 1$ , то есть  $x > 0$  и  $y > 0$ . При этом  $x$  убывает, пока выполнено  $f(y) < 0$ , а  $y$  возрастает. На каком-то шаге  $x$  становится отрицательным и  $y$  тоже начинает убывать. Это приводит к тому, что становится  $f(y) > 0$ , что приводит к дальнейшему возрастанию  $x$ , после перехода которого через 0 начинает возрастать и  $y$ . И всё повторяется. Важно, что приращения, которые получают эти переменные, — большие числа, из-за чего  $x$  за небольшое число шагов (чаще всего за 1) проскакивает мимо 0, что ведет к переключению между случаями  $q \ll 1$  и  $1 - q \gg 1$  (см. рис. 7). Аналогичным образом,  $y$  быстро проскакивает через точку смены знака  $f(y)$ , чем переключаются случаи  $R \gg 1$  и  $R \ll 1$ . Другими словами, величина  $R$  в этой модели может неограниченно возрастать.

Такая динамика имеет свою интерпретацию в рамках теории элит. Она описывает революционную ситуацию, которую отражает пословица: «Не было ни гроша, да вдруг алтын». При низком уровне общественного продукта и почти полном отсутствии элиты значительные успехи приводят к тому, что «пассионариями становятся почти все». Очевидно, здесь следует учитывать ограничивающие факторы, — пределы использования применяемых технологий (1) или появление большого количества «гармоников» в терминах Л. Н. Гумилёва, стремящихся сочетать личные и общественные интересы. Рассматриваемая модель их не описывает.

Таким образом, исследование консервативной модели показывает, что она обладает мультистабильностью, — в зависимости от начальных данных  $(R_0, q_0)$  она может описывать и стабильные (без качественных изменений), и квазипериодические, и хаотические режимы смены элит рассматриваемого общества.

Модель обладает чувствительностью по отношению к параметрам. Наличие островов упорядоченности в хаотическом море означает возможность перехода от хаотических к квазипе-

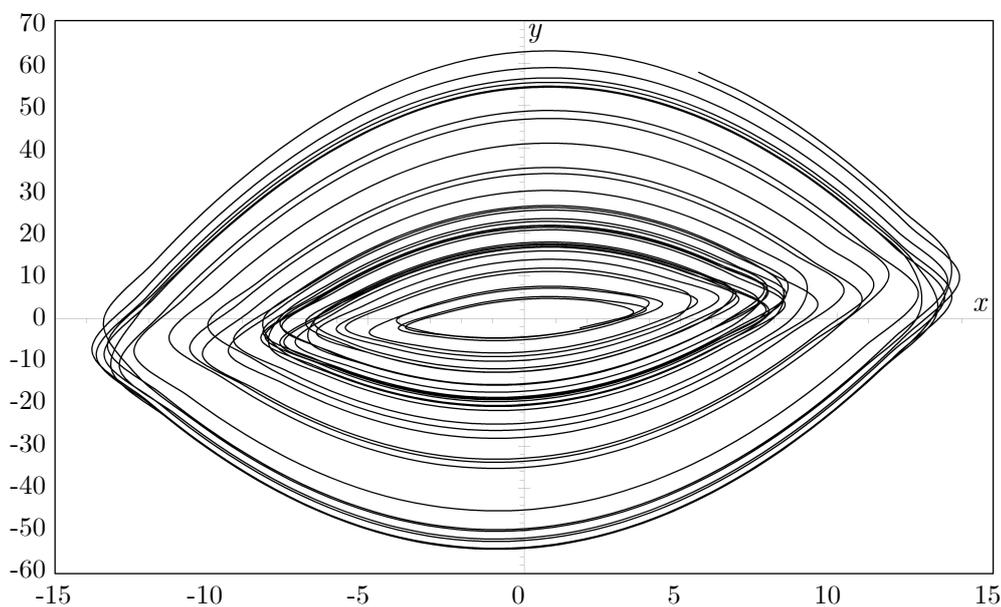


Рис. 8. Динамика траектории, уходящей на бесконечность. Здесь  $a = 5.8$ ,  $b = 0.2$ ,  $R_0 = 6$ ,  $q_0 = 0.9$ . Такая циклическая динамика соответствует очень быстрым переходам  $q$  между значениями очень близкими то к 0, то к 1, а  $R$  — между очень большими и малыми значениями. Движение происходит в положительном направлении (против часовой стрелки)

Fig. 8. Dynamics of a trajectory going to infinity. Here  $a = 5.8$ ,  $b = 0.2$ ,  $R_0 = 6$ ,  $q_0 = 0.9$ . Such cyclic dynamics corresponds to fluctuations  $q$  between values very close to 0, then to 1, and  $R$  — between very large and small values. The movement is in the positive direction (counterclockwise)

риодическим режимам смены элиты при сколь угодно малом изменении параметров. Последнее может рассматриваться как один из недостатков исследованной модели.

Вместе с тем, такая динамика прекрасно соответствует представлениям многих исследователей и философов об уникальности, неповторимости многих исторических траекторий и происходящих событий.

## 5. Система с шумом

Принципиальной с точки зрения моделирования является наблюдаемость предсказанных эффектов. Негрубые системы, обладающие чувствительной зависимостью от входящих параметров, как правило, этим свойством не обладают. Малые изменения параметров могут приводить к качественному изменению траектории. Тем не менее у теории поколений есть ряд серьезных подтверждений. С чем же они связаны?

Для социальных систем характерно наличие многих случайных факторов при переходе к третьему «повседневному» масштабу времени, введенному Ф. Броделем [1]. Их естественно учесть, введя малый случайный шум в уравнение, описывающее общественный продукт

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n(aq_n + b) + \varepsilon_n, \\ q_{n+1} &= q_n^{R_{n+1}}. \end{aligned}$$

В качестве параметра для простоты можно выбирать  $\varepsilon_n$  равномерно распределенной на интервале  $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ . Пример поведения системы с шумом показан на рис. 9.

Однако здесь наблюдается другой качественный эффект. Существенными являются не только начальные данные и уровень шума, но и  $N$  — длина выборки, на которой мы анализируем модель, и конкретная последовательность псевдослучайных чисел, определяющих  $\varepsilon_n$ . На рис. 9 видно, что в течение длительного времени последовательность  $(x_n, y_n)$  может быть близка к циклической.

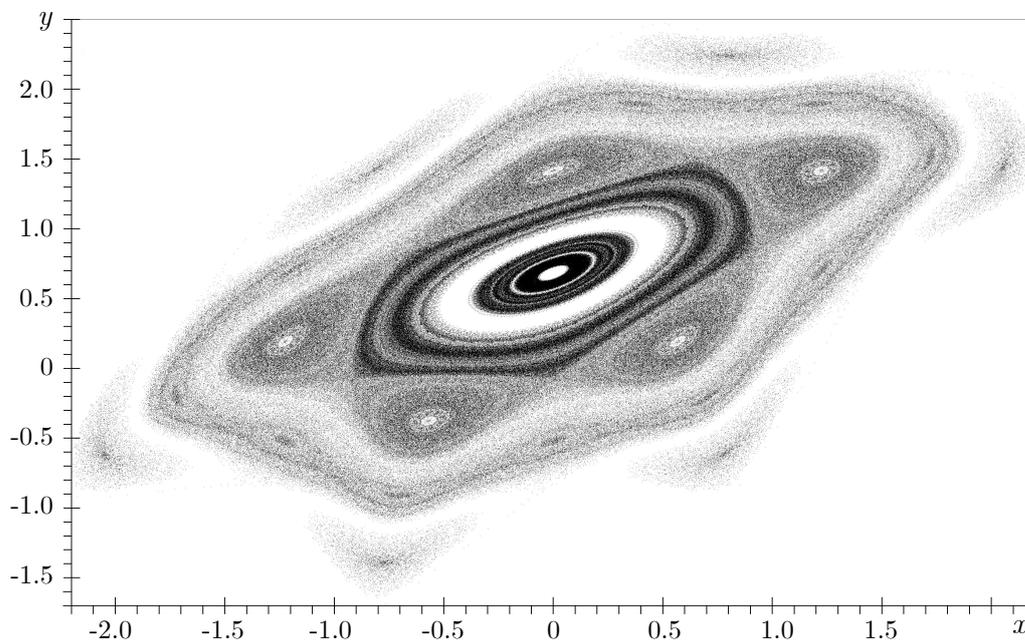


Рис. 9. Картина в координатах  $(x, y)$  для системы с шумом. Здесь  $a = 5.8$ ,  $b = 0.2$ ,  $N = 10^5$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$

Fig. 9. Picture in coordinates  $(x, y)$  for a system with noise. Here  $a = 5.8$ ,  $b = 0.2$ ,  $N = 10^5$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$

На больших характерных временах она может оказаться близка к хаотической траектории. На еще больших — могут возникнуть неограниченные решения. Как правило, чем больше уровень шума, тем из большей области начальных данных траектория уходит на бесконечность. Другими словами, в этой модели есть своеобразный горизонт прогноза — на небольших временах смену элит можно предсказать, несмотря на шум. На больших — решающей становится последовательность случайностей, с которой сталкивается общество.

## 6. Обсуждение и связь с концепциями истории и социальной динамики

Революции готовят гении, делают романтики, а её плодами пользуются проходимцы.

*О. Бисмарк*

История и социальная динамика складывается в результате взаимодействия множества акторов, участников локальных взаимодействий, наделённых психикой, сознанием, имеющих собственные локальные цели и интересы. Из этих многочисленных контактов состоит эволюционный событийный исторический поток социума в целом, и каждой его социальной подсистемы в отдельности. Общество самоорганизуется. В нём постоянно возникают и разрушаются различные институциональные и идеологические структуры. Эти макросоциальные явления О. Г. Бахтияров обозначил термином Большие Процессы [24]. Он привёл аналогию с метаморфозом гусеницы, когда выполнившая свои функции гусеница окукливается и вновь превращается в аморфную клеточную массу, из которой дифференцируется новое существо. При этом отдельные клетки перестраиваются под действием локальных причин и не осознают свою вовлеченность в большой процесс в целом. Элементы социальных систем — люди, хоть и наделены психикой, разумом и сознанием, но также вовлечены в локальные взаимодействия и в большинстве своём не осознают, что являются клетками, формирующими большой исторический процесс в момент его свершения. Некоторая минимально целостная аналитика, как правило, появляется позже отдельной произошедшей фазы большого процесса. Тем не менее научными средствами можно попытаться осуществить некоторый прорыв к сути происходящих макросоциальных всплесков и циклов. Одной из таких попыток является представленная работа. Использование математического аппарата в данном случае не может быть направлено на прогнозирование течения большого процесса по той простой причине, что он, будучи темпоральным кооперативным самоорганизационным явлением, свершается, а его конкретный сценарий предельно чувствителен к начальным и текущим значениям переменных и параметров. Его конкретный ход не предопределён и, таким образом, в отношении этих процессов теряет смысл само понятие количественного прогноза. Гораздо более важным назначением математического моделирования в данном случае выступает понимание механизма происходящего явления и определения точек воздействия на большой процесс.

Диссипативная и консервативная модели, по сути, отражают два принципиально разных взгляда на описание исторического процесса. В физике в течение многих лет боролись концепции близкодействия и дальнодействия. Этот процесс сейчас происходит и в математической истории и социодинамике.

Диссипативная модель исходит из того, что детали начальных данных будут забыты. В теории элит также стремятся мыслить в рамках трех поколений. Внуки могут исправить ошибки, которые сделали деды. Этой точки зрения придерживаются многие историки, а также исследователи, стремящиеся использовать идеи близкодействия в этой области [1–4]. С их точки зрения, бесполезно и не нужно сетовать на реформы Петра или выбор религии Владимиром, рассматривая сегодняшние геополитические и геоэкономические проблемы. Эти события следует трактовать как начальные данные для системы, описывающей историческую траекторию.

Действия нынешнего и нескольких следующих поколений могут изменить положение дел. Трудности можно рассматривать и как непреодолимый барьер, и как возможность для желаемых перемен.

«Дальнодействие» в истории связано с рядом религиозных культов, с астрологией, с теориями ряда историков, например, выделяющих 100-летние, 400-летние и ещё более длинные циклы исторического развития. Обзор таких взглядов дан в книге [17]. Этот подход повторяет во многом взгляд современной теоретической физики, в основе которой лежат представления о симметрии, а значит, о законах сохранения. В этом контексте игнорировать деятельность Петра и Владимира, объясняя сегодняшние события, нельзя. Действия этих людей определили нынешние реалии. Из этого во многом исходит альтернативная история.

Проблема при таком подходе возникает в том, что, в отличие от физики, симметрии и законы сохранения для такого описания истории не предъявлены.

Исследование диссипативной системы с «отсеиванием части элиты» с шумом, исходящей из представлений Ф. Броделя об иерархии исторических времен, показывает, что суждение о соперничестве «молекулярного» и «космического» человека в развитии общества, представления о цикличности смены элит, рассматриваемые социологическими теориями, а также возможность «исторического хаоса» хорошо описываются исследованной моделью. Замечательной особенностью рассмотренной модели является то, что эффект «смены элит» на определенных начальных данных описывается и в диссипативном, и в гамильтоновом варианте.

Важным и интересным отличием от большинства исследованных гамильтоновых систем является наличие неограниченных колебательных решений. В теории режимов с обострением показывается, что такие траектории могут быть отражением, промежуточной асимптотикой многих процессов в системах с сильной положительной обратной связью [25]. Здесь, вероятно, на части траектории описывается социально-экономическая неустойчивость, известная как «сингапурское чудо» [26]. Жесткий отбор и назначение на ключевые должности лучших, оценка не процесса, а результата работы привели в этой стране к большому экономическому эффекту. На части траектории в данной модели наблюдается схожая динамика, однако затем возникает кризис.

Другими словами, исследование модели показало, что она существенно сложнее и богаче, чем предполагалось в ряде гуманитарных теорий, описывающих динамику больших процессов, включающих смены элит.

## Список литературы

1. *Бродель Ф.* Материальная цивилизация, экономика и капитализм XV–XVIII вв. Т. 1. Структуры повседневности: возможное и невозможное. М.: Издательство «Весь мир», 2006. 592 с.
2. *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего. М: Наука, 1997. 285 с.
3. *Бадалян Л. Г., Криворотов В. Ф.* История. Кризисы. Перспективы: Новый взгляд на прошлое и будущее. М.: URSS, 2019. 288 с.
4. *Турчин П. В.* Историческая динамика: Как возникают и рушатся государства. На пути к теоретической истории. Изд. 3-е. М.: URSS, 2022. 366 с.
5. *Кондратьев Н. Д.* Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. Избранные труды. М.: Экономика, 2002. 767 с.
6. *Попова Е. П., Сагдеев Р. З.* Нелинейные модели динамо и изменения в характере солнечной цикличности // Материалы XIV ежегодной конференции «Физика плазмы в солнечной системе». 11–15 февраля 2019 г., Москва, Россия. М.: ИКИ РАН, 2019. С. 5.

7. *Ожиганова Е. М.* Теория поколений Н. Хоува и В. Штрауса. Возможности практического применения // Бизнес и образование в экономике знаний. 2015. № 1. С. 94–97.
8. *Strauss B., Strauss W., Howe N.* The History of America's Future, 1584 to 2069. New York: Morrow, 1991. 538 p.
9. *Гумилев Л. Н.* Этногенез и биосфера Земли. М.: АСТ: Астрель, 2006. 510 с.
10. *Шумпетер Й.* Капитализм, социализм и демократия. М.: Экономика, 1995. 540 с.
11. *Колесников А. В.* Инжиниринг сложных социальных систем в цифровом мире // Труды 1-й Международной конференции «Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности». 8–9 февраля 2018 г., Москва, Россия. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018. С. 81–87. DOI: 10.20948/future-2018-12.
12. *Колесников А. В.* Социодинамика цивилизационного кластера Союзного государства России и Беларуси: опыт применения метода цифровых протоконов на основе темпорального исчисления // Труды 3-й Международной конференции «Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности». 6–7 февраля 2020 г., Москва, Россия. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2020. С. 191–198. DOI: 10.20948/future-2020-16.
13. *Колесников А. В.* Нелинейная социодинамика конкурентных социотипов молекулярного и космического человека // Труды 4-й Международной конференции «Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности». 4–5 февраля 2021 г., Москва, Россия. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2021. С. 209–219. DOI: 10.20948/future-2021-19.
14. *Форрестер Д.* Мировая динамика. М.: ООО «Издательство АСТ»; СПб: Terra Fantastica, 2003. 379 с.
15. *Сиренко С. Н.* Опережающее педагогическое образование как инструмент управления будущим // Труды 4-й Международной конференции «Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности». 4–5 февраля 2021 г., Москва, Россия. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2021. С. 260–269. DOI: 10.20948/future-2021-22.
16. *Заславский Г. М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 296 с.
17. *Буданов В. Г.* Методология синергетики в постнеклассической науке и в образовании. Изд. 4. М.: URSS, 2017. 272 с.
18. *Тойнби А.* Постигание истории. М.: Айрис-Пресс, 2002. 640 с.
19. *Думас Х. С.* Теория КАМ: как это было. Краткое знакомство с содержанием, историей и значением классической теории Колмогорова–Арнольда–Мозера. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 440 с.
20. *Чернавский Д. С.* Синергетика и информация: Динамическая теория информации. М.: URSS, 2021. 304 с.
21. *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
22. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
23. *Meiss J. D.* Symplectic maps, variational principles, and transport // Rev. Mod. Phys. 1992. Vol. 64, no. 3. P. 796–848. DOI: 10.1103/RevModPhys.64.795.
24. *Бахтияров О. Г.* Большие Процессы и Аналитика [Электронный ресурс] // Аврора. 19.07.2021. Режим доступа: <https://aurora.network/articles/165-interv-ju/93038-bol-shie-protsessy-i-analitika> (дата обращения: 02.03.2022).
25. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. 544 с.
26. *Ли К. Ю.* Сингапурская история: 1965–2000 гг. Из третьего мира — в первый. М.: МГИМО-Университет, 2010. 656 с.

## References

1. Braudel F. Civilization and Capitalism, 15th-18th Century. Vol. I. The Structure of Everyday Life. New York: Harper and Row; 1992. 624 p.
2. Kapitsa SP, Kurdyumov SP, Malinetskii GG. Synergetics and Future Forecasts. Moscow: Nauka; 1997. 285 p. (in Russian).
3. Badalyan LG, Krivorotov VF. History. Crises. Perspectives: A New Look at the Past and the Future. Moscow: URSS; 2019. 288 p. (in Russian).
4. Turchin P. Historical Dynamics: Why States Rise and Fall. Princeton: Princeton University Press; 2018. 264 p.
5. Kondratyev ND. Large Conjoint Cycles and Foresight Theory. Selected Works. Moscow: Ekonomika; 2002. 767 p. (in Russian).
6. Popova EP, Sagdeev RZ. Nonlinear dynamo models and changes in the nature of solar cyclicity. In: Proceedings of the XIV Annual Conference «Plasma Physics in the Solar System». 11–15 February 2019, Moscow, Russia. Moscow: Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences; 2019. P. 5 (in Russian).
7. Ozhiganova EM. The theory of generations by N. Hove and W. Strauss. Possibilities of practical application. Business and Education in the Knowledge Economy. 2015;(1):94–97 (in Russian).
8. Strauss B, Strauss W, Howe N. The History of America's Future, 1584 to 2069. New York: Morrow; 1991. 538 p.
9. Gumilev LN. Ethnogenesis and the Biosphere of Earth. Moscow: AST: Astrel; 2006. 510 p. (in Russian).
10. Schumpeter J. Capitalism, Socialism and Democracy. New York: Harper & Brothers; 1942. 431 p.
11. Kolesnikov AV. Engineering of complex social systems in the digital world. In: Proceedings of the 1st International Conference «Futurity Designing. Digital Reality Problems». 8–9 February 2018, Moscow, Russia. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics; 2018. P. 81–87 (in Russian). DOI: 10.20948/future-2018-12.
12. Kolesnikov AV. Sociodynamics of a civilizational cluster of the Union State of Russia and Belarus: The experience of applying the method of digital protoconstructs based on temporal calculus. In: Proceedings of the 3rd International Conference «Futurity Designing. Digital Reality Problems». 6–7 February 2020, Moscow, Russia. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics; 2020. P. 191–198 (in Russian). DOI: 10.20948/future-2020-16.
13. Kolesnikov AV. Nonlinear sociodynamics of competitive sociotypes of molecular and cosmic human. In: Proceedings 4th International Conference «Futurity Designing. Digital Reality Problems». 4–5 February 2021, Moscow, Russia. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics; 2021. P. 209–219 (in Russian). DOI: 10.20948/future-2021-19.
14. Forrester JW. World Dynamics. Cambridge: Wright-Allen Press; 1973. 144 p.
15. Sirenko SN. Forward thinking pedagogical education as a tool for managing the future. In: Proceedings of the 4th International Conference «Futurity Designing. Digital Reality Problems». 4–5 February 2021, Moscow, Russia. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics; 2021. P. 260–269 (in Russian). DOI: 10.20948/future-2021-22.
16. Zaslavsky GM. The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems. 2nd Edition. Singapore: World Scientific; 2007. 328 p. DOI: 10.1142/p507.
17. Budanov VG. Methodology of Synergetics in Post-Non-Classical Science and in Education. 4th Edition. Moscow: URSS; 2017. 272 p. (in Russian).
18. Toynbee AJ. A Study of History. Vol. 1: Abridgement of Volumes I–VI. Oxford: Oxford University Press; 1988. 630 p.

19. Dumas HS. The KAM Story: A Friendly Introduction to the Content, History, and Significance of Classical Kolmogorov–Arnold–Moser Theory. Singapore: World Scientific; 2014. 380 p. DOI: 10.1142/8955.
20. Chernavskii DS. Synergetics and Information: Dynamic Information Theory. Moscow: URSS; 2021. 304 p. (in Russian).
21. Katok AB, Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press; 1995. 824 p. DOI: 10.1017/CBO9780511809187.
22. Schuster HG, Just W. Deterministic Chaos: An Introduction. 4th, Revised and Enlarged Edition. New Jersey: Wiley; 2006. 312 p.
23. Meiss JD. Symplectic maps, variational principles, and transport. Rev. Mod. Phys. 1992;64(3): 796–848. DOI: 10.1103/RevModPhys.64.795.
24. Bakhtiyarov OG. Big Processes and Analytics [Electronic resource]. Aurora. 19.07.2021 (in Russian). Available from: <https://aurora.network/articles/165-interv-ju/93038-bol-shie-protsessy-i-analitika> (cited 2022 Feb 3).
25. Akhromeeva TS, Kurdyumov SP, Malinetskii GG, Samarskii AA. Nonstationary Structures and Diffusion Chaos. Moscow: Nauka; 1992. 544 p. (in Russian).
26. Lee KY. The Singapore Story: Memoirs of Lee Kuan Yew. 1st Edition. New Jersey: Prentice Hall; 1998. 680 p.

*Колесников Андрей Витальевич* — родился в Риге (1961), окончил Белорусский технологический институт (1984). После окончания вуза работал в лаборатории теоретической генетики Института генетики и цитологии АН БССР. Занимался проблемами эволюции. На основе исследований самоорганизации и хаоса в эволюционных процессах подготовил и защитил кандидатскую диссертацию (1998) по философским наукам (философские вопросы естествознания). В настоящее время работает в Институте философии НАН Беларуси, заведующий отделом философии информационных и когнитивных процессов. Автор и соавтор ряда монографий. Философ и междисциплинарный исследователь. Разрабатывает и широко использует модели в форме игр континуальных клеточных автоматов с нелинейными правилами перехода. Развивает идеи философского космизма во взаимосвязи с современной синергетикой, нелинейной динамикой и теорией хаоса.



220072, Республика Беларусь, Минск, улица Сурганова, д. 1, корп. 2  
 Институт философии НАН Беларуси  
 E-mail: [kolesnikov@philosophy.by](mailto:kolesnikov@philosophy.by)  
 ORCID: 0000-0002-7620-0864  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 493074

*Малинецкий Георгий Геннадьевич* — родился в Уфе (1956). Окончил с отличием физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (1979). Доктор физико-математических наук (1990), профессор, заведующий отделом математического моделирования нелинейных процессов Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Один из ведущих специалистов в области нелинейной динамики, автор более 700 научных трудов, около 100 научно-популярных статей и книг, изданных в России и США. Создатель и руководитель специализации «Нелинейные процессы» в Московском физико-техническом институте, профессор Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана и Российского университета дружбы народов. Является вице-президентом Нанотехнологического общества России, действительным членом Академии военных наук РФ, членом Изборского клуба. Лауреат премии Правительства РФ в области образования (2002). В последние годы занимается мягким моделированием, системным анализом, прогнозом бедствий, катастроф и кризисных явлений на основе методов нелинейной динамики, а также теорией русел и джокеров, проблемами проектирования будущего.



Россия, 125047 Москва, Миусская площадь, д. 4  
 Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН  
 E-mail: [gmalin@spp.keldysh.ru](mailto:gmalin@spp.keldysh.ru)  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 100438

*Подлазов Андрей Викторович* — родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). После окончания МФТИ работает в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (2001) в области теории самоорганизованной критичности и теории масштабно-инвариантных процессов. Автор монографий «Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика» [М.: Наука, 2000. 432 с.] (в соавторстве с В. А. Владимировым, Ю. Л. Воробьевым, Г. Г. Малинецким и др.) и «Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды» [Изд.3/ Синергетика: от прошлого к будущему. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 280 с.] (в соавторстве с Г. Г. Малинецким и А. Б. Потаповым). Опубликовал 60 научных статей по направлениям, указанным выше, а также по демографии, математической истории и вопросам развития системы образования.



Россия, 125047 Москва, Миусская площадь, д. 4  
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН  
E-mail: tiger@keldysh.ru  
ORCID: 0000-0002-0328-3814  
AuthorID (eLibrary.Ru): 9492

*Сиренко Светлана Николаевна* — окончила механико-математический факультет Белорусского государственного университета, специальность «Математика» (1998). Кандидат педагогических наук (2003), доцент (2007). Основные направления научных исследований: теория и практика междисциплинарной интеграции в высшем образовании; опережающая педагогическая подготовка студентов; развитие функциональной грамотности школьников; проблемы повышения качества педагогической подготовки в классическом и педагогическом университете; проблемы преподавания математики и информатики в высшей школе; информационные технологии в образовании; компьютерное моделирование поведения сложных человекомерных систем. Автор более 150 научных и научно-методических работ, из них — 7 пособий, в том числе электронный учебник, коллективная монография.



Республика Беларусь, 220030 Минск, ул. Советская, 18  
Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка  
E-mail: sirenka@bvspu.by  
ORCID: 0000-0003-4089-1488  
AuthorID (eLibrary.Ru): 663187